



Universidad Tecnológica de la Mixteca

Instituto de Física y Matemáticas

**DISEÑO DE UN ABSORBEDOR DE VIBRACIÓN DE
ALTO RENDIMIENTO DINÁMICO BASADO EN
INERSOR CONECTADO A UNA ESTRUCTURA TIPO
VIGA**

Tesis para obtener el título de:

Ingeniero en Física Aplicada

Presenta:

Gustavo López García

Director de tesis:

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

Codirector de tesis:

Dr. Eduardo Barredo Hernández

Huajuapán de León, Oaxaca, México

Julio de 2021

Dedicatoria

- *Dedicado a todas aquellas personas que sufren de algún tipo de padecimiento psicológico o psiquiátrico y que luchan día con día en salir adelante.*
- *Por aquellos educadores y profesores heroicos que pese a las circunstancias se esfuerzan por transmitir sus conocimientos y valoran la integridad de sus alumnos.*

Agradecimientos

- *Gracias a mis padres, Elena García Cruz y Martín López Aguilar, por motivarme y animarme en los momentos más complicados a lo largo de mi travesía en la universidad. Por confiar en mí y en la culminación de mi carrera.*
- *A Sheila Montesinos Cruz, por estar presente en los momentos clave de mi vida, apoyándome y alentándome en seguir adelante cuando más lo necesitaba.*
- *Agradezco la confianza y la experiencia brindada a quienes formaron parte de este trabajo de investigación, principalmente al Dr. José Gabriel Mendoza Larios y al Dr. Eduardo Barredo Hernández. De igual forma a mis sinodales, al Dr. Alberto Antonio García, al Dr. Manuel Arias Montiel y al M.C. Víctor Manuel Cruz Martínez.*
- *Al Dr. Salomón González Martínez, al Dr. Rafael Martínez Martínez y al Dr. Jesús Alejandro Hernández Tello quienes formaron un papel muy importante en mi desarrollo académico.*

Gustavo López García
Julio 2021

Resumen

La importancia de mitigar las vibraciones no deseadas tanto en estructuras estacionarias como no estacionarias, radica en proteger la integridad estructural del sistema por lo que pueden afectar la vida útil y comprometer su fiabilidad. Por tal motivo, para prevenir el daño estructural se han implementado sistemas de amortiguamiento capaces de disminuir las amplitudes de vibración.

Dentro del área de absorbedores dinámicos de vibración (DVA's), es bien conocida la analogía fuerza-corriente entre los dispositivos mecánicos y eléctricos. Sin embargo, la correspondencia se complementa al introducir un nuevo dispositivo denominado *inersor*. Este dispositivo posee la propiedad de modificar las frecuencias naturales y disminuir las amplitudes de vibración del sistema al modificar la inercia (masa aparente) del dispositivo. De hecho, el inersor presenta la propiedad de mejoramiento de masa aparente sin la necesidad de incrementar su masa gravitacional. Este efecto dinámico mejora las capacidades de amortiguamiento en los sistemas de control pasivo de vibración. Además, diversos estudios han demostrado que al optimizar los parámetros físicos de los sistemas anti-vibratorios basados en inersores se obtiene un excelente rendimiento de control en el sistema dinámico. Por lo que, en este trabajo se presenta tanto el proceso de calibración como la evaluación de rendimiento dinámico de un novedoso DVA basado en inersor conectado a una estructura tipo viga. Para evaluar el rendimiento dinámico a través de los parámetros físicos del dispositivo, se emplea la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio de rendimiento H_∞ . Además, se hace una comparativa entre ambos métodos de optimización obteniendo resultados numéricos, los cuales demuestran que el dispositivo propuesto funciona bien en la supresión de vibración de la estructura armónicamente excitada.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Nomenclatura	XI
Alfabeto griego	XV
Índice de figuras	XVII
Índice de tablas	XXI
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Justificación	4
1.3. Hipótesis	5
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivo general	5
1.4.2. Objetivos específicos	5
1.5. Metas	6
1.6. Metodología	6
1.7. Estructura de la tesis	8

2. Estado del arte	11
2.1. Absorbedores dinámicos de vibración	11
2.2. Analogía fuerza-corriente	14
2.3. Inersores	15
2.3.1. Redes mecánicas con inersores	19
2.3.2. Aplicaciones del inersor	20
3. Marco teórico	23
3.1. Análisis dimensional	23
3.1.1. Teorema II de Buckingham	25
3.2. Sistema con excitación armónica	28
3.3. Ecuaciones diferenciales parciales en deflexión de vigas	29
3.3.1. Condiciones de frontera en vigas	30
3.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange	32
3.4.1. Función de disipación de Rayleigh	34
3.5. Análisis modal	34
3.6. Teorema de Vieta	36
3.7. Matriz de Jacobi	38
3.8. Optimización	39
3.8.1. Matriz Hessiana	40
3.9. Técnica de los puntos fijos	42
3.10. Técnica de los puntos fijos extendida	44
3.11. Criterio H_∞	51
3.11.1. Método de Nishihara	52
4. Modelo matemático	57
4.1. Respuesta en frecuencia	57
5. Resultados	63
5.1. Técnica de los puntos fijos extendida	63
5.2. Criterio H_∞	69
6. Conclusiones	77
6.1. Trabajos futuros	78

A. Modelo matemático	79
B. Puntos fijos extendida	85
C. Método de Nishihara	87
D. Viga con DVA clásico	89
Bibliografía	91

Nomenclatura

\mathcal{J}	Jacobiano
$y_1(t)$	Desplazamiento correspondiente a la masa m_1 del DVA-A
$y_2(t)$	Desplazamiento correspondiente a la masa m_2 del DVA-B
$\frac{\partial \omega}{\partial x}$	Variación en la pendiente entre dos secciones transversales de una viga
\dot{v}	Aceleración
\mathcal{H}	Hessiana
\mathcal{L}	Lagrangiana
\mathcal{D}	Denominador
\mathcal{N}	Numerador
A	Área de sección transversal
b	Inertancia
c	Coefficiente de amortiguamiento
c_1	Coefficiente de amortiguamiento correspondiente al DVA-A
c_2	Coefficiente de amortiguamiento correspondiente al DVA-B
D	Función de las velocidades generalizadas o función de disipación de Rayleigh
E	Módulo de elasticidad

$E_{inertor}$	Energía cinética del inersor
F	Magnitud escalar de la fuerza aplicada a las terminales del inersor
$f(x)$	Función espacial
$f(x)g(t)$	Carga distribuida
$f(x, t)$	Fuerza externa por unidad de longitud
F_0	Amplitud de excitación
f_1, f_2, f_3, f_4, f_5	Ecuaciones a optimizar por el método de Nishihara
F_k	Fuerzas no-conservativas generalizadas
$g(t)$	Función temporal determinística
h	Aproximación a la norma H_∞ , denotada con doble barra o función propuesta por Nishihara
$H(s)$	Función de transferencia del sistema o respuesta del sistema
I	Momento de inercia centroidal
j	Parte imaginaria de un número complejo
k	Coefficiente de rigidez
k_1	Coefficiente de rigidez correspondiente al DVA-A
k_2	Coefficiente de rigidez correspondiente al DVA-B
L	Longitud total de la viga
M	Momento flexionante
m	Masa
m_1	Masa asociada el DVA-A
m_2	Masa asociada el DVA-B
P	Presión

P_{opt}	Parámetros a optimizar del sistema
q	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas para el DVA-A
$Q_i(\omega)$	frecuencia de la viga
q_k	Coordenadas generalizadas
$R(s)$	Respuesta en frecuencia adimensional del sistema
T	Energía cinética
U	Energía potencial
V	Fuerza cortante
v	Velocidad
V_{adim}	VARIABLES ADIMENSIONALES
W	Watt, unidad de potencia eléctrica
$Y(s)$	Impedancia mecánica
$y(x, t)$	Desplazamiento transversal de la viga
DVA	Absorbedor dinámico de vibración
FRF	Función de respuesta en frecuencia
IDVA	Absorbedores dinámicos de vibración basados en inersores
ISDVA	Absorbedor dinámico de vibración en serie basado en inersores
LTI	Sistema lineal invariante en el tiempo
NDVA	Absorbedor de vibración dinámico no tradicional
RIDTMD	Amortiguador de masas sintonizado de doble inercia rotacional
RMS	Valor cuadrático medio
SQP	Programación cuadrática secuencial
TID	Amortiguador de inercia sintonizado

TMD	Amortiguador de masa sintonizado
TMDI	Amortiguador de masa sintonizado basado en inersores
TVMD	Amortiguador de masas viscosas sintonizado

Alfabeto griego

Ω	Relación de frecuencia forzada
Π	Parámetros adimensionales presentes en un sistema
β	Relación de masas de los DVA's y la masa de la estructura principal
β_i	Valor característico
δ	Relación de masas entre la inertancia y el DVA-B
$\delta(x - a)$	Función delta de Dirac
δ_{ij}	Delta de Kronecker
η	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas entre el DVA-B y el DVA-A
γ_i	Relación de frecuencias naturales
μ	Relación de masas entre el DVA-B y el DVA-A
ω	Frecuencia de excitación externa
$\omega(x, t)$	Desplazamiento transversal o deflexión de la viga
ω_A^2	Frecuencia natural al cuadrado asociado al DVA-A
ω_B^2	Frecuencia natural al cuadrado asociado al DVA-B

ω_i^2	Frecuencia natural al cuadrado del i-ésimo modo de vibración
ω_n	Frecuencia natural
$\phi_n(x)$	Función n-ésima modal
ρ	Densidad volumétrica
ζ	Factor de amortiguamiento
$\zeta_{2_{opt}}$	Factor de amortiguamiento óptimo asociado al DVA-B
ζ_2	Factor de amortiguamiento asociado al DVA-B

Índice de figuras

1.1. Esquema reportado en la literatura de una estructura tipo viga con absorbedor dinámico de vibración basado en inersor (IDVA) [3].	3
1.2. Esquema del modelo de la viga Euler-Bernoulli con el ISDVA's.	4
1.3. Metodología de la investigación planteada en este trabajo de tesis [8].	6
2.1. Absorbedor dinámico de vibración: (a) no amortiguado, (b) amortiguado.	12
2.2. Absorbedor de vibración dinámico: (a) tradicional, (b) no tradicional.	13
2.3. Diagrama de cuerpo libre de un elemento mecánico de un puerto con par fuerza-velocidad (F, v) , donde $v = v_2 - v_1$ [1].	14
2.4. Símbolo del inersor [35].	15
2.5. Correspondencia entre circuitos eléctricos y mecánicos. En la analogía fuerza-corriente, las fuerzas sustituyen las corrientes y las velocidades sustituyen los voltajes [36].	16
2.6. Configuración del inersor piñón-cremallera.	17
2.7. Configuración de inersor husillo de bolas.	17
2.8. Configuración de inersor de fluido.	18
2.9. Esquema del modelo mecánico del inersor rotacional [36].	18
2.10. Esquema del modelo mecánico del inersor bomba de engranajes [36].	18
2.11. Tipos de arreglos mecánicos basados en inersores. Donde: b es la inertancia, c es el coeficiente de amortiguamiento y k_1 es la constante del resorte [33, 39].	19
2.12. Arreglo de un inersor en paralelo con un resorte conectado en serie con un arreglo de un amortiguador en paralelo con un resorte. a) Diagrama del circuito con inersores, b) implementación mecánica [25].	20

2.13. Kimi Raikkonen en el Gran Premio de España 2005 conduciendo el McLaren MP4-20 que lo condujo a la victoria con ayuda del inersor. Foto de LAT Photographic [25].	20
2.14. Estructuras con y sin inersores. a) Cuatro estructuras de tres grados de libertad compuesto por resortes, amortiguadores e inersores en cada piso simulando su implementación en una edificación; b) Se muestra la ventaja de la variación al implementar en cada piso un inersor, entre más inersores, mayor es la estabilidad de la edificación [40].	21
3.1. Esquema del movimiento del péndulo simple.	26
3.2. Ejemplos de excitaciones periódicas [48].	28
3.3. Esquema del modelo de la viga [48].	29
3.4. Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de la viga [48].	29
3.5. Condiciones de frontera más usuales para la vibración transversal de una viga [49].	32
3.6. Máximo y mínimo de una función arbitraria [63].	40
3.7. Gráfica de un DVA clásico en donde aparecen los puntos fijos P y Q correspondientes al comportamiento de los estados del sistema para cuando el amortiguamiento es cero e infinito.	42
3.8. Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al DVA clásico considerando diferentes valores del factor de amortiguamiento. Nótese que todas las líneas pasan a través de los puntos fijos P y Q	43
3.9. Gráfica de la respuesta en estado estable H_1 de un sistema vs la relación de frecuencias. Nótese el comportamiento entre los puntos fijos P y Q del sistema cuando se cambian los valores para el factor de amortiguamiento [66].	43
3.10. Absorbedor dinámico de vibración basado en inersores en arreglo tipo C3 (IDVA-C3) [6].	44
3.11. Gráfica de la aproximación de la norma $\ H_\infty\ $ vs la relación de frecuencias Ω del IDVA-C3 utilizando los parámetros óptimos y un factor de amortiguamiento arbitrario $\zeta = 0.30$	49
3.12. Gráfica de la FRF vs la relación de frecuencias Ω del IDVA-C3 utilizando los parámetros óptimos y el factor de amortiguamiento óptimo mediante la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida.	51
3.13. Comparación entre la técnica de los puntos fijos extendida y la técnica de Den Hartog. El aplanamiento de la curva entre los puntos fijos es más notorio al ocupar la técnica de los puntos fijos extendida [6].	51

3.14. Comparación entre la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio H_∞ . Nótese que el aplanamiento de la curva es mas visible al ocupar el criterio de rendimiento H_∞	56
4.1. Esquema del modelo de la viga propuesta en este trabajo.	58
5.1. Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al ISDVA's vs la relación de frecuencias Ω utilizando los parámetros óptimos y un coeficiente de amortiguamiento arbitrario.	66
5.2. Gráfica de la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ con los parámetros óptimos incluyendo la relación de amortiguamiento óptimo.	68
5.3. Gráfica para los distintos valores de β obtenidos por la técnica de calibración los puntos fijos extendida.	69
5.4. Gráfica de $H(\Omega)$ utilizando los parámetros óptimos.	72
5.5. Comparación de los resultados obtenidos a través de la técnica de los puntos fijos extendida (EFPT) y el criterio H_∞	73
5.6. Gráfica para los distintos valores de β obtenidos por el criterio de rendimiento H_∞	74
5.7. Comparación de las curvas de las FRF y el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones $\%SB_i$ del ISDVA's y el DVA clásico. Los parámetros óptimos para el ISDVA's son: $\mu_{opt} = 0.34842$, $\eta_{opt} = 0.83795$, $q_{opt} = 1.19237$ y $\zeta_{2_{opt}} = 0.67656$, mientras para el DVA clásico son: $T_{opt} = 0.83322$ y $\zeta_{opt} = 0.25217$, ver Apéndice D.	75
D.1. Estructura tipo viga con configuración de control de vibraciones basada en inersor [58].	89
D.2. Estructura tipo viga con DVA clásico [58].	90

Índice de tablas

2.1. Analogía fuerza-corriente entre un sistema mecánico y eléctrico.	15
3.1. Análisis dimensional de algunos parámetros utilizados frecuentemente en física. Recordar que la fuerza (igual a masa \times aceleración), el trabajo (igual a fuerza \times distancia), la rigidez (igual a fuerza/distancia) y el amortiguamiento (igual a fuerza/velocidad).	24
3.2. Resumen de los parámetros óptimos y sus respectivos valores numéricos para el IDVA-C3 obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida.	50
3.3. Resumen de los parámetros óptimos y sus respectivos valores numéricos para el IDVA-C3 obtenidos mediante el criterio H_∞	55
3.4. Comparación de los parámetros óptimos y sus respectivos valores numéricos para el IDVA-C3 obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida y el método de Nishihara.	56
5.1. Valores establecidos para cada variable independiente.	65
5.2. Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos y la respuesta en frecuencia del sistema en su forma adimensional.	65
5.3. Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada.	67
5.4. Valores numéricos de los parámetros óptimos al modificar el valor de β	69
5.5. Resultados numéricos de los parámetros óptimos obtenidos mediante el método de Nishihara.	72
5.6. Valores numéricos de los parámetros óptimos al modificar el valor de β	73

- 5.7. Tabla resumen de los valores numéricos para los parámetros óptimos al modificar el valor de β obtenidos a través de la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio H_∞ estableciendo $\delta = 1$ y $\phi_1 = \sqrt{2}$ 74
- D.1. Comparación de los parámetros óptimos y sus respectivos valores numéricos para la configuración viga-DVA clásico obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos [58] y el método de Nishihara. 90

Introducción

Una viga es un elemento estructural que resiste principalmente las cargas transversales aplicadas al eje de la viga. Tales elementos estructurales son ampliamente utilizados en diferentes construcciones de ingeniería civil, así como en bastidores de máquinas y automóviles, componentes de aviones y otros sistemas mecánicos. Es evidente, que la estructura tipo viga es un elemento típico en ingeniería mecánica y civil, que también es uno de los modelos más simples de estructuras continuas.

De acuerdo con la teoría de vibraciones, todo cuerpo que posee masa y elasticidad tiene la capacidad de vibrar. Además, esta vibración puede ser ocasionada por fuerzas dinámicas externas. Las fuerzas dinámicas incluyen personas, viento, olas, tráfico, terremotos o explosiones. Por lo que cualquier estructura puede estar sujeta a fuerzas dinámicas. La mitigación de vibraciones no deseadas en las estructuras es una parte importante del proceso de diseño, especialmente para estructuras que pueden estar sujetas a una fuerza de excitación externa. Adicionalmente, si la frecuencia de estas fuerzas de excitación se equipara a las frecuencias naturales de la estructura, se produce el fenómeno de resonancia. En esta condición, las amplitudes de vibración se incrementan de forma monótona, lo cual compromete la integridad estructural del sistema bajo resonancia. Por lo anterior, vale la pena formular un problema de dinámica estructural para investigar la reducción de vibraciones indeseables de una estructura tipo viga, ya que la vibración puede afectar la vida útil de la estructura, o incluso destruirla y es importante para la confiabilidad de la estructura. Para evitar el daño estructural, se han implementado diferentes sistemas útiles que disminuyen la amplitud de la vibración, conocidos como sistemas de amortiguamiento. Entre los cuales, se encuentran topes de impacto, amortiguadores viscosos, absorbedores dinámicos de vibración, inersores, amortiguadores con fluidos inteligentes, entre otros.

A lo largo de los años, se han realizado estudios acerca de los sistemas de amortiguamiento para mejorar la respuesta de vibración del sistema optimizando los parámetros de su diseño e implementando nuevos dispositivos y materiales inteligentes, ofreciendo así un mejor rendimiento de control en intervalos más extensos de frecuencias de operación. Entre estos dispositivos, se encuentra el inersor propuesto recientemente por Smith [1], quien lo definió como un dispositivo que almacena energía mecánica por medio de volantes de inercia (discos inerciales) modificando también las frecuencias naturales de los sistemas, donde la fuerza aplicada en sus terminales de entrada y salida es proporcional a la aceleración relativa entre ellas. De hecho, el inersor ha sido aplicado en diferentes tipos de estructuras con diferentes enfoques anti-vibratorios.

1.1. Planteamiento del problema

Dentro del área de las vibraciones mecánicas, la mayoría de los estudios relacionados con los sistemas de amortiguamiento se han popularizado desde la invención del inersor y se ha retomado el interés en las investigaciones en síntesis de redes mecánicas pasivas, la cual es parte primordial para el entendimiento del diseño de control de sistemas mecánicos basados en inersores. El objetivo de los sistemas de amortiguamiento es mitigar la vibración del sistema al optimizar los parámetros de su diseño e implementando nuevos materiales y dispositivos que den como resultado un mayor rendimiento de control en las estructuras.

De acuerdo con la literatura, existen variedades de sistemas mecánicos que han sido modelados matemáticamente y que han demostrado una ventaja superior cuando se emplean los inersores. Un ejemplo de ello es el sistema de la figura 1.1, donde se muestra una estructura tipo viga doblemente empotrada (viga de Euler-Bernoulli) conectada a una red mecánica (o impedancia mecánica) constituida por un inersor, un resorte y un amortiguador de fluido viscoso, que está sujeta a una carga distribuida $f(x)g(t)$. Cabe mencionar que, este tipo de red mecánica es bien conocida como el amortiguador de doble masa sintonizada con inercia rotacional [2].

Los resultados reportados en [3] indican que al emplear un inersor con un fluido reológico disminuye la respuesta de vibración en un 50 % en comparación con la respuesta de vibración del mismo sistema pero sin emplear el inersor. Lo que sugiere dos cosas: la primera es que los sistemas absorbedores de vibración basados en inersores suprimen vibración a baja y alta frecuencia de excitación y la segunda, es evaluar el rendimiento dinámico de las diferentes topologías de redes mecánicas basadas en inersores conectadas al DVA tradicional.

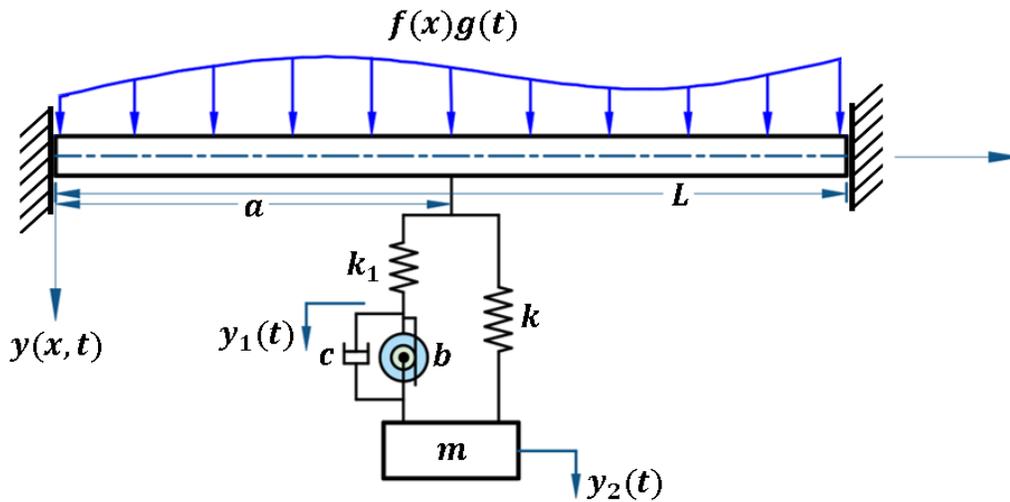


Figura 1.1: Esquema reportado en la literatura de una estructura tipo viga con absorbedor dinámico de vibración basado en inersor (IDVA) [3].

Siguiendo este razonamiento, Barredo et al. [4] demostraron que los absorbedores dinámicos de vibración (DVA's) en arreglos en serie son más eficientes y robustos en comparación con los DVA's en paralelo. Además que los DVA's en paralelo tienen un inconveniente en aplicaciones prácticas porque el espacio destinado para su implementación es reducido [5]. Por consiguiente, cuando se tiene una terminal del inersor conectada a tierra mecánica, ésta posee un gran potencial en cuanto a su rendimiento. Así, cuando se conectan los diferentes diseños de redes mecánicas entre la masa de un DVA clásico y la conexión a tierra se tiene un ISDVA que requiere un análisis matemático para su caracterización y optimización. Razón por la cual, en este trabajo de tesis se aborda la estructura propuesta en la figura 1.2, donde se realizarán todas las actividades planteadas en la sección de objetivos y metas teniendo en cuenta el modelo dinámico de la estructura.

El modelo propuesto en la figura 1.2 es una configuración de una estructura tipo viga doblemente empotrada (viga de Euler-Bernoulli) de longitud L sujeta a una carga distribuida $f(x)g(t)$, donde $f(x)$ es una función espacial y $g(t)$ una función temporal determinística. Para determinar el comportamiento dinámico del dispositivo propuesto, se propone una fuerza de excitación externa tipo armónica. La viga se encuentra en serie mediante dos arreglos de DVA's (DVA-A y DVA-B) y un inersor conectado al suelo (tierra mecánica). Cada DVA está compuesto por un amortiguador y un resorte, con coeficientes de amortiguamiento y rigidez, c_n y k_n ($n = 1, 2$) respectivamente, los cuales se conectan a las masas m_n ($n = 1, 2$), respectivamente. La configuración del sistema atenuador de vibraciones se encuentra localizado en el punto $x = a$. Para obtener el diseño óptimo

del dispositivo, se empleará la técnica de los puntos fijos extendida [6] a fin de lograr la calibración de las frecuencias y se evaluará la medida del rendimiento dinámico a través de la técnica H_∞ [7].

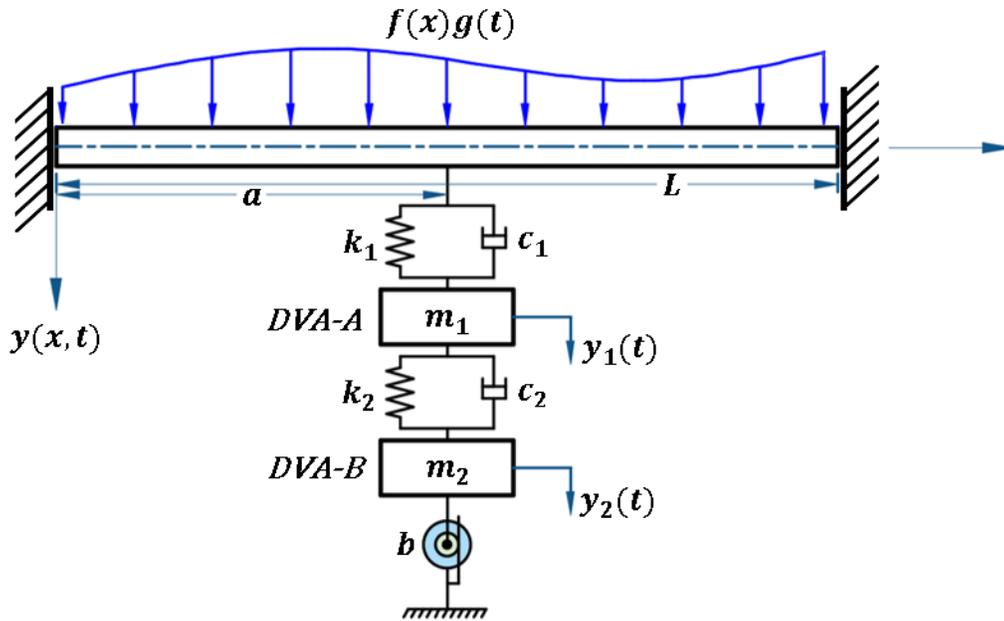


Figura 1.2: Esquema del modelo de la viga Euler-Bernoulli con el ISDVA's.

