UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Existencia y unicidad de la solución de problemas de contorno para la ecuación de Sturm-Liouville con coeficientes Lebesgue integrables

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Iván Vega Gutiérrez

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Salvador Sánchez Perales

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. Tomás Pérez Becerra

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MARZO DE 2021.

En memoria de mi abuelo,
Abundio Gutiérrez Cruz.

Agradecimientos

A mis padres, Petrona Gutiérrez Aquino y Atanasio Vega García. Por su inmenso amor, por nunca perder la fe en mí.

A mi hermano Lalo, por mostrarme confianza y fortaleza cuando lo necesitaba.

A mi familia, por el apoyo que siempre me han brindado. A mi abuelita Guillermina Aquino Galván, por su cálido cariño. A mis tíos: Enrique, Manuela y Héctor, especialmente a Inés, por escucharme con atención y tratar de mostrarme un camino. A mis primos: Manuel, Daniela, Miriam, Andrea y Marisol, por motivarme a ser una mejor persona.

A mis directores de tesis. Al Dr. Salvador Sánchez Perales y Dr. Tomás Pérez Becerra, por su apreciado tiempo e infinita paciencia, sin su apoyo este trabajo de tesis no hubiera sido posible. Les agradezco por darme la oportunidad de hacer las paces con las matemáticas.

A mis sinodales: Dr. Virgilio Vázquez Hipólito, M.C. Juan Luis Hernández López y Dr. Sergio Palafox Delgado, por las observaciones, correcciones y comentarios acertados que permitieron mejorar el presente trabajo.

A mis amigos: Padilla, Paco, Tomás, Yaretzi, Elide, Cali, Araceli, Juanqui, Alejandra, Juan Daniel, Daniela, Ricardo, Black, Milka, Javier, Brenda, Chona y todos los demás que me falta mencionar. También agradezco a Rubí y Adán por compartir momentos agradables al final de la carrera.

Por último quiero agradecer a todos mis profesores de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, por las clases que me impartieron y que por inmadu-

rez no aprecié, ahora quisiera tomar una clase más con ellos. Especialmente a los profesores: Maceda, Silvia, José del Carmen, Tello, Verónica, Raúl, Cuauhtémoc, Luz, Tenorio, Lomelí, Escalante, Armando, Octavio y Franco.

Índice general

Introducción

Al modelar ciertos fenómenos, por ejemplo, la desviación transversal de un cable, la deformación axial de una barra, la transferencia de calor, entre otros procesos físicos; se obtienen problemas de contorno en donde la ecuación diferencial es de tipo Sturm-Liouville:

$$-(\rho(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \;\; x \in [a,b],$$

con $[a,b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. En esta tesis se hace un estudio de la existencia y unicidad de la solución de problemas de contorno que involucran la ecuación diferencial de Sturm-Liouville y condiciones de contorno de tipo Dirichlet, es decir,

$$\begin{cases} -(\rho(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \;\; x \in [a,b]; \\ u(a) = 0, \;\; u(b) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

La existencia y unicidad de la solución del problema (1) depende de la clase de funciones a las que pertenecen ρ, q y f. Por ejemplo, se conoce muy bien que el problema (1) tiene solución única en $C^2([a,b])$ cuando $\rho, f, q \in C^2([a,b])$ y $|\rho(x)| > \alpha > 0$, para todo $x \in [a,b]$. Es natural pensar que en las aplicaciones físicas las funciones con las que se trabaja no son dos veces continuamente diferenciables, o en general de clase C^n, de esta forma, es conveniente tener un nuevo concepto de diferenciabilidad. Alrededor de 1950, el matemático ruso Serguéi Sobolev define un espacio de funciones que extiende el concepto de derivada clásica, los llamados espacios de Sobolev, teniendo como resultado el concepto de derivada débil.

Una función $u \in L^2([a,b])$ tiene derivada débil, si existe una función $g \in L^2([a,b])$ tal que

$$\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_c^1((a,b))$, espacio de funciones de clase $C^1([a,b])$ con soporte compacto en el intervalo (a,b). Usualmente este espacio se conoce como espacio de funciones prueba. La derivada débil de u se define como $\dot{u} = g$. De esta forma, cuando se emplea la derivada débil, el problema (1) es equivalente al problema variacional:

$$\int_a^b \rho \dot{u} \varphi' + \int_a^b q u \varphi = \int_a^b f \varphi, \tag{2}$$

para toda función $\varphi \in H_0^1$, espacio de funciones $\varphi \in L^2([a,b])$ tal que el soporte compacto de φ está contenido en (a,b) y φ tiene derivada débil. Para que la igualdad (2) tenga sentido se requiere que $q, f \in L^2([a,b])$, pues en este caso, la segunda y tercera integral de (2) existen. Por otra parte, para garantizar la existencia y unicidad del problema variacional (2), comunmente se utiliza el teorema de Lax-Milgram, dado que $L^2([a,b])$ es un espacio de Hilbert. Vea [3, Ejemplo 2, pág. 223]. Sin embargo, ¿qué sucede si $f \notin L^2([a,b])$? Existen pocos estudios sobre estos casos, el principal obstáculo es que al generalizar el espacio $L^2([a,b])$ deja de ser de Hilbert. Ahora bien, debido a que $L^2([a,b]) \subseteq L^1([a,b])$, en este trabajo de tesis, nos enfocamos en garantizar la existencia y unicidad del problema (1) para el caso en que $f, q \in L^1([a,b])$ y empleando la derivada débil adecuada de $L^1([a,b])$. Vea la definición 2.2.1. La metodología para hallar la existencia y unicidad del problema (1) se basa en las ideas de [5] y [7]. Al no ser $L^1([a,b])$ un espacio de Hilbert, se usa el teorema de la alternativa de Fredholm en lugar del teorema de Lax-Milgram.

La estructura del presente trabajo de tesis consta de tres capítulos. En el primer capítulo se muestran definiciones y resultados con respecto a la integral de Lebesgue, los espacios $L^p([a,b])$ con $1 \leq p < \infty$ y las funciones absolutamente continuas $AC([a,b])$. Algunos de los teoremas que se enuncian son: el teorema de la convergencia dominada, el teorema de Fubini, el teorema fundamental del cálculo, el teorema de integración por partes y el segundo teorema de valor medio. Pese a que el trabajo tiene como intención ser lo mas autocontenido posible, es recomendable tener como referencia a [1], [2] y [6].

En el segundo capítulo se introduce una alternativa del espacio de las funciones prueba y se muestran algunas propiedades que generan estas funciones en relación con las funciones Lebesgue integrables. A partir de este espacio alternativo se definen los espacios de Sobolev y se da el concepto de derivada débil. Se muestran algunas de sus propiedades, en particular, se enuncia un teorema fundamental del cálculo para la derivada débil y un teorema de integración por partes, los cuales son fundamentales en el capítulo 3.

En el último capítulo se muestra el teorema de existencia y unicidad del problema (1) cuando se emplea la derivada débil y $q, f \in L^1([a,b])$ y $\rho \in AC([a,b])$ con $|\rho(x)| \geq \alpha > 0$, para toda $x \in [a,b]$. Para esto se demuestra que el problema (1) es equivalente al problema (2) y este último se transforma a un problema operacional, del cual se encuentra su solución a partir del teorema de la alternativa de Fredholm.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se proporcionan definiciones y resultados necesarios para definir los espacios de Sobolev y el concepto de derivada débil. La relación entre el espacio de funciones Lebesgue integrables y las funciones absolutamente continuas juegan un papel importante para los resultados que se mostrarán más adelante.

1.1. Funciones Lebesgue integrables

Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales y por $\overline{\mathbb{R}}$ al conjunto de los reales extendidos. Estos conjuntos serán considerados con sus topologías usuales. Empecemos recordando algunos conceptos clásicos de la teoría de la medida:

1. La medida exterior de un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se define como

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in P} l(I_n) : P \subseteq \mathbb{N},\ A \subseteq \bigcup_{n \in P} I_n,\ I_n = (a_n, b_n) \right\},$$

   donde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ y $l(I_n) = b_n - a_n$.

2. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es Lebesgue medible, si para cada $S \subseteq \mathbb{R}$ se cumple

$$m^*(S) = m^*(S \cap A) + m^*(S \cap A^c).$$

3. La familia $\mathcal{M}$ formada por todos los subconjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}$.

4. La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (la σ-álgebra más pequeña que contiene a la topología de $\mathbb{R}$) está contenida en $\mathcal{M}$.

5. La función $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$, definida por $\mu(A) = m^*(A)$, es una medida, la cual se llama medida de Lebesgue. Esta medida es la que se usará en este trabajo.

6. La medida μ es una medida completa, es decir, si $\mu(A) = 0$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{M}$.

7. Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{M}_E = \{E \cap A : A \in \mathcal{M}\}$ es una σ-álgebra de E. Un elemento de $\mathcal{M}_E$ se llama Lebesgue medible en E. Nótese que $\mathcal{M}_E \subseteq \mathcal{M}$.

Definición 1.1.1. Sea $E \in \mathcal{M}$ y p una proposición abierta definida sobre E. Se dice que p se cumple casi dondequiera en E (c.d.q. en E), si existe $A \subseteq E$ con $\mu(A) = 0$ tal que $p(x)$ se cumple para toda $x \in E \backslash A$.

Definición 1.1.2. Sea $E \in \mathcal{M}$ y pongamos $Y = \mathbb{R}$ o $Y = \overline{\mathbb{R}}$. Una función $f : E \to Y$ se dice que es medible (o Lebesgue medible), si para todo abierto U de Y se cumple que $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}_E$.

Sea $E \in \mathcal{M}$. Si $g : E \to \mathbb{R}$ es una función continua c.d.q. en E, entonces g es medible. También, si $f : E \to \mathbb{R}$ es medible entonces las funciones f^+ y f^-, definidas por $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, son medibles.

Definición 1.1.3. Una función $\phi : E \to \mathbb{R}$ es simple, si se puede expresar como $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{E_i}$; donde $\alpha_i \neq \alpha_j$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$; $E_i \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \cdots, n$; y $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Es claro que ϕ es medible si y solo si $E_i \in \mathcal{M}_E$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

Definición 1.1.4. Si $\phi : E \to \mathbb{R}$ es una función simple, medible y no negativa, entonces la integral de Lebesgue de f se define como

$$\int_E f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i).$$

Definición 1.1.5. Si $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible y no negativa, entonces la integral de Lebesgue de f se define como

$$\int_E f = \sup_{\phi \in \Omega(f)} \int_E \phi,$$

donde $\Omega(f)$ es el conjunto de todas las funciones $\phi : E \to \mathbb{R}$ que son simples, medibles y satisfacen $0 \leq \phi(x) \leq f(x)$ para toda $x \in E$.

Teorema 1.1.6 (Lema de Fatou)**.** *Si (f_n) es una sucesión de funciones, definidas sobre E, medibles, no negativas y de valores en $\overline{\mathbb{R}}$, entonces*

$$\int_E \liminf f_n \leq \liminf \int_E f_n.$$

Corolario 1.1.7. *Si $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible y no negativa, entonces*

$$\int_E f = 0 \Leftrightarrow \ f = 0 \text{ } c.d.q. \text{ } en \text{ } E.$$

Definición 1.1.8. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces la integral de Lebesgue de f se define como

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-,$$

siempre y cuando

$$\int_E f^+ < \infty \text{ y } \int_E f^- < \infty. \tag{1.1}$$

La condición (1.1) se cumple si

$$\int_E |f| < \infty. \tag{1.2}$$

Una función $f : E \to \mathbb{R}$ que satisface (1.2) se dice que es Lebesgue integrable. El espacio de todas las funciones medibles $f : E \to \mathbb{R}$ que son Lebesgue integrables se denota por $L^1(E)$.

Teorema 1.1.9. *Si $f, g \in L^1(E)$ y α es una constante, entonces*

$$\int_E (\alpha f + g) = \alpha \int_E f + \int_E g.$$

Teorema 1.1.10. *Si $f \in L^1(E)$, entonces $|f| \in L^1(E)$ y*

$$\Big| \int_E f \Big| \leq \int_E |f|.$$

Teorema 1.1.11. *Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ medibles tales que $f = g$ c.d.q. en E. Si $f \in L^1(E)$, entonces $g \in L^1(E)$ y*

$$\int_E f = \int_E g.$$

Por el teorema 1.1.9 vemos que el conjunto $L^1(E)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Definamos $\|\cdot\|_1 : L^1(E) \to \mathbb{R}$ como

$$\|f\|_1 = \int_E |f|.$$

Luego $\|\cdot\|_1$ es una semi-norma sobre $L^1(E)$, es decir,

- $0 \leq \|f\|_1$.
- $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$.
- $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.
- Si $f = 0$, entonces $\|f\|_1 = 0$.

