UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Instituto de Física y Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Propiedades topológicas relativas en hiperespacios

TESIS

Para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

Fernando Fredy Bastida Arellanes

Director de Tesis

Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide

Codirector de Tesis

Dr. Jesús Díaz Reyes

Huajuapan de León, Oaxaca, Julio de 2021

A mi familia y amigos…

Agradecimientos

A mi madre, que ha sido siempre el motor que impulsa mis sueños y esperanzas.

A mis asesores el Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide y el Dr. Jesús Díaz Reyes, por su apoyo para la realización de esta tesis, más aún, agradezco el hecho de que hayan aceptado trabajar conmigo y dirigir este trabajo que me ha dado tantas satisfacciones.

A mis revisores, el Dr. Franco Barragán Mendoza, el Dr. Armando Romero Morales y el Dr. Sergio Palafox Delgado, quienes con sus comentarios han enriquecido enormemente este trabajo, pero sobre todo por tomarse el tiempo para revisarlo.

Finalmente, pero no por eso menos importantes, a mis amigos, quienes a pesar de nuestras diferencias, me han apoyado, aconsejado y compartido momentos importantes sobre la vida misma.

Índice general

Introducción **VII**

1. Preliminares **1**
1.1. Nociones de teoría de conjuntos 1
1.2. Conceptos básicos de topología 6
1.3. Conceptos básicos de hiperespacios 18

2. Axiomas relativos de separación y compacidad **23**
2.1. Axiomas relativos T_1 y T_2 y sus propiedades 24
2.2. Axiomas de regularidad y sus propiedades 28
2.3. Axiomas de normalidad y sus propiedades 33
2.4. Axiomas relativos de compacidad y propiedades 42

3. Axiomas relativos en hiperespacios **45**
3.1. Propiedades relativas de separación en $\mathrm{CL}(X)$ 45
3.2. Propiedades relativas de compacidad en $\mathrm{CL}(X)$ 50
3.2.1. Preguntas abiertas 53

Conclusiones **55**

Bibliografía **57**

Introducción

La temática de la tesis concierne a la rama de la Matemática denominada Topología, particularmente se estudian aspectos de la teoría de hiperespacios, con la notable diferencia que estos aspectos se abordarán mediante la teoría de propiedades topológicas relativas. Esto da como resultado, lo que se denomina teoría de *Propiedades topológicas relativas en hiperespacios*. A continuación explicamos a detalle.

Una propiedad topológica relativa se establece para un espacio topológico X y un subespacio $Y \subseteq X$, y es aquella que generaliza una propiedad global del espacio en el siguiente sentido: cuando Y coincide con X, entonces la propiedad relativa debe ser la misma que la global. Por ejemplo, una propiedad relativa de la propiedad de Hausdorff es la siguiente: dado un espacio topológico X y un subespacio Y de X, se dice que Y es *Hausdorff en* X si cualquier par de puntos diferentes $y_1, y_2 \in Y$, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Note que, efectivamente, si $Y = X$, estamos hablando de la propiedad *absoluta* de Hausdorff. Más aún, si en la definición anterior se considera $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$, entonces obtenemos otra versión relativa de la propiedad de Hausdorff, la cual se conoce como Y *fuertemente Hausdorff en* X (vea Definición 2.1.1). Así que de una sola propiedad topológica se podrían definir varias versiones relativas de ella.

Históricamente, la teoría de propiedades topológicas relativas fue iniciada en 1989 por A.V. Arhangelskii y H. M. M. Genedi en [5]. En particular, en dicho artículo fueron definidos varios tipos de propiedades relativas referente a los axiomas de separación, así como a la compacidad y algunas de sus variantes. Una exposición sumaria de este tema puede encontrarse en [3]. Debido a que esta teoría ha aportado grandes avances en topología, se continúan definiendo nuevas variantes relativas de los abarcados en [3], así como versiones relativas de otras propiedades topológicas no incluidas en [3], por ejemplo, las que provienen de axiomas de numerabilidad, funciones cardinales, ciertas propiedades dinámicas, etcétera.

Por otra parte, la teoría de hiperespacios se ha convertido en una rama de la topología bastante fructífera en cuanto a sus aportes dentro de la misma topología como en otras áreas. Recordemos que un hiperespacio de un espacio topológico X es una colección de subconjuntos de X considerada con alguna topología. La teoría de los hiperespacios tiene sus orígenes alrededor de 1900, con los trabajos de F. Hausdorff [15] y L. Vietoris [26]. Dado un espacio topológico X, dentro de los hiperespacios más conocidos tenemos el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ que consiste de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados en X. Este hiperespacio ha sido estudiado y considerado con varias topologías. Sin embargo, en este trabajo, únicamente lo tomamos con la topología de Vietoris, pues es la topología más estudiada en los hiperespacios y resulta de mayor interés para un público más amplio. Más aún, el uso de la topología de Vietoris ha permitido desarrollar grandes aportes en la resolución del siguiente problema clásico:

Problema $(*)$ Dado un espacio topológico X, estudiar las posibles conexiones entre las siguiente proposiciones:

(1) $\mathrm{CL}(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;

(2) X tiene la propiedad $\mathcal{P}$,

para alguna propiedad topológica $\mathcal{P}$.

Existe una gran variedad de posibilidades de considerar la propiedad $\mathcal{P}$, por ejemplo, puede ser cierta propiedad dinámica o una propiedad que involucre funciones cardinales. Sin embargo, un camino natural para la investigación es atacar el Problema $(*)$ vía propiedades topológicas relativas. Precisamente, atender el siguiente problema.

Problema $(**)$ Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Analizar las posibles relaciones entre las siguientes proposiciones:

(1) $H(Y)$ tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en $\mathrm{CL}(X)$;

(2) Y tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en X,

donde $\mathcal{R}$ es alguna propiedad topológica relativa y $H(Y)$ es un subespacio de $\mathrm{CL}(X)$.

Claramente, el Problema $(**)$ es mucho más general que el Problema $(*)$. De esta forma, usando propiedades relativas se podrían generalizar resultados clásicos que se conocen y que se resuelven en el Problema $(*)$, con propiedades globales. Un primer estudio de este tópico y que se atiende el Problema $(**)$ se encuentra [11], en donde al hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ se le dota de la topología denominada “hit and miss” y $H(Y)$ es tomado como el subespacio particular de $\mathrm{CL}(X)$, definido como el conjunto de los elementos en $\mathrm{CL}(X)$ contenidos en Y, y que en esta tesis lo denotamos por Y^+.

En el presente trabajo, con el objetivo de ilustrar algunas soluciones del Problema $(**)$, exponemos los resultados relevantes de [11], considerando el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ con la topología de Vietoris, con la finalidad de hacerlos accesibles para un público amplio. Además, en la medida de lo posible, hacemos una exposición detallada, pensando en que incluso los estudiantes de matemáticas que hayan asistido a un curso básico de topología, logren captar la esencia general de esta teoría.

En resumen, en esta tesis abordamos el problema de hiperespacios descrito previamente, restringiéndonos, debido a lo amplio del tema, a las propiedades topológicas relativas concernientes a axiomas de separación y compacidad. Cabe señalar que el estudio de propiedades relativas en hiperespacios es un tema actual de investigación, el cual ha brindado frutos interesantes en el desarrollo de la topología. En cuanto a la teoría de propiedades relativas, Capítulo 2, se pretende subsanar los estudios poco exhaustivos y dispersos que se encuentran en la literatura de estas propiedades. Otro de nuestros fines es que el trabajo resulte lo más completo posible y que contenga los resultados fundamentales y más sobresalientes de estos temas, dirigida tanto para alumnos como profesores.

En el presente escrito utilizamos principalmente la notación empleada en [13] y de manera general, el trabajo de tesis está dividido, después de la Introducción, en tres capítulos. En el primero, hacemos un recuento de algunos hechos básicos de teoría de conjuntos, de topología y hechos fundamentales de la teoría de hiperespacios. La presentación es austera, considerando un mínimo de demostraciones. Sólo es para adentrar el lector en la notación y en las nociones que empleamos a lo largo del trabajo.

A su vez, el segundo capítulo está divido en cuatro secciones, cada una corresponde al análisis de las nociones de separación relativas en el siguiente orden: las del tipo T_1 y T_2, las del tipo regularidad, las del tipo normalidad y las del tipo compacidad. En cada sección, brindamos ejemplos, equivalencias, analizamos propiedades y resumimos las relaciones que guardan las definiciones correspondientes en diagramas, para indicar con flechas las posibles inclusiones de estas clases de espacios.

Finalmente, en el tercer capítulo conjuntamos los conocimientos adquiridos en las dos secciones anteriores y procedemos al análisis de las propiedades relativas mencionadas previamente, en el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ de un espacio topológico X y su subespacio Y^+, que, como hemos mencionado, es el conjunto de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X que están contenidos en Y. En esta misma sección incluimos una subsección dedicada a dar a conocer una serie de preguntas abiertas que hacen aún más interesante el estudio de las propiedades relativas en hiperespacios y que muestran los posibles caminos que se pueden seguir, incluso a nivel de investigación en esta rama de la topología.

Propiedades topológicas relativas en hiperespacios

Fernando Fredy Bastida Arellanes

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos, por completitud de la tesis, algunos hechos generales conocidos. La notación que empleamos es la estándar de la matemática actual. Para las notaciones, definiciones y demostraciones no establecidas el lector puede consultar cualquier libro de topología. Nosotros recomendamos [13].

Sección 1.1

Nociones de teoría de conjuntos

En esta tesis, designamos a los conjuntos con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$. Las familias de conjuntos las denotamos por medio de letras caligráficas mayúsculas: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ En otro caso haremos la especificación de lo que represente alguna notación particular.

Los siguientes símbolos serán empleados en la tesis:

$\subseteq$	es un subconjunto de
$\in$	es un elemento de
$\notin$	no es un elemento de
$\mathbb{N}$	el conjunto de números naturales
$\mathbb{Z}$	el conjunto de números enteros
$\mathbb{Q}$	el conjunto de números racionales
$\mathbb{I}$	el conjunto de números irracionales
$\mathbb{R}$	el conjunto de números reales
$\mathbb{R}^n$	el conjunto $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
$\emptyset$	el conjunto vacío
$\mathbb{P}(X)$	el conjunto potencia de un conjunto X.

Definición 1.1.1. Se dice que dos conjuntos A y B son *ajenos* si $A \cap B = \emptyset$.

En esta tesis, "conjunto", "familia" y "colección" son sinónimos. A continuación, definimos los conceptos de unión e intersección de conjuntos.

Definición 1.1.2. Sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos de algún conjunto X, indexada por un conjunto de índices I.

(1) La *unión* de la familia $\mathcal{F}$, o dicho de otra forma, la *unión* de los conjuntos F_α, se denota por:
$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{F_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha$$
y es el conjunto $\{x \in X : x \in F_\alpha, \text{ para algún } \alpha \in I\}$.

(2) La *intersección* de la familia $\mathcal{F}$, o dicho de otra forma, la *intersección* de los conjuntos F_α, se denota por:
$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{F_\alpha : \alpha \in I\} = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$
y es el conjunto $\{x \in X : x \in F_\alpha, \text{ para todo } \alpha \in I\}$.

Observación 1.1.3. En la Definición 1.1.2, para el caso particular cuando la familia $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, la unión de los conjuntos F_i, se denota por:

$$F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n = \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

Para la intersección de los conjuntos F_i, usamos la notación:

$$F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_i.$$

Ejemplo 1.1.4. Para cualquier conjunto X, se cumple que $X = \bigcup \mathbb{P}(X)$ y también que $X = \bigcup \{\{x\} : x \in X\}$.

Ejemplo 1.1.5. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $F_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$. Se tiene que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \emptyset$.

Definición 1.1.6. Sean X un conjunto y A un subconjunto de X. Se define el *complemento* de A en X, denotado por $X \setminus A$, como el conjunto $\{x \in X : x \notin A\}$.

Las afirmaciones en el siguiente Teorema 1.1.7, son comúnmente conocidas como las leyes de *De Morgan*. Su demostración, no representa dificultad y la omitimos.

Teorema 1.1.7. Supongamos que $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto X. Se cumple que:

(1) $X \setminus (\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\}) = \bigcap\{X \setminus A_\alpha : \alpha \in I\}$, y

(2) $X \setminus (\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in I\}) = \bigcup\{X \setminus A_\alpha : \alpha \in I\}$.

Por otra parte, recordemos la noción de producto cartesiano de conjuntos.

Definición 1.1.8. Sean X y Y dos conjuntos. Se define el *producto cartesiano* de X y Y, denotado por $X \times Y$, como la colección de pares ordenados (x, y), donde $x \in X$ y $y \in Y$. Precisamente:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

El producto cartesiano de n conjuntos, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, es definido por:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

A continuación vamos a enunciar una de las equivalencias más importantes del *axioma de elección*: el Lema de Kuratowski-Zorn. Con este fin, recordemos previamente las siguientes definiciones.

Definición 1.1.9. Una *relación* R en un conjunto X es cualquier subconjunto del producto $X \times X$.

Notación 1.1.10. Cuando $(x, y) \in R$, entonces escribimos xRy.

Definición 1.1.11. Sea R una relación en un conjunto X. Se dice que:

(1) R es *reflexiva* si xRx para cada $x \in X$.

(2) R es *transitiva* si para cada $x, y, z \in X$, se tiene que si xRy y yRz, entonces xRz.

(3) R es *simétrica* si para cada $x, y \in X$, se tiene que si xRy, entonces yRx.

(4) R es *antisimétrica* si para cada $x, y \in X$, se tiene que si xRy y yRx, entonces $x = y$.

Ejemplo 1.1.12. Consideremos el conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Note que la relación usual $<$ "menor que" en $\mathbb{R}$, es una relación transitiva que no es reflexiva, no es simétrica y no es antisimétrica.

Definición 1.1.13. Se dice que R es un *orden parcial* en X si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

En este contexto, R es frecuentemente reemplazado por el símbolo $\leq$. Así, si $\leq$ es un orden parcial en X, decimos que $(X, \leq)$ es un *conjunto parcialmente ordenado.*

Definición 1.1.14. Dados un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ y $A \subseteq X$, se dice que A es un subconjunto *linealmente ordenado* (*totalmente ordenado* o *cadena*) en X si para cualesquiera $a, b \in A$, se cumple que $a \leq b$ o $b \leq a$.

Definición 1.1.15. Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq X$. Se dice que:

(1) un elemento $x_0 \in X$ es una *cota superior de* A, si para cualquier $a \in A$ se cumple que $a \leq x_0$; y

(2) $m \in X$ es un *elemento maximal de* X, si dado $x \in X$ tal que $m \leq x$, entonces $x = m$.

Lema 1.1.16 (Lema de Kuratowski-Zorn)**.** Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si cualquier subconjunto linealmente ordenado $A \subseteq X$ tiene una cota superior, entonces X tiene un elemento maximal.

Para finalizar esta sección, indicamos algunos conceptos rudimentarios de la cardinalidad de conjuntos.

Definición 1.1.17. Un conjunto no vacío X es *equipotente* a un conjunto Y si existe una función biyectiva de X en Y.

Parte fundamental en la teoría de conjuntos es poder contar la cantidad de elementos que tiene un conjunto X.

Notación 1.1.18. Si X es un conjunto. La *cardinalidad* de X o el número de elementos que posee X, se denota por $|X|$.

Ejemplo 1.1.19. Sean $X = \{1, 2, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$ y $Z = \{6, 9, 2, 7, 9, 10\}$. Se tiene que $|X| = 3$, $|Y| = 3$ y $|Z| = 6$.

Claramente, los conjuntos anteriores son *finitos*, sin embargo, la mayoría de los conjuntos importantes con los que se trabaja no son finitos.

Observación 1.1.20. Sean X y Y dos conjuntos. La igualdad $|X| = |Y|$, se cumple si y sólo si X y Y son equipotentes.

Note que en el Ejemplo 1.1.19, $|X| = |Y|$, pero $|X| \neq |Z|$.

