



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**MÉTODO DE REGULARIZACIÓN POR
VARIACIÓN TOTAL, PARA EL PROBLEMA DE
RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES CON
DOMINIOS PERDIDOS**

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

YESSENIA HERNÁNDEZ PÉREZ

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. SILVIA REYES MORA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO, ABRIL 2021.

Al esfuerzo y superación personal en la vida.

A mi familia.

A mis abuelos †.



Agradecimientos.

A mis padres, por brindarme siempre su apoyo.

A mis hermanas, por su motivación, presencia y apoyo en cada etapa de mi vida.

A mi directora de tesis, la doctora Silvia Reyes Mora, por la ayuda brinda, por los conocimientos transmitidos pero sobre todo por su paciencia, comprensión y entusiasmo. Por la motivación y observaciones que complementaron el desarrollo de esta tesis.

A mis amigos, por su confianza.



Índice general

Introducción.	1
1. Conceptos básicos.	4
1.1. Conceptos básicos de imágenes digitales.	4
1.1.1. Borde de una imagen.	9
1.2. Delta de Dirac.	11
1.3. Convolución.	14
1.4. Norma.	14
1.5. Operador adjunto.	15
1.6. Cálculo de variaciones.	16
1.7. Método iterativo.	16
1.8. Problema inverso.	17
1.8.1. Problema bien planteado.	18
1.8.2. Regularización.	22
1.8.3. Regularización por variación total.	23

2. Reconstrucción de dominios perdidos en imágenes.	26
2.1. Imágenes con dominios perdidos.	26
2.2. Modelo matemático del problema de inpainting.	29
2.3. Regularización para el problema de inpainting.	34
2.4. Reducción del problema a la ecuación de Euler-Lagrange.	38
3. Solución numérica.	42
3.1. Discretización del problema de contorno.	42
3.2. Implementación numérica de la solución.	48
3.3. Reconstrucción y análisis de algunas imágenes con dominios perdidos.	51
4. Conclusiones.	59



Introducción.

El interés por entender la relación existente entre las matemáticas y la restauración de imágenes son el impulso para el desarrollo del siguiente trabajo. La restauración de imágenes es un tema de gran impacto en la sociedad, ocasionado por el crecimiento de la información visual, proveniente de diversas áreas, como la medicina, publicidad, fotografía, historia, criminalística, entre otras. El problema surge por el deterioro y análisis de la imágenes.

Más allá de tener una definición tenemos una noción general de lo que es una imagen. Podemos decir que una imagen es la representación de un objeto real o irreal la cual puede ser olfativa, táctil, auditiva o visual y es una de las razones por las que se analiza desde diferentes puntos de vista.

Nosotros nos enfocaremos en las imágenes digitales, las cuales pueden ser obtenidas mediante un dispositivo electrónico como una cámara o un escáner o pueden ser generadas por medio de un software, la característica en común es que las imágenes se pueden manipular mediante un programa de computadora, lo que facilita la búsqueda y mejora de la información dañada sobre la imagen.

Así surge la necesidad de modelar el tipo de daño ocasionado sobre la imagen, haciendo necesario diseñar una estrategia que permita detectar las áreas dañadas para poder llevar a cabo el

proceso de restauración sobre dichas secciones, de aquí la necesidad de implementar métodos matemáticos y computacionales para la solución.

Los métodos matemáticos se aplican en tres problemas fundamentales del procesamiento digital de imágenes que son:

1. La restauración y reconstrucción de imágenes.
2. Reconocimiento de patrones.
3. Interpretación física.

Para nuestro trabajo nos apoyaremos de las ecuaciones diferenciales y del análisis funcional para poder analizar el problema de restauración y reconstrucción de imágenes, donde los modelos más empleados son: los determinísticos y estadísticos.

Nuestro trabajo está basado en un modelo determinístico, en el que utilizamos principalmente las ecuaciones diferenciales parciales y las funciones de variación acotada.

El objetivo del trabajo es dar una visión más completa de la relación existente entre las matemáticas y la computación en un tema de gran interés como lo es el problema de la reconstrucción de imágenes en dominios perdidos, presentando la base matemática que lo sustenta y la evidencia que hace que este problema sea mal planteado en el sentido de Hadamard, por tal razón se analiza un método de regularización para aproximar a la solución mediante el método de variación total.

La tesis se desarrolla de la manera siguiente:

En el Capítulo 1 (Conceptos básicos), se exponen conceptos de imágenes digitales, así como las definiciones de: la delta de Dirac, convolución, norma, problema inverso, cálculo variacional, método iterativo y regularización, los cuales son importantes para la comprensión y desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 2 (Reconstrucción de dominios perdidos en imágenes), iniciamos explicando cuales son las imágenes con el problema de dominios perdidos, lo que nos ayuda a comprender el problema a resolver, posteriormente, damos pie al planteamiento matemático de nuestro problema. El cual resolveremos de manera teórica apoyándonos de los conceptos previos, donde veremos que el problema de reconstrucción de imágenes con dominios perdidos es un problema inverso

mal planteado, por lo que implementamos una estrategia de regularización, para lo cual utilizamos la regularización por variación total; lo que permite obtener una solución aproximada del problema, concluyendo que encontrar la solución al problema es equivalente a encontrar la solución del problema de Neumann para la ecuación de Euler-Lagrange.

Finalmente en el Capítulo 3 (Solución numérica), desarrollamos el método numérico iterativo explícito de Euler-Lagrange para dar solución a la ecuación de Euler-Lagrange con condición de frontera de Neumann previamente obtenida. Primeramente desarrollamos la discretización del problema de contorno, para poder realizar la implementación numérica en el software Matlab, lo que nos ayuda a resolver el problema de imágenes con dominios perdidos, y finalmente se presenta el análisis de los resultados experimentales, para algunas imágenes en particular.

Conceptos básicos.

En este capítulo presentamos los conceptos básicos acerca de las imágenes digitales y los conceptos de matemáticas que utilizamos para el desarrollo de los capítulos posteriores.

1.1. Conceptos básicos de imágenes digitales.

La formación de una imagen necesita de una fuente de luz, que es la encargada de generar la intensidad de luz sobre cada elemento de la imagen, por lo que cada punto del objeto del cual se captura una imagen se comporta como una fuente de luz puntual, y es en la imagen donde se detecta cada uno de esos puntos. En términos generales, cuando se toma una foto, un píxel de la imagen es la energía de un punto de la imagen detectada por un sensor, así una imagen se puede representar como $U(x, y, t, \lambda)$; donde el par ordenado (x, y) ubica un elemento de la imagen, t es el momento de captura, y λ es la longitud de onda que en nuestro caso es la de la luz. Luego $0 < U(x, y, t, \lambda)$ dado que la intensidad de luz es siempre positiva ([11]).

Definición 1.1 *Matemáticamente, una imagen bidimensional u es una función de dos variables (x, y) es*

decir,

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{P}$$

definida por:

$$u(x, y) = a, a \in \mathbb{P},$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, x e y son las coordenadas en el plano, que definen puntos sobre la imagen, \mathbb{P} es el conjunto de valores de las diferentes tonalidades de la imagen.

De esta definición se concluye que:

- $0 \leq u(x, y) < \infty, \forall x, y \in \mathbb{R}^2$.
- $\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) dx dy$ existe.

Obtener una imagen digital requiere de muestrear y cuantificar una imagen del mundo continuo, lo que implica que las coordenadas y amplitud se digitalicen ([6]).

Primero, particionaremos la imagen para generar una malla, donde cada elemento de la partición representa un píxel, luego el tamaño de los píxeles, junto con el dato almacenado determinarán la resolución espacial y la cuantificación de la tonalidad de la imagen.

El tamaño de la imagen queda determinado por su resolución, donde la resolución es definida en término de tres cantidades ([15]):

- Resolución espacial. Nos permite conocer el tamaño de la imagen determinado por el número de columnas M y el número de filas N , lo que permite saber el número de píxeles empleados en la imagen visual capturada. En esto consiste realizar el muestreo de la imagen.
- Resolución temporal. Se emplea al capturar de manera continua un número de imágenes en un lapso, lo cual se emplea al generar los videos. Comúnmente expresado como cuadros por segundo, donde cada imagen individual se denomina cuadro de video.
- Resolución de bits. Esta nos permite definir el conjunto \mathbb{P} que corresponde a los valores de las diferentes tonalidades que puede tener un píxel y se relaciona con la cuantificación de

la imagen. La resolución de bits ¹ se relaciona con el número de binarios necesarios para el almacenamiento de la información de la tonalidad de la imagen. Por ejemplo, una imagen en blanco y negro solo tiene dos tonalidades (blanco o negro) así el número de binarios es 1 bit, para una imagen en escala de grises se necesitan 8 bit, lo que permite tener un conjunto de 256 tonalidades, y una imagen a color 24 bit. Así $\mathbb{P} = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ para los valores del píxel codificado con n bits.

En conclusión, una imagen digital está formada por un número finito de elementos llamados píxeles, donde cada píxel tiene una posición y un valor a que pertenece al conjunto \mathbb{P} , que es el conjunto de valores de las diferentes tonalidades que pueden estar presentes en la imagen.

Así, la discretización de una imagen continua $u(x, y)$ genera una imagen digital discreta $u(m, n)$, con M columnas y N filas, la cual es un conjunto de puntos en el plano, donde (m, n) son coordenadas discretas, $1 \leq m \leq M$ y $1 \leq n \leq N$.

En nuestro trabajo $u(m, n)$ denota el valor del píxel localizado en la fila m y columna n , ubicando el origen del sistema de coordenadas en la parte inferior izquierda de la imagen como podemos observar en la Figura 1.1. Cabe mencionar que existen sistemas que puede emplear la convención columna-fila, de igual manera el origen en la imagen puede variar, debido a que se puede colocar en el centro o en la parte superior izquierda de la imagen.

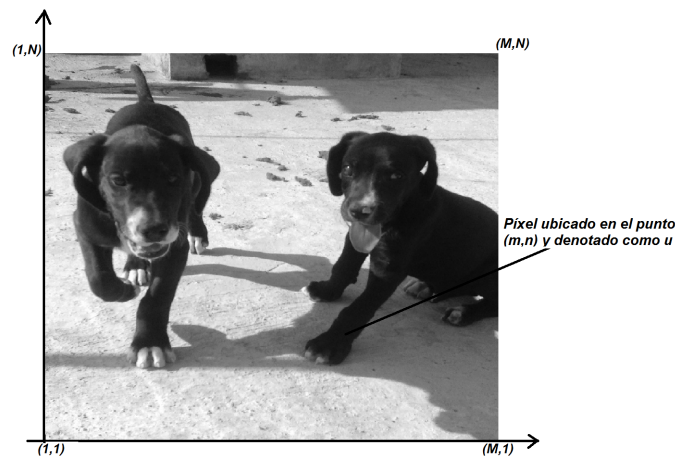


Figura 1.1: Representación de una imagen digital de $M \times N$ en el plano cartesiano.

¹Un bit es un dígito binario, que tiene el valor de 0 o 1.

Otra forma de representar una imagen digital es mediante una matriz $u \in M_{M \times N}(\mathbb{P})$, donde cada elemento de la matriz u_{mn} es conocido como un píxel y su valor representa la tonalidad del píxel, por lo que podemos escribir la matriz de $M \times N$ de la manera siguiente [6]:

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} u(1,1) & u(1,2) & u(1,N) \\ u(2,1) & u(2,2) & u(2,N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(M,1) & u(M,2) & u(M,N) \end{pmatrix}$$

Definición 1.2 Más concretamente, podemos definir una imagen digital como una función:

$$u : \{1, 2, \dots, M\} \times \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{P}$$

$$u(m, n) = a, a \in \mathbb{P} \quad (1.1)$$

donde \mathbb{P} es el conjunto de valores de las tonalidades que pueden estar presentes en la imagen, $M, N \in \mathbb{Z}$ representan el ancho y alto de la imagen respectivamente.

Nuestro trabajo se enfoca en imágenes monocromáticas particularmente en imágenes en escala de grises de 8 bits, como se muestra a continuación:

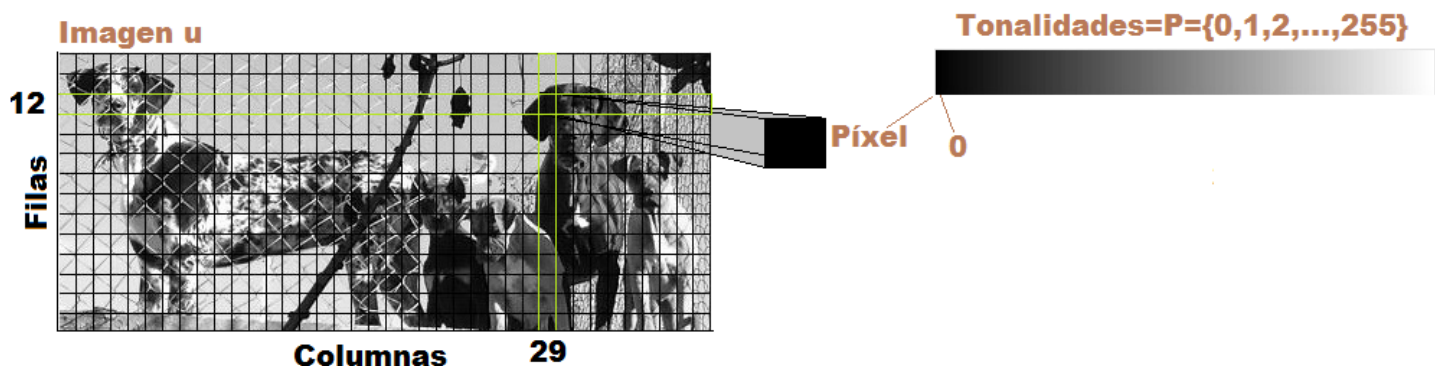


Figura 1.2: Imagen digital en escala de grises. La tonalidad del píxel con coordenadas $[M=29, N=12]$ es de 0. Fuente: Elaboración propia.

