



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA  
**DESCRIPCIÓN DE MODOS  
PLASMÓNICOS  
UNIDIMENSIONALES**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO EN FÍSICA APLICADA**

PRESENTA:

**EDER SOSA SANCHEZ**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. RAÚL JUÁREZ AMARO**

CO-DIRECTOR DE TESIS:

**DR. GABRIEL MARTÍNEZ NICONOFF**

(Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica)

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA. OCTUBRE 2021



# Resumen

En el presente trabajo se propone un modelo teórico que nos permita describir modos plasmónicos unidimensionales, de manera que estos se propaguen en nanoalambres. El estudio parte del análisis de un alambre recto donde los modos plasmónicos se modelan mediante un acoplamiento dipolar y se establece una analogía con resortes acoplados. Tomando los resortes acoplados como punto de partida, se establece un análisis extremal el cual nos permite hallar las ecuaciones de movimiento del sistema. Una vez establecido esto, nos interesa analizar alambres con curvatura y torsión por lo que se realiza un análisis semejante al del alambre recto, al que se parametriza en términos de la longitud de arco. Esto nos permite obtener plasmones en el triedro de Frenet-Serret. Teniendo ya establecido el modelo se realiza una descripción de la relación de dispersión. El modelo teórico permite explicar de manera satisfactoria los resultados experimentales reportados en la literatura plasmónica.



*Dedicado:*

  
A L A M E M O R I A D E M I P A D R E C . S . M .

*Al esfuerzo de mi madre Soraida.  
y al apoyo de mi hermana Karina.*



# Agradecimientos

A Dios.

A mi Madre Soraida, mi hermana Karina y mi padre Carlos (quien inicio esta aventura a mi lado y que por azares de la vida hoy me ve concluirlo desde un sistema de referencia diferente al nuestro) por brindarme su apoyo, confianza y amor para alcanzar mis sueños y motivarme en los momentos más difíciles.

A mis asesores Dr. G. Martínez-Niconoff y Dr. R. Juárez-Amaro por la confianza y aportaciones brindados.

A mis sinodales M.C. José Luciano Moyotl Coyomani, Dr. Jorge González García y Dr. Ricardo Rosas Rodríguez; al Dr. J. Silva-Barranco por sus colaboraciones a la tesis.

A mis compañeros Elizabeth Cruz, Armando Martínez y Lizbeth Quero, amigos, familiares y compañeros que me acompañaron durante esta travesía.

A mis profesores quienes compartieron su conocimiento conmigo y también a aquellos que me apoyaron mes con mes durante el tiempo que mas lo necesite.

A la UTM por permitirme ser parte de su comunidad estudiantil.

Y por último al INAOE por el apoyo brindado para llevar a cabo esta tesis.

EDER SOSA SANCHEZ

Octubre 2021

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
Referencias . . . . .	5
<b>2. Descripción de modos plasmónicos</b>	<b>9</b>
2.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	10
2.2. Modos plasmónicos . . . . .	15
2.3. Modos plasmónicos de largo recorrido . . . . .	18
2.4. Interacción entre dos modos plasmónicos de largo recorrido: caso coherente. . . . .	23
2.5. Tipos de plasmones. . . . .	26
Referencias . . . . .	31
<b>3. Fundamentos matemáticos de geometría diferencial y cálculo     variacional</b>	<b>33</b>
3.1. Fundamentos de geometría diferencial . . . . .	33
3.2. Ecuaciones de Frenet-Serret . . . . .	36
3.3. Conceptos de cálculo variacional . . . . .	42
3.4. Condición de transversalidad . . . . .	46

Referencias . . . . .	52
<b>4. Descripción de modos plasmónicos unidimensionales</b>	<b>53</b>
4.1. Modos plasmónicos unidimensionales . . . . .	53
4.2. Modo plasmónico de superficie en un nanoalambre recto . . .	54
4.3. Plasmón de superficie unidimensional en un nanoalambre con curvatura y torsión . . . . .	59
4.4. Análisis de la relación de dispersión $k_{ps}$ . . . . .	62
Referencias . . . . .	68
<b>5. Conclusiones y trabajos a futuro</b>	<b>71</b>
<b>Apéndice</b>	<b>75</b>
<b>A.</b>	<b>75</b>

# Índice de figuras

1.1. Onda electromagnética propagándose en la interfaz metal-dieléctrico. . . . .	1
2.1. Representación de una onda electromagnética propagándose en la interfaz metal-dieléctrico. . . . .	13
2.2. Relación de dispersión para modos plasmónicos de volumen y modos plasmónicos de superficie. . . . .	15
2.3. Esquema de la interacción entre 2 modos plasmónicos de superficie. . . . .	19
2.4. Perfil sinusoidal de la distribución de intensidad del campo generado por interferencia de 2 modos plasmónicos de largo recorrido propagándose en el plano $x = 0$ . . . . .	26
2.5. Distribución del promedio de intensidad de campo en el plano $y - z$ para un modo plasmonico de superficie Bessel $J_0$ . . . . .	28
2.6. Distribución del promedio de intensidad de campo en el plano $y-z$ para un modo plasmónico de superficie Dark Hollow . . . . .	29
2.7. Distribución del promedio de intensidad de campo en el plano $y-z$ para un modo plasmónico de superficie Gaussiano. . . . .	30
3.1. Sistema de referencia triedral de Frenet-Serret. . . . .	38
3.2. Curva cúspide en el plano normal. . . . .	40

3.3.	Curva parabólica en el plano osculante. . . . .	41
3.4.	Curva cúbica en el plano rectificante. . . . .	42
4.1.	Polarización de un material en presencia de un campo eléctrico. . . . .	55
4.2.	Interacción entre dipolos acoplados como un sistema de resortes acoplados.	55
4.3.	Interacción de dipolos acoplados como un sistema de resortes acoplados en un alambre con curvatura y torsión. . . . .	60
4.4.	Modos plasmónicos propagándose en un alambre de Au con espesor de a) 40 y b) 70 nm de 2 y 12 $\mu m$ de radio de curvatura respectivamente. Como se muestra en las imágenes cuando el radio es mas pequeño se irradia mas luz que para valores de radio mayor. . . . .	64
4.5.	a) Alambre de Ag de 7 $\mu m$ con un radio de curvatura de 4 $\mu m$ . b) Alambre de 5 $\mu m$ con 2 curvaturas altamente irradianes. . . . .	65
4.6.	Propagación de plasmones en nanoalambres de Ag con múltiples puntos emitiendo luz. . . . .	66
4.7.	Múltiples nanoalambres de Ag, en a) se muestran los alambres y en b) se muestra la propagación de modos plasmónicos en los respectivos alam- bres. Donde a.1) no está curvado, a.2) tiene un radio de curvatura grande y a.3) tiene curvaturas muy cerradas con grietas. . . . .	67

# Capítulo 1

## Introducción

Los metales además de reflejar la luz, tienen una propiedad óptica menos conocida, bajo ciertas condiciones las ondas electromagnéticas pueden viajar por las superficies metálicas sin alejarse de ella. Este campo electromagnético de superficie involucra a los electrones libres de la superficie metálica tal como se muestra en el esquema de la figura 1.1. Este tipo de onda electromagnética recibe el nombre de plasmón de superficie [1].

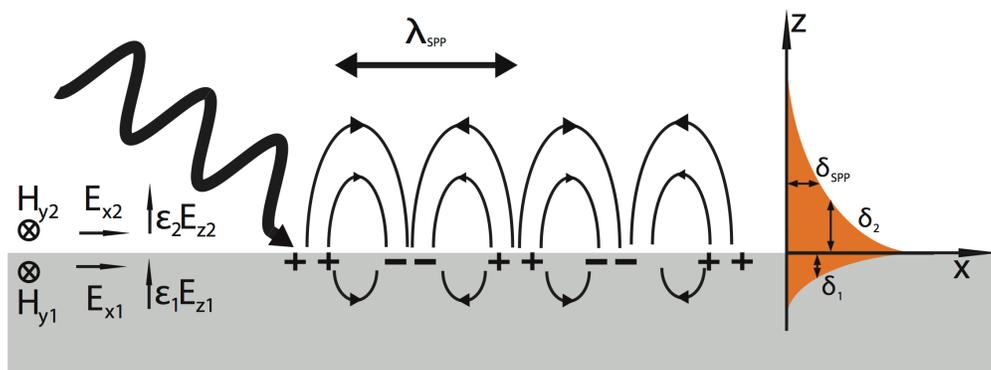


Figura 1.1: Onda electromagnética propagándose en la interfaz metal-dieléctrico.

Los modos plasmónicos de superficie son ondas electromagnéticas generadas por las oscilaciones de electrones en un metal. Estas ondas electromagnéticas se propagan a lo largo de una interfaz metal-dieléctrico [2, 3, 4].

Los plasmones de superficie no solo se pueden producir por oscilaciones de electrones sino también por luz generada en un dispositivo óptico. Una propiedad importante de los plasmones de superficie es su acoplamiento con fotones a través de superficies rugosas, de modo que el plasmón participa en fenómenos ópticos como la dispersión Raman y scattering [5].

En 1956 David Pines fue el primero en utilizar el nombre de plasmones para describir el campo electromagnético que se propaga en una superficie. En 1957 Rufus Ritchie demostró que los modos plasmónicos pueden existir en superficies metálicas a los que llamo plasmones de superficie, tras observar una pérdida de energía en electrones en superficies delgadas. En 1998 Thomas Ebbensen y Peter Wolf mostraron que la luz emitida por un láser que pasa a través de orificios metálicos se puede acoplar con los electrones libres de una superficie metálica para excitar plasmones de superficie [6].

Las tendencias contemporáneas en óptica plasmónica consisten en establecer un paralelismo con los modelos de óptica tradicional. La onda del campo electromagnético en ambos casos implica que el análisis matemático presente algunas similitudes. Sin embargo las características físicas podrían ser completamente diferentes [7].

Un tema importante, consiste en establecer la relación entre las propiedades geométricas de la región de focalización con las condiciones de frontera. El caso más simple ocurre cuando el campo electromagnético emerge desde una rendija en forma de curva plana. Para este caso, la geometría de focalización corresponde con la evoluta de la curva, sin embargo, a pesar de ser el caso más sencillo se han obtenido algunas características interesantes, por ejemplo cuando la rendija en forma de curva tiene una forma cúspide, aparecen los efectos de bifurcación.

Si la rendija en forma de curva plana es remplazada por un alambre metálico; la iluminación puede generar campos plasmónicos en forma de ondas unidimensionales que se propagan a lo largo del metal [8]. Esto puede ser utilizado para el diseño de antenas plasmónicas [9, 10], guías de onda [11, 12, 13, 14], resonadores [10, 15], metamateriales [16], etc.

En este trabajo de tesis se plantea un método teórico para poder analizar y describir la propagación de modos plasmónicos en alambres que poseen dimensiones de nanómetros para el diámetro y de micras para la longitud que en el resto del trabajo llamaremos nanoalambres, a los modos plasmónicos que se propagan en un nanoalambre los llamaremos modos plasmónicos unidimensionales, para la descripción de estas ondas utilizaremos como sistema de referencia el triedro de Frenet-Serret. Con este formalismo se obtendrá la relación de dispersión como función de la curvatura, esta relación no había sido estudiada hasta ahora desde este punto de vista.

Este trabajo se ha dividido en 5 capítulos siendo éste el primero, en el capítulo 2 se realiza un estudio de los modos plasmónicos de superficie y modos plasmónicos de largo recorrido. En el capítulo 3 se realiza un estudio de geometría diferencial, específicamente de las ecuaciones de Frenet-Serret, ecuación de Euler-Lagrange y el concepto de transversalidad. En el capítulo 4 se describe el trabajo realizado que consta principalmente en la propuesta de un modelo teórico para la descripción de modos plasmónicos unidimensionales, es decir modos plasmónicos propagándose en un nanoalambre con curvatura y torsión, lo que nos permite conocer la relación de dispersión en función de la curvatura. Por último en el capítulo 5 se dan las conclusiones y trabajos a futuro.

# Referencias

- [1] F. J. García Vidal y L. Martín Moreno, “Plasmones superficiales”. Investigación y ciencia, octubre (2008).
- [2] G. Martinez Niconoff, J. A. Sanchez-Gil, H. H. Sanchez-Hernandez and A Perez-Leija, “Self-imaging and caustics in two-dimensional surface plasmon optics”. Opt. Comm., 281, Vol. 8, 2316-2320,(2008).
- [3] Vincenzo Giannini, Audrey Berrier, Stefan A. Maier, José Antonio Sánchez-Gil and Jaime Gomez Rivas, “Scattering efficiency and near field enhancement of active semiconductor plasmonic antennas at terahertz frequencies ”. Opt. Express, 3, Vol. 18, 2797-2807,(2010).
- [4] Stefan Alexander Maier. “Plasmonics: fundamentals and applications”, New York, Springer (2007). pp 5-30.
- [5] H. Raether. “Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings”. Springer tracts in modern physics, Springer-Verlag. Berlin Vol. 111, (1988).