Notación 1.1.21. En esta tesis se usarán los siguientes símbolos:

(1) $\aleph_0$ para representar la cardinalidad de $\mathbb{N}$, en otras palabras $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

(2) $\mathfrak{c}$ para representar la cardinalidad de $\mathbb{R}$, esto es, $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Definición 1.1.22. Sean X y Y dos conjuntos.

(1) Decimos que $|X| \leq |Y|$ si existe una función inyectiva de X en Y.

(2) Si $|X| \leq |Y|$ y $|X| \neq |Y|$, entonces escribimos $|X| < |Y|$.

Note que $|X| < |Y|$ significa que es posible encontrar una función inyectiva de X en Y, pero no existe una función biyectiva entre X y Y.

Ejemplo 1.1.23. Sean X y Y conjuntos cualesquiera.

(1) Si $Y \subseteq X$, entonces $|Y| \leq |X|$ puesto que la función inclusión $i_Y : Y \to X$ es inyectiva.

(2) Si $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{5, 3, 7, 9, 1\}$, claramente $|X| \leq |Y|$, sin embargo, cualquier función de X a Y no es biyectiva, por lo que $|X| < |Y|$.

Definición 1.1.24. Sea X cualquier conjunto. Se dice que:

(1) X es un conjunto *finito* si $|X| < \aleph_0$. De lo contrario decimos que X es *infinito.*

(2) X es numerable si $|X| \leq \aleph_0$. En otro caso se dice que X es *no numerable.*

En vista de la parte (1) de la Notación 1.1.21, y de (2) de la Definición 1.1.24, se tiene que el conjunto de los números naturales es numerable. Más aún, se sabe lo siguiente.

Teorema 1.1.25. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|$.

Aunque los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinitos numerables, existe otro conjunto, bien conocido, que no lo es.

Teorema 1.1.26. Se cumple que $\aleph_0 < |\mathbb{R}|$, esto es, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Los siguientes resultados son centrales en la teoría de conjuntos.

Teorema 1.1.27 (Cantor)**.** Para cada conjunto X, se tiene que $|X| < |\mathbb{P}(X)|$.

Teorema 1.1.28. Sea X un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{m}$, se cumple que $|\mathbb{P}(X)| = 2^{\mathfrak{m}}$.

Finalmente, enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.29. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Sección 1.2

Conceptos básicos de topología

Con la finalidad de empezar a adentrarnos en los temas principales de la tesis, brindamos algunas nociones básicas de Topología general. Nuevamente indicamos que los conceptos o demostraciones faltantes se encuentran casi en cualquier libro de topología.

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $\tau \subset \mathbb{P}(X)$ es una *topología sobre* X si satisface:

(1) $\emptyset, X \in \tau$.

(2) Si $A_1, A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

(3) Si $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Observación 1.2.2. Al par (X, τ) le llamamos *espacio topológico* y a los elementos de τ les llamamos *conjuntos abiertos de* X. A lo largo de esta tesis en ocasiones escribimos: sea X un espacio topológico, entendiendo implícitamente que el conjunto X tiene asociada una topología τ.

Ejemplo 1.2.3. Se tienen los siguientes ejemplos básicos de espacios topológicos.

(1) Sean X un conjunto no vacío y $\tau = \mathbb{P}(X)$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico, a τ le llamamos *la topología discreta* y a (X, τ) *espacio discreto*.

(2) Sean X un conjunto no vacío y $\tau = \{X, \emptyset\}$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico, a τ le llamamos *la topología indiscreta* y a (X, τ) *espacio indiscreto*.

A continuación definimos la noción de subespacio topológico.

Definición 1.2.4. Sean (X, τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Definimos la *topología relativa de* Y como $\tau' = \{A \cap Y \mid A \in \tau\}$. La pareja (Y, τ') es un espacio topológico. Al subconjunto Y le llamamos *subespacio de* X.

Definimos ahora la importante noción en topología conocida como vecindad de un punto.

Definición 1.2.5. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $V \subseteq X$ es una *vecindad de* x si existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq V$.

A la familia de vecindades de x la denotamos por $\mathcal{V}(x)$. Además, notemos que $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathbb{P}(X)$ y por tanto, $\mathcal{V}(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(X))$.

Definición 1.2.6. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{V}(x)$ de vecindades de x es una *base para* X *en el punto* x si para cualquier vecindad V de x, existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $x \in U \subset V$.

Definición 1.2.7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Para cualquier $x \in X$, sea $\mathcal{V}(x)$ una base para X en x. La familia $\{\mathcal{V}(x)\}_{x \in X}$ se llama *sistema de vecindades para el espacio* X.

Algunas propiedades de las vecindades de un punto las encontramos en la siguiente proposición. En [13, pág. 13], se demuestra lo siguiente.

Proposición 1.2.8. Cualquier sistema de vecindades $\{\mathcal{V}(x)\}_{x \in X}$ en un espacio topológico X, cumple las siguientes propiedades:

(BP1) Para cada $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ y para cada $U \in \mathcal{V}(x)$, $x \in U$.

(BP2) Si $x \in U \in \mathcal{V}(y)$, entonces existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subset U$.

(BP3) Para cualesquiera $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x)$, existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $U \subset U_1 \cap U_2$.

A continuación vemos una forma de generar topologías a partir de un sistema de vecindades (vea [13, Prposición 1.2.3]).

Proposición 1.2.9. Sean X un conjunto y $\{\mathcal{V}(x)\}_{x\in X}$ una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones (BP1)-(BP3). Sea τ la familia de todos los subconjuntos de X que son uniones de subfamilias de $\bigcup_{x\in X}\mathcal{V}(x)$. Se tiene que τ es una topología para X y la familia $\{\mathcal{V}(x)\}_{x\in X}$ es un sistema de vecindades para el espacio topológico X.

Nota 1.2.10. La topología τ de la Proposición 1.2.9 se llama *topología generada por el sistema de vecindades* $\{\mathcal{V}(x)\}_{x\in X}$.

Una noción fundamental en topología es la de base de abiertos. Esta noción es útil pues nos facilita el uso de los conjuntos abiertos del espacio. Además, cualquier conjunto abierto lo podemos identificar por medio de elementos de la base.

Definición 1.2.11. Sean (X,τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}\subseteq\tau$. Decimos que $\mathcal{B}$ es *base para* τ (o que es una base para los conjuntos abiertos de X) si todo elemento de τ se puede escribir como la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. A los elementos de una base de abiertos los llamamos *abiertos básicos*.

Observación 1.2.12. Cuando no hay confusión omitimos la palabra abiertos y decimos simplemente *básicos*.

Ejemplo 1.2.13. Recordando el Ejemplo 1.2.3-(1), no es difícil demostrar que $\mathcal{B}=\{\{x\}\mid x\in X\}$ es una base para la topología discreta.

Definición 1.2.14. Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que que $\mathcal{B}$ es una *base para alguna topología* τ *de* X si

(1) $X=\bigcup\{B : B\in\mathcal{B}\}$,

(2) Para cada $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ y cada $x\in B_1\cap B_2$, existe $B\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B\subseteq B_1\cap B_2$.

La topología τ se dice que es *generada* por la base $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1.2.15. La familia $\mathcal{B}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ es una base para la *topología usual para* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.16. Consideremos el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Para cada punto $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y cada número real $\epsilon>0$, definimos $S_\epsilon(z)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}<\epsilon\}$. Luego, $\mathcal{B}=\{S_\epsilon(z) : z\in\mathbb{R}^2 \text{ y } \epsilon>0\}$ es una base para la *topología usual para* $\mathbb{R}^2$. Los conjuntos $S_\epsilon(z)$ son llamados *discos abiertos o bolas abiertas en* $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.2.17. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *subbase para* τ es una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos abiertos en X con la propiedad de que la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ forma una base para τ.

Observación 1.2.18. Si $\mathcal{S}$ es cualquier familia de subconjuntos de X, entonces la colección de intersecciones finitas de elementos de S forma una base para alguna topología sobre X.

Ejemplo 1.2.19. En $\mathbb{R}$, la familia $\mathcal{S} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para la topología usual de $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.20. Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in A$. Decimos que x es un *punto interior* de A, si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$.

Proposición 1.2.21. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se tiene que A es abierto en X si y sólo si para cada $x \in A$ se tiene que x es un punto interior de A.

Definición 1.2.22. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que x es un *punto aislado* de X si el conjunto $\{x\}$ es abierto en X.

Toca el turno de definir los conjuntos cerrados. Son muchas las nociones que se definen en términos de estos conjuntos y tienen la misma importancia que los conjuntos abiertos en un espacio topológico.

Definición 1.2.23. Sean (X, τ) un espacio topológico y $B \subseteq X$. Decimos que B es un *conjunto cerrado en* X si $X \setminus B$ es un conjunto abierto en X.

Ejemplo 1.2.24. Sea (X, τ) un espacio topológico con τ la topología discreta (recordar Ejemplo 1.2.3-(1)). Si $A \subseteq X$ entonces A es cerrado en X.

Definición 1.2.25. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Definimos y denotamos la *cerradura (o clausura)* de A por:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \subseteq X : A \subseteq B \text{ y } B \text{ es un conjunto cerrado en } X\}.$$

Ejemplo 1.2.26. En $\mathbb{R}$ con la topología usual (recordar Definición 1.2.15), si $A = (0, 1)$ entonces $\overline{A} = [0, 1]$.

El siguiente resultado caracteriza los puntos de la cerradura de cierto conjunto $A \subseteq X$. Su demostración puede consultarse en [22, Teorema 17.5].

Teorema 1.2.27. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se cumple que $x \in \overline{A}$ si y sólo si para todo conjunto abierto U en X que contenga a x, cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.

En el siguiente resultado recordamos algunas propiedades que cumple la cerradura de un conjunto. Omitimos su demostración en vista de que no es complicado realizarla.

Proposición 1.2.28. Sean X un espacio topológico y $A, B \subseteq X$. Entonces se cumple que

(1) $A \subseteq \overline{A}$.

(2) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(3) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

La siguiente es una caracterización de la cerradura de un conjunto con respecto a sus puntos.

Proposición 1.2.29. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si para toda $V \in \mathcal{V}(x)$, se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$.

Notación 1.2.30. Si bien la cerradura en X de cualquier subconjunto $A \subseteq X$ la denotamos por $\overline{A}$, usamos el símbolo $\overline{A}^{Y}$ para indicar la cerradura de A relativa a un subespacio Y de X.

Definición 1.2.31. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$. Decimos que x es *punto de acumulación de* A si para toda $V \in \mathcal{V}(x)$, se tiene que $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.2.32. En $\mathbb{R}$ bajo la topología usual, el subconjunto $A = [0, 1)$ tiene al punto 1 como un punto de acumulación.

La Definición 1.2.31 es útil en la descripción de la cerradura de un conjunto, ya que a veces resulta difícil encontrar la cerradura de un conjunto a partir de la definición.

Proposición 1.2.33. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y P el conjunto de puntos de acumulación de A. Se tiene que $\overline{A} = A \cup P$.

Definición 1.2.34. Sean X un espacio topológico y $D \subseteq X$. Decimos que D es *denso* en X si $\overline{D} = X$.

Inmediatamente de la definición anterior y del Teorema 1.2.27, se obtiene lo siguiente.

Teorema 1.2.35. Sean X un espacio topológico y $D \subseteq X$. Se tiene que D es denso en X si y sólo si todo conjunto abierto no vacío U en X cumple que $U \cap D \neq \emptyset$.

Es bien conocido el siguiente hecho.

Ejemplo 1.2.36. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, una forma de enriquecer la teoría de la Topología es insertando la herramienta de las funciones continuas. A continuación, la recordamos.

Definición 1.2.37. Sean X, Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f *es continua* en x si para toda $W \in \mathcal{V}(f(x))$, existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f(V) \subseteq W$. Decimos que f es continua en X si f es continua en x, para cada $x \in X$.

Lo siguiente es bastante conocido y omitimos su demostración.

Proposición 1.2.38. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces son equivalentes:

(1) f es continua en X.

(2) Para todo abierto V en Y, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

(3) Para todo cerrado F en Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Definición 1.2.39. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Decimos que f es un *homeomorfismo* si f es continua y además la función f^{-1} es continua. Cuando existe un homeomorfismo entre X y Y, decimos que X es un espacio *homeomorfo* a Y, y escribimos $X \simeq Y$.

Ejemplo 1.2.40. No es difícil verificar que el intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ es homeomorfo a $(0, 1)$ bajo el homeomorfismo dado por $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

Notación 1.2.41. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y consideremos a $Z = f(X)$ como subespacio de Y. Se define y se denota por $f^* : X \to Z$ la función dada por $f^*(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Cabe observar que f^* es una función sobreyectiva.

Definición 1.2.42. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Si f^* es un homeomorfismo, entonces decimos que f es un *encaje topológico*, o simplemente un *encaje* de X en Y.

En [22, pág. 106] aparece de forma detallada la explicación del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.43. Sean $X = (-1, 1)$ y $Y = \mathbb{R}$. Entonces $f : X \to Y$ definida como $f(x) = 3x + 1$, para todo $x \in X$, es un encaje de X en Y.

Recordamos algunos conceptos básicos de espacios métricos que requeriremos en capítulos posteriores.

Definición 1.2.44. Un *espacio métrico* es un conjunto X, no vacío, dotado de una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que llamamos *métrica* tal que satisface las propiedades siguientes, para cualesquiera que sean los puntos $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, x) = 0$.

(2) Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) > 0$.

(3) $d(x, y) = d(y, x)$.

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Los siguientes son ejemplos clásicos de espacios métricos. No es difícil dar los argumentos de su veracidad, por tanto, los omitimos.

Ejemplo 1.2.45. Dado $\mathbb{R}$, el conjunto de números reales, definimos la función $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $d(x, y) = |x - y|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$. Se tiene que d es una métrica y $\mathbb{R}$ es un espacio métrico. Se dice que esta función es la métrica usual para $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.46. Dado $\mathbb{R}^2$, el plano cartesiano, definimos la función $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, por $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, para cada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Se tiene que d es una métrica y $\mathbb{R}^2$ un espacio métrico. A esta función se le llama métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

En general, tenemos la siguiente noción en espacios métricos.

Definición 1.2.47. Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Definimos y denotamos *la bola abierta con centro en a y radio r* por

$$B(a, r) = \{b \in X \mid d(a, b) < r\}.$$

Proposición 1.2.48. Sea (X, d) un espacio métrico. La familia $\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : U \text{ es unión de bolas abiertas}\}$ es una topología para X, a la que se le denomina *topología de X inducida por la métrica d.*

A continuación desarrollamos de forma breve una parte de la materia prima que empleamos en todo el trabajo de tesis. Recordemos que entre las topologías con las que se puede dotar un conjunto no vacío X, están aquellas que adicionalmente cumplen ciertas propiedades que ayudan a determinar cuándo es posible separar, mediante subconjuntos abiertos, ciertos subconjuntos ajenos de X. Estas propiedades actualmente se les llama axiomas de separación. Mencionamos aquellos axiomas que juegan un rol importante en este trabajo.

Definición 1.2.49. Se dice que un espacio topológico X es:

(1) T_0 si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existe un subconjunto abierto en X que contiene exactamente a uno solo de estos puntos.

(2) T_1 si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$.

(3) T_2 o *Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(4) T_3 o *regular* si X es T_1 y para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F en X tal que $x \notin F$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $x \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(5) $T_{3.5}$ o *completamente regular* o *espacio de Tychonoff* si X es T_1 y para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado no vacío $F \subseteq X$ con $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = \{1\}$.

(6) T_4 o *normal* si X es T_1 y para cada par de subconjuntos cerrados y ajenos A, B en X, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.50. En los cursos básicos de topología se estudian ejemplos diversos de espacios que satisfacen o no satisfacen los axiomas de separación que hemos mencionado. Incluso se demuestra que todo espacio métrico X satisface todos los axiomas de separación.

Para fines del escrito recordamos el siguiente ejemplo [7, Ejemplo 5.25].

Ejemplo 1.2.51. Sean $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $L_1 = \{(x, y) \in L : y = 0\}$ y $L_2 = L \backslash L_1$, el *plano de Niemytzki* es el conjunto L con la topología siguiente:

(1) los puntos de L_2 son considerados con la topología usual de $\mathbb{R}^2$, y

(2) para un punto $(x, 0) \in L_1$ sus vecindades son de la forma $\{(x, 0)\} \cup B$, donde B es un una bola abierta en $\mathbb{R}^2$ tangente a L_1 en $\{(x, 0)\}$.