La imagen en la Figura 1.2 es una imagen monocromática de 8 bits, por lo que el conjunto

$\mathbb{P} = \{0, 1, 2, \dots, 2^8 - 1\} = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$ está formado por 256 tonalidades, donde 0 representa el color negro, 255 el color blanco y los valores entre 0 y 255 las diferentes tonalidades de grises del más oscuro 0 al más claro 255 que pueden estar presentes en la imagen, es decir, el valor que puede tener un píxel sobre la imagen. La Figura 1.2 representa una imagen digital cuyo tamaño representativo en píxeles es de 38×14 , lo que significa que la imagen se ha particionado en 38 columnas y 14 filas, donde la intersección de una fila con una columna representa un píxel cuyo valor asignado es un entero $a \in \mathbb{P}$ el cual es una tonalidad, es decir, la intensidad de luz en ese punto de la imagen.

Así mismo, podemos representar la imagen de la Figura 1.2 mediante la función siguiente:

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{P},$$

$$u(x, y) = a, a \in \mathbb{P},$$

donde $\Omega = \{(x, y) : x = 1, 2, \dots, 38, y = 1, 2, \dots, 14\}$.

Dado que la imagen es rectangular y esta particionada en cuadrados, tenemos un conjunto de 38×14 valores discretos que corresponden a las tonalidades de gris de cada uno de los píxeles luego cada uno de estos valores los podemos expresar mediante la matriz $u \in M_{38 \times 14}(\mathbb{P})$ de números reales. En la Figura 1.3 podemos ver la relación de la imagen digital ubicada en el plano cartesiano con su representación mediante una matriz, correspondiéndose cada elemento de la matriz $m \times n$ con las coordenadas en el plano $x = m, y = n$.

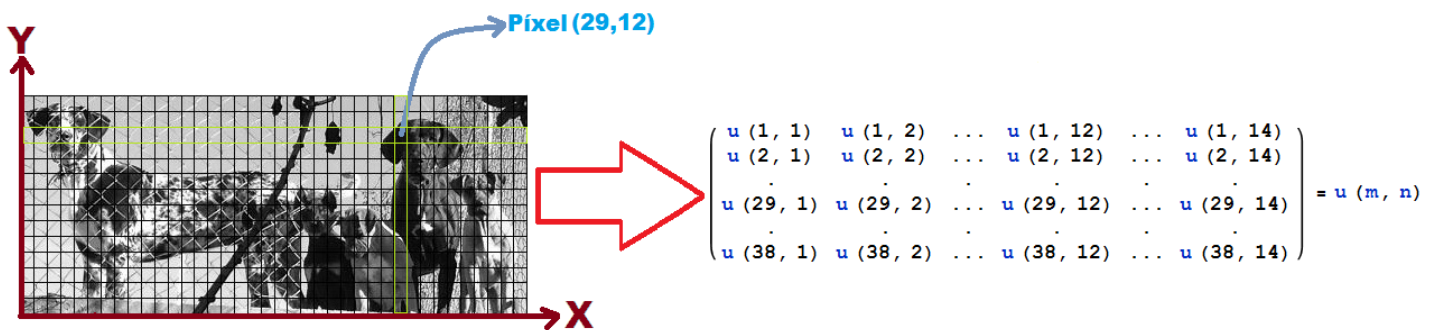


Figura 1.3: Relación entre el plano cartesiano y una matriz para la representación de una imagen digital. Fuente: Elaboración propia.

Aunque en este trabajo se tratan principalmente imágenes monocromáticas, los procedimientos aquí descritos también aplican para imágenes a color, puesto que estos sólo se diferencian en que la intensidad de cada color se almacenan en matrices independientes ([6, 15]). Por ejemplo para el modelo de color RGB (Red-Green-Blue), una imagen de color es representada por tres matrices que corresponden al canal rojo, verde y azul como observamos en la Figura 1.4, de esta manera el valor de cada píxel en la posición (x, y) de la imagen de color, es generado por la combinación de los valores de los píxeles en la posición (x, y) de cada una de las tres matrices respectivamente.

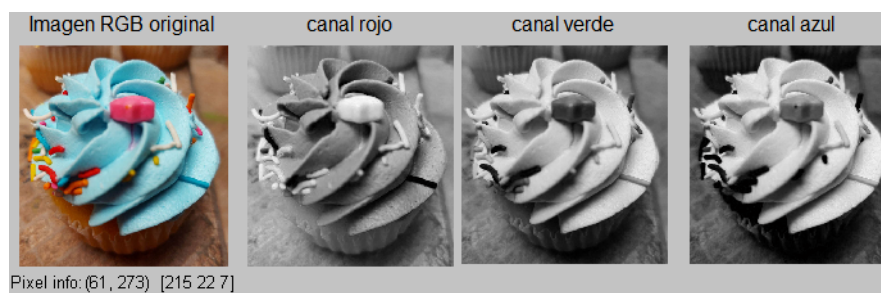


Figura 1.4: Representación de una imagen RGB y sus tres canales de color. Fuente: Elaboración propia.

1.1.1. Borde de una imagen.

Los bordes dentro de una imagen, nos ayudan a diferenciar los objetos contenidos en la imagen, debido a que los delimitan, de tal forma que podemos reconocer un objeto, aún si la imagen no tiene información tridimensional, textura o sombras como podemos apreciar en la Figura 1.5.



Figura 1.5: Los bordes nos ayudan a diferenciar una imagen de otra.

Una forma de detectar un borde, es encontrando las discontinuidades en la imagen, las cuales son cambios repentinos o saltos en la tonalidad de los píxeles, es decir un borde se caracteriza por el

cambio de una tonalidad clara a oscura o viceversa. Una vez encontrado el borde, el objetivo es realzarlo para diferenciar las regiones dañadas de las que no están dañadas; de aquí la necesidad de emplear operadores que permitan detectar discontinuidades, una forma es por medio de las derivadas, las cuales nos permiten ver las variaciones de una función, es por ello que los métodos más empleados utilizan operadores locales basados en el criterio de la primera y segunda derivada, y la comparación con máscaras orientadas ya definidas ([11]). Generalmente, las imágenes digitales presentan ruido, el cual se identifica como una variación en los niveles de gris, por lo que hay que considerar este factor al momento de detectar sus bordes.

Muchos de los métodos empleados para la detección de bordes utilizan el criterio de la primera derivada la cual emplea el operador gradiente y el criterio de la segunda derivada donde se utiliza el operador laplaciano ([11, 15]).

La detección de los puntos pertenecientes al borde por medio del laplaciano es encontrando los cruces por cero, dando una buena aproximación de la posición de los bordes, una de las desventajas es que puede detectar bordes erróneos por el hecho de ser muy sensible al ruido, por lo cual es necesario primero filtrar la imagen para reducir el ruido sobre esta y luego aplicar el operador, otra desventaja es que los píxeles no tienen exactamente el valor cero, por lo que los cruces por cero se consideran cuando dos píxeles contiguos tienen valores de signo diferente, la ventaja es poder detectar el borde independientemente de la dirección del mismo, otro operador es el Marrs-Hildreth, el cual considera dos características, una capaz de detectar los cambios de intensidades y la otra considera la escala de la imagen ([6]).

Por otro lado, los métodos basados en la primera derivada, emplean el operador gradiente. El gradiente de una función u denotado por $\nabla u(x, y)$ es el vector ([6]):

$$\nabla u(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

el cual nos dice que un borde existe si hay una discontinuidad, los detectores más empleados son el de Roberts, Prewitt, Sobel, Canny ([11]). Se considera que la primera derivada es positiva para un cambio de tonalidad mas clara y negativa para una tonalidad oscura, la desventaja es que depende de la dirección del borde. Los bordes son importantes debido a la información obtenida sobre la frontera de los objetos, la cual es útil para la segmentación de una imagen, el

reconocimiento de objetos, entre otras cosas ([6]).

1.2. Delta de Dirac.

La delta de Dirac denotada como $\delta(x)$, es empleada en el procesamiento de imágenes, debido a que puede representar de manera matemática, una fuente de luz puntual que ocupa una región pequeña, la cual actúa en un instante sobre un elemento de la imagen.

La importancia de la delta de Dirac está en que puede tomar valores grandes en un intervalo muy pequeño, permitiendo modelar diferentes fenómenos; por ejemplo, la presión originada al aplicar una fuerza sobre un punto, al momento de golpear una pelota con un bate, en el golpe de un martillo, en el instante que actúa una fuente de luz sobre un elemento de la imagen, entre otros; por lo que una de sus características es ser cero en casi todo punto excepto en un punto donde su valor es infinito.

La delta de Dirac tiene sus orígenes en 1930 y es Paul Dirac quien la investigó; por su parte, en 1948, Laurent Schwartz estableció la Delta como una distribución, es decir, un funcional que asigna a cada función un número real o complejo, con ciertas condiciones de continuidad.

La distribución delta de Dirac se puede definir como ([13]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) dx,$$

donde $\delta_\epsilon(x)$ es cualquier función de x , constante a pedazos, que satisface:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

y tal que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) dx = 1.$$

La propiedad más importante de la delta de Dirac es la propiedad de muestreo integral, la cual dice que para cualquier función f continua en una vecindad del origen se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x) dx = f(0); \quad (1.2)$$

por tal la $\delta(x)$ es considerada una distribución o función generalizada la cual posee ciertas propiedades.

Existen diferentes sucesiones δ_ϵ para representar a la delta, una de ellas se mostrará en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1.1 Consideremos la sucesión de funciones siguiente:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2n}, \quad n > 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como podemos ver en la Figura 1.6, cuanto más grande es el valor de n , el área bajo la curva de la función se parece a un rectángulo cada vez más angosto con respecto a su base y de mayor altura, cabe resaltar que el área bajo la curva de $\delta_n(x)$ siempre es uno.

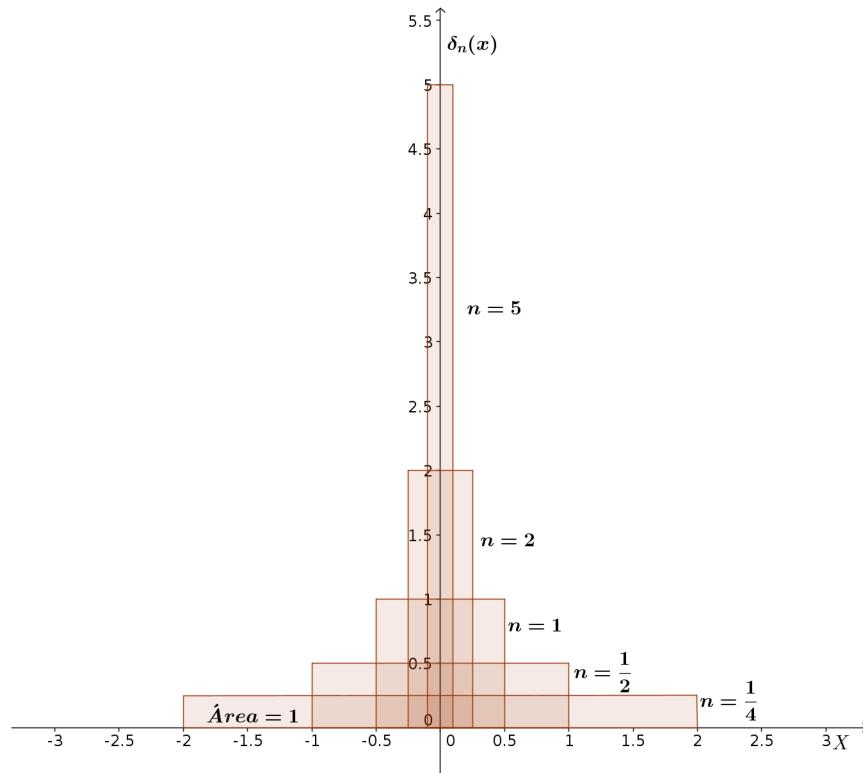


Figura 1.6: Representación para n funciones de la δ_n . Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, la distribución delta de Dirac satisface:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} \right) = 1, \quad n > 0.$$

De lo anterior, podemos definir la distribución delta de Dirac como:

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x). \quad (1.3)$$

Así, para $n = 1, 2, \dots$, se pueden construir funciones δ_n , las cuales se aproximan cada vez más a las propiedades que definen a la delta. Como observamos una distribución delta describe adecuadamente a los fenómenos que presentan impulsos en ciertos puntos.

El hecho de considerar una función generalizada para representar una imagen, es debido a que una imagen puede ser considerada una función sobre un conjunto acotado.

1.3. Convolución.

Consideramos la convolución en el trabajo, dado que esta se presenta cuando suponemos que la imagen dañada ha sido generada por la convolución de la imagen original con una función que describe un efecto de degradación.

La convolución representada con el operador $*$, es importante por sus aplicaciones en la estadística, la probabilidad, óptica, acústica, física, entre otras; por ejemplo un sistema lineal continuo e invariante con el tiempo puede describirse con la integral de convolución.

La convolución es una integral que expresa la cantidad de traslape de una función $v(x)$ cuando se desplaza sobre otra función $w(x)$. La convolución de dos funciones v y w se denota $v(x) * w(x)$ y se define como:

$$g(x) = (v * w)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(y)w(x - y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} v(x - y)w(y)dy.$$

Si la función generalizada delta de Dirac es una de las funciones de la convolución, entonces la convolución es conocida como: filtro del kernel, kernel de convolución o kernel si se considera un filtro inicial, y en el procesamiento de imágenes la convolución es generalmente conocida como función de dispersión puntual. La convolución de cualquier función con una delta es la misma, dicha propiedad de la delta es la identidad para la convolución ([15]).

1.4. Norma.

Dado que vamos a utilizar normas en la penalización de la variación total, definiremos lo que es una norma.