- [6] Juárez Morales J. C.. “Estudio de procesos resonantes en arreglos bi-dimensionales de nanopartículas”. Tesis doctoral INAOE, (2012). pp 38-41.
- [7] G. Martínez-Niconoff, P. Martínez-Vara, G. Diaz-Gonzales, J. Silva-Barranco and A. Carbajal-Dominguez. “Surface plasmon singularities”. *International Journal of Optics*. Vol. 2012.
- [8] J. Munoz-Lopez, G. Martínez-Niconoff, P. Martínez-Vara and S.I. de los Santos. “Scattering by three-dimensional slit-shape curves”. *Proc. SPIE* 9205. (2014).
- [9] K. Kolwas and A. Derkachova. “Plasmonic abilities of gold and silver spherical nanoantennas in terms of size dependent multipolar resonance frequencies and plasmon damping rates”. *Opto-Electr. Rev.* 18(4)421. (2010).
- [10] Viktor A Podolskiy, Andrey K Sarychev, Evgenii E Narimanov and Vladimir M Shalaev. “Resonant light interaction with plasmonic nanowire systems ”. *J. Opt.A: Pure Appl. Opt.* 7, S32-S37 . (2005).
- [11] Arthur R. Davoyan, Ilya V. Shadrivov and Yuri S. Kivshar. “Nonlinear plasmonic slot waveguides”. *Opt. Lett.* Vol 16. No. 26. 21209-21214. (2008).
- [12] Hong Wei, Zhipeng Li, Yurui Fang, Feng Hao, Timur Shegai, Tali Dardosh, Yingzhou Huang, Wenzhong Wang, Zhenyu Zhang, Gilad Haran, Peter Nordlander and Hongxing Xu. “Control light propagation and po-

- larization with plasmons for surface-enhanced Raman scattering”. Proc. of SPIE Vol. 7395, 73950T. (2009).
- [13] G. Schider, J. R. Krenn, A. Hohenau, H. Ditlbacher, A. Leitner and F. R. Aussenegg. “Plasmon dispersion relation of Au and Ag nanowires”. Phys. Rev. B 68, 155427. (2003).
- [14] Zhipeng Li, Feng Hao, YingZhou Huang, Yurui Huang, Peter Nordlander and Hongxing Xu. “Directional light emission from propagation surface plasmon of silver nanowires”. Nano Letters . Vol. 9. No. 12. 4383-4386. (2009).
- [15] Harald Ditlbacher, Andreas Hohenau, Uwe Kreibig, Michael Rogers, Ferdinand Hofer, Franz R. Aussenegg and Joachim R. Krenn. “Silver nanowires as surface plasmon resonators”. Phys. Rev. Lett. 95, 257403. (2005).
- [16] Andrey K. Sarychev and Vladimir M. Shalaev. “Plasmon modes and negative refraction in metal nanowire composites”. Optics Express, Vol. 11, No. 7. 735-745.(2003).



## Capítulo 2

# Descripción de modos plasmónicos

En este capítulo se describen los modos plasmónicos de superficie en películas metálicas y con base en las ecuaciones de Maxwell se obtiene la relación de dispersión para plasmones de superficie. De igual forma se realiza un estudio y generalización de plasmones de largo recorrido.

## 2.1. Ecuaciones de Maxwell

El conjunto de expresiones integrales que se conocen como ecuaciones de Maxwell en el sistema internacional son:

$$\oiint_S \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{v(S)} \rho dv \quad (2.1)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.2)$$

$$\oint_{\tau} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(\tau)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.3)$$

$$\oint_{\tau} \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \iint_{S(\tau)} \left( \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (2.4)$$

Donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico,  $\vec{B}$  la inducción magnética,  $\vec{J}$  la densidad de corriente,  $\rho$  la densidad de carga,  $\varepsilon$  es la permitividad eléctrica y  $\mu$  la permeabilidad magnética.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de forma diferencial con ayuda del teorema de la divergencia de Gauss y el teorema de Stokes

$$\oint_{\tau} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{S(\tau)} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (2.5)$$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{v(S)} \nabla \cdot \vec{F} dv. \quad (2.6)$$

Por lo que las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial quedan de la si-

guiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \left( \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (2.10)$$

Por lo que las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial para un medio sin cargas ( $\rho = 0$ ) ni corrientes ( $\vec{J} = 0$ ) quedan en la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Donde  $\vec{D}$  es el desplazamiento dieléctrico,  $\vec{H}$  es el campo magnético.  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  se relacionan mediante el siguiente par de ecuaciones

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad (2.15)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (2.16)$$

Aplicando rotacional a la ecuación 2.13 y sustituyendo las ecuaciones 2.15, 2.16 y considerando un medio no magnético se tiene que:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$

La ecuación 2.17 es la ecuación de onda para el campo eléctrico, cuya solución esta dada por [1, 2, 3]:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (2.18)$$

donde la magnitud del vector de onda es conocida como la relación de dispersión.

De manera análoga se puede obtener la ecuación de onda para  $\vec{B}$  [1, 2, 3].

Considerando el caso en el que una onda electromagnética se propaga en la interfaz metal-dieléctrico tal y como se muestra en la figura 2.1 [4].

Para este caso el campo eléctrico y magnético en el dieléctrico están dados como [5]:

$$\vec{E}_1 = (E_{x1}, 0, E_{z1}) e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.19)$$

$$\vec{H}_1 = (0, H_{y1}, 0) e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)}, \quad (2.20)$$

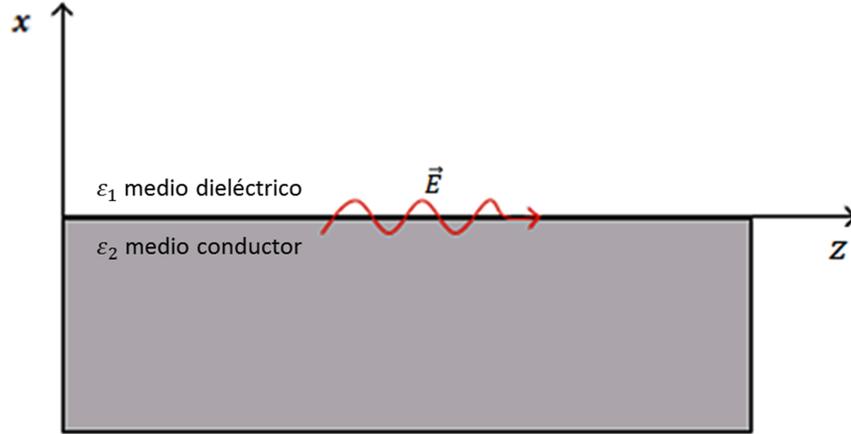


Figura 2.1: Representación de una onda electromagnética propagándose en la interfaz metal-dieléctrico.

y en el metal por

$$\vec{E}_2 = (E_{x2}, 0, E_{z2}) e^{i(k_{z2}z - k_{x2}x - \omega t)} \quad (2.21)$$

$$\vec{H}_2 = (0, H_{y2}, 0) e^{i(k_{z2}z - k_{x2}x - \omega t)}, \quad (2.22)$$

donde  $k_{x1}$  y  $k_{x2}$  son las componentes  $x$  del vector de onda. Las cuales se relacionan con el coeficiente de absorción.

Las ecuaciones 2.19-2.22 son conocidas como modos plasmónicos, donde 2.19, 2.21 deben satisfacer la ecuación 2.17, de la cual se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$k_{x1}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_{z1}^2 \quad (2.23)$$

$$k_{x2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_{z2}^2 \quad (2.24)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.19-2.22 en la ecuación 2.14 y considerando las condiciones de frontera para el campo eléctrico y magnético

$$E_{z1} = E_{z2}$$

$$H_{y1} = H_{y2}$$

se tiene que:

$$\frac{k_{x1}}{k_{x2}} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.25)$$

por condiciones a la frontera en la interfaz metal-dieléctrico definimos  $\beta$  como:

$$k_{z1} = k_{z2} = \beta$$

y dividiendo las ecuaciones 2.23 y 2.24 y sustituyendo la ecuación 2.25 se tiene que:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad (2.26)$$

donde  $\beta$  es conocida como la relación de dispersión,  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda electromagnética,  $c$  la velocidad de la luz,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son las permitividades del dieléctrico y el medio conductor respectivamente. La gráfica de la figura 2.2 [4] muestra la relación de dispersión para los modos plasmónicos de volumen y modos plasmónicos de superficie. Las líneas punteadas I y II

denotan la relación de dispersión  $\omega = ck$  y  $\omega = \frac{ck}{\sqrt{\epsilon_d}}$  respectivamente [5, 6].

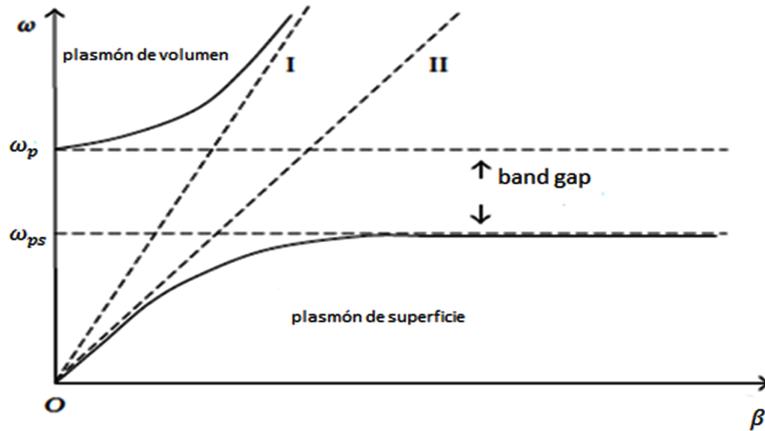


Figura 2.2: Relación de dispersión para modos plasmónicos de volumen y modos plasmónicos de superficie.

## 2.2. Modos plasmónicos

Se define como plasma a un gas de partículas cargadas, las cuales pueden exhibir comportamientos coherentes al ser perturbados por un campo electromagnético. Un plasmón es un cuanto de oscilación del plasma en un material conductor, el cual es resultado de las oscilaciones colectivas de los electrones libres de un conductor. Al interactuar estas cargas eléctricas con un fotón, generan una cuasipartícula llamada polaritón [7]. En los metales los electrones de conducción pueden moverse libremente por lo que en estos materiales se pueden producir plasmones. Usualmente las oscilaciones de los

plasmones son a frecuencias ópticas<sup>1</sup>. Existen dos tipos de plasmones los cuales son plasmones de volumen y plasmones de superficie.

Los plasmones de volumen son aquellos en donde los electrones pueden oscilar a través de un volumen de un metal los cuales tienen la frecuencia de plasma dada por [8]:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (2.27)$$

donde  $N$  es la densidad de electrones,  $e$  la carga del electrón,  $m_e$  la masa del electrón.

Los plasmones de superficie ( $ps$ ) son ondas electromagnéticas que se propagan entre la interfaz de un dieléctrico y un conductor. Estas ondas electromagnéticas de superficie surgen debido al acoplamiento de campos electromagnéticos con los electrones libres de un conductor. La frecuencia de los plasmones de superficie se encuentra en el siguiente rango de frecuencias [9]

$$\omega_{ps} \in \left[ 0, \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \right]. \quad (2.28)$$

La interacción entre medios dieléctricos y metálicos con ondas electromagnéticas puede ser explicada usando electrodinámica clásica. Aun si los medios poseen dimensiones de nanómetros. La descripción de esta interacción puede ser modelada mediante las ecuaciones de Maxwell, sin necesidad de usar la mecánica cuántica [9].

---

<sup>1</sup> $3 \times 10^{11} - 3 \times 10^{16}$  Hz [1]

La parte espacial del campo eléctrico para un modo plasmónico de superficie está dada como [10]:

$$\vec{E}(x, z) = (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{k}) e^{-\alpha x} e^{i\beta z} \quad (2.29)$$

donde  $\beta$  es la relación de dispersión dada por la ecuación 2.26,  $\alpha$  es un parámetro que determina la razón decreciente de  $\vec{E}$  en la coordenada  $x$ .

En un medio libre de carga el campo eléctrico debe satisfacer  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ . Esta condición implica que los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación 2.29 están relacionados por:

$$a_2 = -\frac{i\alpha a_1}{\beta}. \quad (2.30)$$

La permitividad de un medio conductor de acuerdo al modelo de Drude es un número complejo [6]. En consecuencia la relación de dispersión  $\beta$  (ecuación 2.26) tiene también una representación compleja. Una consecuencia de la parte imaginaria de  $\beta$  es que el modo plasmónico de superficie (ecuación 2.29) se propaga en pequeñas distancias desvaneciéndose completamente alrededor los  $100 \mu m$  [10], lo cual representa una limitante en la implementación de la óptica plasmónica de superficie.