1.2. Justificación

Todo sistema mecánico y estructural presenta cierto grado de vibración en respuesta a la acción de fuerzas externas que inciden sobre él. La intensidad de la vibración depende de las características de la fuente de excitación y de las propiedades físicas del sistema, tales como: masa, amortiguamiento y rigidez. Adicionalmente, las amplitudes de vibración alcanzan sus valores máximos en condición de resonancia, es decir, cuando la frecuencia de la fuerza de excitación se iguala a alguna de las frecuencias naturales del sistema. La presencia de vibración en niveles incontrolados en máquinas y estructuras, puede provocar diferentes tipos de fallas en los elementos que las componen, tales como: desgaste, fatiga, un funcionamiento inadecuado o incluso la fractura. Por este motivo, para controlar la amplitud de vibración, se implementan sistemas de amortiguamiento que generan fuerzas que actúan en contra de las fuerzas de excitación externa. Por ejemplo, el absorbedor de vibración dinámico, es un dispositivo de control pasivo que disminuye la amplitud de vibración de una estructura por medio del movimiento de una masa sujeta a diferentes configuraciones de dispositivos mecánicos como: resortes y amortiguadores. Actualmente, a estas configuraciones se ha agregado un nuevo dispositivo denominado inersor, lo cual ha incrementado substancialmente el

rendimiento dinámico del DVA clásico o tradicional en cuanto a supresión de vibración se refiere.

Por lo anterior, en este trabajo de investigación se propone el control pasivo de vibraciones en estructuras estacionarias tipo viga, mediante el diseño de un absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico. El sistema de control pasivo estará formado por la conexión en serie de dos absorbedores de vibración dinámicos en conjunto con un inersor conectado a tierra mecánica. Cabe mencionarse que esta configuración no se ha estudiado anteriormente en el control de vibración en estructuras tipo viga.

1.3. Hipótesis

Se supone que al efectuar la implementación del inersor de alto rendimiento dinámico a la estructura tipo viga, se obtendrá un alto porcentaje de reducción de la vibración. Adicionalmente, se espera obtener un incremento considerable en el ancho de banda de supresión de vibración en comparación con el DVA clásico.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseñar teóricamente un absorbedor de vibración sintonizado de alto rendimiento para minimizar vibraciones armónicas.

1.4.2. Objetivos específicos

- I. Obtener el modelo dinámico adimensional en el dominio temporal y frecuencial de la estructura tipo viga conectada al absorbedor de vibración de alto rendimiento.
- II. Aplicar la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida con el propósito de obtener soluciones de forma cerrada para el diseño óptimo del absorbedor dinámico propuesto.
- III. Obtener numéricamente soluciones óptimas para el criterio de rendimiento H_∞ con el propósito de minimizar las amplitudes de vibración de la estructura tipo viga sujeta a vibración armónica.
- IV. Realizar las simulaciones numéricas tomando en cuenta los parámetros óptimos obtenidos a partir de los criterios de optimización.
- V. Comparar de los resultados obtenidos a partir de las técnicas de optimización empleadas.

1.5. Metas

- I. Desarrollo del modelo matemático del sistema a estudiar mediante la implementación de la segunda Ley de Newton y/o el formalismo de Euler-Lagrange.
- II. Desarrollar ecuaciones algebraicas simplificadas para el cálculo de los parámetros óptimos de diseño, que minimizan las amplitudes de vibración del sistema viga-absorbedor de vibración de alto rendimiento, mediante la implementación de la técnica de calibración de los puntos fijos extendida.
- III. Obtener de forma numérica los valores de los parámetros necesarios para el diseño óptimo de los absorbedores de vibración de alto rendimiento dinámico basados en inersor, mediante la implementación el criterio de rendimiento H_∞ .
- IV. Realizar una comparación de los resultados obtenidos a partir de la implementación de las dos técnicas de optimización, mediante gráficas de la función de respuesta en frecuencia del sistema viga-absorbedor de vibración de alto rendimiento dinámico.

1.6. Metodología

La metodología a utilizar para la elaboración de este trabajo de tesis se basa en el método de la investigación tecnológica presentado por Canales et al. [8]. En la figura 1.3 se muestra un esquema de esta metodología.

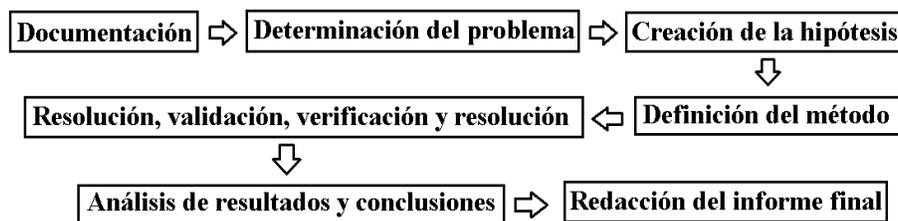


Figura 1.3: Metodología de la investigación planteada en este trabajo de tesis [8].

Consiste básicamente de las siguientes fases:

- I. *Documentación*. Esta etapa tiene particular importancia ya que considera la búsqueda, recolección y clasificación de la información sobre un tema específico, que posteriormente servirá de base para el desarrollo de un producto o tema de investigación. La documentación recabada en esta etapa servirá para la elaboración del estado del arte del tema de investigación, así

como para desarrollar el marco teórico que contiene las leyes físicas, técnicas y metodologías que servirán de base para el desarrollo de la tesis.

Para este trabajo de tesis se investigará sobre los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersores, con la finalidad de construir un panorama general acerca de estos dispositivos y su implementación en el control pasivo de vibraciones. Adicionalmente, es necesario conocer las técnicas de optimización disponibles en la literatura para el diseño óptimo de los absorbedores de vibración.

- II. *Determinación del problema.* La determinación del problema es una operación mediante la cual se especifica claramente y de un modo concreto sobre qué se va a realizar la investigación. En este caso en particular, se aborda el problema del control de la vibración lateral armónica de estructuras tipo viga, mediante la implementación de absorbedores de vibración dinámicos en serie basados en inersores (ISDVA's). Asimismo, para el diseño del ISDVA's se requiere de la aplicación de técnicas de optimización para la obtención de los parámetros óptimos que minimicen las máximas amplitudes de vibración del sistema.
- III. *Creación de la hipótesis.* Esta etapa se señala lo que se quiere demostrar y es donde se definen las explicaciones tentativas del fenómeno a investigar. En efecto, son respuestas provisionales a las preguntas de investigación, es decir, son respuestas tentativas ante una presunción de hechos. Por lo regular las hipótesis no son necesariamente verdaderas. Sin embargo, es necesaria la comprobación mediante el desarrollo del trabajo de investigación para afirmarla o refutarla. Generalmente, las investigaciones de carácter tecnológico se dirigen a crear y someter a prueba mediante herramientas o técnicas matemáticas y físicas una serie de problemas que se desean abordar, así como los procedimientos que influyen en las soluciones propuestas.

Para este trabajo de tesis la hipótesis planteada es la siguiente:

- Se supone que al efectuar la implementación del inersor de alto rendimiento dinámico a la estructura tipo viga, se obtendrá un alto porcentaje de reducción de la vibración. Adicionalmente, se espera obtener un incremento considerable en el ancho de banda de supresión de vibración en comparación con el DVA clásico.
- IV. *Definición de método.* Se utilizarán las ecuaciones de equilibrio de Newton y la mecánica lagrangiana para el desarrollo del modelo matemático que rige el comportamiento dinámico de la estructura tipo viga con el ISDVA's. Posteriormente, haciendo uso del análisis modal y después de un tratamiento matemático, se obtendrá la función de respuesta en frecuencia de la

estructura tipo viga. Con la función de respuesta en frecuencia del sistema, se formularán dos problemas de optimización, los cuales se abordarán a partir de las técnicas de optimización: puntos fijos extendida y H_∞ .

- v. *Resolución, validación y verificación.* Mediante el uso de herramientas matemáticas, el modelo matemático es sometido a diferentes consideraciones física y matemáticamente lógicas y posibles que demuestran la efectividad de los métodos empleados. Si se trata de una teoría general, en dichas suposiciones se deben aterrizar a los casos más simples o sencillos que previamente se conocen a través de la literatura ya reportada.
- vi. *Análisis de resultados y conclusiones.* Una vez obtenidos los resultados analíticos o numéricos se comparan detalladamente con los reportados en la literatura y se plantea si los resultados obtenidos afirman o refutan la hipótesis. También se evalúa si se cumplieron con los objetivos y metas propuestas al inicio de la tesis. Cuando no se cumplen en su totalidad los objetivos o metas se plantean posibles soluciones al problema y se responde a la interrogante del por qué no fue posible su resolución total. De manera breve, se formulan ideas que enriquecen al tema de investigación para trabajos a futuro y cómo continuar con la investigación.
- vii. *Redacción del informe final.* Cuando se concluye el proceso del análisis de investigación, se realiza la redacción del documento de tesis. Este documento debe cumplir el objetivo fundamental de comunicar con mayor claridad y coherencia posible los resultados, descubrimientos, comprobaciones o análisis logrados a lo largo de todo el proceso de investigación.

1.7. Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está organizado por siete capítulos, los cuales se especifican a continuación:

- En el Capítulo 1 se introduce al tema de investigación, enfatizando la importancia en los estudios de vibraciones mecánicas. También se presenta el planteamiento del problema, la justificación del mismo, la hipótesis, los objetivos, metas planteadas y la metodología a seguir para el desarrollo de la tesis.
- En el Capítulo 2 se expone la investigación documental y se detallan los hechos correlacionados que dieron origen a las investigaciones sobre los absorbedores dinámicos de vibración. Además, se incorpora información sobre los inersores (arreglos mecánicos, tipos de diseño y aplicaciones).

- En el Capítulo 3 se presenta toda la teoría (leyes, teoremas, técnicas, definiciones y conceptos) en la que se fundamenta el desarrollo de la tesis. Se efectúa un repaso a los temas de: análisis dimensional (teorema II de Buckingham), ecuaciones diferenciales parciales en vibración lateral de vigas, ecuaciones de Euler-Lagrange, análisis modal y teorema de Vieta. Asimismo, se ejemplifica la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida y el criterio de rendimiento H_∞ a través de una configuración simple para su mejor entendimiento.
- En el Capítulo 4 se encuentra el desarrollo matemático del modelo de la estructura tipo viga propuesta en este trabajo de tesis.
- En el Capítulo 5 se muestran los resultados analíticos y numéricos obtenidos a través de las técnicas de optimización.
- Finalmente, en el Capítulo 6 se exponen las conclusiones de acuerdo a los resultados obtenidos con la realización de la tesis. También, se establecen propuestas para trabajos futuros que pueden desarrollarse.

Estado del arte

2.1. Absorbedores dinámicos de vibración

Un método que ha resultado eficiente para el control de vibraciones en varios campos de la ingeniería, es la implementación de dispositivos mecánicos denominados absorbedores dinámicos de vibración (DVA's, por sus siglas en inglés) o también conocidos como amortiguadores de masas sintonizadas (TMD's, por sus siglas en inglés). Básicamente un sistema con DVA clásico se compone de dos partes principales: el sistema primario o estructura principal y el sistema secundario o el absorbedor, como se aprecia en la figura 2.1. El objetivo del absorbedor es disminuir las amplitudes de vibración de la estructura principal y se logra mediante el equilibrio dinámico entre los desplazamientos de la estructura principal y el absorbedor. Hermann Frahm [9], propuso el primer absorbedor dinámico de vibración y patentó su invento en 1909, lo que dio origen a numerosos estudios en vibraciones mecánicas .

En 1928, Ormondroyd y Den Hartog [10] calcularon soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA por medio de la técnica de los puntos fijos después de advertir la existencia de las frecuencias invariantes. Luego en 2005, Ozer y Royston [11] extendieron esta técnica a sistemas mecánicos de múltiples grados de libertad. Por otro lado, Asami et al. [12] y Nishihara y Asami [13, 14] utilizaron los métodos de optimización H_∞ y H_2 basados en la técnica de perturbación y el teorema de Vieta para el desarrollo de soluciones analíticas para el diseño óptimo del DVA. Posteriormente en 2015, Argentini et al. [15] obtuvieron soluciones analíticas para el diseño óptimo del TMD sujeto a fuerzas de excitación de desbalance rotatorio.

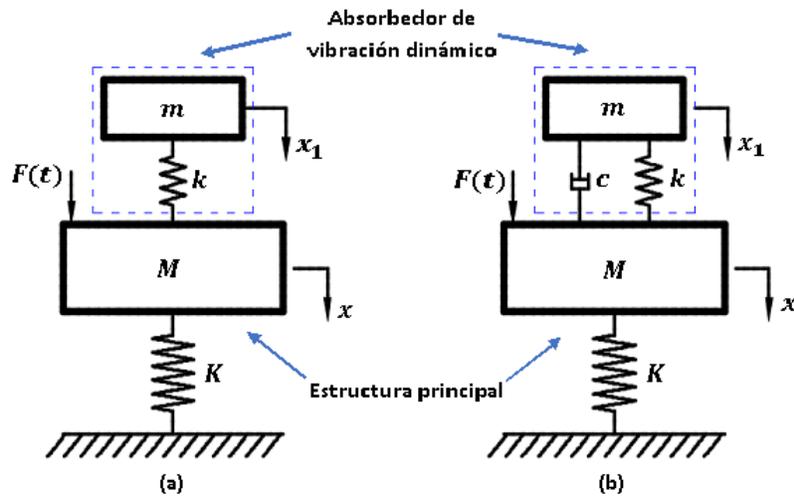


Figura 2.1: Absorbedor dinámico de vibración: (a) no amortiguado, (b) amortiguado.

El propósito de estos métodos de optimización es minimizar las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia de la estructura principal. Sin embargo, estos métodos de optimización no proporcionan el límite de amortiguamiento máximo para obtener el desempeño máximo del absorbedor. Por otra parte, Krenk [16] demostró que es posible obtener la relación de amortiguamiento máximo para producir la misma amplitud de vibración en todas las frecuencias de excitación, y así mismo minimizar el desplazamiento dinámico del absorbedor. Esta relación de amortiguamiento es 15% más grande que el factor de amortiguamiento clásico. Adicionalmente, Krenk y Hogsberg [17, 18] aplicaron este principio para desarrollar un procedimiento de calibración del factor de magnificación de una estructura flexible.

Por otro lado, existe un dispositivo absorbedor de vibración cuya configuración difiere de la del DVA clásico. Este dispositivo se conoce como absorbedor de vibración dinámico no tradicional (NDVA, por sus siglas en inglés). En esta configuración, un amortiguador viscoso lineal se conecta directamente a tierra en lugar del sistema principal, ver figura 2.2. Ren [19], Liu y Liu [20], propusieron el principio de optimización del NDVA en términos de minimizar la respuesta de amplitud máxima del sistema principal bajo excitación armónica, además sus resultados demostraron que el NDVA es más efectivo en el control de la vibración del sistema principal en comparación con el DVA tradicional. Por su parte, Wong y Cheung [21] obtuvieron los parámetros óptimos para el diseño del NDVA mediante la técnica de los puntos fijos para la supresión de vibración de un sistema principal bajo excitación armónica en la base. Cheung y Wong [22] utilizaron la técnica de los puntos fijos para el desarrollo de los parámetros óptimos del NDVA que minimizan la función

de movilidad de un sistema principal sujeto a una excitación armónica. Asimismo, Cheung y Wong [23, 24] presentaron soluciones de los parámetros óptimos del NDVA utilizando las técnicas de optimización H_∞ y H_2 . El criterio seleccionado para la optimización es la minimización de la energía de vibración total y la amplitud de vibración resonante de la estructura principal, respectivamente.

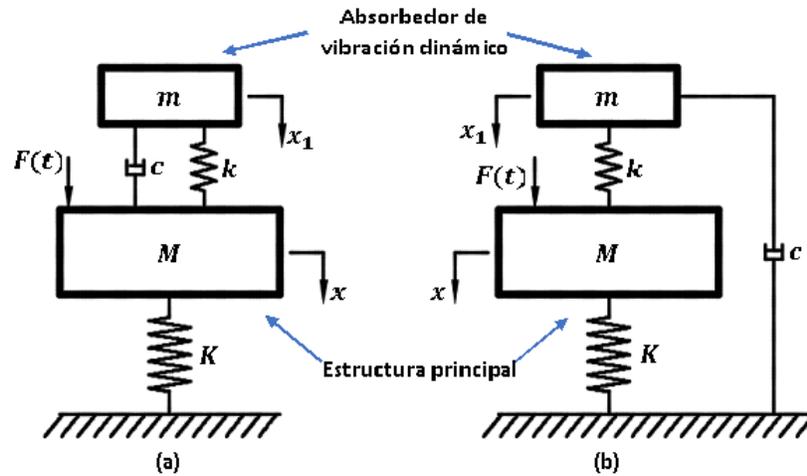


Figura 2.2: Absorbedor de vibración dinámico: (a) tradicional, (b) no tradicional.

Recientemente, se propuso un nuevo dispositivo mecánico para el control de vibración de sistemas de suspensión en vehículos, denominado *inersor* [1, 25, 26]. Se ha demostrado que el inersor mejora la respuesta dinámica y el ancho de banda efectivo del DVA cuando se conecta en serie o paralelo con resortes y amortiguadores [27]. De hecho, en 2102 Ikago et al. [28] propusieron un nuevo dispositivo para el control de vibración sísmica llamado amortiguador de masas viscosas sintonizado (TVMD), el cual demostró ser más eficiente que los DVA's convencionales. Más tarde, Lazar et al. [29] propusieron el amortiguador de inercia sintonizado (TID) para el control de vibración estructural. Luego, Garrido et al. [2] estudiaron la configuración de un resorte conectado en serie a un arreglo en paralelo de amortiguador-inersor llamada amortiguador de masas sintonizado de doble inercia rotacional (RIDTMD) y calcularon los parámetros óptimos mediante el método de optimización cuadrática secuencial (SQP). Después de esto, Marian y Giaralis [30] aplicaron este método para derivar los parámetros para el diseño óptimo de sistemas estructurales con excitación estocástica en la base. Posteriormente en 2017, Javidialesaadi y Wierschem [31] extendieron la técnica de los puntos fijos para optimizar la respuesta dinámica del amortiguador de masas sintonizado de doble inercia rotacional (RIDTMD), sin embargo, solo calcularon soluciones numéricas. Asimismo, Pietrosanti et al. [32] propusieron tres metodologías de optimización numérica para el diseño óptimo del amortiguador de masa sintonizado basado en inersores (TMDI), las cuales se basan en

minimizar la varianza del desplazamiento relativo y la aceleración de la estructura principal del TMDI.

Por otra parte, Hu y Chen [33] demostraron que tres configuraciones de los inersores mejoran el desempeño dinámico de los absorbedores dinámicos de vibración amortiguados basados en inersores (IDVA's). Estas configuraciones son: la configuración C3 (la conexión en serie de un resorte, un inersor, y un amortiguador); la configuración C4 (la conexión de un inersor conectado en serie a un arreglo en paralelo de resorte-amortiguador) y la configuración C6 (la conexión de un resorte conectado en serie a un arreglo en paralelo de amortiguador-inersor). Además, ellos utilizaron el sistema de cómputo numérico de Matlab para la búsqueda de patrones con múltiples puntos de inicio y así obtener soluciones numéricas para el diseño óptimo de los IDVA's. Más adelante, Barredo et al. [6] propusieron la técnica de los puntos fijos extendida. Mediante esta técnica obtuvieron soluciones analíticas para el diseño óptimo de las impedancias mecánicas C3, C4 y C6 propuestas por Hu y Chen [33].

2.2. Analogía fuerza-corriente

Una red mecánica (idealizada) de tipo traslacional consta de elementos mecánicos (como resortes, masas, amortiguadores y palancas) que están interconectados de manera rígida. Es habitual restringir el movimiento para que sea paralelo a un eje fijo y relativo a un punto de referencia fijo en un marco inercial, llamado suelo. El par de puntos finales del resorte y el amortiguador se denominan nodos (o terminales). Para la masa, una terminal es la posición de su centro de gravedad, mientras que la otra terminal es el suelo.

Un puerto es un par de nodos (o terminales) en un sistema mecánico al que se aplica una fuerza F igual y opuesta y que experimenta una velocidad relativa v . Alternativamente, se puede aplicar una velocidad que resulta en una fuerza.

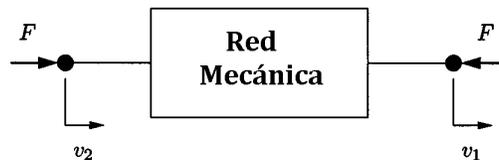


Figura 2.3: Diagrama de cuerpo libre de un elemento mecánico de un puerto con par fuerza-velocidad (F, v) , donde $v = v_2 - v_1$ [1].

En la figura 2.3 se muestra un diagrama de cuerpo libre de una red mecánica de un puerto (dos terminales) que muestra la convención de signos por la cual una F positiva da una fuerza de compresión y una $v = v_2 - v_1$ positiva ($v_2 > v_1$), corresponde a los nodos que se mueven juntos. El producto de F y v tiene unidades de potencia [W] y se denomina par fuerza-velocidad. En general, no es necesario que ninguno de los nodos en un puerto esté conectado a tierra.

De esta manera, la analogía entre la fuerza-corriente, a veces llamada *movilidad* en dispositivos mecánicos y eléctricos está representado en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Analogía fuerza-corriente entre un sistema mecánico y eléctrico.

Sistema mecánico	Equivalencia	Sistema eléctrico
fuerza	\longleftrightarrow	corriente
velocidad	\longleftrightarrow	voltaje
tierra mecánica	\longleftrightarrow	tierra eléctrica
resorte	\longleftrightarrow	inductor
amortiguador	\longleftrightarrow	resistencia
energía cinética	\longleftrightarrow	energía eléctrica
energía potencial	\longleftrightarrow	energía magnética
palanca	\longleftrightarrow	transformador
velocidad en el punto cero	\longleftrightarrow	potencial en el punto cero

La correspondencia entre la masa-capacitor se omite de la lista anterior porque una terminal del elemento de masa es una tierra mecánica, lo que significa que la ecuación es análoga a la del capacitor, pero no es tan general [1]. A esta correspondencia se le llama inersor.

2.3. Inersores

Se encontró una analogía entre los sistemas mecánicos y eléctricos, que condujeron a numerosas aplicaciones. Uno de ellos es un dispositivo llamado *inersor* [34].

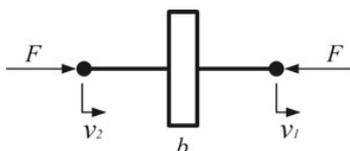


Figura 2.4: Símbolo del inersor [35].

El inersor fue introducido por Malcom Smith, el cual es un dispositivo mecánico de dos terminales, que absorbe energía de rotación y tiene su equivalente eléctrico con el capacitor [1]. Este dispositivo consiste en agregarle masa al sistema, que se considera despreciable en comparación con los demás elementos que lo integran. Tiene la principal propiedad de modificar las frecuencias naturales y disminuir las amplitudes de vibración del sistema. Un inersor puede estar constituido por un conjunto de elementos mecánicos tales como piñón, cremallera, engranes y volantes de inercia [3, 25].

Matemáticamente, la fuerza que se desarrolla en el inersor se escribe como [35]:

$$F = b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \tag{2.1}$$

Con $v_2 > v_1$. Donde la constante de proporcionalidad b es la inercancia y está dada en unidades de masa. De la ecuación (2.1), es posible notar que la fuerza igual y opuesta aplicada en los nodos es proporcional a la aceleración relativa entre los dos nodos (o terminales), ver figura 2.4.

La energía cinética en un inersor se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$E_{inersor} = \frac{b}{2} (v_2 - v_1)^2 \tag{2.2}$$

Recordando que la fuerza aplicada a sus dos terminales es proporcional a la aceleración relativa entre ellos, el inersor es el elemento mecánico “faltante” entre las analogías de los sistemas mecánicos y eléctricos, y su equivalente eléctrico es el capacitor. [36, 37].

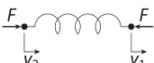
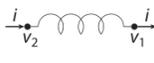
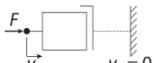
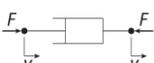
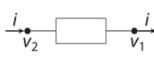
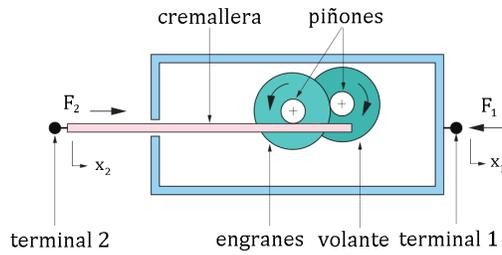
Mecánico	Eléctrico
 <p>Resorte</p> $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$	 <p>Inductor</p> $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (v_2 - v_1)$
 <p>Masa</p> $F = m \frac{dv_2}{dt}$	 <p>Capacitor</p> $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$
 <p>Amortiguador</p> $F = c(v_2 - v_1)$	 <p>Resistor</p> $i = \frac{1}{R} (v_2 - v_1)$

Figura 2.5: Correspondencia entre circuitos eléctricos y mecánicos. En la analogía fuerza-corriente, las fuerzas sustituyen las corrientes y las velocidades sustituyen los voltajes [36].

En la figura 2.5 se muestra la analogía fuerza-corriente, donde fue añadida la correspondencia del inersor con el capacitor.

Existen diferentes tipos de diseños de inersores, los más populares son:

I. Configuración inersor de piñón-cremallera

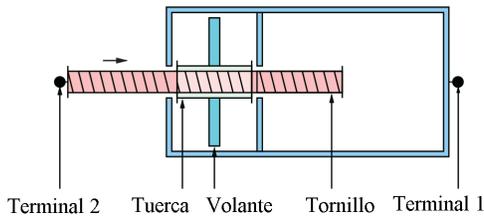


(a) Esquema del modelo mecánico del inersor de piñón-cremallera [35].

(b) Implementación física elaborada en el Departamento de Ingeniería de la Universidad de Cambridge [35].

Figura 2.6: Configuración del inersor piñón-cremallera.

II. Configuración inersor husillo de bolas



(a) Esquema del modelo mecánico del inersor husillo de bolas [25].

(b) Implementación física elaborada en el Departamento de Ingeniería de la Universidad de Cambridge [25].

Figura 2.7: Configuración de inersor husillo de bolas.

III. Configuración inersor de fluido

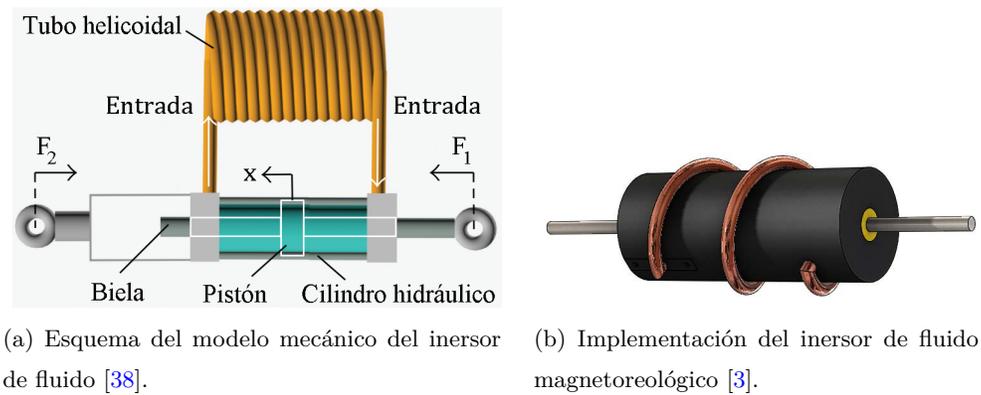


Figura 2.8: Configuración de inersor de fluido.