Definición 1.3 Sea X un espacio vectorial. Una norma en X es una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, denotada como: $\|\cdot\|$, que satisface las propiedades:

- Positividad, $\|x\| > 0$ para $x \neq 0$; $\|0\| = 0$.
- Subaditividad, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

- *Homogeneidad*, $\forall a$ escalar, $\|ax\| = |a| \|x\|$.

Un espacio normado es un espacio vectorial X dotado de una norma $\|\cdot\|$, para el cual podemos definir una métrica, definiendo la distancia entre dos puntos como:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Las normas más empleadas son las llamadas normas L_p , definidas como:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Elegir una norma u otra va a depender del problema a resolver; por ejemplo en la regularización por variación total, los resultados dependen de la elección de la norma.

1.5. Operador adjunto.

Definición 1.4 Sea X y Y espacios de Hilbert, $T : X \rightarrow Y$, un operador lineal acotado. Definimos el operador adjunto T^* de T , de la siguiente forma:

$$T^* : Y \rightarrow X,$$

tal que, para todo $x \in X$ y $y \in Y$,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Teorema 1.1 Sea X y Y espacios de Hilbert y $K : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado y $\alpha > 0$. Entonces para cada $y \in Y$, existe un único $x^\alpha \in X$ que minimiza el funcional de Tikhonov:

$$\|Kx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in X. \quad (1.4)$$

Este mínimo x^α esta dado por la solución única de la ecuación normal:

$$\alpha x^\alpha + K^*Kx^\alpha = K^*y, \quad (1.5)$$

y depende continuamente de y .

1.6. Cálculo de variaciones.

En este trabajo, el cálculo variacional nos permite encontrar u que minimice el modelo de la regularización por variación total para el problema de dominios perdidos.

El cálculo variacional es el campo del cálculo que se ocupa de funciones en espacios vectoriales. Un problema variacional es aquel que nos permite encontrar el valor máximo o mínimo de un funcional continuo J definido sobre un espacio de funciones F .

Definición 1.5 *Dado F un espacio de funciones, un funcional J se define como:*

$$J : F \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u = J(u).$$

A nosotros nos interesa calcular el mínimo de un funcional, es decir nos interesa saber la primera variación del funcional.

Definición 1.6 *La primera variación del funcional J en el punto u y en la dirección $\omega \in F$ se define como:*

$$\delta J(u; \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon\omega). \quad (1.6)$$

1.7. Método iterativo.

De manera general podemos pensar que reconstruir una imagen con regiones faltantes requiere de cierto tiempo, donde en cada lapso podemos restaurar una parte de la imagen y así de manera progresiva hasta poder obtener su reconstrucción total, es por ello que elegimos un método iterativo para poder obtener la imagen restaurada con el problema de dominios perdidos. Otra razón se debe a que una computadora realiza eficientemente operaciones de manera repetitiva, razón

por la que parte de los algoritmos empleados en la solución de grandes problemas de optimización son iterativos.

El método del descenso del gradiente empleado para minimizar una función de varias variables, es un método importante desde el punto de vista teórico y uno de los más empleados debido a su bajo costo de almacenamiento computacional y a que el número de operaciones por iteración es razonable.

El método del descenso se define mediante el algoritmo iterativo siguiente:

$$x^{k+1} = x^k + t^k \Delta x^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.7)$$

donde el escalar $t^k \geq 0$, llamado tamaño paso, longitud paso o factor escala en cada iteración k , Δx es un vector en \mathbb{R}^n llamado paso o dirección de búsqueda, y k denota el número de iteraciones.

El método de descenso cumple:

$$f(x^{k+1}) < f(x^k),$$

excepto cuando x^k es óptima, es decir partimos del punto x^k en dirección del gradiente negativo en búsqueda de un punto mínimo, el cual será x^{k+1} , lo cual sucederá en cada iteración ([3]).

Así, dos consideraciones importantes son la dirección de descenso Δx , y la elección del tamaño paso t . Si la dirección de búsqueda es el gradiente negativo $\Delta x = -\nabla f(x)$. Se tiene el llamado método del gradiente o método de descenso por gradiente.

1.8. Problema inverso.

Nuestro interés en los diversos fenómenos de nuestro entorno nos llevan a resolver problemas en los que conocemos las causas y necesitamos conocer las consecuencias; pero también conocer las causas a partir de los efectos observados. En este contexto se presentan los llamados problemas directos y los problemas inversos, los cuales no tienen una definición estricta, pero si tienen un concepto general en la comunidad científica.

Podemos decir que un problema directo consiste en hallar un resultado o un efecto $y = Kx$, a partir del conocimiento de una causa x y del proceso o modelo K .

De esta forma, cada problema directo sugiere dos problemas inversos:

- Hallar la causa x a partir del conocimiento del efecto y y del modelo K .
- Hallar el modelo K , a partir del conocimiento de una cantidad considerable de causas y efectos. Este se llama problema inverso de identificación del modelo K .

1.8.1. Problema bien planteado.

A los problemas inversos o a los problemas directos los podemos clasificar como problemas bien planteados o problemas mal planteados en sentido de Hadamard. Matemáticamente formulamos la definición de buen planteamiento como sigue:

Definición 1.7 Sean X, Y espacios normados y $K : X \rightarrow Y$ un operador (que puede ser lineal o no lineal). El problema inverso de hallar x a partir del conocimiento de K e y , que se escribe como $Kx = y$, es bien planteado si satisface:

1. $\forall y \in Y$, existe al menos un $x \in X$ tal que $Kx = y$; Existencia.
2. $\forall y \in Y$, existe a lo más un $x \in X$ tal que $Kx = y$; Unicidad.
3. La solución x depende continuamente de y , es decir para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} Kx_n = Kx$, se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; Estabilidad.

Las ecuaciones que no cumplan al menos una de estas propiedades son llamadas mal planteadas ([8]).

Ejemplo 1.2 Consideraremos la ecuación de Fredholm de primer tipo definida como:

$$\int_c^d K(x, y)u(y)dy = d(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.8)$$

donde $K : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, d una función continua en $[a, b]$ y u una función continua en $[c, d]$; el problema consiste en determinar una función u que satisfaga la ecuación (1.8), a partir de los datos conocidos K y d , el cual es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard. Considerando la relación $Kx = y$, dada en el planteamiento (1.8) y de la definición

de buen planteamiento tenemos que $K : X \rightarrow Y$ es el operador integral que relaciona el espacio $X = \mathcal{C}[c, d]$ y el espacio $Y = \mathcal{C}[a, b]$, donde X e Y están dotados de la norma infinito:

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Este mal planteamiento del problema se debe a que el problema es inestable.

Una forma de verificarlo es mostrando la existencia de una sucesión convergente $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|d_n - d_0\|_{\infty} \rightarrow 0$ pero que $\|u_n - u_0\|_{\infty} \not\rightarrow 0$.

Para ello consideraremos la siguiente sucesión:

$$u_n(y) = u_0(y) + n \cos(n^2 y), \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

tal que:

$$d_n(x) = \int_c^d K(x, y) u_n(y) dy, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Luego calculando:

$$\|d_n - d_0\|_{\infty}.$$

Por una parte tenemos:

$$\begin{aligned} |d_n(x) - d_0(x)| &= \left| \int_c^d K(x, y) u_n(y) dy - \int_c^d K(x, y) u_0(y) dy \right| \\ &= \left| \int_c^d K(x, y) (u_n(y) - u_0(y)) dy \right| \\ &= \left| \int_c^d K(x, y) (u_0(y) + n \cos(n^2 y) - u_0(y)) dy \right| \\ &= \left| \int_c^d K(x, y) n \cos(n^2 y) dy \right| \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
&= \left| \left[\frac{1}{n} K(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y) \right]_c^d - \frac{1}{n} \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \\
&= \left| \frac{1}{n} \left(\left[K(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y) \right]_c^d - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right) \right| \\
&= \frac{1}{n} \left| \left[K(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y) \right]_c^d - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right|.
\end{aligned}$$

Así:

$$\|d_n - d_0\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \frac{1}{n} \left| \left[K(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y) \right]_c^d - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right|,$$

luego:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} \frac{1}{n} \left| \left[K(x, y) \operatorname{sen}(n^2 y) \right]_c^d - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| K(x, d) \operatorname{sen}(n^2 d) - K(x, c) \operatorname{sen}(n^2 c) - \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right|,
\end{aligned}$$

por desigualdad triangular:

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left| K(x, d) \operatorname{sen}(n^2 d) \right| + \left| K(x, c) \operatorname{sen}(n^2 c) \right| + \left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}(n^2 y) dy \right| \right),$$

como K es continuo sobre un compacto, existe un número positivo M tal que $|K(x, y)| \leq M$, $\forall x, y$, también se sabe que $|\operatorname{sen} x| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto concluimos que:

$$\left| K(x, d) \operatorname{sen}(n^2 d) \right| \leq c_1 \quad \text{y} \quad \left| K(x, c) \operatorname{sen}(n^2 c) \right| \leq c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Luego tenemos que:

$$\left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2 y) dy \right| \leq \left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} dy \right|,$$

por una parte tenemos $\left| \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \right| \leq N$ luego,

$$\left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} dy \right| \leq N(d - c).$$

Así concluimos que:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left| K(x, d) \text{sen}(n^2 d) \right| + \left| K(x, c) \text{sen}(n^2 c) \right| + \left| \int_c^d \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{sen}(n^2 y) dy \right| \right), \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (c_1 + c_2 + N) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V = 0, \end{aligned}$$

donde $V = c_1 + c_2 + N$ es una constante, así para n suficientemente grande, d_0 y d_n están cerca.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(y) - u_0(y)\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{y \in [c, d]} |n \cos(n^2 y)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n |\cos(n^2 y)| \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Como podemos observar un pequeño error en los datos, produce un gran error en la solución exacta u , así nuestro problema inverso es inestable, por lo cual, dicho problema es mal planteado.

Una forma de resolver este tipo de problemas es por medio de una estrategia de regularización, donde la idea principal es aproximar el problema mal planteado mediante una familia de problemas bien planteados ([8]); así el objetivo es encontrar una familia de operadores acotados $R_\alpha : Y \rightarrow X$, que aproxime puntualmente al operador inverso $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow X$. Por lo cual

necesitamos conocer la teoría básica de la regularización.

1.8.2. Regularización.

El problema de reconstrucción de imágenes con pérdida de información es un problema mal planteado, por lo que es necesaria una estrategia de regularización para dar solución al problema, la cual nos va permitir construir una solución aproximada estable, debido a que ningún método matemático puede hacer estable un problema inestable.

Por un lado tenemos que muchos de los problemas inversos pueden ser planteados operacionalmente como:

$$Kx = y,$$

donde $K : X \rightarrow Y$ un operador (que puede ser lineal o no lineal), y X, Y espacios normados, luego el objetivo de implementar una estrategia de regularización es encontrar una aproximación x^δ , a la solución exacta x ; donde y^δ es una perturbación de y , con un error pequeño tal que:

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta.$$

Así, el objetivo es resolver la ecuación:

$$Kx^\delta = y^\delta.$$

Esto implica poder calcular una aproximación x^δ de la solución exacta x de la ecuación $Kx = y$ es decir, se desea que x^δ dependa de manera continua de y^δ . Por lo que nos interesa encontrar operadores lineales y acotados $R_\alpha : Y \rightarrow X$ que aproximen puntualmente al operador inverso no acotado K^{-1} .

Definición 1.8 Una estrategia de regularización es una familia de operadores lineales y acotados

$$R_\alpha : Y \rightarrow X, \quad \alpha > 0,$$

tales que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Tu = u, \quad \forall u \in X;$$

es decir, el operador $R_\alpha T$ converge puntualmente a la identidad ([8]).

Teorema 1.2 Sea R_α una estrategia de regularización para un operador compacto $T : X \rightarrow Y$ donde la $\dim X = \infty$. Entonces se concluye:

- Los operadores R_α no son uniformemente acotados con respecto a α ; esto es, existe una sucesión de $\alpha_j \rightarrow 0$ tal que $\|R_{\alpha_j}\| \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$.
- La familia de operadores $R_\alpha T x$ no converge uniformemente sobre subconjuntos acotados de X ; es decir, no existe una convergencia $R_\alpha T$ a la identidad en la norma del operador.

Definición 1.9 Una estrategia de regularización $\alpha = \alpha(\delta)$ es llamada admisible si $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ y

$$\sup \left\{ \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\| : y^\delta \in Y, \|Tx - y^\delta\| \leq \delta \right\} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

para cada $x \in X$.

Los métodos de regularización empleados son los métodos de regularización estándares o numéricos y el método de regularización de Tikhonov, uno de los más empleados para la solución de sistemas lineales mal planteados y problemas lineales de mínimos cuadrados.

Una característica de los métodos de regularización, para problemas de minimización por mínimos cuadrados es el parámetro de regularización, el cual se encarga de controlar el peso dado a la minimización, es decir, busca disminuir el error de minimización y regularización.

1.8.3. Regularización por variación total.

La regularización por variación total (VT) es un problema variacional, donde la solución al problema consiste en la minimización de un funcional, que en nuestro caso es la variación total de una imagen, lo que nos ayuda a encontrar una aproximación a la imagen original. Es decir, en nuestro problema tenemos una imagen dañada u_0 y necesitamos encontrar una imagen u la cual va ser similar a u_0 pero con menor variación total.

La forma más general de analizar un problema es en su forma continua, debido a que la solución del problema es independiente de la discretización del problema o del algoritmo numérico que se

emplee para su solución, razón por la cual empleamos el método de regularización por variación total en su forma continua.

La variación total para una imagen u se define como el operador:

$$VT(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto}, \quad (1.9)$$

donde u se define sobre el dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

El uso de la variación total como un término de regularización en problemas de imágenes es motivado por su capacidad para recuperar las discontinuidades de la imagen, lo que justifica su uso en diferentes campos del procesamiento de imágenes como la eliminación de ruido, el flujo óptico, la restauración de imágenes, reconstrucción de imágenes en dominios perdidos que es un proceso para restaurar pérdidas de información, o remover objetos señalados en la imagen, para HSI (tono, saturación, intensidad) se utiliza al momento de descomprimir una imagen, para cubrir los detalles perdidos al momento descomprimir una imagen hiperespectral², reconstrucción de superficie, segmentación, entre otros.