Las siguientes propiedades del plano de Niemytzki, son bastaste conocidas, dejamos la referencia donde pueden ser consultados [7, Observación 6.6 y Ejemplo 6.10 (2)].

(1) L es un espacio completamente regular.

(2) L no es un espacio normal.

(3) L_1 es un subespacio discreto de L.

Existen caracterizaciones de los axiomas de separación que a menudo son empleadas en la resolución de problemas en topología. Entre otras, recordemos las siguientes.

Proposición 1.2.52. Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es T_1 si y sólo si para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X.

Demostración. Supongamos que X es T_1 y tomemos $x \in X$ arbitrario. Mostremos que $X \backslash \{x\}$ es abierto en X. Sea x_1 en $X \backslash \{x\}$ cualquiera, observemos que $x \neq x_1$. Por hipótesis existe un subconjunto abierto U en X tal que $x_1 \in U$ y $x \notin U$. Dado que $U \subseteq X \setminus \{x\}$, entonces x_1 es un punto interior de $X \setminus \{x\}$. Así, por la Proposición 1.2.21 se tiene que $X \setminus \{x\}$ es un conjunto abierto en X. Por tanto, $\{x\}$ es un subconjunto cerrado en X.

Recíprocamente, mostremos que X es T_1. Sean $x_1, x_2 \in X$ arbitrarios con $x_1 \neq x_2$. Por hipótesis $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ son subconjuntos cerrados en X. Luego, $X \setminus \{x_1\}$ y $X \setminus \{x_2\}$ son subconjuntos abiertos en X. Notemos que $\{x_1\} \subset X \setminus \{x_2\}$ y $\{x_2\} \subset X \setminus \{x_1\}$. Es decir, $x_1 \in X \setminus \{x_2\}$ y $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$; además $x_2 \notin X \setminus \{x_2\}$ y $x_1 \notin X \setminus \{x_1\}$. Por tanto, X es T_1. $\square$

Proposición 1.2.53. Sea X un espacio topológico. Se tiene que X es Hausdorff si y sólo sí para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\}$, donde $\mathcal{V}(x)$ denota la familia de vecindades de x en el espacio X.

Demostración. Supongamos que X es T_2 y consideremos $x \in X$ arbitrario. Observemos que para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in \overline{V}$. De donde, $\{x\} \subseteq \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\}$. Por otro lado, supongamos que existe $x_1 \in \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\}$ y $x_1 \notin \{x\}$, esto es $x \neq x_1$. Se tiene que para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, $x_1 \in \overline{V}$. Luego, por la Proposición 1.2.29, para todo $U \in \mathcal{V}(x_1)$, se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual contradice que X es T_2. Por lo tanto $\{x\} = \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\}$.

Recíprocamente, supongamos que X no es T_2, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ tales que para todo $U \in \mathcal{V}(x_1)$ y $V \in \mathcal{V}(x_2)$ se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$. Luego, para todo $U \in \mathcal{V}(x_1)$, en vista de la Proposición 1.2.29, tenemos que $x_2 \in \overline{U}$; es decir, $x_2 \in \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(x_1)\}$. Por hipótesis, $\{x_1\} = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(x_1)\}$. De donde, $x_2 \in \{x_1\}$, esto es $x_2 = x_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es T_2. □

Proposición 1.2.54. Sea X un espacio topológico. Luego, X es regular si y sólo si para cada $x \in X$ y cada subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. Supongamos que X es T_3. Tomemos $x \in X$ arbitrario y un subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$. Luego, $X \setminus U$ es un conjunto cerrado. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos V y W en X tales que $x \in V$, $X \setminus U \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$. Observemos que $x \in V \subseteq \overline{V}$. Mostremos que $X \setminus U \subseteq X \setminus \overline{V}$. Supongamos que existe $x_1 \in X \setminus U$ y que $x_1 \notin X \setminus \overline{V}$, esto es, $x_1 \in \overline{V}$. Luego, $x_1 \in W$. De donde, $V \cap W \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Recíprocamente, sea X un espacio T_1 y consideremos $x \in X$ arbitrario y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado en X tal que $x \notin F$. Luego, $X \setminus F$ es un conjunto abierto en X y $x \in X \setminus F$. Por hipótesis, existe un conjunto abierto V en X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F$. Observemos que $X \setminus \overline{V}$ es un conjunto abierto en X y $F \subseteq X \setminus \overline{V}$. Además, $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$. Por lo tanto, X es T_3. □

La demostración del siguiente resultado es similar a la de la Proposición 1.2.54, como vemos a continuación.

Proposición 1.2.55. Sea X un espacio topológico. Se tiene que X es normal si y sólo si para cada subconjunto cerrado F en X y cada subconjunto abierto U en X que contenga a F, existe un subconjunto abierto V en X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. Supongamos que X es T_4 y consideremos arbitrariamente un subconjunto cerrado F en X y U un subconjunto abierto en X tales que $F \subseteq U$. Luego, $X \setminus U$ es un conjunto cerrado en X y $F \cap (X \setminus U = \emptyset$. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos V y W en X tales que $F \subseteq V$, $X \setminus U \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$. Observemos que $F \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Mostremos que $X \setminus U \subseteq X \setminus \overline{V}$. Supongamos que existe $x_1 \in X \setminus U$ y que $x_1 \notin X \setminus \overline{V}$. Así, $x_1 \in \overline{V}$. Se sigue que $x_1 \in X \setminus U \subseteq W$ y $V \cap W \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Recíprocamente, sea X un espacio T_1 y consideremos arbitrariamente dos subconjuntos cerrados E y F en X tales que $E \cap F = \emptyset$. Luego, $X \setminus F$ es un conjunto abierto en X y $E \subseteq X \setminus F$. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto V en X tal que $E \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F$. Observemos que $X \setminus \overline{V}$ es un conjunto abierto en X y $F \subseteq X \setminus \overline{V}$. Más aún, $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$. Por lo tanto, X es T_4. □

Una caracterización más de espacios normales es la siguiente, es uno de los resultados clásicos de la topología. Su demostración se puede consultar en [9, Teorema 4.B.1] (vea también [12, Teorema 4.1]).

Lema 1.2.56 (Lema de Urysohn). Un espacio topológico X es normal si y sólo si para cada par de subconjuntos E y F cerrados en X y disjuntos, existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(E) = \{0\}$ y $f(F) = \{1\}$.

Otra de las propiedades interesantes de la teoría de los axiomas de separación se encuentra en determinar las relaciones existentes entre los conceptos de la Definición 1.2.49. Veamos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.57. Sea X un espacio topológico. Se cumple lo siguiente:

(a) Si X es Hausdorff, entonces X es T_1.

(b) Si X es regular, entonces X es Hausdorff.

(c) Si X es completamente regular, entonces X es regular.

(d) Si X es normal, entonces X es completamente regular.

Demostración. Los incisos (a) y (b) se siguen de forma inmediata de las definiciones.

(c) Supongamos que X es completamente regular. Sean $x \in X$ y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado en X no vacío tal que $x \notin F$. Luego, por hipótesis, existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para cada $y \in F$. Es claro que los conjuntos $[0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ son abiertos en $[0,1]$. Luego, definiendo $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$, obtenemos por la continuidad de f y por la Proposición 1.2.38, que U y V son abiertos en X. Además, se cumple que $x \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De donde, X es un espacio regular.

(d) Supongamos que X es normal y veamos que X es completamente regular. Dado que X es normal, se tiene que X es T_1. Ahora, sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado no vacío en X tal que $x \notin F$. Por la Proposición 1.2.52, se tiene que $\{x\}$ es un subconjunto cerrado en X. Además, claramente $\{x\} \cap F = \emptyset$. Luego, por el Lema de Urysohn (Lema 1.2.56), existe una función $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = \{1\}$. Por lo tanto, X es completamente regular. $\square$

Una noción muy importante en varias áreas de la matemática es la de compacidad. A continuación recordamos este concepto y algunos hechos que usamos dentro de la tesis.

Definición 1.2.58. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una *cubierta de* X si $X = \bigcup \mathcal{A}$. Cuando $\mathcal{A} \subseteq \tau$, a $\mathcal{A}$ le llamamos *cubierta abierta de* X.

Definición 1.2.59. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *compacto* si para toda cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X, existe $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ finita tal que $X = \bigcup \mathcal{A}'$.

Ejemplo 1.2.60. Recordemos el Ejemplo 1.2.3-(2). Se tiene que todo espacio bajo la topología indiscreta es compacto.

Como una herramienta fundamental en la teoría de la compacidad, encontramos el siguiente resultado, muy útil por sus aplicaciones (vea [9, Teorema 6.A.10]).

Lema 1.2.61 (Lema de Alexander)**.** Sea X un espacio topológico. Se tiene que X es compacto si y sólo si toda cubierta de X con elementos de una subbase admite una subcubierta finita.

Omitimos la demostración del siguiente resultado; el lector la puede consultar en [13, Teorema 3.2.6]. Recordemos la Definición 1.2.42.

Teorema 1.2.62. Un espacio topológico es un espacio completamente regular si y sólo si se puede encajar en un espacio compacto.

En [22, Teorema 32.3] se demuestra lo siguiente.

Proposición 1.2.63. Todo espacio topológico compacto es normal.

De la proposición anterior y del Teorema 1.2.62, se obtiene el corolario siguiente.

Corolario 1.2.64. Todo espacio topológico completamente regular se puede encajar en un espacio normal.

Sección 1.3

Conceptos básicos de hiperespacios

En esta sección incluimos de manera breve, hechos bastante conocidos en la teoría de hiperespacios. Nos restringimos a exponer principalmente la herramienta que requerimos en secciones posteriores. Es sabido que esta teoría tiene sus orígenes a principios del Siglo XX. Fueron F. Hausdorff [15] y L. Vietoris [26] quienes comienzan el desarrollo de esta teoría. Uno de los primeros hiperespacios que se definieron para un espacio topológico X fue el de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X, denotado por $\mathrm{CL}(X)$. Esto es,

$$\mathrm{CL}(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}.$$

A $\mathrm{CL}(X)$ se le considera con la *topología de Vietoris*, τ_V. Si bien existen otras topologías que se le pueden dar a la familia $\mathrm{CL}(X)$, en este trabajo sólo consideramos la de Vietoris.

Para definir dicha topología, consideremos lo siguiente. Dados $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos de X, $\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle$ denota el subconjunto de $\mathrm{CL}(X)$ definido como sigue:

$$\langle A_1, \ldots, A_n \rangle = \left\{ F \in \mathrm{CL}(X) : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ y } F \cap A_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

La topología de Vietoris es la topología generada por la familia:

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle : U_1, U_2, \ldots, U_k \text{ son subconjuntos abiertos en } X \text{ y } k \in \mathbb{N}\}.$$

Por otro lado, puesto que en algunas ocasiones es conveniente trabajar con una subbase de una topología (vea la Definición 1.2.17), recordemos que la familia

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \tau\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau\}$$

es una subbase para τ_V. Una demostración de que $\mathcal{B}_V$ es una base y $\mathcal{S}$ es una subbase para τ_V se puede consultar en [18, Teorema 1.2].

Conviene a nuestra exposición tener en cuenta la siguiente notación, la cual es muy utilizada en hiperespacios. Dado un espacio topológico X y $U \subseteq X$, escribimos:

$$U^- = \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \cap U \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad U^+ = \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \subseteq U\}.$$

Puesto que $\langle U \rangle = U^+$ y $\langle X, U \rangle = U^-$, la subbase para la topología de Vietoris, se puede escribir como

$$\mathcal{S} = \{U^+ : U \in \tau\} \cup \{U^- : U \in \tau\}.$$

Un hecho ampliamente conocido, por lo que omitimos su demostración, es la siguiente relación que se tiene entre la cerradura de un subconjunto abierto básico en $\mathrm{CL}(X)$ con la cerradura en el espacio X (vea [21, Lema 2.3.2]).

Lema 1.3.1. Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Si $U_1, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos en X, entonces $\overline{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle} = \langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \rangle$.

Para los fines de nuestro trabajo, incluimos el siguiente resultado.

Lema 1.3.2. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces la familia $\{\langle X, U \rangle : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $\mathrm{CL}(X)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X y sea $A \in \mathrm{CL}(X)$. Luego, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap U \neq \emptyset$, esto es, $A \in \langle X, U \rangle$. Por lo tanto, $\{\langle X, U \rangle : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $\mathrm{CL}(X)$. □

Si bien el hiperespacio $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es un espacio interesante de estudiar, también lo son sus subespacios, y en esta tesis en particular, el siguiente es de nuestro interés. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto no cerrado de X. Se define el subespacio de $\mathrm{CL}(X)$:

$$Y^+ = \{F \in \mathrm{CL}(X) : F \subseteq Y\}.$$

La definición de este espacio originalmente fue presentada en [2] y se le denotó por $\mathcal{F}(Y, X)$. Sin embargo, por conveniencia, usamos el símbolo Y^+, como se utiliza en [11].

Es importante destacar que se pueden definir más hiperespacios a partir de un mismo espacio X. Por mencionar algunos, $C(X)$, el hiperespacio de todos los subconjuntos conexos de X; $F_n(X)$, con $n \in \mathbb{N}$, el hiperespacio de todos los subconjuntos de X que tienen a lo más n puntos, etc. Podríamos englobar todos los hiperespacios de X (o muchos de ellos) con el símbolo genérico $H(X)$. A su vez, también es necesario indicar que a los hiperespacios se les puede dotar de otras topologías y no sólo la de Vietoris. Por ejemplo, la topología de Fell, la topología *hit-and-miss*, etc. En este trabajo de tesis nos enfocamos al estudio de los hiperespacios $\mathrm{CL}(X)$ y Y^+ con la topología de Vietoris.

Terminamos esta sección mencionando que el lector interesado en temas de hiperespacios puede consultar las fuentes [16, 17, 18, 19, 21, 23, 24], en donde a su vez encontrará muchas otras referencias. Sin embargo, para la teoría de propiedades topológicas relativas sólo es posible encontrar estudios aislados y dados de manera muy general en [5] (en Ruso), [3] (exposición sumaria y rudimentaria). Conviene decir que con el paso de los años, se han introducido nuevas propiedades topológicas relativas, las cuales pueden ser consultadas en las referencias [4, 6, 8, 14, 25], por mencionar algunas.

Por otro lado, es conocido que la topología de Vietoris permite que las propiedades topológicas de un espacio X y la de su hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ interactúen entre sí, lo que da pauta a establecer un problema de índole general dentro de la Teoría de hiperespacios, el cual destacamos a continuación.

Problema $(*)$ Dado un espacio topológico X, estudiar las posibles conexiones entre las siguiente proposiciones:

(1) $\mathrm{CL}(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;

(2) X tiene la propiedad $\mathcal{P}$,

para alguna propiedad $\mathcal{P}$.

El problema en $(*)$ se interpreta de la siguiente manera. Si un espacio topológico X cumple o posee una cierta propiedad $\mathcal{P}$, entonces, investigar si su hiperespacio, $\mathrm{CL}(X)$, también preserva la propiedad $\mathcal{P}$, y recíprocamente, si el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$, satisface dicha propiedad, indagar si el espacio X también la posee.

Como ejemplo del problema $(*)$, encontramos el siguiente resultado debido a E. Michael (vea [21, Teorema 4.9]), donde la propiedad $\mathcal{P}$ es de índole muy variada.

Teorema 1.3.3. ([21, Teorema 4.9]) Para un espacio topológico X se cumplen las siguientes propiedades.

(1) Si X es T_1, entonces $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es T_1.

(2) X es regular si y sólo si $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es Hausdorff.

(3) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (a) X es normal;

   (b) $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es completamente regular;

(c) $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es regular.

(4) X es compacto si y sólo si $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es compacto.

(5) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es compacto y metrizable;

(b) $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es compacto y metrizable;

(c) $(\mathrm{CL}(X), \tau_V)$ es metrizable.