IV. Configuración inersor rotacional

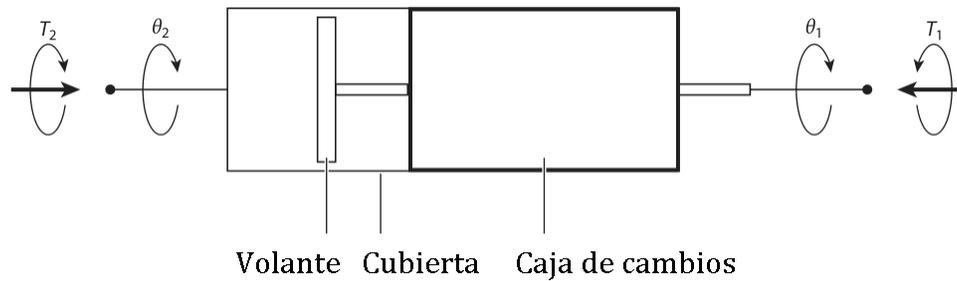


Figura 2.9: Esquema del modelo mecánico del inersor rotacional [36].

v. Configuración inersor bomba de engranajes

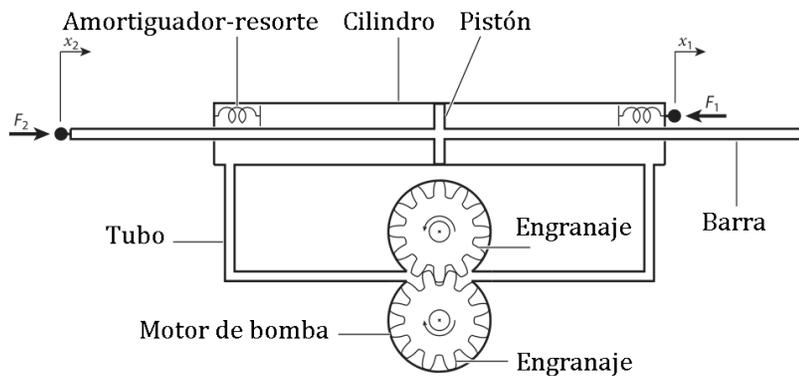


Figura 2.10: Esquema del modelo mecánico del inersor bomba de engranajes [36].

2.3.1. Redes mecánicas con inersores

Existen diferentes tipos de configuraciones o arreglos entre dos terminales a y b en los que se pueden implementar los inersores, amortiguadores y resortes. Entre los más representativos son los que se muestran en la figura 2.11 [33, 35].

- C_1 → arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador
- C_2 → arreglo en serie de un inersor y un amortiguador
- C_3 → arreglo en serie de un resorte, un inersor y un amortiguador
- C_4 → arreglo en serie de un inersor con un arreglo en paralelo de un resorte y un amortiguador
- C_5 → arreglo en serie de un amortiguador con un arreglo en paralelo de un resorte y un inersor
- C_6 → arreglo en serie de un resorte con un arreglo en paralelo de un inersor y un amortiguador

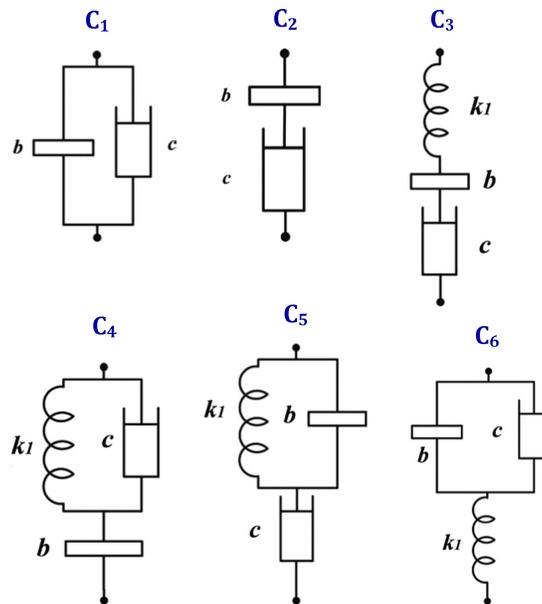


Figura 2.11: Tipos de arreglos mecánicos basados en inersores. Donde: b es la inercia, c es el coeficiente de amortiguamiento y k_1 es la constante del resorte [33, 39].

En la figura 2.12 se muestra una aplicación real de un arreglo en serie con inersores.

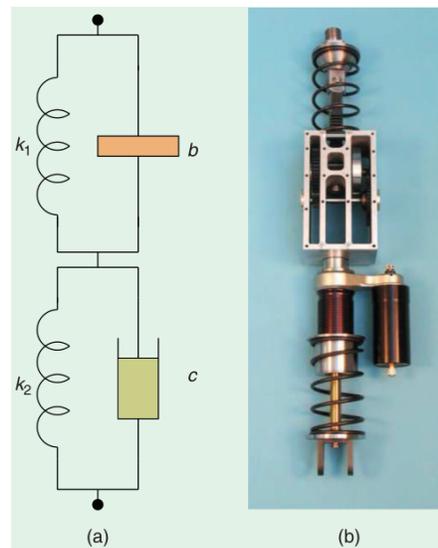


Figura 2.12: Arreglo de un inersor en paralelo con un resorte conectado en serie con un arreglo de un amortiguador en paralelo con un resorte. a) Diagrama del circuito con inersores, b) implementación mecánica [25].

2.3.2. Aplicaciones del inersor

Una aplicación muy popular en la comunidad automovilística fue en 2008 con la implementación de un nuevo componente de suspensión mecánica, llamado "*J-damper*" en la Fórmula 1, como se muestra en la figura 2.13. Sus orígenes fueron académicos y resultó ser la mejor implementación de trabajos académicos en circuitos mecánicos y eléctricos de la Universidad de Cambridge [25].



Figura 2.13: Kimi Raikkonen en el Gran Premio de España 2005 conduciendo el McLaren MP4-20 que lo condujo a la victoria con ayuda del inersor. Foto de LAT Photographic [25].

La implementación de los inersores en mecanismos físicos para aumentar la estabilidad ante la respuesta aleatoria debido a los sismos y terremotos es de suma importancia para prevenir grandes daños estructurales y pérdidas humanas. Takewaki et al. [40] propusieron una configuración de amortiguador inercial similar al inersor-husillo de bolas, donde demuestra que existe una reducción de la respuesta sísmica en edificios, y la efectividad va relacionada con la aceleración relativa entre dos nodos, definición que corresponde al inersor.

En la figura 2.14, se considera un modelo mecánico que puede implementarse en edificaciones y consiste en ir agregando un inersor en cada piso. Por lo que, existe una variación en los coeficientes de influencia durante el proceso. Lo cual indica que al implementar más inersores sobre la edificación, su comportamiento será más estable y tendrá pequeñas variaciones cuando sea sometido a vibraciones en comparación a la edificación que no posee inersores.

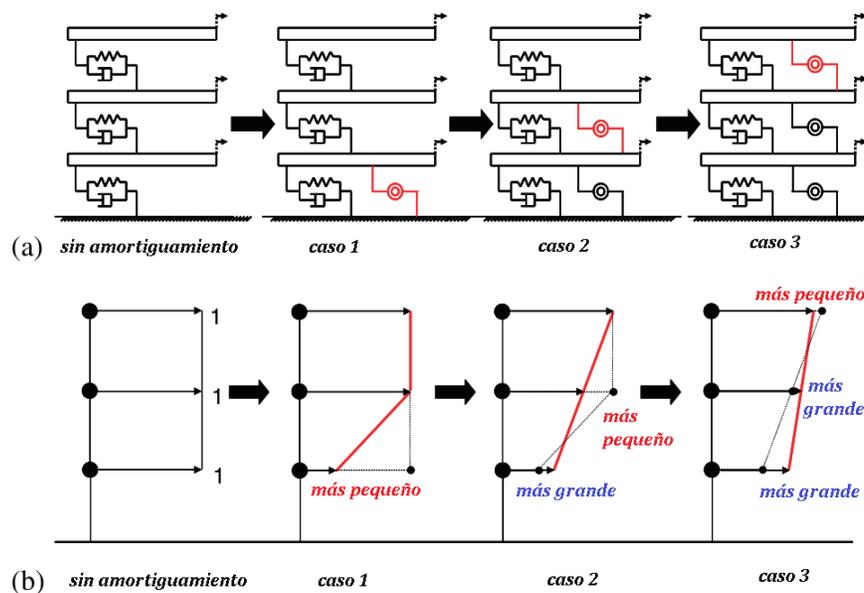


Figura 2.14: Estructuras con y sin inersores. a) Cuatro estructuras de tres grados de libertad compuesto por resortes, amortiguadores e inersores en cada piso simulando su implementación en una edificación; b) Se muestra la ventaja de la variación al implementar en cada piso un inersor, entre más inersores, mayor es la estabilidad de la edificación [40].

Capítulo 3

Marco teórico

3.1. Análisis dimensional

La utilidad del análisis dimensional radica en obtener una orientación de los parámetros físicos que se emplean para la realización de un experimento. Las *dimensiones* de las cantidades físicas involucradas en un sistema físico (mecánico) se dan en términos de tres dimensiones elementales, tales son: longitud L , masa M y tiempo T , que tienen unidades de metro, kilogramo y segundo, respectivamente, de acuerdo al Sistema Internacional de Unidades.

La metodología del análisis dimensional está basada en tener en ambos lados de una ecuación las mismas dimensiones finales. Cabe mencionar, que no se proporciona información sobre las constantes adimensionales que se ven involucradas en el sistema analizado, por tanto es conveniente que se deba considerar su existencia en las ecuaciones obtenidas por el análisis dimensional. Éstas magnitudes se pueden corroborar de forma experimental [41].

En la tabla 3.1 se muestran las dimensiones y las abreviaturas de algunas variables físicas que son mayormente utilizadas en varias áreas de la física. Se encuentran expresadas en términos de las tres dimensionales elementales: L , M y T .

Tabla 3.1: Análisis dimensional de algunos parámetros utilizados frecuentemente en física. Recordar que la fuerza (igual a masa \times aceleración), el trabajo (igual a fuerza \times distancia), la rigidez (igual a fuerza/distancia) y el amortiguamiento (igual a fuerza/velocidad).

Variable física	Dimensión	Abreviatura
velocidad	$\frac{\textit{longitud}}{\textit{tiempo}}$	LT^{-1}
aceleración	$\frac{\textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	LT^{-2}
densidad	$\frac{\textit{masa}}{(\textit{longitud})^3}$	ML^{-3}
fuerza	$\frac{\textit{masa} \cdot \textit{longitud}}{(\textit{tiempo})^2}$	MLT^{-2}
trabajo	$\frac{\textit{masa} \cdot (\textit{longitud})^2}{(\textit{tiempo})^2}$	ML^2T^{-2}
amortiguamiento	$\frac{\textit{masa}}{\textit{tiempo}}$	MT^{-1}
rigidez	$\frac{\textit{masa}}{(\textit{tiempo})^2}$	MT^{-2}

A manera de ejemplo, supongamos que se obtiene la siguiente ecuación:

$$P = \frac{7}{9}\rho v^2 \quad (3.1)$$

Donde: P es la presión, ρ es la densidad volumétrica y v es la velocidad [42].

Al efectuar el análisis dimensional no será posible descubrir si el factor $7/9$ es correcto, porque se trata de una constante y es adimensional. De manera general, la constante de la ecuación (3.1) debe ser verificada mediante la experimentación.

Se sabe que la presión es fuerza por unidad de área. Al aplicar el análisis dimensional se demostrará si la ecuación es congruente.

$$\rho = ML^{-3} \quad \text{y} \quad v^2 = L^2T^{-2}$$

Por tanto,

$$\rho v^2 = ML^{-3}L^2T^{-2} = ML^{-1}T^{-2} = P$$

Con lo que se corrobora la congruencia de las unidades correspondientes a la presión.

3.1.1. Teorema II de Buckingham

El procedimiento para encontrar los factores adimensionales Π 's de un sistema físico, es conocido como el *método de repetición de variables*. El primero en enunciarlo fue Aimé Vaschy en 1892 y el primero en publicarlo fue Dimitri Riabouchinski en 1911, pero ganó popularidad por la incorporación y la relevancia en los trabajos del físico Edgar Buckingham en 1914 [43].

El teorema II de Buckingham representa una parte fundamental en el análisis dimensional. También formaliza el método de análisis dimensional de Rayleigh [44]. Este teorema expresa que es posible describir un fenómeno físico con una cantidad de parámetros adimensionales $(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$, que es menor o igual que la cantidad de parámetros adimensionales involucrados (q_1, q_2, \dots, q_n) .

Teorema 1 Si (q_1, q_2, \dots, q_n) son n variables físicas involucradas en un problema físico y existe una relación funcional entre las variables de la forma:

$$\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (3.2)$$

entonces, las n variables se pueden combinar, de tal forma que se forman $(n - j)$ variables adimensionales independientes, donde j es el rango de la matriz dimensional [45].

Cada factor adimensional es conocido como número Π . Al reescribir (3.2) se tiene:

$$\Psi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0 \quad (3.3)$$

Así, es posible encontrar los Π_i por medio de la siguiente ecuación:

$$\Pi_i = \Gamma_{B_i} \prod_{m=1}^j \Gamma_{P_k}^{c_k}, \quad \text{con: } i = 1, 2, \dots, n - j \quad (3.4)$$

Donde: Γ_B son las variables involucradas en el problema, Γ_P son las variables de referencia o fundamentales (variables repetidas) y los c_k se eligen para que cada Π_i sea adimensional. De esta manera, se expresa una relación entre las Π_i como:

$$\Pi_1 = \Omega(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-j}) \tag{3.5}$$

Este teorema, solo nos ayuda a encontrar una manera de generar conjuntos de variables adimensionales, sin embargo el método no deduce las variables físicamente significativas, es decir, las que se necesiten para resolver el problema. Cada caso $(n - j)$ forman una base [43].

A continuación, se muestra un ejemplo para comprender detalladamente la metodología del teorema Π de Buckingham [45].

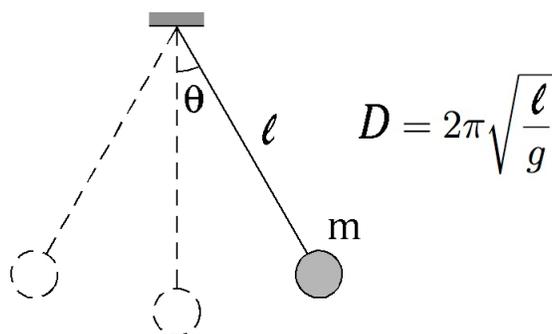


Figura 3.1: Esquema del movimiento del péndulo simple.

Se tiene un pendulo de longitud l , periodo D sometido a la aceleración gravitacional g y efectúa pequeñas oscilaciones.

- El fenómeno está determinado por tres magnitudes dimensionales ($n = 3$): l , D y g .
- Se supone una ley adimensional de la forma:

$$f(l, D, g) = 0 \tag{3.6}$$

- Estableciendo las dimensiones:

$$\begin{aligned} [l] &= L^1 \\ [D] &= T^1 \\ [g] &= L^1 T^{-2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay dos dimensiones involucradas ($m = 2$).

- Se forma la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} [l]_L & [D]_L & [g]_L \\ [l]_T & [D]_T & [g]_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

M es de rango $r = 2$.

- Las magnitudes adimensionales (Π) que se forman con l , D y g son: $n - r = 1$.
- Existe una relación de equivalencia entre $f(l, D, g) = 0$ y $F(\Pi) = 0$.
- Para obtener Π , se construye un sistema de ecuaciones dado por

$$\Pi = l^x D^y g^z \quad (3.8)$$

sujeta a la condición de adimensionalidad $[\Pi] = 1$.

$$[\Pi] = [L^1]^x [T^1]^y [L^1 T^{-2}]^z = 1 \quad (3.9)$$

- El sistema de ecuaciones es:

$$x + z = 0 \quad y \quad y - 2z = 0 \quad (3.10)$$

- Una solución al sistema de ecuaciones es:

$$y = 1, \quad z = \frac{1}{2} \quad y \quad x = -\frac{1}{2} \quad (3.11)$$

- Por consiguiente,

$$\Pi = l^{-\frac{1}{2}} D^1 g^{\frac{1}{2}} = D \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.12)$$

Por lo que:

$$F\left(D \sqrt{\frac{g}{l}}\right) = 0 \iff f(l, D, g) = 0 \quad (3.13)$$

- Al proponer una función lineal en F , entonces $\Pi = c$, con c constante. Por lo tanto, el periodo del péndulo es:

$$D = c \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.14)$$

Al emplear el análisis dimensional, se verifican las unidades.

- Nótese que el valor de c se corrobora a través de la experimentación. La expresión real es:

$$D = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.15)$$

3.2. Sistema con excitación armónica

El modelo matemático que gobierna un sistema dinámico lineal es:

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = F_{eq}(t) \quad (3.16)$$

Donde: $F_{eq}(t)$ es la entrada (función de entrada o forzada) del sistema. La salida o respuesta del sistema es una solución de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones iniciales del problema. m_{eq} , c_{eq} y k_{eq} es la masa equivalente, el coeficiente de amortiguamiento equivalente y la rigidez equivalente del sistema, respectivamente [46].

La forma más simple de un movimiento periódico es el movimiento armónico. Generalmente en sus representaciones matemáticas son empleadas las funciones seno y coseno. La fuerza de excitación armónica simple es la fuerza externa (F_{eq}) más común que actúa sobre un sistema [47]. Sin embargo, existen diversos tipos de excitaciones periódicas, como se muestra en la figura 3.2. Éstas producen una vibración forzada de la estructura y vibra a la frecuencia de excitación periódica.

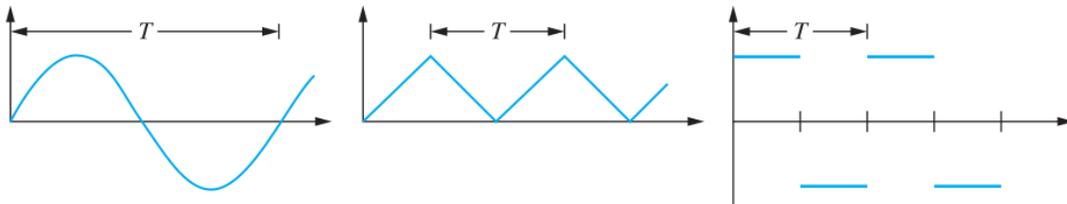


Figura 3.2: Ejemplos de excitaciones periódicas [48].

Tomando una fuerza de excitación armónica compleja, la vibración forzada se describe matemáticamente como:

$$F_{eq} = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

Donde: F_0 es la amplitud de excitación, ω es la frecuencia de excitación externa. Cabe señalar la diferencia entre ω y la frecuencia natural ω_n , la cual está en función de las propiedades masa y rigidez del sistema en cuestión.

3.3. Ecuaciones diferenciales parciales en deflexión de vigas

Existen numerosas estructuras que están constituidas a base de vigas, columnas o placas, todas ellas sufren desviaciones o distorsiones debido a su propio peso o por algún agente externo como fuerzas externas. El método de separación de variables es una de las formas menos complejas en comparación con las funciones de Green, la cual nos sirve para modelar matemáticamente sistemas físicos vibratorios, tales como cuerdas, vigas y placas.

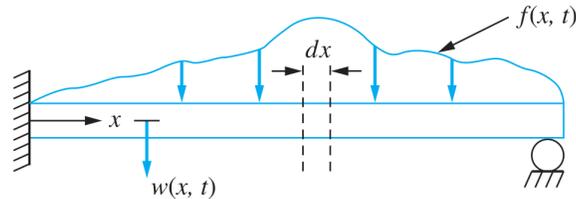


Figura 3.3: Esquema del modelo de la viga [48].

Al tomar de ejemplo, la vibración lateral de una viga [48]. Para ello, se considera el esquema de un elemento de la viga uniforme, como el que se muestra en la figura 3.3, que tiene una longitud total \$L\$, área de sección transversal \$A\$, momento de inercia centroidal \$I\$ y está constituido por un material con propiedades físicas de densidad de masa \$\rho\$ y módulo de elasticidad \$E\$ que está sujeta a una fuerza externa por unidad de longitud \$f(x, t)\$. El desplazamiento transversal de la viga está dado por \$\omega(x, t)\$.

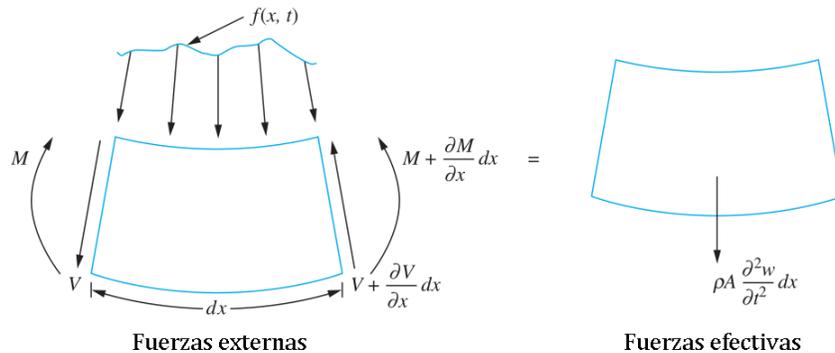


Figura 3.4: Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de la viga [48].

Tomando en cuenta el DCL de la figura 3.4, se tiene que la ecuación de movimiento causada por la fuerza es:

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + \int_x^{x+dx} f(\xi, t) d\xi = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} dx \quad (3.18)$$

Al aplicar el teorema del valor medio, se obtiene:

$$f(x, t) - \frac{\partial V}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (3.19)$$

Tomando en cuenta el DCL de la figura 3.4, se tiene que la ecuación de movimiento causada por el momento es:

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + \int_x^{x+dx} (\xi - x) f(\xi, t) d\xi = \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx \left(\frac{dx}{2} \right) \quad (3.20)$$

Aplicando el teorema del valor medio y despreciando los términos mayores de orden 2 para los elementos infinitesimales, la ecuación (3.20) se simplifica a:

$$V = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.21)$$

De la teoría de la deflexión de vigas y considerando la convención de signos de acuerdo al DCL:

$$M = -EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (3.22)$$

Considerando las propiedades de una viga uniforme, se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 \omega(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3.23)$$

Esta ecuación representa la dinámica vibratoria de una viga sujeta a una fuerza externa [49].

3.3.1. Condiciones de frontera en vigas

Las condiciones de frontera para vibraciones transversales de vigas utilizadas más frecuentemente son [49, 50]:

1. *Extremo libre*

- Momento de flexión

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.24)$$

- Fuerza cortante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.25)$$

II. *Extremo simplemente apoyado (de pasador)*

- Deflexión

$$w = 0 \tag{3.26}$$

- Momento de flexión

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{3.27}$$

III. *Extremo fijo (empotrado)*

- Deflexión

$$w = 0 \tag{3.28}$$

- Pendiente

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3.29}$$

IV. *Corredizo (deslizándose)*

- Pendiente

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3.30}$$

- Fuerza cortante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \tag{3.31}$$

En la figura 3.5 se muestra a detalle las condiciones de frontera más utilizadas junto con sus ecuaciones de frecuencia, modos normales y las frecuencias naturales.

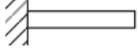
Condiciones en los extremos de la viga	Ecuación de frecuencia	Modo (función normal)	Valor de $\beta_n l$
Ambos extremos articulados 	$\text{sen } \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Ambos extremos libres 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x + \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l - \text{senh } \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ($\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)
Ambos extremos empotrados 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\text{senh } \beta_n x - \text{sen } \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{senh } \beta_n l - \text{sen } \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$
Un extremo empotrado y el otro libre 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x - \text{senh } \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l + \text{senh } \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Un extremo empotrado y el otro articulado 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x - \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l - \text{senh } \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$
Un extremo articulado y el otro libre 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\text{sen } \beta_n x + \alpha_n \text{senh } \beta_n x]$ donde $\alpha_n = \left(\frac{\text{sen } \beta_n l}{\text{senh } \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$ ($\beta l = 0$ para el modo de cuerpo rígido)

Figura 3.5: Condiciones de frontera más usuales para la vibración transversal de una viga [49].

3.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

A mediados del siglo XVIII y principios del siglo XIX, surgió la idea que planteaba que la evolución de un sistema se puede obtener al minimizar una integral, la cual es conocida como integral de acción, en donde el integrando es conocida como la *lagrangiana* \mathcal{L} , y es definida como la diferencia entre las energías cinéticas y las energías potenciales asociadas al sistema en estudio [51].

El principio de Lagrange y el principio de Hamilton son de los pilares fundamentales de la mecánica clásica. Mediante el principio extendido de Hamilton es posible obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema, a partir de las energías cinéticas, energías potenciales y el trabajo virtual debido a fuerzas no conservativas. Sin embargo, el principio de Hamilton en ocasiones no es el método más eficiente para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema.

De manera general, el principio de Hamilton establece que la evolución de un sistema físico se determina a través de un principio variacional, que está basado en la lagrangiana asociada a cada sistema, la cual contiene toda la información sobre las variables del sistema y las fuerzas que actúan sobre él, es decir, que se emplean de manera natural o implícita las ecuaciones de restricción en la teoría, las cuales disminuyen de manera simultánea el número de ecuaciones necesarias para describir la dinámica del sistema [52].

La expresión matemática de las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.32)$$

Donde: T es la energía cinética, U es la energía potencial y q_k son las coordenadas generalizadas. Definiendo a la lagrangiana como:

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = T - U$$

por lo que, las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) son las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas conservativos [53].

Cabe señalar, que la función lagrangiana no es única, es decir, pueden existir diferentes funciones lagrangianas para un sistema físico, que al final se obtienen el mismo conjunto de ecuaciones de movimiento para el sistema dinámico. Concretamente, la lagrangiana no es única pero las ecuaciones de movimiento si lo son [54].

3.4.1. Función de disipación de Rayleigh

Para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico en donde existen fuerzas de fricción, se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma generalizada:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.34)$$

Donde: F_k son las fuerzas no-conservativas generalizadas ($k = 1, 2, \dots, n$), D es una función de las velocidades generalizadas, conocida como *función de disipación de Rayleigh*, la cual aplica para sistemas con amortiguamiento viscoso [55].

En términos de la lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.35)$$

Las fuerzas generalizadas de las ecuaciones de Euler-Lagrange aplican para sistemas no conservativos y debe cumplir con la condición que las fuerzas no conservativas sean proporcionales a la velocidad de las partículas y opuestas a su movimiento. Es decir, son fuerzas disipativas porque el sistema pierde energía por su acción [56].

Así, para describir la dinámica de sistemas no conservativos es suficiente con obtener la función lagrangiana (energías cinéticas y potenciales) y las energías de disipación (de amortiguamiento).