La variación total tiene propiedades de semi-continuidad, convexidad y homogeneidad, lo cual es útil al definir su minimización.

Las características más importantes de la regularización por variación total son ([16]):

- Preserva las ubicaciones de los bordes.
- El cambio de intensidad es inversamente proporcional a la escala de las características locales, razón por la cual la variación total puede eliminar el ruido en regiones pequeñas sin alterar las características de una escala mayor, pues es independiente de la intensidad original y es directamente proporcional al parámetro de regularización.
- Afecta de manera local las características de la imagen, lo que implica el desarrollo de algoritmos numéricos eficientes, lo cual disminuye los costos computacionales.

La regularización por variación total consiste en la minimización del funcional (1.9). Dos formas de ver el método de regularización para esta función son:

²Son las imágenes en las que se mide un espectro continuo para cada píxel, que consiste en recopilar y procesar información a lo largo de todo el espectro electromagnético.

La regularización de Tikhonov o problema sin restricciones:

$$\min_u \frac{1}{2} \|Tu - u_0\|_{L_2}^2 + \alpha VT(u), \quad (1.10)$$

donde α es una constante que da un balance para un buen ajuste de datos, $\|\cdot\|$ es la norma L_2 , a menos que se especifique otra, y las funciones $u, u_0 \in L^2(\Omega)$.

La formulación del problema con restricciones con ruido:

$$\min_u VT(u) \text{ sujeto a } \|Tu - u_0\|_{L_2}^2 = \sigma^2, \quad (1.11)$$

donde el ruido σ se considera conocido. Para ambos problemas, $\|Tu - u_0\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} |Tu - u_0|^2 dx$. La principal ventaja de la regularización por variación total es que no penaliza discontinuidades en u , es decir, preserva exactamente la localización de los bordes discontinuos, de igual forma, no penaliza la suavidad de la función ([16]).

Así, el problema de restauración de imágenes se puede escribir como:

$$\min_u \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |Tu - u_0|^2 + \alpha |\nabla u| \right) dx dy. \quad (1.12)$$

En el capítulo siguiente, desarrollaremos el método de variación total como un método de regularización del problema de dominios perdidos, empezando con la explicación de lo que es la reconstrucción de dominios perdidos de imágenes y cuales imágenes son las que abarca el problema, posteriormente plantearemos el problema y lo resolveremos utilizando los conceptos revisados en este capítulo.

2 Reconstrucción de dominios perdidos en imágenes.

En este capítulo desarrollamos el análisis del problema de reconstrucción de dominios perdidos en imágenes, lo cual nos conduce al problema de la ecuación de Euler-Lagrange con condición de frontera de Neumann.

2.1. Imágenes con dominios perdidos.

El problema de la reconstrucción de imágenes con dominios perdidos, comúnmente conocido como el problema de inpainting, consiste en estimar la recuperación de las partes dañadas o faltantes D , a partir de la información disponible en la imagen digital conocida u_0 ; esto es: $D \subset u_0 \subset \mathbb{R}^d$. Dicho problema lo encontramos en las imágenes que se van deteriorando con el tiempo, en la eliminación de objetos no deseados en la imagen o para superponer objetos, al quitar texto de imágenes, en el zoom digital, o en la pérdida de información debido a un lente de cámara sucio. La Figura 2.1 muestra un conjunto de imágenes con el problema de inpainting, donde podemos observar imágenes con regiones faltantes, las cuales se generaron por factores como: la captura, el deterioro por tiempo, al tener texto o por la obstrucción de objetos.



Figura 2.1: En esta imagen podemos observar imágenes con regiones faltantes, es decir con el problema de dominios perdidos. Fuente: Elaboración propia.

El término de inpainting para imágenes digitales fue introducido por Bertalmio en 2000 ([2]), quien además solucionó el problema de inpainting basado en modelos de EDP de orden superior, posteriormente Chan y Shen ([4]) implementaron la variación total para modelos de inpainting local, dicho modelo se relaciona con la variación total clásica desarrollada por Rudin, Osher y Fatemi (ROF) quienes emplearon la variación total para el problema de eliminación por ruido ([9]). En el problema de dominios perdidos, no existe información dentro del área dañada, por lo que una manera de recuperar la información es a través de su frontera. Por esta razón, empleamos el método de variación total, ya que nos permite recuperar los bordes, además de que comparadas con todas las estrategias variacionales de inpainting, el modelo de variación total tiene la menor complejidad y una implementación computacional no complicada.

El problema de inpainting consiste en encontrar la geometría y textura faltante, razón por la cual los métodos de inpainting se clasifican en dos grupos: los basados en la textura y los basados en la geometría, que emplean métodos de EDP o métodos variacionales para la solución del problema. Los métodos variacionales son de nuestro interés debido a que podemos modelar a la imagen como una función con cierto grado de suavidad, expresado en términos de las curvas de nivel o de la variación total de la imagen; una característica es que de entre todos los datos disponibles de la imagen, solo se utiliza la información de la frontera del dominio de inpainting para su restauración.

Una imagen u_0 con el problema de inpainting se puede dividir en dos partes: la parte sin información D y la parte con información Ω/D , como podemos observar en la Figura 2.2, donde

Ω representa el dominio de u_0 , D la región dañada o faltante en la imagen, que llamaremos el dominio de inpainting $D \subset \Omega$ y F la frontera entre Ω/D y D .

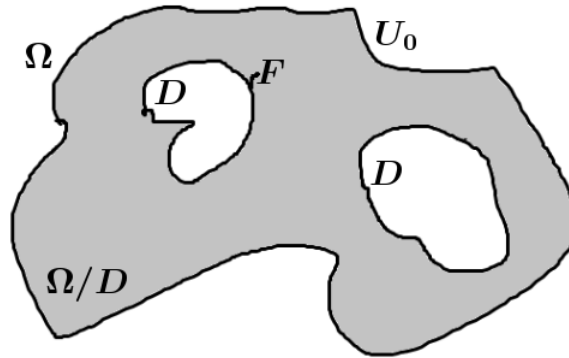


Figura 2.2: Representación de las regiones presentes en una imagen con el problema de dominios perdidos. Fuente: Elaboración propia.

De donde podemos definir λ_D como :

$$\lambda_D = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D; \\ 1, & \text{si } x \in \Omega/D. \end{cases}$$

Los métodos matemáticos de inpainting generalmente emplean la discretización de un modelo continuo, y en general se realizan mediante una discretización puntual.

En un problema de inpainting debemos considerar: la complejidad del dominio que va depender del problema en particular a resolver; por ejemplo, si lo que se quiere es quitar texto, entonces el dominio es el conjunto de letras, números y símbolos, cuando se considera a una imagen con pérdida de información, entonces el dominio de inpainting es la o las regiones sin información. La complejidad de la imagen se da al momento de considerar a una imagen como una función, pues el error de aproximación depende más de la forma y geometría del dominio de inpainting que del tamaño o el área total, por lo que los métodos locales con dominios pequeños tienen mejores resultados y, finalmente, se debe considerar la complejidad del patrón ([4]).

Los problemas de inpainting se clasifican principalmente en tres niveles: bajo, medio y alto. El trabajo se enfoca en el nivel bajo, que es donde están los problemas de procesamiento de imágenes; donde destacan dos características: la de localidad, es decir, cuando la información para recons-

truir la imagen se basa en la vecindad del área dañada, y la de funcionalidad; así los modelos solo dependen de las propiedades de las imágenes como funciones.

Un buen modelo de inpainting debe ser ([4]):

- I Local. Esto quiere decir que el dominio de inpainting puede ser recuperado solo con la vecindad del mismo y no requiere de un aprendizaje global.
- II Debe restaurar bordes rotos y suaves. Debido a que los bordes son importantes en el reconocimiento de objetos y en la segmentación de la imagen.
- III Evitar el ruido. Así es más fácil detectar características y restaurar la imagen.

2.2. Modelo matemático del problema de inpainting.

Nosotros estamos interesados en reconstruir imágenes con el problema de inpainting, donde una imagen deteriorada es aquella que presentan regiones sin información. Por ejemplo una pintura, una estructura, una fotografía, entre otras, pueden perder información de alguna o varias de sus regiones, la cual se genera por diversos factores como: el tiempo, al dejar caer algún líquido, al escribir sobre ellas, por un lente sucio, al agrietarse o al agregar o quitar objetos, por lo que el objetivo es recuperar o completar la información perdida. Y una forma de lograr el objetivo es plantear el problema de manera matemática como desarrollaremos a continuación.

Consideremos dos imágenes digitales u y u_0 , donde u representa la imagen original y u_0 la imagen con regiones faltantes, es decir, sin toda la información de la imagen u .

Supongamos que conocemos la imagen u_0 , que de aquí en adelante es el dato conocido del problema; así, el problema consiste en reconstruir la imagen u a partir del conocimiento de la imagen u_0 . Lo cual podemos ejemplificar con la Figura 2.3 en donde observamos dos imágenes, la imagen original u y la imagen u_0 en la cual la malla no está completa, así el problema consiste en recuperar las zonas faltantes de la malla de tal forma la imagen recuperada sea la mejor aproximación a la imagen u .

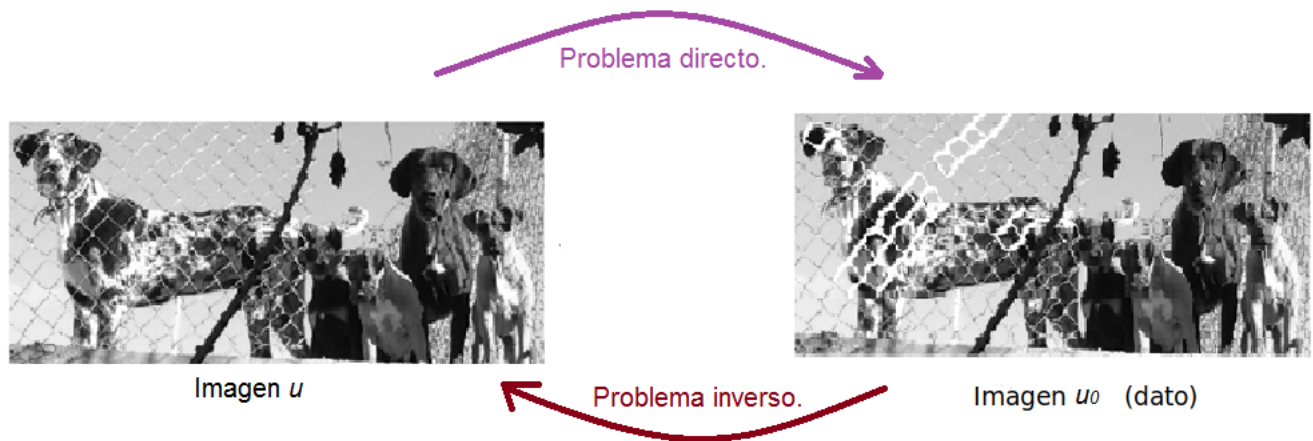


Figura 2.3: Ejemplo de cómo ver problema inverso de una imagen con regiones faltantes.

De manera general, no es posible saber los factores que ocasionaron la pérdida de información en la imagen u ; así, para poder plantear el problema, debemos considerar un operador T que represente el efecto de la pérdida de información ocasionado sobre la imagen u , de tal forma que la imagen obtenida al aplicar el operador T sobre u sea la imagen u_0 con regiones faltantes, para darnos una idea observamos la Figura 2.4.



Figura 2.4: Esta imagen nos representa un esquema de cómo obtener la imagen dañada u_0 .

Teóricamente lo anterior se puede escribir como:

$$Tu = u_0. \quad (2.1)$$

Así, la ecuación (2.1) genera el planteamiento de dos problemas: un problema directo que consiste en obtener a u_0 a partir del conocimiento del operador T y de la imagen original u ; y un problema inverso el cual consiste en encontrar la imagen u , que satisfaga la ecuación (2.1), a partir del conocimiento de la imagen u_0 y del operador T . Nosotros nos enfocaremos en resolver el problema

inverso.

De la definición 1.1 tenemos que las imágenes digitales u y u_0 se pueden ver como funciones de dos variables $u(x, y)$ y $u_0(x, y)$, donde u pertenece al espacio normado X y u_0 pertenece al espacio normado Y , tal que el operador T relaciona los espacios de funciones X e Y . Observemos que el operador T debe ser un operador lineal e invariante en el espacio, debido a que de esta forma se conservan las características de las imágenes con pérdida de información.

Por ejemplo, si se da un cambio de escala en la imagen u , nos interesa que al aplicar el operador T sobre u se obtenga una imagen u_0 con el efecto de pérdida de información en la misma escala que la imagen original; además no debe importar como descomponemos a una imagen ya que el resultado de aplicar T a cada una de sus partes da como resultado la imagen con regiones perdidas, también no debe afectar si desplazamos el origen (x, y) de la imagen original u , (α, β) unidades, al aplicar el operador T sobre la imagen desplazada $u(x - \alpha, y - \beta)$ obtendremos la imagen u_0 con el efecto de pérdida de información desplazada las mismas unidades, es decir no se modifican los valores de las tonalidades.

Todas las características descritas del operador T se pueden escribir teóricamente de la forma siguiente:

Propiedad de homogeneidad:

$$T \{au(x, y)\} = aT \{u(x, y)\}, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (2.2a)$$

Propiedad de aditividad:

$$T \{u_1(x, y) + u_2(x, y)\} = T \{u_1(x, y)\} + T \{u_2(x, y)\}, \quad (2.2b)$$

donde $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ son imágenes.

Propiedad de invarianza de desplazamiento:

$$T \{u(x - \alpha, y - \beta)\} = u_0(x - \alpha, y - \beta), \quad (2.2c)$$

para cualquier (x, y) y cualquier (α, β) .