No se cumple la implicación: si $\|f\|_1 = 0$, entonces $f = 0$. Sin embargo, por el corolario 1.1.7, lo que tenemos es que, si $\|f\|_1 = 0$, entonces $f = 0$ c.d.q. en E. Por tanto, $L^1(E)$ es un espacio semi-normado. Una propiedad sobresaliente de este espacio, es que es un espacio completo, es decir, toda sucesión de Cauchy en $L^1(E)$ converge en $L^1(E)$. Vea teorema 1.1.17. La prueba de este resultado usa el lema de Fatou y un famoso resultado de Lebesgue: el teorema de la convergencia dominada.

Teorema 1.1.12 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(E)$. Si*

- *(f_n) converge c.d.q. en E hacia una función límite f, y*
- *existe una función no negativa $g \in L^1(E)$, tal que para todo $n \geq 1$,*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ c.d.q. en } E,$$

entonces la función límite $f \in L^1(E)$, *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| = 0,$$

más aún,

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Riesz generaliza los espacios $L^1(E)$ en la siguiente forma:

Definición 1.1.13. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. Los espacios $L^p(E)$ se definen como

$$L^p(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ medible } : \int_E |f|^p < \infty \right\}, \text{ si } 1 \leq p < \infty;$$

y

$$L^\infty(E) = \{ f : E \to \mathbb{R} \text{ medible } : \|f\|_\infty < \infty \},$$

donde

$$\|f\|_\infty = \inf \{ 0 \leq M \ : \ |f| \leq M \text{ c.d.q. en } E \}.$$

Para $1 \leq p < \infty$, defínase $\| \cdot \|_p : L^p(E) \to \mathbb{R}$ por

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La desigualdad de Minkowski (vea teorema 1.1.15) muestra que $L^p(E)$ es un espacio vectorial y además que la función $\| \cdot \|_p$ es una semi-norma sobre $L^p(E)$.

Teorema 1.1.14 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $1 \leq q \leq \infty$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in L^p(E)$ *y* $g \in L^q(E)$, *entonces* $fg \in L^1(E)$ *y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 1.1.15 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sea* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* $f, g \in L^p(E)$, *entonces* $f + g \in L^p(E)$ *y*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q.$$

Definición 1.1.16. Sean $f \in L^p(E)$ y (f_n) una sucesión en $L^p(E)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Decimos que (f_n) converge hacia f en $L^p(E)$ si $\|f_n - f\|_p \to 0$. Por otro lado, (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^p(E)$, si para cada $\epsilon > 0$ hay un natural N tal que para cualesquiera $n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_p \leq \epsilon$.

Teorema 1.1.17 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** *El espacio $L^p(E)$ con $1 \leq p < \infty$ es completo. Más precisamente, si (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^p(E)$, entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) que converge puntualmente c.d.q. en E a una función $f \in L^p(E)$, además (f_n) converge a f en $L^p(E)$.*

Teorema 1.1.18. *Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(E) \subseteq L^1(E)$.*

Demostración: Sea $f \in L^p(E)$ y definamos $g(x) = 1$, para toda $x \in E$. Luego $g \in L^q(E)$, donde q es un número tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La desigualdad de Hölder (teorema 1.1.14) garantiza que

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_E |f| &= \int_E |fg| \\ &= \|fg\|_1 \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Así, $f \in L^1(E)$. $\square$

A continuación, enunciaremos una serie de resultados de la integral de Lebesgue para funciones definidas sobre intervalos compactos.

Teorema 1.1.19. *Sea $c \in (a, b)$. Luego, $f \in L^1([a, b])$ si y solo si $f \in L^1([a, c])$ y $f \in L^1([c, b])$. En cualquier situación,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorema 1.1.20. *Si $f \in L^1([a, b])$ y $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es medible tal que $|\phi| \leq M$ c.d.q. en $[a, b]$, entonces $f\phi \in L^1([a, b])$.*

Demostración: Notemos que

$$\int_a^b |f\phi| = \int_a^b |f||\phi| \leq M \int_a^b |f| < \infty.$$

Por lo tanto, $f\phi \in L^1([a,b])$. $\square$

Teorema 1.1.21. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función medible. Si $f \in L^1([c,b])$ para cada $c \in (a,b]$, y*

$$\int_c^b |f| \leq M,$$

para toda $c \in (a,b]$, entonces $f \in L^1([a,b])$ y

$$\int_a^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f.$$

Demostración: Sea (x_n) una sucesión en $(a,b]$ tal que $x_n \to a$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n = f\chi_{[x_n,b]}$. Luego $f_n = f$ sobre $[x_n,b]$ y $f_n = 0$ sobre $[a,x_n)$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in (a,b]$. Por hipótesis y teorema 1.1.19, $f_n \in L^1([a,b])$. Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n|(x) \leq |f|(x),$$

para todo $x \in [a,b]$. Ahora por el lema de Fatou (teorema 1.1.6),

$$\begin{aligned}\int_a^b |f| &= \int_a^b \liminf |f_n|,\\ &\leq \liminf \int_a^b |f_n|.\end{aligned}$$

Pero por hipótesis,

$$\int_a^b |f_n| = \int_{x_n}^b |f| \leq M,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\int_a^b |f| \leq M < \infty,$$

es decir $f \in L^1([a,b])$. Por el teorema de la convergencia dominada (teorema 1.1.12),

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{x_n}^b f.$$

Siendo (x_n) una sucesión arbitraria que converge a a se tiene lo deseado. $\square$

Teorema 1.1.22. *(Teorema de Fubini, [1, Teorema 10.40]) Sea k una función continua sobre $[a, b] \times [c, d]$. Si $f \in L^1([a, b])$ y $g \in L^1([c, d])$, entonces:*

- *Para cada $y \in [c, d]$, la integral $\int_a^b f(x)k(x, y)dx$ existe, y la función F definida en $[c, d]$, por medio de la ecuación*

  $$F(y) = \int_a^b f(x)k(x, y)dx,$$

  es continua en $[c, d]$.

- *Para cada $x \in [a, b]$, la integral $\int_c^d g(y)k(x, y)dy$ existe, y la función G definida en $[a, b]$, por medio de la ecuación*

  $$G(x) = \int_c^d g(y)k(x, y)dy,$$

  es continua en $[a, b]$.

- *Las dos integrales $\int_c^d g(y)F(y)dy$ y $\int_a^b f(x)G(x)dx$ existen y son iguales. Esto es*

  $$\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)k(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x)g(y)k(x, y)dxdy.$$

1.2. Aplicación al cálculo

Para una función $f \in L^1([a, b])$ y un punto $c \in [a, b]$ se define su integral indefinida como la función $F_c : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_c(x) = \int_c^x f.$$

La función F_c pertenece a la clase de funciones que definimos a continuación.

Definición 1.2.1. Una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a, b]$, o $F \in AC([a, b])$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que para cualquier colección finita $\{(x_k, y_k)\}$ de subintervalos ajenos de $[a, b]$, se cumple que

$$\text{si } \sum_k |y_k - x_k| < \delta_\epsilon, \text{ entonces } \sum_k |F(y_k) - F(x_k)| < \epsilon.$$

Observación 1.2.2. $AC([a,b]) \subseteq C([a,b])$.

Es claro que si $F, G \in AC([a,b])$ entonces $\alpha F + \beta G \in AC([a,b])$ para cualesquiera α, β constantes. Los siguientes dos resultados nos muestran criterios para ver cuándo el producto y la división de dos funciones en $AC([a,b])$ está en el mismo espacio.

Teorema 1.2.3. *Si $F \in AC([a,b])$ es tal que $|F(x)| \geq \alpha$, para todo $x \in [a,b]$ y algún $\alpha > 0$, entonces $\frac{1}{F} \in AC([a,b])$.*

Demostración: Supongamos que $F \in AC([a,b])$, así, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que para cualquier colección finita $\{(x_k, y_k)\}$ de subintervalos ajenos de $[a,b]$ se cumple:

$$\text{si } \sum_k |y_k - x_k| < \delta_\epsilon, \text{ entonces } \sum_k |F(y_k) - F(x_k)| < \epsilon.$$

Dado que $|F(x)| \geq \alpha$ y $\alpha > 0$, se obtiene que

$$\frac{1}{|F(x)|} \leq \frac{1}{\alpha}, \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_k \left| \frac{1}{F}(y_k) - \frac{1}{F}(x_k) \right| &= \sum_k \left| \frac{-F(x_k) + F(y_k)}{F(y_k)F(x_k)} \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_k |F(y_k) - F(x_k)| \qquad (1.3) \\ &\leq \frac{\epsilon}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{F} \in AC([a,b])$. □

Teorema 1.2.4. *Si $F, G \in AC([a,b])$, entonces $FG \in AC([a,b])$.*

Demostración: Dado que $F, G \in AC([a,b])$, para $\epsilon > 0$, existen $\delta_F, \delta_G > 0$, tales que para cualquier colección finita $\{(x_k, y_k)\}$ de subintervalos ajenos de $[a,b]$ se tiene que:

$$\text{si } \sum_k |y_k - x_k| < \delta_F, \text{ entonces } \sum_k |F(y_k) - F(x_k)| < \epsilon \qquad (1.4)$$

y

$$\text{si } \sum_k |y_k - x_k| < \delta_G, \text{ entonces } \sum_k |G(y_k) - G(x_k)| < \epsilon. \tag{1.5}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_F, \delta_G\}$ y supongamos que $\sum_k |y_k - x_k| < \delta$. Notemos que tanto F como G son acotadas, sean M_1 y M_2 sus cotas, respectivamente, luego

$$\begin{aligned}
\sum_k |FG(y_k) - FG(x_k)| = \\
&= \sum_k |F(y_k)G(y_k) - F(x_k)G(x_k)| \\
&= \sum_k |F(y_k)G(y_k) - F(x_k)G(y_k) + F(x_k)G(y_k) - F(x_k)G(x_k)| \\
&= \sum_k |(F(y_k) - F(x_k))G(y_k) + (G(y_k) - G(x_k))F(x_k)| \\
&\leq \sum_k |(F(y_k) - F(x_k))G(y_k)| + \sum_k |(G(y_k) - G(x_k))F(x_k)| \\
&= \sum_k |F(y_k) - F(x_k)||G(y_k)| + \sum_k |G(y_k) - G(x_k)||F(x_k)| \\
&\leq \sum_k |F(y_k) - F(x_k)|M_2 + \sum_k |G(y_k) - G(x_k)|M_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\sum_k |FG(y_k) - FG(x_k)| < \epsilon.$$

En consecuencia, FG es absolutamente continua en $[a, b]$. □

A continuación enunciaremos un teorema indispensable en esta tesis, el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue. Una prueba se puede consultar en [8, Teorema 1.11].

Teorema 1.2.5 (Teorema fundamental del cálculo)**.** *Sean $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones y $c \in [a, b]$.*

1. *Si $f \in L^1([a, b])$ y $F(x) = \int_c^x f$, para todo $x \in [a, b]$, entonces $F \in AC([a, b])$ y $F' = f$ c.d.q. en $[a, b]$. En particular, si f es continua en $x \in [a, b]$, entonces $F'(x) = f(x)$.*

2. $F \in AC([a,b])$ *si y solo si* F' *existe c.d.q. en* $[a,b]$ *y* $\int_c^x F' = F(x) - F(c)$*, para todo* $x \in [a,b]$.

Teorema 1.2.6. *(Integración por partes) Si* $f, g \in AC([a,b])$*, entonces*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

Demostración: Como $f, g \in AC([a,b])$, se tiene que f', g' existen c.d.q. en $[a,b]$ y $f', g' \in L^1([a,b])$. También $fg \in AC([a,b])$, luego por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b (fg)' = fg\Big|_a^b. \tag{1.6}$$

Por otro lado, dado que $(fg)' = f'g + fg'$ c.d.q. en $[a,b]$ se sigue que

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'. \tag{1.7}$$

Por (1.6) y por (1.7), se concluye que

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

□

Teorema 1.2.7. *(Segundo teorema del valor medio, [9, Teorema 2]) Si* $f \in L^1([a,b])$ *y* $g \in C^2([a,b])$ *es una función monótona, entonces existe* $\xi \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f.$$

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad que g es creciente. Sea $F(x) = \int_a^x f$. Luego por el teorema 1.2.5, $F \in AC([a,b])$. Note también que al tenerse la igualdad $g(x) = \int_a^x g' + g(a)$, la función $g \in AC([a,b])$. Así por el teorema de integración por partes (teorema 1.2.6),

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg\Big|_a^b - \int_a^b Fg'. \tag{1.8}$$

Observe que la última integral en (1.8) es de Riemann. De esta forma, por [1, Teorema 7.8],

$$\int_a^b F dg = \int_a^b F g',$$

y por teorema [1, Teorema 7.30], existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b F dg = F(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Así

$$\begin{aligned} \int_a^b fg &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)(g(b) - g(a)) \\ &= g(a)(F(\xi) - F(a)) + g(b)(F(b) - F(\xi)) \\ &= g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f. \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

En este capítulo se introducen los espacios de Sobolev para funciones de valores reales definidos sobre un intervalo compacto, a través de una modificación del espacio de las funciones prueba. Es de destacar que esta modificación es un resultado original de esta tesis. En estos espacios se introduce el concepto de derivada débil, finalmente se demuestran algunos resultados relevantes en la investigación, tales como un teorema de integración por partes y un teorema fundamental del cálculo para la derivada débil. Los teoremas del presente capítulo serán utilizados en las demostraciones de diversos resultados del capítulo 3.