3.5. Análisis modal

El método más general y efectivo para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables es el de serie de potencias. Cuando se tiene una ecuación diferencial parcial que sea lineal y homogénea en una función incógnita de dos variables independientes y sus derivadas, la suma de dichas soluciones serán también solución. Además, suponiendo condiciones de convergencia "fuertes", se puede expresar como:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad (3.36)$$

Definición 1 Un conjunto de funciones como $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\}$ se dice que es ortogonal con respecto a la función de peso $\omega(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ si [57]:

$$\int_a^b \omega(x) f_n(x) f_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \neq 0, & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (3.37)$$

Y su representación en series, es de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (3.38)$$

Donde: c_n son coeficientes numéricos y $\{f_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal.

Teorema 2 *Dado un conjunto de funciones:*

$$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots\}, \quad (3.39)$$

linealmente independientes y continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$, y dada una función de peso $\omega(x)$ positiva y continua en el mismo intervalo, tendremos un conjunto de funciones:

$$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\} \quad (3.40)$$

con las siguientes propiedades [57]:

- I. *Cada f_n es una combinación lineal de las ϕ .*
- II. *Las $f_n(x)$ son linealmente independientes en el intervalo $a \leq x \leq b$.*
- III. *$\{f_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal con respecto a la función de peso $\omega(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$.*

En los sistemas continuos, existen gran variedad de métodos para encontrar la respuesta forzada del sistema, como el método de coeficientes indeterminados, la transformada de Laplace y el análisis modal. Éste último es la herramienta más efectiva y la mayormente utilizada.

Si tenemos una fuerza externa $y(x, t)$ que representa el término no homogéneo de una ecuación diferencial parcial y se desea determinar el desplazamiento debido a la vibración transversal de una viga, ésta se puede representar en serie de potencias para expandir $f(x, t)$ de la forma [48]:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \phi_n(x) \quad (3.41)$$

Donde:

$$f_n(t) = (y(x, t), \phi_n(x)) \quad (3.42)$$

$\phi_n(x)$ es la función n-ésima modal y se determina por las condiciones de frontera del sistema y sus valores propios.

Para el caso de una viga empotrada, las ecuaciones que satisfacen dichas condiciones, son las siguientes [58]:

$$\int_0^L f_i(x)f_j(x)dx = L\delta_{ij} \quad \text{y} \quad \frac{d^4 f_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 f_i(x) \quad (3.43)$$

En donde: β_i es el valor característico (eigenvalor) de la ecuación característica de la viga, L es la longitud total de la viga y δ_{ij} es la delta de Kronecker definida por [53]:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

El análisis modal está basado en las respuestas de vibración de un sistema dinámico lineal, el cual puede ser expresado mediante una combinación lineal de movimientos armónicos simples (modos naturales de vibración). Al utilizar este análisis, es posible obtener las características dinámicas intrínsecas de una estructura, la cual se representa en las formas modales, frecuencias naturales y los factores de amortiguamiento.

El modelo espacial, está dado por la descripción de las características físicas del sistema o estructura, los cuales están dados en términos de la masa, rigidez y amortiguamiento.

3.6. Teorema de Vieta

Cuando se trabajan con ecuaciones algebraicas es inherente tratar de resolverlas y encontrarle un significado tangible a las soluciones obtenidas. El resolver las ecuaciones involucra obtener todas sus raíces (complejas o reales), de forma exacta o aproximada [59]. En ocasiones basta con encontrar una aproximación a dicha solución, sin embargo en el proceso de efectuar cierto procedimiento para encontrar las raíces de forma analítica, es posible encontrar y vincular más información relacionadas a las propiedades que caracterizan al problema, tal es el caso de las llamadas *ecuaciones de Vieta*.

Para emplear las ecuaciones de Vieta se considera una ecuación mónica ($a_n = 1$) de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad (3.44)$$

La ecuación (3.44) contiene n raíces x_1, x_2, \dots, x_n . Éstas raíces pueden encontrarse con base en los términos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ independientes del polinomio.

Generalizando las soluciones de la ecuación (3.44) y relacionándolas con los términos independientes se tienen [60]:

$$a_{n-1} = -(x_1 + \dots + x_n) \quad (3.45)$$

$$a_{n-2} = (x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) \quad (3.46)$$

$$\vdots$$

$$a_{n-j} = (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j} \quad (3.47)$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n \quad (3.48)$$

Para el caso de una ecuación cuártica, es decir, con $n = 4$.

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.49)$$

Los coeficientes de la ecuación (3.49) se pueden expresar en términos de las sumas y productos de sus raíces x_1, x_2, x_3, x_4 las cuales se expresan como:

$$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (3.50)$$

$$a_2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \quad (3.51)$$

$$a_1 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \quad (3.52)$$

$$a_0 = x_1x_2x_3x_4 \quad (3.53)$$

Para el caso de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersores (IDVA's), Barredo et al. [6] propusieron una nueva metodología basándose en las fórmulas de Vieta para la obtención de los parámetros óptimos de los absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor.

Para comprender la utilidad de las ecuaciones de Vieta, se plantea el siguiente ejemplo. Considérese una ecuación cuadrática en x de la forma:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (3.54)$$

con raíces a y b . Entonces se puede expresar como:

$$(x - a)(x - b) = 0 \quad (3.55)$$

Luego, efectuando su expansión:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0 \quad (3.56)$$

En consecuencia,

$$p = -(a + b) \quad y \quad q = ab \quad (3.57)$$

De esta forma se relaciona la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática con sus coeficientes.

3.7. Matriz de Jacobi

El matemático Augustin Louis Cauchy fue el pionero en utilizar unos determinantes particularmente especiales, pero Carl Gustav Jacobi fue quien las implementó en un método para evaluar integrales múltiples y se conoce como *determinante jacobiana* de la *matriz jacobiana*.

Definición 2 El jacobiano de la transformación T en \mathbb{R}^3 dada por:

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w) \quad y \quad z = h(u, v, w)$$

es [61]:

$$\mathcal{J}(x, y, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana está formada por las derivadas parciales de primer orden de una función y puede emplearse para aproximar linealmente a dicha función en un punto. En un sentido más estricto, la matriz jacobiana depende de la base y las coordenadas elegidas. Por lo que es más propio hablar de *transformación lineal jacobiana*.

Extendiendo el concepto del determinante jacobiano para una función vectorial. Supóngase que:

$$F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$$

la cual es una función que va del espacio euclídeo n -dimensional al m -dimensional. En donde F está determinada por:

$$\Lambda_i = F_i(\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \text{y} \quad \Lambda = F(\tau) = (F_1(\tau), \dots, F_m(\tau)) \quad (3.59)$$

y tiene m funciones escalares reales.

Así, la matriz jacobiana de tamaño $m \times n$ es:

$$\mathcal{J}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{\partial(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)}{\partial(\tau_1, \dots, \tau_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \tau_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \tau_n} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Por consiguiente, el jacobiano es la generalización de la derivada de una variable a varias variables.

3.8. Optimización

La optimización es un proceso que encuentra la respuesta ante un problema y proporciona un mejor resultado. Se clasifican en: lineales y no lineales.

Generalmente, para aplicar algún método de optimización se antecede a un problema matemático para determinar soluciones óptimas que cumplen con ciertas características específicas de los modelos matemáticos.

Un problema de optimización incluye el término minimización o maximización y está compuesto principalmente de los siguientes elementos [62]:

- Un conjunto de restricciones
- Un conjunto de soluciones factibles que contengan todas las combinaciones posibles de valores de variables independientes que satisfacen el conjunto de restricciones.

- Una función objetivo, que vincula las soluciones factibles con el desempeño-rendimiento del sistema.

Teorema 3 Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo [61].

En la figura 3.6 se ilustra el concepto de máximo y mínimo de una función. Mediante los criterios de derivadas se obtendrá información sobre los máximos y mínimos globales o locales.

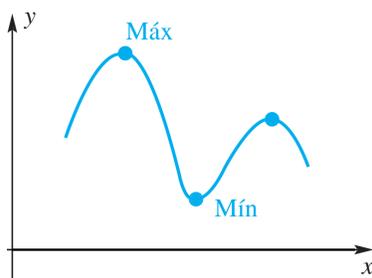


Figura 3.6: Máximo y mínimo de una función arbitraria [63].

En problemas de optimización, es importante conocer las primeras y segundas derivadas de la función objetivo. La información que se obtiene al calcular la primera derivada de una función es:

- I. Proporciona una trayectoria de máxima inclinación de la función objetivo.
- II. Indica si se ha alcanzado la trayectoria óptima.

Y la información obtenida a través de la segunda derivada es:

- I. Indicará si es un máximo cuando $f''(x)$ es negativa o un mínimo cuando $f''(x)$ es positiva.

3.8.1. Matriz Hessiana

En 1844, Ludwig Otto Hess introdujo *la matriz hessiana* o *el hessiano*, en un artículo referente a curvas cúbicas y cuadráticas. Esto sucedió después de que Jacobi introdujo la matriz jacobiana.

Definición 3 La matriz hessiana es la matriz de una función de una sola componente y está formada por las segundas derivadas parciales.

Supóngase una función escalar de varias variables:

$$\Lambda: \mathfrak{R}^n \ni (\tau_1, \dots, \tau_n) \rightarrow (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathfrak{R}$$

El hessiano es la matriz de las segundas derivadas cruzadas de la función Λ , de la forma:

$$\mathcal{H}(\Lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_1^2} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_1 \tau_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_1 \partial \tau_n} \\ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_2 \partial \tau_1} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_2 \partial \tau_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_n \partial \tau_1} & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_n \partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \tau_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Suponiendo que τ_0 es un punto crítico de Λ , se tiene [64]:

- I. Si todos los menores del determinante del hessiano son positivos, entonces Λ tiene en τ_0 un mínimo relativo.
- II. Si la sucesión de los menores del determinante del hessiano es alternada de la siguiente forma:

$$\Delta_1 \Lambda(\tau_0) < 0, \Delta_2 \Lambda(\tau_0) > 0, \Delta_3 \Lambda(\tau_0) < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \Lambda(\tau_0) > 0,$$

entonces Λ tiene en τ_0 un máximo relativo.

- III. Cuando no se presenta alguno de los casos anteriores y si el determinante de la matriz hessiana es distinto de cero, entonces se asegura que no existen máximos o mínimos.
- IV. Cuando el determinante de la matriz hessiana es cero, no es posible obtener información sobre el punto crítico.

Los valores característicos o eigenvalores de la matriz hessiana $\mathcal{H}(\Lambda)$ indican la deflexión de la respuesta en las frecuencias invariantes de los parámetros óptimos del sistema respecto a la relación de masa de la estructura principal y la masa del DVA. Si las condiciones de diseño del sistema son óptimas, la curvas asociados a los eigenvalores tienden a cero.

3.9. Técnica de los puntos fijos

Esta metodología fue descrita por Den Hartog [65] y consiste en minimizar la amplitud máxima de la respuesta adimensional (normalizada) de un sistema mecánico.

Está basada principalmente en dos condiciones (estados del sistema) de operación de los absorbedores dinámicos de vibraciones, cuando el:

- I. Amortiguamiento es cero ($\zeta \rightarrow 0$)
- II. Amortiguamiento tiende a infinito¹ ($\zeta \rightarrow \infty$).

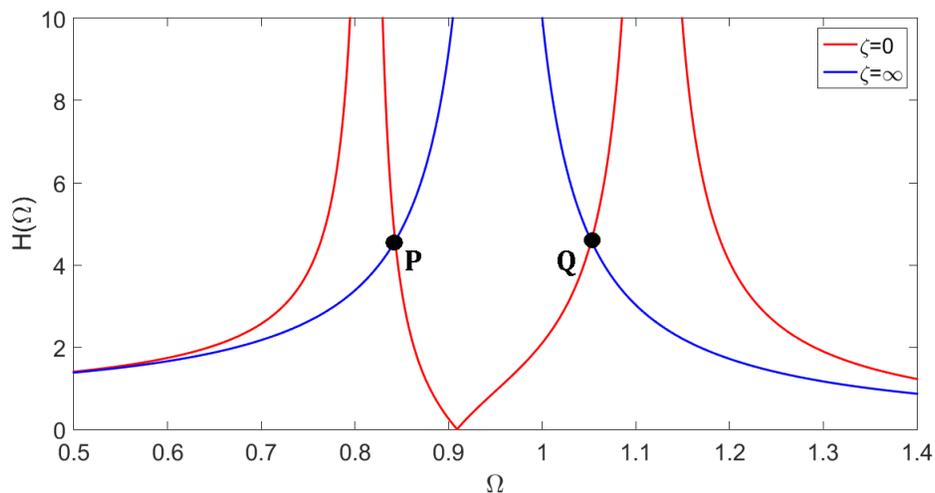


Figura 3.7: Gráfica de un DVA clásico en donde aparecen los puntos fijos P y Q correspondientes al comportamiento de los estados del sistema para cuando el amortiguamiento es cero e infinito.

Estas dos condiciones conducen a los llamados *puntos invariantes* o *puntos fijos* respecto al factor de amortiguamiento del sistema y se determina mediante la respuesta en estado estable, tal y como se ilustra en la figura 3.7.

Definición 4 *Todas las curvas pasan a través de los puntos fijos y son independientes del amortiguamiento* [65].

En la figura 3.8 se ejemplifica la definición 4 y se muestra el comportamiento cuando la relación de amortiguamiento toma valores arbitrarios incluyendo las dos condiciones fundamentales de operación del DVA.

¹Refiérase a ∞ como la representación de una cantidad sin límite. Otra representación sería $\zeta_2 \in [0, +\infty)$

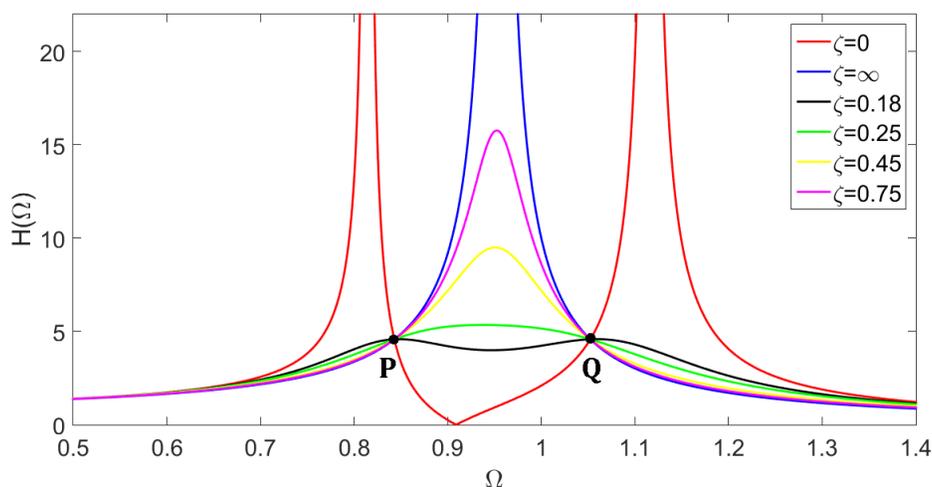


Figura 3.8: Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al DVA clásico considerando diferentes valores del factor de amortiguamiento. Nótese que todas las líneas pasan a través de los puntos fijos P y Q .

Nota 1 *Dicho de otro modo, la técnica de optimización de los puntos fijos se basa en la consideración de dos estados del sistema, amortiguamiento cero y amortiguamiento infinito para los cuales las amplitudes de vibración del sistema (masa principal) son iguales. A partir de esta consideración y mediante un tratamiento matemático se obtienen los parámetros óptimos del sistema.*

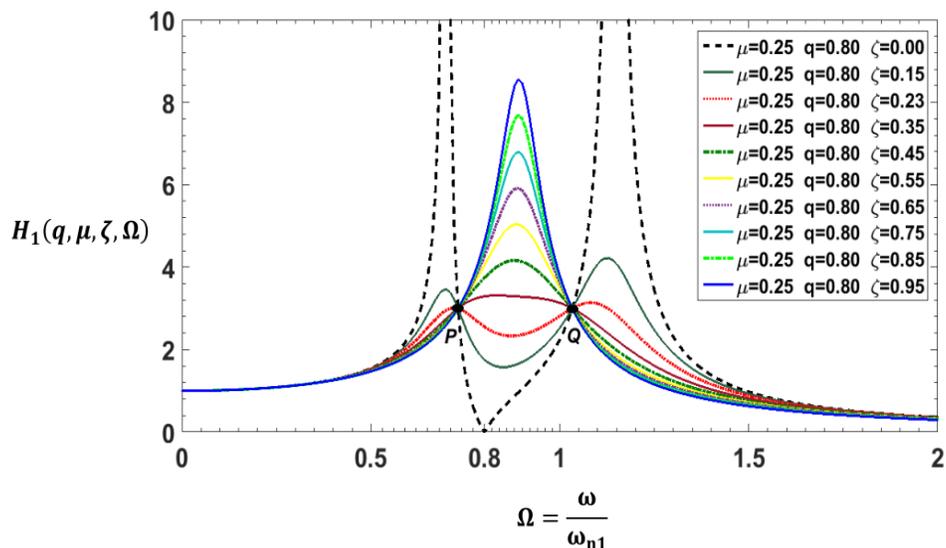


Figura 3.9: Gráfica de la respuesta en estado estable H_1 de un sistema vs la relación de frecuencias. Nótese el comportamiento entre los puntos fijos P y Q del sistema cuando se cambian los valores para el factor de amortiguamiento [66].

Todas las curvas que se encuentran entre los puntos fijos P y Q de la figura 3.9, tienen diferentes amplitudes que conllevan a cambios bruscos de la respuesta del sistema cuando éste entra en resonancia. El propósito del criterio de rendimiento H_∞ y la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida es encontrar la respuesta óptima entre dichos puntos para aumentar el rango de supresión de vibración del DVA.

Nota 2 *El mejor balance dinámico del sistema primario se obtendrá cuando su curva FRF óptima sea más plana en todo el rango de frecuencias de excitación.*

3.10. Técnica de los puntos fijos extendida

Barredo et al. [6] proponen una generalización de la teoría de Den Hartog, la cual se puede implementar para el desarrollo de expresiones algebraicas de forma cerrada, para el diseño óptimo de absorbedores de vibración dinámicos basados en inersor.

La técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida² consiste en modificar los puntos invariantes del sistema, obteniendo variables óptimas que están relacionadas con la respuesta del sistema $R(s)$ y su norma euclídeana $\|H\|$. Matemáticamente se representa como:

$$R(s) = \|H\| \tag{3.62}$$

Sirva de ejemplo el sistema mecánico que se muestra en la figura 3.10 para comprender detalladamente la metodología de los puntos fijos extendida.

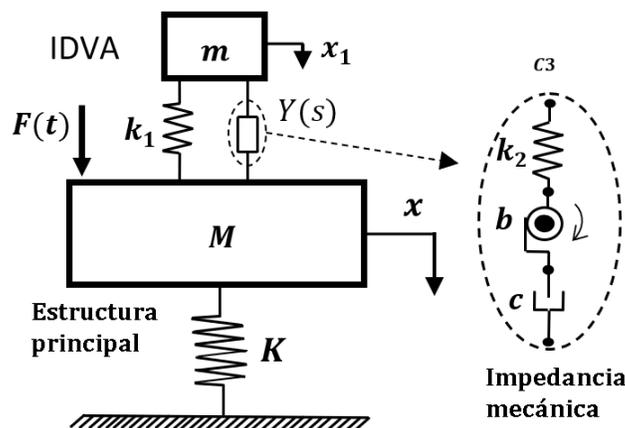


Figura 3.10: Absorbedor dinámico de vibración basado en inersores en arreglo tipo C3 (IDVA-C3) [6].

²También llamada, técnica de sintonización de frecuencias de los puntos fijos extendida

De manera general, se especifica la metodología de los puntos fijos extendida mediante los siguientes pasos:

- I. Obtener el modelo matemático del sistema.

Las ecuaciones de movimiento en el dominio s de Laplace (dominio frecuencial) del sistema que se muestra en la figura 3.10 son:

$$Ms^2X + KX + k_1(X - X_1) = F - F_d \quad (3.63)$$

$$ms^2X_1 + k_1(X_1 - X) = F_d \quad (3.64)$$

en donde $F_d = sY(X - X_1)$. El término $Y(s)$ es la impedancia mecánica del arreglo tipo C3 y se expresa como:

$$Y = \left[\frac{s}{k_2} + \frac{1}{bs} + \frac{1}{c} \right]^{-1} \quad (3.65)$$

- II. Obtener la función de transferencia $H(s)$ del sistema, también conocida como la respuesta $R(s)$ del sistema, ver ecuación (3.62).

- III. Sustituir la expresión $s = j\omega$.

en donde j es la parte imaginaria. Esta expresión es válida porque el sistema dinámico es causal y oscilante establemente si y sólo si, todos los polos de la función de transferencia $H(s)$ están en el semiplano izquierdo. Por lo tanto, la región de convergencia para $H(s)$ incluye el eje $j\omega$ [67].

- IV. Reescribir la función de transferencia $H(s)$ de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{A + jB}{C + jD} \quad (3.66)$$

- v. Sustituir los parámetros adimensionales asociados al teorema II de Buckingham.

Las variables adimensionales V_{adim} que rigen al IDVA C3 son:

$$\omega_1^2 = \frac{K}{M} \quad \omega_2^2 = \frac{k_1}{m} \quad \omega_3^2 = \frac{k_2}{b} \quad (3.67)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_2} \quad \mu = \frac{b}{m} \quad \eta = \frac{\omega_3}{\omega_2} \quad (3.68)$$

$$\beta = \frac{m}{M} \quad q = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (3.69)$$

Las variables adimensionales están relacionadas directamente con las propiedades intrínsecas del sistema IDVA C3.

VI. Obtener el módulo de $H(s)$ a través de la multiplicación de su conjugado complejo.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.70)$$

VII. Aplicar las dos condiciones fundamentales de la técnica de los puntos fijos de la sección 3.9 para el absorbedor dinámico de vibración.

- Cuando el amortiguamiento es cero ($\zeta \rightarrow 0$), la ecuación (3.70) se convierte en:

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{A^2}{C^2} \quad (3.71)$$

Para el IDVA-C3, se obtiene:

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow 0}^2 = \frac{[\Omega^4 - q^2(1 + (\mu + 1)\eta^2)\Omega^2 + \eta^2 q^4]^2}{\{\Omega^6 + [-1 + (-1 + (-\beta - 1)\mu)\eta^2 - \beta - 1]q^2\}\Omega^4 + q^2[q^2\eta^2(\beta + 1) + 1 + (\mu + 1)\eta^2]\Omega^2 - \eta^2 q^4\}^2} \quad (3.72)$$

- Cuando el amortiguamiento tiende a infinito ($\zeta \rightarrow \infty$), la ecuación (3.70) se convierte en:

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow \infty}^2 = \frac{B^2}{D^2} \quad (3.73)$$

Particularmente, se obtiene:

$$|H(s)|_{\zeta \rightarrow \infty}^2 = \frac{[-\Omega^2 + q^2]^2}{[-\Omega^4 + (1 + q^2(\beta + 1))\Omega^2 - q^2]^2} \quad (3.74)$$

VIII. Igualar las ecuaciones (3.71) y (3.73)

Al efectuar la igualación, se obtienen dos posibles resultados. Sin embargo, una solución será la trivial y la otra será la que proporcione mayor información de solución al sistema. Generalmente, la ecuación resultante es de grado 8.

IX. Realizar el siguiente cambio de variable:

$$\epsilon = \Omega^2 \quad (3.75)$$

De esta manera, la ecuación resultante se reduce a cuarto grado.

X. Convertir en una ecuación mónica.

XI. Igualar a h el lado derecho de la ecuación (3.74).

$$h = \frac{[-\Omega^2 + q^2]^2}{[-\Omega^4 + (1 + q^2(\beta + 1))\Omega^2 - q^2]^2} \quad (3.76)$$

De nueva cuenta,

XII. Realizar el mismo cambio de variable de la ecuación (3.75).

XIII. Convertir en una ecuación mónica.

Así pues, se tienen dos ecuaciones mónicas de grado 4. Obtenidas en el *paso X* y *paso XIII*.

XIV. Obtener las soluciones óptimas mediante el teorema de Vieta de la sección 3.6 siguiendo las *secuencias* mostradas a continuación.

Al aplicar las dos condiciones fundamentales de la técnica de los puntos fijos, se obtienen dos ecuaciones mónicas de cuarto grado, que son independientes de la relación de amortiguamiento, las cuales se obtienen a partir de la respuesta en estado estable de la configuración mecánica a analizar y están descritas de manera general como:

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda^1 + d\lambda^0 = 0 \quad (3.77)$$

$$\lambda^4 + e\lambda^3 + f\lambda^2 + g\lambda^1 + h\lambda^0 = 0 \quad (3.78)$$

Las raíces de las ecuaciones (3.77) y (3.78) deben ser iguales. A partir del teorema de Vieta, se igualan las sumas y los productos de las raíces de ambas ecuaciones, las cuales están en función de los coeficientes del polinomio de cada ecuación.

Secuencia 1: Igualar los coeficientes de λ^3 y resolver para q^2 .

La ecuación resultante es una condición necesaria pero no suficiente para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes del IDVA. La condición se satisface empleando el desarrollo completo del teorema de Vieta.

Secuencia 2: Igualar los coeficientes de λ^0 y resolver para h .

Secuencia 3: Igualar los coeficientes de λ^1 y resolver para h .

Secuencia 4: Igualar los coeficientes de λ^2 y resolver para h .

Secuencia 5: Igualar las ecuaciones obtenidas para h de las secuencias 2 y 3, y resolver para q^2 .

Secuencia 6: Igualar las ecuaciones obtenidas para h de las secuencias 2 y 4, y resolver para q^2 .

Hasta este punto existen tres soluciones para q . Para calcular los valores adecuados de μ y η es necesario lo siguiente.

Secuencia 7: Igualar las ecuaciones obtenidas para q^2 de las secuencias 1 y 5, y resolver para η^2 .

Secuencia 8: Igualar las ecuaciones obtenidas para q^2 de las secuencias 1 y 6, y resolver para η^2 .

La ecuación resultante de la secuencia 7 también satisface a la ecuación resultante de la secuencia 8, porque es una solución de η para toda β .

Secuencia 9: Sustituir las ecuaciones obtenidas para η de las secuencias 7 y 8, y resolver para μ .

El parámetro obtenido en la secuencia 9, es el parámetro adimensional óptimo de la relación de masas, es decir, μ_{opt} .

Secuencia 10: Sustituir el parámetro μ_{opt} de la secuencia 9 en la secuencia 7 y resolver para η .

El parámetro obtenido en la secuencia 10, es el parámetro adimensional óptimo de la relación de frecuencias naturales entre en el inersor y el absorbedor, es decir, η_{opt} .

Secuencia 11: Sustituir el parámetro μ_{opt} de la secuencia 9 y el parámetro η_{opt} de la secuencia 10 en la secuencia 5 y resolver para q .

El parámetro obtenido en la secuencia 11, es el parámetro adimensional óptimo de la relación de frecuencias naturales entre la masa principal y la masa del absorbedor, es decir, q_{opt} .