Una vez definidas las propiedades del operador T lo siguiente es obtener su expresión, así que para seguir nos apoyaremos de la distribución Delta de Dirac en su forma bidimensional, la cual define como:

$$\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x = y = 0; \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad (2.3)$$

y tiene las propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad (2.4a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta = F(x, y), \quad (2.4b)$$

para cualquier función continua $F(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in X$.

La propiedad (2.4b) nos permite expresar la imagen $u(x, y)$ en términos de la delta de Dirac como:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.5)$$

Así, aplicando el operador T a la expresión $u(x, y)$ dada en (2.5) se tiene:

$$T\{u(x, y)\} = T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right\} = u_0(x, y), \quad (2.6)$$

dado que el operador T y el operador integral son lineales; por la propiedad de aditividad, se tiene:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T \{u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)\} d\alpha d\beta, \quad (2.7)$$

luego $u(\alpha, \beta)$ es un escalar debido a que es independiente de x y y , y por la propiedad de homogeneidad, se tiene:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) T \{\delta(x - \alpha, y - \beta)\} d\alpha d\beta, \quad (2.8)$$

donde el término $T\{\delta(x - \alpha, y - \beta)\}$ nos indica como afecta el impulso en el punto (α, β) al aplicar el operador T , dando como resultado una función t , lo cual se define como:

$$T\{\delta(x - \alpha, y - \beta)\} = t(x - \alpha, y - \beta). \quad (2.9)$$

De esta manera, podemos reescribir la ecuación (2.7) como:

$$u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) t(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.10)$$

La cual nos permite obtener la imagen u_0 con regiones faltantes, además la ecuación (2.10) es una integral de Fredholm de primer tipo; y como vimos en el Ejemplo 1.2, este es un problema mal planteado.

Como se ha mostrado, el operador T se puede escribir como:

$$Tu(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, \beta) t(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta, \quad (2.11)$$

luego, podemos reescribir la ecuación (2.10) de la forma:

$$Tu = u_0. \quad (2.12)$$

Así, lo que hemos obtenido hasta ahora, es el planteamiento operacional del problema de dominios perdidos en imágenes; que es un problema mal planteado en sentido de Hadamard. Se sabe que el problema de unicidad de la solución se puede resolver con buscar en subespacios de X , y el problema de existencia se puede resolver con buscar a la solución en espacios X' tales que $X \subset X'$. Sin embargo, los problemas de estabilidad no se pueden resolver mediante este tipo de consideraciones, razón por la que se debe analizar desde el punto de vista de la teoría de regularización. De aquí la necesidad de implementar una estrategia de regularización definida en (1.8), lo que permite al problema satisfacer la condición de estabilidad, dada en la Definición 1.7, y de esta forma obtener una solución aproximada a la solución del problema.

Nuestro objetivo teóricamente es encontrar la solución u de la ecuación (2.12) con T un operador compacto y uno a uno. La inyectividad de T nos dice que la solución es única.

2.3. Regularización para el problema de inpainting.

Supongamos que $u_0 \in \text{Rango}(T)$ y T es invertible, al aplicar T^{-1} a ambos lados de la ecuación (2.12) tenemos:

$$u = T^{-1}u_0,$$

de donde u es la solución exacta, lo cual ocurriría si $u_0(x, y)$ estuviera libre de ruido. Sin embargo, en la práctica u_0 va acompañada de un ruido $r(x, y)$, lo que nos lleva a definir $u_0^\delta(x, y) = u_0(x, y) - r(x, y)$, así el problema que debemos resolver es:

$$Tu = u_0^\delta, \tag{2.13}$$

si suponemos que $u_0^\delta \in \text{Rango}(T)$, al aplicar T^{-1} a ambos lados de la ecuación (2.13) tenemos:

$$u = T^{-1}u_0^\delta,$$

pero, debido a que el problema es mal planteado, esta solución estará alejada de la solución exacta u , por ello, considerando el dato con error u_0^δ nosotros queremos construir una aproximación u^δ a la solución exacta u de la ecuación (2.12). Así en lugar de resolver la ecuación (2.12), lo que necesitamos resolver, es la ecuación:

$$Tu^\delta = u_0^\delta. \tag{2.14}$$

En general T no es invertible o no es posible calcular su inversa; sin embargo, si T es invertible, al aplicar el operador inverso en ambos lados de la ecuación (2.14) nos queda:

$$u^\delta = T^{-1}u_0^\delta, \tag{2.15}$$

de tal forma que la mejor solución que podemos encontrar a la solución exacta u es una aproximación u^δ , que sea estable, es decir, que u^δ dependa de manera continua de u_0^δ . Donde el error en

los datos es a lo más δ , es decir:

$$\|u_0 - u_0^\delta\| \leq \delta. \quad (2.16)$$

Por tanto, de manera intuitiva, el objetivo es construir una estrategia de regularización; esto significa encontrar operadores $R : Y \rightarrow X$, lineales y acotados es decir que sean continuos, tales que sean invertibles y que R_α converja al operador T^{-1} de manera puntual. Una característica a resaltar es que resolveremos un problema bien planteado en sentido de Hadamard.

Si consideramos que $u_\alpha^\delta := R_\alpha u_0^\delta$ es la mejor solución al problema bien planteado (2.14), entonces podemos escribir el error de aproximación de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^\delta - u\| &= \|R_\alpha u_0^\delta - u\| \\ &= \|R_\alpha u_0^\delta - R_\alpha u_0 + R_\alpha u_0 - u\| \\ &= \|R_\alpha(u_0^\delta - u_0) + R_\alpha u_0 - u\| \end{aligned}$$

por desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} &\leq \|R_\alpha(u_0^\delta - u_0)\| + \|R_\alpha u_0 - u\| \\ &\leq \|R_\alpha\| \|u_0^\delta - u_0\| + \|R_\alpha T u - u\| \end{aligned}$$

luego por (2.16):

$$\|u_\alpha^\delta - u\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha T u - u\|,$$

que es la estimación fundamental, lo que significa que el error en la solución siempre va estar acotado por ese término. Así el error total entre la solución exacta y la aproximada es la suma de dos errores: el primer término $\delta \|R_\alpha\|$ es el error cometido en los datos, luego por Teorema 1.2 $\|R_\alpha\| \rightarrow \infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ y el segundo $\|R_\alpha T u - u\|$ es el error de la aproximación entre u_α^δ y u , luego por definición de estrategia de regularización este término tiende a 0 cuando $\alpha \rightarrow 0$, como podemos observar en la Figura 2.5. Así, para la mejor aproximación u_α^δ de u necesitamos un α

pequeño y por otro lado la estabilidad requiere un α grande, entonces necesitamos una estrategia para elegir $\alpha = \alpha(\delta)$ de tal manera que el error total sea el menor posible, como podemos observar en la Figura 2.5, α^* en la intersección es el óptimo, el cual permite alcanzar el mínimo de la función, por lo que α^* es el parámetro de regularización; así la mejor elección del α es aquella que minimice:

$$\delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha T u - u\|. \quad (2.17)$$

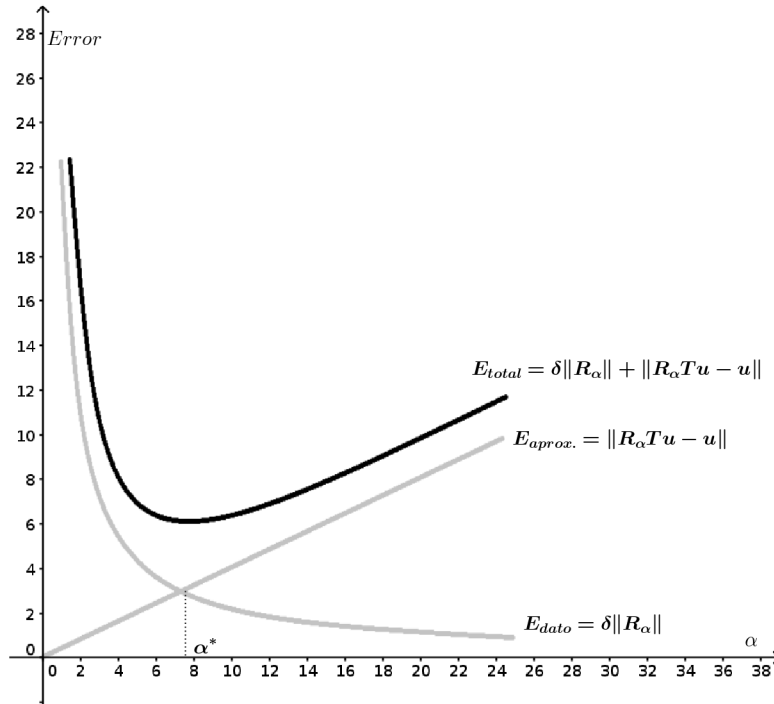


Figura 2.5: Representación del comportamiento del error total, como función de α .

Dada una estrategia de regularización, queremos encontrar una solución regularizada que esté cerca de la solución exacta, es decir que el error entre la solución regularizada y la solución exacta sea el menor posible.

Luego el método de regularización empleado es el de la regularización variacional, donde la solución regularizada u_α^δ es la que minimiza el funcional definido como:

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{F}(Tu, u_0^\delta) + \alpha \mathcal{R}(u), \quad (2.18)$$

donde \mathcal{F} representa el término de proximidad de los datos, es decir, es el error de la aproximación entre u_α^δ y u , $\alpha > 0$ es el parámetro de regularización y \mathcal{R} representa el término de regularización el cual penaliza las propiedades de la imagen u , es decir es la influencia del ruido en los datos, de tal forma que se preserven las esquinas y bordes, lo cual dependerá de la elección de la norma.

El nombre de cada método empleado en la solución del problema, se relaciona con la elección de la norma. Por ejemplo si utilizamos la norma 1 el método es llamado $L1$, con la norma 2 es llamado variación total, con la norma de Huber, "Huber", si emplea la norma cuadrática es ROF. Nosotros emplearemos la regularización por variación total por las razones mencionadas en la sección 1.8.3.

Una de las estrategias de regularización más empleadas es la de Tikhonov. La cual consiste en minimizar el funcional $J_\alpha(u)$ de la ecuación (2.19), y por la teoría de regularización tenemos que el mínimo u^δ del funcional satisface la ecuación normal:

$$\alpha u^\delta + T^* T u^\delta = T^* u_0,$$

donde T^* el operador adjunto, así, u^δ es la solución regularizada del funcional de Tikhonov, la cual puede escribirse como $u^\delta = R_\alpha u_0$, donde:

$$R_\alpha = (\alpha I + T^* T)^{-1} T^*.$$

En conclusión, para resolver el problema de inpainting, consideraremos $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado y $u_0 \in Y$, se quiere determinar $u \in X$ que minimice el funcional de Tikhonov definido como:

$$J_\alpha(u) = \|Tu - u_0\|^2 + \alpha \|u\|^2. \quad (2.19)$$

La desventaja de emplear el funcional dado en (2.19) es que penaliza las discontinuidades de la imagen; por esta razón, y por las propiedades del gradiente, se cambia la norma $L^2(\Omega)$ en la regularización de Tikhonov por la norma $L^1(\Omega)$, conocida como regularización por variación total, permitiendo plantear la minimización del funcional:

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \|Tu - u_0\|^2 + \alpha \|u\|_{VT}, \quad (2.20)$$

que es la propuesta de Rudin, Osher y Fatemi, la cual se emplea en el problema de eliminación de ruido en una imagen, y en la solución del problema de dominios perdidos, con la diferencia de la definición de su dominio. Así, el funcional a minimizar es:

$$J_\alpha(u) = \frac{\lambda_D}{2} \|Tu - u_0\|_{L_2}^2 + \alpha \|u\|_{VT}, \quad (2.21)$$

donde λ_D se define como:

$$\lambda_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D; \\ 1, & \text{si } x \in \Omega \setminus D. \end{cases}$$

Ω representa el dominio de la imagen, D la región faltante y $\Omega \setminus D$ la región con información de la imagen como podemos observar en la Figura 2.2. Lo cual permite plantear el problema sólo en el dominio perdido y eliminar el ruido al mismo tiempo en toda la imagen.

La ecuación (2.21) se puede describir en término de la definición de las normas como:

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |Tu - u_0|^2 dx dy + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy. \quad (2.22)$$

Luego, nuestro problema consiste en encontrar u que minimice el funcional definido en la ecuación (2.22).

2.4. Reducción del problema a la ecuación de Euler-Lagrange.

Nos interesa conservar los bordes de la imagen, ya que esta característica nos permite diferenciar una imagen de otra, razón por la cual empleamos la norma de variación total que es la norma adecuada para las imágenes por las características ya mencionadas en la sección 1.8.3.

Rudin, Osher, y Fatemi (ROF) ([9]) emplearon la variación total para el problema de eliminación de ruido. Posteriormente, Chan y Shen ([4]) la emplean en el problema de restauración de imágenes con dominios perdidos.

El funcional que deducimos en la expresión (2.22) define la estrategia de regularización por va-

riación total para el problema de inpainting.

Una vez planteado el funcional a minimizar, debemos hallar su mínimo. Para ello, calcularemos su primera variación (Definición 1.6). Sea $\omega(x, y)$ una función infinitamente diferenciable y con soporte compacto en Ω la cual representa la dirección en la que nos movemos y sea ε un escalar cualquiera.