2.1. El espacio de las funciones prueba

De aquí en adelante las definiciones y resultados se presentarán, sin pérdida de generalidad, sobre el intervalo $[0,1]$, esto con la finalidad de simplificar cálculos, aunque se pueden extender a cualquier intervalo compacto.

Definición 2.1.1. Sea $C_T^1([0,1])$ el conjunto de funciones $\varphi \in C([0,1])$ tal que existe una partición $\{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1}^n$ de $[0,1]$, de manera que $\varphi \in C^1((x_{i-1},x_i))$ y los límites laterales existen, es decir, $\varphi'(x_0+)$, $\varphi'(x_1-)$, $\varphi'(x_1+)$, $\ldots$, $\varphi'(x_{n-1}-)$, $\varphi'(x_{n-1}+)$, $\varphi'(x_n-)$ existen.

A partir del conjunto $C_T^1([0,1])$ se define el espacio de funciones prueba.

Definición 2.1.2.

$$V = \{\varphi \in C_T^1([0,1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Observación 2.1.3. *Las siguientes propiedades son válidas:*

- *Si* $\varphi \in V$*, entonces* $\varphi' \in L^1([0,1])$.
- *Si* $\varphi \in V$*, entonces* $\varphi \in AC([0,1])$.
- *Si* $\varphi \in V$*, entonces* $\varphi \in C([0,1])$.
- *Si* $\varphi \in V$*, entonces* $\int_0^1 \varphi' = 0$.

El siguiente resultado es de gran importancia en el desarrollo de la investigación de esta tesis.

Lema 2.1.4. *Sean* $f, g \in L^1([0,1])$ *con* g *continua por la derecha en* $x = 0$. *Luego*

$$\int_0^1 [f\varphi + g\varphi'] = 0,$$

para toda $\varphi \in V$ *si y solo si*

$$g(x) = \int_0^x f + g(0),$$

para casi todo $x \in [0,1]$.

Demostración: Supongamos que

$$\int_0^1 [f\varphi + g\varphi'] = 0, \tag{2.1}$$

para toda $\varphi \in V$, y definamos la función $G(x) := \int_0^x g$, luego por el teorema fundamental del cálculo 1.2.5, G es diferenciable excepto en un subconjunto K de $[0,1]$ de medida cero y $G' = g$ sobre $[0,1]\backslash K$. Sea $\hat{x} \in (0,1)\backslash K$, elijamos ϵ tal que $0 < \epsilon < \frac{\hat{x}}{2}$ y definamos la siguiente función

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\epsilon}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \epsilon; \\ 1, & \text{si} \quad \epsilon \leq x \leq \hat{x} - \epsilon; \\ \frac{\hat{x}-x}{\epsilon}, & \text{si} \quad \hat{x} - \epsilon \leq x \leq \hat{x}; \\ 0, & \text{si} \quad \hat{x} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La derivada de φ es

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \epsilon; \\ 0, & \text{si} \quad \epsilon \leq x \leq \hat{x} - \epsilon; \\ -\frac{1}{\epsilon}, & \text{si} \quad \hat{x} - \epsilon \leq x \leq \hat{x}; \\ 0, & \text{si} \quad \hat{x} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\varphi \in V$. Luego por (2.1) se obtiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 f\varphi + \int_0^1 g\varphi' \\
&= \int_0^{\epsilon} f\varphi + \int_{\epsilon}^{\hat{x}-\epsilon} f\varphi + \int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} f\varphi + \int_{\hat{x}}^1 f\varphi + \int_0^{\epsilon} g\varphi' + \int_{\epsilon}^{\hat{x}-\epsilon} g\varphi' \\
&\quad + \int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} g\varphi' + \int_{\hat{x}}^1 g\varphi' \qquad (2.2) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} f(x)xdx + \int_{\epsilon}^{\hat{x}-\epsilon} f + \frac{1}{\epsilon}\int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} f(x)(\hat{x}-x)dx \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} g - \frac{1}{\epsilon}\int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} g.
\end{aligned}
$$

Dado que $f \in L^1([0,1])$ y la función I definida por $I(x) = x$ es monótona, se tiene por el teorema 1.2.7 que existe $\xi \in [0,\epsilon]$ tal que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\epsilon} f(x)xdx &= I(0)\int_0^{\xi} f(x)dx + I(\epsilon)\int_{\xi}^{\epsilon} f(x)dx \\
&= 0\int_0^{\xi} f(x)dx + \epsilon\int_{\xi}^{\epsilon} f(x)dx \\
&= \epsilon\int_{\xi}^{\epsilon} f(x)dx,
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} f(x)xdx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi}^{\epsilon} f(x)dx \\
&= \int_0^0 f(x)dx \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De forma análoga,

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} f(x)(\hat{x}-x)dx = 0.
$$

Por otro lado, g es continua por la derecha en $x = 0$, así por el teorema 1.2.5,

$G'(0)$ existe, de aquí que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} g &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}G(\epsilon)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{G(\epsilon)-G(0)}{\epsilon-0}\\
&= G'(0)\\
&= g(0).
\end{aligned}$$

Con todo lo anterior y de (2.2), obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\hat{x}-\epsilon} f + g(0) - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} g\\
&= \int_0^{\hat{x}} f + g(0) - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} g.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Notemos que $\displaystyle\int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} g = G(\hat{x})-G(\hat{x}-\epsilon)$. Además, por la definición de derivada,

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{\hat{x}-\epsilon}^{\hat{x}} g &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{G(\hat{x})-G(\hat{x}-\epsilon)}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{G(\hat{x}-\epsilon)-G(\hat{x})}{-\epsilon}\\
&= G'(\hat{x})\\
&= g(\hat{x}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la igualdad (2.3), concluimos que

$$g(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} f + g(0).$$

Para la recíproca, supongamos que

$$g(x) = \int_0^{x} f(s)ds + g(0),$$

para casi todo $x \in [0,1]$. Definamos $H(x) = \int_0^x f(s)ds + g(0)$, luego $H = g$ c.d.q. en $[0,1]$. También, dado que $f \in L^1([0,1])$, se tiene que $H \in AC([0,1])$

y $H' = f$ c.d.q. en $[0,1]$, además $\varphi \in V$, de modo que $\varphi \in AC([0,1])$. Aplicando el teorema 1.2.6 obtenemos que

$$\int_0^1 H'\varphi = H\varphi|_0^1 - \int_0^1 H\varphi'.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f\varphi + g\varphi'] &= \int_0^1 [H'\varphi + H\varphi'] \\ &= \int_0^1 H'\varphi + \int_0^1 H\varphi' \\ &= H(1)\varphi(1) - H(0)\varphi(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.1.5. *Sea* $f \in L^1([0,1])$*. Si*

$$\int_0^1 f\varphi = 0,$$

para toda $\varphi \in V$*, entonces* $f = 0$ *c.d.q. en* $[0,1]$.

Demostración: Tomando a $g = 0$ en el lema anterior, se obtiene que

$$\int_0^x f = 0,$$

para casi todo $x \in [0,1]$. Definamos $F(x) = \int_0^x f$, luego F es continua sobre $[0,1]$ y $F = 0$ c.d.q. en $[0,1]$. Ahora supongamos que existe $x \in [0,1]$ tal que $F(x) \neq 0$. Dado que F es continua, para $\epsilon = |F(x)|$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| < |F(x)|, \text{ para todo } y \in (x-\delta, x+\delta) \cap [0,1].$$

Notemos que si $F(y) = 0$, entonces $|F(x)| < |F(x)|$, lo cual es una contradicción, de aquí que $F(y) \neq 0$, para todo $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap [0,1]$. Observemos que $(x-\delta, x+\delta) \cap [0,1]$ es un intervalo contenido en $[0,1]$ y $\mu((x-\delta, x+\delta) \cap [0,1]) > \delta > 0$, para todo $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap [0,1]$. Por lo tanto, se tiene que $F \neq 0$ en un conjunto de medida no nula, lo cual es una contradicción. Así

$$F(x) = 0, \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Por otro lado, aplicando el teorema 1.2.5 , obtenemos que $F' = f$ c.d.q. en $[0,1]$, es decir, existe $K \subset [0,1]$, con $\mu(K) = 0$, tal que para cada $x \in [0,1]\backslash K$, $F'(x) = f(x)$. Sea $x \in [0,1] \setminus K$, luego

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia $f = 0$ c.d.q. en $[0,1]$. □

Corolario 2.1.6. *Sea $f \in L^1([0,1])$. Si*

$$\int_0^1 f\varphi' = 0,$$

para toda $\varphi \in V$, entonces existe una constante C tal que $f = C$ c.d.q. en $[0,1]$.

Demostración: Supongamos que

$$\int_0^1 f\varphi' = 0, \tag{2.4}$$

para toda $\varphi \in V$, y definamos la siguiente función

$$\psi(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2}; \\ -4x + 4, & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Luego, la derivada de ψ es

$$\psi'(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2}; \\ -4, & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Por tanto, $\psi \in V$. Sea $\varphi \in V$ y definamos

$$z(x) = \int_0^x \left[\varphi - \left(\int_0^1 \varphi \right) \psi \right].$$

Verifiquemos que $z \in V$. Como $\varphi, \psi \in C([0,1])$, entonces $\varphi - \left(\int_0^1 \varphi\right)\psi \in C([0,1])$, así por el teorema 1.2.5 , $z'(x) = \varphi(x) - \left(\int_0^1 \varphi\right)\psi(x)$, para todo $x \in [0,1]$. Por lo tanto, z es derivable en $[0,1]$, en consecuencia $z \in C_T^1([0,1])$. Además, $z(0) = 0$ y

$$\begin{aligned}
z(1) &= \int_0^1 \left[\varphi - \left(\int_0^1 \varphi\right)\psi\right] \\
&= \int_0^1 \varphi - \int_0^1 \varphi \int_0^1 \psi \\
&= \int_0^1 \varphi - \int_0^1 \varphi \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 4t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4t+4)\, dt\right) \\
&= \int_0^1 \varphi - \int_0^1 \varphi \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de aquí que $z \in V$.
Por otro lado, notemos que $f\psi \in L^1([0,1])$, luego por (2.4) y por el teorema de Fubini 1.1.22, se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 f z' \\
&= \int_0^1 f(x)\left[\varphi(x) - \left(\int_0^1 \varphi(t)dt\right)\psi(x)\right] dx \\
&= \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx - \int_0^1 \int_0^1 f(x)\varphi(t)\psi(x)dtdx \\
&= \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt - \int_0^1 \int_0^1 f(x)\varphi(t)\psi(x)dxdt \\
&= \int_0^1 \left(f(t) - \int_0^1 f(x)\psi(x)dx\right)\varphi(t)dt,
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in V$. Así, por el corolario anterior, $f = \int_0^1 f\psi$ c.d.q. en $[0,1]$. $\square$

Teorema 2.1.7. *Sean $g \in L^1([0,1])$ y $y_0 \in [0,1]$ un valor fijo, definamos*

$$v(t) = \int_{y_0}^t g(x)dx, \;\; t \in [0,1].$$

Luego, $v \in C([0,1])$ *y*

$$\int_0^1 v\varphi' = -\int_0^1 g\varphi,$$

para toda $\varphi \in V$*.*

Demostración: Dado que $g \in L^1([0,1])$, se sigue del teorema fundamental del cálculo que $v \in C([0,1])$. Para demostrar la siguiente parte del teorema, definamos las funciones $K1(x,t)$ y $K2(x,t)$ de la siguiente manera:

$$K1(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,t); \\ 1, & \text{si } x \in [t, y_0]; \end{cases}$$

y

$$K2(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [y_0,t]; \\ 0, & \text{si } x \in [t, 1]. \end{cases}$$

Ahora, definamos las siguientes sucesiones de funciones:

$$K1_n(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, t-\frac{1}{n}); \\ n(x-t+\frac{1}{n}), & \text{si } x \in [t-\frac{1}{n}, t); \\ 1, & \text{si } x \in [t, y_0]; \end{cases}$$

y

$$K2_n(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [y_0, t-\frac{1}{n}); \\ n(x-t+\frac{1}{n}), & \text{si } x \in [t-\frac{1}{n}, t); \\ 0, & \text{si } x \in [t, 1]. \end{cases}$$

Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} K1_n(x,t) = K1(x,t) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} K2_n(x,t) = K2(x,t).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^1 v\varphi' &= \int_0^1 \int_{y_0}^t g(x)\varphi'(t)dxdt \\ &= \int_0^{y_0} \int_{y_0}^t g(x)\varphi'(t)dxdt + \int_{y_0}^1 \int_{y_0}^t g(x)\varphi'(t)dxdt \\ &= -\int_0^{y_0} \int_t^{y_0} g(x)\varphi'(t)dxdt + \int_{y_0}^1 \int_{y_0}^t g(x)\varphi'(t)dxdt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^{y_0}\int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)K1(x,t)dxdt + \int_{y_0}^1\int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t)K2(x,t)dxdt \\
&= -\int_0^{y_0}\int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)\lim_{n\to\infty} K1_n(x,t)dxdt \\
&\quad + \int_{y_0}^1\int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t)\lim_{n\to\infty} K2_n(x,t)dxdt.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 v\varphi' = &-\int_0^{y_0}\int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)\lim_{n\to\infty} K1_n(x,t)dxdt \\
&+ \int_{y_0}^1\int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t)\lim_{n\to\infty} K2_n(x,t)dxdt.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

A continuación aplicaremos el teorema de la convergencia dominada a la igualdad anterior, para ello, tomemos a $f_n(x) = g(x)K1_n(x,t)$, luego $f_n(x) \to g(x)K1(x,t)$. Notemos que $f_n(x)$ es una sucesión de funciones Lebesgue integrable en $[0, y_0]$, ya que $g \in L^1([0, y_0])$ y $K1_n(x,t)$ es continua y acotada para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado

$$
\begin{aligned}
|f_n(x)| &= |g(x)K1_n(x,t)| \\
&= |g(x)||K1_n(x,t)| \\
&\leq |g(x)|.
\end{aligned}
$$

Como $g \in L^1([0, y_0])$, se tiene $|g| \in L^1([0, y_0])$ y además $|g|$ es no negativa, luego por el teorema de la convergencia dominada,

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{y_0}&\int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)\lim_{n\to\infty} K1_n(x,t)dxdt \\
&= -\int_0^{y_0}\varphi'(t)\int_0^{y_0} g(x)\lim_{n\to\infty} K1_n(x,t)dxdt \\
&= -\int_0^{y_0}\varphi'(t)\int_0^{y_0}\lim_{n\to\infty} g(x)K1_n(x,t)dxdt \\
&= -\int_0^{y_0}\varphi'(t)\lim_{n\to\infty}\int_0^{y_0} g(x)K1_n(x,t)dxdt \\
&= -\int_0^{y_0}\lim_{n\to\infty}\int_0^{y_0} \varphi'(t)g(x)K1_n(x,t)dxdt.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Sea $s_n = \int_0^{y_0} \varphi'(t)g(x)K1_n(x,t)dx$. Por el teorema 1.2.5, s_n es una sucesión de funciones Lebesgue integrable en $[0, y_0]$ y además, por (2.6), tenemos que $s_n \to \varphi'(t) \int_0^{y_0} g(x)K1(x,t)dx$. Más aún,

$$\begin{aligned}
|s_n(t)| &= \Big| \int_0^{y_0} \varphi'(t)g(x)K1_n(x,t)dx \Big| \\
&\leq |\varphi'(t)| \int_0^{y_0} |g(x)|dx \\
&\leq |\varphi'(t)| \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Como $\varphi \in V$, vemos $\varphi' \in L^1([0, y_0])$, en consecuencia $|\varphi'| \in L^1([0, y_0])$, por lo tanto, $|\varphi'(t)| \|g\|_1 \in L^1([0, y_0])$ y es no negativa, así, por el teorema de la convergencia dominada se sigue que

$$\begin{aligned}
-\int_0^{y_0} \lim_{n\to\infty} s_n(t)dt &= -\lim_{n\to\infty} \int_0^{y_0} s_n(t)dt \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_0^{y_0} \int_0^{y_0} \varphi'(t)g(x)K1_n(x,t)dxdt.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

De las igualdades (2.6) y (2.7), se obtiene que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{y_0} \int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t) \lim_{n\to\infty} K1_n(x,t)dxdt \\
&\qquad = -\lim_{n\to\infty} \int_0^{y_0} \int_0^{y_0} \varphi'(t)g(x)K1_n(x,t)dxdt.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

De manera análoga se llega a que

$$\int_{y_0}^1 \int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t) \lim_{n\to\infty} K2_n(x,t)dxdt = \lim_{n\to\infty} \int_{y_0}^1 \int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t)K2_n(x,t)dxdt. \tag{2.9}$$

De (2.5), (2.8), (2.9) y por el teorema de Fubini, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v\varphi' = &-\int_0^{y_0}\int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)\lim_{n\to\infty} K1_n(x,t)dxdt \\
&+\int_{y_0}^1\int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t)\lim_{n\to\infty} K2_n(x,t)dxdt \\
&= -\lim_{n\to\infty}\int_0^{y_0}\int_0^{y_0} \varphi'(t)g(x)K1_n(x,t)dxdt \\
&+\lim_{n\to\infty}\int_{y_0}^1\int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t)K2_n(x,t)dxdt \\
&= -\lim_{n\to\infty}\int_0^{y_0}\int_0^{y_0} \varphi'(t)g(x)K1_n(x,t)dtdx \\
&+\lim_{n\to\infty}\int_{y_0}^1\int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t)K2_n(x,t)dtdx.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Después de utilizar el teorema de Fubini, nos interesa introducir nuevamente el límite dentro de la doble integral, para eso observemos que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{y_0}\int_0^{y_0}\lim_{n\to\infty} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dtdx \\
&\qquad = -\int_0^{y_0} g(x)\int_0^{y_0}\lim_{n\to\infty}\varphi'(t)K1_n(x,t)dtdx.
\end{aligned}$$

Ahora, definamos $h_n = \varphi'(t)K1_n(x,t)$. Dado que $\varphi' \in L^1([0,1])$ y $K1_n(x,t) \leq 1$, se sigue que h_n es una sucesión de funciones Lebesgue integrable en $[0, y_0]$. Además $h_n \to \varphi'(t)K1(x,t)$ y

$$\begin{aligned}
|h_n(t)| &= |\varphi'(t)K1_n(x,t)| \\
&\leq |\varphi'(t)|.
\end{aligned}$$

Como $\varphi' \in L^1([0, y_0])$, se tiene que $|\varphi'| \in L^1([0, y_0])$ y es no negativa. Por el teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{y_0}\int_0^{y_0}\lim_{n\to\infty} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dtdx = \\
&\qquad -\int_0^{y_0}\lim_{n\to\infty}\int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dtdx.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora bien, definamos $t_n(x) = \int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dt$. Luego, por el teorema fundamental del cálculo t_n es una sucesión de funciones Lebesgue integrable sobre $[0, y_0]$, y además

$$
\begin{aligned}
|t_n(x)| &= |\int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dt| \\
&\leq |g(x)| \int_0^{y_0} |\varphi'(t)|dt \\
&\leq |g(x)| \|\varphi'\|_1.
\end{aligned}
$$

Dado que $g \in L^1([0, y_0])$, entonces $|g| \in L^1([0, y_0])$, luego $\|\varphi'\|_1 |g(x)| \in L^1([0, y_0])$ y es no negativa, nuevamente por el teorema de la convergencia dominada se obtiene que

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{y_0} \lim_{n\to\infty} t_n(x)dx &= -\lim_{n\to\infty} \int_0^{y_0} t_n(x)dx \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_0^{y_0} \int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dtdx.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

De las igualdades (2.11) y (2.12) se concluye que

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{n\to\infty} \int_0^{y_0} \int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dtdx = \\
&\qquad -\int_0^{y_0} \int_0^{y_0} \lim_{n\to\infty} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dtdx.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

De manera análoga se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{y_0}^{1} \int_{y_0}^{1} g(x)\varphi'(t)K2_n(x,t)dtdx = \\
&\qquad \int_{y_0}^{1} \int_{y_0}^{1} \lim_{n\to\infty} g(x)\varphi'(t)K2_n(x,t)dtdx.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Por lo tanto, de (2.10) (2.13) y (2.14) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 v\varphi' &= -\int_0^{y_0}\int_0^{y_0} \lim_{n\to\infty} g(x)\varphi'(t)K1_n(x,t)dtdx \\
&\quad + \int_{y_0}^1\int_{y_0}^1 \lim_{n\to\infty} g(x)\varphi'(t)K2_n(x,t)dtdx \\
&= -\int_0^{y_0}\int_0^{y_0} g(x)\varphi'(t)K1(x,t)dtdx \\
&\quad + \int_{y_0}^1\int_{y_0}^1 g(x)\varphi'(t)K2(x,t)dtdx \\
&= -\int_0^{y_0}\int_0^{x} g(x)\varphi'(t)dtdx + \int_{y_0}^1\int_{x}^1 g(x)\varphi'(t)dtdx \\
&= -\int_0^{y_0} g(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx + \int_{y_0}^1 g(x)(\varphi(1)-\varphi(x))dx \\
&= -\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}
$$

□

2.2. Una definición alternativa de los espacios de Sobolev

A continuación introducimos los espacios de Sobolev cambiando el espacio de funciones prueba clásico por el espacio V. Esta definición alternativa es una propuesta original de este trabajo. Asimismo, se mostrarán algunas de sus propiedades básicas.

Definición 2.2.1. Consideremos $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}$ se define como

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p([0,1]) : \exists g \in L^p([0,1]) \text{ tal que } \int_0^1 u\varphi' = -\int_0^1 g\varphi,\ \forall \varphi \in V \right\}.$$

Para $u \in W^{1,p}$, denotamos a g por $\dot{u}$ y se le denomina derivada débil de u.

Teorema 2.2.2. *Si $1 \leq p < \infty$, entonces $W^{1,p} \subseteq W^{1,1}$.*

Demostración: Sea $u \in W^{1,p}$, luego $u \in L^p([0,1])$ y existe $g \in L^p([0,1])$ tal que

$$\int_0^1 u\varphi' = -\int_0^1 g\varphi, \text{ para toda } \varphi \in V.$$

Por el teorema 1.1.18, se tiene que $u \in L^1([0,1])$ y $g \in L^1([0,1])$, por lo tanto $u \in W^{1,1}$. □

Teorema 2.2.3. *Sea $u \in W^{1,p}$. La derivada débil $\dot{u}$ de u está bien definida.*

Demostración: Supongamos que existe $v \neq \dot{u}$, con $v \in L^p([0,1])$, tal que

$$\int_0^1 u\varphi' = -\int_0^1 v\varphi, \text{ para cada } \varphi \in V,$$

en consecuencia

$$-\int_0^1 v\varphi = -\int_0^1 \dot{u}\varphi,$$

así

$$-\int_0^1 (v - \dot{u})\varphi = 0.$$

Como $u \in W^{1,p}$, entonces por el teorema previo, $u \in W^{1,1}$. Aplicando el corolario 2.1.5 se tiene que $v - \dot{u} = 0$ c.d.q. en $[0,1]$. Por lo tanto $v = \dot{u}$ c.d.q. en $[0,1]$. □

Proposición 2.2.4. *Si $f, g \in L^1([0,1])$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ son tales que f y g tienen derivada débil $\dot{f}$ y $\dot{g}$ respectivamente, entonces*

$$(\alpha f + g)^{\cdot} = \alpha \dot{f} + \dot{g}.$$

Demostración: Por hipótesis, existen $\dot{f}, \dot{g} \in L^1([0,1])$ tales que

$$\int_0^1 f\varphi' = -\int_0^1 \dot{f}\varphi$$

y

$$\int_0^1 g\varphi' = -\int_0^1 \dot{g}\varphi,$$

para toda $\varphi \in V$. Luego, por la linealidad de la integral de Lebesgue y lo anterior se obtiene que

$$\int_0^1 (\alpha f + g)\varphi' = -\int_0^1 (\alpha \dot{f} + \dot{g})\varphi,$$

para toda $\varphi \in V$. Por lo tanto, $(\alpha f + g)^{\cdot} = \alpha \dot{f} + \dot{g}$. □

En el siguiente ejemplo se muestra una función que pertenece a $W^{1,1}$ y el proceso para hallar su derivada débil.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos la función $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = |x|$. Es claro que $u \in L^1([-1,1])$. Para hallar $\dot{u}$, tomamos $\varphi \in V$ y usamos integración por partes de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |x|\varphi' &= \int_{-1}^{0} (-x)\varphi' + \int_{0}^{1} x\varphi' \\
&= -\int_{-1}^{0} x\varphi' + \int_{0}^{1} x\varphi' \\
&= -x\varphi|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi + x\varphi|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi \\
&= \int_{-1}^{0} \varphi - \int_{0}^{1} \varphi \\
&= -\left(\int_{-1}^{0} (-1)\varphi + \int_{0}^{1} (1)\varphi \right) \\
&= -\int_{-1}^{1} g\varphi,
\end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 < x < 0; \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

La función g en el punto 0 puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, esta es una ventaja de la derivada débil en comparación de la derivada clásica. Por lo tanto, $\dot{u} = g$ y es claro que $g \in L^1([-1,1])$.