Estos modos electromagnéticos están relacionados con el movimiento de los electrones libres que se asocian longitudinalmente y transversalmente en la

superficie. La oscilación de cargas en el fenómeno plasmónico son determinadas por la trayectoria del campo eléctrico, la cual podría ser obtenida estableciendo una analogía con el modelo de polarización clásica. Donde la trayectoria del campo eléctrico en el plano  $x - z$  está dado por [10]:

$$\frac{E_x^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{\left(\frac{\alpha a_1}{|\beta|}\right)^2} - \frac{2E_x E_z}{\frac{\alpha a_1^2}{|\beta|}} \cos \delta_0 = e^{-2\alpha x} \sin^2 \delta_0. \quad (2.31)$$

Donde podemos expresar  $\beta = |\beta|e^{i\delta}$  y  $\delta_0 = \delta - \frac{\pi}{2}$ . Nótese que  $\delta$  depende de la permitividad del medio metálico.

### 2.3. Modos plasmónicos de largo recorrido

Los modos plasmónicos de superficie de largo recorrido se propagan en una interfaz de una película delgada metal-dieléctrico, para la cual se considera el índice de refracción como una función exponencial decreciente, este índice de refracción permite el estudio de los efectos de resonancia, por lo que el análisis se realiza usando la teoría de acoplamiento de modos. Para obtener un modo plasmónico de largo recorrido es necesario adaptar la relación de dispersión  $\beta$ . Los efectos de resonancia surgen cuando son permitidas las interacciones con otros modos plasmónicos de superficie, modificando así la trayectoria de las oscilaciones de carga. Por lo que el nuevo modo plasmónico de superficie tiene una amplitud dependiente de la coordenada  $z$  como se muestra en la Figura 2.3 donde se representa el sistema bajo análisis.

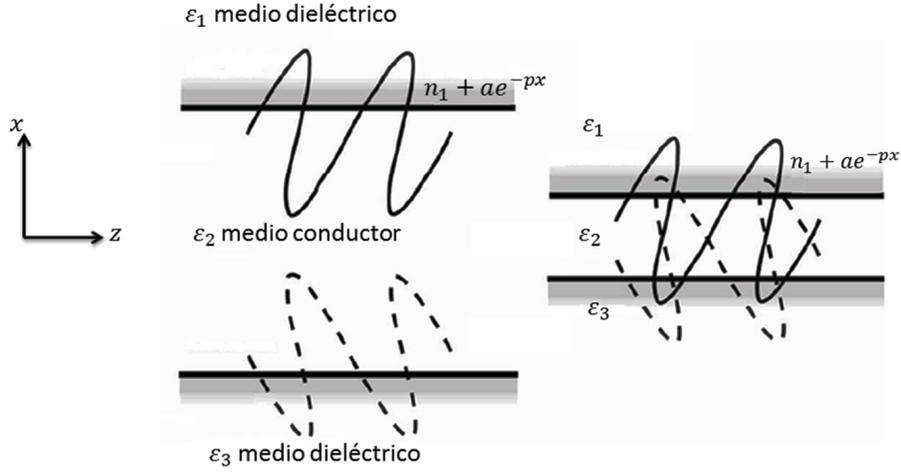


Figura 2.3: Esquema de la interacción entre 2 modos plasmónicos de superficie.

Del lado izquierdo el espesor entre la película metálica es suficientemente grande por lo que no genera interferencia entre los plasmones. En el lado derecho el espesor de la película metálica es suficientemente pequeña permitiendo entonces la interferencia entre los dos plasmones que están propagándose en ambos lados de la película delgada, lo que modifica la relación de dispersión [10]. En ambos casos la línea continua representa un plasmón de superficie elemental generado en la interfaz  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ , la línea punteada representa un plasmón de superficie elemental generado en la interfaz  $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ .

El índice de refracción para la interfaz es aproximado por:

$$n = n_1 + ae^{-px} \quad (2.32)$$

para  $|x| \geq d$ , donde  $a$  es una constante pequeña que es determinada por la combinación de los materiales involucrados,  $p$  es una constante determinada

por los parámetros  $\alpha_i$  y el espesor de la película es  $2d$ . Nótese que cuando  $x \rightarrow \infty$  el índice de refracción expresado recupera la expresión clásica para un medio dieléctrico. El motivo de proponer la expresión para el índice de refracción viene dado del hecho que el haz se propaga paralelo y suficientemente cerca de la superficie plana. Por lo que se tiene que el término exponencial permite modelar los efectos del campo electromagnético en la superficie.

Los campos plasmónicos tienen una representación vectorial, donde cada componente escalar debe satisfacer la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \varphi + k_0^2 (n_1^2 + 2n_1 a e^{-px}) \varphi = 0. \quad (2.33)$$

El término  $(ae^{-px})^2$  es despreciado puesto que  $a$  es una constante pequeña. La teoría de acoplamiento nos permite proponer una solución en la interfaz metal-dieléctrico de la siguiente forma:

$$\varphi(x, y, z) = A_1 e^{-\alpha_1 |x-d|} e^{i\beta_1 z} + A_2 e^{-\alpha_2 |x-d|} e^{i\beta_2 z}. \quad (2.34)$$

Esta solución solo es válida en las regiones cercanas a la interfaz, es decir la región sombreada en la figura 2.3. Tomando en cuenta el signo correspondiente para los términos de fase y sustituyendo la ecuación 2.34 en 2.33, se obtienen las ecuaciones diferenciales para las funciones de amplitud  $A_{1,2}(z)$  como se muestra en el apéndice A [11]

$$i\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + 2an_1 A_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)d} e^{i(\beta_2 - \beta_1)z} = 0, \quad (2.35)$$

$$i\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} + 2an_1 A_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)d} e^{-i(\beta_2 - \beta_1)z} = 0, \quad (2.36)$$

donde las segundas derivadas han sido omitidas debido a la evolución lenta de  $A_i(z)$ ,

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \approx \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} = 0. \quad (2.37)$$

El parámetro  $p$  en la expresión para el índice de refracción dada en la ecuación 2.32 corresponde con los parámetros  $\alpha_i$  por medio de la relación  $p = \alpha_1 + \alpha_2$ , la cual es la condición requerida para resonancia entre los dos modos plasmónicos de superficie. Los efectos de resonancia modifican la trayectoria de la oscilación de las cargas cambiando en consecuencia la relación de dispersión  $\beta$ .

Una configuración simétrica se obtiene cuando la permitividad en ambos sitios de la película delgada tiene los mismos valores. Por lo que se tiene que  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Por lo que el sistema de ecuaciones diferenciales

2.35, 2.36 toma la siguiente forma

$$i\beta \frac{\partial A_1}{\partial z} + 2an_1 A_2 e^{-2\alpha d} = 0, \quad (2.38)$$

$$i\beta \frac{\partial A_2}{\partial z} + 2an_1 A_1 e^{-2\alpha d} = 0. \quad (2.39)$$

La solución es de la forma

$$A_{1,2}(z) = c_{1,2} e^{iz\left(\frac{2an_1}{\beta} e^{-2\alpha d}\right)} + c_{2,1} e^{-iz\left(\frac{2an_1}{\beta} e^{-2\alpha d}\right)}, \quad (2.40)$$

donde  $c_{1,2}, c_{2,1}$  son constantes arbitrarias. Entonces se tiene que la expresión para modos plasmónicos de largo recorrido es

$$\varphi(x, y, z) = C e^{-\alpha x} e^{iz\frac{\omega}{c} \left( \left( \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} + 2an_1 \left( \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\alpha d} \right)}, \quad (2.41)$$

donde la relación de dispersión (ecuación 2.26) es modificada, la cual está dada por la siguiente expresión

$$\beta = \frac{\omega}{c} \left( \left( \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} + 2an_1 \left( \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\alpha d} \right). \quad (2.42)$$

De la ecuación 2.42 se puede ver que en esta representación la suma de la parte imaginaria es menor que la parte imaginaria de la relación de dispersión de la ecuación 2.26, lo cual permite incrementar la longitud de la propagación

de los modos plasmónicos de superficie. Además el coeficiente para el término exponencial decreciente depende de los parámetros del índice de refracción los cuales son necesarios para describir los efectos de la superficie. Estos efectos son relevantes cuando las dos superficies están muy cercanas o cuando una partícula se coloca en la superficie tomando en cuenta que  $a \neq 0$ , sin embargo cuando  $d \rightarrow \infty$  la relación de dispersión recupera la forma de la ecuación 2.26.

## 2.4. Interacción entre dos modos plasmónicos de largo recorrido: caso coherente.

La ecuación 2.41 es la expresión para una componente del campo eléctrico que se propaga a lo largo de la coordenada  $z$ . Con el fin de generar la interferencia entre dos modos plasmónicos de largo recorrido, es necesario representar un modo plasmónico que se propague en el plano  $y - z$ . Por lo que la expresión correspondiente puede ser obtenida por medio de una rotación respecto al eje  $x$ , teniendo la siguiente transformación de coordenadas  $z \rightarrow z \cos \theta \pm y \sin \theta$

La configuración física para generar la interferencia entre dos modos plasmónicos es similar al experimento de Young que consiste en dos aberturas de diámetro menor a la longitud de onda, realizadas en una película delgada conductora. De cada abertura emerge un modo plasmónico de largo recorri-

do, por lo que la expresión para la interferencia coherente es:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x, y, z) &= (a\hat{i} + b \sin \theta \hat{j} + b \cos \theta \hat{k})e^{-\alpha_1 x} e^{i\beta(z \cos \theta + y \sin \theta)} \\
&\quad + (a\hat{i} - b \sin \theta \hat{j} + b \cos \theta \hat{k})e^{-\alpha_1 x} e^{i\beta(z \cos \theta - y \sin \theta)} \\
&= 2 \left[ (a\hat{i} + b \cos \theta \hat{k}) \cos(\beta y \sin \theta) + ib \sin \theta \sin(\beta y \sin \theta) \hat{j} \right] e^{-\alpha_1 x} e^{i\beta z \cos \theta} \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Siendo  $\beta$  la expresión obtenida en la ecuación 2.42. Si consideramos un modo plasmónico libre de difracción obtendremos que la intensidad del campo eléctrico para distancias largas de propagación no tiene cambios. Entonces se tiene que la intensidad del campo está dada por:

$$\begin{aligned}
I(x, y, z) &= 4[(a^2 + b^2 \cos^2 \theta) \cos^2(\beta y \sin \theta) \\
&\quad + b^2 \sin^2 \theta \sin^2(\beta y \sin \theta)] e^{-2\alpha_1 x} e^{-2Im(\beta)z}. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Para ángulos  $\theta$  pequeños, la expresión para un modo plasmónico puede ser aproximado de la siguiente forma

$$\vec{E}(x, y, z) = 2(a\hat{i} + b\hat{k}) \cos(\beta y \sin \theta) e^{-\alpha_1 x} e^{i\beta z \cos \theta}. \quad (2.45)$$

La ecuación 2.45 se considera como una expresión para un modo plasmónico completamente coherente en la aproximación paraxial [10]. Usando el hecho de que  $a$  y  $b$  podrían ser números complejos, la distribución de la intensidad del campo podría describirse como:

$$I(x, y, z) = c^2 \cos^2(\beta y \sin \theta + \eta) e^{-2\alpha_1 x} e^{-2\text{Im}(\beta)z}, \quad (2.46)$$

donde  $\eta$  es un término de fase.

Hasta ahora se tiene que los modos plasmónicos de superficie sinusoidales representan una expresión para un modo plasmónico de superficie generalizado completamente coherente. Nótese que la ecuación 2.46 es una representación paramétrica para modos plasmónicos de superficie. Los parámetros  $\theta$  y  $\eta$  permiten incorporar funciones parcialmente coherentes como se describirá más adelante.

En la figura 2.4 se muestra la distribución de intensidad del campo para un modo plasmónico. Para una película de oro con un espesor de  $20 \text{ nm}$  y una longitud de onda de  $500 \text{ nm}$ , en un sustrato que tiene un índice de refracción de 2, para un rango de valores de  $p$  de  $0.01 \text{ nm}^{-1}$  a  $0.023 \text{ nm}^{-1}$ . Estos valores son usados para un modo plasmónico de superficie que se propaga  $100 \text{ nm}$  dentro de un medio dieléctrico. Con dichos parámetros se espera que el modo plasmónico se propague entre  $500 \mu\text{m}$  a  $1000 \mu\text{m}$ .

