UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Caos y algunas de sus formas en dinámica topológica

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Daniela Isis Flores Silva

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Franco Barragán Mendoza

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.
—agosto, 2020—

A aquellos quienes a mis sueños nunca
han dicho que no;
Marcelino Flores y Janet Silva.

A aquella con quien he compartido
cada uno de mis sueños;
Marcela Flores.

Agradecimientos

“Si hemos logrado grandes cosas es porque estamos parados sobre hombros de gigantes”, son las palabras que un sabio dijo un día y que han resonado en mí desde que las escuché. Aunque fueron dichas para hablar de los éxitos científicos del hombre, yo me atrevo a utilizarlo en cada etapa de mi vida, pues hay tantas personas que en sus hombros cargan pedazos de los logros que hoy digo míos. Por eso dedico estas pocas líneas, a modo de humilde reconocimiento, a los seres sin los que hoy yo no sería lo que soy.

A mi padre Marcelino Flores Alonso le agradezco por su incondicional apoyo para cumplir cada uno de mis sueños desde que comencé a tenerlos. Por toda la confianza que ha depositado en mí y que tantas veces ha sido mi escudo ante el desánimo y la desesperación. También le agradezco por su visión tranquila de la vida que muchas veces me llevó a descubrir que el gran agujero en el que yo me encontraba era solo una pequeña zanja en el camino. Por último, por su impecable ejemplo profesional que me ha dicho con y sin palabras que siempre se puede ser el mejor.

A mi madre Janet Venus Silva García le agradezco por haber sido mi primera maestra, la que con paciencia y ternura despertó a la niña curiosa que en mí dormía. Por forjar en mí hábitos de responsabilidad y constancia que me han llevado ha sortear mejor la vida. Por tomar mi mano y llevarme a vencer cada uno de mis miedos y por defenderme como nadie de este mundo a veces cruel. Finalmente le agradezco su amor para cuidar cada uno de mis pasos, ese amor que es tanto que no lo puedo contar y eso que contar se supone que sé.

A mi hermana Marcela Flores Silva le agradezco por su intenso afán de sacarme de la cotidianidad en la que vivo y llevarme a descubrir un mundo diferente al que a veces parece que no tengo acceso. Por ser mi soporte cuando la frustración parece que me derrumba. Por compartir conmigo cada uno de mis logros y por enseñarme a

soñar con más. Por motivarme y por nutrirme tantas veces con sus conocimientos en nuestras largas charlas y por último, por ser una inspiración para mí de la mujer fuerte y decidida que algún día quiero llegar a ser.

A Alejandra Azucena Morán Acevedo a quien ya no me atrevo a llamar amiga pues esa palabra ya no alcanza, le agradezco por escuchar tantas veces mis frustraciones y por brindarme calma cuando más lo necesité. Por ser mi incondicional en alegrías y tristezas, por hacer en general mi vida más feliz y en particular por hacer de cada día en mi estancia en la universidad una aventura. Por compartir conmigo la pasión por las matemáticas y la misma vibra de alegría en la vida.

A Anahí Rojas Carrasco, le agradezco por sus consejos que muchas veces me evitaron errores en el desarrollo de mi tesis. También agradezco por tantos momentos divertidos que hicieron del trabajo mi actividad favorita en el mundo. Por todas las tardes disfrutando las matemáticas, el café y en general la vida. Y por último por aceptar nuestra amistad a pesar de nuestras notorias diferencias.

Al Dr. Franco Barragán Mendoza le agradezco primeramente por confiar en mi para realizar este trabajo y por toda la paciencia prestada a lo largo de este proceso. Por eseñarme que la base del éxito en este maravilloso mundo de las matemáticas es el trabajo constante, la paciencia y la dedicación. Por su insistente énfasis en el rigor que me ha llevado a esforzarme cada vez más. Por último, le agradezco todas las lecciones de humildad y todos los maravillosos momentos compartiendo la belleza de las matemáticas.

A mis sinodales el Dr. Adolfo Maceda Méndez, el Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide y la Dra. Alicia Santiago Santos por la dedicación prestada a la lectura de mi trabajo y por sus atinadas observaciones que hicieron que quedara lo mejor posible.

A mis profesores por todas sus enseñanzas, en particular al Dr. Adolfo Maceda Méndez por hacer que más de una vez renaciera en mí el amor por las matemáticas con sus excelentes preguntas y su exquisita visión de las matemáticas. A la Dra. Verónica Borja Macías por toda la confianza que depositó en mí siempre y por ser un ejemplo de trabajo y disciplina.

A todos los que han contribuido de alguna manera en mi formación matemática, profesores, colegas y amigos que en algún momento encendieron en mi la llama de la curiosidad. Muchas gracias a todos.

Prefacio

El peso de la ignorancia ha perseguido al hombre desde el inicio de su andar por el mundo. Muchos han sido sus intentos por comprender y explicar todo lo que lo rodea y para ello ha tomado muchos caminos con distintas motivaciones y esperanzas. Pero hasta ahora el que ha resultado más certero es el de la ciencia, el cual constituye la cúspide del saber humano.

Entre tantas disciplinas que atiende el saber científico, las matemáticas son especiales por ser consideradas como pilares de la ciencia. El estudio de los métodos, de los patrones, de la propia lógica del pensamiento son lo que convierten a las matemáticas en la ciencia por excelencia. Al ser una de las ciencias más antiguas, la extensión de los estudios que carga sobre sus hombros es muy basta. Por lo cual, con el paso de los años ha sido necesario dividir estos estudios en áreas más concretas.

El tema de tesis pertenece a las áreas de la matemática conocidas como Topología y Sistemas Dinámicos. La Topología, es la más joven de las disciplinas calificadas como áreas fundamentales de las matemáticas clásicas. Aparece en el siglo XIX, bajo el nombre de *analysis situs*, debido al título de una serie de artículos publicados por el matemático francés H. Poincaré en 1895 [41]. Estos artículos proporcionaron el primer tratamiento sistemático de la Topología y revolucionaron las matemáticas al introducir estructuras algebraicas para distinguir a los espacios topológicos entre sí. Uno de los primeros trabajos en dar destellos del nacimiento de la Topología, se debe a L. Euler. En 1736 Euler publicó un artículo para dar solución al problema de los puentes de Königsberg, titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [17], lo cual en español significa “la solución de un problema relacionado con la geometría de la posición”. El título por sí mismo, indica que Euler estaba consiente que trataba con un tipo diferente de geometría en el que la distancia no es relevante. Sin embargo, la palabra *topología* (del Griego *topos*, 'lugar' y *logos*, 'estudio') fue introducida por el matemático J.B. Listing, en su libro *Vorstudien zur Topologie* (Estudios previos a la Topología) [36], publicado en 1847, para hacer distinción entre la geometría cualitativa, que estudia principalmente la forma, y la geometría ordinaria en la que se tratan principalmente las relaciones cuantitativas.

Por otra parte, el estudio los Sistemas Dinámicos, es también una área joven de las matemáticas. Sus orígenes se atribuyen a Newton con sus estudios sobre la mecánica celeste en 1665. Sin embargo, el origen formal de la teoría moderna de los Sistemas Dinámicos, se debe al trabajo de Henry Poincaré sobre órbitas planetarias en el problema de los 3 cuerpos [7]. En su trabajo, sentó las bases para el análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales no lineales y comenzó a desarrollar un conjunto de herramientas matemáticas para ello.

El objeto de estudio de los Sistemas Dinámicos, es el cambio con respecto al tiempo, de un proceso de movimiento. Si el tiempo se considera de manera continua nos referiremos a sistemas dinámicos continuos. Del mismo modo, si el tiempo es considerado de forma discreta, es decir por lapsos, entonces estaremos haciendo referencia a sistemas dinámicos discretos. Poincaré fue también uno de los primeros en implementar el uso de los sistemas dinámicos discretos en 1899, al intentar simplificar un modelo continuo. Como el objeto de estudio de los sistemas dinámicos es el cambio con respecto al tiempo, uno de los principales retos es hacer predicciones. Sin embargo, en muchas ocasiones, se torna muy complejo hacerlo de manera analítica en un sistema dinámico. Por lo cual surge la necesidad de analizar propiedades cualitativas o de forma del sistema, como por ejemplo, su estabilidad o el comportamiento del sistema tomando en cuenta la cercanía o acumulación de sus elementos respecto a ciertos conjuntos. Es ahí donde la Topología entra en acción. La dinámica topológica, es la parte de la Topología encargada de estudiar las propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos. Un tipo especial de sistemas, los cuales han sido uno de los principales focos de atención de la dinámica topológica, son los sistemas caóticos.

Volviendo a la revisión histórica, fue también Poincaré el primero en considerar la posibilidad de caos en un sistema determinista, en el sentido de que una pequeña perturbación en el estado inicial, como por ejemplo una mínima variación en la posición inicial de un cuerpo, podía llevar eventualmente al sistema a un estado radicalmente diferente. Es así como surge la noción de sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que da lugar al nacimiento de la teoría del caos.

Sin embargo, pese a la importancia de sus descubrimientos, el trabajo del francés Poincaré generó poco interés en cuanto a esta teoría. Fue hasta 1963, que el meteorólogo estadounidense Edward Lorenz publicó el artículo *Deterministic Nonperiodic Flow* [37], en el Journal of the Atmospheric Science, donde describe un fenómeno que descubrió por casualidad y que se convertiría en el renacimiento de la teoría del caos. Lorenz se dedicaba a estudiar el comportamiento de la atmósfera, tratando de encontrar un modelo matemático que permitiera, a partir de variables sencillas y mediante simulaciones por computadora, hacer predicciones climatológicas. En su artículo define el hoy conocido como efecto mariposa, el cual articula de forma un tanto poética que "el aleteo de una mariposa en Brasil, puede provocar un huracán en Texas" refiriéndose en realidad a lo ya antes descrito por Poincaré: la sensibilidad a las condiciones iniciales de un sistema. Aunque cabe resaltar que el nombre de este efecto, se debe a la forma que tiene la gráfica de un atractor de Lorenz.

El uso de sistemas dinámicos discretos en muchas ocasiones ayuda a simplificar el estudio de sistemas dinámicos continuos, además pueden modelar por sí mismos fenómenos naturales, es por ello, que el interés en su estudio ha crecido a lo largo de las últimas décadas. Particularmente los sistemas caóticos han captado gran atención en la comunidad científica, debido a la recurrencia de su aparición en fenómenos físicos, químicos y biológicos (vea [3, 15, 25]).

En este trabajo tratamos de adentrarnos en uno solo de los tantos misterios que esconde este bello universo matemático, esperando que aquel lector que tenga interés en nuestro escrito, se lleve un muy buen sabor de boca del estudio de los sistemas dinámicos y se quede aunque sea con una pequeña chispa de interés que lo conduzca a otros saberes.

Cuentan los sabios que el mundo
al principio de su creación
era todo revolución
sin camino y sin rumbo.
Pero desde lo profundo
llegó la mano del hombre
y fue quien le puso nombre
hasta al espacio y tiempo
y aunque hubo contratiempo
no creo que a Dios no le asombre.
D.I.F.S.

Contenido

Introducción **XV**

1 Dinámica topológica **1**

1.1 Conceptos básicos y notaciones 1

1.1.1 Espacios métricos 2

1.1.2 Preliminares de teoría de la medida 4

1.2 Sistemas dinámicos discretos 8

1.2.1 Definición de sistema dinámico 9

1.2.2 Órbitas y sus propiedades 11

1.3 Estudio de la dinámica 24

1.3.1 Conjunto omega límite 24

1.3.2 Conjuntos invariantes 28

1.4 Transitividad topológica 33

2 Sensibilidad a las condiciones iniciales y equicontinuidad **47**

2.1 Estabilidad e inestabilidad puntual 48

2.2 Sensibilidad a las condiciones iniciales 54

2.3 Equicontinuidad 57

2.4 Sensibilidad a las condiciones iniciales contra equicontinuidad 64

3 Entropía topológica y Caos Li-Yorke **67**

3.1 Entropía topológica 68

3.1.1 Cubiertas abiertas 68

3.1.2 Definición de entropía topológica 71

3.1.3 Algunos teoremas sobre entropía topológica 78
3.1.4 Calculando la entropía 90
3.2 Entropía métrica 93
3.2.1 Principio variacional 101
3.3 Caos Li-Yorke 106
3.3.1 El conjunto de Cantor 116
3.3.2 Caos Li-Yorke y entropía 118

4 Caos en sistemas transitivos 121
4.1 Sistemas dinámicos tipo transitivos 123
4.1.1 Caos Auslander-Yorke 124
4.1.2 Caos Devaney 126
4.1.3 Caos Wiggins 129
4.2 Relaciones entre caos 131
4.2.1 Relaciones en espacios métricos compactos 132
4.2.2 Relaciones en el intervalo 140

5 Sistemas caóticos 145
5.1 Función rotación irracional 146
5.2 Funciones tienda 151
5.2.1 La función tienda 151
5.2.2 Familia de las funciones tiendas truncadas 155
5.3 Funciones shift 159
5.3.1 La función shift 159
5.3.2 Función shift complemento 163
5.4 Operadores en espacios $\mathcal{L}_p$ 165
5.5 Resultados derivados de los ejemplos 168

Conclusiones 171

Índice alfabético 173

Bibliografía 177

Lista de figuras

1.1 Órbita de un punto 12
1.2 Órbita periódica 19
1.3 Órbita preperiódica 19
1.4 Transitividad topológica 33
1.5 Gráfica de la función tienda 35
1.6 Gráficas de funciones logísticas 35
1.7 Diagrama de conjugación topológica 36

2.1 Órbita estable 50

4.1 Diagrama de relaciones para espacios métricos compactos 139
4.2 Diagrama de relaciones en sistemas dinámicos en el intervalo 143

5.1 Función rotación irracional 147
5.2 Gráfica de la función tienda 152
5.3 Función tienda truncada 156
5.4 Comparación de tiendas truncadas 157
5.5 Diagrama completo de relaciones para espacios métricos compactos . . 170

Introducción

Por extraño que parezca, aquello que es evidentemente constante en el universo es el cambio. A lo largo de nuestra vida nos encontramos inmersos en un mar de cambios. La forma más evidente de cambio es el movimiento, por ello, es de vital importancia estudiar el cómo y el por qué del movimiento.

La disciplina matemática que se ocupa de esta tarea, y en particular de la teoría del caos, es la dinámica topológica. Ambas son ramas de las matemáticas que han sido de gran interés de los científicos en los últimos años, por sus grandes aplicaciones en las distintas áreas de la ciencia. Es por esto, que estudiar los sistemas dinámicos caóticos cobra gran importancia.

De manera intuitiva, entendemos al caos como un "desorden" o un estado amorfo e indefinido, sobre el cual no poseemos control. No obstante, si lo queremos estudiar desde un punto de vista matemático, debemos definirlo de manera precisa, de tal forma nos permita manipularlo con las herramientas que poseemos. Sin embargo, pese a la gran cantidad de científicos que se han dedicado a trabajar en esta tarea, hasta hoy no ha sido posible definir de manera universal este término. Es decir, aún no existe una definición matemática del caos que sea universalmente aceptada. Esto se debe a que no se ha encontrado una forma de definirlo, que englobe todas las características del comportamiento complejo de los sistemas dinámicos.

A lo largo de los años, han surgido múltiples nociones matemáticas que dan lugar a algún tipo de caos, pues rescatan distintas características del comportamiento que entendemos como caótico, según el problema del cual hayan surgido. Sin embargo, la mayoría de las definiciones de tipos de caos que se han dado, están basadas principalmente en alguno de los comportamientos dinámicos siguientes:

(1) Comportamiento complejo de las órbitas, como en el caos Li-Yorke.

(2) Sensibilidad a las condiciones iniciales, como en el caos según Devaney, caos según Auslander-Yorke y caos según Wiggins.

(3) El rápido crecimiento de diferentes órbitas de longitud n, como es el caso de tener entropía topológica positiva.

El objetivo de este trabajo de tesis es estudiar algunos tipos de caos en dinámica topológica, principalmente, caos Li-Yorke, caos Auslander-Yorke, caos Wiggins y caos Devaney. Además las nociones relacionadas a éstos, tales como: transitividad, sensibilidad a las condiciones iniciales, entropía topológica, conjuntos scrambled y equicontinuidad. Este trabajo también se ocupa de responder a las siguientes preguntas ¿Qué tipo de relaciones guardan entre sí las distintas nociones de caos consideradas? o bien ¿Existe alguna más general, que abarque todos los posibles comportamientos descritos en los distintos tipos de caos?

A continuación explicamos la estructura general del trabajo.

En el Capítulo 1 nos dedicamos en primer lugar a presentar los conceptos básicos necesarios para la comprensión de la tesis. Posteriormente introducimos a los sistemas dinámicos discretos y la forma en que estos se analizan desde el punto de vista topológico. Finalizamos este capítulo presentando el concepto de transitividad topológica, el cual es un ingrediente fundamental para varios de los sistemas dinámicos caóticos tratados en la tesis.

En el Capítulo 2 presentamos un estudio detallado de la estabilidad e inestabilidad puntual en un sistema dinámico y se explica cómo se relacionan con las aproximaciones numéricas. Posteriormente se analiza el concepto de sensibilidad a las condiciones iniciales, que es uno de los pilares históricos y conceptualmente fundamentales en el nacimiento de la teoría del caos. También se introduce el concepto de equicontinuidad, que presenta características aparentemente opuestas a las de sensibilidad a las condiciones iniciales. Finalmente, se analizan las condiciones bajo las cuales pueden ser tratadas como nociones opuestas de orden y desorden en un sistema dinámico.

El Capítulo 3 lo dedicamos a presentar la entropía topológica de un sistema dinámico, que es una cantidad numérica que se le asigna, de cierta forma, a la “complejidad” de dicho sistema. También presentamos, aunque estudiada con menos detalle que la entropía topológica, su contraparte en teoría ergódica, la entropía métrica. En este capítulo también se muestra la forma de calcular la entropía topológica y se calcula de manera explícita para algunos sistemas. Posteriormente, damos paso al primer tipo de caos estudiado en este trabajo, el caos tipo Li-Yorke. Para finalizar el capítulo, se muestra la relación que existe entre este tipo de caos y la entropía topológica.

En el Capítulo 4 presentamos el resto de tipos de caos estudiados en la tesis, el caos Auslader-Yorke, el caos Wiggins y el caos Devaney, todos ellos con la característica común de la transitividad. Analizamos algunas de sus propiedades de manera individual. Posteriormente, mostramos cuales son las relaciones que existen entre estos tres tipos de caos, el caos Li-Yorke y la entropía topológica positiva, de manera general en sistemas dinámicos definidos en espacios métricos compactos. Además, revisamos las relaciones que existen si nos restringimos únicamente a sistemas dinámicos en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Finalmente, el Capítulo 5 lo dedicamos al análisis de distintos tipos de sistemas dinámicos de manera detallada, utilizando las herramientas presentadas en capítulos anteriores. También se muestra cómo estos sistemas sirven de ejemplo para la mayoría de los conceptos estudiados en la tesis. Además se muestra cómo algunos de estos ejemplos sirven de contraejemplos, para algunas de las posibles no implicaciones entre los tipos de caos considerados en este estudio.

Cabe resaltar que a lo largo de la tesis, se estudian sistemas definidos en espacios métricos con distintas características. Es por ello que al principio de cada capítulo, se mencionan las propiedades particulares del espacio, que se deben considerar en la lectura del capítulo. Además, para facilitar la comprensión del lector, al inicio de cada capítulo, se mencionan los artículos principales de referencia, por si se desea ahondar en el tema.

Por último, es importante mencionar que a pesar de que tratamos en lo posible de hacer este escrito auto contenido, la extensión de los resultados nos ha impedido lograrlo. Por lo cual, se solicita al lector tener algunos conocimientos básicos de espacios métricos. La bibliografía que recomendamos para este propósito se encuentra en [29, 45, 44]. También se requieren algunos conceptos básicos de teoría de la medida, para lo cual recomendamos [23, 44].

Hemos tratado de hacer este escrito ameno a la lectura, presentando las demostraciones lo más claro y detallado que nos fue posible. Cabe mencionar que algunas de las demostraciones son de autoría propia y algunas otras son adaptaciones a nuestro estilo de demostraciones encontradas en artículos, los cuales hemos citado de manera pertinente.

Capítulo 1

Dinámica topológica

El universo tachonado
de mil caminos sin andar
que el tiempo ha trazado
como un capricho del azar.

Comenzamos este capítulo con los conceptos básicos que se requieren para comprender el contenido de la tesis. Posteriormente se introduce el tipo de sistemas que se consideran en nuestro estudio y se presenta de forma general el modo en que estos se analizan desde el punto de vista topológico. Finalizamos este capítulo con el concepto de transitividad topológica que es uno de los ingredientes necesarios para definir varios de los sistemas caóticos que analizamos en este trabajo.

Familiarizarse con la notación y términos básicos es fundamental antes de empezar a leer un texto matemático, para establecer acuerdos y facilitar con ello la lectura. Es por esto que comenzamos este primer capítulo con los conceptos básicos que se utilizan en el presente trabajo, tanto de espacios métricos como de teoría de la medida.

1.1 Conceptos básicos y notaciones

Comenzamos este capítulo introduciendo las notaciones básicas más generales que se utilizan a lo largo de la tesis. Como es usual $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ y $\mathbb{N}$, denotan el conjunto de los números complejos, el conjunto de los números reales, el conjunto de los números enteros, el conjunto de los números enteros no negativos y el conjunto de los números naturales, respectivamente.

Si X es un conjunto y $f : X \to X$ es una función, establecemos la siguiente notación:

(1) $\mathcal{P}(X)$ denota al conjunto potencia del conjunto X.

(2) f^0 denota la función identidad en X ($id_X : X \to X$).

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

(4) Dados $n \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq X$, la preimagen de A bajo la función f^n se denota por $f^{-n}(A)$. Si $x \in X$, la preimagen del conjunto $\{x\}$ bajo f se denota por $f^{-1}(x)$.

(5) Denotamos por I al intervalo cerrado $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$.

(6) La función restringida al conjunto $A \subseteq X$, se denota por $f|_A : A \to X$.

Proposición 1.1.1. Sean X un conjunto y $f : X \to X$ una función. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, se cumplen las propiedades siguientes:

(1) $f^n \circ f^m = f^{n+m}$.

(2) $(f^n)^m = f^{nm}$.

(3) Para cada $U \subseteq X$, $f^{-n}(f^{-m}(U)) = f^{-(n+m)}(U)$.

Definición 1.1.2. Dados dos conjuntos X y Y y las funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, la *función producto de f con g* se denota por $f \times g : X \times X \to Y \times Y$ y se define por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$, para cualquier $(x, y) \in X \times Y$. En particular, la función producto de f consigo misma se denota por $f^{\times 2}$.

1.1.1 Espacios métricos

Todos los sistemas que analizamos durante este trabajo son definidos en espacios métricos, por lo cual dedicamos esta subsección a la definición de espacio métrico y algunas propiedades específicas, que es fundamental tener presente para la comprensión de los resultados aquí presentados. Para más detalles sobre la topología en espacios métricos requerida en la presente tesis consulte [29].

Definición 1.1.3. Un *espacio métrico* es una pareja (X, d), donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función tal que para cada $x, y, z \in X$ cumple las siguientes condiciones:

(1) $d(x, y) \geq 0$.

(2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

En la Definición 1.1.3, al punto (3) se le conoce como *desigualdad del triángulo.* Siempre que no haya confusión, dejamos implícita la métrica. Así, cuando digamos que X es un espacio métrico, nos referiremos al espacio métrico (X, d), a menos que se especifique algo distinto. En caso de que sea necesario identificar la métrica de un espacio en particular, denotamos la métrica del espacio X por d_X.

Definición 1.1.4. Sean d y d' dos métricas en un espacio X. Se dice que las métricas son *uniformemente equivalentes* si $id_X : (X, d) \to (X, d')$ es uniformemente continua.

En cuanto a espacios métricos, utilizamos la siguiente notación. Dados un espacio métrico X, $U \subseteq X$ y $x \in X$:

(1) Por $\mathrm{int}(U)$, $\mathrm{cl}(U)$, $\mathrm{Fr}(U)$ denotamos al *interior, cerradura* y *frontera* del conjunto U, respectivamente.

(2) Los conjuntos $B(x, \epsilon)$ y $\bar{B}(x, \epsilon)$ denotan la *bola abierta* y la *bola cerrada* con centro en x y radio ϵ, que se definen respectivamente como:

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}, \ \bar{B}(x, \epsilon) = \{y \in X | d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

(3) τ_d denota a la *topología inducida por la métrica d.*

(4) Dado $A \subseteq X$ con A acotado y no vacío, el *diámetro del conjunto* A, se denota y define como:

$$d(A) = \sup\{d(x, y) | \ x, y \in A\}.$$

(5) Dado $A \subseteq X$ con A no vacío *la distancia del punto x al conjunto A*, se denota y define como:

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y)|\ y \in A\}.$$

La definición de todos los conceptos aquí mencionados referente a la topología en espacios métricos se pueden encontrar en [29]. Ahora presentamos un tipo de funciones que se nombra de acuerdo a las propiedades de la métrica del espacio en el que está definida.

Definición 1.1.5. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función. La función f es una *isometría* si para cada $x, y \in X$, se cumple:

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Recordamos también algunas otras definiciones, que son frecuentemente utilizadas en el desarrollo de la tesis.

Definición 1.1.6. Sea X un espacio métrico. El punto $x \in X$ es un *punto aislado* si existe un conjunto abierto U de X tal que $U \cap X = \{x\}$. El espacio métrico X es *perfecto* si no contiene puntos aislados.

Definición 1.1.7. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que el conjunto A es:

(1) *Denso en X*, si $\text{cl}(A) = X$.

(2) *Denso en ninguna parte*, si $\text{int}(\text{cl}(A)) = \emptyset$.

La razón de que no se presenten ejemplos de los conceptos anteriormente descritos es que durante el desarrollo de los capítulos aparecen estos conceptos como ejemplos particulares. También es importante mencionar que hay algunos conceptos básicos que omitimos en esta sección y se presentan justo antes de ser utilizados, con la finalidad de facilitar la lectura y por conveniencia en la estructura del trabajo.

1.1.2 Preliminares de teoría de la medida

La dinámica topológica se encarga de estudiar las propiedades topológicas de los sistemas dinámicos. Sin embargo existe otra forma de analizar dichos sistemas, considerando las propiedades dadas por la medida del espacio en lugar de las propiedades topológicas. De esta tarea se encarga la teoría ergódica.

Aunque el análisis presentado en esta tesis es en su mayoría topológico, hacemos uso de algunos resultados de teoría ergódica, es por ello, que requerimos algunos conceptos de teoría de la medida. Para consultar ejemplos o más detalles acerca de los conceptos de teoría de la medida aquí presentados vea [23].

Definición 1.1.8. Dado un conjunto X, la familia $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *σ-álgebra de subconjuntos de X*, si:

(1) $X \in S$.

(2) Si $E, F \in S$, entonces $E \setminus F \in S$.

(3) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de S, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$.

Para fines prácticos y cuando no haya confusión, diremos σ-álgebra para referirnos a una σ-álgebra de subconjuntos de X. El siguiente resultado nos muestra que siempre podemos dotar a un conjunto con una σ-álgebra. La prueba se puede hallar en el Teorema 1.5 de [23].

Proposición 1.1.9. Sean X un conjunto y $E \subseteq \mathcal{P}(X)$. Existe una única σ-álgebra $S(E)$ tal que:

(1) $E \subseteq S(E)$.

(2) Si S es una σ-álgebra tal que $E \subseteq S$, entonces $S(E) \subseteq S$.

La unicidad de la σ-álgebra mostrada en la Proposición 1.1.9, nos permite introducir la definición siguiente.

Definición 1.1.10. Sean X un conjunto y $E \subseteq \mathcal{P}(X)$. A la σ-álgebra $S(E)$ de la Proposición 1.1.9, se le llama *σ-álgebra generada por E*.

Si el conjunto X al que queremos dotar de una σ-álgebra, es en particular un espacio métrico, la Definición 1.1.10, nos permite generar una σ-álgebra especial a la que damos nombre a continuación.

Definición 1.1.11. Sea (X, d) un espacio métrico. La *σ-álgebra de Borel* es la σ-álgebra de la Definición 1.1.10, correspondiente a la topología inducida por la métrica d y se denota como sigue:

$$\mathcal{B} = S(\tau_d).$$

A continuación presentamos una serie de conceptos fundamentales de teoría de la medida.

Definición 1.1.12. Un *espacio medible* es una pareja (X, S) en la que X es un conjunto no vacío y S es una *σ-álgebra de subconjuntos de* X.

Definición 1.1.13. Sea (X, S) un espacio medible. Una *medida* en (X, S) es una función $\mu : S \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu(E) \geq 0$, para todo $E \in S$.

(3) μ es *σ-aditiva* si para cada sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos entre si de S, se tiene que:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definición 1.1.14. Un *espacio de medida* es una terna (X, S, μ), donde (X, S) es un espacio medible y $\mu : S \to \mathbb{R}$ es una medida.

Ahora presentamos una serie de propiedades que cumple la medida de un espacio de medida. La demostración consiste en manipular de manera correcta la definición de medida.

Proposición 1.1.15. Sea (X, S, μ) un espacio de medida. La medida μ cumple las siguientes propiedades:

(1) Es *aditiva*. Esto es, para cada $E, F \in S$: si $E \cap F = \emptyset$, entonces:

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

(2) Es *monótona*. Esto es, para cada $E, F \in S$: si $E \subseteq F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(3) Es *sustractiva*. Esto es, para cada $E, F \in S$: si $E \subseteq F$ y $\mu(F) < \infty$, entonces:

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Los siguientes conceptos son la primera forma de relacionar a los sistemas dinámicos con los espacios de medida. Cabe mencionar que aunque estos conceptos se definen en general para cualquier σ-álgebra, aquí los presentamos únicamente para la σ-álgebra de Borel.

Definición 1.1.16. Sean X un espacio métrico, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to X$ una función continua. La función f es $\mathcal{B}$-*medible* si para cada $A \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$.

Definición 1.1.17. Sean X un espacio métrico, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to X$ una función continua y $\mathcal{B}$-medible. La medida μ se dice que es f-*invariante* si para cada $A \in \mathcal{B}$, $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Definición 1.1.18. Sean X un espacio métrico, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to X$ una función continua y $\mathcal{B}$-medible. Definimos los siguientes conjuntos:

$$M(X) = \{\mu | \mu \text{ es una medida en } (X, \mathcal{B})\}.$$

$$M(X, f) = \{\mu | \mu \text{ es una medida en } (X, \mathcal{B}) \text{ que es } f\text{-invariante}\}.$$

Veamos que el conjunto $M(X)$ es no vacío. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.19. Sea (X, f) un sistema dinámico. Consideremos al espacio de medida $(X, \mathcal{B})$. Sea $x \in X$, se define la *medida de Dirac* generada por x como la función $\delta_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $A \in \mathcal{B}$:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Sin embargo, el conjunto $M(X,f)$ no resulta siempre un conjunto no vacío, se requieren ciertas condiciones para X y para f. La prueba del siguiente resultado se puede hallaer en [52].

Teorema 1.1.20. Sea (X,f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y f una función continua. Entonces, existe una medida de probabilidad sobre la σ-álgebra de Borel de X que es f-invariante.

Definición 1.1.21. Sea $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida. El *soporte de la medida* μ se denota y define como:

$$supp(\mu) = \bigcup \{A \in S |\ \mu(A) > 0\}.$$

Definición 1.1.22. Sea $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida. Dado $E \in \mathcal{B}$, se dice que la medida μ es:

(1) *Regular interior en E* si:

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K)|\ K \in \mathcal{B}, K \text{ es compacto y } K \subseteq E\}.$$

(2) *Regular exterior en E* si:

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(A)|\ A \text{ es abierto y } E \subseteq A\}.$$

Definición 1.1.23. Sea (X,S,μ) un espacio de medida. La medida μ es *regular* si la medida de cada compacto es finita y para cada $E \in \mathcal{B}$, μ es regular interior en E y regular exterior en E.