Teorema 2.2.6. *Si $u = u_1$ c.d.q. en $[0,1]$ y $u_1 \in AC([0,1])$, entonces $u \in W^{1,1}$ y $\dot{u} = u_1'$.*

Demostración: Sean u, u_1 funciones tales que $u_1 \in AC([0,1])$ y $u = u_1$ c.d.q. en $[0,1]$. Luego por el teorema fundamental del cálculo 1.2.5, existe u_1' c.d.q. en $[0,1]$. Por otro lado, tomando $\varphi \in V$, obtenemos que $\varphi \in AC([0,1])$ e integrando por partes hallamos que

$$\int_{0}^{1} u_1'\varphi = u_1\varphi\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} u_1\varphi' = -\int_{0}^{1} u_1\varphi',$$

para toda $\varphi \in V$. En consecuencia

$$\int_0^1 u\varphi' = \int_0^1 u_1\varphi' = -\int_0^1 u_1'\varphi,$$

para toda $\varphi \in V$. Por lo tanto, $u \in W^{1,1}$ y $\dot{u} = u_1'$. $\square$

Observación 2.2.7. *Del teorema anterior, se tiene que toda función absolutamente continua en* $[0,1]$ *está en* $W^{1,1}$*, es decir, tiene derivada débil. Más aún, la derivada débil coincide con la derivada clásica.*

Teorema 2.2.8. *Si* $u \in W^{1,1}$*, entonces existe una función* $\tilde{u} \in C([0,1])$ *tal que*

$$u = \tilde{u} \ \textit{c.d.q. en } [0,1]$$

y

$$\tilde{u}(d) - \tilde{u}(c) = \int_c^d \dot{u}, \ \textit{para todo } c, d \in [0,1].$$

Demostración: Sea $\hat{u}(x) = \int_0^x \dot{u}$. Dado que $u \in W^{1,1}$, se tiene que $u \in L^1([0,1])$, del teorema 2.1.7 se sigue que $\hat{u} \in C([0,1])$ y

$$\int_0^1 \hat{u}\varphi' = -\int_0^1 \dot{u}\varphi,$$

para toda $\varphi \in V$.
Por otra parte, como $u \in W^{1,1}$,

$$-\int_0^1 \dot{u}\varphi = \int_0^1 u\varphi',$$

para toda $\varphi \in V$, así

$$\int_0^1 (u - \hat{u})\varphi' = 0,$$

para toda $\varphi \in V$.
Dado que $\hat{u}$ es continua y $u \in L^1([0,1])$, $(u - \hat{u}) \in L^1([0,1])$. Por el corolario 2.1.6, existe una constante C tal que $u - \hat{u} = C$ c.d.q. en $[0,1]$. La función $\tilde{u} = \hat{u} + C$ es continua en $[0,1]$ y, además,

$$\tilde{u}(d) = \int_0^d \dot{u} + C,$$
$$\tilde{u}(c) = \int_0^c \dot{u} + C.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{u}(d) - \tilde{u}(c) = \int_c^d \dot{u},$$

para todo $c, d \in [0,1]$. $\square$

Observación 2.2.9. *Toda función $u \in W^{1,1}$ admite una (y solo una) representación continua $\tilde{u}$ en $[0,1]$. Más aún, $\tilde{u} \in AC([0,1])$ y, por el teorema 2.2.6, $\dot{u} = \tilde{u}'$.*

Finalmente, se tiene un teorema de integración por partes para funciones en $W^{1,1}$ en términos de la derivada débil.

Corolario 2.2.10 (Teorema de integración por partes para la derivada débil)**.** *Si $u, v \in W^{1,1}$, entonces $uv \in W^{1,1}$ y*

$$(uv)^{\cdot} = \dot{u}v + u\dot{v}.$$

Más aún, si $\dot{u}v \in L^1([0,1])$ y $u(0+) = u(0)$, $v(0+) = v(0)$, $u(1-) = u(1)$ y $v(1-) = v(1)$, entonces

$$\int_0^1 \dot{u}v = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 u\dot{v}. \tag{2.15}$$

Demostración: Sean $u, v \in W^{1,1}$. Por la observación 2.2.9 , $\tilde{u}, \tilde{v} \in AC([0,1])$, tales que, $\dot{u} = \tilde{u}'$ y $\dot{v} = \tilde{v}'$. Del teorema 1.2.4, se tiene que $\tilde{u}\tilde{v} \in AC([0,1])$. Asimismo, dado que $u = \tilde{u}$ c.d.q. en $[0,1]$ y $v = \tilde{v}$ c.d.q. en $[0,1]$, del teorema 2.2.6 se obtiene que $uv \in W^{1,1}$. Además,

$$(uv)^{\cdot} = (\tilde{u}\tilde{v})' = \tilde{u}'\tilde{v} + \tilde{u}\tilde{v}' = \dot{u}v + u\dot{v},$$

c.d.q. en $[0,1]$. Integrando la igualdad anterior, se obtiene que

$$\int_0^1 (uv)^{\cdot} = \int_0^1 (\tilde{u}\tilde{v})' = (\tilde{u}\tilde{v})\Big|_0^1 = (uv)\Big|_0^1,$$

de aquí que

$$\int_0^1 \dot{u}v = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 u\dot{v}.$$

$\square$

Capítulo 3

Existencia y unicidad de la solución de un problema con valores en la frontera

En este último capítulo, se exponen condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la solución a un problema de Sturm-Liouville con condiciones de frontera de Dirichlet, a través del estudio del problema variacional asociado.

3.1. Equivalencia entre el problema con valor en la frontera y el problema variacional

Empecemos recordando que, para $1 \leq p < \infty$, los espacios de sobolev están definidos por

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p([0,1]) : \exists g \in L^p([0,1]) \text{ tal que } \int_0^1 u\varphi' = -\int_0^1 g\varphi,\ \forall \varphi \in V \right\}.$$

A continuación se definen dos espacios importantes que se utilizan en la formulación del teorema de existencia y unicidad.

Definición 3.1.1. El espacio de funciones doblemente derivables en el sentido débil, está definido por

$$W_2^{1,1} = \{u \in W^{1,1} \ : \ \dot{u} \in W^{1,1}\}.$$

Definición 3.1.2. El espacio $W_0^{1,1}$ se define como el subespacio de $W^{1,1}$, formado por las funciones que son continuas unilateralmente en los extremos del intervalo $[0,1]$ y son iguales a cero en esos puntos, es decir,

$$W_0^{1,1} = \{u \in W^{1,1} \ : \ u(0) = u(0+) = u(1) = u(1-) = 0\}.$$

Sean $f, q \in L^1([0,1])$ y $\rho \in AC([0,1])$ tal que $|\rho(x)| \geq \alpha$, para todo $x \in [0,1]$ y algún $\alpha > 0$.
Considere los siguientes problemas:

I. Hallar $u \in W_2^{1,1}$ tal que

$$\begin{cases} -[\rho\dot{u}]^{\cdot} + qu = f \text{ c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

II. Hallar $u \in W_0^{1,1}$ tal que

$$\int_0^1 \rho\dot{u}\varphi' + \int_0^1 qu\varphi = \int_0^1 f\varphi, \quad \text{para toda } \varphi \in V. \tag{3.2}$$

Observe que por el teorema 2.2.8 existe $\tilde{u} \in C([0,1])$ tal que $u = \tilde{u}$ c.d.q. en $[0,1]$, así $u \in L^\infty([0,1])$ y por tanto $qu \in L^1([0,1])$, de esta forma la segunda integral en la igualdad anterior está bien definida.

Proposición 3.1.3. *El problema con valor en la frontera (I) y el problema variacional (II) son equivalentes.*

Demostración: Supongamos que $u \in W_2^{1,1}$ es una solución del problema con valor en la frontera (I). Multiplicando en ambos lados de la ecuación diferencial (3.1) por $\varphi \in V$ e integrando de 0 a 1, obtenemos que

$$-\int_0^1 [\rho\dot{u}]^{\cdot}\varphi + \int_0^1 qu\varphi = \int_0^1 f\varphi.$$

Luego, por la definición de derivada débil se tiene que

$$\int_0^1 \rho\dot{u}\varphi' + \int_0^1 qu\varphi = \int_0^1 f\varphi,$$

para toda $\varphi \in V$. Además $u(0) = u(0+) = u(1) = u(1-) = 0$, así, $u \in W_0^{1,1}$ y, por lo tanto, satisface el problema variacional (II).

Por otro lado, supongamos que $u \in W_0^{1,1}$ es solución de (II), en consecuencia,

$$\int_0^1 \rho \dot{u} \varphi' = -\int_0^1 (qu - f)\varphi, \tag{3.3}$$

para toda $\varphi \in V$, así pues, $\rho\dot{u} \in W^{1,1}$. Además, notemos que $\frac{1}{\rho} \in AC([0,1])$, esto por el teorema 1.2.3, luego $\frac{1}{\rho} \in W^{1,1}$. Del teorema 2.2.10 se sigue que $\dot{u} = \frac{1}{\rho}(\rho\dot{u}) \in W^{1,1}$, por tanto, $u \in W_2^{1,1}$.
Por otra parte, dado que $\rho\dot{u} \in W^{1,1}$, se tiene que

$$\int_0^1 \rho \dot{u} \varphi' = -\int_0^1 (\rho\dot{u})^{\cdot} \varphi, \tag{3.4}$$

para toda $\varphi \in V$. De (3.4) y de (3.2) se sigue que

$$\int_0^1 [-(\rho\dot{u})^{\cdot} + qu - f]\varphi = 0,$$

para toda $\varphi \in V$. Por el corolario 2.1.5 , $-(\rho\dot{u})^{\cdot} + qu = f$ c.d.q. en $[0,1]$. Por lo tanto, u satisface el problema (I). $\square$

3.2. Del problema variacional al problema operacional

A través de la proposición 3.1.3 se demostró que los problemas (I) y (II) son equivalentes. Ahora, para hallar una solución del problema con valor en la frontera (I), demostraremos la existencia de una solución del problema variacional (II). Para lograr tal propósito, definamos los operadores $l_u, l_f : V \to \mathbb{R}$ (para $u \in W_0^{1,1}$) y $B : W_0^{1,1} \times V \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$B(u,\varphi) = \int_0^1 \rho\dot{u}\varphi', \quad l_u(\varphi) = \int_0^1 qu\varphi \quad \text{y} \quad l_f(\varphi) = \int_0^1 f\varphi. \tag{3.5}$$

Proposición 3.2.1. *Los operadores l_u y l_f son operadores lineales y B es un operador bilineal.*

Demostración: Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}
l_u(\alpha\varphi_1 + \varphi_2) &= \int_0^1 qu(\alpha\varphi_1 + \varphi_2) = \int_0^1 qu(\alpha\varphi_1) + \int_0^1 qu(\varphi_2) \\
&= \alpha \int_0^1 qu\varphi_1 + \int_0^1 qu\varphi_2 = \alpha l_u(\varphi_1) + l_u(\varphi_2). \\
l_f(\alpha\varphi_1 + \varphi_2) &= \int_0^1 f(\alpha\varphi_1 + \varphi_2) = \int_0^1 f(\alpha\varphi_1) + \int_0^1 f(\varphi_2) \\
&= \alpha \int_0^1 f\varphi_1 + \int_0^1 f\varphi_2 = \alpha l_f(\varphi_1) + l_f(\varphi_2).
\end{aligned}$$

Sea $u_0 \in W^{1,1}$ fijo, entonces

$$\begin{aligned}
B(u_0, \alpha\varphi_1 + \varphi_2) &= \int_0^1 \rho\dot{u}_0(\alpha\varphi_1 + \varphi_2)' = \int_0^1 \rho\dot{u}_0\alpha\varphi_1' + \int_0^1 \rho\dot{u}_0\varphi_2' \\
&= \alpha \int_0^1 \rho\dot{u}_0\varphi_1' + \int_0^1 \rho\dot{u}_0\varphi_2' = \alpha B(u_0, \varphi_1) + B(u_0, \varphi_2).
\end{aligned}$$

Sea $\varphi_0 \in V$ fijo, así

$$\begin{aligned}
B(\alpha u_1 + u_2, \varphi_0) &= \int_0^1 \rho(\alpha u_1 + u_2)^{\cdot}\varphi_0' = \int_0^1 \rho(\alpha\dot{u}_1 + \dot{u}_2)\varphi_0' \\
&= \int_0^1 \rho\alpha\dot{u}_1\varphi_0' + \int_0^1 \rho\dot{u}_2\varphi_0' = \alpha \int_0^1 \rho\dot{u}_1\varphi_0' + \int_0^1 \rho\dot{u}_2\varphi_0' \\
&= \alpha B(u_1, \varphi_0) + B(u_2, \varphi_0).
\end{aligned}$$

□

Observemos que resolver el problema variacional (3.2) es equivalente a encontrar $u \in W_0^{1,1}$ tal que

$$B(u, \varphi) + l_u(\varphi) = l_f(\varphi), \tag{3.6}$$

para toda $\varphi \in V$. El siguiente objetivo es reducir el problema (3.6) en un problema que dependa únicamente del operador bilineal B. Para lograrlo, en las siguientes dos proposiciones veremos que tanto l_u y l_f se pueden definir en términos del operador B.