De esta manera, los parámetros óptimos para el IDVA-C3 son:

$$\mu_{opt} = \frac{2\beta}{\beta + 1} \quad (3.79)$$

$$\eta_{opt} = \sqrt{\beta + 1} \quad (3.80)$$

$$q_{opt} = \frac{1}{\beta + 1} \quad (3.81)$$

Secuencia 12: Sustituir los parámetros μ_{opt} , η_{opt} y q_{opt} en la secuencia 3 y resolver para h .

El parámetro obtenido en la secuencia 12 es la aproximación de la norma de H_∞ [6] y es la amplitud de la vibración en los puntos invariantes, es decir, $\|H_\infty\|$.

Por lo tanto, la amplitud en los puntos fijos del IDVA-C3 es:

$$\|H_\infty\| = \sqrt{\frac{\beta + 1}{\beta}} \quad (3.82)$$

Recordar que $h \approx \|H_\infty\|^2$. En la figura 3.11 se muestra la gráfica de la ecuación (3.82) utilizando los parámetros óptimos del conjunto de ecuaciones (3.79)-(3.81) manteniendo un factor de amortiguamiento arbitrario $\zeta = 0.30$.

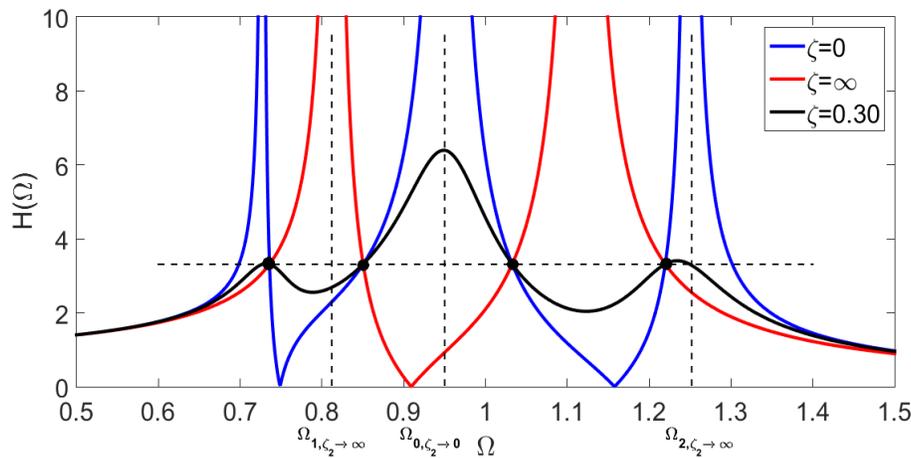


Figura 3.11: Gráfica de la aproximación de la norma $\|H_\infty\|$ vs la relación de frecuencias Ω del IDVA-C3 utilizando los parámetros óptimos y un factor de amortiguamiento arbitrario $\zeta = 0.30$.

- xv. Obtener la solución óptima para el factor de amortiguamiento ζ_{opt} a partir de la teoría de Krenk [16].

La teoría de Krenk se emplea para aplanar la curva de respuesta en frecuencia de la estructura principal y determinar el factor de amortiguamiento óptimo ζ_{opt} . La aplicación de la teoría de Krenk sugiere que para obtener el amortiguamiento óptimo ζ_{opt} del sistema, se producirán tres frecuencias resonantes no amortiguadas³ Ω_0 , Ω_1 y Ω_2 , como se ilustra en la figura 3.11.

Por lo tanto, para calcular Ω_1 y Ω_2 se iguala a cero el denominador de la ecuación (3.73). Después, se sustituyen los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} y se resuelve la ecuación resultante en términos de Ω . De esta manera, las raíces obtenidas serán las frecuencias resonantes no amortigua-

³También conocidas como frecuencias invariantes.

das Ω_1 y Ω_2 .

De manera similar, para calcular la frecuencia resonante no amortiguada Ω_0 se iguala a cero el denominador de la ecuación (3.71) y al sustituir los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} se obtiene una ecuación en Ω . Al resolver la ecuación resultante, se toma la raíz que cumpla con la siguiente condición: $\Omega_1 < \Omega_0 < \Omega_2$. Ver figura 3.11.

Para obtener el factor de amortiguamiento óptimo, Barredo et al. [4] sugieren que se calcule el valor cuadrático medio RMS de los tres niveles de amortiguamiento producidos en las frecuencias resonantes no amortiguadas del sistema acoplado.

Para el IDVA-C3, el factor de amortiguamiento óptima es:

$$\zeta_{opt} = \frac{\sqrt{11}}{6} \sqrt{\frac{\beta}{\beta + 1}} \quad (3.83)$$

En la tabla 3.2 se muestran los resultados para los parámetros óptimos (ecuaciones (3.79), (3.80), (3.81) y (3.83)) y sus valores numéricos correspondiente al IDVA-C3 al aplicar la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida. Se considera $\beta = 0.1$.

Tabla 3.2: Resumen de los parámetros óptimos y sus respectivos valores numéricos para el IDVA-C3 obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida.

Puntos fijos extendida	
Parámetros	Valor
μ_{opt}	= 0.1818
η_{opt}	= 1.0488
q_{opt}	= 0.9090
h	= 3.3166
ζ_{opt}	= 0.1666

En la figura 3.12 se muestra la gráfica de la función de respuesta en frecuencia FRF empleando los parámetros óptimos del conjunto de ecuaciones (3.79)-(3.81) y el factor de amortiguamiento óptimo ζ_{opt} .

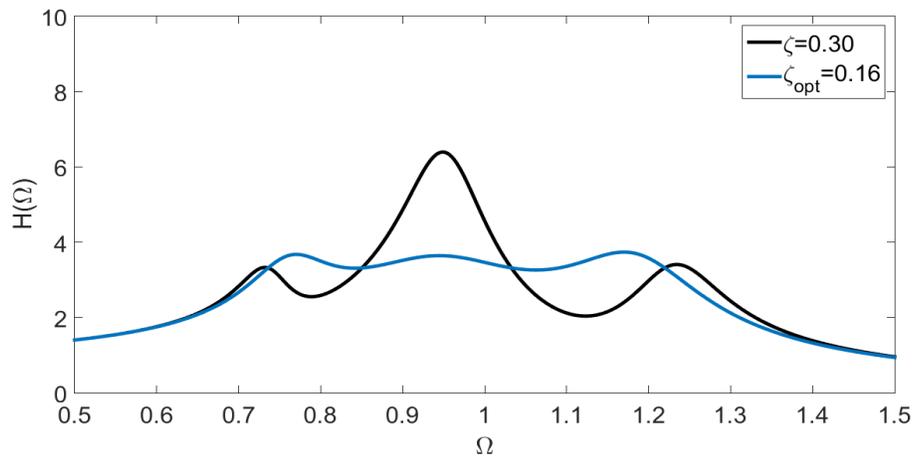


Figura 3.12: Gráfica de la FRF vs la relación de frecuencias Ω del IDVA-C3 utilizando los parámetros óptimos y el factor de amortiguamiento óptimo mediante la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida.

Nótese que en la figura 3.12 y 3.13 al emplear la técnica de optimización de los puntos fijos extendida se aplanan la curva.

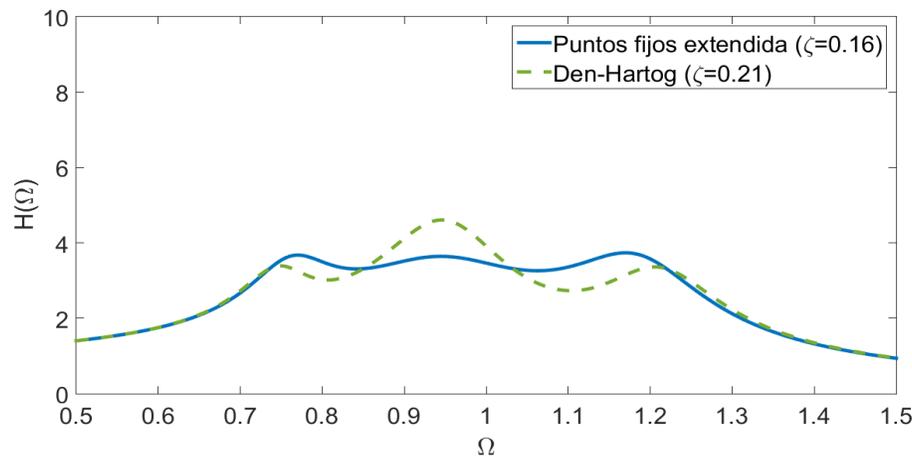


Figura 3.13: Comparación entre la técnica de los puntos fijos extendida y la técnica de Den Hartog. El aplanamiento de la curva entre los puntos fijos es más notorio al ocupar la técnica de los puntos fijos extendida [6].

3.11. Criterio H_∞

El objetivo de la optimización por el criterio de rendimiento H_∞ es minimizar la magnitud máxima de la respuesta en frecuencia normalizada (o de forma adimensional), es decir, minimizar

las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia de la respuesta en frecuencia $R(s)$ de la masa de la estructura principal, conocida como la norma $\|H_\infty\|$ [35, 68].

El criterio H_∞ es de las más conocidas en la teoría de la minimización de la respuesta vibratoria en el control pasivo de vibraciones mediante absorbedores de vibración dinámicos. Al minimizar la norma $\|H_\infty\|$ se mejora la respuesta de estado estable del sistema acoplado a los DVA's. Lo que conlleva a formular un problema de optimización de la siguiente manera [69]:

$$\min \left(\max_{P_{opt}} |H_{IDVA}(\Omega)| \right) = \max (|H_{IDVA}(P_{opt}, \beta, \Omega)|) \quad (3.84)$$

P_{opt} son los parámetros a optimizar del sistema y se restringe a que sean soluciones reales y positivas $\{P_{opt} \geq 0\}$ de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial |H_{IDVA}(\Omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0 \quad (3.85)$$

La interpretación física a las dos restricciones de la ecuación (3.84) son: el intervalo físico admisible para analizar la relación de frecuencias Ω y las limitaciones físicas de diseño para construir el dispositivo.

La idea básica para comprender el problema de optimización *min-max* (ver ecuaciones (3.84) y (3.85)) radica en que la técnica de los puntos fijos descrita por Den Hartog se emplean los puntos fijos para minimizar de forma aproximada la norma $\|H_\infty\|$ y en la técnica de optimización de H_∞ se emplean las frecuencias de resonancia para minimizar de forma exacta la norma $\|H_\infty\|$ [35].

Para resolver el problema de optimización *min-max* de forma numérica, que se formuló en las ecuaciones (3.84) y (3.85) se puede utilizar el método de optimización de programación cuadrática secuencial o el método de Nishihara. Este último posee una alta precisión en la resolución numérica.

3.11.1. Método de Nishihara

En 2002, Nishihara y Asami presentaron una metodología analítica para la solución exacta de los parámetros óptimos para el DVA, la cual es comparada con la metodología clásica de los puntos fijos. Sin embargo, esta metodología solo funcionaba para sistemas de dos grados de libertad [12]. Años más tarde, implementaron la metodología para sistemas de más de dos grados de libertad [7].

Nota 3 *Es muy complicado encontrar una solución analítica para sistemas estructurales amortiguados en el sistema primario. Hasta el momento no se ha obtenido una solución exacta para este*

caso mediante la técnica de optimización H_∞ . Sin embargo, una solución aproximada para utilizar el método de Nishihara, sería cuando se fija en un valor igual a cero, es decir, tomando en consideración amortiguamientos despreciables o nulos en el sistema primario.

La idea novedosa de Nishihara fue proponer un artificio matemático en términos de la norma $\|H_\infty\|$. Matemáticamente se expresa como:

$$r^2 = 1 - \frac{1}{h_{max}^2} \quad \implies \quad h_{max} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \quad (3.86)$$

Además de introducir una función, descrita como:

$$f_n = \text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h_{max}^2} \quad (3.87)$$

La ecuación (3.87) se emplea para minimizar el valor máximo h_{max} de la función de transferencia referente a la norma $\|H_\infty\|$.

A continuación, se describe el procedimiento de la metodología de optimización de Nishihara. El proceso es similar a la metodología de los puntos fijos extendida hasta el *paso VI* de la sección 3.10.

- i. Obtener el módulo de $H(s)$ a través de la multiplicación de su conjugado complejo.

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (3.88)$$

- ii. Definir las variables numerador \mathcal{N} y denominador \mathcal{D} , de la siguiente manera:

$$\mathcal{N} = A^2 + B^2 \quad y \quad \mathcal{D} = C^2 + D^2 \quad (3.89)$$

- iii. Se propone la función descrita por Nishihara para determinar el valor mínimo h_{min} de la amplitud máxima h_{max} mediante la siguiente ecuación:

$$h = \sqrt{\frac{1}{1 - r^2}} \quad (3.90)$$

- iv. Reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\mathcal{D} - \frac{\mathcal{N}}{h^2} = 0 \quad (3.91)$$

v. Sustituir los términos correspondientes.

vi. Convertir en una ecuación mónica.

La ecuación resultante tiene la forma:

$$\Omega^{12} + c_1\Omega^{10} + c_2\Omega^8 + c_3\Omega^6 + c_4\Omega^4 + c_5\Omega^2 + c_6 = 0 \quad (3.92)$$

vii. A partir del teorema de Vieta, la suma y productos de las raíces de la ecuación (3.92), se pueden expresar mediante el siguiente sistema de ecuaciones en términos de los coeficientes c_n .

$$f_1 \longrightarrow (4c_2 - c_1^2)\sqrt{c_6} + 4c_5 = 0 \quad (3.93)$$

$$f_2 \longrightarrow c_1c_5 + 4c_6 + 2c_3\sqrt{c_6} = 0 \quad (3.94)$$

$$f_3 \longrightarrow 4c_6(c_1\sqrt{c_6} + c_4) - c_5^2 = 0 \quad (3.95)$$

Las ecuaciones f_1 , f_2 y f_3 están expresadas en términos de los parámetros a optimizar: η , q , μ y ζ y del parámetro h incluido en la ecuación (3.90).

viii. Sustituir los coeficientes c_n en las ecuaciones para f_1 , f_2 y f_3 y llevar a su mínima expresión.

ix. Hallar la matriz jacobiana con base en los parámetros a optimizar.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

La matriz jacobiana es de tamaño 3×4 y se satisface para cualquier determinante menor de 3×3 igualada a cero.

x. Obtener los determinantes f_4 y f_5 de 3×3 asociados a la matriz jacobiana.

$$f_4 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$f_4 = A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 - A_2B_1C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = 0 \quad (3.97)$$

$$f_5 = \begin{vmatrix} D_1 & A_1 & B_1 \\ D_2 & A_2 & B_2 \\ D_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$f_5 = A_1C_2D_3 - A_1C_3D_2 - A_2C_1D_3 + A_2C_3D_1 + A_3C_1D_2 - A_3C_2D_1 = 0 \quad (3.98)$$

- XI. Proponer un valor arbitrario para β y sustituirlo en las ecuaciones f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 .
- XII. Resolver el sistema de ecuaciones no lineales de 5×5 por el método de Newton-Rhapson estableciendo valores iniciales apropiados.

Los resultados obtenidos de los parámetros óptimos mediante la técnica de los puntos fijos extendida se toman como valores iniciales.

Retomando el ejemplo del IDVA-C3 de la figura 3.10 y al aplicar el método de Nishihara se obtuvieron los siguientes resultados para los parámetros óptimos del IDVA-C3 mostrados en la tabla 3.3. Se considera $\beta = 0.1$.

Tabla 3.3: Resumen de los parámetros óptimos y sus respectivos valores numéricos para el IDVA-C3 obtenidos mediante el criterio H_∞ .

Criterio H_∞		
Parámetros		Valor
μ_{opt}	=	0.2208
η_{opt}	=	1.0485
q_{opt}	=	0.9083
ζ_{opt}	=	0.1657

En la tabla 3.4 se recopilan los parámetros óptimos obtenidos a través de la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio H_∞ .

Tabla 3.4: Comparación de los parámetros óptimos y sus respectivos valores numéricos para el IDVA-C3 obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos extendida y el método de Nishihara.

Puntos fijos extendida			Criterio H_∞		
Parámetros	Valor		Parámetros	Valor	
μ_{opt}	=	0.1818	μ_{opt}	=	0.2208
η_{opt}	=	1.0488	η_{opt}	=	1.0485
q_{opt}	=	0.9090	q_{opt}	=	0.9083
ζ_{opt}	=	0.1666	ζ_{opt}	=	0.1657

En la figura 3.14 se muestra las dos gráficas correspondientes al IDVA-C3 al utilizar los dos métodos de optimización vistos en las secciones 3.10 y 3.11.1 con base en los parámetros óptimos de la tabla 3.4. Se considera $\beta = 0.1$.

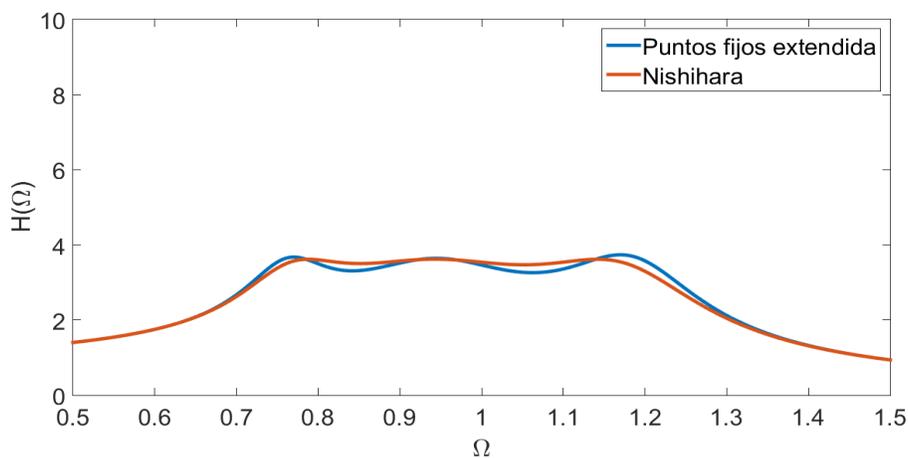


Figura 3.14: Comparación entre la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio H_∞ . Nótese que el aplanamiento de la curva es mas visible al ocupar el criterio de rendimiento H_∞ .

Capítulo 4

Modelo matemático

En este capítulo se desarrollaron e implementaron los modelos matemáticos descritos dentro del marco teórico y fundamentado en la literatura de absorbedores de vibración dinámicos en serie basados en inersor.

4.1. Respuesta en frecuencia

El modelo propuesto en la figura 4.1 es una configuración de una estructura tipo viga doblemente empotrada (viga de Euler-Bernoulli) de longitud L sujeta a una carga distribuida $f(x)g(t)$, donde $f(x)$ es una función espacial y $g(t)$ una función temporal determinística. Para determinar el comportamiento dinámico del inersor, se propone una fuerza de excitación externa de tipo armónica. La viga se encuentra en serie con dos arreglos de DVA's (DVA-A y DVA-B) y un inersor conectado al suelo (tierra mecánica). Cada DVA está compuesto por un amortiguador y un resorte, con coeficientes de amortiguamiento y rigidez, c_n y k_n ($n = 1, 2$) respectivamente, los cuales se conectan a las masas m_n ($n = 1, 2$), respectivamente. La configuración del sistema atenuador de vibraciones se encuentra localizado en el punto $x = a$.

En el apéndice A se muestra el análisis y desarrollo matemático completo de la estructura.

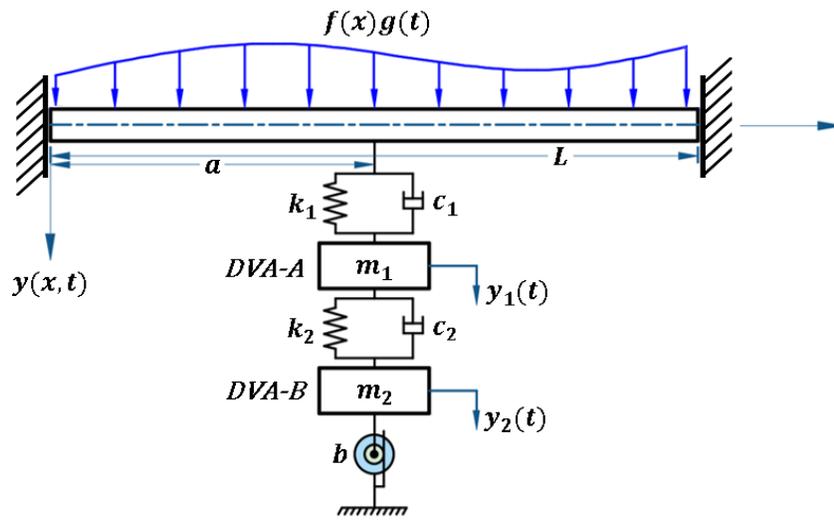


Figura 4.1: Esquema del modelo de la viga propuesta en este trabajo.

Donde:

$f(x)g(t)$	carga distribuida
$y(x, t)$	desplazamiento transversal de la viga
L	longitud de la viga
m_1	masa asociada el DVA-A
k_1	rigidez correspondiente al DVA-A
c_1	amortiguamiento correspondiente al DVA-A
$y_1(t)$	desplazamiento correspondiente a m_1 del DVA-A
m_2	masa asociada el DVA-B
k_2	rigidez correspondiente al DVA-B
c_2	amortiguamiento correspondiente al DVA-B
$y_2(t)$	desplazamiento correspondiente a m_2 del DVA-B y al inersor
b	inertancia

Para describir el comportamiento dinámico del sistema, se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma generalizada y la teoría de la vibración lateral de vigas. Así, la ecuación de movimiento que rige el comportamiento dinámico del sistema de la figura 4.1 es:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = F - \{m_1 \ddot{y}_1(t) + (m_2 + b) \ddot{y}_2(t)\} \delta(x - a) \quad (4.1)$$

Donde: A es el área de sección transversal, I momento de inercia centroidal, ρ es la densidad de masa, E es el módulo de elasticidad y $\delta(x - a)$ es la función delta de Dirac.

Para obtener la solución de la vibración forzada de la viga, se emplea el principio de superposición de modos (análisis modal). Las condiciones para el desplazamiento transversal de la viga, se expresan como:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)\phi_i(x) \quad y \quad \frac{d^4\phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4\phi_i(x) \quad (4.2)$$

Donde: β_i es el valor característico (eigenvalor) de la ecuación característica de la viga y ϕ_i es el i -ésimo modo de vibración de la viga.

Al sustituir la ecuación (4.2) en (4.1) y suponiendo que sistema se encuentra influenciado por una fuerza de excitación armónica, tal que $F = f(x)g(t)$ con $g(t) = e^{i\omega t}$, resultando en un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo (LTI). Para ello, se encuentran las respuestas en función de la frecuencia de la viga $Q_i(\omega)$ y de las amplitudes en frecuencia asociadas a los desplazamientos del DVA-A y DVA-B, $Y_1(\omega)$ y $Y_2(\omega)$ respectivamente. Al multiplicar por la función modal $\phi_i(x)$ y aplicando las propiedades de la función delta de Dirac, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega)\phi_i(x) \left[EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2 \right] \phi_i(x) = f(x)\phi_i(x) + \omega^2 \{m_1 Y_1(\omega) + (m_2 + b)Y_2(\omega)\} \phi_i(a) \quad (4.3)$$

Para determinar la respuesta general en función de la frecuencia del desplazamiento transversal de la viga, se considera que la excitación armónica afecta al DVA-A y al DVA-B. De esta manera, se representa como:

$$Y(x, \omega) = G_2(x, \omega) - H(\omega)G_1(x, \omega)Y(a, \omega) \quad (4.4)$$

En donde:

$$a_i = \int_0^{\infty} f(x)\phi_i(x)dx \quad (4.5)$$

$$G_1(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.6)$$

$$G_2(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i\phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (4.7)$$

$$H(\omega) = \frac{\omega^2(-M_2m_1\omega^2 + (m_1 + M_2)ic_2\omega + (m_1 + M_2)k_2)k_1}{-M_2m_1\omega^4 + (M_2 + m_1)ic_2\omega^3 + [(M_2 + m_1)k_2 + M_2k_1]\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2} \quad (4.8)$$

Donde $M_2 = m_2 + b$. Al evaluar la posición del ISDVA's en la posición $x = a$, se obtiene la expresión en términos de $Y(a, \omega)$. Por lo que $H(\omega)$ se reescribe como:

$$H(\omega) = m_1 \omega^2 J \quad (4.9)$$

donde J es:

$$J = \frac{(-M_2 m_1 \omega^2 + (m_1 + M_2) i c_2 \omega + (m_1 + M_2) k_2) k_1}{m_1 (-M_2 m_1 \omega^4 + (M_2 + m_1) i c_2 \omega^3 + [(M_2 + m_1) k_2 + M_2 k_1] \omega^2 - i c_2 k_1 \omega - k_1 k_2)} \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) es la función dimensional de respuesta en frecuencia de los DVA's. Para encontrar la misma función pero en su forma adimensional, se introducen las siguientes variables adimensionales que relacionan las propiedades intrínsecas de la estructura.

$$\omega_A^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad \omega_B^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2m_2 \omega_B} \quad \delta = \frac{b}{m_2} \quad (4.11)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad q = \frac{\omega_A}{\omega_1} \quad \eta = \frac{\omega_B}{\omega_A} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (4.12)$$

$$\gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1} \quad \omega_i^2 = \frac{EI \beta_i^4}{\rho A} \quad \beta = (\mu + 1) \frac{m_1}{\rho AL} \quad (4.13)$$

Donde:

- ω_A^2 frecuencia natural al cuadrado asociado al DVA-A
- ω_B^2 frecuencia natural al cuadrado asociado al DVA-B
- ζ_2 factor de amortiguamiento asociado al DVA-B
- δ relación de masas entre la inercia y el DVA-B
- μ relación de masas entre el DVA-B y el DVA-A
- q relación de frecuencias naturales no amortiguadas para el DVA-A
- η relación de frecuencias naturales no amortiguadas entre el DVA-B y el DVA-A
- Ω relación de frecuencia forzada
- γ_i relación de frecuencias naturales
- ω_i^2 frecuencia natural al cuadrado del i-ésimo modo de vibración
- β relación de masas de los DVA's y la masa de la estructura principal

Así, la respuesta dinámica de la ecuación (4.10) en el dominio de la frecuencia en su forma adimensional es:

$$J = \frac{q^2 [(1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 q^2 + 2i\Omega(1 + (\delta + 1)\mu)\zeta_2 \eta q - (\delta + 1)\Omega^2]}{-(\delta + 1)\Omega^4 + 2i(1 + (\delta + 1)\mu)\zeta_2 \eta q \Omega^3 + (1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 + (\delta + 1)q^2 \Omega^2 - 2i\zeta_2 \eta q^3 \Omega - q^4 \eta^2} \quad (4.14)$$

Por lo tanto, al sustituir la frecuencia de excitación del sistema se reescribe $H(\omega)$ como:

$$H(\omega) = m_1 \omega_1^2 J_1 \quad (4.15)$$

Donde: $J_1 = J\Omega^2$.