1.2 Sistemas dinámicos discretos

El cambio a través del tiempo ha sido uno de los misterios que más ha captado el interés de los científicos. En sus orígenes su estudio se escondía en problemas de la física. De manera más precisa, podemos adjudicar sus inicios al Sr. Issac Newton con sus estudios sobre el movimiento de los planetas en 1665. Sin embargo, desde el punto de vista puramente matemático, hablamos del orígen de la teoría de los sistemas dinámicos, el cual, se atribuye a los trabajos del matemático francés Henri Poincaré al dar solución[1] a "el problema de los tres cuerpos", ya antes planteado por Newton. Este problema proponía resolver la interacción de tres cuerpos celestes, sometidos a las fuerzas de la gravedad de manera simultánea. En este trabajo Poincaré sentó las bases matemáticas que fueron los primeros destellos de la teoría formal de los sistemas dinámicos. El texto básico de consulta para la teoría de sistemas dinámicos aquí utilizada es *Sistemas Dinámicos Discretos* de los autores J. King Dávalos y H. Méndez Lango [31].

1.2.1 Definición de sistema dinámico

Pasemos a la definición matemática de un sistema dinámico de manera general. Para ello requerimos definir un objeto matemático más, el semi-grupo, el cual es la estructura algebraica más simple. Damos su definición a continuación.

Definición 1.2.1. Dado un conjunto G, una *operación binaria* definida en G es una función $* : G \times G \to G$. De manera usual, dados $a, b \in G$, se escribe $a * b$ en lugar de $*(a, b)$.

(1) Si $*$ cumple la propiedad asociativa, es decir, para cada $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$, decimos que la pareja $(G, *)$ es un *semi-grupo*.

(2) Si además existe un elemento $e \in G$ que cumple que para cada $a \in G$, $a * e = e * a = a$, a este elemento lo llamamos elemento neutro y al semi-grupo lo llamamos *semi-grupo con elemento neutro*.

Con los elementos previamente definidos podemos pasar a la definición formal de sistema dinámico.

Definición 1.2.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $(G, *)$ un semi-grupo con elemento neutro 0. Si $\{\phi_t | \ \phi_t : X \to X, t \in G\}$ es una familia de funciones que cumple que:

(1) $\phi_0(x) = x$, para cada $x \in X$;

(2) $(\phi_t \circ \phi_s)(x) = \phi_{t*s}(x)$, para cualesquiera $s, t \in G$ y para cada $x \in X$;

[1]En realidad la conclusión dada por Poincaré a este problema, fue que no tenia solución. Se había encontrado con el primer sistema "caótico" en el cosmos.

entonces, la función $\phi : G \times X \to X$ tal que $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, para cada $(t, x) \in G \times X$, es un *sistema dinámico*.

A pesar de que los sistemas aquí presentados están definidos a partir de conceptos matemáticos abstractos, como conjuntos y funciones, como ya lo hemos mencionado, tuvieron su origen en motivaciones físicas. Así, para poder aterrizar de cierto modo la idea matemática de los sistemas dinámicos, se dice que su objeto de estudio es el cambio con respecto al tiempo de un proceso de movimiento, el cual está regido por una ley determinística que dicta cómo este proceso se desarrolla a medida que avanza el tiempo. De manera general, en la Definición 1.2.2, al espacio métrico X se le llama *espacio fase*, al semi-grupo G se le llama *conjunto de parámetros* y la función ϕ se conoce como *ley determinística*.

Los sistemas dinámicos se clasifican en distintos tipos, dependiendo de las características de los elementos que lo conforman. Por principio, una de las clasificaciones más generales, viene de algunas de las propiedades del semi-grupo. Los sistemas dinámicos se clasifican en continuos y discretos. Estos últimos son los que se estudian en este trabajo.

Definición 1.2.3. Sean X un espacio métrico, $(G, *)$ un semigrupo con elemento neutro y un sistema dinámico $\phi : G \times X \to X$. Si $G = [0, \infty)$, al sistema dinámico se le llama *sistema dinámico continuo* o *flujo*. Si $G = \mathbb{Z}_+$, al sistema dinámico se le llama *sistema dinámico discreto*.

Continuando con la interpretación física, es importante mencionar que la clasificación de sistema continuo y discreto hace referencia a cómo medimos el tiempo. Es decir, en los sistemas dinámicos continuos se toma al tiempo de manera continua, mientras que en los sistemas discretos se toma al tiempo por lapsos, los cuales pueden variar en su amplitud (meses, días, minutos, segundos, etc.)

Dentro de los sistemas dinámicos discretos estudiamos los que se generan mediante la iteración de funciones, de la manera que se explica a continuación. Consideremos el semi-grupo $(\mathbb{Z}_+, +)$, un espacio métrico X y una función $f : X \to X$ continua. Definimos $\phi : \mathbb{Z}_+ \times X \to X$ tal que $\phi(n, x) = f^n(x)$ donde $f^n(x)$ es la aplicación de f al punto x, n veces y $f^0(x)$ es la identidad actuando sobre x. De este modo, por propiedades de la composición de funciones, la familia $\{f^n | f^n : X \to X, n \in \mathbb{Z}_+\}$

cumple que $f^0(x) = x$ y $(f^s \circ f^r)(x) = f^{s+r}(x)$. Así, de acuerdo a la Definición 1.2.2 y a la Definición 1.2.3, ϕ es un sistema dinámico discreto. Como la función ϕ queda totalmente determinada si se conocen X y f, a estos sistemas los denotaremos simplemente como (X, f). A partir de este momento, cuando nombremos un sistema dinámico, estamos haciendo referencia a sistemas que tengan esta estructura.

En este tipo de sistemas, analizamos la dinámica de manera puntual de la siguiente forma. Dado un punto $x \in X$, sean $x_0 = x$, $x_1 = f(x) = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x) = f(x_1)$,..., etc. Así, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$x_{k+1} = f(x_k), \text{ donde } x_0 = x,$$

o bien $x_{k+1} = f^{k+1}(x)$, lo cual se puede interpretar como sigue. Al tiempo $n = 0$ un objeto se encuentra en la posición x, al tiempo $n = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en la posición $f(x)$ y así sucesivamente quedando en la posición $f^k(x)$ en el tiempo $n = k$.

La forma anteriormente descrita de representar la dinámica, es utilizada usualmente cuando se desea estudiar propiedades analíticas de los sistemas. Sin embargo, esto no siempre resulta sencillo, por lo que cobra importancia estudiar las propiedades topológicas de los sistemas, las cuales proporcionan información acerca de la forma y características cualitativas de dichos sistemas. Es por esta razón, que es mejor tratar la dinámica puntual mediante conjuntos, que son los principales objetos de estudio de la topología. Es así como se introduce el concepto de órbita de un punto.

1.2.2 Órbitas y sus propiedades

Definición 1.2.4. Dados (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$, la *órbita del punto x bajo la función f* se denota y define como:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}+\}.$$

Para entender mejor el concepto de órbita, al observar la Figura 1.1, podemos decir que la órbita de un punto es el recorrido que realiza el punto a través del tiempo, siguiendo las leyes del sistema. Con lo cual, estudiar la dinámica de un sistema (X, f)

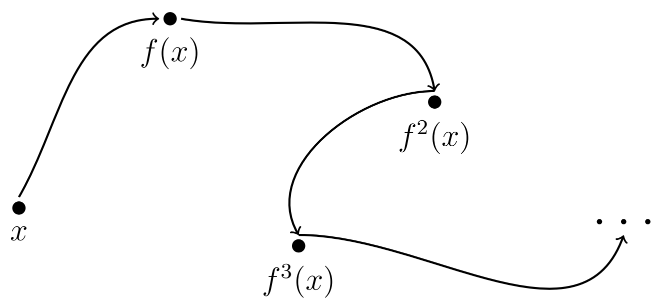

Figura 1.1: Órbita de un punto

es equivalente a estudiar propiedades de las órbitas de los puntos en X.

La órbita del punto x bajo la función f puede ser vista también como la sucesión $\{f^{n-1}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, así cuando digamos que la órbita de un punto converge o se aproxima a cierto punto conforme pasa el tiempo, estaremos haciendo referencia a la convergencia de dicha sucesión. Ahora veamos algunas de las primeras propiedades que cumplen de manera general las órbitas.

Teorema 1.2.5. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $x \in X$, se cumple que $f(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(f(x), f)$.

Demostración. Sea $x \in X$. Veamos primero que $f(\mathcal{O}(x, f)) \subseteq \mathcal{O}(f(x), f)$. En efecto, sea $y \in f(\mathcal{O}(x, f))$. Luego existe $z \in \mathcal{O}(x, f)$ tal que $y = f(z)$. Por otro lado, ya que $z \in \mathcal{O}(x, f)$, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $z = f^k(x)$, por lo que $y = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x)$. Lo que implica, por definición de órbita de un punto, que $y \in \mathcal{O}(f(x), f)$. Ahora veamos que $\mathcal{O}(f(x), f) \subseteq f(\mathcal{O}(x, f))$. Sea $y \in \mathcal{O}(f(x), f)$. Así, por definición de órbita de un punto, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $y = f^k(f(x))$. Por propiedades de la composición de funciones $y = f(f^k(x))$. Si hacemos $z = f^k(x)$, tenemos que $z \in \mathcal{O}(x, f)$, luego $y = f(z) \in f(\mathcal{O}(x, f))$. Por lo tanto $f(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(f(x), f)$. □

Teorema 1.2.6. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se cumple que, si $z \in \mathcal{O}(x, f)$, entonces $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$.

Demostración. Sea $z \in \mathcal{O}(x, f)$. Veamos que $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$. En efecto, sea $y \in \mathcal{O}(z, f)$. Por definición de órbita de un punto, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$ tales que $y = f^{k_1}(z)$ y $z = f^{k_2}(x)$. Luego $y = f^{k_1}(f^{k_2}(x)) = f^{k_1+k_2}(x)$, lo que implica que $y \in \mathcal{O}(x, f)$. □

Como caso particular del Teorema 1.2.6, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.2.7. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\mathcal{O}(f^{n+1}(x), f) \subseteq \mathcal{O}(f^n(x), f)$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Basta considerar $w = f^n(x)$ y $z = f^{n+1}(x)$, así $z \in \mathcal{O}(x, f)$. Al aplicar el Teorema 1.2.6, se completa la demostración. $\square$

El Teorema 1.2.6, muestra que si $z \in \mathcal{O}(x, f)$, entonces $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$. Sin embargo, la otra contención en general no se cumple. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.8. Sean $X = [0, 1]$ y $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $f(w) = \frac{w}{2}$, para cada $w \in [0, 1]$. Considerando $x = 1$ y $z = \frac{1}{4}$, tenemos que $z \in \mathcal{O}(x, f)$, pues $z = f^2(1)$. Además, no es difícil ver que las respectivas órbitas son:

$$\mathcal{O}(x, f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\} y\ \mathcal{O}(z, f) = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

Así, observamos que $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$, pero $\mathcal{O}(x, f) \nsubseteq \mathcal{O}(z, f)$.

Observe que en el Ejemplo 1.2.8 la órbita de x es infinita. Sin embargo, como se ilustra en el siguiente ejemplo, el hecho de que la órbita sea finita tampoco es una condición suficiente para que ocurra dicha contención. Más adelante se exhiben las condiciones suficientes para que ocurra la igualdad entre tales conjuntos.

Ejemplo 1.2.9. Consideremos $X = [-1, 1]$ y $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ tal que $f(y) = y^2 - 1$, para todo $y \in [-1, 1]$. Pongamos $x = 1$ y $z = 0$. Ya que $f(1) = 0$, $f(0) = -1$ y $f(-1) = 0$, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) = \{1, 0, -1\}$ y $\mathcal{O}(z, f) = \{0, -1\}$, por lo que claramente $\mathcal{O}(x, f) \nsubseteq \mathcal{O}(z, f)$.

Como observamos en los Ejemplos 1.2.8 y 1.2.9, existen puntos que tienen órbitas de cardinalidades tanto finitas como infinitas. El siguiente resultado muestra condiciones suficientes para que la órbita de un punto sea finita.

Teorema 1.2.10. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si existen números $r, s \in \mathbb{Z}_+$ con $r \neq s$ tales que $f^r(x) = f^s(x)$, entonces $\mathcal{O}(x, f)$ es finita.

Demostración. Supongamos que existen $r, s \in \mathbb{Z}_+$ con $r \neq s$ tales que $f^r(x) = f^s(x)$. Podemos suponer sin perder generalidad que $r < s$. Así, podemos definir $m = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \ r < n \ y \ f^n(x) = f^r(x)\}$. Notemos que $f^m(x) = f^r(x)$ y $r < m$. De esto último se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = r + k$. Probemos por inducción la afirmación siguiente.

$$f^{m+qk}(x) = f^r(x), \text{ para cada } q \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Para $q = 1$, tenemos que $f^{m+qk}(x) = f^{m+k}(x) = f^k(f^m(x)) = f^k(f^r(x)) = f^{r+k}(x) = f^m(x) = f^r(x)$.

Ahora supongamos que $f^{m+qk}(x) = f^r(x)$. Así $f^{m+(q+1)k}(x) = f^{m+qk+k}(x) = f^k(f^{m+qk}(x)) = f^k(f^r(x)) = f^{r+k}(x) = f^m(x) = f^r(x)$. Con lo que (1.1) queda probado.

Ahora veamos que $\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$. Por principio es claro que $\{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x\} \subseteq \mathcal{O}(x, f)$. Sea $z \in \mathcal{O}(x, f)$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z = f^n(x)$. Consideremos los siguientes casos para n.

Caso (1) $n \leq m$. En este caso, de manera inmediata obtenemos que $z \in \{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$.

Caso (2) $n > m$. En este caso, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + l$. Así $z = f^n(x) = f^{m+l}(x) = f^{r+l}(x)$. Ahora consideremos los siguientes subcasos para l.

Subcaso (2.1) $l \leq k$. En este caso $f^{r+l}(x) \in \{f^r(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$, por lo que $z \in \{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$.

Subcaso (2.2) $k < l$. En este caso por el algoritmo de la división, existen $w \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{Z}_+$ tales que $l = wk + t$ con $t < k$. Así $z = f^{m+l}(x) = f^{m+wk+t}(x) = f^t(f^{m+wk}(x))$. Sin embargo de (1.1) tenemos que $f^{m+wk}(x) = f^r(x)$. Luego $z = f^t(f^r(x)) = f^{r+t}(x)$ y ya que $t < k$, $f^{r+t}(x) \in \{f^r(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$. De aquí que $z \in \{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$.

De los Subcasos (2.1) y (2.2) tenemos que $z \in \{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$ con lo cual queda concluido el Caso (2).

De los Casos (1) y (2) concluimos que $z \in \{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$, lo que prueba que $\mathcal{O}(x,f) \subseteq \{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}$ y con ello que:

$$\mathcal{O}(x,f) = \{x, f(x), \ldots, f^{r+(k-1)}(x)\}.$$

Lo que demuestra que la órbita es finita. $\square$

Analicemos ahora de manera más detallada, qué sucede cuando las órbitas resultan ser finitas. Comencemos por el caso más simple, es decir, cuando la órbita consta de un solo punto. A los puntos que generan órbitas de un solo punto se les llama puntos fijos.

Definición 1.2.11. Dados (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$, se dice que x es un *punto fijo* de f, si $f(x) = x$. Al conjunto de puntos fijos de f lo denotaremos por $F(f)$.

El nombre de punto fijo cobra sentido si recordamos la interpretación de la órbita como un recorrido del punto x, pues al constar de un solo punto se entiende que el punto permaneció fijo conforme pasó el tiempo. De la Definición 1.2.11, podemos observar que dado x punto fijo de f, se tiene que $f^n(x) = x$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $\mathcal{O}(x,f) = \{x\}$. También podemos notar que cualquier punto fijo de f es también un punto fijo de f^n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. El siguiente resultado muestra una propiedad importante que cumple el conjunto $F(f)$.

Teorema 1.2.12. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que $F(f)$ es un conjunto cerrado en X.

Demostración. Para probar que $F(f)$ es cerrado en X, basta probar que $F(f) = \mathrm{cl}(F(f))$. Sabemos que $F(f) \subseteq \mathrm{cl}(F(f))$. Sólo resta probar que $\mathrm{cl}(F(f)) \subseteq F(f)$. Sea $x \in \mathrm{cl}(F(f))$. Así, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $F(f)$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Ya que f es una función continua se tiene que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Por otro lado, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $F(f)$, se cumple que $f(x_n) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ representan la misma sucesión de puntos. En consecuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Por la unicidad de los límites se tiene que $f(x) = x$. Esto es, $x \in F(f)$. Así, $\mathrm{cl}(F(f)) \subseteq F(f)$, lo que prueba que $F(f)$ es cerrado en X. $\square$

Aunque los puntos fijos en cuanto a dinámica son simples, pues son puntos que no se mueven, cobran importancia al estudiar su relación con otros puntos del espacio. Nos podemos preguntar por ejemplo, ¿qué pasa con puntos muy cercanos a un punto fijo? La siguiente definición es el primer paso para responder a esta cuestión.

Definición 1.2.13. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que x es un punto *asintóticamente fijo* si existe un punto fijo x_0 bajo f tal que:

$$\text{lím}_{n\to\infty} f^n(x) = x_0.$$

De la Definición 1.2.13, podemos observar que si x es un punto asintóticamente fijo distinto de x_0, el punto x_0 resulta ser un punto de acumulación para $\mathcal{O}(x, f)$.

Ejemplo 1.2.14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que $x_0 = 0$ es un punto fijo de f. Si tomamos $x = \frac{1}{2}$, se tiene que $f^n(x) = \frac{1}{2^n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo cual:

$$\text{lím}_{n\to\infty} f^n(x) = x_0,$$

es decir, $x_0 = \frac{1}{2}$ es un punto asintóticamente fijo.

Como ya vimos, existen puntos cuya órbita converge a un punto fijo. Pueden aquí surgir las siguientes preguntas. ¿Será que todas las órbitas infinitas convergen? y si lo hacen, ¿Será siempre el límite un punto fijo? La respuesta a la primera pregunta es negativa. Consideremos el ejemplo:

Ejemplo 1.2.15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(w) = -2w$, para cada $w \in \mathbb{R}$. Si tomamos $x = 1$, se tiene que $f^n(x) = (-2)^n$. Con lo que resulta evidente que la órbita de x no converge.

En cuanto a la segunda pregunta, si ya sabemos que la órbita es convergente, el límite es siempre un punto fijo. Este resultado muestra una de las razones por las cuales es muy importante el estudio de los puntos fijos.

Teorema 1.2.16. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si existe $y \in X$ tal que la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto y, entonces y es un punto fijo de f.

Demostración. Supongamos que existe $y \in X$ tal que la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto y. Como la función f es continua, se tiene que la sucesión $\{f(f^n(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $f(y)$. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x)$, por lo cual la sucesión $\{f(f^n(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de hecho una subsucesión de $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, y así, la sucesión $\{f(f^n(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge también al punto y. Por unicidad de los límites obtenemos que $f(y) = y$, es decir, y es un punto fijo de f. $\square$

Por el Teorema 1.2.16, podemos concluir que si la órbita de un punto x vista como sucesión es convergente, entonces x es un punto asintóticamente fijo. Dicho esto podemos preguntarnos ¿dado un punto fijo x_0 en X, siempre existirá otro punto en X tal que la órbita de dicho punto converja a x_0?, es decir, ¿un punto fijo será siempre punto de acumulación de alguna órbita distinta de la suya? Como se puede observar en el siguiente ejemplo, esto no es cierto en general.

Ejemplo 1.2.17. Consideremos $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ tal que $f(w) = -w$, para cada $w \in [0, 1]$. Se tiene que $x_0 = 0$ es un punto fijo de f, pues $f(0) = 0$. Sin embargo, dado $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, se tiene que $f(x) = -x$ y $f(-x) = x$, por lo cual $\mathcal{O}(x, f) = \{x, -x\}$. Lo cual nos indica que ningún punto distinto del punto fijo es asintóticamente fijo.

Los puntos para los cuales sí ocurre que son puntos de acumulación de alguna órbita reciben un nombre especial. Presentamos la definición a continuación.

Definición 1.2.18. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x_0 \in X$ un punto fijo de f. Decimos que x_0 es:

(1) Un *punto fijo atractor* de f si para todo conjunto abierto W con $x_0 \in W$, existe un subconjunto abierto $U \subseteq W$ tal que $x_0 \in U$, $f(U) \subseteq U$, y para toda $x \in U$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

(2) Un *punto fijo repulsor* de f si existe un subconjunto abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y para cada $x_0 \in U$ con $x \neq x_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ (que depende de x) tal que $f^n(x) \notin U$.

(3) Un *punto fijo neutro* si no es atractor ni repulsor.

De la Definición 1.2.18, podemos notar que pese a los nombres que parecen contrarios, las nociones de punto fijo atractor y punto fijo repulsor no son nociones contrarias.

Sin embargo, sí son nociones ajenas, es decir, un punto que sea atractor no puede ser repulsor y viceversa. Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 1.2.19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - 3x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ y $f(-2) = -2$. Por lo que $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$ son puntos fijos de f. Más aún son todos puntos fijos repulsores.

Ejemplo 1.2.20. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que $f(1) = 1$ y $f(-1) = -1$. Así, $x_0 = 1$ y $x_1 = -1$ son puntos fijos de f. Además, x_0 es un punto fijo repulsor de f y x_1 es un punto fijo atractor de f.

Como hemos visto, la importancia de los puntos fijos no es su dinámica por sí misma, si no la relación que guarda con puntos cercanos a él, pues puede brindar información sobre la dinámica de dichos puntos cercanos. La presencia de un punto fijo atractor, nos dice que los puntos cercanos a él, se irán acercando cada vez más a dicho punto fijo. En cambio si se trata de un punto fijo repulsor sabremos con certeza que los puntos cercanos tenderán a alejarse lo suficiente en un tiempo finito que depende del punto fijo en cuestión.

Ahora pasemos a estudiar en general los puntos que generan órbitas finitas. En el Ejemplo 1.2.20 podemos observar que al iterar la función sobre cualquier punto x, se recorrerán únicamente los valores de x y $-x$, repetidamente. A los puntos en los que ocurre un comportamiento similar los llamamos puntos periódicos.

Definición 1.2.21. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un *punto periódico de* f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al conjunto de puntos periódicos de f lo denotamos por $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, decimos que x tiene una *órbita periódica*.

Sea $x_0 \in Per(f)$. Decimos que x_0 tiene periodo k si:

$$k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

De la Figura 1.2, podemos observar que la órbita de x_0 es un conjunto finito y tiene la forma:

$$\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\}.$$

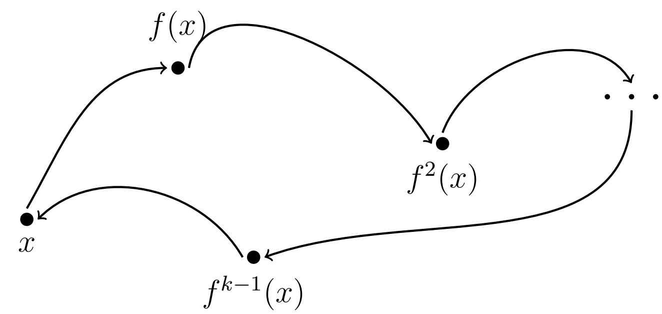

Figura 1.2: Órbita periódica

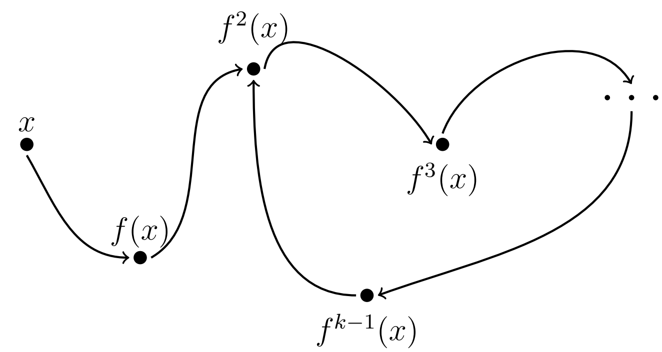

Figura 1.3: Órbita preperiódica

Además, si ocurre que $k \geq 2$, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ se tiene que $f^i(x_0) \neq x_0$. Por lo cual se tiene que el periodo coincide con la cardinalidad de la órbita.

Es claro que las órbitas de los puntos periódicos son finitas, sin embargo, existen órbitas finitas que no son generadas por puntos periódicos. A estos puntos se les llama puntos preperiódicos.

Definición 1.2.22. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un *punto preperiódico* (o eventualmente periódico) de f, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in Per(f)$. En tal caso, decimos que x tiene una *órbita preperiódica*. Al conjunto de puntos preperiódicos de f lo denotamos por $Ap(f)$.

Como se puede observar en la Figura 1.3, una órbita preperiódica es un conjunto finito. Más aún, cualquier órbita que sea finita, es o bien una órbita periódica, o bien una órbita preperiódica. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.2.23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ y $f(-1) = 0$. Por lo cual, $x_0 = 0$ es un punto periódico de periodo 3 y su órbita es $\mathcal{O}(x_0, f) = \{0, 1, -1\}$.

Ejemplo 1.2.24. Sea $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ tal que $f(x) = 1 - x^2$, para todo $x \in [-1, 1]$. Observe que $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Por lo cual, el punto $x_1 = -1$ es un punto preperiódico, pues el punto $x_0 = 0 = f(x_1)$ es un punto periódico de periodo 2 y su órbita es $\mathcal{O}(x_0, f) = \{-1, 0, 1\}$.

Algo que es importante mencionar es que los puntos fijos son puntos periódicos de periodo $k = 1$ y que todo punto periódico es también un punto preperiódico. El siguiente resultado muestra la relación entre los conjuntos $F(f)$, $Per(f)$ y $Ap(f)$.

Proposición 1.2.25. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que

$$F(f) \subseteq Per(f) \subseteq Ap(f).$$

Además, si $Per(f) = \emptyset$, entonces $Ap(f) = \emptyset$.

Pasemos ahora a ver algunas de las propiedades que cumplen los puntos periódicos.

Teorema 1.2.26. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$ un punto periódico de periodo k de f. Para cualquier $q \in \mathbb{Z}_+$, se cumple que:

$$f^{qk}(x) = x.$$

Demostración. Para $q = 0$ el resultado es trivial pues $f^0(x) = x$. Para el resto hagamos la prueba por inducción. Como x es un punto de periodo k, $f^k(x) = x$. Ahora, si para $q \in \mathbb{N}$ suponemos que $f^{(q-1)k}(x) = x$, por propiedades de la composición de funciones $f^{qk}(x) = f^k(f^{(q-1)k}(x)) = f^k(x) = x$. □

Teorema 1.2.27. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si x es un punto periódico de f de periodo k y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^n(x) = x$ si y sólo si k divide a n.

Demostración. Supongamos que $f^n(x) = x$. Por definición de periodo se tiene que $k \leq n$. Así, por el algoritmo de la división, existen $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{Z}_+$ con $r < k$ tales que $n = qk + r$. Luego, $f^n(x) = f^{qk+r}(x) = f^r(f^{qk}(x))$. Por el Teorema 1.2.26, se tiene que $f^{qk}(x) = x$, luego $x = f^n(x) = f^r(x)$. Sin embargo, ya que $r < k$, debe ocurrir que $r = 0$. Es decir, k divide a n.

Recíprocamente si k divide a n, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = qk$. Luego por el Teorema 1.2.26, $f^n(x) = f^{qk}(x) = x$. □

El Teorema 1.2.6, muestra que si $z \in \mathcal{O}(x, f)$, entonces $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$ y en los Ejemplos 1.2.8 y 1.2.9 mostramos que no se cumple la otra contención. Sin embargo, si el punto x es un punto periódico sí se cumple la igualdad entre las órbitas.

Teorema 1.2.28. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$ un punto periódico de periodo r bajo f. Si $z \in \mathcal{O}(x, f)$, entonces $\mathcal{O}(z, f) = \mathcal{O}(x, f)$.

Demostración. Sea $z \in \mathcal{O}(x, f)$. Del Teorema 1.2.6, tenemos que $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$. Ahora veamos que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq \mathcal{O}(z, f)$. En efecto, sea $w \in \mathcal{O}(x, f)$. Como $z, w \in \mathcal{O}(x, f)$ y x es un punto periódico de periodo r, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $z = f^n(x)$ con $n \leq r$ y $w = f^m(x)$ con $m \leq r$. Luego, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $r = n + k$. Así, $x = f^r(x) = f^{n+k}(x)$, por lo que $x = f^{n+k}(x)$. En consecuencia $f^m(x) = f^{m+n+k}(x)$. Por propiedades de la composición de funciones obtenemos que $f^m(x) = f^{m+k}(f^n(x))$ o bien, $w = f^{m+k}(z)$. Lo que implica que $w \in \mathcal{O}(z, f)$. □

A continuación enunciamos algunas consecuencias más inmediatas del Teorema 1.2.28, que son propiedades importantes de las órbitas de puntos periódicos.

Corolario 1.2.29. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x, y \in X$ puntos periódicos bajo f de periodos r y s, respectivamente. Se cumple lo siguiente:

(1) Si $\mathcal{O}(x, f) \cap \mathcal{O}(y, f) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}(y, f)$.

(2) Si $\mathcal{O}(x, f) \neq \mathcal{O}(y, f)$, entonces $\mathcal{O}(x, f) \cap \mathcal{O}(y, f) = \emptyset$.

(3) Si $\mathcal{O}(x, f) \cap \mathcal{O}(y, f) \neq \emptyset$, entonces $r = s$.

(4) Si $r \neq s$, entonces $\mathcal{O}(x, f) \cap \mathcal{O}(y, f) = \emptyset$.

Demostración. (1) Supongamos que $\mathcal{O}(x, f) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Tomemos $z \in \mathcal{O}(x, f) \cap \mathcal{O}(y, f)$. Así $z \in \mathcal{O}(x, f)$ y $z \in \mathcal{O}(y, f)$. Luego, por el Teorema 1.2.28 tenemos que $\mathcal{O}(z, f) = \mathcal{O}(x, f)$ y $\mathcal{O}(z, f) = \mathcal{O}(y, f)$. Por lo que $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}(y, f)$.

(2) Es el contrarrecíproco del punto (1).

(3) Supongamos que $\mathcal{O}(x, f) \cap \mathcal{O}(y, f) \neq \emptyset$. Por el punto (1), esto implica que $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}(y, f)$. Como el periodo coincide con la cardinalidad de la órbita, obtenemos que $r = s$.

(4) Es el contrarrecíproco del punto (3).

De los puntos (1), (2), (3) y (4), queda demostrado el resultado. □

Al tratarse de órbitas finitas, los puntos periódicos presentan un comportamiento dinámico que podríamos llamar simple, pues el punto recorre únicamente un número finito de posiciones conforme transcurre el tiempo. Por lo cual, de igual modo que con los puntos fijos, podemos preguntarnos ¿qué sucede con puntos cercanos a una órbita periódica? Las nociones dadas en la Definición 1.2.18, se generalizan para clasificar de manera análoga las órbitas de puntos periódicos como se enuncia a continuación.

Definición 1.2.30. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x_0 \in X$ un punto periódico de f de periodo k. Decimos que:

(1) x_0 tiene *órbita periódica atractora* bajo f si x_0 es un punto fijo atractor de f^k.

(2) x_0 tiene *órbita periódica repulsora* bajo f si x_0 es un punto fijo repulsor de f^k.

Hemos visto que el papel de los puntos periódicos es de suma importancia en el análisis de la dinámica de un sistema. Sin embargo, no hemos hablado de las condiciones que nos aseguren la existencia de puntos periódicos. Siendo aún más ambiciosos, podemos preguntarnos ¿la existencia de puntos de ciertos periodos aseguran la existencia de puntos de otros periodos? Por ejemplo, si el sistema (X, f) tiene puntos de periodo 2 ¿se puede asegurar la existencia de puntos fijos? Como veremos a continuación, esta no es una pregunta sencilla de responder. En 1975, los matemáticos Li y Yorke publicaron el artículo *Period three implies chaos* [35]. En este artículo demostraron que para funciones en el intervalo I, basta con exhibir un punto de periodo 3 para asegurar la existencia de puntos de todos los periodos.

Teorema 1.2.31. Sea $f : I \to I$ una función continua. Si f tiene un punto periódico de periodo 3, entonces tiene puntos de todos los periodos.

Pese a lo sorprendente que es el Teorema 1.2.31, años después se descubrió que el resultado publicado por Li y Yorke era sólo un caso particular de un impresionante teorema publicado en 1964 por el matemático ucraniano Alexander Nikolaevich Sharkovskii en [47]. Enunciamos el teorema a continuación.