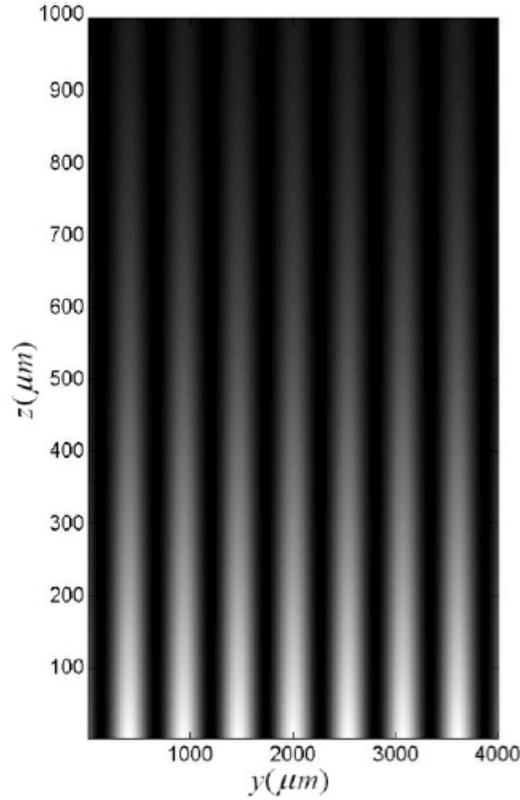


Figura 2.4: Perfil sinusoidal de la distribución de intensidad del campo generado por interferencia de 2 modos plasmónicos de largo recorrido propagándose en el plano  $x = 0$ .

## 2.5. Tipos de plasmones.

Un modo plasmónico de superficie parcialmente coherente puede obtenerse mediante una superposición de modos plasmónicos sinusoidales, el parámetro  $\theta$  en la ecuación 2.46 es una variable aleatoria con una función de probabilidad  $\rho(\theta)$ . Entonces el promedio de la función de distribución de intensidad del campo es:

$$\langle I(x, y, z) \rangle = e^{-2\alpha_1 x} e^{-2\text{Im}(\beta)z} \int C(\theta) \cos^2(\beta y \sin \theta + \eta) \rho(\theta) d\theta$$

$$= e^{-2\alpha_1 x} e^{-2\text{Im}(\beta)z} \int C(1 + \cos(2\beta y \sin \theta + \eta)) \rho(\theta) d\theta, \quad (2.47)$$

donde  $C$  es una constante.

Si la función de densidad  $\rho(\theta)$  es uniforme en el intervalo  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  considerando  $\eta = 0$ . Se tiene que el promedio de la intensidad del campo está dado por una función Bessel de primer orden  $J_0$

$$\langle I(x, y, z) \rangle = e^{-2\alpha_1 x} e^{-2\text{Im}(\beta)z} (1 + J_0(2\beta y)), \quad (2.48)$$

donde son omitidos los términos no relevantes y se toma en cuenta que

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta. \quad (2.49)$$

Tomando en cuenta los mismos valores usados en la figura 2.4 se obtiene la distribución del promedio de la intensidad del campo como se muestra en la figura 2.5 teniendo un modo propagándose cerca de  $500 \mu m$ .

El promedio de la intensidad del campo para el modo plasmónico de superficie Dark Hollow se considera  $\eta = \frac{\pi}{2}$  y  $\rho(\theta)$  es uniforme en el intervalo

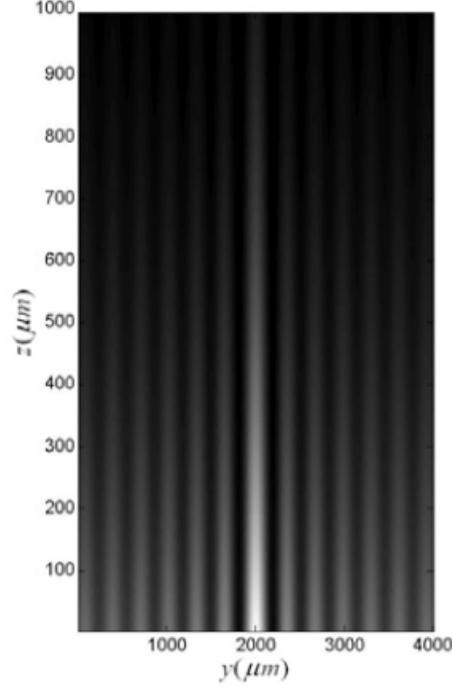


Figura 2.5: Distribución del promedio de intensidad de campo en el plano  $y - z$  para un modo plasmónico de superficie Bessel  $J_0$ .

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  por lo que la ecuación 2.47 toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \langle I(x, y, z) \rangle &= e^{-2\alpha_1 x} e^{-2\text{Im}(\beta)z} \int C(1 - \cos^2(2\beta y \sin \theta)) \rho(\theta) d\theta \\
 &= e^{-2\alpha_1 x} e^{-2\text{Im}(\beta)z} (1 - J_0(2\beta y)). \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

Este resultado presenta un contraste inverso en el promedio de la distribución de intensidad del campo respecto a un modo plasmónico de superficie Bessel  $J_0$  como se muestra en la figura 2.6. En este caso la longitud de propagación

es cerca de  $50 \mu m$ .

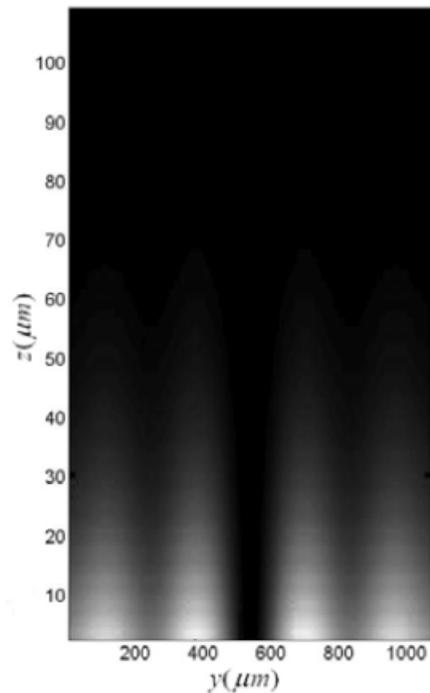


Figura 2.6: Distribución del promedio de intensidad de campo en el plano y-z para un modo plasmónico de superficie Dark Hollow

Para la intensidad del campo de una función de densidad de probabilidad Gaussiana  $\rho(\theta) = ae^{-\frac{\theta^2}{2}}$  en el intervalo  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y considerando  $\eta = 0$ , se tiene que la ecuación 2.47 toma la forma:

$$\langle I(x, y, z) \rangle = e^{-2\alpha_1 x} e^{-2Im(\beta)z} a^* \left[ 1 + \frac{1}{2} \int e^{i2\beta y \sin \theta} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta + \frac{1}{2} \int e^{-i2\beta y \sin \theta} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta \right]. \quad (2.51)$$

Esta puede aproximarse como la transformada de Fourier de una función Gaussiana, teniendo como promedio la intensidad descrita en la figura 2.7, con una longitud de propagación de aproximadamente de  $700 \mu m$ . Superando la distribución de intensidad Bessel.

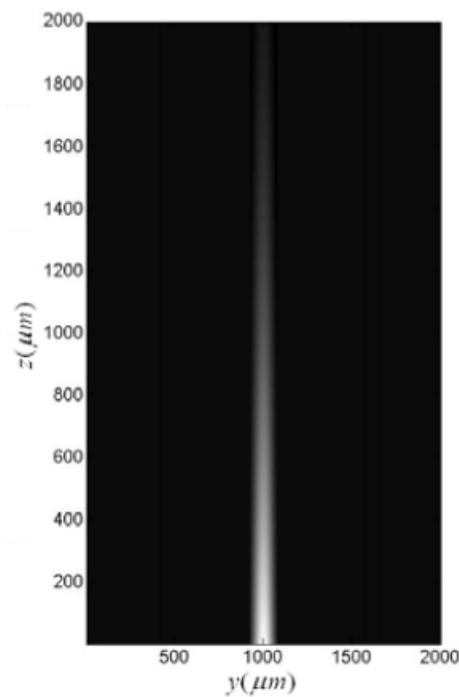


Figura 2.7: Distribución del promedio de intensidad de campo en el plano y-z para un modo plasmónico de superficie Gaussiano.

En todos los casos la relación de dispersión está dada por la ecuación 2.42. A pesar de que todos los modos tienen la misma relación de dispersión, la longitud de propagación puede controlarse con la superposición de modos como se muestra en las figuras 2.5, 2.6 y 2.7 [10].

# Referencias

- [1] Eugen Hetch. “Óptica”. Tercera edición. Pearson Addison Wesley (2005).
- [2] Roberto S. Murphy Arteaga. “Teoría electromagnética para estudiantes de electrónica y física”. Primera edición (1998).
- [3] Paul Lorrain and Dale R. Corson. “Electromagnetic fields and waves”. Third edition. W. H. Freeman and company New York (1988).
- [4] Cheng-Ping Huang and Yong-Yuan Zhu, “Plasmonics: manipulating light at the subwavelength scale”, Hindawi Publishing Corporation, Active and Passive Electronic Components, Vol. 2007.
- [5] H. Raether, “Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings”, Springer tracts in modern physics, Springer-Verlag, Berlin Vol. 111, (1988)
- [6] Stefan Alexander Maier. “Plasmonics: fundamentals and applications”. New York. Springer (2007).
- [7] Ricardo Téllez Limón. “Lentes de nano-rendijas”. Tesis para obtener el grado de Maestro en ciencias. CICESE. (2011).

- [8] Juárez Morales J. C.. “Estudio de procesos resonantes en arreglos bidimensionales de nanopartículas”. Tesis doctoral INAOE, (2012).
- [9] Cristian Hernando Acevedo Caceres. “Análisis teórico-experimental de un plasmón superficial”. Tesis para optar al título de Físico Universidad de Santander (2009).
- [10] G. Martinez Niconoff, P. Martinez Vara, J. Munoz-lopez, J.C. Juarez-Morales and A. Carbajal-Dominguez. “Partially coherent surface plasmon modes”, Rapid Publication 11009, Journal of the European Optical Society (2011).
- [11] Pochi Yeh. “Introduction to photorefractive nonlinear optics”. Wiley-series in pure and applied optics. (1993). pp.74-76

## Capítulo 3

# Fundamentos matemáticos de geometría diferencial y cálculo variacional

En esta sección se analizan curvas en el espacio tridimensional y con base en las ecuaciones de Frenet-Serret se tiene un nuevo sistema de referencia, el cual puede estar colocado en cualquier punto de la curva. De igual forma se realiza un estudio de cálculo variacional, obteniendo la ecuación de Euler y la condición de transversalidad.

### 3.1. Fundamentos de geometría diferencial

La geometría diferencial puede describirse rigurosamente como el estudio de curvas y superficies por medio del cálculo [1].

Supongamos que tenemos una curva  $C$  cuya representación paramétrica está dada por:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t); \quad (3.1)$$

donde la longitud de arco está dada como:

$$\ell = \int ds \quad (3.2)$$

donde

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (3.3)$$

y

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (3.4)$$

por lo que

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (3.5)$$

entonces

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx, dy, dz) \cdot (dx, dy, dz) \quad (3.6)$$

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \quad (3.7)$$

de la ecuación anterior se tiene el vector tangente unitario como:

$$\vec{T} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \quad (3.8)$$

de donde se obtiene que:

$$x = x(s); y = y(s); z = z(s); \quad (3.9)$$

Posteriormente se calcula un vector ortogonal a  $\vec{T}$

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = 1, \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{ds} (\vec{T} \cdot \vec{T}) = 2 \left( \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} \right) = 0. \quad (3.11)$$

De la ecuación anterior se tiene que  $\vec{T}$  es perpendicular a  $\frac{d\vec{T}}{ds}$ , por tanto

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{n}, \quad (3.12)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura y  $\vec{n}$  es el vector normal.

De las ecuaciones 3.8 y 3.12 se construye el vector binormal

$$\vec{b} = \vec{T} \times \vec{n}. \quad (3.13)$$

Tomando en cuenta que  $\vec{b} \cdot \vec{T} = 0$  y  $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$  se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}, \quad (3.14)$$

donde  $\tau$  es la torsión.

## 3.2. Ecuaciones de Frenet-Serret

Sea  $\vec{r}'(t) = \vec{r}'(x(t), y(t), z(t))$  entonces por las ecuaciones 3.1 y 3.5,  $\vec{r}'(t) = \vec{r}'(s)$  por lo que

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}'(s)}{ds}. \quad (3.15)$$

De la ecuación 3.12, se tiene

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{n}. \quad (3.16)$$

De forma similar en la cual se obtuvo la ecuación 3.14, se calcula el vector binormal, por lo que

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}.$$

Partiendo de

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad (3.17)$$

se tiene

$$\frac{d}{ds} (\vec{n} \cdot \vec{n}) = 2 \left( \vec{n} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} \right) = 0 \quad (3.18)$$

de la cual se obtiene:

$$\vec{n} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = 0. \quad (3.19)$$

Entonces se tiene que  $\frac{d\vec{n}}{ds}$  es un vector que esta sobre el plano generado por  $\vec{b}$  y  $\vec{T}$ , por lo que consideramos que  $\vec{T} \cdot \vec{n} = 0$  y  $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$  y manipulando algebraicamente se deduce que

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{T}. \quad (3.20)$$

Uniendo las ecuaciones 3.12, 3.14 y 3.20 se obtienen las ecuaciones de Frenet-Serret

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Tomando en cuenta los vectores tangente, normal y binormal se obtiene un nuevo sistema de referencia triedral como se muestra en la figura 3.1. Donde el vector tangente con el vector normal forman el plano osculante, el vector tangente con el binormal el plano rectificante y el vector normal con el binormal el plano normal.