De esta forma, la función de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal de la viga cuando actúa una fuerza de excitación armónica, es:

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL\omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot \left\{ \frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\frac{\mu + 1}{J_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i^2(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}} \right] \right\} \quad (4.16)$$

La función de respuesta en frecuencia de la aceleración transversal de la viga cuando actúa una fuerza de excitación armónica, es:

$$S_a(x, \Omega) = -\omega_1^2 \Omega S(x, \Omega) \quad (4.17)$$

La ecuación (4.17) también es la respuesta en frecuencia del desplazamiento de la viga cuando se considera una excitación inercial.

Resultados

5.1. Técnica de los puntos fijos extendida

En este apartado se exponen los resultados numéricos de la estructura empleando la metodología de los puntos fijos extendida propuesta por Barredo et al. [6] al considerar la respuesta del sistema en estado estable.

Para la implementación de la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida, se comienza con la función de respuesta en frecuencia (FRF) en estado estable de la estructura tipo viga con el ISDVA's. Por lo tanto, al considerar el modo fundamental de vibración ($\gamma_i = 1$) y al evaluar en el punto $x = a$, se obtiene:

$$S(a, \Omega) = \frac{\mu + 1}{J_1 \beta \phi_1^2(a) - \Omega^2(\mu + 1) + (\mu + 1)} \quad (5.1)$$

Con la finalidad de obtener la magnitud de la ecuación (5.1), se reescribe como el cociente entre dos números complejos, es decir,

$$H(s) = \frac{A + Bi}{C + Di} \quad (5.2)$$

Donde los coeficientes A , B , C y D se describen en el apéndice B.

Para obtener la norma de $H(s)$ en el espacio euclidiano, se multiplica la ecuación (5.2) por el conjugado complejo del numerador y denominador, respectivamente. Obteniendo:

$$|H(s)|^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (5.3)$$

Al aplicar la condición I) de la técnica de los puntos fijos (sección 3.9) a la ecuación (5.3), se obtiene:

$$|H|_{\zeta_2 \rightarrow 0}^2 = \frac{\Theta_1(\delta, \Omega, \mu, \eta, q)}{[\Theta_2(\phi, \beta, \delta, \Omega, \mu, \eta, q) + \Theta_3(\phi, \beta, \delta, \Omega, \mu, \eta, q)]^2} \quad (5.4)$$

Las funciones Θ_i se describen en el apéndice B.

De la misma manera, al aplicar la condición II) de la técnica de los puntos fijos (sección 3.9) a la ecuación (5.3), se obtiene:

$$|H|_{\zeta_2 \rightarrow \infty}^2 = \frac{[q^2 - (1 + (\delta + 1)\mu)\Omega^2]^{2(1 + \mu)^2}}{[-(1 + \mu)(1 + (\delta + 1)\mu)\Omega^4 + ((\delta + 1)\mu^2 + ((\beta\delta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^2 + \delta + 2)\mu + 1 + (\beta\phi_1^2 + 1)q^2]\Omega^2 - (1 + \mu)q^2]^2} \quad (5.5)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.10, se obtienen dos ecuaciones mónicas de cuarto grado independientes del factor de amortiguamiento. Se continúa con la metodología de la técnica de los *Puntos fijos extendida* hasta llegar a la *Secuencia 9*, obteniendo:

$$\mu_{opt} = \frac{2\beta\delta\phi_1^2(a) + 2\beta\phi_1^2(a) - \delta - 1 + 2\sqrt{(\delta + 1) \left[\delta \left(\beta\phi_1^2(a) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\beta\phi_1^2(a) + \frac{1}{2} \right)^2 \right]}}{2(\delta + 1)} \quad (5.6)$$

El parámetro obtenido en la *Secuencia 10* es:

$$\eta_{opt} = \sqrt{\frac{4(\delta + 1)}{\left\{ 2\beta(\delta + 1)\phi_1^2(a) + 2\sqrt{(\delta + 1) \left[\delta \left(\beta\phi_1^2(a) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\beta\phi_1^2(a) + \frac{1}{2} \right)^2 \right]} - \delta + 1 \right\}^2}} \quad (5.7)$$

El parámetro obtenido en la *Secuencia 11* es:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2\beta\delta\phi_1^2 + 2\beta\phi_1^2 + \sqrt{(4\beta^2\delta\phi_1^4 + 4\beta^2\phi_1^4 - 4\beta\delta\phi_1^2 + 4\beta\phi_1^2 + \delta + 1)(\delta + 1) + (\delta + 1)}}{\sqrt{(4\beta^2\delta\phi_1^4 + 4\beta^2\phi_1^4 - 4\beta\delta\phi_1^2 + 4\beta\phi_1^2 + \delta + 1)(\delta + 1) + (\delta + 1)}}} \quad (5.8)$$

El parámetro obtenido en la *Secuencia 12* es:

$$\|H_\infty\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(4\beta^2\delta\phi_1^4 + 4\beta^2\phi_1^4 - 4\beta\delta\phi_1^2 + 4\beta\phi_1^2 + \delta + 1)(\delta + 1)}}{\beta(\delta + 1)\phi_1^2}} \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) representa la amplitud de vibración del sistema en los puntos invariantes, que también es la amplitud mínima de vibración de la estructura tipo viga con el dispositivo ISDVA's.

Dado que el conjunto de ecuaciones (5.6)-(5.8) se encuentran en términos de β , $\phi_1(a)$ y δ , se establecen valores fijos para estas variables con el objetivo de encontrar soluciones numéricas para los parámetros óptimos del sistema y de esta forma poder visualizar los resultados obtenidos. Los valores numéricos propuestos se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: Valores establecidos para cada variable independiente.

Variable	Valor
β	= 0.10
$\phi_1(a)$	= $\sqrt{2}$
δ	= 1.0

Mediante el uso de algún sistema de cómputo numérico se sustituye el conjunto de valores de la tabla 5.1 en los parámetros óptimos μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} y $\|H_\infty\|$ (ecuaciones (5.6)-(5.9)). Los resultados se muestran en la tabla 5.2 considerando 6 cifras significativas.

Tabla 5.2: Valores numéricos obtenidos para los parámetros óptimos y la respuesta en frecuencia del sistema en su forma adimensional.

Parámetro	Valor
μ_{opt}	= 0.23850
η_{opt}	= 0.95749
q_{opt}	= 1.09205
H	= 2.27872

Después de sustituir los valores numéricos de las tablas 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.4), se obtiene la FRF del sistema considerando un amortiguamiento igual a cero, es decir $\zeta_2 \rightarrow 0$.

$$H_{\zeta_2 \rightarrow 0}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = 1.238 \sqrt{\frac{(2.000\Omega^4 - 3.998\Omega^2 + 1.304)^2}{(2.476\Omega^6 - 7.905\Omega^4 + 6.948\Omega^2 - 1.614)^2}} \quad (5.10)$$

De la misma manera, al sustituir los valores numéricos de las tablas 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.5), se obtiene la FRF del sistema para la consideración de amortiguamiento infinito, $\zeta_2 \rightarrow \infty$.

$$H_{\zeta_2 \rightarrow \infty}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = 1.238 \sqrt{\frac{(-1.477\Omega^2 + 1.192)^2}{(-1.829\Omega^4 + 3.658\Omega^2 - 1.476)^2}} \quad (5.11)$$

También, se propone un amortiguamiento $\zeta_2 = 0.30$ para visualizar el comportamiento de la relación de amortiguamiento cuando se tiene un valor arbitrario. Al sustituir los valores numéricos de las tablas 5.1 y 5.2 en la ecuación (5.3), se obtiene:

$$H_{\zeta_2=0.30}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{1.533 (2.000\Omega^4 - 3.998\Omega^2 + 1.304)^2 + 1.533 (-0.926\Omega^3 + 0.747\Omega)^2}{(2.476\Omega^6 - 7.905\Omega^4 + 6.948\Omega^2 - 1.614)^2 + (-1.148\Omega^5 + 2.295\Omega^3 - 0.926\Omega)^2}} \quad (5.12)$$

La representación gráfica de las ecuaciones (5.10), (5.11) y (5.12) se muestra en la figura 5.1. Para hallar las coordenadas rectangulares de los puntos fijos P_1, P_2, P_3 y P_4 , se sabe que $h \approx \|H_\infty\|^2$. Por lo tanto, al igualar las ecuaciones (5.10) y (5.11) se resuelve para Ω , obteniendo:

$$P_1 = (0.8052, 2.2788), \quad P_2 = (1.0837, 2.2788), \quad P_3 = (0.6211, 2.2788) \quad \text{y} \quad P_4 = (1.3381, 2.2788)$$

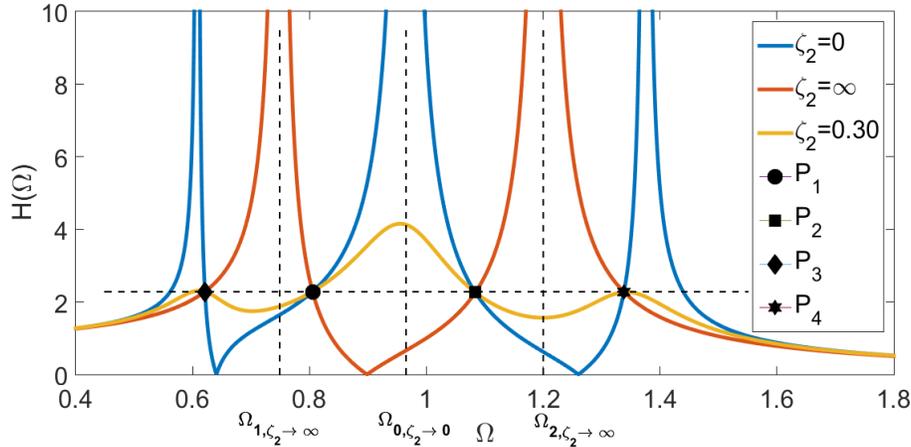


Figura 5.1: Respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al ISDVA's vs la relación de frecuencias Ω utilizando los parámetros óptimos y un coeficiente de amortiguamiento arbitrario.

El conjunto de soluciones óptimas μ_{opt}, η_{opt} y q_{opt} generan los parámetros necesarios para producir la misma amplitud de vibración en las frecuencias invariantes del ISDVA's. Sin embargo, para aplanar la curva de respuesta en frecuencia del ISDVA's en todas las frecuencias de excitación, estos parámetros no son suficientes y es forzoso encontrar la relación de amortiguamiento óptima ζ_{2opt} .

Al aplicar la teoría de Krenk para obtener el amortiguamiento óptimo ζ_{2opt} del ISDVA's, se producen tres frecuencias resonantes no amortiguadas: Ω_1, Ω_2 cuando $\zeta_2 \rightarrow \infty$ y Ω_0 cuando $\zeta_2 \rightarrow 0$.

- Para Ω_1 y Ω_2 cuando $\zeta_2 \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$- 1.830\Omega^4 + 3.660\Omega^2 - 1.477 = 0 \tag{5.13}$$

La ecuación (5.13) se resuelve de forma numérica y se consideran las 2 soluciones positivas:

$$\Omega_1 = 0.7489, \quad \Omega_2 = 1.200 \tag{5.14}$$

- Para Ω_0 cuando $\zeta_2 \rightarrow 0$, se obtiene:

$$2.476\Omega^6 - 7.905\Omega^4 + 6.948\Omega^2 - 1.614 = 0 \tag{5.15}$$

De igual manera, la ecuación (5.15) se aproxima de forma numérica y se toma el valor que cumpla con la condición: $\Omega_1 \leq \Omega_0 \leq \Omega_2$. Así,

$$\Omega_0 = 0.9652 \tag{5.16}$$

Para obtener de manera numérica la relación de amortiguamiento óptimo, la cual aplanar la curva de respuesta en frecuencia de la estructura principal, se sustituyen las soluciones óptimas μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} , $\|H_\infty\|$ (ecuaciones (5.6)-(5.9)), Ω_1 y Ω_2 cuando $\zeta_2 \rightarrow \infty$ (ecuación (5.14)) y Ω_0 cuando $\zeta_2 \rightarrow 0$ (ecuación (5.16)), en la ecuación (5.3). Esto producirá 3 valores de amortiguamiento en cada frecuencia resonante no amortiguada, como se muestra en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: Valores numéricos de la relación de amortiguamiento para cada frecuencia resonante no amortiguada.

Amortiguamiento		Valor numérico
ζ_{2A}	=	0.5217
ζ_{2B}	=	0.4536
ζ_{2C}	=	0.5594

El factor de amortiguamiento óptimo se obtiene calculando el valor cuadrático medio de los valores de amortiguamiento producidos en cada frecuencia resonante no amortiguada.

$$\zeta_{2opt} = \sqrt{\frac{\zeta_{2A}^2 + \zeta_{2B}^2 + \zeta_{2C}^2}{3}} = 0.513 \tag{5.17}$$

Por lo tanto, al sustituir los valores de las tablas 5.1-5.2 y el factor de amortiguamiento óptimo ζ_{2opt} (ecuación (5.17)) en la ecuación (5.3) se obtiene:

$$H_{\zeta_{2opt}}^{\mu_{opt}, \eta_{opt}, q_{opt}} = \sqrt{\frac{1.533(2.0\Omega^4 - 3.998\Omega^2 + 1.304)^2 + 1.533(-1.581\Omega^3 + 1.276\Omega)^2}{(2.476\Omega^6 - 7.905\Omega^4 + 6.948\Omega^2 - 1.614)^2 + (-1.958\Omega^5 + 3.917\Omega^3 - 1.581\Omega)^2}} \quad (5.18)$$

La representación gráfica de las ecuaciones (5.12) y (5.18) se muestra en la figura 5.2.

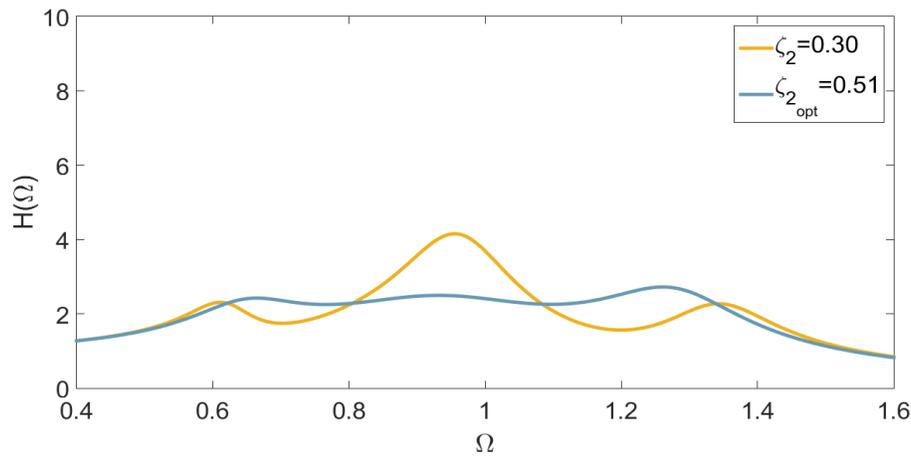


Figura 5.2: Gráfica de la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ con los parámetros óptimos incluyendo la relación de amortiguamiento óptimo.

En la figura 5.2, se aprecia la respuesta de la estructura tipo viga con el ISDVA's con los valores óptimos de los parámetros adimensionales asociados al teorema II de Buckingham sujeta a la fuerza de excitación armónica. Esta respuesta se compara con la respuesta obtenida para diferentes valores de relación de amortiguamiento ζ_2 . Se nota que el comportamiento vibratorio del sistema se estabiliza (curva azul) conforme a los puntos invariantes y a la relación de amortiguamiento óptima ζ_{opt} , es decir, la amplitud de vibración de la curva azul disminuye notablemente.

En la tabla 5.4 se estiman los valores numéricos asociados a los parámetros óptimos del sistema μ_{opt} , η_{opt} , q_{opt} y ζ_{2opt} al variar la relación de masas β conforme al 5%, 8% y 10%. Asimismo, en la figura 5.3 se muestra la representación gráfica.

Tabla 5.4: Valores numéricos de los parámetros óptimos al modificar el valor de β .

Puntos fijos extendida						
		$\delta=1$	y	$\phi_1=\sqrt{2}$		
β	μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	ζ_{2opt}	$\ H_\infty\ $	
0.05	0.10990	1.15938	1.04834	0.38613	3.17790	
0.08	0.18500	1.03231	1.07522	0.47273	2.53101	
0.10	0.23850	0.95749	1.09205	0.51346	2.27872	

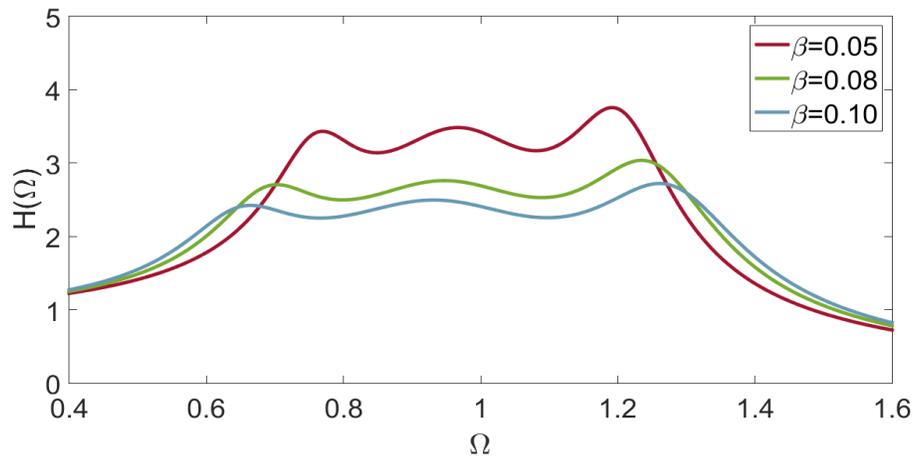


Figura 5.3: Gráfica para los distintos valores de β obtenidos por la técnica de calibración los puntos fijos extendida.

5.2. Criterio H_∞

Para este trabajo se utiliza el método de Nishihara descrita en [7], con la finalidad de obtener soluciones precisas a partir el método de optimización.

Se comienza con la función de respuesta en frecuencia adimensional $H(s)$ de la viga con el ISDVA's (ecuación (5.3)) y se definen las siguientes variables:

$$N_{um} = \left[(\delta + 1)\Omega^4 - \left((1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 + \delta + 1 \right) \Omega^2 q^2 + q^4 \eta^2 \right]^2 (1 + \mu)^2 + [-2\eta\zeta_2 \cdot q(1 + (\delta + 1)\mu)\Omega^3 + 2\eta\zeta_2 q^3 \Omega]^2 (1 + \mu)^2 \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
D_{en} = & \left[(1 + \mu)(\delta + 1)\Omega^6 + [(-(1 + \mu)(1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 - (\delta + 1)(\beta\phi_1^2(a) + \mu + 1))] q^2 \right. \\
& - (1 + \mu)(\delta + 1)\Omega^4 + \left[\eta^2 \left((\beta\delta\phi_1^2(a) + \beta\phi_1^2(a) + 1)\mu + \beta\phi_1^2(a) + 1 \right) q^2 + ((1 + (\delta + 1) \cdot \right. \\
& \left. \left. \mu)\eta^2 + \delta + 1)(1 + \mu) \right] q^2 \Omega^2 - q^4 \eta^2 (1 + \mu)^2 + \left[-2\eta\zeta_2 q(1 + \mu)(1 + (\delta + 1)\mu)\Omega^5 \right. \\
& \left. + 2 \left[\left((\beta\delta\phi_1^2(a) + \beta\phi_1^2(a) + 1)\mu + \beta\phi_1^2(a) + 1 \right) q^2 + (1 + \mu)(1 + (\delta + 1)\mu) \right] \eta\zeta_2 q \Omega^3 \right. \\
& \left. - 2\eta\zeta_2 q^3 (1 + \mu)\Omega \right]^2
\end{aligned} \tag{5.20}$$

En donde N_{um} y D_{en} corresponden al numerador y denominador de la ecuación (5.3) respectivamente.

Por consiguiente, se emplea la ecuación (3.86) propuesta por Nishihara:

$$h = \sqrt{\frac{1}{1 - r^2}} \tag{5.21}$$

De la forma de la ecuación (3.87) se define:

$$\text{Denominador} - \frac{\text{Numerador}}{h^2} = 0 \tag{5.22}$$

Al sustituir el conjunto de ecuaciones (5.19)-(5.21) en la ecuación (5.22), se obtiene una ecuación de grado 12 en Ω . Posteriormente, se convierte a una ecuación mónica.

La ecuación resultante tiene la forma:

$$\Omega^{12} + c_1\Omega^{10} + c_2\Omega^8 + c_3\Omega^6 + c_4\Omega^4 + c_5\Omega^2 + c_6 = 0 \tag{5.23}$$

Donde los coeficientes c_n se describen en el Apéndice C.

Al realizar el cambio de variable $y = \Omega^2$ para disminuir la ecuación (5.23) a grado 6 respecto de y . Se encuentra que la ecuación correspondiente a f_n es:

$$f_n \rightarrow y^6 + c_1y^5 + c_2y^4 + c_3y^3 + c_4y^2 + c_5y^1 + c_6 = 0 \tag{5.24}$$

$$f_n \rightarrow (y - y_A)^2(y - y_B)^2(y - y_C)^2 = 0 \tag{5.25}$$

Al expandir la ecuación (5.25) y comparar los términos correspondientes con los coeficientes c_n de la ecuación (5.24) se obtiene el sistema de ecuaciones (3.93)-(3.95) correspondientes a f_1 , f_2 y f_3 .

$$f_1(\beta, \delta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = G_4 + \frac{1}{2}G_2 + \frac{1}{4}G_3 - \frac{1}{4}G_1 \quad (5.26)$$

$$f_2(\beta, \delta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = 2G_7G_8 + G_5G_6 \quad (5.27)$$

$$f_3(\beta, \delta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = G_9 - 2G_{10} \quad (5.28)$$

Las funciones $f_n(\beta, \delta, \phi_1, q, \eta, r, \zeta_2)$ para $n = 1, \dots, 5$ son expresiones muy extensas y se expresan por $G_i(\beta, \delta, \phi_1, q, \eta, r, \zeta_2)$. Por lo tanto, la matriz jacobiana \mathcal{J}_N asociada al sistema es:

$$\mathcal{J}_N = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Para hallar las ecuaciones f_4 y f_5 , se consideran los determinantes de 3×3 más ‘simples’ asociados a la matriz jacobiana, con la finalidad de ahorrar memoria de cómputo para su solución. Así, los determinantes f_4 y f_5 son:

$$f_4(\beta, \delta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(q, \eta, \zeta_2)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix} \quad (5.30)$$

$$f_5(\beta, \delta, \phi_1, \mu, q, \eta, r, \zeta_2) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\mu, q, \zeta_2)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mu} & \frac{\partial f_3}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix} \quad (5.31)$$

De este modo, se obtiene un sistema de 5 ecuaciones no lineales (f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5) con 5 incógnitas (μ, η, q, r y ζ_2). Para solucionar el sistema de ecuaciones se utiliza método de Newton-Raphson tomando como valores iniciales las soluciones obtenidas en la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida, ver tabla 5.3.

Los resultados obtenidos para los parámetros óptimos a través del método de Nishihara con los valores de $\beta = 0.10$, $\delta = 1$ y $\phi_1 = \sqrt{2}$ (tabla 5.1) se muestran en la tabla 5.5 .

Tabla 5.5: Resultados numéricos de los parámetros óptimos obtenidos mediante el método de Nishihara.

Criterio H_∞	
Parámetros	Valor
μ_{opt}	= 0.34842
η_{opt}	= 0.83795
q_{opt}	= 1.19237
$\zeta_{2_{opt}}$	= 0.67656
r	= 0.91077

Al despejar la variable $H(s)$ de la ecuación (5.3) y sustituir los valores numéricos de la tabla 5.5, se obtiene,

$$H_{Nish} = \sqrt{\frac{1.817(2.0\Omega^4 - 4.534\Omega^2 + 1.418)^2 + 1.817(-2.294\Omega^3 + 1.921\Omega)^2}{2.696\Omega^6 - 9.381\Omega^4 + 8.505\Omega^2 - 1.911)^2 + (-3.093\Omega^5 + 6.336\Omega^3 - 2.589\Omega)^2}} \quad (5.32)$$

En la figura 5.4 se muestra la gráfica de la ecuación (5.32).

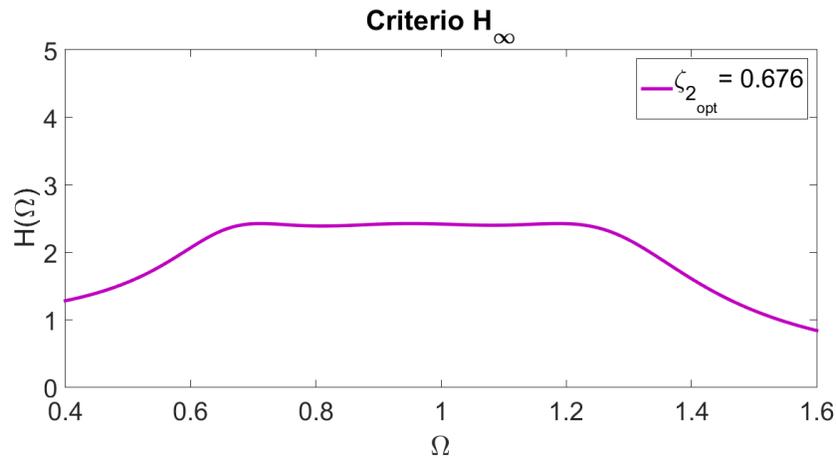


Figura 5.4: Gráfica de $H(\Omega)$ utilizando los parámetros óptimos.

Finalmente, la comparación de las gráficas para los parámetros óptimos obtenidos por medio de la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida (ecuación (5.18)) y el criterio H_∞ (ecuación (5.32)) se muestra en la gráfica 5.5.

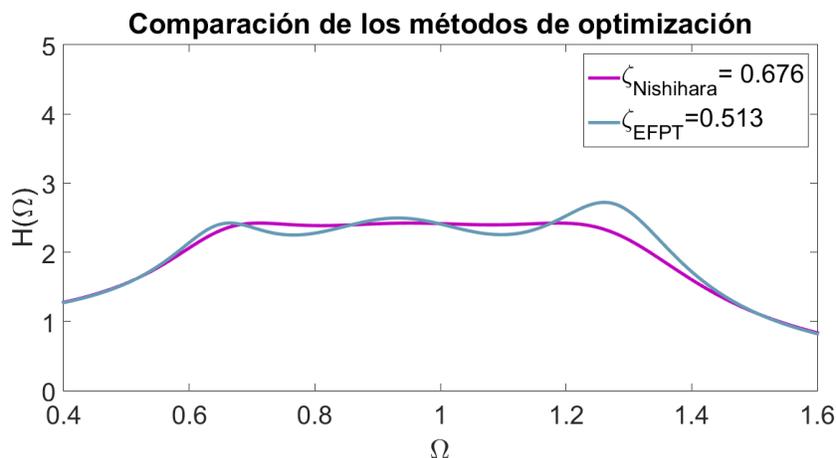


Figura 5.5: Comparación de los resultados obtenidos a través de la técnica de los puntos fijos extendida (EFPT) y el criterio H_∞ .