Teorema 1.2.32. Consideremos el siguiente orden para $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd 9 \lhd \dots \\
&\dots \lhd 3 \cdot 2 \lhd 5 \cdot 2 \lhd 7 \cdot 2 \lhd 9 \cdot 2 \lhd \dots \\
&\dots \lhd 3 \cdot 2^2 \lhd 5 \cdot 2^2 \lhd 7 \cdot 2^2 \lhd 9 \cdot 2^2 \dots \\
&\dots \\
&\dots \lhd 3 \cdot 2^k \lhd 5 \cdot 2^k \lhd 7 \cdot 2^k \lhd 9 \cdot 2^k \lhd \dots \\
&\dots \\
&\dots \lhd 2^5 \lhd 2^4 \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1.
\end{aligned}$$

Si $f : I \to I$ es continua y tiene un punto periódico de periodo $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ es tal que $n \lhd m$, entonces f tiene también un punto periódico de periodo m.

En el Teorema 1.2.32, hoy conocido como el Teorema de Sharkovskii, se introduce un nuevo orden para los números naturales al que se le llama *orden de Sharkovskii*. Veamos la manera en que podemos localizar cualquier número natural en este orden. Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos aquí dos casos. O bien n es impar, o bien n es par. Si n es impar, entonces estará colocado en la primera sección del orden de Sharkovskii, en el orden usual de $\mathbb{N}$ restringido a los números impares. Si es par, tenemos de nuevo dos casos. O bien existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = q \cdot 2^k$ con q impar, o bien existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2^k$. En el primer caso, n estará en la sección $(k+1)$-ésima del orden de Sharkovskii, ubicado de acuerdo a q en el orden usual de $\mathbb{N}$ restringido a los números impares. En el segundo caso, n estará en la última sección del orden de Sharkovskii ubicado de acuerdo a k en orden natural decreciente.

Es importante notar que el Teorema de Sharkovskii depende fuertemente del orden de los números reales, por lo cual es de esperarse que el teorema no se cumpla en otro tipo de espacios, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.33. Sea $S^1 = \{e^{2\pi i\alpha} | \alpha \in [0,1)\}$ la circunferencia unitaria compleja. Sea $f : S^1 \to S^1$ la función definida por:

$$f(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i(\alpha + \frac{2\pi}{3})}.$$

Sea $\alpha \in [0,1)$. Se tiene que $f^3(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i(\alpha + 3\frac{2\pi}{3})} = e^{2\pi i\alpha}$, por lo cual $Per(f) = S^1$. Más aún, todos los puntos en S^1 son de periodo 3. Lo cual es evidencia de la invalidez del Teorema de Sharkovskii en S^1.

La demostración del Teorema de Sharkovskii la hemos omitido, pues como vemos en el Ejemplo 1.2.33, este resultado es únicamente para funciones en el intervalo $[0,1]$ y su demostración no es sencilla. Sin embargo, tiene una gran importancia en nuestro estudio y es de gran utilidad para el análisis de algunos sistemas particulares.

Para cerrar lo referente a este teorema, se puede observar fácilmente que el Teorema de Sharkovskii (Teorema 1.2.32), implica de manera inmediata el resultado demostrado por Li y Yorke (Teorema 1.2.31). Pese a ello, el crédito para Li y Yorke es que fueron los primeros en relacionar el concepto de punto periódico con la palabra caos. En capítulos posteriores se muestra cómo se da esta relación.

1.3 Estudio de la dinámica

Para estudiar otro tipo de características de la dinámica de un sistema, es necesario distinguir distintos tipos de comportamiento tanto de forma puntual, como conjuntos con ciertas características. Dedicamos esta sección a esta tarea.

1.3.1 Conjunto omega límite

Ahora pasemos a estudiar un conjunto que es tan importante como la órbita en el estudio de los sistemas dinámicos, el conjunto omega límite de un punto. Este conjunto intuitivamente nos muestra hacia dónde se dirige la órbita de un punto.

Definición 1.3.1. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se define el *conjunto* *omega límite* de x bajo f como:

$$\omega(x, f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x), f)).$$

Lo primero que podemos resaltar del conjunto omega límite de un punto es que es un conjunto cerrado, puesto que es una intersección de conjuntos cerrados.

Proposición 1.3.2. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. El conjunto $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado en X.

Ahora presentamos algunas caracterizaciones del conjunto omega límite, las cuales son útiles para facilitar el manejo del mismo en demostraciones posteriores.

Proposición 1.3.3. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se cumple que $y \in \omega(x, f)$ si y sólo si para todo abierto U de X tal que $y \in U$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ y $f^m(x) \in U$.

Demostración. Supongamos que $y \in \omega(x, f)$. Sean U un abierto de X tal que $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$, por definición se tiene que $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x), f))$, con lo cual $y \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x), f))$. De esto último $U \cap \mathcal{O}(f^n(x), f) \neq \emptyset$, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ y $f^m(x) \in U$.

Ahora probemos el recíproco. Sean $y \in X$ que cumple las hipótesis y $n \in \mathbb{N}$. De lo supuesto, para todo abierto U de X que contenga a y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ y $f^m(x) \in U$. Esto es, $U \cap \mathcal{O}(f^n(x), f) \neq \emptyset$, con lo cual se prueba que $y \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x), f))$. Puesto que $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, $y \in \omega(x, f)$. □

De la Proposición 1.3.3, se desprende el siguiente resultado.

Proposición 1.3.4. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se cumple que $y \in \omega(x, f)$ si y sólo si existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números naturales tales que la sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tiende a infinito y la sucesión $\{f^{n_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a y.

Demostración. La sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ se obtiene considerando la Proposición 1.3.3 con la familia de abiertos $\{B(y, \frac{1}{k}) | k \in \mathbb{N}\}$. □

Una forma de asegurar que el conjunto omega límite no es vacío, es considerando puntos periódicos. En este caso se tiene un resultado que dicta la forma exacta del conjunto omega límite.

Proposición 1.3.5. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si x es un punto periódico, entonces $\omega(x, f) = \mathcal{O}(x, f)$.

Demostración. Supongamos que $x \in Per(f)$. Luego $f^n(x) \in Per(f)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, $\mathcal{O}(f^n(x), f) = \mathcal{O}(x, f)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto finito, lo cual implica que es un conjunto cerrado en X, es decir, $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(x, f)$. Así:

$$\omega(x, f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}(x, f).$$

Por lo tanto, $\omega(x, f) = \mathcal{O}(x, f)$. □

Proposición 1.3.6. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si $z \in \omega(x, f)$, entonces $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \omega(x, f)$.

Demostración. Supongamos que $z \in \omega(x, f)$. Procedamos por inducción matemática. Primero veamos que $f(z) \in \omega(x, f)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, como $z \in \omega(x, f)$ se tiene que $z \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x), f))$. Luego, existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ que converge a z. Así, por la continuidad de f, la sucesión $\{f(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(z)$. Más aún, $\{f(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en $\mathcal{O}(f^n(x), f)$. Esto implica que $f(z) \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x), f))$. Lo anterior fue probado para un n arbitrario, por lo cual, obtenemos que $f(z) \in \omega(x, f)$. Ahora supongamos que $f^n(z) \in \omega(x, f)$. Con argumentos similares a los anteriores se prueba que $f^{n+1}(z) \in \omega(x, f)$- Por lo tanto $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \omega(x, f)$. □

Proposición 1.3.7. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si $z \in \omega(x, f)$, entonces $\omega(z, f) \subseteq \omega(x, f)$.

Demostración. Supongamos que $z \in \omega(x, f)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. De la Proposición 1.3.6, se tiene que $\mathcal{O}(z, f) \subseteq \omega(x, f)$. En particular, $f^n(z) \in \omega(x, f)$. Así, aplicando de nuevo la Proposición 1.3.6, obtenemos que $\mathcal{O}(f^n(z), f) \subseteq \omega(x, f)$. Por otro lado, la

Proposición 1.3.2, $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado, por lo cual $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(z), f)) \subseteq \omega(x, f)$. Así $\omega(z, f) \subseteq \omega(x, f)$. $\square$

Ahora pasamos a definir otros conjuntos que son útiles en el estudio de los sistemas dinámicos caóticos y se definen con la finalidad de facilitar el manejo de puntos con ciertos tipos de comportamientos, los cuales se analizan de manera más detallada en capítulos posteriores.

Definición 1.3.8. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que $x \in X$ es un punto:

(1) *No errante* si para cada $\epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(B(x, \epsilon)) \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Denotamos por $\Omega(f)$ al conjunto de todos los puntos no errantes.

(2) *Recurrente* si $x \in \omega(x, f)$. Denotamos por $R(f)$ al conjunto de todos los puntos recurrentes.

De manera intuitiva, un punto no errante es aquel que al paso del tiempo vuelve a lugares muy cercanos de donde partió. Por su parte los puntos recurrentes son aquellos para los cuales dado un tiempo fijo cualquiera, siempre se pueden encontrar elementos de la órbita que pasen muy cerca del punto en un tiempo mayor al tiempo fijo dado. Ahora pasemos a definir un conjunto que facilitará el manejo de los puntos no errantes.

Definición 1.3.9. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se define el conjunto $\Omega(x, f)$ del siguiente modo. Se tiene que $y \in \Omega(x, f)$ si y sólo si para cada par de abiertos U, V tales que $y \in U$ y $x \in V$ y para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$.

Proposición 1.3.10. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que $\{x \in X | \ x \in \Omega(x, f)\} \subseteq \Omega(f)$.

Demostración. Si el conjunto $\{x \in X | \ x \in \Omega(x, f)\}$ es vacío la proposición se cumple trivialmente. En otro caso, sea $x \in X$ tal que $x \in \Omega(x, f)$. Sea $\epsilon > 0$. Pongamos $U = B(x, \epsilon)$ y $V = B(x, \epsilon)$. Como $x \in \Omega(x, f)$, se tiene que existe $m \geq 1$ tal que $f^m(V) \cap U \neq \emptyset$. Esto es que $f^m(B(x, \epsilon)) \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Así, por definición $x \in \Omega(f)$. $\square$

De las primeras propiedades que podemos recalcar en general del conjunto de puntos no errantes, es que es un conjunto cerrado.

Proposición 1.3.11. En un sistema dinámico (X, f), $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado en X.

Demostración. Sean $x \in \mathrm{cl}(\Omega(f))$. Luego existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Omega(f)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $x_n \in B(x, \epsilon)$. Si $x = x_N$, hemos terminado, pues $x_N \in \Omega(f)$. Si por el contrario $x \neq x_N$, pongamos $\epsilon* = \frac{d(x,x_N)}{2} > 0$. Como $x_N \in \Omega(f)$, existe $m_N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_N}(B(x_N, \epsilon*)) \cap B(x_N, \epsilon*) \neq \emptyset$. Además, por elección de $\epsilon*$ se cumple que $B(x_N, \epsilon*) \subseteq B(x, \epsilon)$. Luego $f^{m_N}(B(x_N, \epsilon*)) \cap B(x_N, \epsilon*) \subseteq f^{m_N}(B(x, \epsilon)) \cap B(x, \epsilon)$, con lo que $f^{m_N}(B(x, \epsilon)) \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Esto último prueba que $x \in \Omega(f)$. □

Proposición 1.3.12. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se cumple que $\omega(x, f) \subseteq \Omega(x, f)$.

Demostración. Sean $y \in \omega(x, f)$, $N \in \mathbb{N}$ y U, V abiertos en X tales que $y \in U$ y $x \in V$. Por la Proposición 1.3.3, existe $n \geq N$ tal que $f^n(x) \in U$. Así $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$, con lo que $y \in \Omega(x, f)$. □

El siguiente resultado muestra, en cierto modo, la relación que en general tienen los puntos no errantes y los puntos recurrentes.

Proposición 1.3.13. Sean (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que $R(f) \subseteq \Omega(f)$.

Demostración. Sea $x \in R(f)$. Por definición $x \in \omega(x, f)$. De la Proposición 1.3.12, $\omega(x, f) \subseteq \Omega(x, f)$. Por lo cual $x \in \Omega(x, f)$. Esto implica, por la Proposición 1.3.10, que $x \in \Omega(f)$. □

1.3.2 Conjuntos invariantes

Otro concepto importante para el estudio de la dinámica topológica de un sistema es el de conjunto invariante.

Definición 1.3.14. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. Decimos que A es:

a) Un conjunto $+$*invariante* bajo f si $f(A) \subseteq A$.

b) Un conjunto $-$*invariante* bajo f si $f^{-1}(A) \subseteq A$.

c) Un conjunto *invariante* bajo f si $f(A) = A$.

Una de las primeras razones por la cual es importante distinguir este concepto y darle un nombre, es para obtener subsistemas de un sistema dinámico. Dados un sistema dinámico (X, f) y $A \subseteq X$, si A es invariante o +invariante la función restringida al conjunto A queda bien definida con contradominio A, por lo cual se puede considerar el sistema dinámico $(A, f|_A)$, donde $f|_A : A \to A$.

La siguiente proposición se deriva de que la imagen directa y la imagen inversa de una función preservan las contenciones, es decir, si $B \subseteq A$ entonces $f(B) \subseteq f(A)$ y $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$.

Proposición 1.3.15. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:

a) Si A es un conjunto +invariante bajo f, entonces $f^n(A) \subseteq A$.

b) Si A es un conjunto $-$invariante bajo f, entonces $f^{-n}(A) \subseteq A$.

c) Si A es un conjunto invariante bajo f, entonces $f^n(A) = A$.

En un sistema dinámico (X, f) se cumple que $f(X) \subseteq X$ y $f^{-1}(X) \subseteq X$. Es decir, X es +invariante y $-$invariante bajo f. Así, como consecuencia de la Proposición 1.3.15, tenemos la siguiente.

Proposición 1.3.16. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:

a) $f^n(X) \subseteq X$.

b) $f^{-n}(X) \subseteq X$.

El resultado siguiente, nos muestra que la unión y la intersección arbitraria preservan la propiedad de ser +invariante o $-$invariante. Presentamos únicamente la prueba correspondiente a +invariante, la prueba para $-$invariante se realiza de manera muy similar, utilizando propiedades de la imagen inversa de una función.

Teorema 1.3.17. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos +invariantes ($-$invariantes) bajo f en X. Se cumple que:

(1) $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es un conjunto +invariante ($-$invariante) bajo f.

(2) $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ es un conjunto +invariante ($-$invariante) bajo f.

Demostración. Por hipótesis se cumple que para cada $\alpha \in I$, $f(A_\alpha) \subseteq A_\alpha$.

(1) Por propiedades generales de funciones, obtenemos que $f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ y como $\bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, se obtiene que $f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Es decir, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es un conjunto +invariante.

(2) Se tiene que $f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ y que $\bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Por lo cual $f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. Esto es, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ es un conjunto +invariante.

De (1) y (2) se concluye la prueba del teorema. □

El siguiente resultado nos habla de lo que ocurre con el interior y la cerradura de conjuntos invariantes.

Teorema 1.3.18. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. Se cumple lo siguiente.

a) Si A es +invariante bajo f, entonces $\mathrm{cl}(A)$ es +invariante bajo f.

b) Si A es $-$invariante bajo f, entonces $\mathrm{int}(A)$ es $-$invariante bajo f.

Recordemos que nuestro objetivo es estudiar la dinámica puntual en un sistema dinámico, es decir, las propiedades que cumplen las órbitas de los puntos del espacio. Pasemos a revisar, cómo se relacionan las órbitas y conjuntos que hemos definido con otros conceptos y propiedades que hemos analizado en esta sección.

Proposición 1.3.19. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $x \in X$, entonces $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto +invariante.

Demostración. Sea $x \in X$. Por el Teorema 1.2.5, tenemos que $f(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(f(x), f)$ y del Teorema 1.2.6, tenemos que $\mathcal{O}(f(x), f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto $f(\mathcal{O}(x, f)) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$. Es decir, $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto +invariante. □

Proposición 1.3.20. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $x \in Per(f)$, entonces $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto invariante.

Demostración. Sea $x \in X$. Veamos que $f(\mathcal{O}(x,f)) = \mathcal{O}(x,f)$. Por el Teorema 1.2.5, $f(\mathcal{O}(x,f)) = \mathcal{O}(f(x),f)$. Por otro lado, como x es periódico y $f(x) \in \mathcal{O}(x,f)$, por el Teorema 1.2.28, tenemos que $\mathcal{O}(f(x),f) = \mathcal{O}(x,f)$. Por lo tanto, $f(\mathcal{O}(x,f)) = \mathcal{O}(x,f)$. Es decir, $\mathcal{O}(x,f)$ es un conjunto invariante. $\square$

Proposición 1.3.21. Sean (X,f) un sistema dinámico y $x \in X$. El conjunto $\omega(x,f)$ es un conjunto +invariante.

Demostración. Sea $z \in f(\omega(x,f))$, luego existe $y \in \omega(x,f)$ tal que $f(y) = z$. Como $y \in \omega(x,f)$, por la Proposición 1.3.4, existe una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f^{n_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y. Así, ya que f es continua, la sucesión de imágenes $\{f^{n_k+1}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(y)$. Esto, nuevamente por la Proposición 1.3.4, implica que $z \in \omega(x,f)$, lo cual prueba que $\omega(x,f)$ es +invariante. $\square$

Proposición 1.3.22. Sea (X,f) un sistema dinámico. El conjunto $R(f)$ es un conjunto +invariante bajo f.

Demostración. Sea $x \in R(f)$. Por definición $x \in \omega(x,f)$, o equivalentemente, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x),f))$. Por otro lado, $\omega(f(x),f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^{n+1}(x),f))$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Ya que $x \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x),f))$ se sigue que $f(x) \in f(\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x),f)))$. Por la Proposición 1.2.5, $f(\mathcal{O}(f^n(x),f)) = \mathcal{O}(f^{n+1}(x),f)$, luego:

$$f(\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^n(x),f))) \subseteq \mathrm{cl}(f(\mathcal{O}(f^n(x),f))) = \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^{n+1}(x),f)).$$

Así, $f(x) \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f^{n+1}(x),f))$, lo que implica que $f(x) \in \omega(f(x),f)$ y a su vez que $f(x) \in R(f)$. Por lo tanto, $R(f)$ es un conjunto +invariante bajo f. $\square$

Las Proposiciones 1.3.19, 1.3.20, 1.3.21 y 1.3.22, nos proporcionan una gran cantidad de ejemplos de conjuntos +invariantes y conjuntos invariantes. Ahora presentamos una caracterización de conjuntos +invariantes mediante órbitas. Cabe mencionar que en algunos textos es así como se presenta la definición de conjunto +invariante.

Proposición 1.3.23. Sean (X,f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. El conjunto A es +invariante si y sólo si $\mathcal{O}(x,f) \subseteq A$, para cada $x \in A$.

Demostración. Supongamos que A es un conjunto +invariante. Sea $x \in A$. Tomemos $z \in \mathcal{O}(x, f)$, luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $z = f^n(x)$. Como $x \in A$, se tiene que $z \in f^n(A)$. De la Observación 1.3.15, tenemos que $f^n(A) \subseteq A$, por lo que $z \in A$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x, f) \subseteq A$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq A$, para cada $x \in A$. Sea $x \in A$. Se tiene que $f(x) \in \mathcal{O}(x, f)$. Además, por hipótesis $\mathcal{O}(x, f) \subseteq A$, por lo que $f(x) \in A$. Como x es arbitrario, $f(A) \subseteq A$, es decir, A es un conjunto +invariante. □

Como consecuencia de la Proposición 1.3.23, podemos concluir que la órbita de un punto x es el conjunto +invariante más pequeño que lo contiene. Lo cual da pie a pensar que podemos escribir cualquier conjunto +invariante en términos de órbitas de puntos en el espacio. Esta idea se presenta en el siguiente resultado.

Teorema 1.3.24. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. El conjunto A es +invariante si y sólo si existe $B \subseteq X$ tal que $A = \bigcup\{\mathcal{O}(b, f) : \ b \in B\}$.

Demostración. Supongamos que A es +invariante. Pongamos $B = A$. Ahora veamos que $A = \bigcup\{\mathcal{O}(a, f) : \ a \in A\}$. Ya que para cada $a \in A$, $a \in \mathcal{O}(a, f)$ se tiene que $A \subseteq \bigcup\{\mathcal{O}(a, f) : \ a \in A\}$. Por otro lado, dado que A es +invariante, del Teorema 1.3.23, se tiene que para cada $a \in A$, $\mathcal{O}(a, f) \subseteq A$. Por lo que $\bigcup\{\mathcal{O}(a, f) : \ a \in A\} \subseteq A$. Por lo tanto, $A = \bigcup\{\mathcal{O}(a, f) : \ a \in A\}$. Recíprocamente, supongamos que existe $B \subseteq X$ tal que $A = \bigcup\{\mathcal{O}(b, f) : \ b \in B\}$. Por el Teorema 1.3.19, tenemos que para cada $b \in B$, $\mathcal{O}(b, f)$ es un conjunto +invariante. Además por el Teorema 1.3.17, parte (1), tenemos que $\bigcup\{\mathcal{O}(b, f) : \ b \in B\}$ es un conjunto +invariante. Es decir, A es un conjunto +invariante. □

Hasta este momento hemos estudiado la dinámica, enfocándonos únicamente en propiedades topológicas de subconjuntos del espacio que define a un sistema dinámico. Ahora estudiamos las propiedades que dependen del comportamiento específico de la función que lo define. Así, cuando hagamos referencia a las propiedades de una función $f : X \to X$, estamos hablando de propiedades del sistema dinámico (X, f). Así, si decimos que la función f tiene una propiedad P, decimos que el sistema dinámico es un sistema tipo P y viceversa.

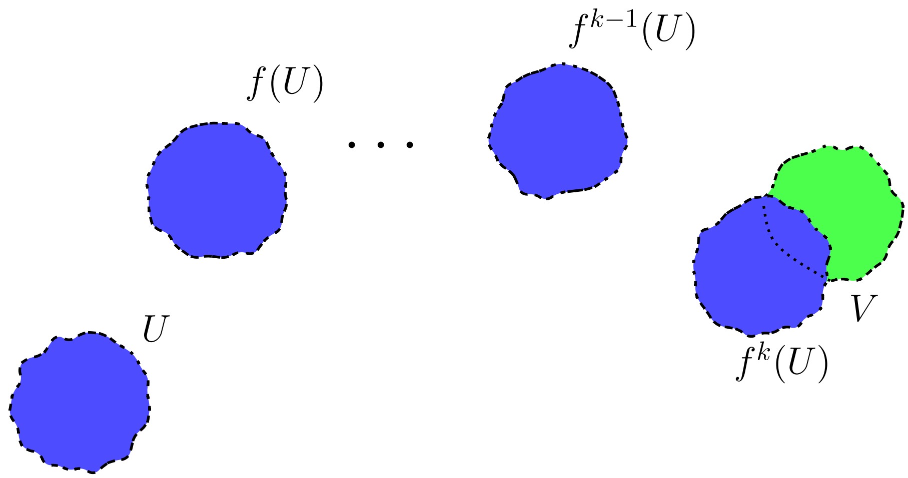

Figura 1.4: Transitividad topológica

1.4 Transitividad topológica

El concepto de transitividad topológica fue introducido en 1920 por el matemático estadounidense George David Birkhoff. Con el avance en el estudio de los sistemas dinámicos y al intentar modelar el caos de forma matemática, se descubrió que el concepto de transitividad topológica era una pieza fundamental, pues es una característica que casi todos los que han estudiado el caos ponen como indiscutible ingrediente en un sistema caótico. A continuación presentamos la definición.

Definición 1.4.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que la función f es:

(1) *Topológicamente transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U,V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

(2) *Totalmente transitiva* si para cada $k \in \mathbb{N}$, f^k es topológicamente transitiva.

Intuitivamente, podemos decir que un sistema dinámico transitivo, es aquel que tiene puntos que se mueven eventualmente, mediante la iteración de la función, de un conjunto abierto arbitrario a otro conjunto abierto también arbitrario, como se puede observar en la Figura 1.4.

De la Definición 1.4.1, podemos deducir que si $f : X \to X$ es una función transitiva, entonces el espacio X no puede descomponerse en dos conjuntos disjuntos con interior no vacío que sean +invariantes, es decir, no podemos separar al espacio en dos conjuntos con estas características que no interactúen eventualmente entre sí mediante la función.

Como mencionamos anteriormente, considerando un espacio métrico X y $f : X \to X$ una función continua, tenemos completamente definido un sistema dinámico al que denotamos por (X, f). Es por esta razón que estudiar propiedades del sistema es equivalente a estudiar propiedades de la función f y del espacio X. Por ejemplo, si una función $f : X \to X$ es topológicamente transitiva, entonces el sistema dinámico (X, f) es topológicamente transitivo y viceversa. A partir de ahora, cuando digamos función transitiva nos referiremos a función topológicamente transitiva. Veamos los ejemplos más conocidos de funciones transitivas.

Ejemplo 1.4.2. Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2}, \\ \\ 2 - 2x & \text{si} \quad x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La función definida en el Ejemplo 1.4.2 es conocida como *la función tienda* y a pesar de lo sencilla que resulta definirla, esta función posee una dinámica muy interesante que ha sido ampliamente estudiada (ver [31]). Más adelante, en el Capítulo 5, se analiza esta función más a detalle. Lo primero que podemos notar es que T es una función continua en $[0, 1]$. Además, es una función transitiva. La prueba se puede encontrar en [18].

Proposición 1.4.3. La función tienda $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es transitiva.

Ejemplo 1.4.4. Sean $\lambda \in (0, 4]$ y $L : [0, 1] \to [0, 1]$ la función dada por:

$$L(x) = \lambda x(1 - x), \text{ para cada } x \in [0, 1].$$

La función definida en el Ejemplo 1.4.4, se conoce como *función logística* y al igual que la función tienda es una de las funciones más estudiadas por la dinámica que posee. Además de que es utilizada para modelar múltiples fenómenos naturales, por ejemplo

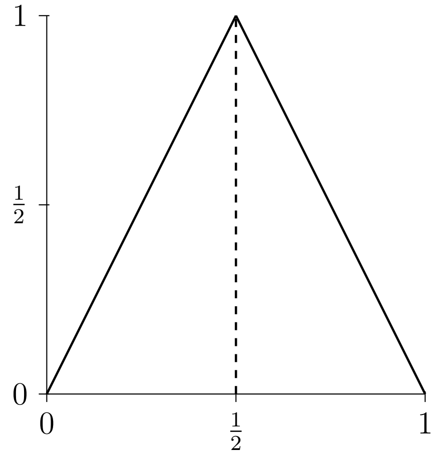

Figura 1.5: Gráfica de la función tienda

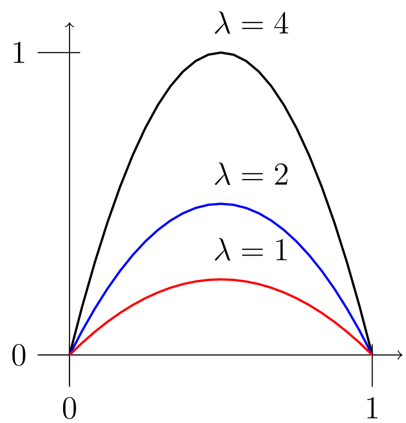

Figura 1.6: Gráficas de funciones logísticas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 1.7: Diagrama de conjugación topológica

el crecimiento de poblaciones. Para demostrar la transitividad y otras propiedades de la función logística, se hace uso de una herramienta muy importante en el estudio de los sistemas dinámicos.

Como hemos visto, la cantidad de sistemas dinámicos que se pueden generar es muy vasta, incluso si sólo consideramos un espacio métrico X, para cada función continua que podamos construir sobre él, tendremos un sistema dinámico. Así mismo, pueden ser muy variadas las propiedades que dichos sistemas posean. Es por ello que para el estudio cualitativo se busca encontrar sistemas que son "dinámicamente parecidos", es decir, que compartan propiedades dinámicas para que mediante el estudio de uno de ellos se pueda comprender la dinámica de otros sistemas, posiblemente más complejos de analizar. La herramienta que sirve para hacer esta clasificación es la conjugación topológica.

Definición 1.4.5. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Se dice que dichos sistemas son *topológicamente conjugados* si existe un homeomorfismo $\phi : X \to Y$ tal que:

$$\phi(f(x)) = g(\phi(x)), \text{ para cada } x \in X,$$

es decir, que $\phi \circ f = g \circ \phi$, o equivalentemente que el diagrama de la Figura 1.7, es conmutativo.

De aquí en adelante será equivalente decir que los sistemas (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados, a decir que las funciones f y g son topológicamente conjugadas. También es importante mencionar que cuando dos funciones f y g son topológicamente conjugadas, decimos que son dinámicamente equivalentes. Además, cualquier propiedad de los sistemas que sea preservada por conjugación topológica la llamaremos *propiedad dinámica*. En este sentido, para verificar que una propiedad P dada es una propiedad dinámica, debemos verificar que dados (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados, el sistema (X, f) tiene la propiedad P si y sólo si el sistema (Y, g) tiene la propiedad P. Sin embargo, para probar esto sólo se requiere demostrar que si (X, f) tiene la propiedad P, entonces el sistema (Y, g) tiene la propiedad P. Para demostrar el recíproco, solo basta intercambiar los papeles de (X, f) por (Y, g) y de $\phi : X \to Y$ por $\phi^{-1} : Y \to Y$. Es por ello que los resultados relacionados con la conjugación topológica, se enuncian de la forma anteriormente explicada.

Veamos que la transitividad es una propiedad dinámica. Esto resulta muy útil en las demostraciones relacionadas a sistemas caóticos que incluyan la transitividad como ingrediente, los cuales se estudian a detalle en el Capítulo 4.

Teorema 1.4.6. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados mediante el homeomorfismo $\phi : X \to Y$. Si (X, f) es un sistema transitivo, entonces (Y, g) es un sistema transitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es transitivo. Sean U y V abiertos no vacíos en Y. Como $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo, $\phi^{-1}(U)$ y $\phi^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos en X. Ya que (X, f) es transitivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$. Considerando que ϕ es un homeomorfismo que cumple que $\phi \circ f\phi^{-1} = g$ se tiene que $\phi(f^n(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V)) = \phi(f^n(\phi^{-1}(U))) \cap \phi(\phi^{-1}(V)) = g^n(U) \cap V$. Así $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto (Y, g) es un sistema transitivo. $\square$

La prueba de la siguiente proposición se encuentra en el Teorema 1.6.10 de [43].

Proposición 1.4.7. La función tienda y la función logística correspondiente a $\lambda = 4$ son topológicamente conjugadas mediante el homeomorfismo:

$$\phi(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

En la Proposición 1.4.7, nos indica que todas las propiedades dinámicas que posee la función tienda, son también propiedades de la función logística. Por ejemplo, al demostrar la transitividad de la función tienda, automáticamente se tiene la transitividad de la función logística. Es decir, del Teorema 1.4.6 y la Proposición 1.4.7 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.4.8. La función logística es una función topológicamente transitiva.

Demostración. De la Proposición 1.4.7, tenemos que la función logística y la función tienda son topológicamente conjugadas. Por otro lado, el Ejemplo 1.4.3, nos dice que la función tienda es transitiva. Como por el Teorema 1.4.6, sabemos que la transitividad es una propiedad dinámica, se tiene que la función logística es transitiva. □

A continuación presentamos algunas equivalencias de la transitividad de una función. Hay que resaltar que estas equivalencias se dan de forma general, incluso si la función considerada no fuese continua.

Teorema 1.4.9. Sean (X, f) un sistema dinámico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) f es transitiva.

(2) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$.

(3) Para cada subconjunto abierto no vacío U de X, la órbita del conjunto U, $\mathcal{O}(U, f) = \bigcup_{x \in U} \mathcal{O}(x, f)$, es un conjunto denso en X.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Sean U,V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Como f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap f^k(U) \neq \emptyset$. Tomemos $y_0 \in V \cap f^k(U)$. En particular $y_0 \in f^k(U)$, así existe $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f^k(x_0)$. Por otro lado, ya que $y_0 \in V$, $x_0 \in f^k(V)$. Por lo que $x_0 \in U \cap f^{-k}(V)$, es decir $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Lo que prueba que (1) implica (2).

Ahora supongamos que se cumple (2). Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Veamos que $\mathcal{O}(U, f)$ es un conjunto denso en X. Para esto, sea V abierto y no vacío en X. Por hipótesis tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in U \cap f^{-k}(V)$. En particular $x_0 \in U$ y ya que $f^k(x_0) \in \mathcal{O}(x_0, f)$, se tiene que $f^k(x_0) \in \mathcal{O}(U, f)$. Por otra parte, $x_0 \in f^{-k}(V)$, por lo que $f^k(x_0) \in V$. Así $f^k(x_0) \in \mathcal{O}(U, f) \cap V$. Lo que prueba que $\mathcal{O}(U, f)$ es denso en X.