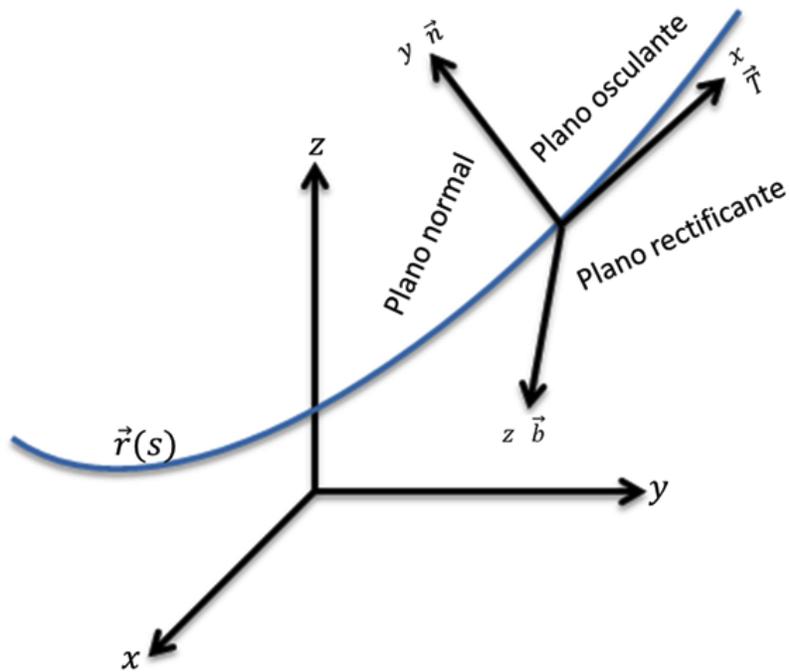


Figura 3.1: Sistema de referencia triedral de Frenet-Serret.

A continuación se calcula la curvatura y la torsión de la curva.

Recordando que  $\vec{T} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$  y que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \kappa^2, \quad (3.22)$$

donde  $R$  es  $\kappa^{-1}$ , siendo  $R$  el valor absoluto del radio de curvatura, que es también el radio del círculo osculante, el cual se encuentra en el plano osculante [2].

Y partiendo de  $\tau = -\vec{n} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds}$  se obtiene la expresión para la torsión dada por la siguiente ecuación [2, 3]

$$\tau = -\frac{1}{\kappa} \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \cdot \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{1}{\kappa} \frac{d^3 \vec{r}}{ds^3} \right). \quad (3.23)$$

Para llevar la proyección de una curva en el sistema de referencia de Frenet-Serret partiremos de las ecuaciones 3.15, 3.16 y la siguiente relación

$$\frac{d^3 \vec{r}}{ds^3} = \kappa' \vec{n} - \kappa^2 \vec{T} + \kappa \tau \vec{b}. \quad (3.24)$$

Proyectando la curva  $\vec{r}(s)$  en los planos osculante, normal y rectificante alrededor de  $\vec{r}(s_0)$ , el desarrollo de Taylor de  $\vec{r}$  alrededor de este punto está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= \vec{r}(s_0) + \vec{r}'(s_0)(s - s_0) + \\ &\frac{1}{2} \vec{r}''(s_0) (s - s_0)^2 + \frac{1}{6} \vec{r}'''(s_0) (s - s_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Trasladando el origen inicial a  $\vec{r}(s_0)$  y haciendo una rotación de ejes de tal forma que los vectores  $\vec{T} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{n} = (0, 1, 0)$  y  $\vec{b} = (0, 0, 1)$  definan el nuevo sistema de coordenadas y sustituyendo  $\vec{r}'$ ,  $\vec{r}''$  y  $\vec{r}'''$  se tiene la aproximación a tercer orden:

$$\vec{r}(s) = \left( s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}, \frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\kappa' s^3}{6}, \frac{\kappa \tau s^3}{6} \right). \quad (3.26)$$

De la ecuación 3.26 se calculan las curvas proyectadas en el plano normal, rectificante y osculante considerando únicamente el primer término, por lo que se deducen las siguientes expresiones.

Para el plano normal

$$y^3 = \frac{9\kappa z^2}{2\tau^2}. \quad (3.27)$$

La cual corresponde a una curva tipo cúspide, como se muestra en la figura 3.2.

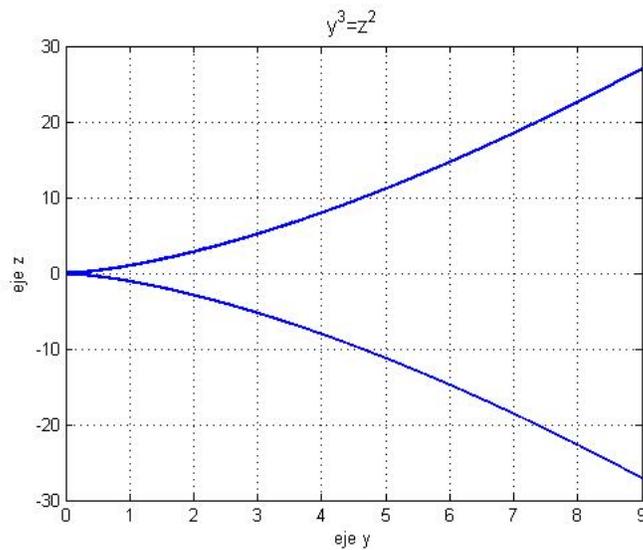


Figura 3.2: Curva cúspide en el plano normal.

Para el plano osculante:

$$y = \frac{\kappa x^2}{2}. \quad (3.28)$$

La cual corresponde a la ecuación de una parábola, como se muestra en la figura 3.3.

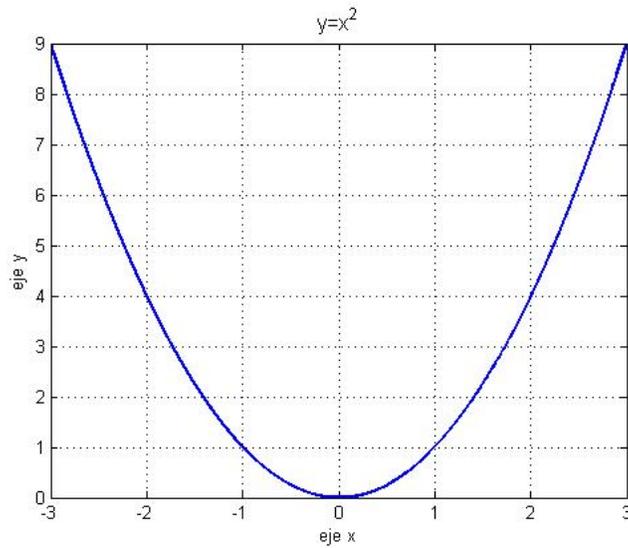


Figura 3.3: Curva parabólica en el plano osculante.

Y para el plano rectificante :

$$z = \frac{\kappa \tau x^3}{6}. \quad (3.29)$$

La cual corresponde a la ecuación de una cúbica, como se muestra en la figura 3.4 [4].

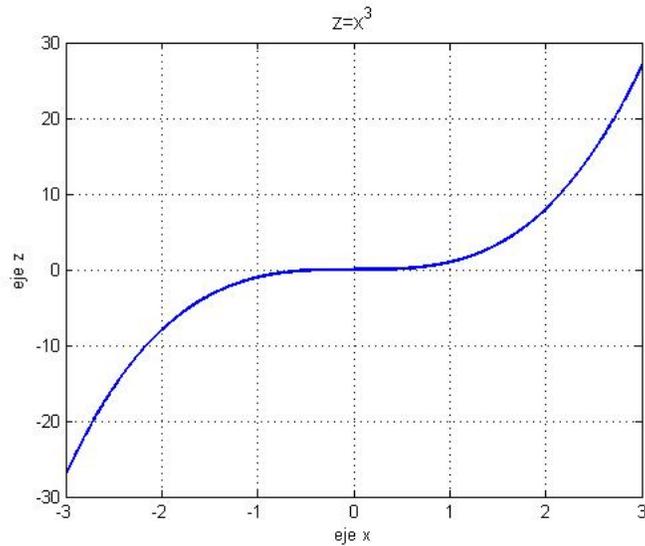


Figura 3.4: Curva cúbica en el plano rectificante.

### 3.3. Conceptos de cálculo variacional

El cálculo variacional estudia los métodos que permiten hallar los valores máximos o mínimos de los funcionales. Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o varias funciones [5].

Analizando la funcional dada por la siguiente ecuación

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x) dx, \quad (3.30)$$

si los puntos de la frontera de las curvas admisibles están fijos:  $y(x_0) = y_0$  y  $y(x_1) = y_1$ . Donde la función  $F(y, y', x)$  tiene derivadas continuas de segundo orden.

Tomemos una cierta curva admisible  $y = \bar{y}(x)$  cercana a  $y = y(x)$  donde éstas están incluidas en la familia monoparamétrica de curvas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x)), \quad (3.31)$$

cuando  $\alpha = 0$ , se obtiene la curva  $y = y(x)$ ; para  $\alpha = 1$  se tiene  $y = \bar{y}(x)$ . Donde  $\bar{y}(x) - y(x)$  es la variación de la función  $y(x)$  y la denotaremos por  $\delta y$ .

En los problemas variacionales la variación  $\delta y$  desempeña un papel análogo al del incremento de la variable independiente  $\Delta x$  en los problemas del estudio de los extremos de una función  $f(x)$ . La variación  $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$  es una función de  $x$ . Esta función puede ser derivada una o varias veces, siendo  $(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$ , es decir la derivada de la variación es igual a la variación de derivada; análogamente  $\delta y^{(n)} = \bar{y}^{(n)}(x) - y^{(n)}(x)$ .

De este modo, consideramos la familia  $y(x, \alpha)$ , donde  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$ , que contiene para  $\alpha = 0$ , la curva en la cual se alcanza el extremo y para  $\alpha = 1$  cierta curva admisible cercana, llamada curva de comparación.

Si consideramos los valores de la funcional 3.30 sólo en las curvas de la familia

$y = y(x, \alpha)$ , la funcional se transforma en una función de  $\alpha$ :

$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha) \quad (3.32)$$

debido a que el valor del parámetro  $\alpha$  determina una curva de la familia  $y = y(x, \alpha)$ , determinando también con esto el valor de la funcional  $v[y(x, \alpha)]$ . Esta función  $\varphi(\alpha)$  tiene un extremo en  $\alpha = 0$  puesto que para dicho valor se obtiene  $y = y(x)$ , teniendo la funcional, por hipótesis, un extremo con respecto a cualquier curva cercana admisible y en particular con respecto a las curvas cercanas de la familia  $y = y(x, \alpha)$ . La condición necesaria para que la función  $\varphi(\alpha)$  tenga un extremo en  $\alpha = 0$  se debe cumplir

$$\varphi'(0) = 0 \quad (3.33)$$

Como

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx \quad (3.34)$$

entonces

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (3.35)$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F(y(x), y'(x), x)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F(y(x), y'(x), x)}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0. \quad (3.36)$$

Puesto que  $\varphi'(0)$  es la variación de la funcional se puede denotar por  $\delta v$ . La condición necesaria para que la funcional  $v$  tenga un extremo, consiste en la anulacion de su variación  $\delta v = 0$ . Para la funcional de la ecuación 3.30, esta condición tiene la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0. \quad (3.37)$$

Integrando el segundo término de la suma por partes y tomando en cuenta que  $\delta y' = (\delta y)'$  obtenemos

$$\delta v = \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx. \quad (3.38)$$

Pero

$$\delta y \Big|_{x=x_0} = 0, \quad (3.39)$$

$$\delta y \Big|_{x=x_1} = 0, \quad (3.40)$$

y en virtud de que todas las curvas admisibles en el problema considerado pasan por lo puntos frontera fijos  $y$ , se tiene

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx. \quad (3.41)$$

De este modo, la condición necesaria de extremo toma la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx = 0. \quad (3.42)$$

Por lo que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3.43)$$

es la ecuación conocida como la ecuación de Euler o Euler-Lagrange.

### 3.4. Condición de transversalidad

En el apartado anterior se analizó la funcional de la ecuación 3.30, donde se supuso que los puntos frontera  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  eran conocidos. Supongamos ahora que uno o ambos puntos frontera pueden desplazarse. Entonces la clase de curvas admisibles se amplía, además de las curvas de comparación que tienen los puntos comunes de la curva analizada, se pueden tomar también las curvas con puntos frontera desplazados.