El Teorema 1.3.3 juega un papel muy importante en el Capítulo 3, donde presentamos algunas generalizaciones de éste vía propiedades relativas.

Capítulo 2

Axiomas relativos de separación y compacidad

La teoría de propiedades topológicas relativas es una rama importante de investigación en topología pues, entre otras aplicaciones, ayuda a saber cómo está localizado un espacio Y en un superespacio X. Además, una propiedad topológica relativa generaliza la propiedad topológica global de la cual proviene, en el sentido de que si Y es igual a X, la propiedad relativa y la global coinciden.

Entre otras propiedades relativas provenientes de propiedades absolutas que se han estudiado y han aportado grandes avances en topología, están las que se derivan de los axiomas clásicos de separación. En la presente tesis, hacemos un estudio minucioso de varias versiones relativas que se desprenden de los axiomas de separación T_1, T_2, T_3, T_4 y de la noción de compacidad. Específicamente, de los conceptos que a continuación definimos, proporcionamos ejemplos que garantizan su independencia, establecemos caracterizaciones de ellos y damos condiciones bajo las cuales hay coincidencias. Dicho análisis pretende subsanar los estudios poco exhaustivos y dispersos que se encuentran en la literatura de estas propiedades. En el documento, lo que no posee una referencia, representa un aporte original a esta rama de conocimiento (los existentes están dispersos y son poco exhaustivos). Sin embargo, en su mayoría, los conceptos que estudiamos fueron ampliamente estudiados por Arhangel'skii y H. M. M. Genedi en [5], artículo publicado en ruso. El lector interesado en conocer de su contenido, puede consultar [3].

En los diagramas que presentamos, establecemos las relaciones que guardan las nociones correspondientes a alguna definición. Las flechas significan inclusión de clases.

De ahora en adelante, salvo otra indicación, X es un espacio topológico T_1 y Y siempre es un subespacio no vacío de X, dotado de la topología heredada de X.

Sección 2.1

Axiomas relativos T_1 y T_2 y sus propiedades

En esta sección presentamos lo concerniente a las propiedades topológicas relativas del tipo T_1 y Hausdorff. Es importante señalar que en la Definición 2.1.1, la versión relativa del axioma T_1 es contribución de esta tesis; mientras que las versiones relativas del axioma T_2 fueron tomadas de [3, pág.89].

Definición 2.1.1. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es T_1 *en* X, si para cada par de puntos distintos $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $y_2 \in U$ y $y_1 \notin U$ (aquí, X no es necesariamente T_1).

(b) Y es *Hausdorff en* X, si para cualquier par de puntos diferentes $y_1, y_2 \in Y$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(c) Y es *fuertemente Hausdorff en* X, si cualquier par de puntos diferentes $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Claramente, cuando $Y = X$ en la Definición 2.1.1, el inciso (a) es el axioma T_1 y los incisos (b) y (c) coinciden con la propiedad de Hausdorff. Además, si X es T_1, entonces para cualquier subespacio Y de X, Y es T_1 en X; y si X es Hausdorff, entonces para cualquier subespacio Y de X, Y es Hausdorff en X y fuertemente Hausdorff en X.

En el Diagrama 2.1 establecemos las relaciones que guardan las nociones en la Definición 2.1.1, las cuales se obtienen de forma directa. A su vez, en el Ejemplo 2.1.3, garantizamos que ninguna de las flechas es reversible.

Formalmente, las implicaciones quedan establecidas en el siguiente resultado.

Proposición 2.1.2. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se cumple lo siguiente:

(a) Si Y es fuertemente Hausdorff en X, entonces Y es Hausdorff en X y Y es T_1 en X.

(b) Si Y es T_1 en X, entonces Y es un espacio T_1.

(c) Si Y es Hausdorff en X, entonces Y es un espacio Hausdorff.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}Y \text{ es fuertemente}\\ \text{Hausdorff en } X\end{array}} \arrow[r, Rightarrow, "(1)"] \arrow[d, Rightarrow, "(3)"] & \boxed{\begin{array}{c}Y \text{ es Hausdorff}\\ \text{en } X\end{array}} \arrow[d, Rightarrow, "(2)"] \\
\boxed{Y \text{ es } T_1 \text{ en } X} \arrow[d, Rightarrow, "(4)"] & \boxed{Y \text{ es Hausdorff}} \\
\boxed{Y \text{ es } T_1} &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2.1

Demostración. (a) Supongamos que Y es fuertemente Hausdorff en X. Es inmediato que Y es Hausdorff en X. Demostremos que Y es un espacio T_1 en X. Sea $y \in Y$, verifiquemos que $X \setminus \{y\}$ es un conjunto abierto en X, para ello, elijamos $x \in X \setminus \{y\}$. Dado que $y \in Y$, $x \in X$ y $x \neq y$, por hipótesis, existen subconjuntos ajenos y abiertos U y V en X tales que $y \in U$ y $x \in V$. Se cumple que $x \in V \subseteq X \setminus \{y\}$. Se concluye que $\{y\}$ es un subconjunto cerrado de X.

(b) Supongamos que Y es T_1 en X. Sea $y \in Y$. De la hipótesis, $\{y\}$ es un subconjunto cerrado en X. Por lo tanto, $\{y\} \cap Y = \{y\}$ es un conjunto cerrado en Y.

(c) Supongamos que Y es Hausdorff en X. Sean $y_1, y_2 \in Y$ puntos diferentes. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Claramente, $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son subconjuntos ajenos y abiertos en Y con $y_1 \in U \cap Y$ y $y_2 \in U \cap Y$. □

A continuación mostramos con ejemplos que las implicaciones de la Proposición 2.1.2 no son reversibles.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos los siguientes casos para el espacio X y su subespacio Y.

(1) Si $X = \{a, b\}$ tiene la topología indiscreta y $Y = \{a\}$, entonces Y es Hausdorff en X y Y no es fuertemente Hausdorff en X. Por lo tanto la flecha (1) no es reversible. Por otra parte, Y es T_1 en X ya que para los puntos $a \in Y$ y $b \in X$, el conjunto $U = \{a\}$ cumple que $a \in U$ y $b \notin U$. Por lo tanto, la flecha (3) no es reversible.

(2) Cuando $X = \{a, b, c\}$ es tomado con la topología $\tau_X = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}\}$ y $Y = \{a, b\}$, observemos que Y es un espacio Hausdorff y Y no es Hausdorff en X. Por lo tanto, la flecha (2) no es reversible.

(3) Tomando $X = \{a, b, c\}$ con la topología indiscreta y $Y = \{a\}$, se tiene que Y es un espacio T_1 y Y no es T_1 en X. Por lo tanto, la flecha (4) no es reversible.

Por otra parte, recordemos que la propiedad T_1 queda caracterizada por la condición de pedir que para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X (vea Proposición 1.2.52). Igualmente, es posible caracterizar la propiedad relativa del axioma de separación T_1 en términos de lo que en [3, pág.88] se toma como la propia definición.

Proposición 2.1.4. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se tiene que Y es T_1 en X si y sólo si para cada $y \in Y$, el subconjunto $\{y\}$ es cerrado en X.

Demostración. Supongamos que Y es T_1 en X y consideremos $y \in Y$ arbitrario. Luego, para cualquier $y_2 \in X \setminus \{y\}$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $y_2 \in U$ y $y \notin U$. Note que $U \subseteq X \setminus \{y\}$. Así, $X \setminus \{y\}$ es un conjunto abierto en X. De donde, $\{y\}$ es un subconjunto cerrado en X.

Recíprocamente, mostremos que Y es T_1 en X. Sean $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$ con $y_1 \neq y_2$. Dado que $y_2 \in X \setminus \{y_1\}$, por hipótesis, existe un subconjunto abierto U en X tal que $y_2 \in U \subseteq X \setminus \{y_1\}$. Por tanto, $y_2 \in U$ y $y_1 \notin U$. □

De igual forma, recordemos que la propiedad de Hausdorff equivale a que todo punto es la intersección de la cerradura de sus vecindades (vea la Proposición 1.2.53). También recordemos que $\mathcal{V}(x)$ denota la colección de todas las vecindades de x en el espacio X y que $\overline{U}$ es la cerradura en X del subconjunto U.

Teorema 2.1.5. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se tiene que Y es fuertemente Hausdorff en X si y sólo si cada $y \in Y$ cumple que $\{y\} = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(y)\}$.

Demostración. Supongamos que Y es fuertemente Hausdorff en X y fijamos un punto $y \in Y$. Claramente $\{y\} \subseteq \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(y)\}$. Ahora, supongamos que existe $x \in \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(y)\}$ tal que $x \neq y$. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $y \in U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sea $U_1 \in \mathcal{V}(y)$ tal que $U_1 \subseteq U$. Dado que $U_1 \cap V = \emptyset$, obtenemos que $x \notin \overline{U_1}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\{y\} = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(y)\}$.

Recíprocamente, tomemos puntos diferentes $y \in Y$ y $x \in X$. Como $\{y\} = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{V}(y)\}$, existe $U \in \mathcal{V}(y)$ tal que $x \notin \overline{U}$. Sea U_1 un subconjunto abierto en X tal que $y \in U_1 \subseteq U$. Luego, dado que $x \notin \overline{U_1}$, existe un subconjunto abierto V_1 en X tal que $x \in V_1$ y $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Por lo tanto, Y es fuertemente Hausdorff en X. □

En vista de la Proposición 2.1.4 y del Teorema 2.1.5, se plantea lo siguiente, de lo cual no conocemos una respuesta.

Pregunta 2.1.6. ¿Existe una caracterización del concepto Y es Hausdorff en X que sea similar a la del Teorema 2.1.5?

A continuación vemos que bajo ciertas hipótesis, algunas de las flechas en el Diagrama 2.1 son reversibles. La demostración de lo siguiente, se obtiene directamente de las definiciones.

Proposición 2.1.7. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio cerrado en X. Se tiene que Y es un espacio T_1 si y sólo si Y es T_1 en X.

Demostración. Para mostrar la necesidad de la afirmación, tomemos $y \in Y$. Como Y es un espacio T_1, se sigue que $\{y\}$ es un subconjunto cerrado en Y, puesto que Y es cerrado en X, se tiene que $\{y\}$ es un subconjunto cerrado en X, esto muestra que Y es T_1 en X.

La suficiencia de la afirmación se encuentra en la Proposición 2.1.2 (b). □

Teorema 2.1.8. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio denso en X. Se tiene que Y es un espacio Hausdorff si y sólo si Y es Hausdorff en X.

Demostración. Supongamos que Y es un espacio Hausdorff. Para mostrar que Y es Hausdorff en X, tomemos dos puntos diferentes $y_1, y_2 \in Y$. Existen dos conjuntos abiertos y ajenos U' y V' en Y tales que $y_1 \in U'$ y $y_2 \in V'$. Sean U y V conjuntos abiertos en X tales que $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$. Veamos que $U \cap V = \emptyset$. Para esto, supongamos lo contrario. Luego, como Y es denso en X, se tiene que $(U \cap V) \cap Y \neq \emptyset$. Sin embargo, en vista de que $U' \cap V' = \emptyset$, obtenemos que $U \cap V \subseteq X \setminus Y$, lo cual es una contradicción. Así, $U \cap V = \emptyset$. Observe que $y_1 \in U$ y $y_2 \in V$. Por lo tanto, Y es Hausdorff en X.

El recíproco se tiene directamente de las definiciones. □

Teorema 2.1.9. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X tales que para cada $y \in Y$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $y \in U$ y $\overline{U} \subseteq Y$. Se tiene que Y es Hausdorff en X si y sólo si Y es fuertemente Hausdorff en X.

Demostración. Supongamos que Y es Hausdorff en X. Sean $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$ con $y_1 \neq y_2$. Si $y_2 \in Y$, la prueba termina. Por consiguiente, supongamos que $y_2 \notin Y$. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto U de X tal que $y_1 \in U$ y $\overline{U} \subseteq Y$. Dado que $y_2 \notin \overline{U}$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, Y es fuertemente Hausdorff en X.

El recíproco se obtiene de manera directa usando las definiciones. □

Sección 2.2

Axiomas de regularidad y sus propiedades

Como su nombre lo indica, en esta sección analizamos propiedades relativas del axioma de regularidad. A continuación, presentamos versiones relativas del axioma de regularidad, de las cuales superregular, regular y fuertemente regular en X se encuentran en [3, pág. 89]. El concepto de internamente regular en X es tomado de [6].

Definición 2.2.1. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *superregular en* X, si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto cerrado F en X tal que $y \notin F$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X, tales que $y \in U$ y $F \subseteq V$.

(b) Y es *internamente regular en* X, si para cada $y \in Y$ y cada subconjunto F de Y cerrado en X tal que $y \notin F$, existen dos subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $y \in U$ y $F \subseteq V$.

(c) Y es *regular en* X, si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto cerrado F en X tal que $y \notin F$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$.

(d) Y es *fuertemente regular en* X, si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F en X tales que $x \notin F$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $x \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$.

Es evidente que si $Y = X$ en la Definición 2.2.1, cada inciso coincide con el axioma de regularidad. Además, si X es regular, entonces para cualquier subespacio Y de X, Y cumple cualquier propiedad relativa de regularidad en X. En el Diagrama 2.2 establecemos las relaciones que guardan las nociones en la Definición 2.2.1.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{Y \text{ es fuertemente regular en } X} \arrow[r, Rightarrow, "(1)"] & \boxed{Y \text{ es regular en } X} \arrow[r, Rightarrow, "(3)"] \arrow[dr, Rightarrow, "(4)"] & \boxed{Y \text{ es internamente regular en } X} \\
& \boxed{Y \text{ es superregular en } X} \arrow[u, Rightarrow, "(2)"] & \boxed{Y \text{ es regular}}
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2.2

De manera explícita, para comodidad de los lectores, damos las demostraciones de las implicaciones indicadas. Además, con los Ejemplos 2.2.3, 2.2.4 y 2.2.5, mostramos que ninguna de éstas es reversible.

Proposición 2.2.2. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se cumple lo siguiente:

(a) Si Y es fuertemente regular en X, entonces Y es regular en X.

(b) Si Y es regular en X, entonces Y es internamente regular en X.

(c) Si Y es regular en X, entonces Y es un espacio regular.

(d) Si Y es superregular en X, entonces Y es regular en X.

Demostración. En vista de que las demostraciones de (a) y (d) son inmediatas, las omitimos.

(b) Supongamos que Y es regular en X. Demostremos que Y es internamente regular en X. En efecto, sean $y \in Y$ y F un subconjunto de Y cerrado en X tales que $y \notin F$. Por hipótesis, existen dos subconjuntos ajenos y abiertos U y V en X tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$. Dado que $F \subseteq Y$, se tiene que $F \cap Y = F$. Así, $y \in U$ y $F \subseteq V$.

(c) Supongamos que Y es regular en X. Demostremos que Y es un espacio regular. En efecto, sean $y \in Y$ y F un subconjunto cerrado en Y tales que $y \notin F$. Luego, existe un subconjunto cerrado F^* en X tal que $F^* \cap Y = F$. Note que $y \notin F^*$. Por hipótesis, existen dos subconjuntos ajenos y abiertos U y V en X tales que $y \in U$ y $F = F^* \cap Y \subseteq V$. Claramente, $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos abiertos en Y tales que $y \in U \cap Y$, $F \subseteq V \cap Y$ y $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. □

Ejemplo 2.2.3. Mostremos que las flechas (1) y (2) del Diagrama 2.2 no son reversibles. Para este fin, sean X' un conjunto infinito y p, q dos puntos diferentes que no pertenecen a X'. Definimos $X = X' \cup \{p, q\}$. Ahora, dotamos de una topología en X definiendo las las vecindades en cada punto de $x \in X$.

1. Para cada $x \in X'$, sus vecindades son cualquier subconjunto de X' que tenga a x.
2. si $x \in \{p, q\}$, las vecindades de x son de la forma $\{x\} \cup (X' \setminus F)$, donde F es un subconjunto finito de X'.

Veamos que efectivamente se satisfacen las propiedades en la Proposición 1.2.9. Claramente se cumple la propiedad (BP1).