Por último, veamos que (3) implica (1). Supongamos pues que se cumple 3). Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Por hipóteisis tenemos que $\mathcal{O}(U, f)$

es denso en X. Así $\mathcal{O}(U, f) \cap V \neq \emptyset$. Sea $y_0 \in \mathcal{O}(U, f) \cap V$. Como $y_0 \in \mathcal{O}(U, f)$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_0 = f^k(x_0)$, luego $y_0 \in f^k(U)$. Por otro lado $y_0 \in V$ por lo que $y_0 \in f^k(U) \cap V$. Lo que prueba que f es transitiva. $\square$

Ahora veamos otras equivalencias de transitividad utilizando conjuntos +invariantes y −invariantes. Estas equivalencias sí requieren continuidad de la función. Sin embargo, no genera ninguna restricción, ya que en los sistemas que aquí definimos se exige la continuidad de la función.

Teorema 1.4.10. Sea (X, f) un sistema dinámico. Los siguientes enunciados son equivalentes.

(1) f es transitiva.

(2) Todo subconjunto propio de X que sea cerrado y +invariante es denso en ninguna parte.

(3) Cada subconjunto −invariante de X con interior no vacío, es denso en X.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Sea A un subconjunto propio de X tal que A es cerrado y +invariante. Supongamos además que $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Pongamos $U = X \setminus A$. Se tiene que U es abierto y no vacío, pues A es un subconjunto propio y cerrado en X. Como f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^k(\text{int}(A)) \neq \emptyset$. Sea $y_0 \in U \cap f^k(\text{int}(A))$. Así, $y_0 \in U$, es decir $y_0 \notin A$. Por otro lado, $y_0 \in f^k(\text{int}(A))$, luego $y_0 \in f^k(A)$. Sin embargo, ya que A es +invariante, de la Proposición 1.3.15, tenemos que $f^k(A) \subseteq A$. Luego $y_0 \in A$, lo cual es una contradicción pues $y_0 \notin A$. La contradicción proviene de suponer que $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\text{int}(A) = \emptyset$. Dado que A es cerrado $\text{cl}(A) = A$, por lo que $\text{int}(\text{cl}(A)) = \emptyset$, es decir, A es denso en ninguna parte.

Ahora supongamos que se cumple (2). Sea $A \subseteq X$ tal que A es −invariante y $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Como A es −invariante, por el Teorema 1.3.18, tenemos que $\text{int}(A)$ es −invariante. Luego por el Teorema 1.3.18, $X \setminus A$ es +invariante. Además, ya que $\text{int}(A) \neq \emptyset$, se tiene que $X \setminus A$ es un subconjunto propio y cerrado de X. Así, por hipótesis, $\text{int}(X \setminus \text{int}(A)) = \emptyset$, y ya que $\text{int}(X \setminus A) \subseteq \text{int}(X \setminus \text{int}(A))$, se tiene que

$\operatorname{int}(X \setminus A) = \emptyset$. Como $X \setminus A$ es abierto en X, $X \setminus A = \emptyset$. Por lo tanto $X = A$, esto es, A es denso en X.

Por último, supongamos que se cumple (3). Veamos que f es transitiva. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Dado $x \in U$, el Teorema 1.3.19, nos dice que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto +invariante y del Teorema 1.3.17, nos dice que la unión arbitraria de conjuntos +invariantes, es +invariante. Por lo tanto, $\mathcal{O}(U, f)$ es un conjunto +invariante. Por el Teorema 1.3.18, $\operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f))$ es también un conjunto +invariante. Así, por el Teorema 1.3.18, $X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f))$ es un conjunto $-$invariante. Supongamos que $X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f)) \neq \emptyset$. Ya que $X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f))$ es un conjunto abierto en X, $\operatorname{int}(X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f))) \neq \emptyset$. Por hipótesis $X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f))$ es denso en ninguna parte, esto es, $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f)))) = \emptyset$ y considerando que $X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f))$ es un conjunto abierto en X, obtenemos que $X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f)) = \emptyset$. Lo cual es una contradicción, pues se está suponiendo que $X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f)) \neq \emptyset$. Por lo tanto $X \setminus \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f)) = \emptyset$, es decir, $X = \operatorname{cl}(\mathcal{O}(U, f))$. Lo que prueba que $\mathcal{O}(U, f)$ es un conjunto denso en X. Por el Teorema 1.4.9, esto implica que f es transitiva. □

El siguiente resultado es también una caracterización de la transitividad de una función. Omitimos la prueba, pero se puede encontrar en [43].

Teorema 1.4.11. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que f es transitiva si y sólo si para cada $N \in \mathbb{N}$ y para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U, V de X, existe $n \geq N$ y un conjunto abierto $W \subseteq U$ tal que $f^n(W) \subseteq V$.

Proposición 1.4.12. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que f es transitiva si y sólo si $\Omega(x, f) = X$, para cada $x \in X$.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Sea $x \in X$. Para probar que $\Omega(x, f) = X$, basta verificar que $X \subseteq \Omega(x, f)$. Sean $y \in X$ y U, V abiertos en X tales que $y \in U$, $x \in V$ y $N \in \mathbb{N}$. Como f es transitiva, del Teorema 1.4.11, existe $n \geq N$ y un conjunto abierto $W \subseteq U$ tal que $f^n(W) \subseteq V$.

Dado que $f^n(W) \cap V \subseteq f^n(U) \cap V$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, lo que prueba que $y \in \Omega(x, f)$. Ahora supongamos que $\Omega(x, f) = X$, para cada $x \in X$. Sean U, V abiertos no vacíos en X. Tomemos $y \in U$ y $x \in V$. Por hipótesis $\Omega(x, f) = X$, por lo que $y \in \Omega(x, f)$. Esto último implica que existe $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, lo que prueba que f es transitiva. □

Ahora enunciamos otros resultados que nos muestran propiedades de la función f que son consecuencia de la transitividad de la función.

Proposición 1.4.13. Sean (X, f) un sistema dinámico y $U \subseteq X$ un conjunto abierto y no vacío. Si f es una función transitiva, entonces el conjunto:

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U),$$

es un conjunto abierto y denso en X.

Demostración. Supongamos que f es una función transitiva. Se tiene que V es abierto pues U es abierto y f es continua. Veamos que V es denso. Sea W un subconjunto abierto y no vacío de X. Como f es transitiva, por el Teorema 1.4.9, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $W \cap f^{-m}(U) \neq \emptyset$, luego $W \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 1.4.14. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es una función transitiva, entonces $R(f) = X$.

Demostración. Sea $x \in X$. Sea U un abierto de X que contiene a x y sea $n \in \mathbb{N}$. Como f es transitiva, por el Teorema 1.4.11, haciendo $U = V$, tenemos que existe $m \geq n$ y un conjunto abierto $W \subseteq U$ tal que $f^m(x) \in U$. Así, por la Proposición 1.3.3, se tiene que $x \in \omega(x, f)$ y con ello $x \in R(f)$. $\square$

Dado un espacio métrico X y $f : X \to X$ una función transitiva, no es díficil ver que para cada U, V y W conjuntos abiertos no vacíos de X, existe un punto $x \in X$ el cual, su órbita visita a los tres conjuntos dados. El siguiente resultado presenta esta idea en su forma más general. La prueba se puede hallar en la Proposición 8.3 de [31].

Teorema 1.4.15. Sean (X, f) un sistema dinámico, con f una función transitiva y U un subconjunto abierto y no vacío de X. Se cumple que para cada colección de n conjuntos abiertos y no vacíos de $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de X, existen $x_0 \in X$ y n números naturales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tales que

$$f^{m_1}(x_0) \in U_1, f^{m_2}(x_0) \in U_2, \ldots, f^{m_n}(x_0) \in U_n.$$

Dado (X, f) un sistema dinámico transitivo, si podemos cubrir a X con un número finito de bolas de radio ϵ, es decir que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon), \ x_1, x_2, \ldots, x_k \in X,$$

el Teorema 1.4.15, nos dice que existe al menos un punto, cuya órbita recorre todas las bolas. Así, si logramos hacer esto para cada $\epsilon \geq 0$, entonces la transitividad de la función asegura que habrá puntos que recorran cada vez más lugares del espacio. Con lo cual, surge el interés de preguntarnos por la existencia de órbitas densas en el conjunto X y si la transitividad es condición suficiente para que esto ocurra. Primero definimos este tipo de puntos.

Definición 1.4.16. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que x es un *punto transitivo* si $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X. Denotamos por $Trans_f(X)$ el conjunto de todos los puntos transitivos de X.

Según la Definición 1.4.16, un punto transitivo es un punto cuya órbita visita casi todas partes del espacio. Esto es, que en cualquier vecindad en el espacio, hallaremos elementos de la órbita del punto. En espacios perfectos, la existencia de un punto transitivo, tiene consecuencias aún más fuertes.

Proposición 1.4.17. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico perfecto. Se cumplen las siguientes proposiciones:

(1) Si $x \in Trans_f(X)$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ $f^n(x) \in Trans_f(X)$. Así, $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Trans_f(X)$.

(2) Si $Trans_f(X) \neq \emptyset$, entonces $Trans_f(X)$ es un conjunto denso en X.

Demostración. (1) Supongamos que $x \in Trans_f(X)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. veamos que $f^n(x) \in Trans_f(X)$. Sea U un abierto no vacío de X. Pongamos:

$$V = U \setminus \{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}.$$

Se tiene que V es un abierto en X. Además, dado que X es perfecto, V es no vacío. Y ya que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X, existe $m \geq n$ tal que $f^m(x) \in V$.

Por tanto $f^m(x) \in U$. Sin embargo, ya que $m \geq n$, $f^m(x) \in \mathcal{O}(f^n(x), f)$. Así, $\mathcal{O}(f^n(x), f) \cap U \neq \emptyset$. Hemos probado que $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es un conjunto denso. Esto prueba que $f^n(x) \in Trans_f(X)$. Se sigue que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Trans_f(X)$.

(2) Supongamos que $Trans_f(X) \neq \emptyset$. Sea $x \in Trans_f(X)$. Luego $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X. Del punto (1), tenemos que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Trans_f(X)$. Por lo tanto $Trans_f(X)$ es un conjunto denso en X.

De (1) y (2) se concluye la prueba. □

Proposición 1.4.18. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se tiene que $x \in Trans_f(X)$ si y sólo si $\omega(x, f) = X$.

Demostración. Sean $x \in Trans_f(X)$ y $y \in X$. Veamos que $y \in \omega(x, f)$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in Trans_f(X)$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \in B(y, \frac{1}{k})$. Si consideramos la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ generada de esta forma, tenemos que dicha sucesión converge a y. Lo cual, por la Proposición 1.3.4, implica que $y \in \omega(x, f)$. Como $y \in X$ es arbitrario, $X \subseteq \omega(x, f)$ y así $\omega(x, f) = X$.

Ahora supongamos que $\omega(x, f) = X$. Como $\omega(x, f) \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$, se tiene que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Así, por definición $x \in Trans_f(X)$. □

Recordemos que al presentar la definición de punto transitivo (Definición 1.4.16), nos planteamos la pregunta de la relación que existe entre este concepto y la transitividad. Por principio podemos preguntarnos ¿bajo qué condiciones la existencia de órbitas densas implica la transitividad del sistema? Como se exhibe a continuación, la condición es que el espacio no posea puntos aislados.

Teorema 1.4.19. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico perfecto. Si existe un punto transitivo, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que existe un punto transitivo, es decir, existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$. Dado que X es un espacio perfecto, de la Proposición 1.4.17, tenemos que $\mathcal{O}(f^{n+1}(x), f)$ es un conjunto denso en X. Luego existe, $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in V$. Note que $m > n$, luego $f^m(x) = f^{m-n}(f^n(x))$. Así, $f^m(x) \in f^{m-n}(U) \cap V$. Luego $f^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$, lo que prueba que f es transitiva. □

La siguiente pregunta que surge de manera natural es ¿se cumple el recíproco del Teorema 1.4.19? ¿bajo qué condiciones sí se cumple? Para dar respuesta a estas preguntas, presentamos un importante resultado de topología, que es útil no sólo para este propósito, como descubriremos más adelante. Este teorema es conocido como el Teorema de Categoría de Baire y su demostración puede ser hallada en el Teorema 2.6 de [19].

Teorema 1.4.20 (Teorema de Categoría de Baire)**.** Sea X un espacio métrico completo. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos, no vacíos y densos, entonces:

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Más aún, A es un conjunto denso en X.

El siguiente resultado muestra que la transitividad implica la existencia de una órbita densa, cuando el espacio considerado es completo y separable.

Teorema 1.4.21. Sea (X, f) un sistema dinámico, con X un espacio métrico completo y separable[2]. Si f es transitiva, entonces existe $x \in X$ tal que x es un punto transitivo en X.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Como el espacio X es separable, existe un subconjunto denso numerable. Tomando las bolas de radios racionales, centradas en los puntos de dicho conjunto denso numerable, podemos construir una base numerable[3] para la topología del espacio X. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable para X. Sea $n \in \mathbb{N}$. Luego U_n es abierto y no vacío, por lo cual, de la Proposición 1.4.13, el conjunto:

$$A_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^{-j}(U_n),$$

es un conjunto abierto y denso. Así, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos, no vacíos y densos. Por el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.4.20), tenemos que

[2]Las definiciones de completo y separable se pueden hallar en [29].

[3]Cuando el espacio posee una base numerable, se dice que el espacio es segundo numerable. En espacios métricos, ser separable y ser segundo numerable, son nociones equivalentes. Ver Teorema 3, Capítulo IV de [29].

el conjunto:

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Sea $x \in A$. Veamos que $x \in Trans_f(X)$. Sea U abierto no vacío en X. Como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base para X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subseteq U$. Por otro lado, dado que $x \in A$, en particular, $x \in A_n$. Por lo cual, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-m}(U_n)$ y por tanto $f^m(x) \in U_n$. Así, $f^m(x) \in U$, lo que a su vez nos dice que $\mathcal{O}(x, f) \cap U \neq \emptyset$. Esto es, x es un punto transitivo. □

Como consecuencia del Teorema 1.4.19 y el Teorema 1.4.21, podemos deducir las propiedades del espacio X, bajo las cuales la transitividad y la existencia de puntos transitivos son nociones equivalentes. Lo enunciamos de manera formal a continuación. La demostración es inmedianta considerando los Teoremas 1.4.19 y 1.4.21.

Teorema 1.4.22. Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico perfecto, completo y separable. Se tiene que f es transitiva si y sólo si existe $x \in X$ tal que x es un punto transitivo.

Para finalizar este capítulo introducimos algunas nociones relacionadas con la transitividad.

Definición 1.4.23. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. El conjunto A es un *subconjunto minimal de* X si A es cerrado, +invariante y no contiene conjuntos propios que sean cerrados y +invariantes.

Cuando no haya confusión sobre la pertenencia del conjunto A, en la Definición 1.4.23, diremos simplemente que A es un conjunto minimal.

Ejemplo 1.4.24. Sea (X, f) un sistema dinámico. Sea $x \in X$, se tiene que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es un conjunto minimal. Esto se sigue de la Proposición 1.3.23.

Es importante recalcar que estos conjuntos son llamados minimales, pues en términos de contención de conjuntos, son el mínimo conjunto cerrado y +invariante que los contiene. Además, recordemos que si A es un conjunto +invariante, podemos considerar el subsistema:

$$f|_A : A \to A.$$

Esto da pie a la idea de sistemas minimales. Presentamos la definición a continuación.

Definición 1.4.25. Un sistema dinámico (X, f) es un *sistema dinámico minimal* si X es un conjunto minimal.

La Definición 1.4.25, la podemos interpretar como sigue. Un sistema minimal es aquel que no cuenta con subsistemas propios, puesto que no existe un subconjunto propio de X que sea cerrado y +invariante. Esto nos dice que no hay subconjuntos propios en X cuyos puntos no interactuen con todo el espacio X. Si recordamos que las órbitas son los conjuntos +invariantes más pequeños que contienen a un punto, es de esperarse un comportamiento especial de las órbitas en sistemas minimales.

Proposición 1.4.26. Sea (X, f) un sistema dinámico. El sistema es minimal si y sólo si para cada $x \in X$, $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X.

Demostración. Supongamos que (X, f) es un sistema minimal. Luego X es un conjunto minimal. Sea $x \in X$. De la Proposición 1.3.19, $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto +invariante. Así, $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es un conjunto +invariante y cerrado. Como X es un conjunto minimal, debe ocurrir que $X \subseteq \text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$, lo que prueba que $X = \text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$. Por lo tanto $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X.

Ahora supongamos que para cada $x \in X$, $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X. Se tiene que X es cerrado. Sea $A \subseteq X$ tal que A es cerrado y +invariante. Sea $x \in A$. Como A es +invariante, de la Proposición 1.3.23, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq A$. Esto, dado que A es cerrado, nos lleva a que $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) \subseteq A$, pero $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X. Así, $X \subseteq A$. Esto prueba que X es un conjunto minimal. □

Por último, veamos la relación que existe entre un sistema transitivo y un sistema minimal.

Teorema 1.4.27. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es minimal, entonces (X, f) es transitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es minimal. Sean U y V abiertos no vacíos en X. Sea $x \in U$. Como (X, f) es minimal, de la Proposición 1.4.26, obtenemos que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X. Así $\mathcal{O}(x, f) \cap V \neq \emptyset$, por lo cual existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in V$. Por lo tanto, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$, lo que prueba que (X, f) es transitivo. □

Capítulo 2

Sensibilidad a las condiciones iniciales y equicontinuidad

Por la trémula finura
de los aleteos pequeños
delicados como sueños
dió inicio la aventura.

En este capítulo se estudian a detalle los conceptos de estabilidad e inestabilidad puntual en un sistema dinámico y se muestra cómo estos se relacionan con las aproximaciones numéricas. Posteriormente se analiza el concepto de sensibilidad a las condiciones iniciales, que es uno de los pilares históricos y conceptualmente fundamentales en el nacimiento de la teoría del caos. También se introduce el concepto de equicontinuidad, que presenta características aparentemente opuestas a las de sensibilidad a las condiciones iniciales. Finalmente, se analizan las condiciones bajo las cuales pueden ser tratadas como nociones opuestas de orden y desorden en un sistema dinámico.

Resulta inevitable hablar de aproximaciones numéricas cuando hablamos de sistemas dinámicos, pues el objetivo fundamental de un sistema dinámico es el de modelar matemáticamente cierto proceso de movimiento, de manera que nos permita hacer predicciones. Es decir, que podamos saber el estado del sistema en cualquier periodo de tiempo determinado. Sin embargo, esto no siempre se puede lograr. Para entrar en materia necesitamos algunas aclaraciones.

Durante este capítulo consideramos el sistema dinámico (X, f) con X un espacio métrico perfecto, completo[1] y separable[2]. La razón de esta restricción es que el Teorema 1.4.22, nos dice que estas son las condiciones para las cuales es equivalente un sistema transitivo, que un sistema en el que existen puntos transitivos. Así, durante este capítulo estas nociones serán equivalentes.

Los artículos que conforman las referencias principales de este capítulo los puede encontrar en [2, 5, 39].

2.1 Estabilidad e inestabilidad puntual

La palabra estabilidad tiende a interpretarse como algo que no cambia, o algo que tras sufrir una ligera perturbación, vuelve a su estado original. Sin embargo, la noción matemática de la estabilidad es un poco distinta. La estabilidad o inestabilidad se dan de manera puntual en un sistema dinámico. Esta noción muestra cómo se comportan los puntos cercanos al punto estable o inestable en cuestión, al transcurrir el tiempo. Veamos la definición de manera formal.

Definición 2.1.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Un punto $x \in X$ es llamado:

- *Estable* en X, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal para cada $y \in X$, $d(x, y) < \delta$ implica que $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

- *Inestable* en X, si existen $\epsilon > 0$, una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X y una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tales que la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiende a infinito, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x y $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(x_k)) \geq \epsilon$, para cada $k \in \mathbb{N}$. En este caso decimos que x es *ϵ-inestable.*

Cuando no haya confusión sobre el espacio, decimos únicamente que el punto x es estable o inestable.

[1] Un espacio completo es aquel en el que toda sucesión de Cauchy es convergente. Consulte la definición en el Capítulo V de [29].

[2] Un espacio es separable si admite un subconjunto denso y numerable. Consulte la definición en el Capítulo IV de [29].

Una de las principales características que se buscan en un sistema dinámico es que sea preciso al momento de hacer predicciones. Para realizar dichas predicciones en el tipo de sistemas dinámicos considerados en este trabajo se hace lo siguiente. Se requiere de una condición inicial x_0, que es un valor conocido que representa el estado del cual parte el sistema. Así, la órbita del punto x_0 representa el recorrido del sistema partiendo de x_0. Por lo tanto, si queremos conocer el estado preciso del sistema al tiempo $n \in \mathbb{N}$, se debe calcular $f^n(x_0)$, lo cual se realiza de manera iterativa calculando ordenadamente:

$$\{f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)\}.$$

De este modo, si es posible calcular dichas iteraciones, entonces siempre que tengamos la condición inicial correcta obtendremos las predicciones correctas según el sistema. El problema comienza cuando hay errores en la condición inicial y es esto precisamente lo que distingue la estabilidad de la inestabilidad de un punto.

La Definición 2.1.1, de manera intuitiva nos dice que si un punto x es estable, el error de aproximación al iterar la función será pequeño, siempre que la condición inicial esté lo suficientemente cerca de x. Es decir, si queremos obtener un error a $f^n(x)$ que en cercanía sea menor a ϵ, debemos partir con una condición inicial más cerca que δ de x (vea la Figura 2.1). Por otra parte, si el punto x es inestable, existe un error $\epsilon > 0$, el cual se supera en alguna iteración, sin importar que tan cerca de x tomemos la condición inicial. Esto significa que no importa que tan pequeño sea el error inicial, al iterar el sistema este error se propagará hasta superar un error ϵ fijo. Aclarada su importancia, pasemos a analizar estos conceptos.

De la Definición 2.1.1, podemos observar que las definiciones de estabilidad e inestabilidad de un punto son nociones contrarias, es decir, para cada $x \in X$, x es o bien estable, o bien inestable y no puede ser ambos. Otra observación importante y que no es difícil de demostrar considerando la continuidad de f, es que ésta preserva la estabilidad o inestabilidad de los puntos de X. Lo cual se enuncia de manera formal a continuación.

Proposición 2.1.2. En un sistema dinámico (X, f), si $x \in X$ es un punto estable (inestable), entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x)$ es un punto estable (inestable).

Es importante mencionar que aunque la Proposición 2.1.2, nos dice que la función f

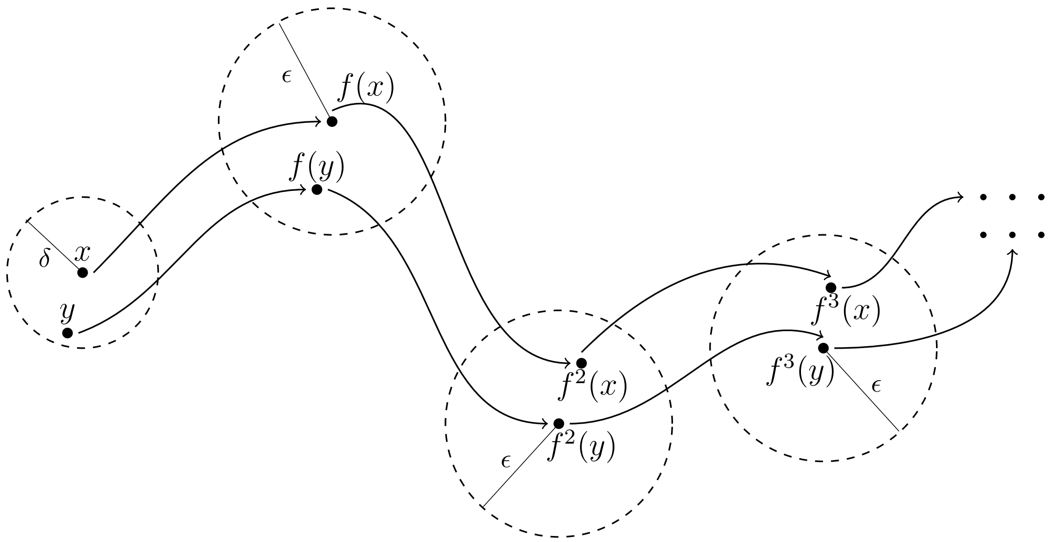

Figura 2.1: Órbita estable

preserva la inestabilidad de los puntos, no necesariamente preserva el ϵ de inestabilidad, el cual puede crecer o decrecer según el comportamiento de la función.

La interpretación intuitiva de la estabilidad puede dar lugar a pensar que los puntos estables generan un comportamiento "sencillo" en los puntos cercanos. Tal comportamiento se empieza a exhibir en el siguiente resultado.

Proposición 2.1.3. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si x es un punto estable, entonces $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$.

Demostración. Supongamos que x es un punto estable. De la Proposición 1.3.12, tenemos que $\omega(x, f) \subseteq \Omega(x, f)$. Ahora tomemos $y \in \Omega(x, f)$, luego existen sucesiones $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X y $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ que cumplen que la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiende a infinito, $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ y $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_k) = y$. Sea $\epsilon > 0$. Como x es un punto estable, existe $\delta > 0$ tal que para cada $z \in X$ que cumpla que $d(x, z) < \delta$, implica que $d(f^n(x), f^n(z)) < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, dado que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x y $\{f^{n_k}(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_k) < \delta$ y $d(f^{n_k}(x_k), y) < \frac{\epsilon}{2}$, así, de lo anterior:

$$d(f^{n_k}(x), y) \leq d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(x_k)) + d(f^{n_k}(x_k), y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por la Proposición 1.3.3, se sigue que $y \in \omega(x, f)$, lo que prueba que $\Omega(x, f) \subseteq \omega(x, f)$ lo cual concluye la prueba. $\square$

Ahora introducimos una familia de conjuntos que ayuda al estudio de los puntos estables y posteriormente analizamos algunas de las propiedades de dicha familia.

Definición 2.1.4. Sea (X, f) un sistema dinámico. Sea $k \in \mathbb{N}$, definimos a G_k como el conjunto de todos los $x \in X$ tales que existe un abierto U con $x \in U$ tal que, para cada $x_1, x_2 \in U$, $d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leq \frac{1}{k}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.1.5. Sean (X, f) un sistema dinámico y $k \in \mathbb{N}$. El conjunto G_k es abierto y $-$invariante.

Demostración. Primero veamos que G_k es abierto. Sea $x \in G_k$, luego existe un abierto U con $x \in U$ tal que, para cada $x_1, x_2 \in U$, $d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leq \frac{1}{k}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De la Definición 2.1.4, se puede notar que $U \subseteq G_k$. Esto prueba que G_k es abierto.

Ahora veamos que G_k es $-$invariante. Sea $x \in f^{-1}(G_K)$, luego $f(x) \in G_k$, por lo cual existe un abierto U con $f(x) \in U$ tal que para cada $x_1, x_2 \in U$, $d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leq \frac{1}{k}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Podemos escoger U de tal forma que su diámetro $d(U) < \frac{1}{k}$. Como f es continua, existe un abierto V en X tal que $x \in V$ y $f(V) \subseteq U$. Sean $x_1, x_2 \in V$, luego $f(x_1), f(x_2) \in U$, por lo cual $d(f^n(f(x_1)), f^n(f(x_2))) \leq \frac{1}{k}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Y ya que $d(U) < \frac{1}{k}$, $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \frac{1}{k}$. Lo que demuestra que $x \in G_k$. Por lo tanto, $f^{-1}(G_K) \subseteq G_k$. $\square$

El siguiente resultado nos brinda una caracterización de los puntos estables de un sistema en términos de la familia de conjuntos G_k, lo cual es de utilidad en demostraciones posteriores.

Proposición 2.1.6. Sea (X, f) un sistema dinámico. El conjunto $\cap_{k \in \mathbb{N}} G_k$ coincide con el conjunto de los puntos estables de X.

Demostración. Supongamos $\cap_{k \in \mathbb{N}} G_k \neq \emptyset$. Sea $x \in \cap_{k \in \mathbb{N}} G_k$. Veamos que x es estable. Sea $\epsilon > 0$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Dado que $x \in G_k$, existe U abierto en X que cumple con la Definición 2.1.4. Así, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq U$ y por las propiedades de U, si $d(x, y) \leq \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{1}{k} < \epsilon$. Lo que prueba que x es estable.

Ahora probemos la otra contención. Sea $x \in X$ un punto estable, veamos que $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Sea $k \in \mathbb{N}$, como x es estable, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica que $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{1}{2k}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $U = B(x,\delta)$, así, dados $x_1, x_2 \in U$ se tiene que $d(x_1,x) < \delta$ y $d(x_2,x) < \delta$, por lo cual

$$d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leq d(f^n(x_1), f^n(x)) + d(f^n(x), f^n(x_2)) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}.$$

Esto prueba que $x \in G_k$ y por lo tanto $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$.

Ahora supongamos que $\cap_{k\in\mathbb{N}} G_k = \emptyset$. Hemos probado que el conjunto de los puntos estables está contenido en $\cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$, por lo cual si existe un punto estable, esto implica que $\cap_{k\in\mathbb{N}} G_k \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto el conjunto de puntos estables es también el conjunto vacío. □

Recordemos que es fundamental verificar si los conceptos que hemos definido son propiedades dinámicas. El resultado siguiente muestra que ser estable es una propiedad que se preserva bajo conjugación topológica.

Proposición 2.1.7. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados bajo el homeomorfismo ϕ. Si $x \in X$ es un punto estable en X, entonces $y = \phi(x)$ es un punto estable en Y.

Demostración. Supongamos que $y = \phi(x)$ es un punto ϵ-inestable en Y, para algún $\epsilon > 0$. Luego, existen $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\lim_{k\to\infty} y_k = y$ y $d_Y(g^{n_k}(y), g^{n_k}(y_k)) \geq \epsilon$. Como ϕ es un homeomorfismo, la sucesión $\{\phi^{-1}(y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, converge a $\phi^{-1}(y) = x$. Por otro lado, el punto x es estable en X, por lo que:

$$\lim_{k\to\infty} d_X(f^{n_k}(x), f^{n_k}(\phi^{-1}(y_k))) = 0.$$

Así, $\lim_{k\to\infty} d_Y(\phi \circ f^{n_k}(x), \phi \circ f^{n_k}(\phi^{-1}(y_k))) = 0$ y por lo tanto:

$$\lim_{k\to\infty} d_Y(g^{n_k}(y), g^{n_k}(y_k)) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, y es estable en Y. □

Puesto que las nociones de estabilidad e inestabilidad son nociones opuestas en un sistema dinámico, de la Proposición 2.1.7, se desprende de manera inmediata el siguiente corolario.

Corolario 2.1.8. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados bajo el homeomorfismo ϕ. Si $x \in X$ es un punto inestable en X, entonces $y = \phi(x)$ es un punto inestable en Y.

Ahora pasemos al resultado fundamental de la inestabilidad en un sistema. Para ello requerimos del siguiente lema sobre puntos inestables. Denotamos por K_ϵ al conjunto de todos los puntos ϵ-inestables.

Lema 2.1.9. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $\epsilon > 0$ se cumple que $\mathrm{cl}(K_\epsilon) \subseteq K_{\frac{\epsilon}{2}}$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Sea $x \in \mathrm{cl}(K_\epsilon)$. Luego, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en K_ϵ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K_\epsilon$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que converge a x_n y existe $\{m_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tal que $d(f^{m_k^n}(x_k^n), f^{m_k^n}(x_n)) \geq \epsilon$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto último, por la desigualdad del triángulo, implica que para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$d(f^{m_k^n}(x_k^n), f^{m_k^n}(x)) \geq \frac{\epsilon}{2} \ \text{ ó } \ d(f^{m_k^n}(x), f^{m_k^n}(x_n)) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{1}{2k}, \text{ para cada } n \geq N_k.$$

Por otro lado, $\lim_{k\to\infty} x_k^{N_k} = x_{N_k}$, por lo que existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_k^{N_k}, x_{N_k}) < \frac{1}{2k}, \text{ para cada } k \geq m_k.$$

Definimos $y_k = x_{m_k}^{N_k}$. Así, se tiene que:

$$d(y_k, x) = d(x_{m_k}^{N_k}, x) \leq d(x_{m_k}^{N_k}, x_{N_k}) + d(x_{N_k}, x) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}.$$

Por lo cual, $d(y_k, x) < \frac{1}{k}$. Si consideramos la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ construida de ese modo, por todo lo anterior, se tiene que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x. Por lo tanto $x \in K_{\frac{\epsilon}{2}}$. $\square$

Teorema 2.1.10. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple lo siguiente:

1. Si $x \in X$ es ϵ-inestable para algún $\epsilon > 0$, entonces cada punto de $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es $\frac{\epsilon}{2}$-inestable, esto es, $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) \subseteq K_{\frac{\epsilon}{2}}$.