Por esto, si en cierta curva  $y = y(x)$  se alcanza un extremo en el problema con puntos frontera móviles, entonces con mayor razón se alcanzará un extremo con respecto a la clase más restringida de curvas que tienen pun-

tos frontera comunes con la curva  $y = y(x)$ , por lo tanto debe cumplirse la condición necesaria fundamental de extremo en el problema con fronteras inmóviles, es decir la función  $y(x)$  debe ser solución de la ecuación de Euler-Lagrange (ecuación 3.43).

De este modo las curvas  $y = y(x)$ , en las cuales se realiza el extremo en el problema con fronteras móviles, deben ser extremales.

La solución general de la ecuación de Euler contiene dos constantes arbitrarias, para cuya determinación es necesario tener dos condiciones. En el problema con puntos inmóviles dichas condiciones son  $y(x_0) = y_0$  y  $y(x_1) = y_1$ .

En el problema con fronteras móviles falta una o ambas condiciones y las condiciones que faltan para la determinación de las constantes arbitrarias de la solución general de la ecuación de Euler deben ser obtenidas a partir de la condición necesaria fundamental de extremo: la igualdad a cero de la variación  $\delta v$ .

Como en el problema con fronteras móviles el extremo se alcanza sólo en las soluciones  $y = y(x, C_1, C_2)$  de la ecuación de Euler, en adelante se puede considerar el valor de la funcional solo en las funciones de esta familia. Entonces la funcional  $v[y(x, C_1, C_2)]$  se transforma en una función de los parámetros  $C_1$  y  $C_2$  y de los límites de integración  $x_0$  y  $x_1$ , y la variación de la funcional coincide con la diferencial de esta función. Consideremos para simplificar que uno de los puntos frontera, por ejemplo  $(x_0, y_0)$  está fijo y el

otro  $(x_1, y_1)$  puede trasladarse y pasar por el punto  $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ .

Consideraremos próximas a las curvas admisibles  $y = y(x)$  y  $y = y(x) + \delta y$ , si los módulos de las variaciones  $\delta y$  y  $\delta y'$  son pequeños, así como los módulos de los incrementos  $\delta x_1$  y  $\delta y_1$ .

Los extremales que pasan por el punto  $(x_0, y_0)$  forman un haz de extremales  $y = y(x, C_1)$  en las curvas de este haz la funcional  $v[y(x, C_1)]$  se transforma en una función de  $C_1$  y  $x_1$ . Si las curvas del haz  $y = y(x, C_1)$  no se cortan en un entorno de la extremal considerada, entonces  $v[y = y(x, C_1)]$  puede considerarse como función uniforme de  $x_1$  y  $y_1$ , puesto que al dar estos se determina el valor de la funcional.

Calculemos la variación de la funcional  $v[y = y(x, C_1)]$  en los extremales del haz  $y = y(x, C_1)$  cuando el punto frontera se desplaza de la posición  $(x_1, y_1)$  a la  $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ , puesto que la funcional  $v$  se transforma en una función de  $x_1$  y  $y_1$  en las curvas del haz, su variación coincide con la diferencial de esta función. Separemos del incremento  $\delta v$  la parte lineal principal con respecto a  $\delta x_1$  y  $\delta y_1$ :

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(y + \delta y, y' + \delta y', x) dx - \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x) dx; \\ &= \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(y + \delta y, y' + \delta y', x) dx \end{aligned}$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(y + \delta y, y' + \delta y', x) - F(y, y', x)] dx, \quad (3.44)$$

donde el primer sumando del segundo término se soluciona mediante el teorema de valor medio y el segundo sumando se calcula desarrollando la función subintegral por la fórmula de Taylor.

Por lo que de la ecuación 3.44 se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta v &= F|_{x=x_1} \delta x_1 + F'_y|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1) \\ &= (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

o bien

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} dx_1 + F_{y'}|_{x=x_1} dy_1, \quad (3.46)$$

donde  $\bar{v}(x_1, y_1)$  es la función en la que se transforma la funcional  $v$  en la extremales  $y = y(x, C_1)$  y  $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$ ,  $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$  son los incrementos de las coordenadas del punto frontera. La condición necesaria fundamental del extremo  $\delta v = 0$  toma la forma

$$(F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 = 0. \quad (3.47)$$

Si las variaciones  $\delta x_1$  y  $\delta y_1$  son independientes, de aquí se deduce que:

$$(F - y' F_{y'})|_{x=x_1} = 0; F_{y'}|_{x=x_1} = 0. \quad (3.48)$$

Sin embargo hay que considerar el caso en el que las variaciones  $\delta x_1$  y  $\delta y_1$  son dependientes.

Supongamos por ejemplo que el segundo punto frontera  $(x_1, y_1)$  puede trasladarse por cierta curva

$$y_1 = \varphi(x_1). \quad (3.49)$$

Entonces  $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1)\delta x_1$  y por lo tanto, la condición 3.44 toma la forma  $\left[ F + (\varphi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_1} \delta x_1 = 0$  o bien, como  $\delta x_1$  varía arbitrariamente,

$$\left[ F + (\varphi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_1} = 0. \quad (3.50)$$

Esta condición (ecuación 3.50) establece una dependencia entre los coeficientes angulares  $\varphi'$  y  $y'$  en el punto frontera, y se llama condición de transversalidad.

La condición de transversalidad, conjuntamente con la condición  $y_1 = \varphi(x_1)$ , permite en general determinar una o varias extremales del haz  $y = y(x, C_1)$ , en las cuales puede alcanzarse el extremo. Si el punto frontera  $(x_0, y_0)$  puede trasladarse por cierta curva  $y_0 = \varphi(x_0)$ , entonces se deduce, en forma completamente análoga que en el punto  $(x_0, y_0)$  también debe satisfacerse la

condición de transversalidad [5] .

$$\left[ F + (\varphi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_0} = 0. \quad (3.51)$$

Para el caso de la propagación de la luz las transversales son simplemente los frentes de onda de la onda de luz y las extremales son los rayos de luz. Por una transversal se quiere decir una curva o superficie que está en todas las partes ortogonales a una familia de extremales [6].

# Referencias

- [1] <http://es.thefreedictionary.com/geometría>.
- [2] William C. Graustein. “Differential geometry”. Dover Pub. (2006). pp 1-57
- [3] Struik D.J. “Lectures on classical differential geometry”. Second edition. Dover Pub. (1988). pp 1-20
- [4] Oscar A. Palmas Velasco y J. Guadalupe Reyes Victoria. “Curso de geometría diferencial parte 1. curvas y superficies”. 2da edición UNAM (2008). pp 27-70
- [5] Elsgolzt L. “Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional”. Editorial MIR (1969). pp 299-338 y pp 334-338.
- [6] R. Courant and D. Hilbert. “Methods of mathematical physics”. Vol. I, first edition. Interscience publishers; inc., New York. pp 183-214

# Capítulo 4

## Descripción de modos plasmónicos unidimensionales

En este capítulo se plantea un modelo teórico para los modos plasmónicos unidimensionales que se propagan en nanoalambres con curvatura y torsión. Con base en la geometría diferencial se realiza una parametrización en término de longitud de arco para los nanoalambres, con ello se obtiene una expresión para la relación de dispersión y al mismo tiempo se realiza un análisis para dicha relación.

### 4.1. Modos plasmónicos unidimensionales

En el capítulo 2 se analizaron los modos plasmónicos de superficie que se propagaban a lo largo de películas metálicas, donde la longitud y el ancho de la película son de dimensiones micrométricas. Debido a que en este capítulo nos interesa realizar una descripción de modos plasmónicos de su-

perficie unidimensionales o simplemente los llamaremos modos plasmónicos unidimensionales, por lo que se limita a la película metálica a ser una tira metálica ó un nanoalambre [1]. A los modos plasmónicos que se propagan en nanoalambres los llamaremos modos plasmónicos unidimensionales.

Los modos plasmónicos unidimensionales son la excitación de electrones en una sola dimensión los cuales se propagan sólo a lo largo del alambre, lo cual es una limitante al movimiento de los electrones [2, 3]. Los modos plasmónicos unidimensionales podrían propagarse en nanoalambres y acoplarse fuera de él como fotones [4]. En las siguientes secciones se propone un modelo teórico que nos permita la descripción de los modos plasmónicos unidimensionales. Para la descripción de los modos plasmónicos unidimensionales se inicia con un análisis para alambres rectos y enseguida para alambres con curvatura y torsión, posteriormente se analiza la relación de dispersión para alambres con curvatura y torsión.

## **4.2. Modo plasmónico de superficie en un nanoalambre recto**

Cuando un material tiene contacto con el campo eléctrico este se polariza como se muestra en la figura 4.1, en la cual se muestra el modelo que se toma como base para poder realizar el análisis de los modos plasmónicos en nanoalambres.

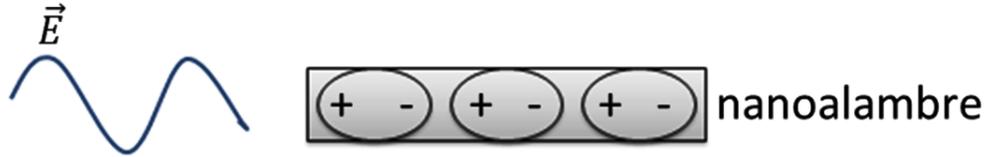


Figura 4.1: Polarización de un material en presencia de un campo eléctrico.

Puesto que el campo eléctrico varía en el tiempo, lo cual implica que también las polarizaciones varían, por lo que tenemos dipolos acoplados [5]. Considerando que en un diferencial del alambre se forman un par de polarizaciones, las cuales serán modeladas como pequeñas oscilaciones de resortes, como se muestra en la figura 4.2.

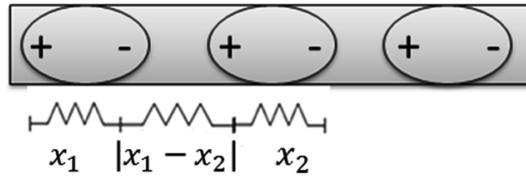


Figura 4.2: Interacción entre dipolos acoplados como un sistema de resortes acoplados.

Los resorte  $x_1$  y  $x_2$  tienen asociada una masa, las cuales supondremos son iguales, de la misma manera las constantes elásticas. Es decir  $m_1 = m_2 = m$ ,  $k_1 = k_3 = k$  y  $k_2 = k_a$ . Enseguida se hace una analogía con un sistema clásico el cual es descrito con la ecuación de Euler-Lagrange la cual es un caso particular de la ecuación de Euler cuando  $F = T - U = L$ , donde  $L$  es la lagrangiana del sistema,  $T$  es la energía cinética y  $U$  es la energía potencial [6].

De donde se tiene que

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad (4.1)$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k_a(x_1 - x_2)^2. \quad (4.2)$$

Por lo que la lagrangiana del sistema queda dada como:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k_a(x_1 - x_2)^2. \quad (4.3)$$

Sustituyendo la ecuación 4.3 en la ecuación de Euler-Lagrange (ecuación 3.43) se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema bajo análisis, las cuales están dadas por las ecuaciones 4.4 y 4.5

$$-kx_1 - k_a(x_1 - x_2) - m\ddot{x}_1 = 0 \quad (4.4)$$

$$-kx_2 + k_a(x_1 - x_2) - m\ddot{x}_2 = 0. \quad (4.5)$$

Sumando la ecuación 4.4 y la ecuación 4.5 se tiene

$$k(x_1 + x_2) + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 0$$

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega^2(x_1 + x_2) = 0, \quad (4.6)$$

donde  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

Y restando la ecuación 4.4 y la ecuación 4.5 se tiene

$$k(x_1 - x_2) + 2k_a(x_1 - x_2) + m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = 0$$

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega^2(x_1 - x_2) + 2\omega_a^2(x_1 - x_2) = 0, \quad (4.7)$$

donde  $\omega_a^2 = \frac{k_a}{m}$ .