Es posible deducir que el aplanamiento de la curva es mayor cuando se emplea el criterio de rendimiento H_∞ porque la técnica de los puntos fijos extendida solo es una aproximación a la solución analítica. Sin embargo, el beneficio de emplear la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida es superior porque existe mayor ahorro en la capacidad de cómputo.

En la tabla 5.6 se reportan los valores numéricos para los parámetros óptimos obtenidos a través del criterio de rendimiento H_∞ para diferentes valores de β correspondientes al 5 %, 8 % y 10 %.

Tabla 5.6: Valores numéricos de los parámetros óptimos al modificar el valor de β .

Criterio H_∞					
$\delta = 1 \quad y \quad \phi_1 = \sqrt{2}$					
β	μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	$\zeta_{2_{opt}}$	$\ H_\infty\ $
0.05	0.14942	1.09085	1.09151	0.49984	3.42508
0.08	0.26741	0.92593	1.15543	0.62330	2.70377
0.10	0.34842	0.83795	1.19237	0.67656	2.42191

En la figura 5.6 se muestra la representación gráfica de la respuesta en frecuencia de la estructura primaria acoplada al ISDVA's considerando los parámetros óptimos de la tabla 5.6, al cambiar el valor de β .

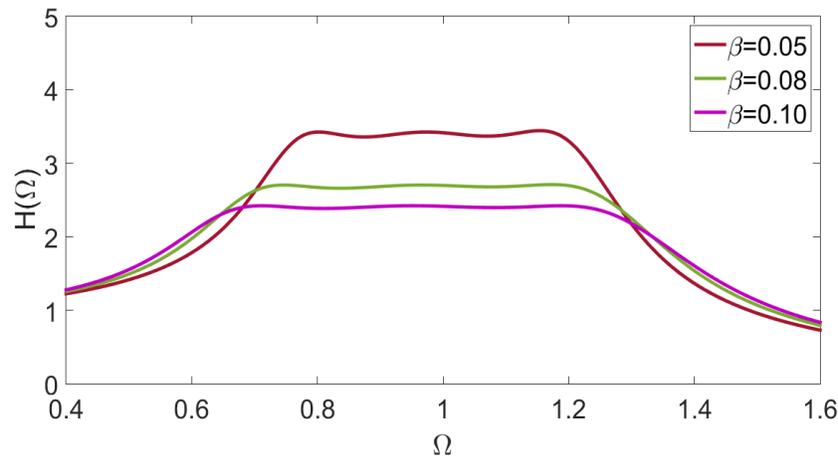


Figura 5.6: Gráfica para los distintos valores de β obtenidos por el criterio de rendimiento H_∞ .

Finalmente, en la tabla 5.7 se hace una recopilación de las tablas 5.4 y 5.6 de los parámetros óptimos obtenidos por medio de la técnica de calibración de frecuencias de los puntos fijos extendida y el criterio H_∞ , respectivamente.

Tabla 5.7: Tabla resumen de los valores numéricos para los parámetros óptimos al modificar el valor de β obtenidos a través de la técnica de los puntos fijos extendida y el criterio H_∞ estableciendo $\delta = 1$ y $\phi_1 = \sqrt{2}$.

Parámetros óptimos para el ISDVA's								
$\delta=1$ y $\phi_1=\sqrt{2}$								
β	Puntos fijos extendida				Criterio H_∞			
	μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	ζ_{2opt}	μ_{opt}	η_{opt}	q_{opt}	ζ_{2opt}
0.05	0.10990	1.15938	1.04834	0.38613	0.14942	1.09085	1.09151	0.49984
0.08	0.18500	1.03231	1.07522	0.47273	0.26741	0.92593	1.15543	0.62330
0.10	0.23850	0.95749	1.09205	0.51346	0.34842	0.83795	1.19237	0.67656

Para calcular el porcentaje en la supresión de vibraciones, se calcula el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones $\%SB_i$. De esta manera, se considera la función de respuesta en frecuencia del sistema tipo viga con absorbedor dinámico de vibración en serie basado en inersores (ISDVA's), ver figura 4.1 y la FRF del sistema tipo viga con absorbedor dinámico de vibración clásico (DVA), ver figura D.2. Para comparar ambos sistemas, se toma como referencia la FRF cuando no existe absorbedor dinámico de vibración en la estructura tipo viga (estructura sin control). En la

figura 5.7 se muestran las curvas mencionadas anteriormente. Cabe mencionar, que para las curvas del ISDVA's y el DVA clásico se emplearon las FRF's obtenidas por el criterio H_∞ .

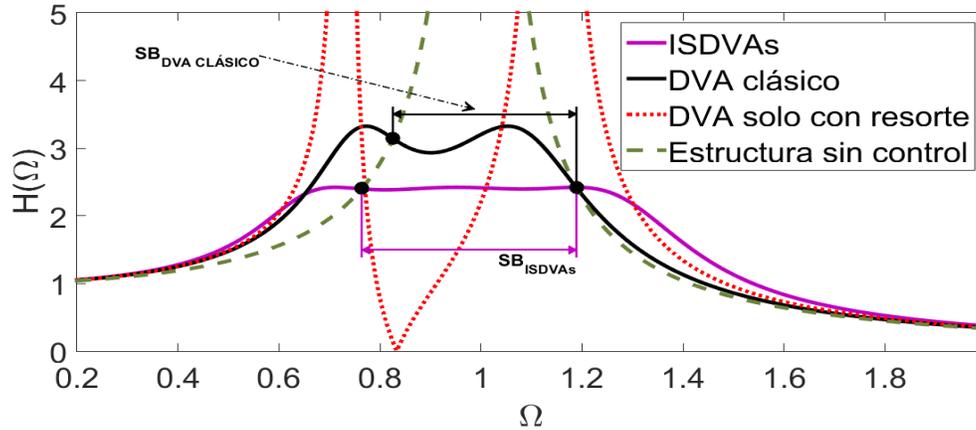


Figura 5.7: Comparación de las curvas de las FRF y el índice del ancho de banda de supresión de vibraciones $\%SB_i$ del ISDVA's y el DVA clásico. Los parámetros óptimos para el ISDVA's son: $\mu_{opt} = 0.34842$, $\eta_{opt} = 0.83795$, $q_{opt} = 1.19237$ y $\zeta_{2opt} = 0.67656$, mientras para el DVA clásico son: $T_{opt} = 0.83322$ y $\zeta_{opt} = 0.25217$, ver Apéndice D.

Por consiguiente, la ecuación para calcular el agrandamiento del ancho de banda operativo del sistema es:

$$\%SB_{ISDVA} = \frac{SB_{ISDVA} - SB_{DVA \text{ clásico}}}{SB_{DVA \text{ clásico}}} \times 100 \% \quad (5.33)$$

De la misma forma, para calcular el índice de reducción de la amplitud de vibración del ISDVA's con respecto al DVA clásico, se encuentran los puntos máximos correspondientes a cada FRF entre los puntos invariantes asociados a cada amplitud máxima de la FRF. Por lo tanto, la ecuación para el índice de reducción de la amplitud de vibración del sistema es:

$$\%SP_{ISDVA} = \frac{SP_{DVA \text{ clásico}} - SP_{ISDVA}}{SP_{DVA \text{ clásico}}} \times 100 \% \quad (5.34)$$

Al efectuar el cálculo, se obtiene que el $\%SB_{ISDVA}$ para el ISDVA's es del 17.21 % y el $\%SP_{ISDVA}$ es del 27.45 % en comparación con la estructura tipo viga con DVA clásico. Por lo tanto, el ISDVA's de alto rendimiento dinámico mejora y supera al DVA clásico. Consecuentemente, el ISDVA's produce un adecuado desempeño en la mitigación de vibraciones cuando se encuentra sujeta una fuerza de excitación armónica. Dicho de otro modo, la interpretación del índice de rendimiento, sugiere que el rango de frecuencias de excitación en el que la estructura primaria (viga) sujeta al ISDVA's o el DVA clásico supera a una estructura sin control (solamente la viga).

Capítulo 6

Conclusiones

A partir del desarrollo matemático empleado en este trabajo de investigación, se pudo encontrar un diseño óptimo de un absorbedor dinámico de vibración basado en inersor conectado a una estructura tipo viga doblemente empotrada. El análisis matemático se efectúa sobre la estructura tipo viga cuando se ejerce una fuerza de excitación externa de tipo armónica. La viga está acoplada a un arreglo en serie de dos absorbedores dinámicos de vibración A y B . Cada DVA, se encuentra conformado por un elemento de masa situado en serie con un arreglo en paralelo de un amortiguador y un resorte. Una de las terminales del inersor se encuentra conectada a tierra mecánica y la otra terminal se conectada a la masa del DVA-B.

Para efectuar el análisis cinemático, fue necesario obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la teoría de Euler-Lagrange considerando fuerzas no conservativas generalizadas. Seguido de la obtención de los parámetros adimensionales, a partir del teorema II de Buckingham, lo que conduce a la respuesta en frecuencia adimensional del sistema. La validación del modelo matemático de forma numérica, se realizó mediante el uso de un sistema de cómputo numérico utilizando los criterios de optimización H_∞ , basado en el método de Nishihara, siendo un método rápido y eficiente para la solución numérica de los parámetros óptimos del ISDVA's y la técnica de los puntos fijos extendida, siendo una aproximación de la norma H_∞ que considera el teorema de Vieta y la teoría de Steen Krenk. Particularmente, la técnica de los puntos fijos extendida solo requiere del conocimiento de la suma y los productos de las raíces reales de ecuaciones cuárticas, sin la necesidad de resolver un conjunto de ecuaciones no lineales que para su solución dependen directamente de la capacidad de procesamiento de cómputo y puede llegar a ser engorroso.

Por lo tanto, al comparar los resultados obtenidos para los parámetros óptimos correspondientes a la técnica de los puntos fijos extendida y el método de Nishihara, se demuestra que se logró minimizar las amplitudes de vibración del sistema relacionadas con la respuesta adimensional en frecuencia del sistema en un intervalo de frecuencias establecido. Adicionalmente, se corrobora la similitud de los mismos.

De lo que se concluye que, al calcular el índice de del ancho de banda de supresión de vibraciones existe una ventaja superior al 17% cuando se utiliza el ISDVA's propuesto, en comparación con el DVA clásico cuando actúa una fuerza externa de tipo armónica. De esta manera, la hipótesis planteada al inicio de este trabajo de investigación ha sido demostrada exitosamente.

6.1. Trabajos futuros

Para complementar el trabajo desarrollado en esta tesis, se proponen los siguientes estudios futuros para mejorar algunos aspectos del mismo y ampliar los resultados obtenidos.

- Obtener el modelo matemático de la estructura tipo viga doblemente empotrada considerando otros tipos de fuerzas de excitación, como fuerzas inerciales o aleatorias.
- Realizar la implementación física del modelo matemático de la estructura tipo viga con ISDVA's.
- Corroborar los resultados obtenidos de forma teórica vs los resultados experimentales, para demostrar la efectividad del modelo matemático y sus medidas de incertidumbre para evaluar la validez de los datos conseguidos.
- Desarrollar un método matemático que considere analíticamente todos los coeficientes de amortiguamiento presentes en un sistema mecánico.
- Considerar diferentes topologías de redes mecánicas basadas en inersores para obtener la mejor respuesta en estado estable sujeta a una fuerza de vibración externa.

Modelo matemático

A partir las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen las energías asociadas al sistema de la figura 4.1.

$$T = \frac{1}{2}M_v [\dot{y}(x, t)]^2 + \frac{1}{2}m_1 [\dot{y}_1(t)]^2 + \frac{1}{2}m_2 [\dot{y}_2(t)]^2 + \frac{1}{2}b [\dot{y}_2(t)]^2 \quad (\text{A.1})$$

$$U = \frac{1}{2}K_v [y(x, t)]^2 + \frac{1}{2}k_1 [y_1(t) - y(a, t)]^2 + \frac{1}{2}k_2 [y_2(t) - y_1(t)]^2 \quad (\text{A.2})$$

$$D = \frac{1}{2}c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)]^2 + \frac{1}{2}c_2 [\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)]^2 \quad (\text{A.3})$$

Donde M_v y K_v son la masa y la rigidez de la viga respectivamente. Empleando la ecuación (3.34), se encontraron las 3 ecuaciones de movimiento asociadas al sistema.

- Para la viga, cuyo desplazamiento es $y(x, t)$:

$$M_v \ddot{y}(x, t) + K_v y(x, t) = F(x, t) + k_1 [y_1(t) - y(a, t)] + c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] \quad (\text{A.4})$$

Dado que el lado izquierdo de la ecuación (A.4) está en términos de una función y que depende de la posición x y el tiempo t respecto a la viga, se sustituye la ecuación (3.23) en la ecuación (A.4).

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t) + \{k_1 [y_1(t) - y(a, t)] + c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)]\} \delta(x - a) \quad (\text{A.5})$$

Donde $\delta(x - a)$ es la función delta de Dirac. La expresión entre corchetes puede ser aproximada por la función delta e indica que es válida cuando la distancia x es igual a la ubicación a del ISDVA's. En realidad representa una distribución de carga infinitamente grande en el punto $x = a$.

- Para el DVA-A, cuyo desplazamiento es $y_1(t)$:

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + k_1 [y_1(t) - y(a, t)] + c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] = k_2 [y_2(t) - y_1(t)] + c_2 [\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] \quad (\text{A.6})$$

- Para el DVA-B, cuyo desplazamiento es $y_2(t)$:

$$k_2 [y_2(t) - y_1(t)] + c_2 [\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] = -(m_2 + b) \ddot{y}_2(t) \quad (\text{A.7})$$

Igualando las ecuaciones (A.6) y (A.7), se tiene:

$$k_1 [y_1(t) - y(a, t)] + c_1 [\dot{y}_1(t) - \dot{y}(a, t)] = -m_1 \ddot{y}_1(t) - (m_2 + b) \ddot{y}_2(t) \quad (\text{A.8})$$

El término del lado izquierdo de la ecuación (A.8) aparece del lado derecho de la ecuación (A.5). Sustituyendo (A.8) en (A.5), se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = F - \{m_1 \ddot{y}_1(t) + (m_2 + b) \ddot{y}_2(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.9})$$

La solución para la vibración forzada de la viga, se puede determinar con el principio de superposición de modos. Para esto de las ecuaciones (3.41) y (3.43), la deflexión de la viga y sus condiciones de frontera se expresan como:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(x) \quad \text{y} \quad \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = \beta_i^4 \phi_i(x) \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo la ecuación (A.10) en (A.9),

$$EI \left[\sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \beta_i^4 \phi_i(x) \right] + \rho A \left[\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \right] = F - \{m_1 \ddot{y}_1(t) + (m_2 + b) \ddot{y}_2(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.11})$$

Suponiendo una fuerza de excitación armónica, la variable F se expresa como:

$$F = F(x, t) = f(x)g(t)$$

Así,

$$EI \left[\sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \beta_i^4 \phi_i(x) \right] + \rho A \left[\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \right] = f(x)g(t) - \{m_1 \ddot{y}_1(t) + (m_2 + b) \ddot{y}_2(t)\} \delta(x - a) \quad (\text{A.12})$$

Suponemos,

$$g(t) = e^{i\omega t}, \quad q_i(t) = Q_i(\omega) e^{i\omega t}, \quad y_2(t) = Y_2(\omega) e^{i\omega t}$$

Obteniendo las segundas derivadas, sustituyendo y simplificando,

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega)\phi_i(x) [EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2] = f(x) + \omega^2\{m_1Y_1(\omega) + (m_2 + b)Y_2(\omega)\}\delta(x - a) \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando por la función modal $\phi_i(x)$ y aplicando la propiedad fundamental de la función δ -Dirac:

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega)\phi_i(x) [EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2] \phi_i(x) = f(x)\phi_i(x) + \omega^2\{m_1Y_1(\omega) + (m_2 + b)Y_2(\omega)\}\phi_i(a) \quad (\text{A.14})$$

Para determinar $y_1(t)$, que corresponde a la coordenada de movimiento del DVA-A, en términos de $Y_1(\omega)$. De la ecuación (A.6), consideramos una fuerza de excitación armónica.

$$\begin{aligned} y_1(t) = Y_1(\omega)e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}_1(t) = i\omega Y_1(\omega)e^{i\omega t} &\Rightarrow \ddot{y}_1(t) = -\omega^2 Y_1(\omega)e^{i\omega t} \\ y_2(t) = Y_2(\omega)e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}_2(t) = i\omega Y_2(\omega)e^{i\omega t} \\ y(a, t) = Y(a, \omega)e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}(a, t) = i\omega Y(a, \omega)e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.6) y resolviendo para $Y_1(\omega)$:

$$Y_1(\omega) = \frac{i\omega[c_2Y_2(\omega) + c_1Y(a, \omega)] + k_2Y_2(\omega) + k_1Y(a, \omega)}{-m_1\omega^2 + (c_1 + c_2)i\omega + k_1 + k_2} \quad (\text{A.15})$$

Para amortiguamientos estructurales bajos, es decir, considerando $c_1 = 0$.

$$Y_1(\omega) = \frac{(k_2 + i\omega c_2)Y_2(\omega) + k_1Y(a, \omega)}{-m_1\omega^2 + c_2i\omega + k_1 + k_2} \quad (\text{A.16})$$

De la misma manera, para determinar $y_2(t)$ en términos de $Y_2(\omega)$, correspondiente a la coordenada de movimiento del ISDVA's. De la ecuación (A.7), consideramos una fuerza de excitación armónica.

$$\begin{aligned} y_2(t) = Y_2(\omega)e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}_2(t) = i\omega Y_2(\omega)e^{i\omega t} &\Rightarrow \ddot{y}_2(t) = -\omega^2 Y_2(\omega)e^{i\omega t} \\ y_1(t) = Y_1(\omega)e^{i\omega t} &\Rightarrow \dot{y}_1(t) = i\omega Y_1(\omega)e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.7) y resolviendo para $Y_2(\omega)$:

$$Y_2(\omega) = \frac{Y_1(\omega)[i\omega c_2 + k_2]}{i\omega c_2 - \omega^2(m_2 + b_2) + k_2} \quad (\text{A.17})$$

Se tiene $Y_1(\omega)$ y $Y_2(\omega)$. Sustituyendo (A.17) en (A.16) y resolviendo para $Y_1(\omega)$.

$$Y_1(\omega) = \frac{(M_2k_1\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2)Y(a, \omega)}{-M_2m_1\omega^4 + (M_2 + m_1)ic_2\omega^3 + [(M_2 + m_1)k_2 + M_2k_1]\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2} \quad (\text{A.18})$$

donde $M_2 = m_2 + b$.

De esta manera, tenemos $Y_1(\omega)$ en términos de $Y(a, \omega)$, que es la posición del DVA-A. Ahora, se pondrá a $Y_2(\omega)$ en términos de $Y(a, \omega)$. Sustituyendo la ecuación (A.16) en (A.17).

$$Y_2(\omega) = \frac{-(ic_2k_1\omega + k_1k_2)Y(a, \omega)}{-M_2m_1\omega^4 + (M_2 + m_1)ic_2\omega^3 + [(M_2 + m_1)k_2 + M_2k_1]\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2} \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.18) y (A.19) en la ecuación (A.14).

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega)\phi_i(x) \left[EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2 \right] \phi_i(x) = f(x)\phi_i(x) + \omega^2\phi_i(a)Y(a, \omega) \cdot \left[\frac{m_1(M_2k_1\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2) - M_2(ic_2k_1\omega + k_1k_2)}{-M_2m_1\omega^4 + (M_2 + m_1)ic_2\omega^3 + [(M_2 + m_1)k_2 + M_2k_1]\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2} \right] \quad (\text{A.20})$$

Integrando respecto a x . Considerando a ρ y A como constantes, tomando la propiedad de la integral de la ecuación (3.43) y multiplicando por la función modal $\phi_i(x)$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega)\phi_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x) \int_0^L \phi_i(x)f(x)dx}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \right) + \omega^2 Y(a, \omega) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \right) \cdot \left[\frac{m_1(M_2k_1\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2) - M_2(ic_2k_1\omega + k_1k_2)}{-M_2m_1\omega^4 + (M_2 + m_1)ic_2\omega^3 + [(M_2 + m_1)k_2 + M_2k_1]\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2} \right] \quad (\text{A.21})$$

Definiendo:

$$a_i = \int_0^{\infty} f(x)\phi_i(x)dx \quad (\text{A.22})$$

$$G_1(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (\text{A.23})$$

$$G_2(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i\phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \rho A\omega^2)} \quad (\text{A.24})$$

$$H(\omega) = \frac{\omega^2(-M_2m_1\omega^2 + (m_1 + M_2)ic_2\omega + (m_1 + M_2)k_2)k_1}{-M_2m_1\omega^4 + (M_2 + m_1)ic_2\omega^3 + [(M_2 + m_1)k_2 + M_2k_1]\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2} \quad (\text{A.25})$$

Dado que:

$$Y(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\omega)\phi_i(x)$$

Se reescribe la ecuación (A.21):

$$Y(x, \omega) = G_2(x, \omega) - H(\omega)G_1(x, \omega)Y(a, \omega) \quad (\text{A.26})$$

Para obtener la expresión $Y(a, \omega)$, se evalúa en la posición del ISDVA's. Por lo que:

$$Y(a, \omega) = \frac{G_2(a, \omega)}{1 + G_1(a, \omega)H(\omega)} \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.26),

$$Y(x, \omega) = G_2(a, \omega) - \frac{G_1(a, \omega)G_2(x, \omega)}{H^{-1}(\omega)G_1(a, \omega)} \quad (\text{A.28})$$

Multiplicando y dividiendo por m_1 , la ecuación (A.25) se reescribe como:

$$H(\omega) = m_1\omega^2 J \quad (\text{A.29})$$

Donde J es:

$$J = \frac{(-M_2m_1\omega^2 + (m_1 + M_2)ic_2\omega + (m_1 + M_2)k_2)k_1}{m_1(-M_2m_1\omega^4 + (M_2 + m_1)ic_2\omega^3 + [(M_2 + m_1)k_2 + M_2k_1]\omega^2 - ic_2k_1\omega - k_1k_2)} \quad (\text{A.30})$$

Recordando que $M_2 = m_2 + b$. Se definen las siguientes variables adimensionales.

$$\omega_A^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad \omega_B^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_B} \quad \delta = \frac{b}{m_2} \quad (\text{A.31})$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad q = \frac{\omega_A}{\omega_1} \quad \eta = \frac{\omega_B}{\omega_A} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (\text{A.32})$$

$$\gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1} \quad \omega_i^2 = \frac{EI\beta_i^4}{\rho A} \quad \beta = (\mu + 1) \frac{m_1}{\rho AL} \quad (\text{A.33})$$

Así, la ecuación (A.30) en su forma adimensional queda expresada como:

$$J = \frac{q^2 [(1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 q^2 + 2i\Omega(1 + (\delta + 1)\mu)\zeta_2\eta q - (\delta + 1)\Omega^2]}{-(\delta + 1)\Omega^4 + 2i(1 + (\delta + 1)\mu)\zeta_2\eta q \Omega^3 + (1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 + \delta + 1)q^2\Omega^2 - 2i\zeta_2\eta q^3\Omega - q^4\eta^2} \quad (\text{A.34})$$

De la ecuación (A.32), se tiene $\omega = \Omega\omega_1$. Sustituyendo en la ecuación (A.25):

$$H(\omega) = m_1\omega_1^2 J_1 \quad (\text{A.35})$$

Donde: $J_1 = \Omega^2 J$.