2. Si (X, f) es minimal y contiene un punto inestable, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $x \in X$, x es ϵ-inestable, es decir, $X = K_\epsilon$.

Demostración. Supongamos que $x \in X$ es un punto ϵ-inestable para algún $\epsilon > 0$, luego por la Proposición 2.1.2, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq K_\epsilon$. De aquí, $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) \subseteq \mathrm{cl}(K_\epsilon)$. Por lo que del Lema 2.1.9, se infiere que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) \subseteq K_{\frac{\epsilon}{2}}$, lo que prueba (1).

Ahora, supongamos que el sistema es minimal y que existe un punto $x \in X$ que es ϵ-inestable. Como el sistema es minimal, $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Así de (1), para cada $x \in X$, x es $\frac{\epsilon}{2}$-inestable. Lo que prueba (2). □

El Teorema 2.1.10, indica que un punto $x \in X$ que sea inestable permanecerá inestable al pasar el tiempo. Más aún, que en un sistema minimal basta la existencia de un punto inestable para asegurar la inestabilidad de todos los puntos y no sólo eso, además, todos los puntos serán inestables con el mismo ϵ de inestabilidad. Esto último da pie a preguntarnos ¿qué sucede en un sistema donde todos los puntos son inestables? Es aquí donde entra la sensibilidad a las condiciones iniciales.

2.2 Sensibilidad a las condiciones iniciales

La sensibilidad a las condiciones iniciales es una de las características que históricamente fue la primera en ser detectada como característica de un sistema caótico. En el año de 1889, el Rey Óscar II de Suecia y Noruega, en la celebración de su sexagésimo cumpleaños, organizó un concurso que premiaría a aquel, que diera solución matemática al problema de los n-cuerpos planteado por Newton. El matemático francés H. Poincaré ganó dicho concurso. Redujo el problema considerando sólo 3 cuerpos y descubrió que era imposible resolverlo. Así, Poincaré se volvió el primer matemático en considerar la posibilidad de caos en un sistema determinista, en el sentido de que un pequeño cambio o perturbación en la condicion inicial, puede llevar eventualmente al sistema a un estado radicalmente distinto al esperado. Se había encontrando el primer sistema caótico en el cosmos.

Sin embargo, el trabajo de Poincaré generó poco interés en cuanto a esta teoría. Fue hasta 1961 que un meteorólogo estadounidense llamado Edward Lorenz mientras realizaba simulaciones por computadora con un modelo para la predicción del tiempo, hizo un sorprendente descubrimiento. Al repetir una de las simulaciones para comprobar la veracidad de la misma, cambió de manera mínima los valores de entrada para hacer el cómputo más rápido, utilizando sólo 3 decimales en lugar de 6 como en la primera simulación. El resultado de este cambio fue un escenario de predicción del tiempo totalmente diferente. En 1963 Lorenz publicó el artículo *Deterministic Nonperiodic Flow* [37], donde describía el resultado del estudio de este fenómeno que descubrió por casualidad y que se convertiría en el renacimiento de la teoría del caos. En su artículo define el ya conocido efecto mariposa, el cual articula de una forma un tanto poética que "el aleteo de una mariposa en Brasil puede provocar un huracán en Texas" lo cual hace referencia a lo ya antes descrito por Poincaré, la sensibilidad a las condiciones iniciales de un sistema.

Definición 2.2.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es *sensible a las condiciones iniciales* si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existen $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(x, y) < \epsilon$ y $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Al número δ se llama *constante de sensibilidad del sistema.*

Como se puede observar en la Definición 2.2.1, la sensibilidad a las condiciones iniciales es inestabilidad puntual en todos los puntos del espacio. Más aún, es inestabilidad uniforme, es decir, todos los puntos $x \in X$ son δ-inestables, donde δ es la constante de sensibilidad del sistema. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.2. La familia de funciones $\{f_{m,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_{m,b}(x) = mx + b \text{ con } m, b \in \mathbb{R} \text{ y } |m| > 1\}$ es una familia de funciones sensibles a las condiciones iniciales en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $m, b \in \mathbb{R}$, tales que $|m| > 1$. Veamos que la función $f_{m,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es sensible a las condiciones iniciales, con constante de sensibilidad $\delta = |m|$. Sea $x \in \mathbb{R}$

y $\epsilon > 0$. Es sencillo mostrar por inducción que para cada $w \in \mathbb{R}$:

$$f^n(w) = m^n w + b\sum_{k=0}^{n-1} m^k, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Pongamos $y = x - \frac{\epsilon}{2}$. Así $y \in B(x, \epsilon)$ y además:

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^n(y)) = & \ |m^n x + b\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} m^k - m^n y - b\sum_{k=0}^{n-1} m^k| \\ = & \ |m^n x - m^n y| = |m^n||x - y| \\ = & \ |m|^n |x - x + \tfrac{\epsilon}{2}| = |m|^n \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Como $|m| > 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|m|^{n_0}\frac{\epsilon}{2} > |m|$. Por lo tanto, tenemos que $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) > |m|$, lo que prueba que la función es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = |m|$. □

El siguiente ejemplo se encuentra desarrollado en la Proposición 9.6 de [31].

Ejemplo 2.2.3. La función Tienda $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{1}{2}$.

Ya que la sensibilidad a las condiciones iniciales es una característica de sistemas con un comportamiento que podríamos llamar errático o complejo, es natural pensar que tienen que ser sistemas muy complejos de definir. Sin embargo, como se puede observar en los Ejemplos 2.2.2 y 2.2.3, existen sistemas que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales cuya definición algebraica es bastante sencilla.

A modo de conclusión, los sistemas que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales son sistemas que tiene memoria sólo a corto plazo, es decir, que al principio las órbitas cercanas permanecen cerca, pero pasando el tiempo los errores iniciales se propagan llevando al sistema a configuraciones muy distintas.

Para demostrar que un sistema es sensible a las condiciones iniciales es fundamental encontrar la constante de sensibilidad δ, que cumpla con las condiciones dadas en la Definición 2.2.1, lo cual no siempre es una tarea sencilla. Es por ello que se recurre a otras herramientas que nos ayuden en esta tarea. Una de ellas es la equicontinuidad.

2.3 Equicontinuidad

El estudio de la equicontinuidad de una función cobra sentido para nuestros propósitos al utilizarla como una noción opuesta a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, no siempre estas dos nociones son contrarias. Más adelante se exhiben las condiciones del espacio bajo las cuales efectivamente lo son. Comencemos con su definición formal.

Definición 2.3.1. Un sistema dinámico (X, f) es llamado *equicontinuo* si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, se cumple que:

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Observando la Definición 2.3.1, es sencillo convencerse que un sistema equicontinuo es aquel que es globalmente estable, es decir, un sistema en el cual todos los puntos son estables.

Proposición 2.3.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que (X, f) es equicontinuo si y sólo si para cada $x \in X$, x es un punto estable de f.

Recordemos que la sensibilidad a las condiciones iniciales es una de las primeras nociones que históricamente fueron tratadas como caóticas. Por lo cual, un sistema equicontinuo, al describir una comportamiento "opuesto" a la sensibilidad a las condiciones iniciales, se espera que tenga un comportamiento dinámico sencillo. Como se muestra en el siguiente resultado, efectivamente existen funciones equicontinuas cuya dinámica es sencilla.

Teorema 2.3.3. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es una isometría, entonces f es equicontinua.

Demostración. Supongamos que f es una isometría. Sea $\epsilon > 0$. Si hacemos $\delta = \epsilon$ el resultado queda demostrado. $\square$

El Teorema 2.3.3, nos brinda muchos ejemplos de funciones que son equicontinuas. En particular, la función rotación irracional en S^1, que es una función muy estudiada en el campo de los sistemas dinámicos discretos, es una isometría, por lo que resulta también una función equicontinua. El análisis detallado de esta función se muestra en la primera sección del Capítulo 5.

Ejemplo 2.3.4. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número irracional. La función *rotación irracional* $R_\theta : S^1 \to S^1$ se define como:

$$R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}z, \text{ para cada } z \in S^1.$$

Esta función es equicontinua en S^1.

Más aún, existe un resultado que caracteriza a todas las funciones equicontinuas de S^1. La prueba de dicho resultado se puede encontrar en [51] y está enunciado a continuación.

Teorema 2.3.5. Sea (S^1, f) un sistema dinámico. Se tiene que f es equicontinua si y sólo si se cumple sólo una de las siguientes proposiciones:

(1) f es topológicamente conjugada a la rotación irracional.

(2) $F(f)$ contiene exactamente dos puntos y $F(f^2) = S^1$.

(3) $F(f)$ contiene exactamente un punto y $F(f^2) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(S^1)$.

(4) $F(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(S^1)$.

El Teorema 2.3.5, es claramente una clasificación de las funciones equicontinuas de S^1, pues las proposiciones enunciadas son mutuamente excluyentes ya que exigen una forma precisa para el conjunto $F(f)$ ($F(f) = \emptyset$ en el punto 1).

El Teorema 2.3.3, nos dice que todas las isometrías son funciones equicontinuas, sin embargo no todas las funciones equicontinuas son isometrías. Esto es, el recíproco del Teorema 2.3.3, no es cierto en general. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.6. La familia de funciones $\{f_{m,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_{m,b}(x) = mx + b \text{ con } m, b \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < |m| < 1\}$ es una familia de funciones equicontinuas.

Demostración. Sean $m, b \in \mathbb{R}$, tales que $|m| < 1$. Sea $\epsilon > 0$. Pongamos $\delta = \frac{\epsilon}{|m|}$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| < \delta$. Se tiene que para cada $w \in \mathbb{R}$:

$$f^n(w) = m^n w + b \sum_{k=0}^{n-1} m^k, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f^n(x) - f^n(y)| = & \ |m^n x + b \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} m^k - m^n y - b \sum_{k=0}^{n-1} m^k| \\ = & \ |m^n x - m^n y| = |m^n||x - y|. \end{aligned}$$

Como $0 < |m| < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|m|^n \leq |m|$, luego $|f^n(x) - f^n(y)| = |m^n||x - y| \leq |m||x - y| < |m|\delta = \epsilon$. $\square$

Un par de tipos de puntos a través de los cuales se puede comprender la estructura de los sistemas equicontinuos son los puntos no errantes y los puntos recurrentes. Los puntos no errantes son aquellos que siempre vuelven a lugares muy cercanos de donde partieron y los puntos recurrentes son aquellos que pertenecen a su conjunto omega límite, ambos definidos en el Capítulo 1. Resulta que en sistemas equicontinuos, hablar de puntos no errantes y puntos recurrentes es equivalente. Esto se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.7. Sea (X, f) un sistema dinámico equicontinuo. Se cumple que $R(f) = \Omega(f)$ y $R(f)$ es un conjunto cerrado en X.

Demostración. Supongamos que $R(f) \neq \Omega(f)$. De la Proposición 1.3.13, tenemos que $R(f) \subseteq \Omega(f)$. Luego, existe $x \in \Omega(f) \setminus R(f)$. Dado que $x \notin R(f)$, en particular $x \notin \omega(x, f)$. Como $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que $d(x, \omega(x, f)) > 2\epsilon$. Por otro lado, como f es equicontinua, existe $\delta > 0$ con $\delta < \epsilon$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, ya que $x \in \Omega(f)$, existe $m \in \mathbb{N}$ que cumple que $f^m(B(x, \delta)) \cap B(x, \delta) \neq \emptyset$. Tomemos $y \in B(x, \delta)$, tal que $f^m(y) \in B(x, \delta)$. Así, $d(f^m(y), x) < \delta$ y con ello, por la desigualdad triangular:

$$\epsilon < 2\epsilon - \delta < d(f^m(x), x) - d(f^m(y), x) \leq d(f^m(x), f^m(y)).$$

Pero $d(x, y) \leq \delta$, por lo que gracias a la equicontinuidad de la función se sigue que $d(f^m(x), f^m(y)) < \epsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $R(f) = \Omega(f)$. Por último, de la Proposición 1.3.11, $\Omega(f)$ es cerrado, con lo que $R(f)$ también lo es. $\square$

Otra característica interesante de los sistemas equicontinuos es que en ellos los conjuntos omega límite son conjuntos minimales.

Proposición 2.3.8. Sean (X, f) un sistema dinámico equicontinuo y $x \in X$. Si $\omega(x, f) \neq \emptyset$, entonces $\omega(x, f)$ es un subconjunto minimal de X.

Demostración. Supongamos que $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Recordemos que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado, pues es una intersección arbitraria de conjuntos cerrados. Además, de la Proposición 1.3.21, $\omega(x, f)$ es un conjunto +invariante. Supongamos que $\omega(x, f)$ no es minimal. Luego, existen $v, w \in \omega(x, f)$ tales que $w \notin \mathrm{cl}(\mathcal{O}(v, f))$. Sea $\epsilon = \frac{d(w, \mathcal{O}(v,f))}{2} > 0$. Como f es equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $v \in \omega(x, f)$, en particular, $v \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$, con lo que $B(v, \delta) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathcal{O}(x, f)$ tal que $d(y, v) < \delta$. Luego $d(f^n(y), f^n(v)) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y así $d(f^n(y), \mathcal{O}(v, f))) \leq \epsilon$. Esto último implica que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$d(f^n(y), w) \geq d(\mathcal{O}(v, f), w) - d(\mathcal{O}(v, f), f^n(y)) = 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

De aquí $w \notin \omega(y, f)$. Pero $\omega(y, f) = \omega(x, f)$. Así $w \notin \omega(x, f)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\omega(x, f)$ es minimal. $\square$

De la Proposición 2.3.8, se desprende el corolario siguiente.

Corolario 2.3.9. Sean (X, f) un sistema dinámico equicontinuo y $x \in X$. Se cumple que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es un conjunto minimal si y sólo si $x \in R(f)$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es un conjunto minimal. Por definición de conjunto omega límite se cumple que $\omega(x, f) \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$. Dado que el sistema es equicontinuo, de la Proposición 2.3.8, $\omega(x, f)$ es minimal, por lo cual debe ocurrir que $\omega(x, f) = \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$, y ya que $x \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ se tiene $x \in \omega(x, f)$, lo que a su vez implica que $x \in R(f)$.

Ahora supongamos que $x \in R(f)$. Luego $x \in \omega(x, f)$, lo cual, por la Proposición 1.3.6, implica que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq \omega(x, f)$. Así, ya que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado,

$\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x,f)) \subseteq \omega(x,f)$. Nuevamente de la Proposición 2.3.8, se tiene que $\omega(x,f)$ es minimal, luego $\omega(x,f) = \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x,f))$. Por lo tanto $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x,f))$ es un conjunto minimal. $\square$

Proposición 2.3.10. Sean (X,f) un sistema dinámico. Si f es equicontinua, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, f^k es equicontinua.

Demostración. Supongamos que f es equicontinua. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$, luego existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular si $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f^{nk}(x), f^{nk}(y)) < \epsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Lo que implica que f^k es equicontinua. $\square$

El recíproco de la Proposición 2.3.10, se cumple si X es un espacio métrico compacto.

Sea (X,f) un sistema dinámico. Definimos $d_f : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in X$:

$$d_f(x,y) = \sup\{d(f^n(x), f^n(y)) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se tiene que d_f es una métrica para X.

Esta métrica se define para caracterizar los sistemas equicontinuos, lo cual se presenta en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.11. Sea (X,f) un sistema dinámico. El sistema es equicontinuo si y sólo si la métrica d en X es uniformemente equivalente a d_f.

Demostración. Supongamos que el sistema es equicontinuo. Veamos que $id_X : (X,d) \to (X,d_f)$ es uniformemente continua. Sea $\epsilon > 0$. Como f es equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De esto último se tiene que $d_f(x,y) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Esto prueba que id_X es uniformemente continua.

Ahora supongamos que d y d_f son uniformemente equivalentes. Sea $\epsilon > 0$. Como $id_X : (X,d) \to (X,d_f)$ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $d_f(x,y) < \epsilon$. Esto implica que $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, f es equicontinua. $\square$

Teorema 2.3.12. Sea (X,f) un sistema dinámico. Si f es una función equicontinua, entonces la función $f^{\times 2}$ es equicontinua.

Demostración. Supongamos que f es una función equicontinua. Sea $\epsilon > 0$. Como f es equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ con $d_X(x, y) < \delta$, se cumple que:

$$d_X(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Sean $(x, y), (x', y') \in X \times X$, tales que $d_{X\times X}((x, y), (x', y')) < \delta$. Esto implica que $d_X(x, y) < \delta$ y $d_X(x', y') < \delta$. Así de (2.1), se tiene que $d_X(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ y $d_X(f^n(x'), f^n(y')) < \epsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto último implica que:

$$d_{X\times X}(((f^n(x), f^n(y)), (f^n(x'), f^n(y'))) < \epsilon \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto la función $f^{\times 2}$ es equicontinua. □

Corolario 2.3.13. Sean (X, f) un sistema dinámico equicontinuo y $x \in X$. Se cumple que $R(f) = X$.

Demostración. Sea $x \in X$. Del Ejemplo 1.4.24, se tiene que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es un conjunto minimal. Por definición de conjunto omega límite se cumple que $\omega(x, f) \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$. Dado que el sistema es equicontinuo, de la Proposición 2.3.8, $\omega(x, f)$ es minimal, por lo cual debe ocurrir que $\omega(x, f) = \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$, y ya que $x \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ se tiene $x \in \omega(x, f)$, lo que a su vez implica que $x \in R(f)$. □

Proposición 2.3.14. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si el sistema es equicontinuo, entonces considerando al espacio X con la métrica d_f, f es una isometría.

Demostración. Supongamos que el sistema es equicontinuo. Sean $x, y \in X$. Luego:

$$d_f(x, y) = \sup\{d(f^n(x), f^n(y)) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} d_f(f(x), f(y)) &= \sup\{d(f^n(f(x)), f^n(f(y))) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(y)) : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \sup\{d(f^n(x), f^n(y)) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= d_f(x, y). \end{aligned}$$

Lo que prueba que $d_f(f(x), f(y)) \leq d_f(x, y)$. Por otra parte, ya que f es una función equicontinua, del Teorema 2.3.12, la función $f^{\times 2}$ es equicontinua. Del Corolario 2.3.13, se tiene que $(x, y) \in R(f^{\times 2})$, es decir $(x, y) \in \omega((x, y), f^{\times 2})$. Así, de la Proposición 1.3.4, existe una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales, tales que $\lim_{k\to\infty}(f^{\times 2})^{n_k}(x, y) = (x, y)$. Por lo cual se sigue que $\lim_{k\to\infty} d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) = d(x, y)$. Esto último implica que $d_f(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Lo que a su vez implica que $d_f(f(x), f(y)) \geq d_f(x, y)$.

Así $d_f(f(x), f(y)) = d_f(x, y)$, es decir, f es una isometría. □

Para mostrar la caracterización de funciones equicontinuas, requerimos un par de definiciones más.

Definición 2.3.15. Sean X y Y espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es *no expansiva* si para cada $x, y \in X$:

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y).$$

Definición 2.3.16. Sea X un espacio métrico. Dado $W \subseteq X$, una función $g : X \to W$ es una *retracción sobre* W, si $g(x) = x$, para todo $x \in W$.

En la Proposición 1.3.22 se prueba que en el sistema dinámico (X, f), $R(f)$ es un conjunto +invariante bajo f, lo cual indica que la función $f|_{R(f)} : R(f) \to R(f)$ está bien definida. Así, $(R(f), f|_{R(f)})$ es un subsistema de (X, f). Más aún, si el sistema (X, f) es equicontinuo, entonces la función restringida a $R(f)$ cumple algunas propiedades importantes que se muestran en el resultado siguiente. Finalmente, presentamos la caracterización de funciones equicontinuas, cuya demostración se puede encontrar en [39].

Teorema 2.3.17. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se tiene que f es equicontinua si y sólo si existe una única retracción $\gamma : X \to R(f)$ tal que $\gamma \circ f = f \circ \gamma$ y $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n \circ \gamma(x)) = 0$, para toda $x \in X$ y además existe una métrica d' que es uniformemente equivalente a d tal que bajo d', f y γ son no expansivas y $f|_{R(f)}$ es una isometría.

2.4 Sensibilidad a las condiciones iniciales contra equicontinuidad

Como ya vimos la sensibilidad a las condiciones iniciales se puede interpretar como estabilidad uniforme en todos los puntos del espacio, mientras que la equicontinuidad se puede interpretar como estabilidad en todos los puntos del espacio. Esto nos puede dar la idea de que son nociones contrarias, sin embargo, esto no es cierto en general, se requieren ciertas condiciones para el espacio para que así lo sean. Veamos los resultados que se tienen al respecto, los cuales se pueden consultar a detalle en [2].

Proposición 2.4.1. Sea (X, f) un sistema dinámico transitivo. Si existe al menos un punto estable en X, entonces el conjunto de puntos estables coincide con el conjunto de puntos transitivos.

Demostración. Supongamos que existe al menos un punto estable en X. Así, por la Proposición 2.1.6, para completar la demostración, basta verificar que $\cap_{k\in\mathbb{N}} G_k = Trans_f(X)$. Como f es transitiva, el Teorema 1.4.22, implica que $Trans_f(X) \neq \emptyset$. Sea $x \in Trans_f(X)$. Como existe al menos un punto estable en X, de la Proposición 2.1.6, se tiene que $\cap_{k\in\mathbb{N}} G_k \neq \emptyset$. Luego para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k \neq \emptyset$. Sea $k \in \mathbb{N}$. De la Proposición 2.1.5, se tiene que G_k es un conjunto abierto en X, por lo que existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \in G_k$. Nuevamente de la Proposición 2.1.5, G_k es $-$invariante, por lo que $x \in G_k$ y con ello $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Esto prueba que $Trans_f(X) \subseteq \cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Ahora tomemos $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Dado que f es transitiva, de la Proposición 1.4.12, se tiene que $\Omega(x, f) = X$. Por otra parte, ya que x es un punto estable, de la Proposición 2.1.3, $\omega(x, f) = \Omega(x, f)$, por lo tanto $\omega(x, f) = X$. Esto último, por la Proposición 1.4.18, implica que $x \in Trans_f(X)$, lo que prueba que $\cap_{k\in\mathbb{N}} G_k \subseteq Trans_f(X)$. □

Teorema 2.4.2. Sea (X, f) un sistema dinámico transitivo. Se tiene la siguiente dicotomía:

(1) Existe al menos un punto estable en X.

(2) El sistema es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Supongamos que no existe ningún punto estable. De la Proposición 2.1.6, tenemos que $\cap_{k\in\mathbb{N}} G_k = \emptyset$. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k \neq \emptyset$.

Como f es transitiva, el Teorema 1.4.22, implica que $Trans_f(X) \neq \emptyset$. Sea $x \in Trans_f(X)$. De la Proposición 2.1.5, se tiene que G_k es un conjunto abierto en X, por lo que existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \in G_k$. Nuevamente de la Proposición 2.1.5, G_k es $-$invariante, por lo que $x \in G_k$ y con ello $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G_k = \emptyset$. Veamos que f es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{1}{k}$. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Como $G_k = \emptyset$, $x \notin G_k$, luego existen $y \in B(x, \epsilon)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \frac{1}{k}$. Esto prueba que f es sensible a las condiciones iniciales, con constante de sensibilidad $\delta = \frac{1}{k}$. □

Como consecuencia del Teorema 2.4.2, se tiene el siguiente resultado que muestra que para sistemas minimales, efectivamente la equicontinuidad y la sensibilidad a las condiciones iniciales resultan ser nociones opuestas.

Teorema 2.4.3. Sea (X, f) un sistema dinámico minimal. El sistema o bien es equicontinuo, o bien es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Supongamos que el sistema no es equicontinuo. Así, debe existir al menos un punto $x \in X$ que sea inestable. Sea $\epsilon > 0$ tal que x es ϵ-inestable. Del Teorema 2.1.10, se tiene que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) \subseteq K_{\frac{\epsilon}{2}}$. Como (X, f) es un sistema minimal, de la Proposición 1.4.26, ocurre que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Luego $X \subseteq K_{\frac{\epsilon}{2}}$, es decir, todos los puntos del espacio X son $\frac{\epsilon}{2}$-inestables. Como el sistema es minimal, del Teorema 1.4.27, tenemos que el sistema es transitivo. Así, podemos aplicar el Teorema 2.4.2, el cual nos dice que el sistema es sensible a las condiciones iniciales puesto que todos los puntos del espacio X son inestables. □

Capítulo 3

Entropía topológica y Caos Li-Yorke

Más medida está la duda
que llega como cualquiera
dando luz a la quimera
dejando la ilusión muda.

En este capítulo se presenta la entropía topológica de un sistema dinámico, que es una cantidad numérica que se le asigna, de cierta forma, a la "complejidad" de dicho sistema. También presentamos, aunque estudiada con menos detalle que la entropía topológica, su contraparte en teoría ergódica, la entropía métrica. En este capítulo también se muestra la forma de calcular la entropía topológica y se calcula de manera explícita para algunos sistemas. Posteriormente, damos paso al primer tipo de caos estudiado en este trabajo, el caos tipo Li-Yorke. Para finalizar el capítulo, se muestra la relación que existe entre este tipo de caos y la entropía topológica.

Andrei Kolmogorov fue un matemático ruso, quien en 1958 fue el primero en definir a la entropía para sistemas dinámicos [30]. Introdujo el concepto de entropía métrica de una función $f : X \to X$ medible, respecto a una medida μ, f-invariante. Por su parte, la entropía topológica fue introducida en 1963[1], por R. Adler, et. al. [1]. La entropía topológica se define sobre espacios métricos compactos de manera muy similar

[1] El artículo fue publicado en 1965 pero sometido a revisión desde 1963.

a la entropía métrica. Aunque históricamente, apareció primero la entropía métrica, en este capítulo comenzamos desarrollando la entropía topológica. La razón de ello es que para los propósitos del presente trabajo es más relevante la parte topológica. Los artículos consultados para este capítulo son principalmente [1, 10, 33].

3.1 Entropía topológica

La entropía topológica, de manera intuitiva, es una cantidad numérica que mide en cierta forma la complejidad del sistema. En términos generales, mide la tasa de crecimiento exponencial del número de órbitas "distinguibles" de un sistema a través del tiempo, mostrando de este modo, qué tan compleja es la estructura de las órbitas del sistema.

3.1.1 Cubiertas abiertas

La entropía topológica de un sistema dinámico se define a través de las cubiertas abiertas del espacio X, así que empecemos por la definición de cubierta abierta.

Definición 3.1.1. Sea X un espacio métrico. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es una *cubierta* para X si $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Una *subcubierta* de $\mathcal{U}$ es una subfamilia $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta para X y además para cada $U \in \mathcal{U}$, U es abierto en X se dice que $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta* para X.

La entropía topológica está definida únicamente para espacios compactos, por lo cual para este capítulo y capítulos posteriores, consideramos un sistema dinámico (X, f), con X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Presentamos a continuación la definición de espacio compacto. Para más detalles sobre las propiedades de los espacios compactos consulte el Capítulo IV de [29].

Definición 3.1.2. El espacio métrico X es un *espacio compacto* si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X, existe una subcubierta finita de $\mathcal{U}$.

A continuación enunciamos algunas de las propiedades de los espacios compactos, que son más utilizadas a lo largo de la tesis. Las demostraciones de dichas propiedades se pueden hallar en el Capítulo IV de [29].

Proposición 3.1.3. Sea X un espacio métrico compacto. Se cumple lo siguiente:

(1) El espacio X es completo y separable.

(2) Toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X contiene una subsucesión convergente.

(3) Si $A \subseteq X$ es un conjunto cerrado en X, entonces A es un conjunto compacto.

(4) Para cada espacio métrico Y, toda función $f : X \to Y$ continua, es uniformemente continua.

(5) Para cada espacio métrico Y, si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es un conjunto acotado.

Presentamos ahora una forma de hacer operaciones con cubiertas de un espacio X. Cabe aclarar que las definiciones siguientes se presentan en general para familias de conjuntos, pues más adelante se utilizan para otro tipo de familias distintas a las cubiertas abiertas.

Definición 3.1.4. Para cada par de familias de conjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de algún espacio X, se define la siguiente operación:

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap B : \ U \in \mathcal{U} \text{ y } B \in \mathcal{V}.\}$$

Considerando que la intersección de conjuntos es asociativa y conmutativa, es sencillo verificar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.5. Sea (X, d) un espacio métrico. La operación $\vee$ es asociativa y conmutativa sobre las familias de subconjuntos de X.

De la Definición 3.1.4, si en particular $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubiertas abiertas de X, el resultado de dicha operación, es decir $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$, es de nuevo una cubierta abierta para X, a la que llamamos *cubierta unión.*

Regularmente, para un espacio métrico existen varias cubiertas abiertas. Es por ello que es necesario definir una forma de comparar las cubiertas y decidir, en algún sentido, cuándo una cubierta es mejor que otra. Para ello presentamos el siguiente concepto.

Definición 3.1.6. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X. La cubierta $\mathcal{V}$ es un *refinamiento de* $\mathcal{U}$ y se denota por $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, si para cada $B \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $B \subseteq U$.

Se cumple que $\prec$ es un orden parcial[2] sobre la familia de cubiertas abiertas de un espacio métrico. Además, cumple con las siguientes propiedades.

Proposición 3.1.7. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada par de cubiertas abiertas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ para X, se cumple lo siguiente:

(1) $\mathcal{U} \prec (\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$ y $\mathcal{V} \prec (\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$.

(2) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ y $\mathcal{U}' \prec \mathcal{V}'$, entonces $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}' \prec \mathcal{V} \vee \mathcal{V}'$.

(3) Si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$.

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X.

(1) Sea $U \cap V \in \mathcal{U} \vee \mathcal{V}$. Luego $U \cap V \subseteq U$ y $U \in \mathcal{U}$, lo que prueba que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U} \vee \mathcal{V}$. Análogamente $\mathcal{V} \prec (\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$.

(2) Sean $\mathcal{U}'$ y $\mathcal{V}'$ cubiertas abiertas para X. Supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}'$ y $\mathcal{V} \prec \mathcal{V}'$. Sea $W \in \mathcal{V} \vee \mathcal{V}'$, luego $W = V \cap V'$ con $V \in \mathcal{V}$ y $V' \in \mathcal{V}'$. Por lo supuesto, existen $U \in \mathcal{U}$ y $U' \in \mathcal{U}'$ tales que $V \subseteq U$ y $V' \subseteq U'$, así, $V \cap V' \subseteq U \cap U'$. Lo que implica que $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}' \prec \mathcal{V} \vee \mathcal{V}'$.

(3) Supongamos que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Sea $V \in \mathcal{V}$, luego $V \in \mathcal{U}$ y $V \subseteq V$. Lo que prueba que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$.

De (1), (2) y (3) queda demostrada la proposición. $\square$

El tipo de sistemas dinámicos que estamos tratando están regidos por funciones continuas. Por lo cual, podemos generar cubiertas abiertas para el espacio, mediante la función, a partir de una cubierta abierta dada. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Se define

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) : \ U \in \mathcal{U}\}.$$

[2]La definición de orden parcial se puede encontrar en el Capítulo 1 de [40].

Como f es una función continua, la preimagen de cualquier abierto en X es de nuevo un abierto en X, por lo cual $f^{-1}(\mathcal{U})$ es una cubierta abierta para X. Además, cumple con las propiedades mostradas a continuación:

Proposición 3.1.8. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada par $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de cubiertas abiertas para X, se cumple lo siguiente:

(1) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, entonces $f^{-1}(\mathcal{U}) \prec f^{-1}(\mathcal{V})$.

(2) $f^{-1}(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) = f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-1}(\mathcal{V})$.

Demostración. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X.

(1) Supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Sea $W \in f^{-1}(\mathcal{V})$, luego $W = f^{-1}(V)$ con $V \in \mathcal{V}$. Por lo supuesto, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$, así $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$. Así, de la Proposición 3.1.7, parte (3), tenemos que $f^{-1}(\mathcal{U}) \prec f^{-1}(\mathcal{V})$.