Por lo que podemos obtener la solución dada por:

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\omega^2(x_1 + x_2) \quad (4.8)$$

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\omega^2(x_1 - x_2) - 2\omega_a^2(x_1 - x_2). \quad (4.9)$$

Si consideramos la suma de la ecuación 4.8 y la ecuación 4.9 como la ecuación de movimiento de todo nuestro sistema tenemos que:

$$\ddot{X} = (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\omega^2(x_1 + x_2) - (\omega^2 + 2\omega_a^2)(x_1 - x_2). \quad (4.10)$$

Por lo que la solución a nuestro sistema está dada como:

$$X = c_1(x_1 + x_2) + c_2(x_1 - x_2). \quad (4.11)$$

De las ecuaciones 4.8 y 4.9 se puede obtener

$$(x_1 + x_2) = a \cos \omega t \quad (4.12)$$

$$(x_1 - x_2) = b \cos \omega_1 t, \quad (4.13)$$

donde  $\omega_1^2 = \omega^2 + 2\omega_a^2 = N^2\omega^2$  donde  $N$  es un número entero, que lleva al sistema al caso de resonancia. Sustituyendo las ecuaciones 4.12 y 4.13 en la ecuación 4.11 se tiene:

$$X = c_1 \cos \omega t + c_2 \cos \omega_1 t. \quad (4.14)$$

Debido que se tiene un análisis en un segmento pequeño del alambre se puede decir que  $c_1 = c_2 = A$ , por lo que se tiene:

$$X = A(\cos \omega t + \cos \omega_1 t). \quad (4.15)$$

Puesto que se quiere que  $x$  sea una onda que se propague en espacio y tiempo tenemos que:

$$X = A(\cos(kx - \omega t) + \cos(k_1 x - \omega_1 t)) \quad (4.16)$$

$$X = A(\cos(kx - \omega t) + \cos(Nkx - N\omega t)). \quad (4.17)$$

Y puesto que se quiere una condición de resonancia  $N = 2$  debido a que es

el valor mas pequeño para obtener un ciclo completo y de acuerdo a [7] se puede obtener que

$$X = A \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t). \quad (4.18)$$

Donde  $\bar{k}$  y  $\bar{\omega}$  son los promedios de los vectores de onda y frecuencias respectivamente. Puesto que el estudio bajo análisis es un modo plasmónico de superficie unidimensional a  $\bar{\omega}$  le pediremos valores de  $\omega_{ps}$  por lo que  $\bar{\omega} = \omega_{ps}$ , por lo que la relación de dispersión queda ahora como  $\bar{k} = k = \frac{\omega_{ps}}{c}$ .

### 4.3. Plasmón de superficie unidimensional en un nanoalambre con curvatura y torsión

Iniciemos suponiendo que tenemos un alambre con curvatura y torsión, tal como se muestra en la figura 4.3, de la cual consideraremos un diferencial de la longitud de arco  $ds$ , al cual se le realizará un análisis semejante al aplicado al alambre recto. Considerando ahora  $s_1$  y  $s_2$ ,  $m_1 = m_2 = m$ ,  $k_1 = k_3 = k$  y  $k_2 = k_a$  para el sistema de resortes acoplados, por lo que se plantea la Lagragiana del sistema dada por la siguiente ecuación.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}_2^2 - \frac{1}{2}k(s_1^2 + s_2^2) - \frac{1}{2}k_a(s_1 - s_2)^2. \quad (4.19)$$

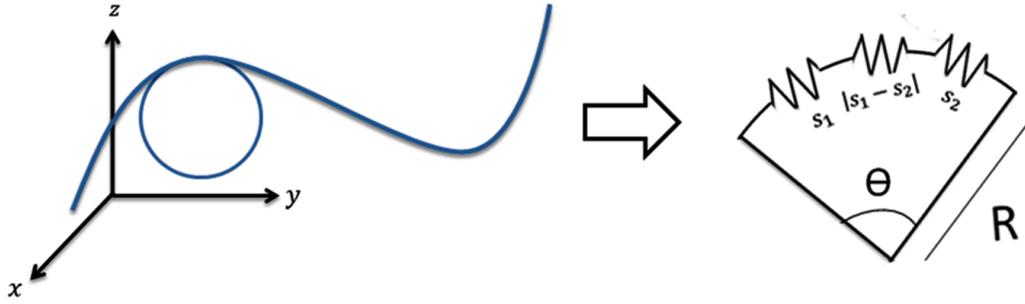


Figura 4.3: Interacción de dipolos acoplados como un sistema de resortes acoplados en un alambre con curvatura y torsión.

Sustituyendo la ecuación 4.19 en la ecuación de Euler-Lagrange (ecuación 3.43) pueden obtenerse las siguientes ecuaciones

$$-ks_1 - k_a(s_1 - s_2) - m\ddot{s}_1 = 0, \quad (4.20)$$

$$-ks_2 + k_a(s_1 - s_2) - m\ddot{s}_2 = 0. \quad (4.21)$$

Sumando y restando las ecuaciones 4.20 y 4.21 se obtienen las siguientes ecuaciones

$$(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) = -\omega^2(s_1 + s_2), \quad (4.22)$$

$$(\ddot{s}_1 - \ddot{s}_2) = -\omega^2(s_1 - s_2) - 2\omega_a^2(s_1 - s_2). \quad (4.23)$$

De forma análoga al análisis realizado para un alambre recto, puede obtenerse

la solución general para nuestro sistema de la siguiente manera

$$S = A \cos(\bar{k}s - \bar{\omega}t). \quad (4.24)$$

Debido a que ya conocemos la función de onda en un alambre con curvatura y torsión, podemos caracterizar esta ecuación en términos de los parámetros de Frenet-Serret, tomando en cuenta que en este sistema de referencia el eje  $\vec{T}$  le nombramos  $x$ ,  $\vec{n} \rightarrow z$  y  $\vec{b} \rightarrow y$ , se tiene:

$$x = A_x \cos(\bar{k}s - \bar{\omega}t) \quad (4.25)$$

$$y = A_y \cos(\bar{k}s - \bar{\omega}t) \quad (4.26)$$

$$z = A_z \cos(\bar{k}s - \bar{\omega}t). \quad (4.27)$$

Hasta ahora no se ha mencionado de los valores de  $\bar{\omega}$  y de  $\bar{k}$ . Por lo que  $\bar{\omega} = \omega_{ps}$ , puesto que estamos interesados en analizar modos plasmónicos de superficie, por lo que  $\bar{k} = k_{ps}$ .

Partiendo de que  $k_{ps}$  está dada como

$$k_{ps} = \frac{2\pi}{\lambda_{ps}}, \quad (4.28)$$

suponiendo que  $\Delta s \rightarrow \lambda_{ps}$ , debido a que estamos analizando una longitud de arco del alambre, si esta es del tamaño de la longitud de onda se preservaría

las propiedades del alambre y del campo eléctrico. por lo que se tiene que

$$k_{ps} = \frac{2\pi}{\Delta s} \quad (4.29)$$

donde  $s = R\theta$ , por lo que

$$k_{ps} = \frac{2\pi}{R\theta}. \quad (4.30)$$

De esta forma tenemos que  $k_{ps}$  es la relación de dispersión para un modo plasmónico unidimensional, la cual depende de  $R$  y  $\theta$  o de la curvatura y  $\theta$ .

#### 4.4. Análisis de la relación de dispersión $k_{ps}$

En las dos secciones anteriores se propuso un análisis para describir los modos plasmónicos unidimensionales, de donde se obtuvo una expresión para la relación de dispersión, por lo que ahora se realizará un análisis de la relación de dispersión obtenida en la sección anterior, es decir la ecuación 4.30.

Para este análisis se tomarán en cuenta algunos valores de  $R$  para el nanoalambre los cuales serán sustituidos en la ecuación 4.30. Si suponemos que  $R \rightarrow 0$  se puede ver que la relación de dispersión  $k_{ps} \rightarrow \infty$ , al decir que  $R \rightarrow 0$  se habla de existencia de picos en el nanoalambre, de acuerdo con el valor  $k_{ps}$  en estos puntos la luz es irradiada. Si suponemos que el radio de curvatura

del alambre  $R \rightarrow \infty$  puede verse que la relación de dispersión  $k_{ps} \rightarrow 0$ , es decir que se tiene un nanoalambre recto y la luz en estos puntos no es irradiada.

Los resultados anteriores son consistentes con algunos resultados que han sido reportado de manera experimental por algunos autores, para el primer caso supuesto se presentan los resultados obtenidos por [8, 9, 10], donde se muestran la propagación de los modos plasmónicos en nanoalambres con diferentes radios de curvaturas, como puede observarse en la figuras 4.4 a) [8], 4.5 b) [9], 4.6 [9] y 4.7 a.3) [10] donde puede verse que para diferentes alambres, ya sean de Ag o Au, se tienen radios de curvaturas extremadamente cerradas, por lo que en estos puntos el modo plasmón es irradiado en forma de fotones, donde los puntos más intensos son los puntos donde se hace incidir la luz. Para el segundo caso consideremos la figura 4.7 a.1), donde puede verse que únicamente emite luz en los extremos y puede verse que la luz no es irradiada en otros puntos del alambre. Para valores de radios de curvatura grandes se muestran los resultados de la 4.4 b), 4.5 a) y 4.7 a.2), donde puede verse que para estos alambres la luz no es irradiada debido a los valores de radio de curvatura. Con los datos experimentales anteriores podemos ver que nuestro modelo ha podido describir estos fenómenos de manera satisfactoria.

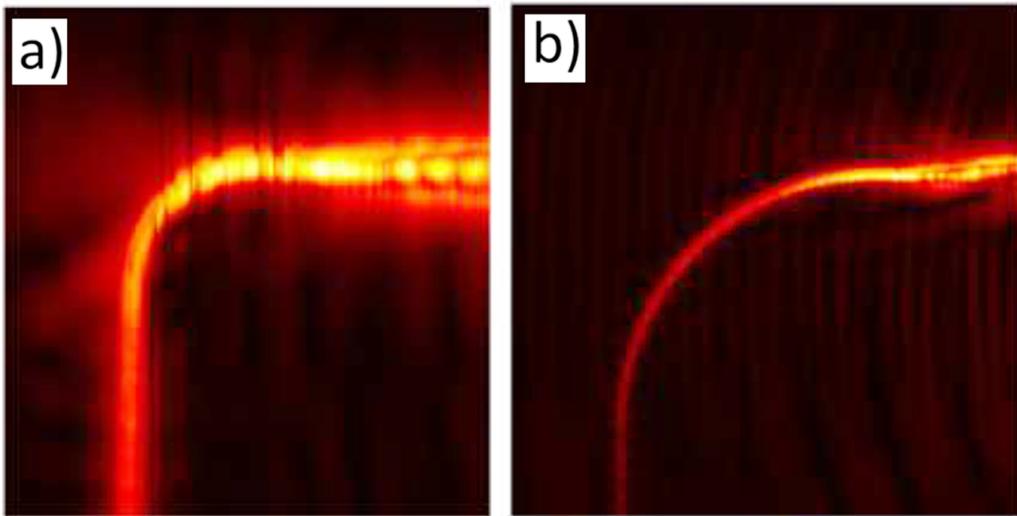


Figura 4.4: Modos plasmónicos propagándose en un alambre de Au con espesor de a) 40 y b) 70  $nm$  de 2 y 12  $\mu m$  de radio de curvatura respectivamente. Como se muestra en las imágenes cuando el radio es mas pequeño se irradia mas luz que para valores de radio mayor.

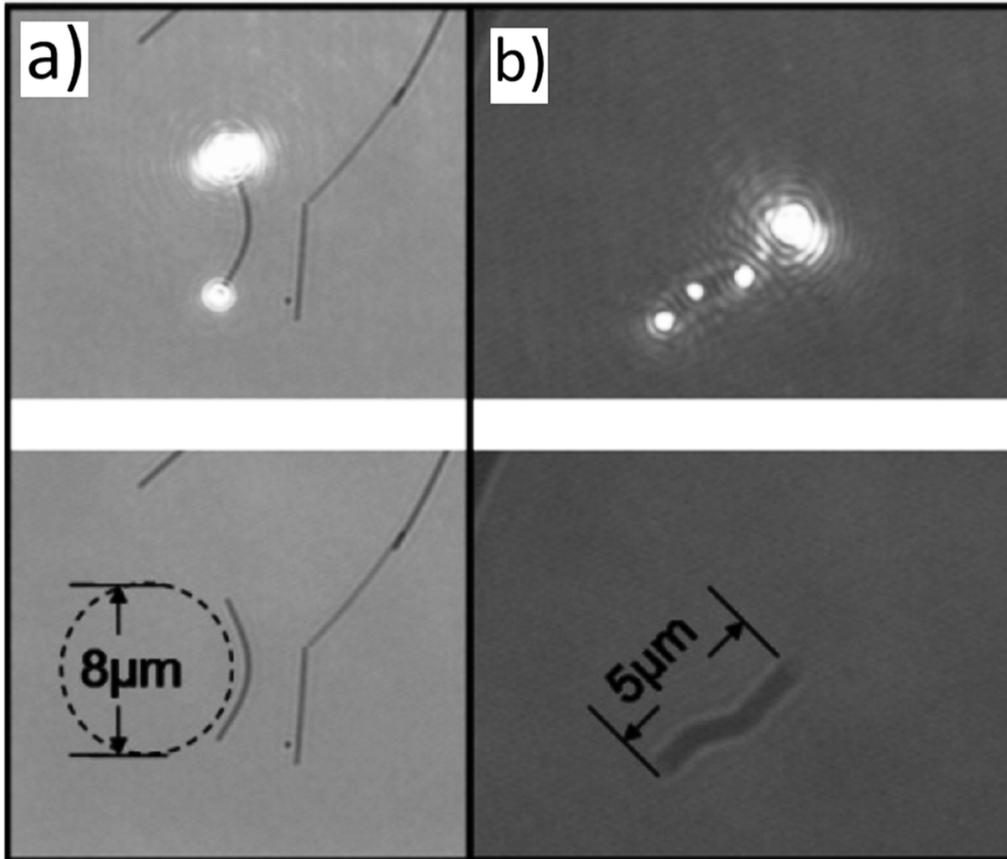


Figura 4.5: a) Alambre de Ag de  $7 \mu m$  con un radio de curvatura de  $4 \mu m$ . b) Alambre de  $5 \mu m$  con 2 curvaturas altamente irradianes.