Proposición 3.2.2. *Existe un operador lineal $A : W_0^{1,1} \to W_0^{1,1}$ tal que $l_u(\varphi) = B(A(u), \varphi)$, para todo $u \in W_0^{1,1}$ y $\varphi \in V$.*

Demostración: Sea $u \in W_0^{1,1}$ y definamos las siguientes funciones:

$$h_u(t) = -\frac{1}{\rho(t)}\int_0^t qu$$

y

$$z_u(t) = \int_0^t \Big(h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho}\Big),$$

donde $\alpha_u = \frac{\int_0^1 h_u}{\int_0^1 \frac{1}{\rho}}$. Notemos que h_u y z_u son absolutamente continuas sobre $[0,1]$, se sigue de la observación 2.2.7 que $z_u \in W^{1,1}$, además,

$$z_u(0) = \int_0^0 (h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho}) = 0$$

y

$$\begin{aligned} z_u(1) &= \int_0^1 \Big(h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho}\Big) = \int_0^1 h_u - \alpha_u \int_0^1 \frac{1}{\rho} \\ &= \int_0^1 h_u - \frac{\int_0^1 h_u}{\int_0^1 \frac{1}{\rho}}\Big[\int_0^1 \frac{1}{\rho}\Big] = \int_0^1 h_u - \int_0^1 h_u = 0. \end{aligned}$$

Como z_u es continua sobre $[0,1]$, se tiene que $z_u(0) = z_u(0+) = z_u(1-) = z_u(1) = 0$, por lo tanto $z_u \in W_0^{1,1}$. Ahora, definamos el operador $A : W_0^{1,1} \to W_0^{1,1}$ como

$$A(u) = z_u. \tag{3.7}$$

Mostraremos que el operador A es lineal. Sean $u_1, u_2 \in W_0^{1,1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, observe primero que

$$h_{(\beta u_1 + u_2)} = -\frac{1}{\rho}\int_0^t q(\beta u_1 + u_2) = -\frac{1}{\rho}\Big(\beta \int_0^t qu_1 + \int_0^t qu_2\Big) = \beta h_{u_1} + h_{u_2}$$

y

$$\alpha_{(\beta u_1 + u_2)} = \frac{\int_0^1 h_{(\beta u_1 + u_2)}}{\int_0^1 \frac{1}{\rho}} = \beta \frac{\int_0^1 h_{u_1}}{\int_0^1 \frac{1}{\rho}} + \frac{\int_0^1 h_{u_2}}{\int_0^1 \frac{1}{\rho}} = \beta \alpha_{u_1} + \alpha_{u_2}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
A(\beta u_1 + u_2) &= z_{(\beta u_1 + u_2)} \\
&= \int_0^t \Big(h_{(\beta u_1+u_2)} - \alpha_{(\beta u_1+u_2)} \frac{1}{\rho} \Big) \\
&= \int_0^t \Big(\beta h_{u_1} + h_{u_2} - \beta \alpha_{u_1} \frac{1}{\rho} - \alpha_{u_2} \frac{1}{\rho} \Big) \\
&= \beta \int_0^t \Big(h_{u_1} - \alpha_{u_1} \frac{1}{\rho} \Big) + \int_0^t \Big(h_{u_2} - \alpha_{u_2} \frac{1}{\rho} \Big) \\
&= \beta z_{u_1} + z_{u_2} = \beta A(u_1) + A(u_2).
\end{aligned}$$

Este operador va a ser fundamental para los resultados que se mostrarán más adelante.

Demostremos ahora que $l_u(\varphi) = B(A(u), \varphi)$ para todo $\varphi \in V$. Por el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue (teorema 1.2.5) y la observación 2.2.7 se sigue que $\dot{z_u} = h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho}$. Sea $\varphi \in V$ luego

$$\begin{aligned}
B(A(u), \varphi) = B(z_u, \varphi) &= \int_0^1 \rho \dot{z_u} \varphi' = \int_0^1 \rho \Big(h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho} \Big) \varphi' \\
&= \int_0^1 (h_u \rho - \alpha_u) \varphi' = \int_0^1 \Big[\Big(- \int_0^t qu \Big) - \alpha_u \Big] \varphi'.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pongamos $F_u(t) = -\int_0^t qu - \alpha_u$, de esta forma $F_u \in AC([0,1])$. Por los teoremas 1.1.11, 1.2.6 y 1.2.5, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F_u \varphi' = F_u \varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 \Big[\Big(- \int_0^t qu \Big) - \alpha_u \Big]' \varphi(t) dt \\
= \int_0^1 qu\varphi = l_u(\varphi).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

De (3.8) y (3.9) se concluye que $B(A(u), \varphi) = l_u(\varphi)$. □

Proposición 3.2.3. *Existe una función $v_f \in W_0^{1,1}$ tal que $l_f(\varphi) = B(v_f, \varphi)$, para toda $\varphi \in V$.*

Demostración: Sea $F(x) = \int_0^x f$, con $x \in [0,1]$. Por el teorema fundamental del cálculo $F' = f$ c.d.q. en $[0,1]$. Ahora, definamos la función v_f por

$$v_f = \int_0^t \frac{1}{\rho} (\beta_f - F),$$

donde $\beta_f = \frac{\int_0^1 \frac{F}{\rho}}{\int_0^1 \frac{1}{\rho}}$. Demostremos que $v_f \in W_0^{1,1}$. Notemos que $v_f \in AC([0,1])$, así, $v_f \in W^{1,1}$. Por otro lado, observemos que

$$v_f(0) = \int_0^0 \frac{1}{\rho}(\beta_f - F) = 0$$

y

$$\begin{aligned} v_f(1) &= \int_0^1 \frac{1}{\rho}(\beta_f - F) = \int_0^1 \frac{\beta_f}{\rho} - \int_0^1 \frac{F}{\rho} \\ &= \beta_f \int_0^1 \frac{1}{\rho} - \int_0^1 \frac{F}{\rho} = \frac{\int_0^1 \frac{F}{\rho}}{\int_0^1 \frac{1}{\rho}} \Big[\int_0^1 \frac{1}{\rho} \Big] - \int_0^1 \frac{F}{\rho} \\ &= \int_0^1 \frac{F}{\rho} - \int_0^1 \frac{F}{\rho} = 0. \end{aligned}$$

Por la continuidad de v_f, se tiene que $v_f(0) = v_f(0+) = v_f(1-) = v_f(1) = 0$, en consecuencia $v_f \in W_0^{1,1}$. Además, por la definición del operador B y el teorema 1.1.11 se sigue que

$$\begin{aligned} B(v_f, \varphi) &= \int_0^1 \rho \dot{v_f} \varphi' \\ &= \int_0^1 \rho \Big(\frac{1}{\rho}(\beta_f - F) \Big) \varphi' \\ &= \int_0^1 (\beta_f - F)\varphi' \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sea $G = \beta_f - F$, luego $G \in AC([0,1])$, por el teorema de integración por partes se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 G\varphi' &= G\varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 -F'\varphi \\ &= \int_0^1 f\varphi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por (3.10) y (3.11), se obtiene que $B(v_f, \varphi) = l_f(\varphi)$, para toda $\varphi \in V$. $\square$

Con todo lo anterior, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.4. *El problema variacional (II) es equivalente a encontrar* $u \in W_0^{1,1}$ *tal que*

$$B(u + A(u) - v_f, \varphi) = 0, \tag{3.12}$$

para toda $\varphi \in V$.

Demostración: Por (3.5),

$$B(u,\varphi) = \int_0^1 \rho \dot{u} \varphi', \quad l_u(\varphi) = \int_0^1 q u \varphi \quad \text{y} \quad l_f(\varphi) = \int_0^1 f\varphi,$$

para cualesquiera $u \in W_0^{1,1}$ y $\varphi \in V$. Más aún, por las proposiciones 3.2.2 y 3.2.3,

$$l_u(\varphi) = B(A(u), \varphi) \quad \text{y} \quad l_f(\varphi) = B(v_f, \varphi),$$

para toda $\varphi \in V$. Por lo tanto,

$$B(u,\varphi) = \int_0^1 \rho \dot{u} \varphi', \quad B(A(u),\varphi) = \int_0^1 q u \varphi \quad \text{y} \quad B(v_f,\varphi) = \int_0^1 f\varphi,$$

para cualesquiera $u \in W_0^{1,1}$ y $\varphi \in V$. En consecuencia, existe $u \in W_0^{1,1}$ tal que

$$\int_0^1 \rho \dot{u} \varphi' + \int_0^1 q u \varphi = \int_0^1 f \varphi,$$

para toda $\varphi \in V$ si y solo si existe $u \in W_0^{1,1}$ tal que

$$B(u,\varphi) + B(A(u),\varphi) = B(v_f,\varphi),$$

para toda $\varphi \in V$. Por la linealidad de B, esto último es equivalente a que existe $u \in W_0^{1,1}$ tal que

$$B(u + A(u) - v_f, \varphi) = 0,$$

para toda $\varphi \in V$. □

Ahora bien, en la siguiente sección usaremos el teorema de la alternativa de Fredholm para operadores compactos, y así mostrar que bajo ciertas condiciones existe $u \in W_0^{1,1}$ tal que $u + A(u) = v_f$, es decir, se tendría

$$u + A(u) - v_f = 0,$$

lo cual implicaría la igualdad (3.12), para toda $\varphi \in V$.

3.3. Existencia y unicidad

En esta sección nos encargaremos de garantizar la existencia y unicidad de la solución del problema (3.1).

Se sabe que $W_0^{1,1} \subseteq L^\infty([0,1])$, de esta forma, podemos considerar al espacio $W_0^{1,1}$ con la semi-norma $\|u\|_W = \|u\|_\infty + \|\dot{u}\|_1$, donde

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\left\{0 \le M \ : \ |f| \le M \text{ c.d.q. en } [0,1]\right\}.$$

Mostraremos a continuación que el operador A dado en (3.7) es compacto con la semi-norma $\|u\|_W$, para esto usaremos el teorema de Arzelá-Ascoli.

Definición 3.3.1. Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ se llama compacto si para toda sucesión acotada (x_n) en X, la sucesión (Tx_n) contiene una subsucesión convergente.

Es claro que $C([0,1]) \subseteq L^\infty([0,1])$, luego la norma $\|\cdot\|_\infty$ al restringirse sobre $C([0,1])$ se transforma en $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

Teorema 3.3.2 (Teorema de Arzelá-Ascoli)**.** *Sea $Y = C([0,1])$ dado con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de Y es relativamente compacto en Y si y solo si:*

1. *$\mathcal{H}$ es acotado, es decir, existe una constante C, tal que*

$$|v(x)| \le C,$$

para todo $x \in [0,1]$ y toda $v \in \mathcal{H}$.

2. *$\mathcal{H}$ es equicontinuo, es decir, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|v(x) - v(y)| < \epsilon,$$

para todo $x, y \in [0,1]$ con $|x - y| < \delta$ y para cada $v \in \mathcal{H}$.

Teorema 3.3.3. *El operador $A : (W_0^{1,1}, \|\cdot\|_W) \to (W_0^{1,1}, \|\cdot\|_W)$ dado en (3.7) es compacto.*

Demostración: Sea $\Omega \subset W_0^{1,1}$ un conjunto acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|u\|_W \le M$, para toda $u \in \Omega$. Sea

$$\mathcal{H} = \{h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho} : u \in \Omega\}.$$

Observe que $\mathcal{H} \subseteq C([0,1])$. Mostremos que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Para esto usaremos el teorema de Arzelá-Ascoli, de esta forma tenemos que demostrar que $\mathcal{H}$ es acotado y equicontinuo.

1. Primero, observemos que si $u \in \Omega$, entonces

$$\begin{aligned}
|\alpha_u| &= \frac{\left|\int_0^1 h_u\right|}{\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|} \le \frac{\int_0^1 |h_u|}{|\int_0^1 \frac{1}{\rho}|} = \frac{\int_0^1 \left| - \frac{1}{\rho(t)} \int_0^t qu\right| dt}{|\int_0^1 \frac{1}{\rho}|} \\
&= \frac{\int_0^1 \frac{1}{|\rho(t)|} \left|\int_0^t qu\right| dt}{\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|} \le \frac{\int_0^1 \frac{1}{\alpha} \int_0^t |qu|}{\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|} \le \frac{\int_0^1 \frac{1}{\alpha} \|qu\|_1}{\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|} \\
&\le \frac{\|q\|_1 \|u\|_\infty}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|} \le \frac{\|q\|_1 \|u\|_W}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|} \le \frac{\|q\|_1 M}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}.
\end{aligned}$$

Pongamos $K = \frac{1}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}$. Luego para cualesquiera $x \in [0,1]$ y $u \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\left|h_u(x) - \alpha_u \frac{1}{\rho(x)}\right| &= \left| - \frac{1}{\rho(x)} \int_0^x qu - \alpha_u \frac{1}{\rho(x)}\right| \le \frac{1}{|\rho(x)|}\Big(\int_0^x |qu| + |\alpha_u|\Big) \\
&\le \frac{1}{\alpha}\Big(\|q\|_1 \|u\|_\infty + \frac{\|q\|_1 M}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}\Big) \le \frac{\|q\|_1 M}{\alpha}\Big(1 + K\Big) = C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es acotado.