(2) Se tiene que:
$f^{-1}(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) = \{f^{-1}(W) \mid W \in \mathcal{U} \vee \mathcal{V}\} = \{f^{-1}(U \cap V) \mid U \in \mathcal{U} \text{ y } V \in \mathcal{V}\} = \{f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \mid U \in \mathcal{U} \text{ y } V \in \mathcal{V}\} = f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-1}(\mathcal{V})$.

De (1) y (2) completamos la prueba. □

Del mismo modo podemos ver que para cada $k \in \mathbb{N}$, la familia:

$$f^{-k}(\mathcal{U}) = \{f^{-k}(U) : \ U \in \mathcal{U}\},$$

es una cubierta abierta para X que cumple propiedades similares a las mostradas en la Proposición 3.1.8.

3.1.2 Definición de entropía topológica

Definición 3.1.9. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Una subcubierta $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ es una *subcubierta minimal* si no existe otra subcubierta de $\mathcal{U}$ con cardinalidad menor a la cardinalidad de $\mathcal{V}$.

La Definición 3.1.9, nos dice que $\mathcal{V}$ es una subcubierta minimal, si no existe otra subcubierta de $\mathcal{U}$ que tenga menos elementos que $\mathcal{V}$. Puesto que estamos considerando espacios métricos compactos, para cualquier cubierta abierta existe una subcubierta finita y por tanto una subcubierta minimal. Así, tiene sentido introducir la siguiente definición:

Definición 3.1.10. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Definimos:

$$N(\mathcal{U}) = \text{mín}\{|\mathcal{W}| : \mathcal{W} \text{ es subcubierta de } \mathcal{U}\},$$

es decir, la mínima cardinalidad de las subcubiertas de $\mathcal{U}$, o bien, la cardinalidad de una subcubierta minimal.

También es importante notar que $N(\mathcal{U})$ es un número positivo, para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$, pues al considerar espacios no vacíos, cualquier cubierta abierta debe tener al menos un elemento. Así, podemos hablar del logaritmo del número $N(\mathcal{U})$. Dicho esto, definimos la entropía de una cubierta abierta en un sistema dinámico.

Definición 3.1.11. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Se define la *entropía de* $\mathcal{U}$ como:

$$H(\mathcal{U}) = \log(N(\mathcal{U})),$$

donde el logaritmo considerado es con base e.

En la Definición 3.1.11, el logaritmo es considerado con base e, únicamente por uniformizar los cálculos, pues lo que realmente es relevante es si la entropía es o no positiva y el cambio de base sólo la hace variar por un factor constante. En efecto, para cualquier otra base $a > 1$:

$$\log_e(a) \log_a(x) = \log_e(x).$$

Por otro lado, ya que $N(\mathcal{U}) \geq 1$, por propiedades del logaritmo, la entropía de una cubierta resulta ser un número no negativo, es decir, ya que $N(\mathcal{U}) \geq 1$, se tiene que $\log(N(\mathcal{U})) \geq 0$. La entropía de una cubierta cumple principalmente las propiedades mostradas en el resultado siguiente.

Teorema 3.1.12. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada par de cubiertas abiertas $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ para X, se cumple lo siguiente:

(1) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, entonces $H(\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{V})$.

(2) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, entonces $H(\mathcal{V}) = H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$.

(3) $H(f^{-1}(\mathcal{U})) \leq H(\mathcal{U})$. Si f es sobreyectiva, entonces $H(f^{-1}(\mathcal{U})) = H(\mathcal{U})$.

(4) $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{V})$.

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X.

(1) Supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Sea $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ una subcubierta minimal de $\mathcal{V}$, con lo que $N(\mathcal{V}) = m$. Así, existe $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ subcubierta de $\mathcal{U}$ tal que $V_i \subseteq U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo que $N(\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{V})$. Dado que la función log, es una función creciente, $H(\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{V})$.

(2) De nuevo supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Por la Proposición 3.1.7, parte (1), se tiene que $\mathcal{V} \prec (\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$. Así, del punto (1) previo, $H(\mathcal{V}) \leq H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$. Sea $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ una subcubierta minimal de $\mathcal{V}$, luego $N(\mathcal{V}) = m$. Por lo supuesto, existe una subcubierta $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ de $\mathcal{U}$ tal que $V_i \subseteq U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. De aquí que el conjunto $\{U_1 \cap V_1, U_2 \cap V_2, \ldots, U_m \cap V_m\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ con exactamente m elementos. Con lo que $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq m$. Por lo tanto, $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{V})$ y así $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{V})$. Por lo tanto $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) = H(\mathcal{V})$.

(3) Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ una subcubierta minimal de $\mathcal{U}$, por lo cual $N(\mathcal{U}) = m$ y la familia $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_m)\}$ es una subcubierta de $f^{-1}(\mathcal{U})$ con a lo más m elementos, por lo que $N(f^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U})$. Así, $H(f^{-1}(\mathcal{U})) \leq H(\mathcal{U})$.

Para completar la prueba de la parte (3), supongamos además, que f es una función sobreyectiva. Sea $\{f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2), \ldots, f^{-1}(V_{N(f^{-1}(\mathcal{U}))})\}$ una subcubierta minimal de $f^{-1}(\mathcal{U})$. Pongamos $p = N(f^{-1}(\mathcal{U}))$. Luego $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} f^{-1}(V_k)$. Como f es sobreyectiva $X = f(X)$. Así:

$$X = f(X) \subseteq f\left(\bigcup_{k=1}^{p} f^{-1}(V_k)\right) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{p} V_k\right)\right).$$

Además, también de la sobreyectividad se tiene que:

$$f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{p} V_k\right)\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} V_k.$$

De aquí $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$ y con esto $m \leq p$. Por lo que $N(\mathcal{U}) \leq N(f^{-1}(\mathcal{U}))$ y por lo tanto $H(\mathcal{U}) \leq H(f^{-1}(\mathcal{U}))$. En consecuencia $H(\mathcal{U}) = H(f^{-1}(\mathcal{U}))$.

(4) Sean $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ y $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ subcubiertas minimales de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, con lo que $N(\mathcal{U}) = n$ y $N(\mathcal{V}) = m$. Así:

$$\{U_i \cap V_j |\ i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\},$$

es una subcubierta de $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$, y ya que:

$$|\{U_i \cap B_j |\ i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}| = N(\mathcal{U})N(\mathcal{V}),$$

se tiene que $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{U})N(\mathcal{V})$, lo que a su vez, por propiedades del logaritmo, implica que $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{V})$.

Así, de (1), (2), (3) y (4) se concluye la prueba. $\square$

Recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k}(\mathcal{U})$ también es una cubierta abierta para X. Esto indica que podemos construir cubiertas distintas para el espacio X, con una sola cubierta abierta $\mathcal{U}$, utilizando la función f y la operación $\vee$. A continuación definimos una cubierta especial que nos sirve para definir la entropía topológica de un sistema.

Definición 3.1.13. Dados (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\mathcal{U}_f^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U}) = f^0(\mathcal{U}) \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-2}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{U}),$$

donde $f^0(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Cuando no haya confusión con la función, escribimos únicamente $\mathcal{U}^n$ para referirnos a $\mathcal{U}_f^n$.

Antes de definir la entropía del sistema con respecto a una cubierta, la cual se define mediante un límite, necesitamos asegurarnos que tal límite existe. Para ello, requerimos verificar el siguiente resultado, que es crucial para probar la existencia del límite.

Lema 3.1.14. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos. Si para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se cumple que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, entonces $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ existe y además:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \text{ínf}\left\{\frac{a_n}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Demostración. Como $a_n \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, 0 es una cota inferior de $\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\alpha = \text{ínf}\left\{\frac{a_n}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Sea $\epsilon > 0$. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq \frac{a_m}{m} < \alpha + \epsilon$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el algoritmo de la división, existen $q, r \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n = qm + r$, donde $r < m$. Así, $a_n = a_{qm+r} \leq a_{qm} + a_r \leq qa_m + a_r$, con lo que:

$$\begin{aligned}\alpha < \frac{a_n}{n} &\leq \frac{qa_m}{n} + \frac{a_r}{n} \\ &= \frac{a_m}{m}\frac{qm}{n} + \frac{a_r}{n} \\ &\leq (\alpha + \epsilon)\frac{qm}{n} + \frac{a_r}{n}.\end{aligned}$$

Dado que $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{qm}{n} = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{qm+r-r}{n} = \text{lím}_{n\to\infty} 1 - \frac{r}{n} = 1$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_r}{n} = 0$, tenemos que:

$$\alpha \leq \text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \alpha + \epsilon.$$

Por lo tanto, $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$. $\square$

Teorema 3.1.15. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. El $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n}$ existe y además:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n} = \text{ínf}\left\{\frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $H_n = H(\mathcal{U}_f^n)$. Así $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos no negativos. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Luego, de la Proposición 3.1.8, parte (2):

$$\begin{aligned} H(\mathcal{U}_f^{m+n}) &= H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m-n+1}(\mathcal{U})) \\ &= H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}) \vee f^{-m}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-m-n+1}(\mathcal{U})) \\ &= H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}) \vee f^{-m}(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))). \end{aligned}$$

Además del Teorema 3.1.12, parte (4) y (3) respectivamente tenemos que:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{U}_f^{m+n}) &= H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}) \vee f^{-m}(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))) \\ &\leq H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U})) + H(f^{-m}(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))) \\ &\leq H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U})) + H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})). \end{aligned}$$

Y dado que:

$$H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U})) + H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})) = H(U_f^m) + H(U_f^n),$$

hemos probado que $H_{n+m} \leq H_n + H_m$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Así por el Lema 3.1.14, tenemos que $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} = \text{ínf}\{\frac{H_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, lo que concluye la prueba. □

Sabiendo que para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X, $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}^n)}{n}$ siempre existe, podemos con toda firmeza definir la entropía del sistema con respecto a una cubierta.

Definición 3.1.16. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. *La entropía del sistema con respecto a la cubierta* $\mathcal{U}$, se define como:

$$h(f, \mathcal{U}) = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n}.$$

Nuevamente, la entropía del sistema con respecto a una cubierta es un número no negativo, pues para cada $n \in \mathbb{N}$, $H(U_f^n)$ es un número no negativo, con lo cual, la sucesión $\left\{\frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos no negativos y por lo tanto, converge a un número no negativo. A continuación revisamos algunas de las propiedades más útiles que cumple dicho concepto.

Proposición 3.1.17. Sean (X, f) un sistema dinámico, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X. Se cumplen las siguientes proposiciones:

(1) $h(f,\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{U})$.

(2) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, entonces $h(f,\mathcal{U}) \leq h(f,\mathcal{V})$

(3) Si f es un homeomorfismo, entonces $h(f,\mathcal{U}) = h(f^{-1},\mathcal{U})$.

Demostración. (1) Por definición, $h(f,\mathcal{U}) = \operatorname{ínf}\left\{\dfrac{H(\mathcal{U}^n)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tomando $n = 1$, $H(\mathcal{U}) \in \left\{\dfrac{H(\mathcal{U}^n)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, por lo que $h(f,\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{U})$.

(2) Supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Por las Proposiciones 3.1.7, parte (2), y 3.1.8, parte (1), para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{U}^n \prec \mathcal{V}^n$. Luego del Teorema 3.1.12, parte (1), $H(\mathcal{U}^n) \leq H(\mathcal{V}^n)$. Por tanto, $h(f,\mathcal{U}) \leq h(f,\mathcal{V})$.

(3) Supongamos que f es homeomorfismo, del Teorema 3.1.12, parte (3), tenemos que $H(f^{-1}(\mathcal{U})) = H(\mathcal{U})$, de aquí, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
H(\mathcal{U}_f^n) &= H(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})) \\
&= H(f^{n-1}(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))) \\
&= H(f^{n-1}(\mathcal{U}) \vee f^{n-2}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \mathcal{U}) \\
&= H((f^{-1})^{-n+1}(\mathcal{U}) \vee (f^{-1})^{-n+2}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \mathcal{U}) \\
&= H(\mathcal{U}_{f^{-1}}^n).
\end{aligned}$$

Así, $h(f,\mathcal{U}) = h(f^{-1},\mathcal{U})$.

De (1), (2) y (3) se concluye la prueba. □

Con toda esta información finalmente podemos definir la entropía topológica de un sistema dinámico.

Definición 3.1.18. La *entropía topológica* del sistema dinámico (X, f) está dada por:

$$h_{top}(f) = \sup\left\{h(f,\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ es una cubierta abierta para } X\right\}.$$

De acuerdo a la Definición 3.1.18, en su forma extendida la entropía queda definida del siguiente modo:

$$h_{top}(f) = \sup \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\log(N(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})))}{n} : \mathcal{U} \text{ es una cubierta abierta para } X \right\}.$$

En algunos textos como [33], es así como presentan la definición de entropía, omitiendo la definición de entropía con respecto a una cubierta. La razón de que aquí se presente a la entropía por niveles[3], es la de facilitar la manipulación de sus propiedades y hacer más legibles las demostraciones.

Recordemos que $h(f,\mathcal{U}) \geq 0$, para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X. Así, la entropía del sistema al ser el supremo de número no negativos, resulta ser también un número no negativo. Es decir, $h_{top}(f) \geq 0$. Es aquí donde la entropía divide a los sistemas dinámicos en dos clases:

(1) Sistemas que tienen entropía topológica igual a cero.

(2) Sistemas que tienen entropía topológica positiva.

Esta separación es de suma importancia, puesto que algunos autores como L.S. Block y W. A. Coppel [11], definen un sistema caótico como aquel que tiene entropía topológica positiva.

3.1.3 Algunos teoremas sobre entropía topológica

Como se menciona en el Capítulo 1 la conjugación topológica es una herramienta que sirve para analizar sistemas dinámicos a partir de otros, cuyas propiedades conocemos. El siguiente resultado, muestra que la entropía topológica es una propiedad dinámica, lo cual resulta sumamente útil, pues el cálculo de la entropía de un sistema no es siempre una tarea sencilla para todos los sistemas.

Teorema 3.1.19. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados. Se cumple que $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.

[3] Al decir por niveles, nos referimos a que primero se presenta la entropía de una cubierta, luego la entropía con respecto a una cubierta y finalmente la entropía de todo el sistema.

Demostración. Como (X, f) y (Y, g) son sistemas topológicamente congujados, existe un homeomorfismo $\phi : X \to Y$ tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$, o bien, $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = g$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Ya que ϕ es un homeomorfismo, $\phi(\mathcal{U})$ es una cubierta abierta para X y $\phi^{-1}(\phi(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Además, se puede probar por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\phi \circ f \circ \phi^{-1})^n = \phi \circ f^n \circ \phi^{-1}$, por lo cual:

$$\begin{aligned}
h(g, \phi(\mathcal{U})) &= h(\phi \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(\mathcal{U})) \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\phi(\mathcal{U}) \vee (\phi \circ f^{-1} \circ \phi^{-1})(\phi(\mathcal{U})) \vee \cdots \vee (\phi \circ f^{-n} \circ \phi^{-1})(\phi(\mathcal{U})))}{n} \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\phi(\mathcal{U}) \vee (\phi \circ f^{-1})(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee (\phi \circ f^{-n})(\mathcal{U}))}{n}.
\end{aligned}$$

Luego, de la Proposición 3.1.8, parte (2), y del Teorema 3.1.12, parte (3) , tenemos que:

$$\begin{aligned}
h(g, \phi(\mathcal{U})) &= \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\phi(\mathcal{U}) \vee (\phi \circ f^{-1})(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee (\phi \circ f^{-n})(\mathcal{U}))}{n} \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\phi(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-n}(\mathcal{U}))}{n} \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-n}(\mathcal{U}))}{n} \\
&= h(f, \mathcal{U}).
\end{aligned}$$

Hemos probado que $h(g, \phi(\mathcal{U})) = h(f, \mathcal{U})$, para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$. Por lo tanto $h_{top}(g) = h_{top}(f)$. □

Es importante mencionar que el Teorema 3.1.19, no nos dice que la entropía sea una propiedad dinámica, pues la entropía no es una propiedad como tal de un sistema, a lo que nos referimos con decir que es una propiedad dinámica es que la entropía de sistemas topológicamente conjugados es la misma. Lo que sí resulta una propiedad dinámica es si la entropía es o no positiva. Considerando que lo que nos interesa es este hecho, lo presentamos como corolario del Teorema 3.1.19, en el siguiente resultado.

Corolario 3.1.20. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados. Se cumple que $h_{top}(f) > 0$ si y sólo si $h_{top}(g) > 0$.

Si (X, f) es un sistema dinámico, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, (X, f^n) es también un sistema dinámico, por lo cual, podemos pensar en calcular su entropía y ya que este último depende del sistema original (X, f), podemos esperar lo mismo de su entropía. El siguiente resultado muestra en qué forma la entropía del sistema (X, f^n), depende de la entropía del sistema (X, f).

Teorema 3.1.21. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $h_{top}(f^k) = kh_{top}(f)$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_f^k)_{f^k}^n &= \mathcal{U}_f^k \vee (f^k)^{-1}(\mathcal{U}_f^k) \vee (f^k)^{-2}(\mathcal{U}_f^k) \vee \cdots \vee (f^k)^{-(n-1)}(\mathcal{U}_f^k) \\
&= \mathcal{U}_f^k \vee (f^{-k})(\mathcal{U}_f^k) \vee (f^{-2k})(\mathcal{U}_f^k) \vee \cdots \vee (f^{-(n-1)k})(\mathcal{U}_f^k) \\
&= \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \vee (f^{-k}) \left(\bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \right) \vee \cdots \vee (f^{-(n-1)k}) \left(\bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \right) \\
&= \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \vee \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-(k+j)}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-((n-1)k+j)}(\mathcal{U}) \\
&= \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \vee \bigvee_{j=k}^{2k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \bigvee_{j=(n-1)k}^{nk-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \\
&= \bigvee_{j=0}^{nk-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \\
&= \mathcal{U}_f^{nk}.
\end{aligned}$$

Así, por definición de entropía, dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
h_{top}(f^k) &\geq h(f^k, \mathcal{U}_f^k) \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H((\mathcal{U}_f^k)_{f^k}^n)}{n} \\
&= \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^{nk})}{n} \\
&= k\text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^{nk})}{nk} \\
&= kh(f, \mathcal{U}).
\end{aligned}$$

Por lo que $h_{top}(f^k) \geq kh(f,\mathcal{U})$. Luego $h_{top}(f^k) \geq kh_{top}(f)$. Por otro lado, dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$, se cumple $\mathcal{U}_{f^k}^n \prec \mathcal{U}_f^{nk}$, pues:

$$\{(f^k)^{-j}(\mathcal{U}) : \ j \in \{1,\dots,n-1\}\} \subseteq \{f^{-i}(\mathcal{U}) : \ i \in \{1,\dots,nk-1\}\}.$$

Así, de la Proposición 3.1.12, $H(\mathcal{U}_{f^k}^n) \leq H(\mathcal{U}_f^{nk})$. Luego:

$$\begin{aligned} h(f^k,\mathcal{U}) &= \text{lím}_{n\to\infty}\frac{H(\mathcal{U}_{f^k}^n)}{n} \\ &\leq \text{lím}_{n\to\infty}\frac{H(\mathcal{U}_f^{nk})}{n} \\ &= k\text{lím}_{n\to\infty}\frac{H(\mathcal{U}_f^{nk})}{nk} \\ &= kh(f,\mathcal{U}). \end{aligned}$$

Por lo que, $h(f^k,\mathcal{U}) \leq kh(f,\mathcal{U})$, para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X. Por lo tanto $h_{top}(f^k) \leq kh_{top}(f)$. □

El Teorema 3.1.21, nos permite calcular la entropía de (X, f^n), para cada n, si se conoce la entropía de (X, f) y viceversa. Si se conoce la entropía de (X, f^n) para algún n, con ello podremos obtener la entropía de (X, f).

Ahora probamos un resultado más de sucesiones, que es útil para demostrar otro teorema interesante sobre la entropía.

Lema 3.1.22. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales que cumplen que $a_n, b_n \geq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si ocurre que:

$$\text{lím}_{n\to\infty}\frac{\log(a_n)}{n} = a \text{ y } \text{lím}_{n\to\infty}\frac{\log(b_n)}{n} = b,$$

entonces:

$$\text{lím}_{n\to\infty}\frac{\log(a_n + b_n)}{n} = \text{máx}\{a, b\}.$$

Demostración. Sea $c > a, b$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\frac{\log(a_n)}{n} < c$ y $\frac{\log(b_n)}{n} < c$. Sea $n \geq N$. Sin pérdida de generalidad supongamos que

$b_n \leq a_n$. Así, dado que el logaritmo es una función creciente:

$$\log(a_n + b_n) \leq \log(a_n + a_n) = \log(2a_n) = \log(a_n) + \log(2) \leq cn + \log(2).$$

Luego $\frac{\log(a_n+b_n)}{n} \leq c + \frac{\log(2)}{n}$, por lo que existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n+b_n)}{n} = l$ y $l < c$. Supongamos que $l < a$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\frac{\log(a_n+b_n)}{n} < a$, pero $\frac{\log(a_n)}{n} \leq \frac{\log(a_n+b_n)}{n}$, lo cual implica que $a = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{n} < a$. Esto último es una contradicción. Esto prueba que $a \leq l$ y similarmente $b \leq l$. Hemos probado que $a, b \leq l < c$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n+b_n)}{n} = \max\{a, b\}$. $\square$

El siguiente resultado muestra que la entropía calculada con respecto a subconjuntos +invariantes del espacio es siempre menor que la entropía en el espacio completo.

Teorema 3.1.23. Sean (X, f) un sistema dinámico, X_1, X_2 subconjuntos cerrados de X +invariantes bajo f tales que $X = X_1 \cup X_2$. Se cumple que:

$$h_{top}(f) = \max\{h_{top}(f_1), h_{top}(f_2)\}$$

donde $f_1 = f|_{X_1}$ y $f_2 = f|_{X_2}$.

Demostración. Sea $i \in \{1, 2\}$. Para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X, definimos:

$$\mathcal{U}_i = \{U \cap X_i : \ U \in \mathcal{U}\},$$

la cual es una cubierta abierta para X_i que además cumple que $f_i^{-1}(\mathcal{U}_i) = (f^{-1}(\mathcal{U}))_i$. Dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X, para cada $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $U \cap X_i \subseteq U$, por lo cual $N(\mathcal{U}_i) \leq N(\mathcal{U})$. Si además consideramos otra cubierta abierta $\mathcal{V}$ para X, también tenemos que $(\mathcal{U} \vee \mathcal{V})_i = \mathcal{U}_i \vee \mathcal{V}_i$.

Sea $\mathcal{V}$ cubierta abierta para X_i. Pongamos:

$$\mathcal{U} = \{V \cup (X \setminus X_i) : \ V \in \mathcal{V}\},$$

luego $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para X y $\mathcal{U}_i = \mathcal{V}$.

Así, por todo lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:

$$N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k}(\mathcal{V})\right) = N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k}(\mathcal{U}_i)\right) = N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_i\right)$$
$$= N\left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})\right)_i\right) \leq N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})\right).$$

Así, $H((\mathcal{U}_i)_{f_i}^n) \leq H(\mathcal{U}_f^n)$ y en consecuencia $h(f_i, \mathcal{U}_i) \leq h(f, \mathcal{U})$. Y ya que esto es para una cubierta arbitraria, se deduce que $h_{top}(f_i) \leq h_{top}(f)$. Por lo tanto:

$$\text{máx}\{h_{top}(f_1), h_{top}(f_2)\} \leq h_{top}(f).$$

Por otro lado, dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X:

$$\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U}) = \bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_1 \cup \bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_2.$$

Se tiene que:

$$N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})\right) \leq N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_1\right) + N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_2\right);$$

luego:

$$\log\left(N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})\right)\right) \leq \log\left(N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U})_1\right) + N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U})_2\right)\right);$$

Con esto, aplicando el Lema 3.1.22, obtenemos que

$$h(f, \mathcal{U}) \leq \text{máx}\{h(f_1, \mathcal{U}_1), h(f_2, \mathcal{U}_2)\},$$

y por lo tanto $h_{top}(f) = \text{máx}\{h_{top}(f_1), h_{top}(f_2)\}$. $\square$

Hasta aquí, hemos visto resultados que nos ayudan a calcular la entropía de sistemas derivados de (X, f), siempre y cuando conozcamos la entropía de (X, f). Para poder calcular la entropía de manera explícita, necesitamos primero de algunas herramientas que faciliten el cálculo.

Definición 3.1.24. Sea X un espacio métrico. La sucesión $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas para X es un *refinamiento de cubiertas* si:

(1) $\mathcal{U}_n \prec \mathcal{U}_{n+1}$.

(2) Para cada $\mathcal{V}$ cubierta abierta para X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}_n$.

Proposición 3.1.25. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si la sucesión $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas para X es un refinamiento de cubiertas, entonces:

$$h_{top}(f) = \text{lím}_{n\to\infty} h(f,\mathcal{U}_n).$$

Demostración. Por definición de entropía:

$$h_{top}(f) = \sup\{h(f,\mathcal{U}) : \ \mathcal{U} \text{ es cubierta abierta para } X\}.$$

Pongamos $\alpha = \sup\{h(f,\mathcal{U}_n) : \ n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Como $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas abiertas de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_n$. De la Proposición 3.1.17, parte (2), $h(f,\mathcal{U}) \le h(f,\mathcal{U}_n)$, por lo que $h(f,\mathcal{U}) \le \alpha$. Así, $h_{top}(f) \le \alpha$.

Por otro lado,

$$\{h(f,\mathcal{U}_n) : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{h(f,\mathcal{U}) : \ \mathcal{U} \text{ es cubierta abierta para } X\}.$$

Con lo que, $\alpha \le h_{top}(f)$. Por lo tanto, $h_{top}(f) = \alpha$, lo que concluye la prueba. □

La demostración del siguiente resultado se puede hallar en el Lema 27.5 de [40].

Lema 3.1.26. Sea X un espacio métrico compacto. Para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe $l_{\mathcal{U}} > 0$ tal que, si $A \subseteq X$ cumple que $d(A) < l_{\mathcal{U}}$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ de tal forma que $A \subseteq U$.

En el Lema 3.1.26, al número $l_{\mathcal{U}}$ se conoce como *número de Lebesgue de la cubierta* $\mathcal{U}$. Para utilizar el número de Lebesgue para nuestros propósitos, requerimos definir el diámetro de una cubierta.

Definición 3.1.27. Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. El *diámetro de la cubierta* $\mathcal{U}$, se define y denota como sigue:

$$d(\mathcal{U}) = \sup\{d(U) |\ U \in \mathcal{U}\}.$$

Corolario 3.1.28. Dado (X, f) un sistema dinámico, si $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cubiertas abiertas para X que cumple que:

(1) $\mathcal{U}_n \prec \mathcal{U}_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim_{n\to\infty} d(\mathcal{U}_n) = 0$;

entonces $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas para X.

Demostración. De acuerdo a la Definición 3.1.24, solo resta probar la segunda propiedad de los refinamientos. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Sea $l_{\mathcal{U}}$ el número de Lebesgue de $\mathcal{U}$. Como $\lim_{n\to\infty} d(\mathcal{U}_n) = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathcal{U}_N) \leq l_{\mathcal{U}}$. Así, dado $U' \in \mathcal{U}_N$, $d(U') \leq l_{\mathcal{U}}$. Por el Lema 3.1.26, esto implica que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U' \subseteq U$. Por lo tanto $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_N$. □

Como hemos visto, pese a que la entropía topológica está definida en espacios métricos, la métrica del espacio, no aparece de manera explícita en ninguna de las definiciones que hemos dado hasta este punto. De esta manera, la entropía topológica se puede definir en espacios más generales. En realidad es suficiente con considerar un espacio topológico Hausdorff [4] y compacto. Sin embargo, para propósitos de nuestro trabajo, es suficiente considerar espacios métricos.

Trabajar en espacios métricos tiene sus ventajas, pues podemos definir la entropía en términos de la métrica, lo que facilita algunos cálculos. Pero sobre todo, involucrar la métrica, es útil para comprender mejor qué es lo que en realidad mide la entropía topológica en un sistema. Para lograrlo, requerimos definir una familia de métricas para el espacio (X, d) a partir de la métrica d.

[4] La definición de espacio de Hausdorff se puede hallar en el Capítulo 2 de [40].

Definición 3.1.29. Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $d_n : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in X$:

$$d_n(x, y) = \max\{d(f^k(x), f^k(y)) : k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

La función d_n es una métrica para X, la prueba se puede hallar en [13].

Dados un sistema diámico (X, f), $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{B}(n, \epsilon)$ como la cubierta abierta formada por las bolas abiertas de radio menor que ϵ bajo la métrica d_n. Definimos $cov(n, \epsilon, f) = N(\mathcal{B}(n, \epsilon))$.

Proposición 3.1.30. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que:

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\log(cov(n, \epsilon, f))}{n}.$$

Demostración. Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_k$ la cubierta abierta formada por las bolas abiertas de radio menor que $\frac{1}{n}$. Por el Corolario 3.1.28, se tiene que $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas. Por lo cual:

$$h_{top}(f) = \lim_{n \to \infty} h(f, \mathcal{U}_n) = \lim_{n \to \infty} \lim_{k \to \infty} \frac{\log(cov(k, \frac{1}{n}, f))}{k}.$$

Lo cual implica que:

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\log(cov(n, \epsilon, f))}{n}.$$

Lo cual concluye la prueba. □

Definición 3.1.31. Sean (X, f) un sistema dinámico, $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Un conjunto $A \subseteq X$ es un conjunto:

(1) (n, ϵ)-abarcador bajo f si para cada $x \in X$, existe $y \in A$ tal que $d_n(x, y) < \epsilon$.

(2) (n, ϵ)-separado bajo f si para cada $x, y \in A$, tales que $x \neq y$, se tiene que $d_n(x, y) \geq \epsilon$.

Además, *span*(n, ϵ, f) denota la mínima cardinalidad de un conjunto (n, ϵ)-abarcador bajo f y *sep*(n, ϵ, f) la máxima cardinalidad de un conjunto (n, ϵ)-separado bajo f.

Veamos un ejemplo. Consideremos el intervalo I con la métrica:

$$d(x, y) = \text{mín}(|x - y|, 1 - |x - y|).$$

Sea $f : I \to I$, definida para cada $x \in I$ como:

$$f(x) = (2x)\text{mod } 1 = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 2x < 1, \\ \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 2x \geq 1. \end{cases}$$

A f se le conoce como *función duplicadora.*

Lema 3.1.32. Sea f la función duplicadora. Se cumple que:

$$\text{Si } d(x, y) \leq \frac{1}{4}, \text{ entonces } d(f(x), f(y)) = 2d(x, y).$$

Demostración. Es claro que $d(x, y) = |x - y|$ si $|x - y| \leq \frac{1}{2}$. Sean $x, y \in I$ tales que $d(x, y) \leq \frac{1}{4}$, esto es que $|x - y| \leq \frac{1}{4}$. Luego, por definición de f:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d((2x)\text{mod } 1, (2y)\text{mod } 1) \\ &= \text{mín}(|(2x - 2y)\text{mod } 1|, 1 - |(2x - 2y)\text{mod } 1|). \end{aligned}$$

Sin embargo, $|2x - 2y| \leq \frac{1}{2}$, por lo que $(2x - 2y)\text{mod } 1 = 2x - 2y$. Así:

$$d(f(x), f(y)) = 2|x - y| = 2d(x, y).$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos el siguiente conjunto:

$$S_k = \left\{ \frac{i}{2k} \; | i \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq i < 2^k - 1 \right\}.$$

Ejemplo 3.1.33. Sea f la función duplicadora. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto S_{n+k} es un conjunto (n, ϵ)-abarcador bajo f.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Sea $k \geq 2$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} \leq \epsilon < \frac{1}{2^k}$. Note que para cada $x \in I$, existe $i \in \{0, \ldots, 2^{n+k} - 1\}$ tal que:

$$x \in \left[\frac{i}{2^{n+k}}, \frac{i+1}{2^{n+k}}\right).$$

Sea $y = \frac{i}{2^{n+k}}$. Así $y \in S_{n+k}$ y:

$$d(x, y) \leq d\left(\frac{i+1}{2^{n+k}}, y\right) = d\left(\frac{i+1}{2^{n+k}}, \frac{i}{2^{n+k}}\right) = \frac{1}{2^{n+k}} < \frac{1}{4}.$$

Por lo cual, del Lema 3.1.32:

$$d(f(x), f(y)) = 2d(x, y) = \frac{2}{2^{n+k}} < \frac{1}{4}.$$

Aplicando el Lema 3.1.32, de nuevo obtenemos:

$$d(f^2(x), f^2(y)) = 2d(f(x), f(y)) = \frac{2^2}{2^{n+k}}.$$

De este modo si aplicamos el Lema 3.1.32, j veces, para $0 \leq j < n$, tenemos:

$$d(f^j(x), f^j(y)) = 2^j d(x, y) = \frac{2^j}{2^{n+k}} \leq \frac{2^n - 1}{2^{n+k}} < \frac{1}{2^{k+1}} \leq \epsilon.$$

Hemos probado que para cada $x \in I$, existe $y \in S_{n+k}$ tal que:

$$\text{máx}\{d(f^j(x), f^j(y)) | \ 0 \leq j < n\} = d_n(x, y) < \epsilon,$$

esto es, el conjunto S_{n+k} es un conjunto (n, ϵ)-abarcador bajo f. $\square$

De manera similar al el Ejemplo 3.1.33, se puede verificar el siguiente.