Revisemos la propiedad (BP2). Sean $x \in U$ y $U \in \mathcal{V}(y)$. Consideremos algunos casos. Si $x \in X'$ y $y \in \{p, q\}$, entonces $U = \{y\} \cup (X' \setminus F)$, donde F es un subconjunto finito de X', luego si se toma $V = X' \setminus F$, se cumple que $V \in \mathcal{V}(x)$ y claramente $V \subseteq U$. Si $x \in \{p, q\}$ y $y \in X'$. Entonces, no existe $U \in \mathcal{V}(y)$ tal que $x \in U$ y por lo tanto se cumple (BP2). Si $x, y \in \{p, q\}$, como $x \in U$ y $U \in \mathcal{V}(y)$, entonces $x = y$ y con ello claramente se satisface (BP2). Finalmente, el caso cuando $x, y \in X'$ se cumple inmediatamente.

Comprobemos la propiedad (BP3). Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x)$. Si $x \in X'$, entonces la propiedad se cumple inmediatamente. Ahora, si $x \in \{p, q\}$, entonces $U_1 = \{x\} \cup (X' \setminus F_1)$ y $U_2 = \{x\} \cup (X' \setminus F_2)$ donde F_1 y F_2 son conjuntos finitos de X'. Así, es suficiente tomar $U = \{x\} \cup (X \setminus (F_1 \cup F_2))$, ya que $U \in \mathcal{V}(x)$ y es tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Es claro que X es un espacio T_1. Ahora, consideremos el subespacio $Y = X' \cup \{p\}$.

Afirmación: Y es regular en X.

Para ello, sean $y \in Y$ y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado en X tales que $y \notin F$. Luego, $y \in X'$ o $y = p$. Si $y \in X'$, es trivial encontrar los conjuntos abiertos deseados. Si $y = p$, entonces existe un subconjunto finito A de X' con la propiedad que $(\{p\} \cup X' \setminus A) \cap F = \emptyset$. Luego, $F \subseteq A \cup \{q\}$, por lo que $U = \{p\} \cup (X' \setminus A)$ y $V = A$ son subconjuntos abiertos en X, ajenos y tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$. Por lo tanto, Y es regular en X.

Puesto que los conjuntos $\{p\}$ y $\{q\}$ no tienen vecindades ajenas en X, se concluye que Y no es fuertemente regular en X y Y no es superregular en X.

Ejemplo 2.2.4. La flecha (4) no son reversible. Para demostrar esto, consideramos la siguiente construcción debida a Arhangelskii ([3, Ejemplo 1]). Sean $X = \mathbb{R}$, $N = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $Y = N \cup \{0\}$. La topología τ_N para X es aquella que resulta de añadir el conjunto $\mathbb{R} \setminus N$ a la topología usual de $\mathbb{R}$. En τ_N, N es un conjunto cerrado en X, y por ende Y es un subespacio discreto de X. Así, en particular, resulta que Y es un espacio regular. En [3, Ejemplo 1], Arhangelskii muestra que Y no es regular en X. De donde, se obtiene que la flecha (4) no es reversible. Más aún, se tiene un poco más. Notemos que en vista de que el punto $0 \in Y$ y el conjunto N no pueden ser separados por conjuntos abiertos en X, entonces Y no es internamente regular en X.

Ejemplo 2.2.5. La flecha (3) no es reversible. En efecto, sean $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ (con $p \notin \mathbb{R}$) y $Y = \mathbb{R}$. La topología de Y es τ_N del ejemplo anterior, y las vecindades para p son de la forma $\{p\} \cup V_p$, donde V_p es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ tal que $N \setminus F \subseteq V_p$ para algún conjunto finito F. Note que $0 \notin \overline{N}$ y $\overline{N} = N \cup \{p\}$. Dado que $\overline{N} \cap Y = N$ y que es imposible separar a N y 0 por conjuntos abiertos y ajenos en X, entonces Y no es regular en X. Por otra parte, no es difícil ver que Y es internamente regular en X. El caso no trivial es cuando se desea separar 0 y N, pero cualquier conjunto cerrado en X contenido en N es finito.

Recordemos que un espacio X es regular si y sólo si para cada $x \in X$ y cada subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ (vea la Proposición 1.2.54). Caracterizaciones análogas, en términos de la cerradura de conjuntos abiertos, también pueden obtenerse para las nociones relativas de regularidad de la Definición 2.2.1. Incluimos la demostración de algunos hechos conocidos.

Proposición 2.2.6. ([11, Lema 3.1]) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es superregular en X si y sólo si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto abierto U en X tal que $y \in U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. Supongamos que Y es superregular en X. Sean $y \in Y$ y U un subconjunto abierto en X tal que $y \in U$. Dado que $X \setminus U$ es cerrado en X y $y \notin X \setminus U$, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1 y W_2 en X tales que $y \in W_1$, $X \setminus U \subseteq W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Sea $V = W_1$. Luego $\overline{V} \subseteq X \setminus W_2$. Así, $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Recíprocamente, veamos que Y es superregular en X. Sean $y \in Y$ y F un subconjunto cerrado en X tal que $y \notin F$. Dado que $X \setminus F$ es abierto en X tal que $y \in X \setminus F$, se sigue por hipótesis que existe un subconjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F$. De donde, V y $X \setminus \overline{V}$ son los subconjuntos abiertos deseados que separan a y y a F. Así, Y es superregular en X. □

Teorema 2.2.7. Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es internamente regular en X si y sólo si para todo $y \in Y$ y para todo subconjunto abierto U en X con $y \in U$ y $X \setminus U \subseteq Y$, existe un conjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. Supongamos que Y es internamente regular en X. Sean $y \in Y$ y U un subconjunto abierto en X con $y \in U$ y $X \setminus U \subseteq Y$. Dado que $y \notin X \setminus U$ y $X \setminus U \subseteq Y$ es un conjunto cerrado en X, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1 y W_2 en X tales que

$$y \in W_1, \quad X \setminus U \subseteq W_2 \quad \text{y} \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset.$$

De donde, $y \in W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq X \setminus W_2 \subseteq U$.

Recíprocamente, veamos que Y es superregular en X. Sean $y \in Y$ y F un subconjunto de Y cerrado en X que no tiene a y. Dado que $y \in X \setminus F$, $X \setminus F$ es abierto en X y $X \setminus (X \setminus F) \subseteq Y$, se sigue por hipótesis que existe un subconjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F$. De donde, V y $X \setminus \overline{V}$ son los subconjuntos abiertos deseados que separan a y y a F. Así, Y es internamente regular en X. □

Finalmente, proporcionamos una caracterización para las propiedades regular en X y fuertemente regular en X.

Proposición 2.2.8. ([14, Lema 1]) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es regular (fuertemente regular) en X si y sólo si para todo $x \in Y$ $(x \in X)$ y para todo subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$, existe subconjunto abierto $V \subseteq U$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \cap Y \subseteq U$.

Demostración. Supongamos que Y es regular en X. Demos un punto arbitrario $y \in Y$ y un conjunto abierto U en X que tenga a y. Como $y \notin X \setminus U$, existen subconjuntos abiertos W_1, W_2 en X tales que

$$y \in W_1, \quad (X \setminus U) \cap Y \subseteq W_2 \quad \text{y} \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset.$$

Definimos $V = W_1 \cap U$. Claramente $y \in V$ y $V \subseteq U$. Resta ver que $\overline{V} \cap Y \subseteq U$. En efecto, supongamos que existe $y' \in \overline{V} \cap Y$ tal $y' \notin U$. Luego, $y' \in W_2$ y, como $y' \in \overline{V}$, se tiene que $W_2 \cap V \neq \emptyset$, pero $W_2 \cap V \subseteq W_2 \cap W_1$, de donde $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, que es una contradicción.

Recíprocamente, veamos que Y es regular en X. Para ello, demos $y \in Y$ y F un subconjunto cerrado en X que no tenga a y. Definimos $U = X \setminus F$. Puesto que $y \in U$, se sigue por hipótesis que existe un subconjunto abierto V en X tal que $y \in V$, $V \subseteq U$ y $\overline{V} \cap Y \subseteq U$. Así, $y \in V$ y, no es difícil demostrar que, $F \cap Y \subseteq X \setminus \overline{V}$ y $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$. Por lo tanto, Y es regular en X.

Cuando Y es fuertemente regular en X, se procede análogamente. □

Ahora, veamos condiciones necesarias para que algunas de las flechas en el Diagrama 2.2 sean reversibles.

Proposición 2.2.9. Sea X un espacio topológico y Y un subconjunto cerrado en X. Se tiene que Y es internamente regular en X si y sólo si Y es regular en X.

Demostración. Supongamos que Y es internamente regular en X. Sea $y \in Y$ y F cualquier subconjunto cerrado en X tal que $x \notin F$. Dado que Y es cerrado en X se tiene que $F \cap Y$ es un subconjunto de Y cerrado en X. De aquí, el punto $y \in Y$ y conjunto $F \cap Y$ pueden ser separados por conjuntos ajenos y abiertos en X, esto es, Y es regular en X. El recíproco se sigue de manera inmediata por las definiciones. □

La demostración del siguiente resultado es análoga a la demostración del Teorema 2.1.8, por lo que la omitimos.

Proposición 2.2.10. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio denso en X. Se tiene que Y es un espacio regular si y sólo si Y es regular en X.

Desconocemos una respuesta a lo siguiente.

Pregunta 2.2.11. ¿Existen condiciones bajo las cuales si Y es regular en X, entonces Y es superregular en X? Ídem para obtener Y es fuertemente regular en X.

Sección 2.3

Axiomas de normalidad y sus propiedades

En esta última sección toca el turno de analizar algunos aspectos concernientes al axioma de normalidad. A continuación veamos algunas versiones relativas de la normalidad, de las cuales fuertemente normal, normalidad relativa y cercanamente normal, se tomaron de [3, pá.g 89]; internamente normal, se obtuvo de [4, pág. 28] y supernormal, se seleccionó de [11, Definición 2].

Definición 2.3.1. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *fuertemente normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados y ajenos A y B en Y, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(b) Y es *normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \cap Y \subseteq U$, $B \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(c) Y es *cercanamente normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X, existen subconjuntos U y V abiertos en Y tales que $A \cap Y \subseteq U$, $B \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(d) Y es *internamente normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X contenidos en Y, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(e) Y es *supernormal en* X, si para cada dos subconjuntos cerrados ajenos A y B en X con $A \subseteq Y$, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

De manera inmediata se tiene que si en la Definición 2.3.1, $Y = X$, todos los incisos coinciden con el axioma de normalidad. Además, si X es un espacio normal, entonces para todo subespacio Y de X se cumple que: Y es normal en X, Y es cercanamente normal en X, Y es internamente normal en X y Y es supernormal en X.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es fuertemente} \\ \text{normal en } X \end{array}} \arrow[r, Rightarrow, "(1)"] \arrow[d, Rightarrow, "(2)"] & \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es normal} \\ \text{en } X \end{array}} \arrow[r, Rightarrow, "(5)"] \arrow[d, Rightarrow, "(4)"] & \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es internamente} \\ \text{normal en } X \end{array}} \\
\boxed{Y \text{ es normal}} \arrow[r, Rightarrow, "(3)"] & \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es cercanamente} \\ \text{normal en } X \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es supernormal} \\ \text{en } X \end{array}} \arrow[u, Rightarrow, "(6)"']
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 2.3

En el Diagrama 2.3 encontramos las relaciones de las versiones relativas de normalidad, las implicaciones indicadas por la dirección de las fechas quedan establecidas en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.2. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se cumple lo siguiente:

(a) Si Y es fuertemente normal en X, entonces Y es normal en X y Y es un espacio normal.

(b) Si Y es normal en X, entonces Y es internamente normal en X y Y es cercanamente normal en X.

(c) Si Y es un espacio normal, entonces Y es cercanamente normal en X.

(d) Si Y es supernormal en X, entonces Y es internamente normal en X.

Demostración. (a) Supongamos que Y es fuertemente normal en X.

Afirmación 1: Y es normal en X.

En efecto, sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en X. Es evidente que $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son subconjuntos ajenos y cerrados en Y. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$.

Afirmación 2: Y es un espacio normal.

En efecto, sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en Y. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Claramente, $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos ajenos y abiertos en Y tales que $A \subseteq U \cap Y$ y $B \subseteq V \cap Y$.

(b) Supongamos que Y es normal en X.

Afirmación 1: Y es internamente normal en X.

En efecto, sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en X contenidos en Y. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$. Como $A \cap Y = A$ y $B \cap Y = B$, se concluye que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Afirmación 2: Y es cercanamente normal en X.

En efecto, sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en X. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$. Claramente, $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos ajenos y abiertos en Y tales que $A \cap Y \subseteq U \cap Y$ y $A \cap Y \subseteq V \cap Y$.

(c) Supongamos que Y es un espacio normal. Sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en X. Se sigue que $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son subconjuntos ajenos y cerrados en Y. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en Y tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $A \cap Y \subseteq V$.

La demostración de la parte (d) es inmediata de las definiciones correspondientes. $\square$

En la bibliografía se pueden consultar algunos ejemplos que muestran que las flechas no son reversibles. En este trabajo de tesis citamos los dos siguientes, pues los argumentos de su veracidad se escapan de nuestros objetivos.

(1) En [4, Ejemplo 3.5] se muestra que la flecha (5) no es reversible.

(2) En [11, Ejemplo 4] se garantiza que la flecha (6) no es reversible.

Ejemplo 2.3.3. ([3, Ejemplo 2]) La flecha (4) no es reversible. Considere el plano de Niemytzki (Ejemplo 1.2.51). Note que L_1 es un espacio normal (pues L_1 es subespacio discreto de L) y por lo tanto L_1 es cercanamente normal en L. Sea

$$C = \{(r, q) \in L_2 : r, q \in \mathbb{Q}\}.$$

Es inmediato que C es un subconjunto denso en L.

Afirmación: L_1 no es internamente normal en L.

Para la demostración de esta afirmación, procedemos por contradicción. Supongamos que L_1 es internamente normal en L. Luego, para todo $A \subseteq L_1$, existen subconjuntos abiertos U_A, V_A en L tales que $A \subseteq U_A$, $L_1 \setminus A \subseteq V_A$ y $U_A \cap V_A = \emptyset$. Ahora, definimos una función $\Phi : \mathbb{P}(L_1) \to \mathbb{P}(C)$ de la siguiente manera: a cada $A \subseteq L_1$, le asignamos un conjunto $C_A = C \cap U_A$. Veamos que Φ es una función inyectiva. Tomamos $A, B \subseteq L_1$

con $A \neq B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \setminus B \neq \emptyset$. Note que $A \setminus B \subseteq U_A \cap V_B$, lo cual implica que $U_A \cap V_B \neq \emptyset$. Del Teorema 1.2.35, $(U_A \cap V_B) \cap C \neq \emptyset$, pero $(U_A \cap V_B) \cap C \subseteq C_A \setminus U_B \subseteq C_A \setminus C_B$; por lo que $C_A \setminus C_B \neq \emptyset$, es decir, $C_A \neq C_B$. Por lo tanto la función Φ es inyectiva.

De la Definición 1.1.22, $|\mathbb{P}(L_1)| \leq |\mathbb{P}(C)|$. Ahora, del Teorema 1.1.28, se tiene que $|\mathbb{P}(L_1)| = 2^{|L_1|} = 2^{\mathfrak{c}}$. Nuevamente, del Teorema 1.1.28 y de los Teoremas 1.1.25 y 1.1.29, se obtiene que $|\mathbb{P}(C)| = 2^{|C|} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Se concluye que $2^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{c}$, lo cual contradice el Teorema de Cantor 1.1.27. Por lo tanto se tienen probada la afirmación.

Finalmente, como L_1 no es internamente normal en L, se tiene que L_1 no es normal en L.

En esta misma línea, hacemos los siguientes aportes.

Ejemplo 2.3.4. Las flechas (1) y (3) no son reversibles. Considere el plano de Niemytzki. Como L es un espacio completamente regular que no es normal. Del Corolario 1.2.64, L se puede encajar en un espacio normal L^*. Por lo tanto, L es normal en L^* y L es cercanamente normal en L^*. Puesto que L es normal en L^* y L no es fuertemente normal en L^*, pues L no es un espacio normal, se tiene que la flecha (1) no es reversible. Además, dado que L es cercanamente normal en L^* y L no es un espacio normal, la flecha (3) no es reversible.