2. Ahora, veamos que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. Pongamos $Q(t) = \int_0^t |q|$. Sea $\epsilon > 0$, dado que Q y $\frac{1}{\rho}$ son funciones continuas sobre $[0,1]$, existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in [0,1]$ con $|y - x| < \delta$, se tiene

$$\left|\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(x)}\right| < \frac{\epsilon}{2\,(1+K)\,\|q\|_1 M} \qquad \text{y} \qquad |Q(y) - Q(x)| < \frac{\alpha\epsilon}{2M}.$$

Sean $x, y \in [0,1]$ con $|y - x| < \delta$ y $u \in \Omega$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$, luego

$$\Big(h_u(y) - \alpha_u \tfrac{1}{\rho(y)}\Big) - \Big(h_u(x) - \alpha_u \tfrac{1}{\rho(x)}\Big) \;=$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\rho(y)} \int_0^y qu - \alpha_u \frac{1}{\rho(y)} + \frac{1}{\rho(x)} \int_0^x qu + \alpha_u \frac{1}{\rho(x)} \\
&= -\frac{1}{\rho(y)}\Big(\int_0^y qu + \alpha_u\Big) + \frac{1}{\rho(x)}\Big(\int_0^x qu + \alpha_u\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\rho(y)}\Big(\int_0^y qu + \alpha_u\Big) + \frac{1}{\rho(x)}\Big(\int_0^y qu + \alpha_u\Big) - \frac{1}{\rho(x)}\Big(\int_0^y qu + \alpha_u\Big) \\
&\quad + \frac{1}{\rho(x)}\Big(\int_0^x qu + \alpha_u\Big) \\
&= \left[-\frac{1}{\rho(y)} + \frac{1}{\rho(x)}\right]\Big(\int_0^y qu + \alpha_u\Big) - \frac{1}{\rho(x)}\left[\Big(\int_0^y qu + \alpha_u\Big)\right. \\
&\quad \left. - \Big(\int_0^x qu + \alpha_u\Big)\right] \\
&= \left[-\frac{1}{\rho(y)} + \frac{1}{\rho(x)}\right]\Big(\int_0^y qu + \alpha_u\Big) - \frac{1}{\rho(x)}\int_x^y qu
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\left|\Big(h_u(y) - \alpha_u \tfrac{1}{\rho(y)}\Big) - \Big(h_u(x) - \alpha_u \tfrac{1}{\rho(x)}\Big)\right| \le \\
&\qquad \le \left|\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(x)}\right| \left(\int_0^y |qu| + |\alpha_u|\right) + \left|\frac{1}{\rho(x)}\right| \int_x^y |qu| \\
&\qquad \le \left|\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(x)}\right| \left(\|q\|_1\|u\|_\infty + \frac{\|q\|_1 M}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}\right) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{\alpha}\left(\int_x^y |q|\right) \inf\{0 \le r \ : \ |u| \le r \text{ c.d.q. en } [x,y]\} \\
&\qquad \le \left|\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(x)}\right| \left(\|q\|_1 M + \frac{\|q\|_1 M}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}\right) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{\alpha}\left(\int_x^y |q|\right) \inf\{0 \le r \ : \ |u| \le r \text{ c.d.q. en } [0,1]\} \\
&\qquad \le \left|\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(x)}\right| (1+K)\,\|q\|_1 M + \frac{1}{\alpha}\left(\int_x^y |q|\right)\|u\|_\infty \\
&\qquad \le \left|\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(x)}\right| (1+K)\,\|q\|_1 M + \frac{1}{\alpha}\left(Q(y) - Q(x)\right) M \\
&\qquad < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

En consecuencia $\mathcal{H}$ es equicontinuo.

Por el teorema de Arzelá-Ascoli se concluye que $\overline{\mathcal{H}}$ es compacto en $C([0,1])$ bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$. Mostremos ahora que A es compacto con la norma $\|\cdot\|_W$. Sea (u_n) una sucesión acotada en $(W_0^{1,1}, \|\cdot\|_W)$. Pongamos $\Omega = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, luego por lo que se probó anteriormente la clausura de $\mathcal{H} = \{h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho} : u \in \Omega\}$ es un subconjunto compacto de $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Dado que $(h_{u_n} - \alpha_{u_n}\frac{1}{\rho})$ está en $\overline{\mathcal{H}}$ se tiene que existe $(h_{u_{n_k}} - \alpha_{u_{n_k}}\frac{1}{\rho})$ una subsucesión de $(h_{u_n} - \alpha_{u_n}\frac{1}{\rho})$ y $g \in C([0,1])$ tal que $\|h_{u_{n_k}} - \alpha_{u_{n_k}}\frac{1}{\rho} - g\|_\infty \to 0$. Por lo tanto, $h_{u_{n_k}} - \alpha_{u_{n_k}}\frac{1}{\rho} \to g$ uniformemente sobre $[0,1]$. Así

$$\int_0^t \left(h_{u_{n_k}} - \alpha_{u_{n_k}}\frac{1}{\rho}\right) \to \int_0^t g$$

uniformemente sobre $[0,1]$. Sea $z(t) = \int_0^t g$, luego $z_{u_{n_k}} \to z$ uniformemente sobre $[0,1]$. Por lo tanto, $z(1) = \lim z_{u_{n_k}}(1) = 0$ y claramente $z(0) = 0$. Por el teorema 1.2.5, $z \in AC([0,1])$, luego por la observación 2.2.7, $z \in W_0^{1,1}$. Finalmente, como $z_{u_{n_k}} \to z$ uniformemente sobre $[0,1]$, entonces

$$\|z_{u_{n_k}} - z\|_\infty \to 0$$

y dado que $h_{u_{n_k}} - \alpha_{u_{n_k}}\frac{1}{\rho} \to g$ uniformemente sobre $[0,1]$ entonces

$$\|\dot{z_{u_{n_k}}} - \dot{z}\|_1 = \|h_{u_{n_k}} - \alpha_{u_{n_k}}\frac{1}{\rho} - g\|_1 \to 0.$$

Por lo tanto, $\|Au_{n_k} - z\|_W = \|z_{u_{n_k}} - z\|_W = \|z_{u_{n_k}} - z\|_\infty + \|\dot{z_{u_{n_k}}} - \dot{z}\|_1 \to 0$, en consecuencia, el operador A es compacto. $\square$

A continuación, se enuncia el teorema de la alternativa de Fredholm, el cual nos brindará las condiciones que garantizan la existencia de la solución del problema operacional.

Teorema 3.3.4 (Alternativa de Fredholm [4])**.** *Sea $T : X \to X$ un operador compacto sobre un espacio normado X. Luego la transformación $(T + I)$ es inyectiva si solo si $(T + I)$ es sobreyectiva. Si $T + I$ es inyectiva (y por tanto, también biyectiva), entonces el operador $(T + I)^{-1} : X \to X$ es acotado.*

La siguiente proposición nos proporcionará las condiciones necesarias para la existencia de la solución del problema con valor en la frontera (I).

Proposición 3.3.5. *Sea $A : W_0^{1,1} \to W_0^{1,1}$ el operador definido en (3.7). Si el problema homogéneo*

$$\begin{cases} -[\rho \dot{u}]^{\cdot} + qu = 0 \ \textit{c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0, \end{cases}$$

tiene solo la solución trivial, entonces la transformación $A + I$ es inyectiva.

Demostración: Sea $u \in W_0^{1,1}$ tal que $(A + I)u = 0$ c.d.q. en $[0, 1]$. En consecuencia $A(u) = -u$ c.d.q. en $[0, 1]$, por definición del operador A, se sigue que, $z_u = -u$ c.d.q. en $[0, 1]$. Como $z_u \in AC([0, 1])$, por el teorema 2.2.6, $-\dot{u} = z'_u = \left(\int_0^t (h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho}) \right)' = h_u - \alpha_u \frac{1}{\rho}$, luego $\dot{u} = -h_u + \alpha_u \frac{1}{\rho}$. De aquí que

$$\rho \dot{u} = -\rho h_u + \alpha_u = \int_0^t qu + \alpha_u.$$

Notemos que, $\int_0^t qu + \alpha_u \in AC([0, 1])$, nuevamente por el teorema 2.2.6, $\rho \dot{u} \in W^{1,1}$ y además

$$\begin{aligned} [\rho \dot{u}]^{\cdot} &= \left[\int_0^t qu + \alpha_u \right]^{\cdot} \\ &= \left[\int_0^t qu + \alpha_u \right]' \\ &= \left(\int_0^t qu \right)' = qu \end{aligned}$$

c.d.q. en $[0, 1]$. Por lo tanto, $-[\rho \dot{u}]^{\cdot} + qu = 0$ c.d.q. en $[0, 1]$. Ahora como $u \in W_0^{1,1}$, se obtiene que $u(0+) = u(0) = 0$ y $u(1-) = u(1) = 0$. Así u satisface el problema homogéneo. Por lo tanto, $u = 0$ c.d.q. en $[0, 1]$. En consecuencia $A + I$ es inyectiva. □

Proposición 3.3.6. *Si $\rho > 0$ y $q > 0$, entonces el problema homogéneo*

$$\begin{cases} -[\rho \dot{u}]^{\cdot} + qu = 0 \ \textit{c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0, \end{cases}$$

tiene solo la solución trivial.

Demostración: Sea $u \in W_2^{1,1}$ solución del problema homogéneo, luego

$$[\rho\dot{u}]^{\cdot} = qu, \tag{3.13}$$

c.d.q. en $[0,1]$. Por el teorema fundamental del cálculo para la derivada débil (teorema 2.2.8), existe $s \in C([0,1])$ tal que $s = \rho\dot{u}$ c.d.q. en $[0,1]$ y

$$s(t) = \int_0^t [\rho\dot{u}]^{\cdot} + s(0),$$

para toda $t \in [0,1]$. Claramente $s(0+) = s(0)$ y $s(1-) = s(1)$. Más aún, $s \in AC([0,1])$ y por el teorema 2.2.6, $s \in W^{1,1}$ y $\dot{s} = s' = [\rho\dot{u}]^{\cdot}$ c.d.q. en $[0,1]$. Por la igualdad (3.13), $\dot{s} = qu$ c.d.q. en $[0,1]$. Ahora, observe que $u(0+) = u(0) = u(1-) = u(1) = 0$ y $\dot{u}s \in L^1([0,1])$, luego por el teorema de integración por partes para la derivada débil (corolario 2.2.10) obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \dot{u}[\rho\dot{u}] = \int_0^1 \dot{u}s = us\Big|_0^1 - \int_0^1 u\dot{s} \\ = -\int_0^1 u\dot{s} = -\int_0^1 u[qu], \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\int_0^1 qu^2 + \int_0^1 \rho(\dot{u})^2 = 0.$$

Dado que $\rho > 0$ y $q > 0$, se concluye que $u = 0$ c.d.q. en [0,1]. $\square$

Finalmente, tenemos las condiciones suficientes para enunciar el teorema de existencia y unicidad al problema con valor en la frontera (I).

Teorema 3.3.7. *Sean $f, q \in L^1([0,1])$ y $\rho \in AC([0,1])$ tales que $|\rho(x)| \geq \alpha$, para todo $x \in [0,1]$ y algún $\alpha > 0$. Si alguna de las siguientes condiciones se cumplen:*

1. *$\rho > 0$ y $q > 0$,*
2. *el problema homogéneo*

$$\begin{cases} -[\rho\dot{u}]^{\cdot} + qu = 0 \ \ c.d.q. \ en \ [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0, \end{cases}$$

tiene únicamente la solución trivial,

entonces existe una única $u \in W_2^{1,1}$ *que satisface el problema*

$$\begin{cases} -[\rho\dot{u}]^{\cdot} + qu = f \ \ c.d.q. \ en \ [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0. \end{cases}$$

Además, u depende continuamente de la función f.

Demostración: Por el teorema 3.3.3, el operador $A : (W_0^{1,1}, \|\cdot\|_W) \to (W_0^{1,1}, \|\cdot\|_W)$ dado en (3.7) es compacto. Ahora con cualquiera de las hipótesis (1) o (2) obtenemos por la proposición 3.3.5 y la proposición 3.3.6 que $A+I$ es inyectiva. Así por el teorema de la alternativa de Fredholm (teorema 3.3.4), la transformación $A+I$ es sobreyectiva. Luego, dado que $v_f \in W_0^{1,1}$ (vea proposición 3.2.3), existe $u \in W_0^{1,1}$ tal que $(A+I)u = v_f$, es decir, $u + Au - v_f = 0$. Por lo tanto, $B(u+Au-v_f, \varphi) = 0$ para toda $\varphi \in V$. En consecuencia, por la proposición 3.2.4, u es solución del problema variacional II y, así por la proposición 3.1.3, u es solución del problema de contorno I. Mostremos a continuación la unicidad, sea $w \in W_2^{1,1}$ otra solución del problema de contorno I. Luego $-[\rho\dot{w}]^{\cdot} + qw = f$ c.d.q. en $[0,1]$. Así $-[\rho\dot{w}]^{\cdot} + qw = f = -[\rho\dot{u}]^{\cdot} + qu$ c.d.q. en $[0,1]$, lo cual implica que $-[\rho(w-u)^{\cdot}]^{\cdot} + q(w-u) = 0$. Con cualquiera de la hipótesis (1) o (2), tenemos que la solución del problema homogéneo es la trivial, así $w - v = 0$ c.d.q. en $[0,1]$.