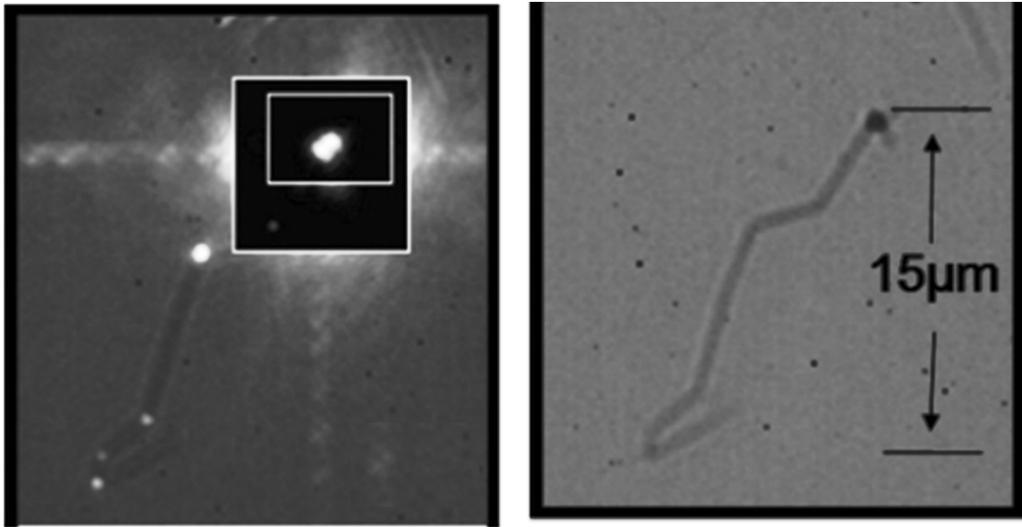


Figura 4.6: Propagación de plasmones en nanoalambres de Ag con múltiples puntos emitiendo luz.

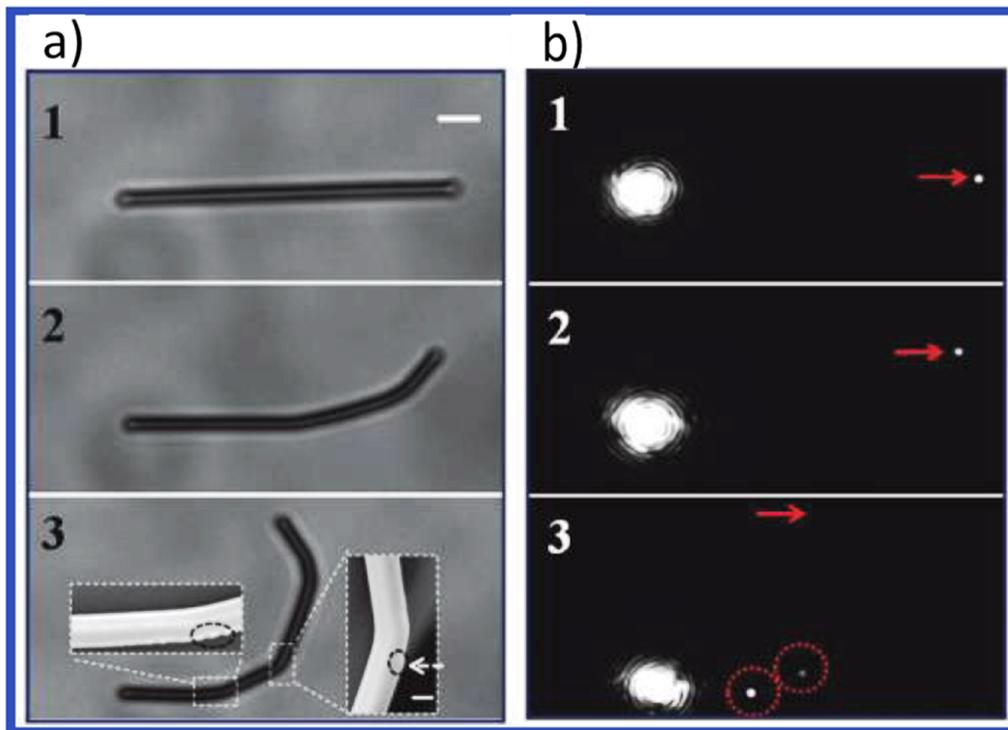


Figura 4.7: Múltiples nanoalambres de Ag, en a) se muestran los alambres y en b) se muestra la propagación de modos plasmónicos en los respectivos alambres. Donde a.1) no está curvado, a.2) tiene un radio de curvatura grande y a.3) tiene curvaturas muy cerradas con grietas.

# Referencias

- [1] Stefan Alexander Maier. “Plasmonics: fundamentals and applications”, New York, Springer (2007). p 61.
- [2] Tadaaki Nigao, Shin Yaginuma, Takeshi Inaoka and Toshio Sakurai. “One-dimensional plasmon in an atomic-scale Metal Wire”. Phys. Rev. Lett. 97, 116802 . (2006).
- [3] Harald Ditlbacher, Andreas Hohenau, Uwe Kreibig, Michael Rogers, Ferdinand Hofer, Franz R. Aussenegg and Joachim R. Krenn. “Silver nanowires as surface plasmon resonators”. Phys. Rev. Lett. 95, 257403. (2005).
- [4] Hong Wei, Zhipeng Li, Yurui Fang, Feng Hao, Timur Shegai, Tali Dardosh, Yingzhou Huang, Wenzhong Wang, Zhenyu Zhang, Gilad Haran, Peter Nordlander and Hongxing Xu. “Control light propagation and polarization with plasmons for surface-enhanced Raman scattering”. Proc. of SPIE Vol. 7395, 73950T. (2009).
- [5] Viktor A Podolskiy, Andrey K Sarychev, Evgenii E Narimanov and Vladimir M Shalaev. “Resonant light interaction with plasmonic nanowire

- systems ”. J. Opt.A: Pure Appl. Opt. 7, S32-S37 . (2005)
- [6] Juárez Morales J. C.. “Estudio de procesos resonantes en arreglos bidimensionales de nanopartículas”. Tesis doctoral INAOE, (2012). pp 25-27.
- [7] Eugen Hetch. “Óptica”. Tercera edición. Pearson Addison Wesley (2005).
- [8] Dirk Jan Dikken, Marko Spasenović , Ewold Verhagen, Dries van Oosten and L. (Kobus) Kuipers. “Characterization of bending losses for curved plasmonic nanowire waveguides”. OPTICS EXPRESS, Vol. 18, No 15, 16112-16119 . (2010).
- [9] Aric W. Sanders, David A. Routenberg, Benjamin J. Wiley, Younan Xia, Eric R. Dufresne and Mark A. Reed.. “Observation of plasmon propagation, redirection, and fan-out in silver nanowires”. NANO LETTERS vol. 6, No. 8, 1822-1826 (2006).
- [10] Wenhui Wang , Qing Yang, Fengru Fan, Hongxing Xu and Lin Wang. “Light propagation in curved silver nanowire plasmonic waveguides”. NANO LETTERS, 11, 1603-1608. (2011) .



# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajos a futuro

En el capítulo 2 se realizó un estudio de los modos plasmónicos de superficie, con base en las ecuaciones de Maxwell se obtiene la relación de dispersión. Puesto que los modos plasmónicos de superficie son propagados por distancias cortas, lo cual es una limitante, se realizó un estudio para lograr plasmones de largo recorrido y con ello se halló la relación de dispersión para estos modos plasmónicos, donde la parte imaginaria de esta relación es menor que la de los modos plasmónicos de superficie, lo que permite que estos modos se propaguen por una mayor distancia.

En el capítulo 3 se realizó un estudio teórico de geometría diferencial, principalmente se revisaron las ecuaciones de Frenet-Serret, este estudio nos permite realizar una parametrización de curvas en el espacio. Al mismo tiempo se realiza un estudio a la ecuación de Euler-Lagrange la cual nos permite

modelar nuestro sistema. Así como el concepto de transversalidad, el cual nos permite decir que toda emisión es perpendicular a la superficie.

Finalmente en el capítulo 4 se ha planteado una descripción de modos plasmónicos unidimensionales, es decir, los modos plasmónicos en nanoalambres. Para poder realizar esta descripción se ha partido de la interacción de un campo eléctrico con un material del cual se tienen dipolos acoplados, para poder describir la interacción entre estos dipolos nos hemos limitado a analizar únicamente 2 dipolos en una diferencial de longitud del nanoalambre haciendo una analogía con resortes acoplados, permitiéndonos esta analogía plantear la Lagrangiana del sistema. Una vez teniendo la Lagrangiana del sistema y con base en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos la ecuación de movimiento a la que hemos considerado un modo plasmónico unidimensional. De forma similar se ha modelado un modo plasmónico en un nanoalambre con curvatura y torsión.

Una vez teniendo la descripción de modos plasmónicos de superficie en nanoalambres con curvatura y torsión se ha realizado un análisis para la relación de dispersión, encontrando que ésta depende del radio de curvatura, por lo que se ha realizado un análisis para los valores extremos, es decir para cuando  $R \rightarrow 0$  y para cuando  $R \rightarrow \infty$ , de donde hemos obtenido que para estos valores extremos nuestros resultados cualitativos son consistentes con algunos resultados experimentales tal y como se muestra en el capítulo anterior. Lo que nos permite decir que nuestro modelo teórico es una buena aproximación, dejando este problema como un problema abierto.

Siguiendo en esta línea de investigación un trabajo a futuro es determinar la expresión para la amplitud de los modos plasmónicos unidimensional la cual es más compleja puesto que se debe considerar las características del material y el dieléctrico. De igual forma se podría realizar un análisis para los valores de la curvatura que permitan que el modo plasmónico viaje sin esparcirse.



# Apéndice A

Partiendo de la ecuación de Helmholtz dada por:

$$\nabla^2 \varphi + k_0^2 n^2 \varphi = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde  $n = n_1 + ae^{-px}$ , por lo que la ecuación A.1 queda como:

$$\nabla^2 \varphi + k_0^2 (n_1^2 + 2an_1 e^{-px}) \varphi = 0, \quad (\text{A.2})$$

donde  $(ae^{-px})^2$  se ha despreciado puesto que  $a$  es una constante pequeña comparada con  $n$ .

Para un acoplamiento de modos la función  $\varphi$  está dada por:

$$\varphi = A_1(z)e^{-\alpha_1|x-d|}e^{i\beta_1 z} + A_2(z)e^{-\alpha_2|x-d|}e^{i\beta_2 z}. \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo la ecuación A.3 en A.2 y considerando los signos respectivos

se tiene:

$$\begin{aligned}
& \alpha_1^2 A_1 e^{-\alpha_1(d-x)} e^{i\beta_1 z} + \alpha_2^2 A_2 e^{-\alpha_2(x-d)} e^{i\beta_2 z} - \beta_1^2 A_1 e^{-\alpha_1(d-x)} e^{i\beta_1 z} \\
& - \beta_2^2 A_2 e^{-\alpha_2(x-d)} e^{i\beta_2 z} + i\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} e^{-\alpha_1(d-x)} e^{i\beta_1 z} + i\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} e^{-\alpha_2(x-d)} e^{i\beta_2 z} \\
& + k_0^2 (n_1^2 + 2an_1 e^{-px}) (A_1 e^{-\alpha_1(d-x)} e^{i\beta_1 z} + A_2 e^{-\alpha_2(x-d)} e^{i\beta_2 z}) = 0, \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

donde las segundas derivadas han sido omitidas debido a la evolución lenta de  $A_i(z)$ , debido a que se propaga en el eje  $z$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \approx \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{A.5})$$

De la ecuación A.4 se deduce que:

$$\begin{aligned}
& i\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} e^{-\alpha_1(d-x)} e^{i\beta_1 z} + i\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} e^{-\alpha_2(x-d)} e^{i\beta_2 z} \\
& + 2an_1 e^{-px} (A_1 e^{-\alpha_1(d-x)} e^{i\beta_1 z} + A_2 e^{-\alpha_2(x-d)} e^{i\beta_2 z}) = 0, \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

donde  $p = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Considerando la ecuación A.6 y los signos respectivos para  $x$ , se obtienen

el siguiente par de ecuaciones

$$i\beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + 2an_1 A_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)d} e^{i(\beta_2 - \beta_1)z} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$i\beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} + 2an_1 A_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)d} e^{-i(\beta_2 - \beta_1)z} = 0. \quad (\text{A.8})$$