Ejemplo 2.3.5. La flecha (2) no es reversible. Considere el espacio topológico X definido en el Ejemplo 2.2.3 y sea $Y = \{p, q\}$. Claramente Y es un subespacio discreto de X, por lo tanto, Y es un espacio normal. Por otra parte, $\{p\}$ y $\{q\}$ son conjuntos cerrados en Y, que es sencillo distinguir, no pueden ser separados por conjuntos abiertos ajenos en X. Por lo tanto, Y no es fuertemente normal en X.

Ahora, recordemos que hemos demostrado en la Proposición 1.2.55 que un espacio X es normal si para cada subconjunto cerrado F en X y cada subconjunto abierto U en X que contenga a F, existe un subconjunto abierto V en X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Es conocida la siguiente manera de caracterizar la normalidad fuerte en X.

Teorema 2.3.6. ([25, Teorema 2.3]) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es fuertemente normal en X si y sólo si para cada subconjunto F cerrado en Y y para cada subconjunto abierto U en Y tal que $F \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \cup (X \setminus Y)$.

Omitimos la demostración del Teorema 2.3.6, sin embargo la hemos utilizado como modelo para las demostraciones de los enunciados del siguiente teorema, donde se presentan caracterizaciones para las propiedades de normalidad relativa, cercanamente normal e internamente normal. De esta forma el Teorema 2.3.7, es un aporte original del presente trabajo de tesis.

Teorema 2.3.7. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se tiene:

(1) Y es normal en X si y sólo si para todo subconjunto cerrado F en X y cualquier subconjunto abierto U en X que contenga a F, existe un conjunto abierto V en X tal que $F \cap Y \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \cup (X \setminus Y)$.

(2) Y es cercanamente normal en X si y sólo si para todo subconjunto cerrado en F en X y cualquier subconjunto abierto U en X que contenga a F, existe un subconjunto abierto V en Y tal que $F \cap Y \subseteq V \subseteq \overline{V}^Y \subseteq Y \setminus U$.

(3) Y es internamente normal en X si y sólo si para todo subconjunto $F \subseteq Y$ cerrado en X y para cada subconjunto abierto U en X que contenga a F y $X \setminus U \subseteq Y$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. (1) Supongamos que Y es normal en X. Sean F un subconjunto cerrado en X y U un subconjunto abierto en X tales que $F \subseteq U$. Como $F \cap (X \setminus U) = \emptyset$, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1 y W_2 en X tales que:

$$F \cap Y \subseteq W_1, \quad (X \setminus U) \cap Y \subseteq W_2 \quad \text{y} \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset.$$

Se tiene que $F \cap Y \subseteq W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq X \setminus W_2 \subseteq X \setminus [(X \setminus U) \cap Y] = U \cup (X \setminus Y)$.

Recíprocamente, mostremos que Y es normal en X. Sean A y B subconjuntos cerrados y ajenos en X. Dado que $F \subseteq X \setminus B$, por hipótesis, existe un subconjunto abierto V en X tal que

$$A \cap Y \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq (X \setminus B) \cup (X \setminus Y).$$

De aquí,

$$A \cap Y \subseteq V, \quad B \cap Y = X \setminus [(X \setminus B) \cup (X \setminus Y)] \subseteq X \setminus \overline{V} \quad \text{y} \quad V \cap X \setminus \overline{V} = \emptyset.$$

Por lo tanto, Y es normal en X.

(2) Supongamos que Y es cercanamente normal en X. Sea F un subconjunto cerrado en X y U un subconjunto abierto en X tal que $F \subseteq U$. Como $F \cap (X \setminus U) = \emptyset$, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1, W_2 en Y tales que

$$F \cap Y \subseteq W_1, \quad (X \setminus U) \cap Y \subseteq W_2 \quad \text{y} \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset.$$

Se tiene que

$$F \cap Y \subseteq W_1 \subseteq \overline{W_1}^Y \subseteq Y \setminus W_2 \subseteq Y \setminus (X \setminus U) = Y \setminus U.$$

Recíprocamente, probemos que Y es cercanamente normal en X. Para ello, sean A y B subconjuntos cerrados y ajenos en X. Dado que $A \subseteq X \setminus U$, por hipótesis, existe un subconjunto abierto V en Y tal que $A \cap Y \subseteq V \subseteq \overline{V}^Y \subseteq Y \setminus (X \setminus B)$. De lo anterior, no es difícil verificar que

$$A \cap Y \subseteq V, \quad B \cap Y \subseteq Y \setminus [Y \setminus (X \setminus B)] \subseteq Y \setminus \overline{V}^Y, \quad V \cap X \setminus \overline{V} = \emptyset$$

y, además, que V y $Y \setminus \overline{V}^Y$ son conjuntos abiertos ajenos en Y.

(3) La demostración de esta equivalencia es similar a la del Teorema 2.2.7. □

Finalmente, en el mismo sentido de los resultados previos, presentamos la siguiente caracterización de supernormalidad. Omitimos su prueba en vista de que es muy similar a la demostración de la Proposición 2.2.6.

Proposición 2.3.8. ([11, Lema 3.2]) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X se tiene que Y es supernormal en X si y sólo si para cada $A \subseteq Y$ cerrado en X y cualquier subconjunto abierto U en X tal que $A \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V en X tal forma que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subset U$.

Ahora, veamos condiciones bajo las cuales se garantiza que las flechas en el Diagrama 2.3 son reversibles.

Proposición 2.3.9. ([3, Proposiciones 4 y 7]) Sean X un espacio topológico y Y un subespacio denso en X. Se cumple lo siguiente:

(1) Y es cercanamente normal en X si y sólo si Y es normal en X.

(2) Y es un espacio normal si y sólo si Y es fuertemente normal en X.

Demostración. En vista de que las demostraciones de (1) y (2) son similares, sólo hacemos la de la parte (2).

(2) Supongamos que Y es un es espacio normal. Para demostrar que Y es fuertemente normal en X, consideremos dos subconjuntos cerrados A y B en Y con $A \cap B = \emptyset$. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos U y V en Y tales que

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Sean U' y V' subconjuntos abiertos en X tales que $U = U' \cap Y$ y $V = V' \cap Y$. Veamos que $U' \cap V' = \emptyset$. Para ésto, si ocurre lo contrario, en vista de que Y es denso en X, se tiene que $(U' \cap V') \cap Y \neq \emptyset$. De donde, obtenemos que $U \cap V \neq \emptyset$, una contradicción. Así, $U' \cap V' = \emptyset$. Observemos que $A \subseteq U'$ y $B \subseteq V'$. Por lo tanto Y es fuertemente normal en X. El recíproco se deriva de las definiciones correspondientes. □

Proposición 2.3.10. ([3, Proposición 8]) Sean X un espacio topológico y Y un subespacio cerrado en X. Se tiene que Y es normal en X si y sólo si Y es fuertemente normal en X.

Omitimos la demostración de la Proposición 2.3.10, sin embargo la hemos utilizado como guía para las demostraciones de los enunciados del siguiente teorema.

Teorema 2.3.11. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio cerrado en X. Se tiene que:

(1) Y es cercanamente normal en X si y sólo si Y es un espacio normal.

(2) Y es internamente normal en X si y sólo si Y es normal en X

Demostración. (1) Supongamos que Y es cercanamente normal en X. Para demostrar que Y es un espacio normal, consideramos A y B subconjuntos cerrados en Y con $A \cap B = \emptyset$. Como Y es cerrado en X, A y B son cerrados y ajenos en X. De donde existen subconjuntos abiertos U y V en Y tales que

$$A \cap Y \subseteq U, \quad B \cap Y \subseteq V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Note que $A \cap Y = A$ y $B \cap Y = B$, lo que garantiza que Y es un espacio normal en X.

El recíproco se deriva de las definiciones correspondientes.

(2) Vamos a demostrar que Y es normal en X. Sean A, B subconjuntos cerrados en X tales que $A \cap B = \emptyset$. Como Y es cerrado en X, $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son subconjuntos cerrados y ajenos en X contenidos en Y. Luego, dado que Y es internamente normal en X, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que:

$$A \cap Y \subseteq U, \quad B \cap Y \subseteq V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Por lo tanto, Y es normal en X.

El recíproco se deriva de las definiciones correspondientes. □

Teorema 2.3.12. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio cerrado en X tales que para cada subconjunto cerrado A en X contenido en Y, existe un subconjunto abierto U en X con $A \subseteq U \subseteq Y$. Se tiene que Y es internamente normal en X si y sólo si Y es supernormal en X.

Demostración. Supongamos que Y es internamente normal en X. Sean A y B subconjuntos cerrados en X tales que $A \subseteq Y$ y $A \cap B = \emptyset$. Como Y es cerrado en X, $B \cap Y$ y A son subconjuntos cerrados y ajenos en X contenidos en Y. Luego, dado que Y es internamente normal en X, existen subconjuntos abiertos U' y V' en X tales que $A \subseteq U'$, $B \cap Y \subseteq V'$ y $U' \cap V' = \emptyset$. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto U'' tal que $A \subseteq U'' \subseteq Y$. Definamos $U = U' \cap U''$ y $V = V' \cup (X \setminus Y)$. Claramente, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y U, V son subconjuntos abiertos en X. Además, de la igualdad:

$$U \cap V = U \cap [V' \cup (X \setminus Y)] = (U \cap V') \cup [U \cap (X \setminus Y)]$$

se desprende que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto Y es supernormal en X.

El recíproco se deriva de las definiciones correspondientes. □

A manera de conclusión presentamos lo siguiente. Por un lado, en el Diagrama 2.4 recordamos las relaciones bien conocidas entre los axiomas clásicos de separación (vea Teorema 1.2.57). De hecho, en la mayoría de los libros de topología es posible encontrar ejemplos que muestran que los recíprocos de las flechas no siempre se cumplen. El lector puede consultar [7, págs. 148,154,161,176] para algunos ejemplos particulares.

$$\boxed{X \text{ es normal}} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{X \text{ es regular}} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \boxed{X \text{ es Hausdorff}} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \boxed{X \text{ es } T_1}$$

Diagrama 2.4

Por otro lado, en vista de lo anterior, resulta natural preguntarse: ¿también existen relaciones entre las propiedades relativas de separación que hemos definido a lo largo del escrito? A continuación, en el Diagrama 2.5 presentamos un avance parcial de esta pregunta.

De manera formal, las implicaciones quedan establecidas en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.13. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se tiene:

(1) Si Y es normal en X, entonces Y es regular en X.

$$\boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es normal} \\ \text{en } X \end{array}} \xRightarrow{(1)} \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es regular} \\ \text{en } X \end{array}} \xRightarrow{(2)} \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es Hausdorff} \\ \text{en } X \end{array}}$$

Diagrama 2.5

(2) Si Y es regular en X, entonces Y es Hausdorff en X.

Demostración. (1) Supongamos que Y es normal en X. Tomemos $y \in Y$ y un subconjunto F cerrado en X tales que $y \notin F$. Para los conjuntos $\{y\}$ y F, cerrados en X y ajenos, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $y \in \{y\} \cap Y \subseteq U$, $F \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De donde, Y es regular en X.

(2) Supongamos que Y es regular en X. Sean $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$. Dado que $y_1 \notin \{y_2\}$, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in \{y_2\} \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De esta forma, obtenemos que Y es Hausdorff en X. □

A su vez, para mostrar que ninguna flecha en el Diagrama 2.5 puede ser reversible, existen ejemplos triviales como vemos a continuación. Si se desea ver que la flecha (1) no es reversible, es suficiente considerar un espacio topológico X que sea regular y no normal. Así, no es complicado verificar que si se elige $Y = X$, entonces Y es regular en X y Y no es normal en X. De esta misma manera, se puede proceder para comprobar que la flecha (2) no es reversible. Sin embargo, en el presente trabajo proporcionamos ejemplos no triviales que muestran que ninguna flecha en el Diagrama 2.5 es reversible.

Ejemplo 2.3.14. La flecha (1) no es reversible. Consideremos el plano de Niemytzki. En el Ejemplo 2.3.3, se muestra que L_1 no es normal en L. Como es sabido, L es un espacio regular [7, pág. 162], se sigue que L_1 es regular en L.

Ejemplo 2.3.15. La flecha (2) no es reversible. Considere Y y X como en el Ejemplo 2.2.4. Hemos indicado que Y no es regular en X. En cambio, claramente X es un espacio Hausdorff, por lo que en particular Y es Hausdorff en X.

Como el lector puede observar, el Diagrama 2.5 es sólo uno de tantos que se pueden generar con las nociones que hemos definido. Por ejemplo, se puede pensar qué pasa si ahora se inicia con otra propiedad relativa, digamos Y fuertemente normal en X, o bien con Y internamente normal en X, Y cercanamente normal en X o con Y supernormal en X. Incluso, se podría pensar si existen relaciones entre axiomas de diferente naturaleza. Cada una de estas ideas puede generar un nuevo diagrama, que a su vez, requerirá sus contraejemplos. Sin embargo, en este trabajo de tesis no resolvemos esa tarea.

Sección 2.4

Axiomas relativos de compacidad y propiedades

Respecto a propiedades topológicas relativas, en la Definición 2.4.1, recordamos dos versiones relativas de compacidad. La noción de compacto en X la tomamos de [3, pág. 95]. A su vez, de fecha más reciente, la de internamente compacto en X, fue introducida en [4, pág. 35].

Definición 2.4.1. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *compacto en* X si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita para Y.

(b) Y es *internamente compacto en* X si para cada subconjunto $Z \subseteq Y$ el cual es cerrado en X, se tiene que Z es un espacio compacto.

Los conceptos de la Definición 2.4.1 se comportan como lo muestra el Diagrama 2.6.

$$\boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es} \\ \text{compacto} \end{array}} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es compacto} \\ \text{en } X \end{array}} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es internamente} \\ \text{compacto en } X \end{array}}$$

Diagrama 2.6

Las implicaciones del Diagrama 2.6 quedan establecidas en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.2. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se cumple lo siguiente:

(1) Si Y es un espacio compacto, entonces Y es compacto en X.

(2) Si Y es compacto en X, entonces Y es internamente compacto en X.

Demostración. (1) Supongamos que Y es un espacio compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Claramente, $\mathcal{U}^* = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de Y. Por hipótesis, existen $U_1, \dots, U_n$ tales que $Y = (U_1 \cap Y) \cup \dots \cup (U_n \cap Y)$. Se tiene que, $\{U_1, \dots, U_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para Y.

(1) Sea $Z \subseteq Y$ cerrado en X. Como Y es compacto en X y $Z \subseteq Y$, se sigue que Z es compacto en X.

Afirmación: Z es un espacio compacto.

En efecto, sea $\mathcal{U}^*$ una cubierta abierta para Z. Para cada $U^* \in \mathcal{U}^*$, existe un conjunto abierto U en X tal que $U \cap Y = U^*$. Puesto que Z es un subconjunto cerrado en X, se sigue que $\mathcal{U} = \{U : U^* \in \mathcal{U}^*\} \cup \{X \setminus Z\}$ es una cubierta abierta para X. Como Z es compacto en X, existe $\{U_1, \ldots, U_n\}$ subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para Z. Claramente, $\{U_1^*, \ldots, U_n^*\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}^*$ para Z. $\square$

El recíproco de las implicaciones anteriores no se cumplen. En esta tesis sólo veremos que la flecha (1) no es reversible.

Observación 2.4.3. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X.

(1) Si X es compacto, entonces cualquier subespacio Z de X cumple que Z es compacto en X.

(2) Supongamos que Y es compacto en X y $Z \subseteq Y$, se cumple que Z es compacto en X.

Ejemplo 2.4.4. Consideremos el espacio $X = [0, 1]$ con la topología usual y el subespacio $Y = (0, 1)$. Se tiene que Y es compacto en X (Observación 2.4.3-(1)), sin embargo Y no es un espacio compacto (con la topología heredada de X). Esto muestra que la implicación Y compacto en X entonces Y compacto no siempre se cumple.