Probemos ahora que si (f_n) es una sucesión en $L^1([0,1])$ tal que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ y si para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n es la solución del problema

$$\begin{cases} -[\rho\dot{u}]^{\cdot} + qu = f_n \text{ c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0, \end{cases}$$

entonces $\|u_n - u\|_W \to 0$. En efecto,

$$\left| \frac{1}{\rho(x)}(\beta_{f_n} - F_n(x)) - \frac{1}{\rho(x)}(\beta_f - F(x)) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{|\rho(x)|} \left(|F_n(x) - F(x)| + |\beta_{f_n} - \beta_f| \right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left| \int_0^x f_n - \int_0^x f \right| + \frac{1}{\alpha \left| \int_0^1 \frac{1}{\rho} \right|} \left| \int_0^1 \frac{F_n}{\rho} - \int_0^1 \frac{F}{\rho} \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f_n - f| + \frac{1}{\alpha \left| \int_0^1 \frac{1}{\rho} \right|} \int_0^1 \frac{1}{\alpha} \left| \int_0^x f_n - \int_0^x f \right| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\alpha}\int_0^1 |f_n - f| + \frac{1}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}\int_0^1 \frac{1}{\alpha}\int_0^1 |f_n - f| \\
&= \frac{1}{\alpha}\|f_n - f\|_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_{f_n} - \dot{v}_f\|_1 &= \left\|\frac{1}{\rho}(\beta_{f_n} - F_n) - \frac{1}{\rho}(\beta_f - F)\right\|_1 \\
&= \int_0^1 \left|\frac{1}{\rho}(\beta_{f_n} - F_n(x)) - \frac{1}{\rho}(\beta_f - F(x))\right| dx \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\|f_n - f\|_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}\right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|v_{f_n} - v_f\|_\infty &= \max_{t\in[0,1]} |v_{f_n}(t) - v_f(t)| \\
&= \max_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t \frac{1}{\rho(x)}\left(\beta_{f_n} - F_n(x)\right) dx - \int_0^t \frac{1}{\rho(x)}\left(\beta_f - F(x)\right) dx\right| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^t \left|\frac{1}{\rho(x)}\left(\beta_{f_n} - F_n(x)\right) - \frac{1}{\rho(x)}\left(\beta_f - F(x)\right)\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|\frac{1}{\rho(x)}\left(\beta_{f_n} - F_n(x)\right) - \frac{1}{\rho(x)}\left(\beta_f - F(x)\right)\right| dx \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\|f_n - f\|_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha\left|\int_0^1 \frac{1}{\rho}\right|}\right).
\end{aligned}$$

Así $\|v_{f_n} - v_f\|_W = \|v_{f_n} - v_f\|_\infty + \|\dot{v}_{f_n} - \dot{v}_f\|_1 \to 0$ cuando $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Por otro lado, por el teorema de la alternativa de Fredholm (teorema 3.3.4), $(A+I)^{-1}$ es un operador acotado. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_W &= \|(A+I)^{-1}v_{f_n} - (A+I)^{-1}v_f\|_W \\
&= \|(A+I)^{-1}(v_{f_n} - v_f)\|_W \\
&\leq \|(A+I)^{-1}\|\|(v_{f_n} - v_f)\|_W \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $\|f_n - f\|_1 \to 0$. $\square$

Por último, exhibimos dos ejemplos de problema con valor en la frontera para ilustrar la aplicación del teorema de existencia y unicidad.

Ejemplo 3.3.8. Consideremos el siguiente problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} -[\rho\dot{u}]^{\cdot} + qu = f \text{ c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0. \end{cases}$$

donde $\rho(x) = \sqrt{x}+1$, $q(x) = 1$ y $f(x) = 3\sqrt{x}+2-\frac{1}{2\sqrt{x}}-x+x^2$. La solución única es

$$u(x) = x(x-1)$$

Ejemplo 3.3.9. Considere el siguiente problema

$$\begin{cases} -\ddot{u} + u = f \text{ c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 1; \end{cases} \tag{3.14}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(2+\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right), \text{ si } x \in (0,1]; \\ 0, \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función es altamente oscilante y $f \notin L^2([0,1])$, esto último debido a que

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\left(2+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)^2 \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \infty.$$

Ahora como

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \leq \int_c^1 \frac{3}{\sqrt{x}} = 6\sqrt{x}\Big|_c^1 \leq 6$$

para toda $c \in (0,1]$, obtenemos por teorema 1.1.21, que $f \in L([0,1])$. Usualmente los resultados que garantizan la existencia y unicidad de problemas de contorno están dados para funciones que pertenecen al espacio $L^2([a,b])$, por ser este un espacio de Hilbert. Estos resultados clásicos no aplican al problema presentado en este ejemplo, pues $f \notin L^2([a,b])$. Sin embargo, al ser $f \in L^1([0,1])$, es posible aplicar el teorema 3.3.7 para garantizar la existencia y unicidad de dicho problema. En efecto, dado que $\rho = q = 1 > 0$, por el teorema 3.3.7 se tiene que existe una única solución $u_1 \in W_2^{1,1}$ del problema

$$\begin{cases} -\ddot{u} + u = f \text{ c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Resolvamos ahora el problema

$$\begin{cases} -\ddot{u} + u = 0 \text{ c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 1. \end{cases} \tag{3.16}$$

La ecuación característica es $-r^2 + 1 = 0$ cuyas soluciones son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$. Luego la solución general de la ecuación diferencial dada en (3.16) es $u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Usando las condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ ec_1 + e^{-1} c_2 &= 1. \end{aligned}$$

La única solución de este sistema es $c_1 = -\frac{1}{e^{-1}-e}$ y $c_2 = \frac{1}{e^{-1}-e}$, lo cual implica que la única solución del problema de contorno (3.16) es

$$u_2(x) = -\frac{1}{e^{-1} - e} e^x + \frac{1}{e^{-1} - e} e^{-x}$$

Sea $u = u_1 + u_2$. Luego u satisface el problema de contorno (3.14), ya que

$$-\ddot{u} + u = -(u_1 + u_2)^{\cdot\cdot} + (u_1 + u_2) = -\ddot{u}_1 + u_1 - \ddot{u}_2 + u_2 = f + 0 = f.$$

y

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1(0) + u_2(0) = 0 + 0 = u_1(0+) + u_2(0+) = u(0+), \\ u(1) &= u_1(1) + u_2(1) = 0 + 1 = u_1(1-) + u_2(1-) = u(1-). \end{aligned}$$

Finalmente mostremos que u es la única solución del problema (3.14). Supongamos que existe otra solución $z \in W_2^{1,1}$ de dicho problema. Luego $-\ddot{z} + z = f$ c.d.q. en $[0,1]$, $z(0) = z(0+) = 0$ y $z(1) = z(1-) = 1$. Tomando $w = z - u_2$, obtenemos que $w \in W_2^{1,1}$,

$$-\ddot{w} + w = -(z - u_2)^{\cdot\cdot} + (z - u_2) = -\ddot{z} + z - (-\ddot{u}_2 + u_2) = f - 0 = f$$

y

$$w(0) = 0 = w(0+), \quad w(1) = 0 = w(1-).$$

Por lo tanto, w satisface el problema (3.15). Por la unicidad de dicho problema se tiene que $w = u_1$, lo cual implica que $z = u_1 + u_2 = u$.

Conclusión

El objetivo general de esta investigación fue dar condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución de un problema de Sturm Liouville de la forma

$$\begin{cases} -(\rho\dot{u})^{\cdot} + qu = f \text{ c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases}$$

cuando $q, f \in L^1([0,1])$ y ρ es una función en $AC([0,1])$ tal que $|\rho(x)| \geq 0$, para todo $x \in [0,1]$ y algún $\alpha > 0$.

Nosotros encontramos, como lo establecimos en el teorema 3.3.7, que para que el problema tenga solución única en el espacio $W^{1,1}$ y la solución dependa continuamente de la función f, es suficiente que se cumpla alguna de las dos condiciones siguientes:

(E1) $\rho > 0$ y $q > 0$,

(E2) el problema homogéneo

$$\begin{cases} -[\rho\dot{u}]^{\cdot} + qu = 0 \text{ c.d.q. en } [0,1]; \\ u(0) = u(0+) = 0, u(1) = u(1-) = 0, \end{cases}$$

tiene únicamente la solución trivial.

Es importante destacar que este resultado generaliza los teoremas clásicos de existencia y unicidad de los problemas de Sturm-Liouville, al considerar como coeficientes a funciones Lebesgue integrables que no necesariamente pertenecen a $L^2([0,1])$.

Para lograr el objetivo general se introdujo a los espacios de Sobolev $W^{1,p}$ (definición 2.2.1), los cuales son una definición alternativa a la definición clásica, la modificación principal radica en la modificación del espacio de funciones prueba (definición 2.1.2). También se introdujo la derivada débil para estos nuevos espacios (definición 2.2.1) y, posteriormente, se analizaron propiedades de esta derivada. Mencionamos que al considerar esta alternativa de los espacios de Sobolev junto con el lema 2.1.4, logramos demostrar, de acuerdo a nuestra perspectiva, propiedades de la derivada débil en una forma más simple y fácil de entender.

En síntesis, el desarrollo que se hizo en esta tesis fue: En el capítulo 1 se proporcionó la teoría alrededor de la integral de Lebesgue, necesaria para el desarrollo de los posteriores resultados. Las demostraciones de la mayoría de los resultados expuestos en este capítulo, aunque elementales, son originales de esta tesis. En el capítulo 2 se introdujo una variación del espacio de las funciones prueba y posteriormente con este espacio se introducen los espacios de Sobolev $W^{1,p}$ y la derivada débil. Se muestran el teorema fundamental del cálculo y el teorema de integración por partes para la derivada débil. En el capítulo 3, se analizó el problema variacional:

$$\int_0^1 \rho\dot{u}\varphi' + \int_0^1 qu\varphi = \int_0^1 f\varphi, \quad \text{para toda } \varphi \in V, \tag{3.17}$$

con V dada en la definición 2.1.2, y el problema operacional:

$$B(u + A(u) - v_f, \varphi) = 0, \quad \text{para toda } \varphi \in V, \tag{3.18}$$

con B y A dados en (3.5) y (3.7). Se mostró que los problemas (3.3), (3.17) y (3.18) son equivalentes. De esta forma observamos que para que el problema (3.3) tenga solución basta con encontrar $u \in W_0^{1,1}$ tal que $u + Au = v_f$. Esto último es posible de hacer si el operador $A + I$ es sobreyectivo, equivalentemente (de acuerdo al teorema de la alternativa de Fredholm) si $A + I$ es inyectivo. Las condiciones **(E1)** y **(E2)** hacen que esto suceda.

Por último, se proporcionaron los ejemplos 3.3.8 y 3.3.9, que son aplicaciones del teorema de existencia y unicidad (teorema 3.3.7). En el ejemplo 3.3.9, f es una función altamente oscilante que no pertenece a $L^2([0,1])$.

Como continuación del trabajo se pretende diseñar un algoritmo numérico de la solución bajo las condiciones del teorema. Asimismo, el estudio que se hizo fue con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, como trabajo a futuro se pretende estudiar el problema con condiciones de Neumann.

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol. *Análisis matemático, Editorial reverté*. España, 1976.

[2] Robert G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*, volume 27. Wiley Online Library, 1995.

[3] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[4] Rainer Kress. *Linear integral equations*, volume 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, third edition, 2014.

[5] T. Pérez-Becerra, S. Sánchez-Perales, and J.J. Oliveros-Oliveros. The HK-Sobolev space and applications to one-dimensional boundary value problems. *Journal of King Saud University-Science*, 32(6):2790–2796, 2020.

[6] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-hill education, 2006.

[7] S. Sánchez-Perales, T. Pérez-Becerra, and V. Vázquez. Sturm-Liouville differential equations involving Kurzweil-Henstock integrable functions. *In submission*, 2021.

[8] Liliana Martínez Santiago. *El operador de Schrödinger sobre intervalos y gráficas métricas*. Bachelor's thesis, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Junio 2016.

[9] R. Wituła, E. Hetmaniok, and D. Słota. A stronger version of the second mean value theorem for integrals. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(6):1612–1615, 2012.