La primera variación del funcional $J_\alpha(u)$ en el punto u y la dirección ω se define como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J_\alpha(u + \varepsilon\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy + \alpha \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\omega)| dx dy \right\} = 0,$$

Por un lado tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_D |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{d\varepsilon} |T(u + \varepsilon\omega) - u_0|^2 dx dy \\ &= \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(T(u + \varepsilon\omega) - u_0) \omega dx dy \\ &= \lambda_D \int_{\Omega} (Tu - u_0) \omega dx dy. \end{aligned}$$

y por otro que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \alpha \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\omega)| dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \alpha \int_{\Omega} \sqrt{(u_x + \varepsilon\omega_x)^2 + (u_y + \varepsilon\omega_y)^2} dx dy && \text{Por definición} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha \int_{\Omega} \frac{(u_x + \varepsilon\omega_x) \omega_x + (u_y + \varepsilon\omega_y) \omega_y}{\sqrt{(u_x + \varepsilon\omega_x)^2 + (u_y + \varepsilon\omega_y)^2}} dx dy && \text{Derivando} \\ &= \alpha \int_{\Omega} \frac{u_x \omega_x + u_y \omega_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} dx dy && \text{Evaluando} \\ &= \alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy && \text{Reescribiendo} \end{aligned}$$

Considerando a $F = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ y $f = \omega$ una función escalar, por la identidad vectorial $\operatorname{div} fF = f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f$ tenemos que:

$$\operatorname{div} \left(\omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \omega \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \omega;$$

despejando:

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \omega = \operatorname{div} \left(\omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \omega \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

Por lo que:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = \alpha \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy - \alpha \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy. \quad (2.23)$$

Como podemos observar, en la primera integral de lado derecho de la igualdad tenemos un campo sobre una región acotada Ω , por lo que podemos aplicar el teorema de la divergencia $\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot n ds$, así podemos reescribir la expresión (2.23) como:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = \alpha \int_{\partial\Omega} \omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot n ds - \alpha \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy. \quad (2.24)$$

Por definición tenemos que $\nabla u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n}$ luego, si consideramos la condición:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

entonces la igualdad (2.24) se reduce a:

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \omega}{|\nabla u|} dx dy = -\alpha \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy; \quad (2.25)$$

por lo tanto la primera variación de J_{α} en el punto u y la dirección ω es:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} J_{\alpha}(u + \varepsilon\omega) = \int_{\Omega} \lambda_D (Tu - u_0) \omega dx dy - \alpha \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy. \quad (2.26)$$

Una condición necesaria para que el funcional $J_\alpha(u)$ tenga un mínimo es que la primera variación en u sea igual a cero, es decir:

$$\int_{\Omega} \left(\lambda_D (Tu - u_0) - \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) \omega \, dx dy = 0; \quad (2.27)$$

y como es para cualquier ω en Ω , de la expresión (2.27), tenemos que:

$$\lambda_D (Tu - u_0) - \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0; \quad (2.28)$$

la cual es la ecuación de Euler-Lagrange.

Por lo que, encontrar el mínimo del funcional $J_\alpha(u)$ es equivalente a encontrar la solución del problema de contorno siguiente:

$$\lambda_D (Tu - u_0) - \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0, \quad (2.29)$$

con la condición,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

también conocido como el problema de Neumann para la ecuación de Euler-Lagrange.

En el capítulo siguiente desarrollaremos un método numérico para resolver la ecuación (2.29), para lo cual elegimos el método iterativo explícito de Euler, debido a su fácil implementación, y aunque no es el mejor método para la solución, si nos ayuda a comprender el desarrollo de nuestro trabajo, además, otra razón es que una vez comprendido este método se puede implementar métodos mas eficientes, los cuales son generados a partir del análisis de este método.

Solución numérica.

En este capítulo resolveremos numéricamente la ecuación (2.29), aplicando el método iterativo explícito de Euler también conocido como: método de descenso de gradiente o método de marcha en el tiempo. Dicho método pertenece a los métodos basados en el gradiente, donde la característica es la de emplear la información sobre la derivada permitiendo generar algoritmos eficientes. Para dar solución a la ecuación (2.29) de manera numérica primero necesitamos discretizar la ecuación.

3.1. Discretización del problema de contorno.

Para comenzar, construimos una malla del dominio Ω de la imagen con puntos discretos, donde cada nodo, se define por las coordenadas (i, j) , $0 \leq i \leq M$ y $0 \leq j \leq N$; luego en una imagen digital, el tamaño de los píxeles es el mismo, así consideramos que el tamaño de la partición h es una unidad y el tamaño de la malla se determina por el tamaño de la imagen, es decir de $M \times N$, como podemos ver en la Figura 3.1.

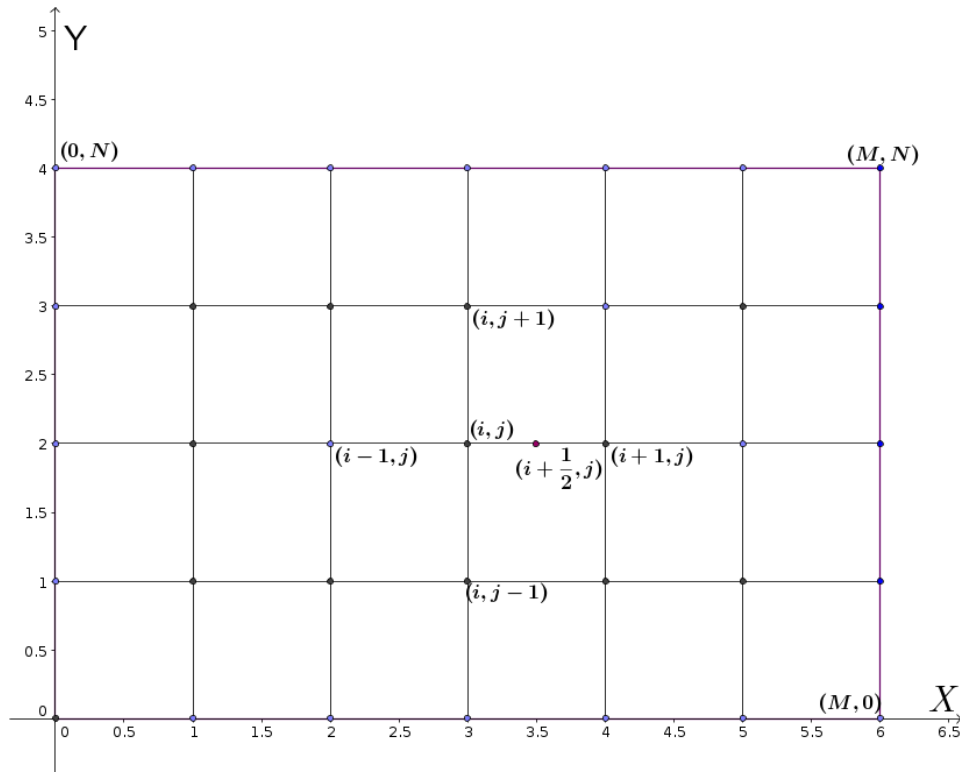


Figura 3.1: Representación de la malla empleada en la solución por diferencias finitas.

Consideremos $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial tal que:

$$\phi = \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

De la definición del operador divergencia, tenemos que:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Lo siguiente es aproximar cada una de las derivadas parciales, para lo cual emplearemos el método de diferencias finitas, por definición de diferencia centrada en el punto (x_i, y_j) ([5]) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i+\frac{h}{2}}, y_j) - u(x_{i-\frac{h}{2}}, y_j)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_{j+\frac{h}{2}}) - u(x_i, y_{j-\frac{h}{2}})}{h}.$$

Para simplificar la notación consideraremos $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$. Así para el píxel en el par ordenado (i, j) , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) &\approx \frac{\left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{h}{2},j} - \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{h}{2},j}}{h} \\ &\approx \frac{\frac{1}{|\nabla u|_{i+\frac{h}{2},j}} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{1}{|\nabla u|_{i-\frac{h}{2},j}} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{|\nabla u|_{i+\frac{h}{2},j}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \frac{1}{|\nabla u|_{i-\frac{h}{2},j}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right) &\approx \frac{\left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{h}{2}} - \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{h}{2}}}{h} \\ &\approx \frac{\frac{1}{|\nabla u|_{i,j+\frac{h}{2}}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} - \frac{1}{|\nabla u|_{i,j-\frac{h}{2}}} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{|\nabla u|_{i,j+\frac{h}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \frac{1}{|\nabla u|_{i,j-\frac{h}{2}}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \right). \end{aligned}$$

Además, de la definición del módulo del gradiente tenemos:

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}.$$

Por lo que:

$$|\nabla u|_{i\pm\frac{h}{2},j} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i\pm\frac{h}{2},j} \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i\pm\frac{h}{2},j} \right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{u_{i\pm 1,j} - u_{i,j}}{h} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j\pm 1} - u_{i,j}}{h} \right)^2},$$

así:

$$\frac{1}{|\nabla u|_{i\pm\frac{h}{2},j}} \approx \frac{h}{\sqrt{(u_{i\pm 1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j\pm 1} - u_{i,j})^2}}$$

y

$$\frac{1}{|\nabla u|_{i,j\pm\frac{h}{2}}} \approx \frac{h}{\sqrt{(u_{i\pm 1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j\pm 1} - u_{i,j})^2}},$$

Luego tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} \right)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2}} \right).$$

Finalmente se tiene que:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j}}{\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}} \right. \\ \left. - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2}} \right).$$

Por otra parte, la condición de frontera de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, nos permite definir las condiciones que se deben cumplir en los píxeles del contorno de la imagen digital.

Para ello, de la aproximación de la derivada normal dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}, \quad (3.1)$$

se sigue que el contorno formado por los píxeles de la forma $(0, j)$, $0 \leq j \leq N$ cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{1,j} = u_{0,j}.$$

Análogamente, para la frontera inferior de la imagen, formada por el conjunto de píxeles de la forma $(i, 0)$, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{i,1} = u_{i,0},$$

para el lado formado por el conjunto de píxeles (M, j) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{M-1,j} - u_{M,j}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{M-1,j} = u_{M,j}$$

y para el contorno superior formado por el conjunto de píxeles (i, N) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,N-1} - u_{i,N}}{h} = 0, \quad \text{entonces} \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}.$$

Por lo anterior, podemos decir que la condición de frontera de Neumann se expresa como:

$$u_{1,j} = u_{0,j}, \quad u_{i,1} = u_{i,0}, \quad u_{M-1,j} = u_{M,j}, \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}. \quad (3.2)$$

Así, lo que hemos obtenido es la discretización del problema de contorno (2.29), el cual se reescribe como:

$$\lambda_D (Tu_{i,j} - u_0) - \alpha \operatorname{div}(\phi)_{i,j} = 0, \quad (3.3)$$

con la condición,

$$u_{1,j} = u_{0,j}, \quad u_{i,1} = u_{i,0}, \quad u_{M-1,j} = u_{M,j}, \quad u_{i,N-1} = u_{i,N}. \quad (3.4)$$

Lo siguiente, es dar solución a la ecuación mediante la implementación de un método iterativo (sección 1.7).

Podemos decir, que reconstruir una imagen con el problema de inpainting implica un proceso de

cambio sobre la imagen, en un determinado tiempo, el cual inicia con la imagen dañada $u_0(x, y)$ y termina con la mejor aproximación de la imagen u . Esto implica construir un conjunto de imágenes $u^n(i, j)$ tal que $u^0(i, j) = u_0(i, j)$ es la imagen dañada, en nuestro caso es la imagen con regiones faltantes; luego $n = 0$ es el punto de partida, lo que significa que cada que aumente n se recupera información en la imagen, es decir si consideramos que u^n es la imagen con el problema de inpainting en el paso actual n , entonces la imagen siguiente es u^{n+1} de tal manera que en determinado momento se obtendrá la mejor solución a la forma dinámica de la ecuación (3.3), esto nos permite pensar en un método iterativo para resolver el problema, donde n denota el número de iteraciones, por lo que planteamos la forma dinámica de la ecuación (3.3) como :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_D \left(Tu_{i,j}^n - u_0 \right) + \alpha \operatorname{div} (\phi)_{i,j}^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

con la condición inicial

$$u_{i,j}^0 = u_0(i, j). \quad (3.6)$$

El objetivo es encontrar la solución u que satisfaga la ecuación (3.5), la cual será la mejor aproximación a la imagen original.

La ecuación (2.29) es igual a la ecuación (3.5) si y solo si $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, es decir se busca que la solución u obtenida mediante el método iterativo no tenga más cambios con respecto al tiempo, para que sea considerada como la solución al problema inicial.

Por otra parte tenemos que una discretización para $\frac{\partial u}{\partial t}$ en el momento n es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{h},$$

luego la ecuación (3.5) se reescribe como:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{h} = \lambda_D \left(Tu_{i,j}^n - u_0 \right) - \alpha \operatorname{div} (\phi)_{i,j}^n,$$

la cual es equivalente a:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + h \left(\lambda_D \left(Tu_{i,j}^n - u_0 \right) - \alpha \operatorname{div}(\phi)_{i,j}^n \right) \quad (3.7)$$

con la condición de frontera:

$$u_{1,j}^n = u_{0,j}^n, \quad u_{i,1}^n = u_{i,0}^n, \quad u_{M-1,j}^n = u_{M,j}^n, \quad u_{i,N-1}^n = u_{i,N}^n. \quad (3.8)$$

Así con cada iteración obtendremos la solución óptima la cual será:

$$u_{i,j}^{n+1} = u^{n+1}(x_i, y_j), \quad (3.9)$$

que es la solución al problema de dominios perdidos, lo que significa que es la mejor aproximación a la imagen original.

3.2. Implementación numérica de la solución.

Lo siguiente en este análisis, es presentar la implementación del método de descenso de gradiente para nuestro problema, lo cual se realizó con ayuda del software Matlab R2009a.

Donde los datos de entrada son: la imagen dañada, el parámetro de regularización, la especificación del dominio perdido lo que corresponde a la región sin información y el número de iteraciones que es nuestro criterio de paro.