Sustituyendo (A.35) en (A.28) junto con las variables adimensionales correspondientes.

$$Y(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i\phi_i(x)}{L(EI\beta_i^4 - \omega^2\rho A)} - \frac{\left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \omega^2\rho A)} \right] \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\phi_i(a)}{L(EI\beta_i^4 - \omega^2\rho A)} \right]}{\frac{1}{m_1\omega_1^2 J_1} + \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2(a)}{L(EI\beta_i^4 - \omega^2\rho A)} \right]} \quad (\text{A.36})$$

De las ecuaciones (A.32) y (A.33) despejamos para ω , $EI\beta_i^4$, ω_i^2 y m_1 y efectuando el desarrollo algebraico correspondiente se obtiene.

$$S(x, \Omega) = \frac{1}{\rho AL\omega_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot \left\{ \frac{a_i}{\gamma_i^2 - \Omega^2} - \frac{\phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta a_i \phi_i(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}}{\frac{\mu + 1}{J_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta \phi_i^2(a)}{\gamma_i^2 - \Omega^2}} \right] \right\} \quad (\text{A.37})$$

Evaluando en $x = a$ y considerando el primer modo de vibración.

$$\frac{S(a, \Omega) \rho AL\omega_1^2}{a_1 \phi_1(a)} = \frac{\mu + 1}{J_1 \beta \phi_1^2(a) - \Omega^2(\mu + 1) + (\mu + 1)} \quad (\text{A.38})$$

Puntos fijos extendida

$$A = (1 + \mu) \cdot \left[-(\delta + 1)\Omega^4 + \left((1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 + \delta + 1 \right) \Omega^2 q^2 - q^4 \eta^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

$$B = (1 + \mu) \cdot \left[2\eta\zeta_2 q (1 + (\delta + 1)\mu) \Omega^3 - 2\zeta_2 \eta q^3 \Omega \right] \quad (\text{B.2})$$

$$C = \left\{ (1 + \mu)(\delta + 1)\Omega^6 + \left[-\eta^2(\delta + 1)\mu^2 + \left(-(\delta + 2)\eta^2 - \delta - 1 \right) \mu - \eta^2 \right. \right. \\ \left. \left. - (\delta + 1)(\beta\phi_1^2(a) + 1) \right] q^2 - (1 + \mu)(\delta + 1) \right\} \Omega^4 + q^2 \left[\eta^2 \left((\beta\delta\phi_1^2(a) + \beta\phi_1^2(a) + 1)\mu \right. \right. \\ \left. \left. + \beta\phi_1^2(a) + 1 \right) q^2 + (1 + \mu) \left(\eta^2(\delta + 1)\mu + \eta^2 + \delta + 1 \right) \right] \Omega^2 - q^4 \eta^2 (1 + \mu) \left. \right\} \quad (\text{B.3})$$

$$D = \left\{ 2\zeta_2 q \left[-(1 + \mu) (1 + (\delta + 1)\mu) \Omega^4 + \left[(\delta + 1)\mu^2 + \left[(\beta\delta\phi_1^2(a) + \beta\phi_1^2(a) + 1)q^2 \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \delta + 2 \right] \mu + 1 + (\beta\phi_1^2(a) + 1)q^2 \right] \Omega^2 - q^2(1 + \mu) \right] \eta \Omega \left. \right\} \quad (\text{B.4})$$

$$\Theta_1(\delta, \Omega, \mu, \eta, q) = \left[(\delta + 1)\Omega^4 - \left((1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 + \delta + 1 \right) q^2 \Omega^2 + q^4 \eta^2 \right]^2 (1 + \mu)^2 \\ \Theta_2(\phi, \beta, \delta, \Omega, \mu, \eta, q) = (1 + \mu)(\delta + 1)\Omega^6 + \left[\left(-(1 + \mu) (1 + (\delta + 1)\mu) \eta^2 \right. \right. \\ \left. \left. - (\delta + 1)(\beta\phi_1^2 + \mu + 1) \right) q^2 - (1 + \mu)(\delta + 1) \right] \Omega^4 \quad (\text{B.5}) \\ \Theta_3(\phi, \beta, \delta, \Omega, \mu, \eta, q) = \left[\left((\beta\delta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)\mu + \beta\phi_1^2 + 1 \right) \eta^2 q^2 + \left((1 + (\delta + 1)\mu)\eta^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \delta + 1 \right) (1 + \mu) \right] q^2 \Omega^2 - q^4 \eta^2 (1 + \mu)$$

Método de Nishihara

$$\begin{aligned}
 c_1 = & \left\{ \left[\left(4\eta^2 \zeta_2^2 \mu^3 + (4\zeta_2^2 - 2)\eta^2 \mu^2 + (-2\eta^2 - 2)\mu - 2\beta\phi_1^2 - 2 \right) \delta^2 \right. \right. \\
 & + \left(8\eta^2 \zeta_2^2 \mu^3 + (16\zeta_2^2 - 4)\eta^2 \mu^2 + \left(-4 + (8\zeta_2^2 - 6)\eta^2 \right) \mu - 4\beta\phi_1^2 - 2\eta^2 - 4 \right) \delta \\
 & + 4\eta^2 \zeta_2^2 \mu^3 + \left(12\zeta_2^2 - 2 \right) \eta^2 \mu^2 + \left(-2 + (12\zeta_2^2 - 4)\eta^2 \right) \mu + \left(4\zeta_2^2 - 2 \right) \eta^2 - 2\beta\phi_1^2 - 2 \left. \right] q^2 \\
 & - 2(\delta + 1)^2(1 + \mu) \left. \right\} \cdot \left(\frac{1}{(\delta + 1)^2(1 + \mu)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 = & \left(\frac{1}{(\delta + 1)^2(1 + \mu)} \right) \cdot \left\{ \left[\eta^4(\delta + 1)^2 \mu^4 + 2(\delta + 1) \left((-4\beta\phi_1^2 \zeta_2^2 + \eta^2 + 1)\delta - 4\beta\phi_1^2 \zeta_2^2 + 2\eta^2 \right. \right. \right. \\
 & - 4\zeta_2^2 + 1) \eta^2 \mu^3 + \left((1 + \eta^4 + (4 + (-8\zeta_2^2 + 4)\beta\phi_1^2) \eta^2) \delta^2 + (2 + 6\eta^4 + ((-32\zeta_2^2 + 8)\beta\phi_1^2 \right. \\
 & - 16\zeta_2^2 + 12) \eta^2) \delta + 1 + 6\eta^4 + \left((-24\zeta_2^2 + 4)\beta\phi_1^2 - 24\zeta_2^2 + 8 \right) \eta^2) \mu^2 + \left((4\beta\phi_1^2 + 2)\eta^2 \right. \\
 & + 2\beta\phi_1^2 + 2) \delta^2 + \left(2\eta^4 + \left((-16\zeta_2^2 + 12)\beta\phi_1^2 - 8\zeta_2^2 + 12 \right) \eta^2 + 4\beta\phi_1^2 + 4 \right) \delta + 4\eta^4 \\
 & + \left((-24\zeta_2^2 + 8)\beta\phi_1^2 - 24\zeta_2^2 + 10 \right) \eta^2 + 2\beta\phi_1^2 + 2) \mu + \left(\beta\phi_1^2 + 1 \right)^2 \delta^2 + 4 \left(\frac{\beta\phi_1^2}{2} + \eta^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot \\
 & \left(\beta\phi_1^2 + 1 \right) \delta + \eta^4 - 8 \left(\zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\beta\phi_1^2 + 1 \right) \eta^2 + \left(\beta\phi_1^2 + 1 \right)^2 \left. \right] q^4 - 8(1 + \mu) \left(\eta^2 \zeta_2^2 (\delta + 1)^2 \mu^3 \right. \\
 & + \left(\left(\zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) \delta + 3\zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) (\delta + 1)\eta^2 \mu^2 + \left(\left(-\frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \delta^2 + \left(-1 + \left(2\zeta_2^2 - \frac{3}{2} \right) \eta^2 \right) \delta \right. \\
 & - \frac{1}{2} + \left(3\zeta_2^2 - 1 \right) \eta^2) \mu + \left(-\frac{\beta\phi_1^2}{4} - \frac{1}{2} \right) \delta^2 + \left(-1 - \frac{\eta^2}{2} - \frac{\beta\phi_1^2}{2} \right) \delta + \left(\zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) \eta^2 \\
 & \left. \left. - \frac{\beta\phi_1^2}{4} - \frac{1}{2} \right) q^2 + r^2(\delta + 1)^2(1 + \mu)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_3 = & \left(\frac{-2q^2}{(\delta+1)^2(1+\mu)^2} \right) \cdot \left\{ q^2(1+\mu)((\delta+1)\mu+1) \left((\delta+1)\mu^2 + ((\beta\delta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \delta + 2 \right) \mu + 1 + (\beta\phi_1^2 + 1)q^2 \right\} \eta^4 + \left(-2r^2\zeta_2^2(\delta+1)^2\mu^4 - 4 \left(\left(\beta\phi_1^2\zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) \delta + \beta\phi_1^2\zeta_2^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2\zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) q^2 + r^2 \left(\left(\zeta_2^2 - \frac{1}{4} \right) \delta + 2\zeta_2^2 - \frac{1}{4} \right) \right) (\delta+1)\mu^3 + \left(-2 \left(\left(\beta\phi_1^2\zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) \delta \right. \right. \\
 & \left. \left. + \beta\phi_1^2\zeta_2^2 + \zeta_2^2 - \frac{1}{2} \right) (\beta\delta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^4 + \left((4 + (-4\zeta_2^2 + 2)\beta\phi_1^2) \delta^2 + \left((-16\zeta_2^2 + 4)\beta\phi_1^2 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - 16\zeta_2^2 + 12 \right) \delta + (-12\zeta_2^2 + 2)\beta\phi_1^2 - 24\zeta_2^2 + 8 \right) q^2 - 2 \left(\left(\zeta_2^2 - 1 \right) \delta^2 + \left(6\zeta_2^2 - \frac{5}{2} \right) \delta + 6\zeta_2^2 \right. \\
 & \left. - \frac{3}{2} \right) r^2 \left. \right) \mu^2 + \left((\beta\phi_1^2 + 1) \left(\beta\delta^2\phi_1^2 + \left(2 + (-4\zeta_2^2 + 2)\beta\phi_1^2 \right) \delta + (-4\zeta_2^2 + 1)\beta\phi_1^2 - 4\zeta_2^2 + 2 \right) q^4 \right. \\
 & \left. + \left((2\beta\phi_1^2 + 2)\delta^2 + \left((-8\zeta_2^2 + 6)\beta\phi_1^2 - 8\zeta_2^2 + 12 \right) \delta + \left(-12\zeta_2^2 + 4 \right) \beta\phi_1^2 - 24\zeta_2^2 + 10 \right) q^2 \right. \\
 & \left. + r^2 \left(\delta^2 + (-4\zeta_2^2 + 4)\delta - 8\zeta_2^2 + 3 \right) \right) \mu + \left((\beta\phi_1^2 + 1)^2 q^4 + (2\beta\phi_1^2 + 4)q^2 + r^2 \right) (-2\zeta_2^2 + \delta + 1) \eta^2 \\
 & \left. + (1+\mu) \left((q^2 + r^2)\mu + (\beta\phi_1^2 + 1)q^2 + r^2 \right) (\delta+1)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_4 = & \left[\left(r^2(\delta+1)^2\mu^4 + 2 \left((\beta\delta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 2)q^2 + r^2(\delta+2) \right) (\delta+1)\mu^3 + \left((\beta\delta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)^2 q^4 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + (2\beta\delta^2\phi_1^2 + (8\beta\phi_1^2 + 8)\delta + 6\beta\phi_1^2 + 12)q^2 + r^2(\delta^2 + 6\delta + 6) \right) \mu^2 + \left(2(\beta\phi_1^2 + 1)(\beta\delta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 1)q^4 + \left(4\beta\delta\phi_1^2 + 6\beta\phi_1^2 + 4\delta + 12 \right) q^2 + 2r^2(\delta+2) \right) \mu + (\beta\phi_1^2 + 1)^2 q^4 + (2\beta\phi_1^2 + 4)q^2 + r^2 \right) \eta^4 \\
 & \left. + 2 \left(r^2(\delta+1)(-4\zeta_2^2 + \delta + 1)\mu^2 + \left((\beta\delta^2\phi_1^2 + (2 + (-4\zeta_2^2 + 2)\beta\phi_1^2)\delta + (-4\zeta_2^2 + 1)\beta\phi_1^2 - 4\zeta_2^2 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2) q^2 + r^2(\delta^2 + (-4\zeta_2^2 + 4)\delta - 8\zeta_2^2 + 3) \right) \mu + 2 \left((\beta\phi_1^2 + 1)q^2 + r^2 \right) (-2\zeta_2^2 + \delta + 1) \right) (1+\mu)\eta^2 \\
 & \left. + r^2(\delta+1)^2(1+\mu)^2 \right] \cdot \left(\frac{q^4}{(\delta+1)^2(1+\mu)^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_5 = & \left\{ -2 \left[\left(r^2(\delta+1)\mu^2 + \left(r^2(\delta+2) + (\beta\delta\phi_1^2 + \beta\phi_1^2 + 1)q^2 \right) \mu + (\beta\phi_1^2 + 1) q^2 + r^2 \right) \eta^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + r^2 \left(-2\zeta_2^2 + \delta + 1 \right) (1+\mu) \right] q^6 \eta^2 \right\} / \left\{ (\delta+1)^2(1+\mu) \right\}
 \end{aligned}$$

$$c_6 = \frac{q^8 r^2 \eta^4}{(\delta+1)^2}$$

Viga con DVA clásico

En este apartado se recapitulan los resultados para los parámetros óptimos del sistema tipo viga con el DVA clásico, obtenidos a través de la técnica de los puntos fijos y el método de Nishihara.

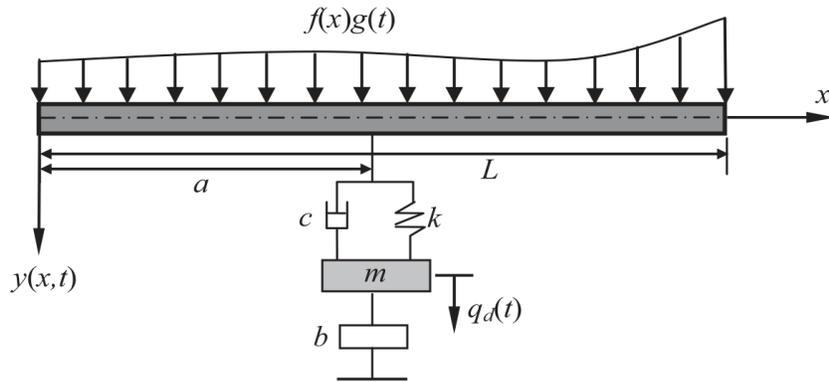


Figura D.1: Estructura tipo viga con configuración de control de vibraciones basada en inersor [58].

Los parámetros óptimos obtenidos por Jin et al. [58] a través de la técnica de los puntos fijos para la estructura tipo viga basada en inersor mostrada en la figura D.1 son:

$$T_{opt} = \frac{\sqrt{1+d}}{(1+d)\mu\phi_1^2(a) + 1} \quad (D.1)$$

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3(1+d)^2\mu\phi_1^2(a)}{8[(1+d)\mu\phi_1^2(a) + 1]}} \quad (D.2)$$

Donde T es la relación de frecuencia óptima y ζ es la relación de amortiguamiento óptima.

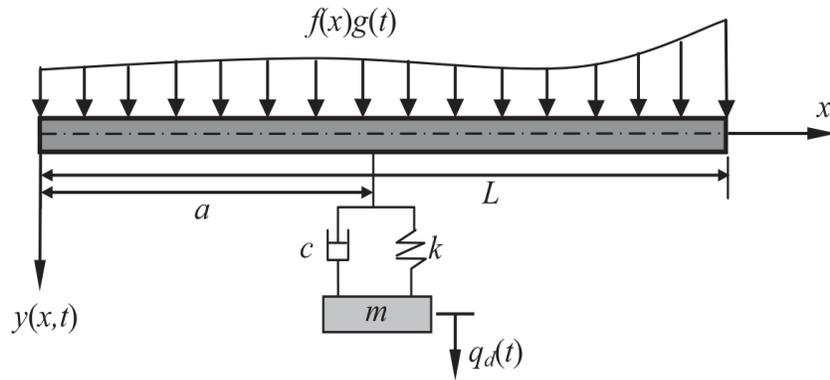


Figura D.2: Estructura tipo viga con DVA clásico [58].

Si se considera $b = 0$, se obtiene una estructura tipo viga con un absorbedor dinámico de vibración clásico, como se ilustra en la figura D.2. Por lo tanto, los parámetros óptimos son:

$$T_{opt,b=0} = \frac{1}{\mu\phi_1^2(a) + 1} \quad (D.3)$$

$$\zeta_{opt,b=0} = \sqrt{\frac{3\mu\phi_1^2(a)}{8(\mu\phi_1^2(a) + 1)}} \quad (D.4)$$

Estableciendo un valor fijo para la variable μ , con la finalidad de obtener soluciones numéricas y efectuar la comparación con los valores obtenidos por el método de Nishihara. Los resultados para $\mu = 0.1$, se muestran en la tabla D.1.

Tabla D.1: Comparación de los parámetros óptimos y sus respectivos valores numéricos para la configuración viga-DVA clásico obtenidos mediante la técnica de los puntos fijos [58] y el método de Nishihara.

Puntos fijos		Método de Nishihara	
Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
T_{opt}	= 0.83333	T_{opt}	= 0.83322
ζ_{opt}	= 0.24999	ζ_{opt}	= 0.25217

Bibliografía

- [1] Malcolm C Smith. “Synthesis of mechanical networks: the inerter”. En: *IEEE Transactions on automatic control* 47.10 (2002), págs. 1648-1662. DOI: 10.1109/TAC.2002.803532.
- [2] Hernán Garrido, Oscar Curadelli y Daniel Ambrosini. “Improvement of tuned mass damper by using rotational inertia through tuned viscous mass damper”. En: *Engineering Structures* 56 (2013), págs. 2149-2153. ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.08.044>.
- [3] Cuauhtémoc Mazón. “Diseño y construcción de un sistema de amortiguamiento con inersor y fluido reológico”. Tesis de mtría. Tecnológico Nacional de México, 2019.
- [4] Eduardo Barredo y col. “A novel high-performance passive non-traditional inerter-based dynamic vibration absorber”. En: *Journal of Sound and Vibration* 485 (2020), pág. 115583. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115583>.
- [5] Sung-Yong Kim y Cheol-Ho Lee. “Optimum design of linear multiple tuned mass dampers subjected to white-noise base acceleration considering practical configurations”. En: *Engineering Structures* 171 (2018), págs. 516-528. ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.002>.
- [6] Eduardo Barredo y col. “Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers”. En: *International Journal of Mechanical Sciences* 144 (2018), págs. 41-53. ISSN: 0020-7403. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025>.
- [7] Toshihiko Asami, Yoshito Mizukawa y Tomohiko Ise. “Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function”. En: *Journal of Vibration and Acoustics* 140.6 (jun. de 2018). 061012. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.4040229.

- [8] Marco Canales, William Paucar y Noel Juipa. “Método de investigación para ingenierías basado en la metodología de la investigación científica”. En: *RevIA* 7.4 (2020), págs. 5-9.
- [9] Frahm Hermann. “Device for damping vibrations of bodies.” Pat. 0989958. 1911.
- [10] J. Ormondroyd y Den Hartog J. P. “The Theory of the Dynamic Vibration Absorber”. En: *Trans., ASME, Applied Mechanics* 50 (1928), págs. 9-22.
- [11] Mehmet Bulent Ozer y Thomas J. Royston. “Extending Den Hartog’s Vibration Absorber Technique to Multi-Degree-of-Freedom Systems”. En: *Journal of Vibration and Acoustics* 127.4 (oct. de 2004), págs. 341-350. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1924642.
- [12] Osamu Nishihara y Toshihiko Asami. “Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors) ”. En: *Journal of Vibration and Acoustics* 124.4 (sep. de 2002), págs. 576-582. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1500335.
- [13] Toshihiko Asami y Osamu Nishihara. “Closed-Form Exact Solution to H_∞ Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems) ”. En: *Journal of Vibration and Acoustics* 125.3 (jun. de 2003), págs. 398-405. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1569514.
- [14] Toshihiko Asami, Osamu Nishihara y Amr M. Baz. “Analytical Solutions to H_∞ and H_2 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems ”. En: *Journal of Vibration and Acoustics* 124.2 (mar. de 2002), págs. 284-295. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.1456458.
- [15] T. Argentini, M. Belloli y P. Borghesani. “A Closed-Form Optimal Tuning of Mass Dampers for One Degree-of-Freedom Systems Under Rotating Unbalance Forcing”. En: *Journal of Vibration and Acoustics* 137.3 (jun. de 2015). 034501. ISSN: 1048-9002. DOI: 10.1115/1.4029576.
- [16] Steen Krenk. “Frequency Analysis of the Tuned Mass Damper”. En: *Journal of Applied Mechanics* 72.6 (mayo de 2005), págs. 936-942. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.2062867.
- [17] Steen Krenk y Jan Høgsberg. “Tuned mass absorber on a flexible structure”. En: *Journal of Sound and Vibration* 333.6 (2014), págs. 1577-1595. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.11.029>.

- [18] Steen Krenk y Jan Høgsberg. “Tuned resonant mass or inerter-based absorbers: unified calibration with quasi-dynamic flexibility and inertia correction”. En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 472.2185 (ene. de 2016), pág. 20150718. DOI: [10.1098/rspa.2015.0718](https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0718).
- [19] M.Z. Ren. “A variant design of the dynamic vibration absorber”. En: *Journal of Sound and Vibration* 245.4 (2001), págs. 762-770. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3564>.
- [20] Kefu Liu y Jie Liu. “The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result”. En: *Journal of Sound and Vibration* 284.3 (2005), págs. 1181-1189. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.08.002>.
- [21] W.O. Wong e Y.L. Cheung. “Optimal design of a damped dynamic vibration absorber for vibration control of structure excited by ground motion”. En: *Engineering Structures* 30.1 (2008), págs. 282-286. ISSN: 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.03.007>.
- [22] Y. L. Cheung y W. O. Wong. “Design of a non-traditional dynamic vibration absorber”. En: *The Journal of the Acoustical Society of America* 126.2 (2009), págs. 564-567. DOI: [10.1121/1.3158917](https://doi.org/10.1121/1.3158917).
- [23] Y.L. Cheung y W.O. Wong. “H-infinity optimization of a variant design of the dynamic vibration absorber—Revisited and new results”. En: *Journal of Sound and Vibration* 330.16 (2011). Computational Aero-Acoustics (CAA) for aircraft noise prediction - Part A, págs. 3901-3912. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.03.027>.
- [24] Y.L. Cheung y W.O. Wong. “ H_2 optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation”. En: *Journal of Sound and Vibration* 330.6 (2011), págs. 1039-1044. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.031>.
- [25] Michael Z.Q. Chen y col. “The missing mechanical circuit element”. En: *IEEE Circuits and Systems Magazine* 9.1 (2009), págs. 10-26. DOI: [10.1109/MCAS.2008.931738](https://doi.org/10.1109/MCAS.2008.931738).
- [26] Yinlong Hu, Michael Z.Q. Chen y Zhan Shu. “Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements”. En: *Journal of Sound and Vibration* 333.8 (2014), págs. 2212-2225. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.016>.

- [27] Toshihiko Asami. “Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel”. En: *Journal of Vibration and Acoustics* 139.1 (nov. de 2016). 011015. ISSN: 1048-9002. DOI: [10.1115/1.4034776](https://doi.org/10.1115/1.4034776).
- [28] Kohju Ikago, Kenji Saito y Norio Inoue. “Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper”. En: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.3 (2012), págs. 453-474. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.1138>.
- [29] I. F. Lazar, S.A. Neild y D.J. Wagg. “Using an inerter-based device for structural vibration suppression”. En: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 43.8 (2014), págs. 1129-1147. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.2390>.
- [30] Laurentiu Marian y Agathoklis Giaralis. “Optimal design of a novel tuned mass-damper–inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems”. En: *Probabilistic Engineering Mechanics* 38 (2014), págs. 156-164. ISSN: 0266-8920. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2014.03.007>.
- [31] Abdollah Javidialesaadi y Nicholas Wierschem. “Extending the Fixed-Points Technique for Optimum Design of Rotational Inertial Tuned Mass Dampers”. En: *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. Springer International Publishing, 2017, págs. 83-86. DOI: [10.1007/978-3-319-54777-0_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-54777-0_11).
- [32] D. Pietrosanti, M. De Angelis y M. Basili. “Optimal design and performance evaluation of systems with Tuned Mass Damper Inerter (TMDI)”. En: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 46.8 (2017), págs. 1367-1388. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.2861>.
- [33] Yinlong Hu y Michael Z.Q. Chen. “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers”. En: *International Journal of Mechanical Sciences* 99 (2015), págs. 297-307. ISSN: 0020-7403. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003>.
- [34] Floyd A Firestone. “A new analogy between mechanical and electrical systems”. En: *The Journal of the Acoustical Society of America* 4.3 (1933), págs. 249-267.
- [35] Michael ZQ Chen y Yinlong Hu. *Inerter and Its Application in Vibration Control Systems*. Springer, 2019.
- [36] Malcolm C. Smith. “The Inerter: A Retrospective”. En: *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems* 3.1 (2020), págs. 361-391. DOI: [10.1146/annurev-control-053018-023917](https://doi.org/10.1146/annurev-control-053018-023917).

- [37] Chen Michael Zhiqiang, Wang Kai y Chen Guanrong. *Passive Network Synthesis: Advances With Inerter*. World Scientific, 2020.
- [38] Yujie Shen y col. “Modeling and Optimization of Vehicle Suspension Employing a Nonlinear Fluid Inerter”. En: *Shock and Vibration* 2016 (2016), págs. 1-9. DOI: 10.1155/2016/2623017.
- [39] Kesavan Ramakrishnan y col. En: *Multi-Objective Optimization of Road Vehicle Passive Suspensions With Inerter*. Ago. de 2016, V003T01A007. DOI: 10.1115/DETC2016-59864.
- [40] I. Takewaki y col. “Fundamental mechanism of earthquake response reduction in building structures with inertial dampers”. En: *Structural Control and Health Monitoring* 19.6 (2012), págs. 590-608. DOI: <https://doi.org/10.1002/stc.457>.
- [41] David Carr Baird. *Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Prentice-Hall Hispanoamericana Mexico. DF, 1991.
- [42] Charles Kittel y Walter D Knight. *Mecánica*. Vol. 1. Reverté, 1996.
- [43] Miguel Angel Bernal Yermanos. “Teorema II-construyendo ciencia en el aula”. En: *Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales* (2015).
- [44] Bahman Zohuri. *Dimensional Analysis Beyond the Pi Theorem*. Oct. de 2016. ISBN: 978-3319457253. DOI: 10.1007/978-3-319-45726-0.
- [45] Luis Quintanar Medina. “El teorema Pi y la modelación”. En: *Revista del Departamento de Matemáticas y Física* (2006), págs. 1-7.
- [46] Dennis G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. International Thomson, 1997. ISBN: 9687529210,9789687529219.
- [47] Singiresu S. Rao. *Vibration of Continuous Systems*. English (US). John Wiley y Sons, mar. de 2007. ISBN: 0471771716. DOI: 10.1002/9780470117866.
- [48] S Graham Kelly. *Mechanical vibrations: theory and applications*. Cengage learning Stamford, CT, 2012.
- [49] Singiresu S. Rao. *Vibraciones mecánicas*. spa. 5ª. México: Pearson Educación, 2012. ISBN: 978-607-32-0952-6.
- [50] Clarence W. de Silva, ed. *Vibration and Shock Handbook*. CRC Press, jun. de 2005. DOI: 10.1201/9781420039894.
- [51] Aliro Cordero Simunovic. “Mecánica”. En: *Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas* (2013).

- [52] K. Vogtmann V. I. Arnold A. Weinstein. *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*. 2nd. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989. ISBN: 9780387968902,0-387-96890-3,3-540-96890-3.
- [53] E. Butkov. *Mathematical Physics*. A-W series in advanced physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1968. ISBN: 9780201007275.
- [54] Miztli Y Yépez Martínez. *Mécanica analítica*. UNAM, 2007.
- [55] Leonard Meirovitch. *Fundamentals of vibrations*. Waveland Press, 2010.
- [56] Herbert Goldstein. *Mecánica clásica*. Reverté, 2018.
- [57] Earl D. Rainville V; Víctor Hugo Ibarra Mercado; Richard E. Bedient; Oscar Alfredo Palmas Velasco; Phillip E. Bedient. *Ecuaciones diferenciales*. 8.ª ed. Pearson Educación, 1998. ISBN: 9789701700693,9701700694.
- [58] Xiaoling Jin, Michael ZQ Chen y Zhilong Huang. “Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations”. En: *International Journal of Mechanical Sciences* 119 (2016), págs. 80-87.
- [59] James Victor Uspensky, JC Maquieira y JP Varela. *Teoría de ecuaciones*. Limusa, 1987.
- [60] Israel Gelfand y Vladimir Retakh. “Noncommutative Vieta theorem and symmetric functions”. En: *The Gelfand Mathematical Seminars, 1993–1995*. Springer. 1996, págs. 93-100.
- [61] James Stewart. *Cálculo trascendentes tempranas*. 8.ª ed. CENGAGE Learning, 2017. ISBN: 9786075265490,607526549X.
- [62] Enrique Baquela y Andrés Redchuk. *Optimización Matemática con R. Volumen 1: Introducción al modelado y resolución de problemas*. 2013.
- [63] Edwin Joseph Purcell, Steven E Rigdon y Dale E Varberg. *Cálculo*. Pearson Educación, 2007.
- [64] Ana Elizabeth García Hernández. *Cálculo de varias variables*. 1.ª ed. Serie Universitaria Patria. Grupo Editorial Patria, 2014. ISBN: 9786074388961,6074388962.
- [65] Jacob Pieter Den Hartog. *Mechanical vibrations*. Courier Corporation, 1985.
- [66] Eduardo Barredo. “Análisis del efecto de un inersor en la respuesta dinámica de sistemas mecánicos en resonancia”. Tesis de mtría. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2016.
- [67] B. P. Lathi. *Signal Processing and Linear Systems*. First Edition. Oxford University Press, USA, 2000. ISBN: 9780941413350,0941413357.

- [68] Yinlong Hu y col. “Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution”. En: *Journal of Sound and Vibration* 346 (2015), págs. 17-36. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.02.041>.
- [69] Eduardo Barredo. “Cuantificación de la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica”. Tesis doct. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2020.