Ejemplo 3.1.34. Sea f la función duplicadora. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto S_{n-1+k} es un conjunto (n, ϵ)-separado bajo f.

Proposición 3.1.35. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$cov(n, 2\epsilon, f) \leq span(n, \epsilon, f) \leq sep(n, \epsilon, f) \leq cov(n, \epsilon, f).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Sea $A \subseteq X$ un conjunto (n, ϵ)-abarcador de mínima cardinalidad. Luego:

$$X \subseteq \bigcup_{y \in A} B_n(y, \epsilon),$$

donde $B_n(y, \epsilon)$ denota la bola abierta con centro en y y radio ϵ considerando la métrica d_n. Además, se cumple que $d(B_n(y, \epsilon)) \leq 2\epsilon$, por lo cual:

$$cov(n, 2\epsilon, f) \leq |A| = span(n, \epsilon, f),$$

lo que prueba la primera desigualdad. Ahora sea B un conjunto (n, ϵ)-separado de máxima cardinalidad, esto es, que no podemos agregar más puntos a B de tal modo que siga siendo un conjunto (n, ϵ)-separado. Luego, para cada $x \in X \setminus B$ y cada $y \in B$, no puede ocurrir que $d_n(x, y) \geq \epsilon$. Por lo tanto, para cada $x \in X$, existe $y \in B$ tal que $d_n(x, y) < \epsilon$. Lo que nos lleva a que B es un conjunto (n, ϵ)-abarcador. Luego:

$$span(n, \epsilon, f) \leq |B| = sep(n, \epsilon, f),$$

lo que prueba la segunda desigualdad. Finalmente supongamos que $N(\mathcal{B}(n, \epsilon)) < |B|$. Luego existe $x \in X$, tal que $B_n(x, \epsilon)$ contiene más de un punto de B. Así, existen al menos dos puntos en B a distancia menor que ϵ, lo cual es una contradicción pues B es un conjunto (n, ϵ)-separado. Por lo tanto, debe ocurrir que $|B| \leq N(\mathcal{B}(n, \epsilon))$, lo que prueba la última desigualdad. $\square$

El siguiente resultado muestra una equivalencia de la definición entropía topológica, en términos de los conjuntos (n, ϵ)-abarcador y (n, ϵ)-separado. Los autores Bowen y Dinaburg en 1973 [12], introdujeron esta caracterización como una forma de definir la entropía topológica.

Teorema 3.1.36. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que:

$$h_{top}(f) = \text{lím}_{\epsilon \to 0} \text{lím}_{n \to \infty} \frac{\log(sep(n, \epsilon, f))}{n} = \text{lím}_{\epsilon \to 0} \text{lím}_{n \to \infty} \frac{\log(span(n, \epsilon, f))}{n}.$$

Demostración. De la Proposición 3.1.30, tenemos que:

$$h_{top}(f) = \text{lím}_{\epsilon \to 0} \text{lím}_{n \to \infty} \frac{\log(cov(n, \epsilon, f))}{n}.$$

Así, al considerar las desigualdades de la Proposición 3.1.35, podemos acotar los límites, con lo que queda demostrado el resultado. □

La interpretación que nos brinda esta nueva forma de analizar la entropía es la siguiente. Como X es compacto, $span(n, \epsilon, f)$ es un número finito, el cual representa el número de órbitas de longitud n, distinguibles a una distancia ϵ. Esto es, suponiendo que no podemos distinguir puntos que están a una distancia menor a ϵ. Así, la entropía representa el crecimiento exponencial (al utilizar el logaritmo) del número de órbitas distinguibles conforme pasa el tiempo.

3.1.4 Calculando la entropía

Ahora vemos los primeros ejemplos de cálculo explícito de la entropía topológica.

Ejemplo 3.1.37. En un espacio métrico X, la identidad tiene entropía cero.

Demostración. Sea $I_d : X \to X$ la función identidad en X. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}^n_{I_d} = \mathcal{U}$. Luego:

$$h(I_d, \mathcal{U}) = \text{lím}_{n \to \infty} \frac{H(U^n_{I_d})}{n} = \text{lím}_{n \to \infty} \frac{H(\mathcal{U})}{n} = H(\mathcal{U}) \text{lím}_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por lo tanto, $h_{top}(I_d) = 0$. □

Teorema 3.1.38. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es una isometría, entonces $h_{top}(f) = 0$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}_m$ la cubierta formada por todos los subconjuntos abiertos de X con diámetro menor que $\frac{1}{m}$. Como f es una isometría, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(\mathcal{U}_m) \subseteq \mathcal{U}_m$, por lo cual, de la Proposición 3.1.7, se tiene que $\mathcal{U}^n_m \prec \mathcal{U}_m$. Con todo lo anterior, por el Corolario 3.1.28, obtenemos que $\{\mathcal{U}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas. Luego de la Proposición 3.1.25, se tiene que $h_{top}(f) = \text{lím}_{m\to\infty} h(f, \mathcal{U}_m)$. Sin embargo, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_m^n \prec \mathcal{U}_m$, por lo cual, del Teorema 3.1.12, $H(\mathcal{U}_m^n) \leq H(\mathcal{U}_m)$. Así:

$$h(f, U_m) = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_m^n)}{n} \leq H(\mathcal{U}_m) \text{lím}_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por lo tanto, $h_{top}(f) = 0$. □

El Teorema 3.1.38, nos proporciona una gran cantidad de ejemplos de funciones con entropía cero. Ahora mostramos algunos ejemplos de sistemas dinámicos cuya entropía topológica es positiva [1].

Ejemplo 3.1.39. Consideremos el intervalo I con la métrica $d(x, y) = \text{mín}(|x - y|, 1 - |x - y|)$. Sea $f : I \to I$ la función duplicadora. Esto es, $f(x) = (2x) \text{mod } 1$. Se tiene que

$$h_{top}(f) = \log(2).$$

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, por el Ejemplo 3.1.33, sabemos que el conjunto S_{n+k} es un conjunto (n, ϵ)-abarcador bajo f. Además $|S_{n+k}| = 2^{n+k}$, por lo cual $span(n, \epsilon) \leq 2^{n+k}$. Luego:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(span(n, \epsilon, f)) \leq \text{lím}_{n\to\infty} \frac{(n + k)\log(2)}{n} = \log(2).$$

Similarmente, considerando ahora el Ejemplo 3.1.34, el conjunto S_{n-1+k} es un conjunto (n, ϵ)-separado bajo f. Por lo que:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(sep(n, \epsilon, f)) \geq \text{lím}_{n\to\infty} \frac{(n - 1 + k)\log(2)}{n} = \log(2).$$

Finalmente, acotando los límites y en virtud de Teorema 3.1.36, se tiene que $h_{top}(f) = \log(2)$. □

Ejemplo 3.1.40. Sea Σ_2 el conjunto de las sucesiones $a_0a_1a_2\ldots$ tales que $a_n \in \{0, 1\}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Sea $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in \Sigma_2$:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

Con la métrica d, Σ_2 es un espacio métrico compacto. La prueba se puede hallar en [26]. Sea $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, definida por:

$$\sigma(a_0a_1a_2\ldots) = a_1a_2a_3\ldots$$

A σ se le conoce como *función shift* y cumple que $h_{top}(\sigma) = \log(2)$.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{\{x \in \Sigma_2 | x_0 = 0\}, \{x \in \Sigma_2 | x_0 = 1\}\}$. Se tiene que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de Σ_2. Consideremos la sucesión $\{\mathcal{U}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\mathcal{U}_p = \bigvee_{k=-p}^{p} \sigma^k(\mathcal{U}), \text{ para cada } p \in \mathbb{N}.$$

Veamos que $\{\mathcal{U}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas abiertas. Como la función σ es un homemorfismo, es claro que $\mathcal{U}_p$ es una cubierta abierta para cada $p \in \mathbb{N}$. También es evidente de la definición que $\mathcal{U}_p \prec \mathcal{U}_{p+1}$. Sean $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de Σ_2 y $l_{\mathcal{V}}$ el número de Lebesgue de $\mathcal{V}$. Si tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < l_{\mathcal{V}}$, del Lema 3.1.26, se tiene que $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}_p$. Con esto se prueba que $\{\mathcal{U}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas abiertas.

Sea $p \in \mathbb{N}$. Dado que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_p$, de la Proposición 3.1.17, se sigue que $h(\sigma,\mathcal{U}) \leq h(\sigma,\mathcal{U}_p)$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
h(\sigma,\mathcal{U}_p) &= \operatorname{lím}_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \sigma^{-k}(\mathcal{U}_p)\right)}{n} \\
&= \operatorname{lím}_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=-p}^{p} \sigma^k(\mathcal{U}) \vee \bigvee_{k=-p-1}^{p-1} \sigma^k(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \bigvee_{k=-p-n+1}^{p-n+1} \sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n} \\
&= \operatorname{lím}_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=-p-n+1}^{p} \sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n},
\end{aligned}$$

donde la primera y segunda igualdad se dan por definición y la tercera igualdad proviene del Teorema 3.1.12 parte (2).

$$\text{lím}_{n\to\infty}\frac{H\left(\bigvee_{k=-p-n+1}^{p}\sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n} \leq \text{lím}_{n\to\infty}\frac{H\left(\bigvee_{k=-p-n+1}^{-p}\sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n}$$
$$= \text{lím}_{n\to\infty}\frac{H\left(\bigvee_{k=-n+1}^{0}\sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n}$$
$$= h(\sigma,\mathcal{U}).$$

Por lo tanto, $h(\sigma,\mathcal{U}) = h(\sigma,\mathcal{U}_p)$. Además, se tiene que $N(\bigvee_{k=0}^{-n+1}\sigma^{-k}(\mathcal{U})) = 2^n$, con lo que $h(\sigma,\mathcal{U}) = \log(2)$. Luego $h(\sigma,\mathcal{U}_p) = \log(2)$, para cada $p \in \mathbb{N}$ y dado que $\{\mathcal{U}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas, de la Proposición 3.1.25 se tiene que $h_{top}(\sigma) = \log(2)$. $\square$

La demostración del siguiente ejemplo la omitimos. La prueba se puede hallar en [1].

Ejemplo 3.1.41. Sea $GL_2(\mathbb{Z})$ es el grupo general lineal con entradas en los enteros y $A \in GL_2(\mathbb{Z})$, con valores propios λ y λ^{-1} tales que $|\lambda| > 1$. Sea $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dado por $f_A([x]) = [Ax]$, el automorfismo del toro correspondiente a la matriz A. Se tiene que:

$$h_{top}(f_A) = \log(|\lambda|).$$

3.2 Entropía métrica

En esta sección presentamos el concepto de entropía métrica, la cual fue la primera noción de entropía en sistemas dinámicos. Fue introducida por Andrei Kolmogorov en 1958 [30] y desarrollada más tarde por Yakov Sinai en 1959 [30], para llegar a la definición moderna que aquí presentamos. Son varias las similitudes que guarda la entropía topológica con la entropía métrica, por lo cual nos permitimos omitir ciertos detalles en el desarrollo de la entropía métrica. Para detalles más específicos consulte el Capítulo 4 de [52].

Antes de comenzar son necesarias algunas aclaraciones. Para definir la entropía métrica en un sistema dinámico (X, f), consideramos a $(X, \mathcal{B}, \mu)$ como un espacio de

Borel de probabilidad. Esto es, un espacio X en el que $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel de X y μ es una medida de Borel tal que $\mu(X) = 1$. Además, la medida $\mu \in M(X, f)$ y la función f es $\mathcal{B}$-medible (consulte las definiciones en el Capítulo 1). De aquí en adelante, cada vez que se nombra un espacio de medida X, hacemos referencia a espacios con estas caraterísticas.

Las familias de conjuntos a partir de las cuales está definida la entropía topológica son las cubiertas abiertas. En el caso de la entropía métrica son las particiones medibles, cuya definición se presenta a continuación.

Definición 3.2.1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. La familia $\xi = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\xi \subseteq \mathcal{B}$ es una *partición medible* si:

(1) $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu(X)$ y $\mu(A_k) > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

(2) $\mu(A_k \cap A_l) = 0$, para cada $j, k \in \mathbb{N}$ con $j \neq k$.

Al igual que la entropía topológica, la entropía métrica se define por etapas, comenzando con la entropía de una partición medible.

Definición 3.2.2. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. La *entropía de la partición medible* ξ se define por:

$$H_\mu(\xi) = -\sum_{A\in\xi} \mu(A)\log(\mu(A)),$$

donde se considera $0\log(0) = 0$.

Sean X un espacio de medida y $\xi = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ una partición medible. Dado $k \in \mathbb{N}$, debido a que $\mu(X) = 1$ y $A_k \subseteq X$, se tiene que $0 \leq \mu(A_k) \leq 1$. Esto nos lleva a que $\log(\mu(A_k)) \leq 0$. Por lo tanto, en la Definición 3.2.2, cuando la serie que define a la entropía de una partición medible converge, se cumple que $H_\mu(\xi) \geq 0$.

Proposición 3.2.3. Sea X un espacio de medida. Para cada partición medible ξ finita, se cumple que:

$$H_\mu(\xi) \leq \log(|\xi|).$$

Demostración. Pongamos a $|\xi| = k$. Sea $\psi : I \to \mathbb{R}$, la función definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} -x\log(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ \\ 0 & \text{si} \qquad x = 0. \end{cases}$$

Lo primero que podemos notar es que la función ψ es continua. Además:

$$H_\mu(\xi) = \sum_{A\in\xi} \psi(\mu(A)).$$

Por otro lado, $\psi''(x) = -\frac{1}{x}$, por lo cual $\psi''(x) < 0$, para cada $x \in I$. Esto es, la función ψ es estrictamente cóncava en I. Esto es, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n \in I$, tales que $\sum_{k=1}^n a_k = 1$:

$$\sum_{i=1}^n a_i\psi(x_i) \leq \psi\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right).$$

En particular, se tiene que:

$$\begin{aligned} H_\mu(\xi) &= \sum_{A\in\xi} \psi(\mu(A)) \\ &= k\sum_{A\in\xi} \frac{1}{k}\psi(\mu(A)) \\ &\leq k\psi\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{k}\mu(A)\right) \\ &= k\psi\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= \log(k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H_\mu(\xi) \leq \log(|\xi|)$. □

Existe un análogo de los refinamientos de cubiertas para particiones medibles. Presentamos la definición y a continuación algunas propiedades. Las demostraciones de dichas propiedades se pueden encontrar en [42].

Definición 3.2.4. Sean X un espacio de medida y dos particiones medibles ξ y η de X. Decimos que η es una *partición refinamiento de* ξ, si para cada $D \in \eta$, existe $C \in \xi$ tal que $\mu(D \setminus C) = 0$.

Proposición 3.2.5. Sean X un espacio de medida y dos particiones medibles ξ y η de X. Si η es una partición refinamiento de ξ, entonces:

$$H_\mu(\xi) \leq H_\mu(\eta).$$

Ahora presentamos la definición de entropía condicional. Esta noción no está definida para la entropía topológica, pero para la entropía métrica es de gran utilidad.

Definición 3.2.6. Sean X un espacio de medida y dos particiones medibles ξ y η de X. La *entropía condicional de* ξ *con respecto a* η se define como:

$$H_\mu(\xi|\eta) = -\sum_{A\in\xi, B\in\eta} \mu(A\cap B)\log\left(\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\right).$$

Proposición 3.2.7. Sean X un espacio de medida y ξ, η y ζ particiones medibles de X. Si ζ es una partición refinamiento de η, entonces:

$$H_\mu(\xi|\zeta) \leq H_\mu(\xi|\eta).$$

Algunas de las propiedades más útiles de la entropía condicional son las mostradas en el siguiente resultado. La operación $\vee$ aquí utilizada, es la presentada en la Definición 3.1.4.

Proposición 3.2.8. Sean X un espacio de medida y ξ, η y ζ particiones medibles de X. Se cumple que:

$$H_\mu(\xi \vee \zeta|\eta) \leq H_\mu(\xi|\zeta \vee \eta) + H_\mu(\zeta|\eta).$$

Ahora veamos la definición de entropía con respecto a una partición medible. Para ello, definimos una partición especial de manera similar a la cubierta unión. Sea ξ una partición medible. Consideremos la familia:

$$f^{-1}(\xi) = \{f^{-1}(A) : A \in \xi\}.$$

Debido a que la función f es $\mathcal{B}$-medible (ver Definición 1.1.16) y la medida μ es f-invariante (ver Definición 1.1.17), la familia $f^{-1}(\xi)$ es nuevamente una partición medible. Lo mismo si consideramos $f^{-k}(\xi)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, considerando la operación de la Definición 3.1.4, definimos la partición unión como sigue:

$$\xi^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\xi) = \xi \vee f^{-1}(\xi) \vee f^{-2}(\xi) \vee \ldots \vee f^{-(n-1)}(\xi).$$

Pasamos al siguiente nivel, la definición de entropía con respecto a una partición medible.

Definición 3.2.9. Sea (X, f) un sistema dinámico, con X un espacio de medida, con medida μ y f una función μ-invariante. La entropía de f respecto a la partición medible ξ está dada por:

$$h_\mu(f, \xi) = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{H_\mu(\xi^n)}{n}.$$

Es importante notar que la definición de entropía con respecto a una partición medible (ver Definición 3.2.9), es muy similar a la definición de entropía con respecto a una cubierta (ver Definición 3.1.16). Es por esta razón que omitimos la prueba de la existencia del límite, pues la prueba se sigue de manera similar a la del Teorema 3.1.15. A continuación enunciamos un resultado que relaciona la entropía con respecto a una partición medible, con la entropía condicional.

Proposición 3.2.10. Sean (X, f) un sistema dinámico y ξ, η particiones medibles de X. Se cumple que:

$$h_\mu(f, \eta) \leq h_\mu(f, \xi) + H_\mu(\eta|\xi).$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\eta^n \vee \xi^n$ es una partición refinamiento de η^n, de la Proposición 3.2.5, se tiene que:

$$H_\mu(\eta^n) \leq H_\mu(\eta^n \vee \xi^n).$$

Por su parte, de la Proposición 3.2.8:

$$H_\mu(\eta^n \vee \xi^n) = H_\mu(\xi^n) + H_\mu(\eta^n|\xi^n).$$

De lo anterior obtenemos que:

$$H_\mu(\eta^n) \leq H_\nu(\xi^n) + H_\mu(\eta^n|\xi^n). \tag{3.1}$$

Por otro lado, de la Proposición 3.2.8, para cada α, β y γ particiones medibles, se tiene que:

$$H_\mu(\alpha \vee \beta|\gamma) = H_\mu(\alpha|\beta \vee \gamma) + H_\mu(\beta|\gamma),$$

y de la Proposición 3.2.5, dado que $\beta \vee \gamma$ es una partición refinamiento de γ:

$$H_\mu(\alpha|\beta \vee \gamma) \leq H_\mu(\alpha|\gamma).$$

Por lo tanto, para cada α, β y γ particiones medibles, se tiene que:

$$H_\mu(\alpha \vee \beta|\gamma) \leq H_\mu(\alpha|\gamma) + H_\mu(\beta|\gamma).$$

Utilizando esta última desigualdad e inducción matemática, obtenemos que:

$$H_\mu(\eta^n|\xi^n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(f^{-k}(\eta)|\xi^n).$$

Dado que ξ^n es una partición refinamiento de $f^{-k}(\xi)$, para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, de la Proposición 3.2.5:

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(f^{-k}(\eta)|\xi^n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(f^{-k}(\eta)|f^{-k}(\xi)).$$

Por lo que obtenemos:

$$H_\mu(\eta^n|\xi^n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(f^{-k}(\eta)f^{-k}(\xi)). \tag{3.2}$$

Por otra parte, $\mu \in M(X, f)$, esto es, para cada partición ζ, se cumple que, si $C \in \zeta$, entonces $\mu(f^{-1}(C)) = \mu(C)$. Así:

$$\begin{aligned}
H_\mu(f^{-1}(\eta)|f^{-1}(\xi)) &= \sum_{A\in\eta, B\in\xi} \mu(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \log\left(\frac{\mu(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))}{\mu(f^{-1}(B))}\right) \\
&= \sum_{A\in\eta, B\in\xi} \mu(f^{-1}(A \cap B)) \log\left(\frac{\mu(f^{-1}(A \cap B))}{\mu(f^{-1}(B))}\right) \\
&= \sum_{A\in\eta, B\in\xi} \mu(A \cap B) \log\left(\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}\right) \\
&= H_\mu(\eta|\xi).
\end{aligned}$$

Es decir:

$$H_\mu(f^{-1}(\eta)|f^{-1}(\xi)) = H_\mu(\eta|\xi).$$

De esta última igualdad y utilizando nuevamente indución matemática obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(f^{-k}(\eta)f^{-k}(\xi)) = \sum_{k=0}^{n-1} H_\mu(\eta|\xi) = nH_\mu(\eta|\xi).$$

Considerando esto y la ecuación (3.2), se tiene que:

$$H_\mu(\eta^n|\xi^n) \leq nH_\mu(\eta|\xi).$$

Así, de la ecuación (3.1), obtenemos:

$$H_\mu(\eta^n) \leq H_\nu(\xi^n) + nH_\mu(\eta|\xi).$$

Finalmente, al dividir la desigualdad anterior entre n y tomar el límite, obtenemos la desigualdad deseada. $\square$

Presentamos a continuación la definición de la entropía métrica[5], la cual también se define de manera similar a la entropía topológica.

Definición 3.2.11. La entropía métrica del sistema dinámico (X, f) está dada por:

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\mu(f,\xi) : \xi \text{ es una partición medible de } X \text{ con } H_\mu(\xi) < \infty\}.$$

De la Definición 3.2.11, podemos notar que la entropía métrica se define de manera muy similar a la entropía topológica. Sin embargo, en este caso, no se toma el supremo sobre todas las particiones medibles, se consideran sólo aquellas cuya entropía sea finita. La razón de ello es que bajo esas condiciones, la entropía métrica es siempre un número real mayor o igual que cero, lo que nos brinda de nuevo una dicotomía que clasifica los sistemas dinámicos en dos clases:

(1) Sistemas con entropía métrica cero.

(2) Sistemas con entropía métrica positiva.

A continuación enunciamos algunas de las propiedades más relevantes de la entropía métrica. La demostración de dichas propiedades se pueden consultar en [42].

Proposición 3.2.12. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $\mu \in M(X, f)$ y para cada ξ partición medible de X:

$$H_\mu(\xi) \leq h_\mu(f,\xi) \leq h_\mu(f)$$

Proposición 3.2.13. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mu \in M(X, f)$. Se cumplen las siguientes proposiciones:

(1) $h_\mu(id) = 0$.

(2) $h_\mu(f^k) = kh_\mu(f)$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.2.14. Sean (X, f) un sistema dinámico con $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y ξ una partición medible de X. Se tiene que $\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} f^{-k}(\xi)$ es una σ-álgebra para X y es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\bigvee_{k=-\infty}^{n} f^{-k}(\xi)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

[5] La entropía métrica es también conocida como entropía de Kolmogorov, pues fue el primer matemático en estudiarla en 1958.

Definición 3.2.15. Sean (X, f) un sistema dinámico con $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y ξ una partición medible de X. Se dice que ξ es una *partición generadora* si

$$\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} f^{-k}(\xi) = \mathcal{B}.$$

Teorema 3.2.16. Sean (X, f) un sistema dinámico, $\mu \in M(X, f)$ y ξ partición medible de X. Si ξ es una partición generadora con $H_\mu(\xi) < \infty$, entonces $h_\mu(f) = h_\mu(f, \xi)$.

3.2.1 Principio variacional

Después de conocer los conceptos de entropía topológica y entropía métrica, resulta natural preguntarse si existe alguna relación entre ellos. Por principio, es importante notar que en un sistema dinámico (X, f), únicamente podemos obtener un valor que represente la entropía topológica del sistema. Sin embargo, para la entropía métrica, podemos obtener tantos valores como medidas de Borel de probabilidad f-invariantes podamos construir sobre el espacio X. El principio variacional es el resultado que muestra la relación precisa que guardan la entropía topológica y la entropía métrica en un sistema dinámico. En esta sección presentamos la demostración del principio variacional. La demostración se encuentra dividida en dos partes, pues históricamente es en ese orden como surgió. En 1968, L.W. Goodwyn [22], probó el siguiente resultado.

Proposición 3.2.17. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que $h_\mu(f) \leq h_{top}(f)$, para cada $\mu \in M(X, f)$.

Demostración. Sea $\mu \in M(X, f)$. Sea $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, una partición medible y sea $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon < \frac{1}{k \log(k)}$. Como μ es regular y en particular regular interior (ver Definición 1.1.23), para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe un conjunto compacto

B_i, tal que $B_i \subseteq A_i$ y $\mu(A_i \setminus B_i) \leq \epsilon$. Sea $B_0 = X \setminus (\cup_{j=1}^{k} B_j)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\mu(B_0) &= \mu\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} (A_j \setminus B_j)\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j \setminus B_j) \\
&\leq k\epsilon.
\end{aligned}$$

Así, $\mu(B_0) \leq k\epsilon$. Sea $\eta = \{B_0, B_1, \ldots, B_k\}$. Es claro que η es una partición medible. Dados $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, veamos que:

$$\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Si $i = j$, entonces $B_i \subseteq A_j$. Esto nos lleva a que $A_j \cap B_i = B_i$, por lo cual:

$$\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} = \frac{\mu(B_i)}{\mu(B_i)} = 1.$$

Ahora bien, si $i \neq j$, entonces $A_j \cap A_i = \emptyset$. Dado que $B_i \subseteq A_i$, se tiene que $A_j \cap B_i = \emptyset$, por lo cual:

$$\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} = \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(B_i)} = 0.$$

Por lo anterior y considerando que $\mu(A_j \cap B_0) = \mu(A_j \setminus B_j)$, al calcular la entropía condicional de ξ dado η, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
H_\mu(\xi|\eta) &= -\sum_{i=0}^{k}\mu(B_i)\sum_{j=1}^{k}\frac{\mu(B_i\cap A_j)}{\mu(B_i)}\log\left(\frac{\mu(B_i\cap A_j)}{\mu(B_i)}\right)\\
&= -\mu(B_0)\sum_{j=1}^{k}\frac{\mu(B_0\cap A_j)}{\mu(B_0)}\log\left(\frac{\mu(B_0\cap A_j)}{\mu(B_0)}\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{k}\mu(B_0\cap A_j)\log\left(\frac{\mu(B_0\cap A_j)}{\mu(B_0)}\right)\\
&\leq -\sum_{j=1}^{k}\epsilon\log\left(\frac{\epsilon}{\mu(B_0)}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{k}\epsilon\log\left(\frac{\mu(B_0)}{\epsilon}\right)\\
&\leq \sum_{j=1}^{k}\epsilon\log\left(\frac{k\epsilon}{\epsilon}\right)\\
&\leq k\epsilon\log(k)\\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Así, $H_\mu(\xi|\eta) \leq 1$, por lo que de la Proposición 3.2.10 tenemos que:

$$h_\mu(f,\xi) \leq h_\mu(f,\eta) + H_\mu(\xi|\eta) \leq h_\mu(f,\eta) + 1.$$

De donde:

$$h_\mu(f,\xi) \leq h_\mu(f,\eta) + 1. \tag{3.3}$$

Por otro lado, para $i \neq 0$, $B_0 \cup B_i = X \setminus \bigcup_{j\leq i} B_j$ es un conjunto abierto en X, por lo cual:

$$\mathcal{U} = \{B_0 \cup B_1 \ldots, B_0 \cup B_k\},$$

es una cubierta abierta para X. Además de la Proposición 3.2.3, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$H_\mu(\eta^n) \leq \log(|\eta^n|).$$

Usando la desigualdad anterior e inducción matemática obtenemos que:

$$|\eta^n| \leq 2^n N(\mathcal{U}^n).$$

Por lo cual:

$$\begin{aligned} H_\mu(\eta^n) &\leq \log(2^n N(\mathcal{U}^n)) \\ &= n\log(2) + \log(N(\mathcal{U}^n)) \\ &= n\log(2) + H(\mathcal{U}). \end{aligned}$$

Así, al dividir entre n y tomar el límite obtenemos que:

$$h_\mu(f,\eta) \leq \log(2) + h(f,\mathcal{U}).$$

Más aún, por definición de entropía topológica se tiene que $h(f,\mathcal{U}) \leq h_{top}(f)$, por lo que:

$$h_\mu(f,\eta) \leq h_{top}(f) + \log(2).$$

Con esto, de la ecuación (3.3), obtenemos que:

$$h_\mu(f,\xi) \leq h_{top}(f) + \log(2) + 1.$$

Esta última desigualdad la hemos demostrado para cada ξ partición medible finita, por lo cual al tomar el supremo:

$$h_\mu(f) \leq h_{top}(f) + \log(2) + 1. \tag{3.4}$$

La ecuación (3.4), se cumple para cada función continua $f : X \to X$. En particular, de la Proposición 3.2.13, parte (2), y de la Proposición 3.1.21, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\begin{aligned} nh_\mu(f) &= h_\mu(f^n) \\ &\leq h_{top}(f^n) + \log(2) + 1 \\ &\leq nh_{top}(f) + \log(2) + 1. \end{aligned}$$

Esto es:

$$nh_\mu(f) \leq nh_{top}(f) + \log(2) + 1.$$

Finalmente, dividiendo entre n y tomando el límite, obtenemos que:

$$h_\mu(f) \leq h_{top}(f).$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

En 1970, T. N. T. Goodman [21], probó el siguiente resultado, que completaría la prueba de principio variacional. Presentamos únicamente un bosquejo de la demostración, pues la teoría requerida para ello se sale de los alcances de la presente tesis. La demostración detallada la puede encontrar en el Capítulo 4 de [42].

Proposición 3.2.18. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que

$$h_{top}(f) \leq \sup\{h_\mu(f) | \mu \in M(X, f)\}.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y definimos:

$$q(\epsilon) = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{\log(sep(n, \epsilon, f))}{n}.$$

Para mostrar que $h_{top}(f) \leq \sup\{h_\mu(f)|\mu \in M(X, f)\}$, es suficiente con encontrar una medida $\mu \in M(X, f)$, tal que $q(\epsilon) \leq h_\mu(f)$. Dicha medida se construye del siguiente modo. Sea E_n un conjunto (n, ϵ)-separado de cardinalidad $sep(n, \epsilon, f)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\sigma_n = \frac{1}{sep(n, \epsilon, f)} \sum_{x \in E_n} \delta_x,$$

dónde δ_x es la medida delta de Dirac[6]. Se cumple que σ_n es una medida en X. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f^j * \sigma_n,$$

[6]La medida delta de Dirac δ_x, es aquella tal que, para cada $A \in \mathcal{B}$, $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ y $\delta_x(A) = 0$ en otro caso.

donde, para cada $A \in \mathcal{B}$:

$$f^j * \sigma_n(A) := \sigma_n(f^{-j}(A)).$$

Se cumple también que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $M(X)$. Como $M(X)$ es débil* compacto[7], la sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión débil* convergente, con límite $\mu \in M(x, f)$. □

Uniendo las Proposiciones 3.2.17 y 3.2.18, se completa la demostración del principio variacional que enunciamos a continuación.

Teorema 3.2.19 (**Principio Variacional**)**.** Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que

$$h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) | \mu \in M(X, f)\}.$$

El Teorema 3.2.19, nos dice que la entropía topológica es el supremo de las entropías métricas, considerando todas las medidas de probabilidad f-invariantes que se pueden construir sobre la σ-álgebra de Borel. Si existe una medida en $M(X, f)$ que coincide con el supremo, recibe un nombre especial.