Código del programa.

```

1 %Imagen de entrada es nuestra u_0
2 R = imread('nombre de la imagen.png'); % lee la imagen.
3 if (isa(R, 'uint8'))
4     C=rgb2gray(R); % convierte a escala de gris
5     A=im2double(C); % convierte a double
6 else
7     A=im2double(C);

```

```

8 end
9 %Dimensiones de la imagen (columna, fila)
10 [N,M]= size(A);
11 %Imagen ruidosa la cual es nuestra Tu
12 u = A;
13 %Imagen restaurada
14 F = zeros(N,M); %( fila ,columna)
15 % Definir numero de iteraciones
16 z=10;
17 % Definir parametro de regularizacion
18 p=.7;
19 %Constante positiva para evitar division por cero.
20 g = 0.05;
21 % Definir el valor para el dominio perdido.
22 v = 91/255; % el valor corresponde al seleccionar con rojo las regiones perdidas
    sobre la imagen.
23 %paso de tiempo
24 t =.01;
25 for k=1:z
26     for i=2:M-1
27         for j=2:N-1
28             a=1/(sqrt((u(j , i+1)-u(j , i))^2+(u(j+1,i)-u(j , i))^2+g^2));
29             b=1/(sqrt((u(j , i)-u(j , i-1))^2+(u(j+1,i)-u(j , i))^2+g^2));
30             c=1/(sqrt((u(j , i)-u(j , i-1))^2+(u(j , i)-u(j-1,i))^2+g^2));
31             %Definiendo la divergencia
32             div=(u(j , i+1)+u(j+1,i)-2*u(j , i))*a-((u(j , i)-u(j , i-1))*b)-((u(j , i)-u(j-1,i))*c);
33             %Definiendo la funcion caracteristica
34             if u(j , i)==v
35                 l=0;
36             else
37                 l=1;
38             end
39             %Ecuacion del problema
40             F(j , i)=u(j , i)+t*(l*(A(j , i)-u(j , i))-p*div);
41         end

```

```

42  end
43  %Condicion de frontera de Neumann
44  %u(0,i)=u(1,i); parte superior de la imagen en el programa (inferior en el plano)
45  for i=2:M-1
46      a=1/(sqrt((u(1,i+1)-u(1,i))^2+(u(2,i)-u(1,i))^2+g^2));
47      b=1/(sqrt((u(1,i)-u(1,i-1))^2+(u(2,i)-u(1,i))^2+g^2));
48      %definiendo la div
49      div=(u(1,i+1)+u(2,i)-2*u(1,i))*a-((u(1,i)-u(1,i-1))*b);
50      %definiendo la funcion caracteristica
51      if u(1,i)==v
52          l=0;
53      else
54          l=1;
55      end
56      %ecuacion del problema
57      F(1,i)=u(1,i)+t*(l*(A(1,i)-u(1,i))-p*div);
58      end
59      %u(j,0)=u(j,1); lado izquierdo de la imagen (derecho en el plano)
60      for j=2:N-1
61          a=1/(sqrt((u(j,2)-u(j,1))^2+(u(j+1,1)-u(j,1))^2+g^2));
62          c=1/(sqrt((u(j,1)-u(j,1))^2+(u(j,1)-u(j-1,1))^2+g^2));
63          div=(u(j,2)+u(j+1,1)-2*u(j,1))*a-((u(j,1)-u(j-1,1))*c);
64          if u(j,1)==v
65              l=0;
66          else
67              l=1;
68          end
69          F(j,1)=u(j,1)+t*(l*(A(j,1)-u(j,1))-p*div);
70      end
71      %u(j,M-1)=u(j,M); lado derecho de la imagen (izquierdo en el plano)
72      for j=2:N-1
73          a=1/(sqrt((u(j,M)-u(j,M))^2+(u(j+1,M)-u(j,M))^2+g^2));
74          b=1/(sqrt((u(j,M)-u(j,M-1))^2+(u(j+1,M)-u(j,M))^2+g^2));
75          c=1/(sqrt((u(j,M)-u(j,M-1))^2+(u(j,M)-u(j-1,M))^2+g^2));
76          div=(u(j,M)+u(j+1,M)-2*u(j,M))*a-((u(j,M)-u(j,M-1))*b)-((u(j,M)-u(j-1,M))*c);

```

```

77     if u(j,M)==v
78         l=0;
79     else
80         l=1;
81     end
82     F(j,M)=u(j,M)+t*(l*(A(j,M)-u(j,M))-p*div);
83 end
84 %u(N-1,i)=u(N,i); lado inferior de la imagen (superior en el plano)
85     for i=2:M-1
86         a=1/(sqrt((u(N,i+1)-u(N,i))^2+(u(N,i)-u(N,i))^2+g^2));
87         b=1/(sqrt((u(N,i)-u(N,i-1))^2+(u(N,i)-u(N,i))^2+g^2));
88         c=1/(sqrt((u(N,i)-u(N,i-1))^2+(u(N,i)-u(N-1,i))^2+g^2));
89         div=(u(N,i+1)+u(N,i)-2*u(N,i))*a-((u(N,i)-u(N,i-1))*b)-((u(N,i)-u(N-1,i))*c);
90         if u(N,i)==v
91             l=0;
92         else
93             l=1;
94         end
95         F(N,i)=u(N,i)+t*(l*(A(N,i)-u(N,i))-p*div);
96     end
97 u=F;
98 end
99 F1=im2uint8(F);
100 imtool(F1,[]); %muestra imagen restaurada.

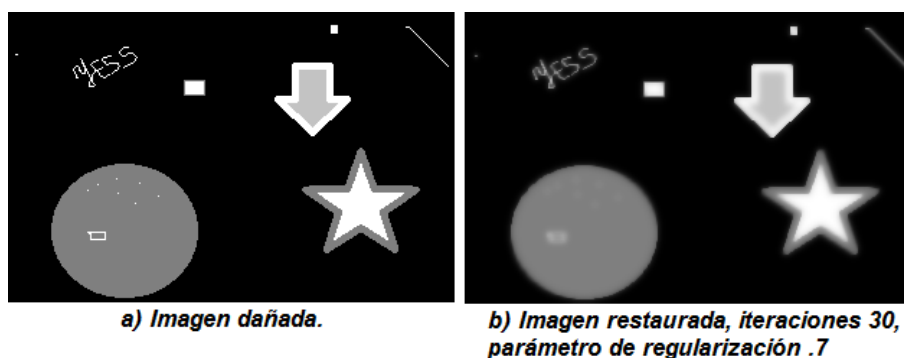
```

3.3. Reconstrucción y análisis de algunas imágenes con dominios perdidos.

A continuación mostramos algunos resultados, obtenidos mediante la implementación del método para resolver el problema de dominios perdidos.

Intuitivamente, podemos pensar en que si faltan más píxeles, la recuperación de una imagen tiene un error mayor. Sin embargo, el objetivo del ejemplo de la Figura 3.2 cuyo tamaño es de 314×202 píxeles es mostrar que el error depende más de la geometría y la forma del dominio perdido que

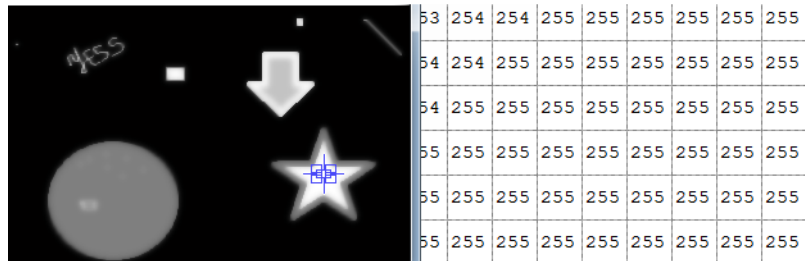
de su tamaño o área total. El inciso *a* de la Figura 3.2, muestra una imagen donde los píxeles de tonalidad blanca representan los dominios perdidos en la imagen; como observamos, los dominios perdidos en la imagen tienen diferentes áreas y formas. Por ejemplo, el área total del dominio perdido que forman las letras es igual al área del cuadrado junto a ellas; de igual forma, el área del cuadrado en la parte superior de la flecha, es igual al área del dominio perdido representado por el rayón, ubicado en la parte superior derecha de la imagen; en esta imagen, la forma más grande del dominio perdido es el interior de la estrella. El inciso *b*, muestra una restauración de la imagen del inciso *a* obtenida en 1.4 segundos; donde observamos como el método da una mejor aproximación a las tonalidades de los píxeles de formas angostas, lo que era de esperarse pues el error de aproximación del dominio perdido depende más de su forma y geometría que del tamaño o área total del dominio de inpainting, esto se pudo observar en la restauración de los dominios perdidos que tienen la misma área pero diferente forma. La imagen del inciso *c* muestra los valores de las tonalidades obtenidas para el cuadrado arriba de la flecha y el rayón, que tienen misma área pero diferente forma, permitiéndonos observar la restauración de estos dominios perdidos, cuyo valor de tonalidad en un inicio era 255, así al observar los valores de las tonalidades, para la región angosta representada por el rayón, observamos una restauración más uniforme y cercana a la tonalidad oscura en comparación con las tonalidades obtenidas para el cuadrado. En este resultado no se consiguió una buena aproximación para el centro de la estrella, dado que los valores de las tonalidades obtenidas siguen siendo blancas, lo cual se ejemplifica en el inciso *d*, que muestra una parte del centro de la estrella. Como observamos en este ejemplo, el método da una mejor aproximación a regiones con área pequeña y angostas. La mejor solución a este problema será aquella que complete los dominios perdidos con una tonalidad similar a su frontera.



200	207	206	196	170
213	218	219	212	194
211	222	224	220	206
205	220	225	223	213
191	215	222	221	213
162	204	215	215	197

109	124	111	73	43	26	16	10	6	3	2
33	49	73	82	71	44	27	16	10	6	3
19	29	44	68	82	71	44	27	16	10	6
11	17	27	42	68	82	71	44	27	16	10
7	10	16	26	42	68	82	71	44	27	16
4	6	10	16	26	42	68	82	71	44	27
2	3	6	10	16	26	42	68	82	71	44

c) Valores de las tonalidades, obtenidas en la restauración de la imagen del inciso b, de una parte del rayón y del cuadrado arriba de la flecha.



d) Valor de las tonalidades del centro de la estrella.

Figura 3.2: Recuperación del dominio perdido para regiones de formas diferentes. Fuente: Elaboración propia.

El inciso *a* de la Figura 3.3, se presenta la imagen original sin dominios perdidos de 809×356 píxeles. El inciso *b*, muestra una imagen con dominios perdidos y ruido tipo gaussiano. Suponemos que el ruido surge al momento de digitalizar la imagen, y que el dominio perdido son las partes faltantes de la malla ciclónica marcadas en color rojo. El inciso *c* de la misma Figura 3.3, es una imagen restaurada que se obtiene a partir del método de regularización por variación total, en la que observamos que el ruido se ha eliminado y se ha completado las regiones faltantes, en 20 iteraciones y a partir del parámetro de regularización fijo dado por .007. Se pudo observar que si aumentamos el número de iteraciones, en lugar de mejorar la imagen, se tiene una peor aproximación; este problema se genera por la distribución de la tonalidad de los píxeles en la imagen. Sin embargo, en la imagen del inciso *d* de la misma Figura 3.3, se ha cambiado el parámetro de regularización a .34, lo que provoca el aumento de ruido en la imagen recuperada; esto es de esperarse ya que, de acuerdo a la teoría de regularización, debe existir un parámetro óptimo para obtener la mejor aproximación a la solución; el tiempo para la restauración de la imagen fue de

1.8 segundos. Como observamos en este ejemplo, la elección del parámetro de regularización es fundamental para obtener una imagen restaurada similar a la original.

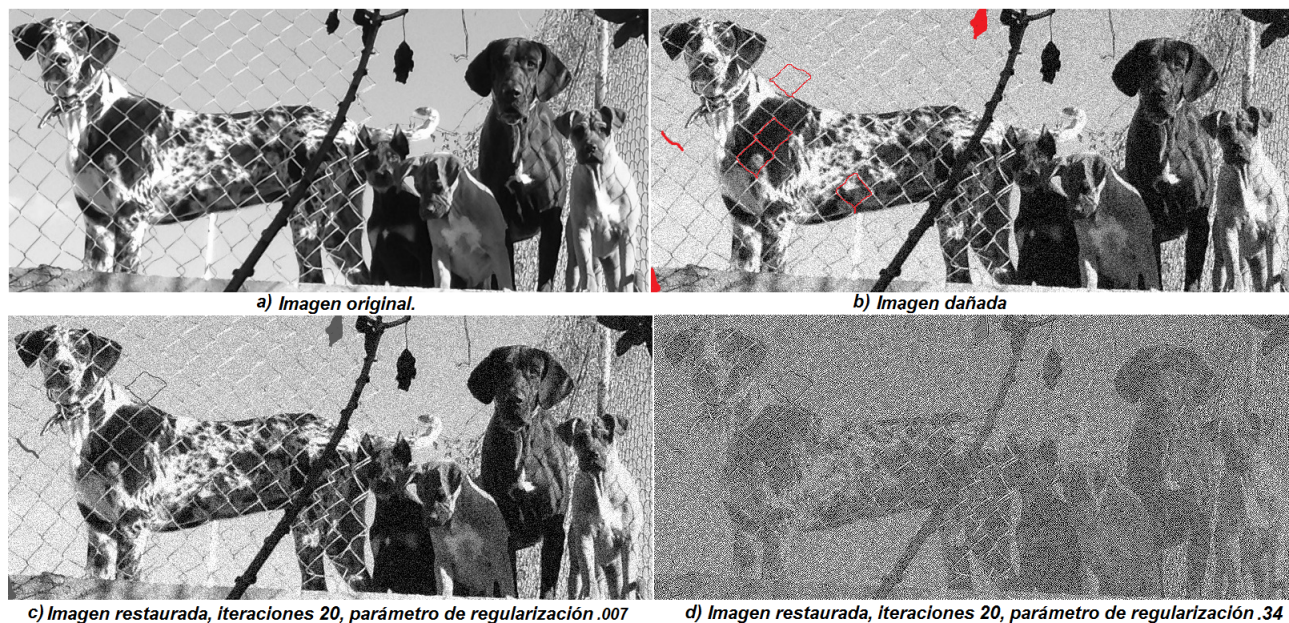


Figura 3.3: a) imagen original sin dominio perdido. b) imagen con dominio perdido y ruido. c) y d) imágenes restauradas con distinto parámetro de regularización. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3.4, a diferencia de la Figura 3.3 vista anteriormente; el inciso *a*, muestra una imagen de 1290×1355 cuyo dominio perdido son partes más angostas y de color amarillo, en la que hemos considerado un ruido sal y pimienta, de adquisición de la imagen, que se caracteriza por cubrirla de forma dispersa con píxeles blancos y negros. Después de aplicar el método de reconstrucción a la imagen digitalizada del inciso *a*, a partir de 15 iteraciones y un parámetro de regularización de 2.7, se obtiene en 5.97 segundos la imagen mostrada en el inciso *b*, en la cual se tiene una disminución de las regiones faltantes y del ruido en la imagen. Al aumentar el número de iteraciones a 100 se obtiene en 33.27 segundos la imagen del inciso *c*, donde las regiones perdidas tienen una mejor aproximación, pero el ruido incrementa, y se distinguen más los contornos de los objetos dentro de la imagen. El inciso *d* muestra el objetivo de la restauración el cual es obtener una imagen libre de ruido y sin regiones faltantes. En este ejemplo, podemos observar que el método no permite obtener una imagen completamente libre de ruido.