Capítulo 3

Axiomas relativos en hiperespacios

La relación que guarda un hiperespacio con su espacio base ha sido ampliamente estudiada, con el uso de propiedades diversas. En [1, 10, 20, 27] encontramos algunos trabajos al respecto. Como hemos mencionado en la Introducción de la tesis, resulta importante conocer si una cierta propiedad topológica que posea un espacio se conversa a alguno de sus hiperespacios y viceversa. Algunas de las propiedades que se han analizado al respecto son precisamente las que satisfacen los axiomas relativos de separación que hemos estudiado en el Capítulo 2. De esta forma, en el presente capítulo, hacemos un análisis de los axiomas relativos de separación T_1, T_2, T_3 y T_4, así como los concernientes a la compacidad, en el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$.

Sección 3.1

Propiedades relativas de separación en $\mathrm{CL}(X)$

En [2], Arhangel'skii logra generalizar resultados de invariantes cardinales empleando la teoría de propiedades topológicas relativas. En dicho artículo propone aplicar esta misma idea a la teoría de hiperespacios analizando el subespacio $\mathcal{F}(Y, X)$ de $\mathrm{CL}(X)$ con la topología de Vietoris, donde Y es un subconjunto de X y $\mathcal{F}(Y, X)$ denota el conjunto de elementos en $\mathrm{CL}(X)$ que están contenidos en Y [2, Problema 2]. En otras palabras, Arhangel'skii propone realizar un estudio del Problema $(**)$ cuando $H(Y) = \mathcal{F}(Y, X)$. En vista de la notación que establecimos en la Sección 1.3, el lector puede distinguir que la familia $\mathcal{F}(Y, X)$ es precisamente $\langle Y \rangle$ o bien Y^+. Preferimos utilizar esta última notación, que es la empleada en [11], para distinguir el subespacio $\mathcal{F}(Y, X)$. De esta forma, el Problema $(**)$, se plantea como sigue.

Problema 3.1.1. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Analizar las posibles relaciones entre las siguientes proposiciones:

(1) Y^+ tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en $\mathrm{CL}(X)$;

(2) Y tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en X,

donde $\mathcal{R}$ es alguna propiedad topológica relativa.

En este trabajo, centramos nuestra atención en el estudio del Problema 3.1.1, cuando la propiedad topológica relativa $\mathcal{R}$ corresponde a cada una de las versiones relativas de los axiomas de separación y a las de compacidad que hemos establecido en las Definiciones 2.1.1 y 2.4.1. Para este estudio hemos considerado, principalmente como eje central, exponer versiones relativas de los enunciados del Teorema 1.3.3. Cabe señalar que dichas versiones relativas son una generalización de lo establecido en el Teorema 1.3.3, cuando Y coincide con X.

Comenzamos con una versión relativa del enunciado (1) en el Teorema 1.3.3.

Teorema 3.1.2. Sean X un espacio topológico (no necesariamente T_1) y Y un subconjunto de X. Si Y es un espacio T_1, entonces Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$.

Demostración. Para ver que Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$, fije cualquier punto $A \in Y^+$. Mostremos que $\mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$ es un subconjunto abierto en $\mathrm{CL}(X)$. Sea $C \in \mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$. Puesto que $C \neq A$, tenemos dos casos:

Caso 1. Existe $c \in C \setminus A$. En este caso, consideremos el subconjunto abierto $\langle X, X \setminus A\rangle$ en $\mathrm{CL}(X)$. Claramente, $C \in \langle X, X \setminus A\rangle$ y $\langle X, X \setminus A\rangle \subseteq \mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$.

Caso 2. Existe $a \in A \setminus C$. Por hipótesis, $\{a\}$ es un subconjunto cerrado en Y, luego, $\{a\} \cap A$ es un conjunto cerrado en A. Como $\{a\} \cap A$ es un conjunto cerrado en A y A es un conjunto cerrado en X, se sigue que $\{a\} \cap A = \{a\}$ es un conjunto cerrado en X. Luego, $\langle X \setminus \{a\}\rangle$ es un subconjunto abierto en $\mathrm{CL}(X)$; además, $C \in \langle X \setminus \{a\}\rangle$ y $\langle X \setminus \{a\}\rangle \subseteq \mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$. Con todo, $\mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$ es un subconjunto abierto en $\mathrm{CL}(X)$. $\square$

Como una consecuencia inmediata del Teorema 3.1.2, obtenemos el inciso (1) del Teorema 1.3.3.

Corolario 3.1.3. Sea X un espacio topológico. Se cumple que si X es T_1, entonces $\mathrm{CL}(X)$ es T_1.

Del Diagrama 2.1 se obtiene el siguiente corolario, que corresponde a la Proposición 3.1 en [11].

Corolario 3.1.4. Sean X un espacio topológico (no necesariamente T_1) y Y un subconjunto de X. Si Y es T_1 en X, entonces Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$.

El ejemplo siguiente muestra que el recíproco del Teorema 3.1.2 y el recíproco del Corolario 3.1.4 no son verdaderos.

Ejemplo 3.1.5. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$. Consideremos el espacio topológico (X, τ) y el subespacio $Y = \{a, b, c\}$ de X. Claramente, Y no es un espacio T_1, y por el Diagrama 2.1, Y no es T_1 en X.
Por otra parte, se tiene que $\mathrm{CL}(X) = \{X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ y $Y^+ = \{\{a, b\}\}$. Ahora, como $\mathrm{CL}(X) \setminus \{\{a, b\}\} = \langle X, \{c, d\}\rangle$, tenemos que $\{\{a, b\}\}$ es un subconjunto cerrado en $\mathrm{CL}(X)$. De donde, Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$.

En lo que concierne a la obtención de una versión relativa del enunciado (2) del Teorema 1.3.3, note que es necesario considerar varias situaciones, ya que contamos con dos versiones relativas para el axioma de separación Hausdorff y tres versiones relativas para el axioma de regularidad. Hasta el momento, sólo conocemos la siguiente equivalencia.

Teorema 3.1.6. ([11, Teorema 3.2]) Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Se cumple que Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$ si y sólo si Y es internamente regular en X.

Demostración. Supongamos que Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$ y Y no es internamente regular en X, esto es, podemos encontrar un subconjunto F de Y que es cerrado en X y un punto $y \in Y$ con $y \notin F$, tales que F y y no pueden estar separados por subconjuntos abiertos y ajenos en X. Note que F y $F \cup \{y\}$ son elementos diferentes de Y^+, así podemos encontrar dos subconjuntos abiertos básicos y ajenos en $\mathrm{CL}(X)$, $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$, tales que $F \in \mathcal{U}$ y $F \cup \{y\} \in \mathcal{V}$. Sea $J = \{j \leq m : y \in V_j\}$ y $J' = \{j \leq m : y \notin V_j\}$, denotamos

$$H = \bigcap \{V_j : j \in J\};$$

dado que $y \in H$ y $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, existe un punto $z \in (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap H$. Ahora, el conjunto

$$\{z, u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{v_j : j \in J'\},$$

donde $u_i \in F \cap U_i$ para cada $i \leq n$ y $v_j \in F \cap V_j$ para $j \in J'$, pertenece a $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, lo cual es una contradicción. De aquí, Y es internamente regular en X.

Recíprocamente, supongamos que Y es internamente regular en X. Sean A y B dos puntos de Y^+ tales que $A \neq B$. Sin perder generalidad, supongamos que existe $a \in A \setminus B$. Note que $a \in Y$ y B es un subconjunto de Y que es cerrado en X y $a \notin B$. Como Y es internamente regular en X, existen dos subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $a \in U$ y $B \subseteq V$. Es claro que $A \in \langle X, U \rangle$ y $B \in \langle V \rangle$, más aún, $\langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle = \emptyset$. Por lo tanto Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$. $\square$

Corolario 3.1.7. (Teorema 1.3.3-(2)) Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es regular si y sólo si $\mathrm{CL}(X)$ es Hausdorff.

Una pregunta interesante que surge es: ¿la propiedad relativa de regularidad en el Teorema 3.1.6 puede ser reemplazada por alguna otra de las establecidas en el Diagrama 2.2?, o ¿es posible reemplazar la propiedad relativa de Hausdorff por alguna otra de las que conforman el Diagrama 2.1? El siguiente ejemplo muestra que suponer la regularidad de Y en X no garantiza que Y^+ sea fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$.

Ejemplo 3.1.8. Consideremos el espacio X del Ejemplo 2.2.3. Se tiene que X es un espacio T_1, pues si $x \in X'$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X; ahora si $x \in \{p, q\}$, el conjunto $X' \setminus \{x\}$ es un conjunto abierto en X, luego, $\{x\}$ es cerrado en X. Ahora, consideremos el subespacio $Y = X' \cup \{p\}$.

Afirmación 1: Y es regular en X.

En efecto; sean $y \in Y$ y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado en X tales que $y \notin F$. Entonces $y \in X'$ o $y = p$. Si $y \in X'$, es suficiente tomar a los conjuntos abiertos en X, $U = \{y\}$ y $V = (\bigcup_{x \in F}\{x\}) \cup (\{p, q\} \cup X' \setminus \{y\})$, así, $y \in U$, $F \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si $y = p$, entonces existe un subconjunto finito A de X' con la propiedad que $(\{p\} \cup X' \setminus A) \cap F = \emptyset$. Luego, $F \subseteq A \cup \{q\}$, por lo que $U = \{p\} \cup (X' \setminus A)$ y $V = A$ son subconjuntos abiertos en X, ajenos y tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$. Por lo tanto, Y es regular en X.

Además, puesto que los conjuntos $\{p\}$ y $\{q\}$ no poseen vecindades ajenas en X, Y no es fuertemente regular en X y Y no es superregular en X.

Afirmación 2: Y^+ no es fuertemente regular en $\mathrm{CL}(X)$.

En efecto, esto se sigue pues no es posible separar en $\mathrm{CL}(X)$ con subconjuntos abiertos los puntos $\{p\} \in Y^+$ y $\{q\} \in \mathrm{CL}(X)$. Por lo tanto, Y^+ no es fuertemente regular en $\mathrm{CL}(X)$.

Es natural hacernos la pregunta: ¿Existe una caracterización de la propiedad fuertemente Hausdorff de Y^+ en $\mathrm{CL}(X)$ en términos de alguna versión relativa de regularidad de Y en X? Una respuesta parcial a esta cuestión es la proposición siguiente.

Proposición 3.1.9. ([11, Proposición 3.3]) Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Si Y es superregular en X y Y es fuertemente regular en X, entonces Y^+ es fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$.

Demostración. Fijemos dos puntos $A \in Y^+$ y $B \in \mathrm{CL}(X)$ tales que $A \neq B$. Tenemos dos casos:

Caso 1. Existe $a \in A \setminus B$. Dado que $a \in Y$, B es un subconjunto cerrado en X tal que $a \notin B$ y Y es superregular en X, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Se tiene que $\langle X, U\rangle$ y $\langle V\rangle$ son subconjuntos abiertos en $\mathrm{CL}(X)$. Además, $A \in \langle X, U\rangle$, $B \in \langle V\rangle$ y $\langle X, U\rangle \cap \langle V\rangle = \emptyset$.

Caso 2. Existe $b \in B \setminus A$. En vista de que Y es fuertemente regular en X, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $b \in U$, $A \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Dado que $A \subseteq Y$, se tiene que $A \subseteq V$. Es sencillo ver que $\langle X, U\rangle$ y $\langle V\rangle$ son subconjuntos abiertos en $\mathrm{CL}(X)$ tales que $A \in \langle V\rangle$, $B \in \langle X, U\rangle$ y $\langle X, U\rangle \cap \langle V\rangle = \emptyset$.

Por lo tanto, en cualquier caso, los subconjuntos A y B pueden ser separados por subconjuntos abiertos en $\mathrm{CL}(X)$. De aquí, Y^+ es fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$. $\square$

Ahora, es el turno de tratar la posibilidad de una versión relativa de la equivalencia entre (a) e (c), de la parte (3) del Teorema 1.3.3. Para este fin, serán empleadas las caracterizaciones de las propiedades de superregularidad y supernormalidad que fueron vistas en el Capítulo 2, a saber, las Proposiciones 2.2.6 y 2.3.8, respectivamente.

Teorema 3.1.10. ([11, Teorema 3.6]) Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Se tiene que Y^+ es superregular en $\mathrm{CL}(X)$ si y sólo si Y es supernormal en X.

Demostración. Supongamos que Y^+ es superregular en $\mathrm{CL}(X)$. Utilizamos la Proposición 2.3.8 para demostrar que Y es supernormal en X. Sean $A \subseteq Y$ un subconjunto cerrado en X y U cualquier subconjunto abierto en X tales que $A \subseteq U$. Es claro que $A \in Y^+$ y $A \in \langle U\rangle$. Luego, por hipótesis y por la Proposicón 2.2.6, existe un subconjunto abierto, que lo podemos suponer abierto básico, $\langle V_1, \ldots, V_m\rangle$ en $\mathrm{CL}(X)$ tal que $A \in \langle V_1, \ldots, V_m\rangle \subseteq \overline{\langle V_1, \ldots, V_m\rangle} \subseteq \langle U\rangle$. Sea $V = \bigcup_{j=1}^m V_j$. Se tiene que V es abierto en X, $A \subseteq V \subseteq \overline{V}$ y $\overline{V} = \bigcup_{j=1}^m \overline{V_j}$. Además, $\overline{V} \in \langle \overline{V_1}, \ldots, \overline{V_m}\rangle$. Así, del Lema 1.3.1 obtenemos que $\overline{V} \in \langle U\rangle$, esto es, $\overline{V} \subseteq U$. Por tanto, Y es supernormal en X.

Recíprocamente, supongamos que Y es supernormal en X. Demostremos que Y^+ es superregular en $\mathrm{CL}(X)$, utilizando la Proposición 2.2.6. Sean $A \in Y^+$ y $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ un subconjunto abierto básico en $\mathrm{CL}(X)$ tales que $A \in \mathcal{U}$. Notemos que $A \subseteq Y$ es un subconjunto cerrado en X y que el subconjunto $\bigcup_{i=1}^n U_i$ es un abierto en X que contiene a A. Luego, por hipótesis y por la Proposición 2.3.8, existe un subconjunto abierto V en X tal que $A \subseteq V \subset \overline{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $x_i \in A \cap U_i$, note que $x_i \in Y$ y $x_i \in U_i$. Aplicando la Proposición 2.3.8 nuevamente, se sigue que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe un subconjunto abierto V_i en X tal que $x_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$. Definimos $\mathcal{W} = \langle V, V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$. Note que $A \in \mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$. Finalmente, del Lema 1.3.1 y de la construcción de los subconjuntos V_i, se obtiene que $\overline{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{U}$. De donde $A \in \mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, por la Proposición 2.2.6, Y^+ es superregular en $\mathrm{CL}(X)$, como se requería. □

Como una consecuencia inmediata del Teorema 3.1.10, obtenemos el inciso (3) del Teorema 1.3.3.

Corolario 3.1.11. Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es normal si y sólo si $\mathrm{CL}(X)$ es regular.

Sección 3.2

Propiedades relativas de compacidad en $\mathrm{CL}(X)$

Analizando el Teorema 1.3.3, notamos que la compacidad es una de las propiedades topológicas en donde se estabilizan X y su hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$, esto es el espacio y su hiperespacio tienen la misma propiedad. Específicamente, la parte (4) del Teorema 1.3.3, garantiza que X es compacto si y sólo si $\mathrm{CL}(X)$ lo es. Este resultado es fundamental en la teoría de los hiperespacios. De hecho, una pieza clave en su demostración es el Lema Alexander, el cual establece, como el lector puede recordar (vea Lema 1.2.61), que un espacio es compacto si y sólo si toda cubierta con elementos de una subbase admite una subcubierta finita. De esta manera, al pensar en poseer una forma relativa de la parte (4) del Teorema 1.3.3, debemos contar con una versión relativa del Lema de Alexander. En el siguiente resultado se resuelve esta situación.

Lema 3.2.1. ([11, Lema 4.1]) Sea $\mathcal{L}$ una subbase para un espacio de X. Se tiene que Y es compacto en X si y sólo si cada cubierta de X por elementos de $\mathcal{L}$ tiene una subfamilia finita que cubre a Y.

Demostración. Si Y es compacto en X, entonces cada cubierta de X por elementos de $\mathcal{L}$ tiene una subfamilia finita que cubre a Y.

Recíprocamente, supongamos que Y no es compacto en X. Luego, existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tal que ninguna subfamilia finita de $\mathcal{U}$ cubre Y. Sea $\mathcal{H}$ la familia de todas las cubiertas abiertas de X que no tienen subcubiertas finitas de Y. Luego $\mathcal{H} \neq \emptyset$, pues $\mathcal{U} \in \mathcal{H}$. Además, $\mathcal{D}$ es un subconjunto de $\mathcal{H}$ linealmente ordenado por la contención, entonces $\bigcup \mathcal{D}$ es una cota superior para $\mathcal{D}$ que está en $\mathcal{H}$. Así, del Lema Kuratowski-Zorn (vea [13, pág. 8]), existe un elemento maximal $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$ (vea Definición 1.1.14).

Afirmación: Para cada $M \in \mathcal{M}$ y para cada colección de subconjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tal que $\bigcap_{i=1}^n V_i \subseteq M$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $V_i \in \mathcal{M}$.

En efecto, supongamos la afirmación previa es falsa, esto es, existe $M_0 \in \mathcal{M}$ y existe una colección finita de subconjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que $\bigcap_{i=1}^n V_i \subseteq M_0$, de tal forma que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $V_i \notin \mathcal{M}$. Por la maximalidad de $\mathcal{M}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{M} \cup \{V_i\} \notin \mathcal{H}$, es decir, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existen subconjuntos $M_{i,0}, M_{i,1}, \ldots, M_{i,k}$ tales que $Y \subseteq V_i \cup \bigcup_{j \leq k} M_{i,j}$. Luego, renumerando los subconjuntos $M_{i,j}$,

$$Y \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i \cup \bigcup_{k=1}^{m} M_k \right) \subseteq \left(M_0 \cup \bigcup_{k=1}^{m} M_k \right)$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esto implica que $\mathcal{M} \notin \mathcal{H}$, lo cual es una contradicción ya que $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$, y la demostración de la afirmación está completa.

Ahora, sean $x \in X$ y $M \in \mathcal{M}$ tales que $x \in M$. Dado que $\mathcal{L}$ es una subbase para X, existen $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{L}$ tales que $x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subseteq M$. De la afirmación anterior, existe $i \leq n$ tal que $S_i \in \mathcal{M}$. Así, $x \in S_i \cap M$. Luego $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X, la cual tiene una subfamilia finita que cubre a Y (pues de lo contrario se contradice la maximalidad de $\mathcal{M}$). Pero esto no es posible por nuestra suposición inicial. Por lo tanto, Y es compacto en X. $\square$

Con lo anterior, estamos en posibilidades de demostrar una versión relativa de la parte (4) del Teorema 1.3.3.

Teorema 3.2.2. ([11, Teorema 4.1]) Sean X un espacio topológico Hausdorff y Y un subconjunto de X. Se tiene que Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$ si y sólo si Y es compacto en X.

Demostración. Supongamos que Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de X. Por el Lema 1.3.2, $\{\langle X, U_\alpha \rangle : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de $\mathrm{CL}(X)$. En vista de que Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$, existe un subconjunto finito de F de I tal que $Y^+ \subseteq \bigcup_{i \in F} \langle X, U_i \rangle$. Afirmamos que $Y \subseteq \bigcup_{i \in F} U_i$. En efecto, dado que $y \in Y$ se sigue que $\{y\} \in Y^+$, luego existe $j \in F$ tal que $\{y\} \in \langle X, U_j \rangle$, es decir, $y \in U_j$ para algún $j \in F$. Se concluye que Y es compacto en X.

Recíprocamente, supongamos Y es compacto en X. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\mathrm{CL}(X)$. Por el Lema 3.2.1, podemos asumir que $\mathcal{U}$ esta formada por subconjuntos subbásicos en $\mathrm{CL}(X)$, es decir, $\mathcal{U} = \mathcal{W}^+ \cup \mathcal{V}^-$, donde

$$\mathcal{W}^+ = \{\langle W_i \rangle : i \in I\} \text{ y } \mathcal{V}^- = \{\langle X, V_j \rangle : j \in J\},$$

con W_i y V_j subconjuntos abiertos en X para cada $i \in I$ y cada $j \in J$

Afirmamos que $\{W_i : i \in I\} \cup \{V_j : j \in J\}$ es un cubierta abierta de X. En efecto, sea $x \in X$, luego, $\{x\} \in \mathrm{CL}(X)$, por lo que $\{x\} \in \mathcal{W}^+ \cup \mathcal{V}^-$, es decir, $\{x\} \in \langle W_i \rangle$ o $\{x\} \in \langle X, V_j \rangle$ para algún $i \in I$ y $j \in J$; así, $x \in W_i$ o $x \in V_j$, lo cual prueba la afirmación.

Sea $F = X \setminus \bigcup_{j \in J} V_j$. Sin perder generalidad podemos suponer que $F \neq \emptyset$. Para cada $j \in J$, $F \notin \langle X, V_j \rangle$, así $F \in \langle W_i \rangle$ para algún $i \in I$, lo cual implica que $X \setminus W_i \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$, y por consecuencia, $Y \setminus W_i \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$. Note también que $Y \setminus W_i$ es compacto en X. De aquí, existe $\{V_1, \ldots, V_n\}$ contenido en $\{V_j : j \in J\}$ tal que:

$$Y \setminus W_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j. \tag{3.2.1}$$

Finalmente, probamos que $Y^+ \subseteq (\bigcup_{j=1}^{n} \langle X, V_j \rangle) \cup \langle W_i \rangle$. Sea $A \in Y^+$. Si $A \notin \langle W_i \rangle$, existe un punto $a \in A \setminus W_i$. Por (3.2.1), $A \cap V_j \neq \emptyset$, para algún $j \leq n$. Esto es, $A \in \langle X, V_j \rangle$. Por lo tanto, Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$. $\square$

Corolario 3.2.3. (Teorema 1.3.3-(4)) Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es compacto si y sólo si $\mathrm{CL}(X)$ es compacto.

Es natural preguntarse: ¿la equivalencia en el Teorema 3.2.2 se preserva al remplazar compacidad por internamente compacto? El siguiente resultado muestra que al menos una de las implicaciones se cumple.

Teorema 3.2.4. ([11, Teorema 4.2]) Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Si Y^+ es internamente compacto en $\mathrm{CL}(X)$, entonces Y es internamente compacto en X.

Demostración. Sea Z un subconjunto de Y tal que Z es cerrado en X. Mostremos que Z es un espacio compacto.

Antes de ello, note que $\langle Z \rangle \subseteq Y^+$ ya que Z es un subconjunto de Y, y que $\langle Z \rangle$ es un subconjunto cerrado en $\mathrm{CL}(X)$ pues $\langle Z \rangle = \mathrm{CL}(X) \setminus \langle X, X \setminus Z \rangle$; como Y^+ es internamente compacto en $\mathrm{CL}(X)$, se obtiene que $\langle Z \rangle$ es un espacio compacto.

Ahora, considere una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Z. Dicha cubierta la podemos extender a una cubierta $\mathcal{U}^*$ formada por subconjuntos abiertos en X, como se hizo en el Lema 1.3.2, $(\mathcal{U}^*)^-$ es una cubierta de $\langle Z \rangle$ formada por subconjuntos abiertos de $\mathrm{CL}(X)$. Como $\langle Z \rangle$

es un espacio compacto, es posible hallar una subfamilia finita de $(\mathcal{U}_F^*)^-$ de $(\mathcal{U}^*)^-$ que cubre $\langle Z\rangle$. Claramente, la familia $\mathcal{U}_F^*$ cubre a Z y es finita; así la familia $\mathcal{U}_F$, formada por subconjuntos abiertos en Z, es una subfamilia finita de $\mathcal{U}$ que cubre Z. Se concluye que Z es un espacio compacto. □

3.2.1. Preguntas abiertas

A manera de conclusión presentamos algunas preguntas que resultan de manera inmediata en vista de la teoría existente y de lo que hemos desarrollado. Esto muestra lo amplio que aún puede ser el tema y que existen muchas posibilidades de continuar el análisis e incluso la investigación en esta área de estudio.

Del Teorema 3.1.2 y el Diagrama 2.1, surge la siguiente cuestión.

Pregunta 3.2.5. Sea X es un espacio topológico que no es T_1 y Y un subconjunto de X. Supongamos que Y es un espacio T_1, ¿es cierto Y^+ es un espacio Hausdorff o que Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$?

En vista del Teorema 3.1.6 y de los Diagramas 2.1 y 2.2, resultan las siguientes interrogantes.

Pregunta 3.2.6. Sea X es un espacio topológico que no es T_1 y Y un subconjunto de X.

1. Supongamos que Y^+ es fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$. ¿Se cumple que Y es superregular en X o que Y es fuertemente regular en X? Cabe señalar que en [11, Ejemplo 2], se garantiza un ejemplo de espacios Y y X tales que Y^+ es fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$ y Y no es regular en X.

2. Bajo el supuesto de que Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$, ¿es cierto que Y es superregular en X o que Y es fuertemente regular en X?

3. Si Y es superregular en X, ¿se cumple que Y^+ es fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$ o que Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$?

4. Supongamos que Y es fuertemente regular en X. ¿Es cierto que Y^+ es fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$ o que Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$?

El Teorema 3.1.10 y los Diagramas 2.2 y 2.3, sustentan varias cuestiones, por mencionar algunas, las siguientes.

Pregunta 3.2.7. Sean X es un espacio topológico que no es T_1 y Y un subconjunto de X.

1. Si Y^+ es superregular en $\mathrm{CL}(X)$, ¿es cierto que Y es normal en X o que Y es fuertemente normal en X o que Y es cercanamente normal en X?

2. Suponiendo que Y^+ es regular en $\mathrm{CL}(X)$, ¿se cumple que Y es internamente normal en X o que Y es cercanamente normal en X?

3. Bajo el supuesto de que Y es supernormal en X, ¿es cierto que Y^+ es fuertemente regular en $\mathrm{CL}(X)$?

4. Si Y es normal en X, ¿es cierto que Y^+ es regular en $\mathrm{CL}(X)$ o que Y^+ es fuertemente regular en $\mathrm{CL}(X)$?

De los Teoremas 3.2.2 y 3.2.4, y el Diagrama 2.6, algunas cuestiones que surgen son las siguientes.

Pregunta 3.2.8. Sea X es un espacio topológico y Y un subconjunto de X.

1. Supongamos que Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$. ¿Es cierto que Y es un espacio compacto?

2. Cuando Y^+ es internamente compacto en $\mathrm{CL}(X)$, ¿se cumple que Y es compacto en X o que Y es un espacio compacto?

3. Al suponer que Y es compacto en X, ¿se obtiene que Y^+ es un espacio compacto?

4. Si Y es internamente compacto en X, ¿es cierto que Y^+ es internamente compacto en $\mathrm{CL}(X)$? Esto es, ¿se cumple el recíproco del Teorema 3.2.4?

Conclusiones

El tema que se ha desarrollado en el presente trabajo pertenece a las áreas de la matemática conocidas como topología e hiperespacios. En esta tesis hemos hecho una revisión de algunas propiedades relativas y lo hemos aplicado a los hiperespacios. Específicamente, estudiamos versiones relativas de los axiomas de separación T_1, T_2, T_3 y T_4, así como de la noción de compacidad, con la finalidad de ilustrar la obtención, vía estas propiedades relativas, de resultados clásicos de los hiperespacios. Presentamos un estudio general de esta teoría, exponemos ejemplos y contraejemplos, así como las relaciones entre las diversas versiones relativas que hemos considerado. Uno de los hechos que nos han motivado a realizar el presente trabajo, lo encontramos en el planteamiento del siguiente problema.

Problema $(**)$ Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Analizar las posibles relaciones entre las siguientes proposiciones:

(1) $H(Y)$ tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en $\mathrm{CL}(X)$;

(2) Y tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en X,

donde $\mathcal{R}$ es alguna propiedad topológica relativa y $H(Y)$ es un subespacio de $\mathrm{CL}(X)$.

Siguiendo este modelo de problema, hemos expuesto, entre otros, los siguientes resultados.

Teorema 1. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Si Y es un espacio T_1, entonces Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$.

Teorema 2. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Se cumple que Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$ si y sólo si Y es internamente regular en X.

Teorema 3. Sean X un espacio topológico Hausdorff y Y un subconjunto de X. Se tiene que Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$ si y sólo si Y es compacto en X.

De los cuales, respectivamente, se obtienen los siguientes corolarios, los cuales son resultados debidos a E. Michael [21].

Corolario 1. Sea X un espacio topológico. Se cumple que si X es T_1, entonces $\mathrm{CL}(X)$ es T_1.

Corolario 2. Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es regular si y sólo si $\mathrm{CL}(X)$ es Hausdorff.

Corolario 3. Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es compacto si y sólo si $\mathrm{CL}(X)$ es compacto.

Bibliografía

[1] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl., 156 (2009), 1013-1033.

[2] A. V. Arhangel'skii, *A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 36 (1995), 305-325.

[3] A. V. Arhangel'skii, *Relative topological properties and relative topological spaces*, Topology Appl. 70 (1996) 87-99.

[4] A. V. Arhangel'skii, *Relative normality and dense subspaces*, Topology Appl. 123 (2002) 27-36.

[5] A. V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi, *Beginnings of the theory of relative topological properties*, in: General Topology. Spaces and Mappings (MGU, Moscow, 1989) 3-48 (en ruso).

[6] A. V. Arhangel'skii y J. Tartir, *A characterization of compactness by a relative separation property*, Question and Answers in General Topology, 14 (1996) 49-52.

[7] F. Casarrubias Segura y A. Tamariz Mascarúa, "Elementos de Topología General ", Sociedad Matemática Mexicana, 2012.

[8] D. Chodounský y E. Murtinová, *Internal normality and internal compactness*, Topology Appl. 155, (2008) 201-206.

[9] C. O. Christenson y W. L . Voxman, "Aspects of Topology", BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[10] G. Di Maio, Lj.D.R. Kočinac, E. Meccariello, *Selection principles and hyperspaces topologies*, Topol. Appl. 153 (2005) 912-923.

[11] J. Díaz-Reyes, I. Martínez-Ruiz y A. Ramírez-Páramo, *Relative topological properties of hyperspaces*, Mathematica Slovaca, 69, 3 (2019), 675-684.

[12] J. Dugundji, “Topology”, Allyn and Bacon Inc, United States of America, 1976.

[13] R. Engelking, “General topology”, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[14] E. Grabner, G. Grabner, K. Miyazaki y J. Tartir, *Relative star normal type*, Topology Appl. 153, (2005) 874-885.

[15] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[16] L’. Holá y J. Pelant, *Recent progress in hyperspace topologies*, en Recent progress in General Topology II, North-Holland, Amsterdam, (2002) 253-285.

[17] A. Illanes, “Hiperespacios de continuos”, Aportaciones Matemáticas de la SMM, Textos 28, 2004.

[18] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., “Hyperspaces: fundamentals and recent advances”, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[19] S. Macías, “Topics on Continua”, Second Edition, Springer, 2018.

[20] H. Méndez Lango, *Dinámica colectiva*, Revista Integración, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 30 (1) (2012), 25-41.

[21] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.

[22] J. Munkres, “Topology”. Second edition,Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

[23] S. B. Nadler, Jr., “Continuum Theory”, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[24] S. B. Nadler, Jr., “Hyperspaces of sets. A text with research questions”, Aportaciones Matemáticas de la SMM, Textos 33, 2006.

[25] M. S. Sarsak y H. Z. Hdeib, *Relative strongly normal and relative normal subspaces*, International Mathematical Forum, 5, 12 (2010), 579-586.

[26] L. Vietoris, *Bereiche zweiter Ordnung*, Monatshefte fur Mathematik und Physik, 32 (1922), 258-280.

[27] L. Zsilinszky, *Baire spaces and hyperspace topologies*, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996) 3175-3184.