Figura 3.4: a) imagen digitalizada, con error de captura de tipo sal y pimienta y dominios perdidos. b) y c) imágenes restauradas por el método de solución, con distinto número de iteraciones. d) imagen objetivo. Fuente: Elaboración propia.

El ejemplo mostrado en la Figura 3.5, tiene por objetivo mostrar que el método de regularización por variación total es capaz de preservar los bordes en la imagen. En el inciso *a* de la Figura 3.5 muestra la imagen de 559×317 píxeles sin dominios perdidos. En el inciso *b*, se presenta una imagen digital con unos rayones, que son los dominios perdidos. En el inciso *c* de la Figura 3.5 se muestra la imagen recuperada, obtenida con 60 iteraciones y con parámetro de regularización igual a 0.01 donde observamos que las regiones dañadas siguen siendo muy notables, dado que el valor de la tonalidad obtenida en el dominio perdido es muy cercano a la tonalidad del dominio perdido, como se observa en los valores de la tonalidad, lo cual se ejemplificó con un segmento del dominio perdido restaurado. Así, si el valor del parámetro de regularización es pequeño se necesitan más iteraciones para una mejor aproximación. Mientras que en el inciso *d*, se muestra

una imagen recuperada con el mismo número de iteraciones, pero con mayor parámetro de regularización .25, donde podemos observar que las regiones faltantes son poco notables pero el ruido en la imagen se ha incrementado. No obstante, lo destacado en esta imagen es el buen reconocimiento de los bordes de los objetos dentro de la imagen. Lo cual era de esperarse ya que se sabía de antemano, que el método propuesto preserva los bordes de los objetos que se encuentran en el interior de la imagen.

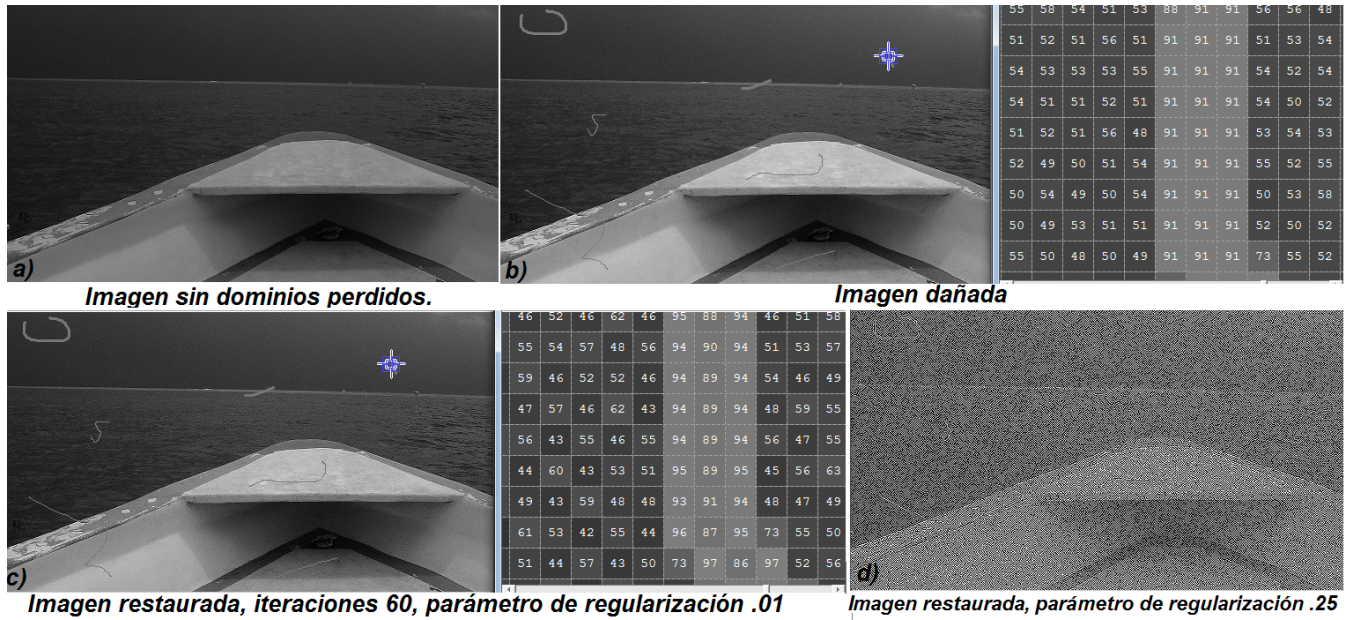


Figura 3.5: Comparación de la restauración de una imagen dañada. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3.6 el inciso *a*, muestra la imagen digitalizada cuyos dominios perdidos son los recuadros blancos y de tamaño 541×349 píxeles. En el proceso de restauración consideramos el parámetro de regularización .07 fijo, así cambiando el número de iteraciones, se observó que, mientras más aumentamos el número de iteraciones, la imagen visual mejora, pero no se obtiene la tonalidad deseada, esto se debe a la tonalidad de los bordes de los cuadros dentro de la imagen y al parámetro de regularización. Donde el tiempo de restauración de la imagen fue de 1.8 segundos para 30 iteraciones, 4.8 segundos para 120 iteraciones y 11.2 segundos para 300 iteraciones.

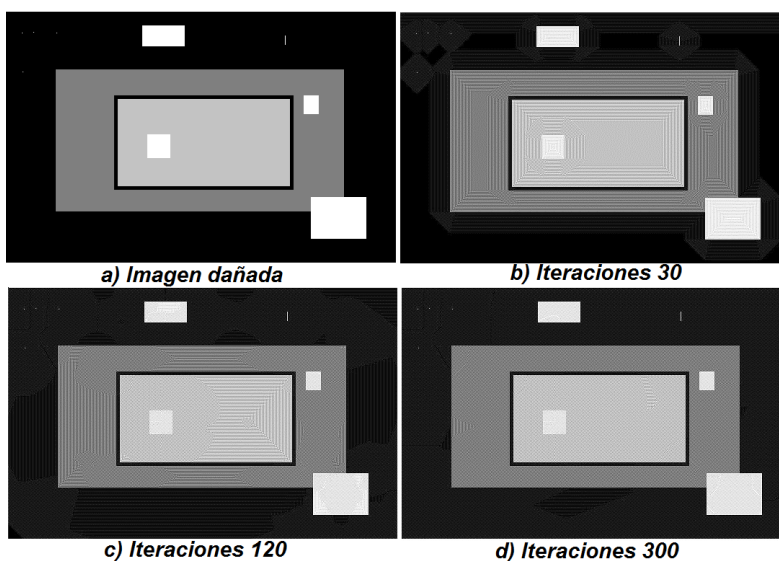


Figura 3.6: Restauración de la imagen con un parámetro de regularización .07. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3.7 se fijó el número de iteraciones en 40 y se cambió el parámetro de regularización en cada restauración, donde la imagen del inciso *a* es la misma imagen con regiones faltantes de la Figura 3.6, como se puede observar mientras más grande es el parámetro de regularización la imagen se distorsiona. Donde el tiempo de restauración fue de 2.1 segundos.

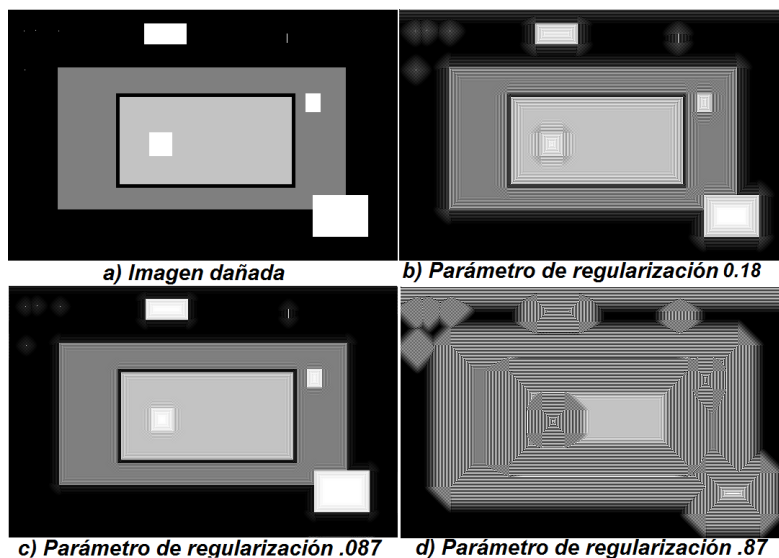


Figura 3.7: Restauración de la imagen con un número de iteraciones fijo 40, pero con distinto parámetro de regularización. Fuente: Elaboración propia.

En conclusión, en los ejemplos anteriores se observó, que al aumentar el número de iteraciones la imagen en general se pierde preservando solamente los bordes, lo cual es una característica del método regularización por variación total. De igual forma, la elección del parámetro de regularización es importante en la restauración de las imágenes. Por lo que, dependiendo de las características deseadas en nuestra imagen, tenemos que elegir el número de iteraciones y el parámetro de regularización, el cual hemos elegido con el método a posteriori, de igual manera se observó que efectivamente las regiones faltantes pequeñas tienen una mejor recuperación, por lo que una imagen que no tenga información suficiente alrededor de los dominios perdidos no se restaurará.

Conclusiones.

Principalmente, en esta tesis se logró analizar, describir y plantear el problema de imágenes con regiones faltantes, desde un punto de vista teórico y práctico, debido a la relación existente entre las matemáticas y la computación, se redactaron conceptos básicos para el desarrollo del trabajo. Dada la naturaleza del problema, se describió el fundamento matemático para plantearlo como un problema inverso, el cual se pudo relacionar con la ecuación de Fredholm de primer tipo, esto permitió ejemplificar el mal planteamiento de un problema inverso, y así concluir que el problema de inpainting es mal planteado según Hadamard, por lo cual nos apoyamos de la teoría de regularización para su solución, eligiendo el método de variación total. Donde observamos las dificultades para obtener el parámetro de regularización y estas nos motivan a estudiar la elección de este parámetro en un futuro cercano.

Logramos plantear el método de regularización por variación total a partir de la representación variacional del método de regularización de Tikhonov.

Se hizo un análisis más detallado de la deducción del problema de regularización por variación total para el problema de dominios perdidos, donde el resultado obtenido coincide con el encontrado en la literatura, y del cual generalmente se inicia al estudiar el problema de reconstrucción de imágenes con dominios perdidos.

De igual manera se logró detallar que encontrar el mínimo del funcional, es equivalente a encontrar la solución del problema de Neumann para la ecuación de Euler-Lagrange.

La implementación de un método iterativo para la solución del problema, nos permitió implementar un software computacional de manera eficiente y rápida, donde los resultados obtenidos mostraron la importancia y efectividad del operador de regularización.

Finalmente se alcanzó el objetivo de la tesis que fue la implementación de un método variacional como un método de regularización del problema de reconstrucción de dominios perdidos de imágenes.



Bibliografía

- [1] Aubert, Gilles, and Pierre Kornprobst., *Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations*, Vol. 147. Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] Bertalmio Marcelo, Sapiro Guillermo, Caselles Vincent, and Ballester Coloma. “Image inpainting”, *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, (2000), pp. 417-424.
- [3] Boyd, Stephen, Stephen P. Boyd, and Lieven Vandenberghe., *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.
- [4] Chan, Tony F., and Jianhong Shen., *Image processing and analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [5] Domínguez Sánchez, Federico C., and Nieves Hurtado Antonio., *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*, Grupo Editorial Patria, 2014.
- [6] Gonzalez, Rafael C., and Richard E. Woods., *Digital Image Processing*, Prentice-Hall, Inc. 2006.

- [7] Herrera Terán, Maribel Kateryn., “Métodos variacionales para la restauración de dominios perdidos de imágenes y su resolución numérica mediante métodos de segundo orden”, BS Tesis, Quito: EPN, 2015, 110 p.
- [8] Kirsch, Andreas., *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, AVol. 120. Springer Science & Business Media, 2011.
- [9] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi., “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, *Physica D*, 1992, 60(1-2):259-268.
- [10] Luenberger, David G., and Yinyu Ye., “Linear and Nonlinear Programming Fourth Edition”, (2016).
- [11] Pratt, William K., *Introduction to Digital Image Processing*, CRC Press 2013.
- [12] Rainer Kress., *Linear Integral Equations*, Applied Mathematical Sciences 82: Springer. 2010.
- [13] R.F. Hoskins., *Delta Functions Introduction to Generalised Functions*, Woodhead Publishing. 2009.
- [14] Scherzer, Otmar., *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, Springer Science & Business Media, 2015.
- [15] Solomon, Chris, and Toby Breckon., *Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab*, John Wiley & Sons, Ltd 2011.
- [16] Strong, David, and Tony Chan., “Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization”, *Inverse Problems* (2003), pp. 165-188: IOP Publishing Ltd.