Definición 3.2.20. Una medida $\mu \in M(X, f)$ es llamada *medida de máxima entropía* si $h_{top}(f) = h_\mu(f)$.

El Teorema 3.2.19, es de utilidad al momento de realizar las demostraciones sobre la entropía topológica y su relación con otros tipos de caos, lo cual será evidente en secciones posteriores.

3.3 Caos Li-Yorke

El término "caos", en el sentido matemático, fue introducido por primera vez en 1975 por los matemáticos Li y Yorke, para describir el comportamiento complejo de las trayectorias de funciones en el intervalo real I. En su artículo "*Period three implies chaos*" [35], introdujeron esta noción, que más adelante sería llamada caos Li-Yorke. Antes de definir el caos Li-Yorke presentamos ciertas notaciones y conceptos utilizados a largo de esta sección. Para más detalles consultar [10] y [28].

[7] La teoría sobre compacidad débil* se puede encontrar en [52].

Dado (X, f) un sistema dinámico, se definen los siguientes conjuntos:

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}.$$

$$\Delta_n = \left\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Definición 3.3.1. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que A es un conjunto:

(1) *De primera categoría* si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos en X tales que:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

donde A_n es un conjunto denso en ninguna parte, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(2) G_δ si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos en X tales que:

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Proposición 3.3.2. Sean X un espacio métrico y $A, B \subseteq X$. Se cumplen las siguientes proposiciones:

(1) Si A y B son conjuntos G_δ, entonces $A \cap B$ es un conjunto G_δ.

(2) Si A es un conjunto de primera categoría, entonces A^c contiene un conjunto denso y G_δ.

Demostración. (1) Supongamos que A y B son conjuntos G_δ. Luego existen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de conjuntos abiertos en X tales que:

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ y } B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Como $\{A_n \cap B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos en X y:

$$A \cap B = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_n),$$

se tiene que $A \cap B$ es un conjunto G_δ.

(2) Supongamos que A es un conjunto de primera categoría. Luego existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte en X tales que:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como A_n es denso en ninguna parte, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A_n)) = \emptyset$. Pongamos $B_n = X \setminus \mathrm{cl}(A_n)$. Claramente B_n es un conjunto abierto. Además, dado que $A_n \subseteq \mathrm{cl}(A_n)$, se tiene que $B_n \subseteq A_n^c$. Así:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = A^c.$$

De donde el conjunto $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es un conjunto G_δ, tal que $B \subseteq A^c$. Ahora veamos que B es denso. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como A_n es denso en ninguna parte $x \notin \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A_n))$, luego $B(x,\epsilon) \cap B_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, $B(x,\epsilon) \cap B \neq \emptyset$, lo que prueba que B es denso.

De (1) y (2) se completa la prueba. □

Proposición 3.3.3. Sean X un espacio métrico y $A_1, A_2 \subseteq X$. Si A_1 y A_2 son conjuntos densos y G_δ, entonces $A_1 \cap A_2$ es un conjunto denso y G_δ.

Demostración. Supongamos que A_1 y A_2 son conjuntos densos y G_δ. Luego existen $\{(A_1)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{(A_2)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de conjuntos abiertos no vacíos tales que $A_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_1)_n$ y $A_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_2)_n$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Como $A_1 \subseteq (A_1)_n$ y A_1 es denso en X, se tiene que $(A_1)_n$ es un conjunto denso en X. Similarmente $(A_2)_n$ es un conjunto denso en X. Así, $(A_1)_n$ y $(A_2)_n$ son conjuntos abiertos, no vacíos y densos. Por el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.4.20), tenemos que $(A_1)_n \cap (A_2)_n \neq \emptyset$ y $(A_1)_n \cap (A_2)_n$ es un conjunto denso en X. Hemos probado que $\{(A_1)_n \cap (A_2)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos, no vacíos y densos. Nuevamente, del Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.4.20), obtenemos que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ((A_1)_n \cap (A_2)_n) \neq \emptyset,$$

y además, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}((A_1)_n \cap (A_2)_n)$ es un conjunto denso. Por lo tanto $A_1 \cap A_2$ es un conjunto denso y G_δ. □

Como consecuencia de la Proposición 3.3.3 y utilizando inducción matemática obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.4. . Sean X un espacio métrico y $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$. Si $A_1, \ldots, A_m$ son conjuntos densos y G_δ, entonces $\bigcap_{i=1}^m A_i$ es un conjunto denso y G_δ.

Recordemos que $Trans_f(X)$ es el conjunto de puntos transitivos de la Definición 1.4.16.

Proposición 3.3.5. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $Trans_f(X) \neq \emptyset$, entonces $Trans_f(X)$ es un conjunto G_δ.

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable[8] para la topología de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos:

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(U_n).$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es abierto y f es continua, se tiene que A_n es un conjunto abierto. Basta verificar que:

$$Trans_f(X) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Sean $x \in Trans_f(X)$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in U_n$. Esto implica que $x \in f^{-k}(U_n)$ y por tanto $x \in A_n$. Hemos probado que $Trans_f(X) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Ahora sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Veamos que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X. Sea U abierto no vacío en X. Luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subseteq U$. Como $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, en particular $x \in A_n$, por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-k}(U_n)$. Así, $f^k(x) \in U_n$ y por tanto $f^k(x) \in U$. Hemos probado que $x \in Trans_f(X)$. □

Definición 3.3.6. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:

[8]Todos los espacios compactos son segundo numerables. Es decir, existe una base numerable para la topolgía de X.

(1) *Uniformemente rígida* si la sucesión $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la identidad.

(2) *2-rígida* si cada punto de $X \times X$ es recurrente para $f^{\times 2}$.

Proposición 3.3.7. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es uniformemente rígida, entonces f es 2-rígida.

Demostración. Supongamos que f es uniformemente rígida. Sean $x, y \in X$. Veamos que (x, y) es recurrente para $f^{\times 2}$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Como f es uniformemente rígida, la sucesión $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la identidad. Así, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_k$:

$$d(f^n(z), z) < \frac{1}{k}, \text{para cada } z \in X.$$

En particular $d(f^{n_k}(x), x) < \frac{1}{k}$ y $d(f^{n_k}(y), y) < \frac{1}{k}$. Lo cual, implica que:

$$d_{X\times X}((f^{\times 2})^{n_k}(x, y), (x, y)) < \frac{1}{k}.$$

Si consideramos la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que $\lim_{k\to\infty}(f^{\times 2})^{n_k}(x, y) = (x, y)$. Lo cual, por la Proposición 1.3.4, implica que $(x, y) \in \omega((x, y), f^{\times 2})$. Esto es (x, y) es recurrente para $f \times f$. □

Proposición 3.3.8. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si existe un punto $x_0 \in X$ que sea estable y transitivo, entonces f es uniformemente rígida.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como x_0 es estable, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $y \in B(x_0, \delta_1)$, $d(f^n(y), f^n(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, ya que x_0 es un punto transitivo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x_0) \in B(x, \delta_1)$, así de lo anterior:

$$d(f^n(f^k(x_0)), f^n(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Sea $z \in X$. Como f^k es continua en z, existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $y \in B(z, \delta_2)$:

$$d(f^k(z), f^k(y)) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.6}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_2, \frac{\epsilon}{3}\}$. Nuevamente, dado que x_0 es un punto transitivo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x_0) \in B(z, \delta)$. Considerando la elección de δ y las desigualdades 3.5 y 3.6, se sigue que:

$$d(f^k(z), z) \leq d(f^k(z), f^k(f^{n_0}(x_0))) + d(f^k(f^{n_0}(x_0)), f^{n_0}(x_0)) + d(f^{n_0}(x_0), z)$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Hemos demostrado que para cada $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in X$, $d(f^k(z), z) < \epsilon$. De este modo, al hacer variar ϵ, podemos construir una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f^{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la identidad lo cual implica que f es uniformemente rígida. $\square$

Para empezar a hablar del comportamiento que siguen los puntos en un sistema caótico (en el sentido Li-Yorke), se distinguen ciertos tipos de relaciones que guardan unos puntos con otros. Esto se logra mediante relaciones binarias.

Definición 3.3.9. Sean X un espacio métrico, $R \subseteq X \times X$ una relación binaria sobre el conjunto X y $x \in X$. *La clase de* x es el conjunto denotado y definido por:

$$R(x) = \{y \in X | (x, y) \in R\}.$$

A continuación definimos las relaciones asintótica y proximal, que son mediante las cuales se define el caos Li-Yorke.

Definición 3.3.10. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se definen las relaciones binarias *Asintótica*(AR) y *Proximal*(PR) respectivamente como sigue:

$$AR = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{lím sup}_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

$$PR = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{lím ínf}_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

El resultado siguiente es una herramienta auxiliar para trabajar con las relaciones que hemos definido, pues nos permite pasar de trabajar con límites a trabajar con conjuntos de manera inmediata. La demostración es sencilla pero por la notación resulta extensa, por lo cual decidimos omitirla. La puede hallar en el Lema 2.1 de [28].

Lema 3.3.11. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los siguientes conjuntos, $A_{k,n} = \bigcap_{i=k}^{\infty}(f^{\times 2})^{-i}\mathrm{cl}(\Delta_n)$ y $A_{k,n}(x) = \bigcap_{i=k}^{\infty} f^{-i}\left(\bar{B}\left(f^i(x), \frac{1}{n}\right)\right)$. Se cumplen las siguientes proposiciones:

(1) $AR = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,n}\right)$.

(2) Para cada $x \in X$, $AR(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,n}(x)\right)$.

(3) $PR = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(f^{\times 2})^{-n}(\Delta_k)\right)$.

Del Lemma 3.3.11, podemos notar que tanto el conjunto $A_{k,n}$ como el conjunto $A_{k,n}(x)$, para cada x, son conjuntos cerrados en virtud de la continuidad de f.

Teorema 3.3.12. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple lo siguiente:

(1) Si f es 2-rígida, entonces $AR = \Delta$, es decir, $AR(x) = \{x\}$.

(2) Si f es sensible a las condiciones iniciales, entonces AR es de primera categoría en $X \times X$ y para cada $x \in X$, $AR(x)$ es de primera categoría en X.

Demostración. (1) Supongamos que f es 2-rígida. Es claro que $\Delta \subseteq AR$, pues AR es una relación reflexiva. Por otro lado, de la definición de función 2-rígida, cada $(x, y) \in X \times X$ es recurrente para $f^{\times 2}$. Sea $(x, y) \in X \times X$ con $x \neq y$. Así de la Proposición 1.3.4, existe una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales, tales que la sucesión $\{(f^{\times 2})^{n_k}(x, y)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a (x, y). Esto implica que:

$$\text{lím}_{k\to\infty} d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) = d(x, y) > 0.$$

Lo que a su vez implica que:

$$\text{lím sup}_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

De lo último se sigue que $(x, y) \notin AR$. Por lo tanto $AR = \Delta$.

(2) Supongamos que f es sensible a las condiciones iniciales. Sea δ la constante de sensibilidad de f y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n} < \delta$. Veamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in X$, $\text{int}(A_{k,n}(x)) = \emptyset$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Supongamos que $\text{int}(A_{k,n}(x)) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \text{int}(A_{k,n}(x))$, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subseteq A_{k,n}(x)$. Así, para cada $y, z \in B(x_0, \epsilon)$, se tiene que $y, z \in A_{k,n}(x)$, por lo cual, para cada $i \geq k$:

$$d(f^i(y), f^i(z)) \leq d(f^i(y), f^i(x)) + d(f^i(x), f^i(z)) \leq \frac{2}{n}. \tag{3.7}$$

Por otro lado, dado que las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^{k-1}$ son continuas en x_0, existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}$ tales que si $y \in B(x_0, \delta_i)$, entonces:

$$d(f^i(y), f^i(x_0)) < \frac{1}{n}, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k-1\}. \tag{3.8}$$

Hacemos $\epsilon^* = \text{mín}\{\epsilon, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}\}$. Así, de (3.7) y (3.8) se tiene que:

$$d(f^i(y), f^i(z)) \leq \frac{2}{n} < \delta, \text{ para cada } i \in \mathbb{N},$$

lo cual contradice la definición de la constante de sensibilidad δ. Por lo tanto, $\text{int}(A_{k,n}(x)) = \emptyset$, para cada $k \in \mathbb{N}$. De esto último podemos inferir que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\text{int}(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_{k,n}(x))) = \emptyset$. Además, recordemos que $A_{k,n}(x)$ es un conjunto cerrado, por lo cual el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_{k,n}(x))$ es también cerrado. Por lo que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_{k,n}(x))$ es un conjunto denso en ninguna parte. Así, del Lema 3.3.11, se tiene que $AR(x)$ es un conjunto de primera categoría.

De (1) y (2) concluimos la prueba. □

Como consecuencia del Teorema 3.3.12 tenemos el siguiente resultado, en donde se relacionan los conceptos vistos en el Capítulo 2 con los conceptos aquí presentados.

Corolario 3.3.13. Sea (X, f) un sistema dinámico con X infinito. Si f es transitiva, entonces AR es de primera categoría en $X \times X$ y para cada $x \in X$, $AR(x)$ es de primera categoría en X.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Tenemos dos casos:

Caso (1): La función f es sensible a las condiciones iniciales. En este caso del Teorema 3.3.12, parte (2), se tiene el resultado de manera inmediata.

Caso (2): La función f no es sensible a las condiciones iniciales. En este caso, del Teorema 2.4.2, existe un punto $x \in X$, que es estable y transitivo. Así, de la Proposición 3.3.8, se tiene que f es uniformemente rígida. Esto último, por la Proposición 3.3.7, implica que f es 2-rígida. Así, nuevamente por el Teorema 3.3.12, parte (1) , $AR = \Delta$. Luego, AR es un conjunto cerrado con interior vacío, por lo cual es un conjunto de primera categoría.

De los Casos (1) y (2) concluimos la prueba. □

Otro resultado que es consecuencia del Teorema 3.3.12, es el que enunciamos a continuación. La demostración se puede hallar en [28].

Corolario 3.3.14. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $\{AR(x) : x \in X\}$ es numerable, entonces $R(f) \subseteq Per(f)$ y $Per(f)$ es numerable. Como consecuencia la entropía topológica de f es cero.

Definición 3.3.15. Sea (X, f) un sistema dinámico. Un par $(x, y) \in X \times X$ es llamado *par scrambled* si $(x, y) \in PR$ y $(x, y) \notin AR$. Definimos la *relación scrambled* (SCR) como:

$$SCR = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \in PR \text{ y } (x, y) \notin AR\}.$$

Esto es, $(x, y) \in SCR$ si y sólo si:

$$\text{lím ínf}_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \text{ y lím sup}_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

De la Definición 3.3.15, podemos inferir de manera natural lo siguiente:

Proposición 3.3.16. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se cumple que:

$$SCR(x) = PR(x) \setminus AR(x).$$

Definición 3.3.17. Sean (X, f) un sistema dinámico y $C \subseteq X$. El conjunto C es llamado *scrambled* si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in C$, se tiene que (x, y) es un par scrambled.

De acuerdo a la definición de conjunto scrambled, dicho conjunto o bien es vacío, o bien contiene al menos dos puntos. Además, vale la pena mencionar que la terminología "conjunto scrambled" fue introducida en 1983 por Smítal [49].

Definición 3.3.18. El sistema dinámico (X, f) es *caótico Li-Yorke* si existe un conjunto scrambled en X que sea no numerable.

De la Definición 3.3.18, es evidente que para poder hablar de caos Li-Yorke en un sistema dinámico (X, f), es necesario que el espacio X sea más que numerable. Ahora veamos que el caos Li-Yorke es una propiedad dinámica.

Teorema 3.3.19. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados mediante el homeomorfismo $\phi : X \to Y$. Si (X, f) es caótico Li-Yorke, entonces (Y, g) es caótico Li-Yorke.

Demostración. Supongamos que (X, f) es caótico Li-Yorke. Luego, existe un conjunto $S \subseteq X$ tal que es scrambled y no numerable. Veamos que $\phi(S) \subseteq Y$ es un subconjunto scrambled. Sean $z, w \in \phi(S)$. Como ϕ es un homeomorfismo, $\phi^{-1}(z), \phi^{-1}(w) \in S$. Luego:

$$\text{lím ínf}_{n\to\infty} d_X(f^n(\phi^{-1}(z)), f^n(\phi^{-1}(w))) = 0$$

y

$$\text{lím sup}_{n\to\infty} d_X(f^n(\phi^{-1}(z)), f^n(\phi^{-1}(w))) > 0.$$

Nuevamente, dado que ϕ es un homeomorfismo y considerando que $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$:

$$\text{lím ínf}_{n\to\infty} d_Y(g^n(z), g^n(w)) = \text{lím ínf}_{n\to\infty} d_Y((\phi \circ f^n \circ \phi^{-1})(z)), (\phi \circ f^n \circ \phi^{-1})(w)) = 0$$

y

$$\text{lím sup}_{n\to\infty} d_Y(g^n(z), g^n(w)) = \text{lím sup}_{n\to\infty} d_Y((\phi \circ f^n \circ \phi^{-1})(z)), (\phi \circ f^n \circ \phi^{-1})(w)) > 0.$$

Por lo tanto, (z, w) es un par scrambled. Lo que prueba que $\phi(S)$ es un subconjunto scrambled. Además ya que S es no numerable, $\phi(S)$ también lo es. Por lo tanto (Y, g) es caótico Li-Yorke. $\square$

Mencionamos algunos resultados que se tienen únicamente para sistemas dinámicos en el intervalo I. En [35], Li y Yorke demostraron lo siguiente.

Teorema 3.3.20. Si una función continua $f : I \to I$ tiene un punto periódico de periodo 3, entonces f es caótica Li-Yorke.

Teorema 3.3.21. Sea $f : I \to I$ una función continua. Luego, f tiene entropía topológica positiva si y sólo si para algún $n > 0$, el sistema dinámico (I, f^n) tiene un subconjunto scrambled que sea no numerable e invariante.

La definición original de caos Li-Yorke [35], incluía que la función f tuviera puntos de todos los periodos. Sin embargo, posteriormente en [4], se probó que esto era una consecuencia de la existencia del conjunto scrambled.

Teorema 3.3.22. Si una función continua $f : I \to I$ es caótica Li-Yorke, entonces tiene puntos periódicos de todos los periodos.

3.3.1 El conjunto de Cantor

Ahora presentamos la construcción del conjunto de Cantor, para ello requerimos construir una sucesión $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de intervalos. Sea $C_0 = I$. Para construir el intervalo C_1 primero partimos el intervalo C_0 en tres partes "iguales" del siguiente modo.

$$C_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Para obtener el siguiente intervalo, removemos el "tercio de en medio", al que llamamos $A_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Así el siguiente intervalo queda:

$$C_1 = C_0 \setminus A_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

el cual es la unión de dos intervalos ajenos y compactos de longitud $\frac{1}{3}$ cada uno.

Para el conjunto C_2, de cada uno de los intervalos de C_1 removemos el "tercio de en medio", es decir el conjunto $A_1 = (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2})$. Luego el conjunto queda como la unión de cuatro intervalos compactos de longitud $\frac{1}{3^2}$ cada uno:

$$C_2 = C_1 \setminus A_1 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right].$$

En general, dado $k \in \mathbb{N}$ para construir el conjunto C_k removemos el "tercio de en medio" de cada uno de los 2^{k-1} intervalos de C_{k-1}, el cual es un conjunto abierto de la forma $(\frac{m}{3^k}, \frac{m+1}{3^k})$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Llamamos A_{k-1} a la unión de los 2^{k-1} intervalos abiertos y finalmente definimos:

$$C_k = C_{k-1} \setminus A_{k-1}.$$

Así, el conjunto C_k es la unión de 2^k intervalos compactos, cada uno de longitud $\frac{1}{3^k}$.

Definición 3.3.23. Dado un espacio métrico X, $C \subseteq X$ es un *conjunto de Cantor* si C es homeomorfo al subconjunto de $\mathbb{R}$ que se define como sigue:

$$C^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Considerando que para cada $k \in \mathbb{N}$, $C_{k+1} \subseteq C_k$ y $C_k = C_{k-1} \setminus A_{k-1}$ es sencillo convencerse de que:

$$C^* = I \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \text{lím}_{k\to\infty} C_k.$$

Una de las primeras propiedades interesantes del conjunto C^* es su cardinalidad. Es sencillo convencerse de que tiene cardinalidad infinita considerando que para cada $k \in \mathbb{N}$, los extremos de los 2^k intervalos compactos de C_k son también elementos de C^*, es decir, las sucesiones $\{\frac{1}{3^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{1 - \frac{1}{3^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ están contenidas en C^*. Sin embargo, lo que ya no es tan sencillo de demostrar y que incluso para algunos suena paradógico, es que el conjunto C^* tiene tantos elementos como $\mathbb{R}$.

Proposición 3.3.24. La cardinalidad del conjunto de un conjunto de Cantor es la misma que la de $\mathbb{R}$.

La demostración de la Proposición 3.3.24, se puede encontrar en la Proposición 6.3 de [31]. En este texto la omitimos por la complejidad de la construcción de la función que se utiliza.

Desde el punto de vista topológico, el conjunto de Cantor tiene propiedades muy interesantes. Una de ellas es la de ser un conjunto perfecto, que recordemos que significa que es un conjunto que no contiene puntos aislados, o bien, que todos sus puntos son puntos de acumulación. Sin embargo, es también un conjunto totalmente disconexo, es decir, un conjunto en el que cada componente conexa está formada únicamente por un punto. Resumiendo tenemos el siguiente resultado, cuya prueba se puede hallar en la Proposición 6.4 de [31].

Proposición 3.3.25. El conjunto de Cantor es compacto, perfecto y totalmente disconexo.

3.3.2 Caos Li-Yorke y entropía

Esta sección la dedicamos a analizar la relación que existe entre las dos formas de caos que hemos visto hasta ahora: entropía topológica positiva y caos Li-Yorke.

Definición 3.3.26. Sean (X, f) un sistema dinámico y $K \subseteq X$. Se dice que K es un conjunto de *Mycielski* si es de la forma:

$$K = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,$$

donde para cada $j \in \mathbb{N}$, C_j es un conjunto de Cantor.

Ya que un conjunto de Mycielski es una unión infinita de conjuntos de cantor, en particular contiene un conjunto de Cantor. Así, de la Proposición 3.3.24, podemos inferir que un conjunto de Mycielski es no numerable.

Proposición 3.3.27. La cardinalidad de un conjunto de Mycielski es la misma que la de $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado es fundamental para los propósitos de esta sección. Sin embargo, no presentamos la demostración, pues la teoría requerida para ello se sale de los alcances de nuestro trabajo. La demostración se encuentra en el Teorema 2.3 de [10].

Lema 3.3.28. Sea (X, f) un sistema dinámico tal que $h_{top}(f) > 0$. Si μ es una medida f-invariante con $h_{\mu}(f) > 0$ y $Z = supp(\mu)$, entonces para cada subconjunto abierto U de X que cumpla que $U \cap Z \neq \emptyset$, existe un conjunto de Mycielski $K \subseteq U$ que es un conjunto scrambled.

Por último presentamos el resultado que nos dice que un sistema que tiene entropía topológica positiva es siempre caótico Li-Yorke. Es importante mencionar que para la demostración de este resultado es fundamental el Principio variacional.

Teorema 3.3.29. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $h_{top}(f) > 0$, entonces (X, f) es caótico Li-Yorke.

Demostración. Supongamos que $h_{top}(f) > 0$. Por el Principio variacional (Teorema 3.2.19):

$$h_{top}(f) = \sup\{h_{\mu}(f) | \mu \in M(X, f)\}.$$

Por lo cual, existe $\mu \in M(X, f)$ tal que $h_{\mu}(f) > 0$. Sea $Z = supp(\mu)$. Así, por el Lema 3.3.28, considerando que X es un conjunto abierto en X, existe un conjunto $K \subseteq X$ tal que K es un conjunto de Mycielsky que es scrambled. Luego, de la Proposición 3.3.27, se tiene que K es no numerable. Por lo tanto (X, f) es caótico Li-Yorke. $\square$

Capítulo 4

Caos en sistemas transitivos

Inefable el desconcierto
serendipia al intentar
este universo hacer nuestro
más nos debemos resignar.

En este capítulo presentamos tres tipos de caos, el caos Auslader-Yorke, el caos Wiggins y el caos Devaney, todos ellos con la característica común de la transitividad. Analizamos algunas de sus propiedades de manera individual. Posteriormente, mostramos cuales son las relaciones que existen entre estos tres tipos de caos, el caos Li-Yorke y la entropía topológica positiva, de manera general en sistemas dinámicos definidos en espacios métricos compactos. Finalmente, revisamos las relaciones que existen si nos restringimos únicamente a sistemas dinámicos en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Nombrar un nuevo concepto al momento de comenzar a estudiarlo, es fundamental para distinguirlo de los demás y darle su propia importancia. En matemáticas no es la excepción, pues cada vez que se estudia un nuevo concepto o noción se comienza por darle un nombre. Algunas veces este nombre se toma prestado de algún concepto coloquial por su parecido conceptual. Otras veces es nombrado en honor al primer matemático en estudiarle. Sin embargo, con el caos en matemáticas ocurrió algo distinto. El concepto de caos ya existía mucho antes de que se le estudiara matemáticamente, aunque de manera muy vaga, pues el concepto en sí se entendía como confusión o desorden total. Incluso, desde la época antigua, en un sentido religioso, se concebía al caos como aquello que existió antes de la creación, antes del órden. Gracias a la vaguedad de este concepto en su propia concepción, fue imposible darle una definición conceptual certera. Sólo se sabía que era algo que tenía presencia en el universo pero no se sabía cómo ni porqué.

Fue en el año de 1889, cuando el matemático francés Henry Poincaré, tuvo un primer acercamiento a lo que podía ser el caos en matemáticas, al resolver el problema de los 3 cuerpos [41], planteado por Newton. Pese a las características del sistema que estudió, no lo nombró como sistema caótico y su trabajo respecto a ello quedó en el olvido. Hasta 1963, cuando Edward Lorenz dio visibilidad a los sistemas dinámicos caóticos, como sistemas que surgen de manera natural en fenómenos físicos, fue que el estudio del caos se incrementó considerablemente. Esto dio pie al nacimiento de toda una teoría matemática: los sistemas dinámicos.

En este andar del saber científico, han existido muchos matemáticos que han contribuido con sus ideas y estudios a tratar de desentrañar los misterios del caos. Sin embargo, al ser un concepto tan ambiguo en su significado e interpretación, ha sido difícil llegar a un acuerdo al momento de estudiarlo matemáticamente. La razón de fondo es que ante la presencia de un sistema "aparentemente" caótico, se realizan observaciones y se rescatan de manera abstracta, las características fundamentales que el sistema posee y es lo que se vuelve una concepción particular del caos. Es por ello, que en el terrreno de las matemáticas, podemos decir que existen tantas definiciones de caos, como tantos matemáticos le han estudiado. También es por eso que los tipos de caos llevan el nombre de los primeros matemáticos en estudiarlos.

En este trabajo nos hemos centrado en los tipos de caos que en la literartura son los más populares. Sin embargo, existen muchos otros, como el ω-caos [34], el caos Block-Coppel [4], el caos uniforme [33], por mencionar algunos.

La mayoría de las definiciones de caos se basan en las siguientes ideas:

(1) Imprediccíón del comportamiento de las trayectorías de los elementos del sistema.

(2) Crecimiento veloz de las diferentes órbitas periódicas.

(3) Sensibilidad a los errores de aproximación en las condiciones iniciales al hacer simulaciones.

Las definiciones de caos presentadas en este capítulo son agrupaciones o combinaciones de algunas nociones presentadas en capítulos anteriores, como son la transitividad, la sensibilidad a las condiciones iniciales o cierto comportamiento en los puntos periódicos del sistema. Es importante mencionar antes de comenzar con las defninciones y resultados, que durante este capítulo un sistema dinámico (X, f) es considerado con X un espacio métrico compacto y perfecto y f una función continua.

4.1 Sistemas dinámicos tipo transitivos

Todos los tipos de caos presentados en este capítulo incluyen a la transitividad como característica. Es por ello que comenzamos con algunos resultados que relacionan la compacidad con la transitividad y otros conceptos útiles.

El Corolario 1.4.22, nos muestra las propiedades del espacio X bajo las cuales en el sistema dinámico (X, f), la transitividad y la existencia de órbitas densas son nociones equivalentes. Estas condiciones son que el espacio sea perfecto, completo y separable. Sin embargo, la Proposición 3.1.3, nos dice que todo espacio métrico compacto es completo y separable. Por lo cual, del Corolario 1.4.22, podemos inferir el siguiente resultado.

Proposición 4.1.1. Sea (X, f) un sistema dinámico, con X un espacio métrico compacto y perfecto. Existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X si y sólo si f es una función transitiva.

Considerando que en este capítulo un sistema dinámico (X, f) es considerado con X un espacio métrico compacto y perfecto y f una función continua, de la Proposición 4.1.1, se tiene que la transitividad y la existencia de órbitas densas son conceptos equivalentes a lo largo de este capítulo. Otra propiedad que cumplen los sistemas transitivos en espacios compactos es la siguiente.

Teorema 4.1.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es transitiva, entonces es sobreyectiva.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Como f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(X) \cap U \neq \emptyset$. Y dado que $f^k(X) \subseteq f(X)$, se tiene que $f(X) \cap U \neq \emptyset$, lo que prueba que $f(X)$ es un conjunto denso en X, es decir $\mathrm{cl}(f(X)) = X$. Sea $y \in X$, luego $y \in \mathrm{cl}(f(X))$. Por lo que existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $f(X)$ que converge a y. Como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en $f(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como X es un espacio compacto, de la Proposición 3.1.3, parte (2), la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Sea $x \in X$ el límite de tal subsucesión. Por la continuidad de f, $f(x) = y$. Por lo tanto, f es sobreyectiva. □

Otra característica importante que se da en virtud de la compacidad del espacio, es que el conjunto omega límite es siempre un conjunto no vacío para cualquier punto.

Proposición 4.1.3. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si X es compacto, entonces $\omega(x, f) \neq \emptyset$, para cada $x \in X$.

Demostración. Supongamos que X es compacto. Sea $x \in X$, como X es compacto, de la Proposición 3.1.3, parte (2), la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente. Sea $y \in X$ el límite de dicha subsucesión. Por la Proposición 1.3.4 obtenemos que $y \in \omega(x, f)$, lo que prueba que $\omega(x, f) \neq \emptyset$. □

4.1.1 Caos Auslander-Yorke

Presentamos el primer tipo de caos de este capítulo. En 1980 en su artículo *Interval maps, factor maps and chaos* [5], J. Auslander y J. A. Yorke definen un tipo de caos como transitividad más inestabilidad puntual en todos los puntos. Más adelante, este tipo de caos sería llamado Caos Auslander-Yorke.

Definición 4.1.4. Un sistema dinámico (X, f) es *caótico Auslander-Yorke* si X contiene un punto transitivo y para cada $x \in X$, x es inestable.

Analicemos de manera intuitiva un sistema dinámico caótico Auslander-Yorke. Por un lado tenemos que el espacio contiene un punto transitivo, es decir, un punto que genera una órbita densa. Debido a que estamos en espacios compactos, de la Proposición 4.1.1, podemos inferir que se trata de un sistema transitivo. Esto nos indica que los puntos de cualquier abierto, recorrerán eventualmente, cualquier parte del espacio. Además, un sistema dinámico caótico Auslander-Yorke es también un sistema en el cual todos sus puntos son inestables. Esto nos dice que si queremos realizar predicciones partiendo desde cualquier condición inicial, si existen errores, estos se propagarán dando posiblemente resultados imprecisos. Recapitulando, un sistema dinámico caótico Auslander-Yorke, es un sistema en el cual:

(1) Existe una órbita que recorre casi todo el espacio, o bien, los puntos de cualquier abierto visitarán eventualmente todo el espacio.

(2) Cada punto presenta sensibilidad a errores iniciales en las predicciones.

Ahora veamos algunas de las propiedades de los sistemas caóticos Auslander-Yorke. Comencemos por conocer que este tipo de comportamiento caótico es una propiedad dinámica.

Teorema 4.1.5. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados bajo el homeomorfismo $\phi : X \to Y$. Si (X, f) es caótico Auslander-Yorke, entonces (Y, g) es caótico Auslander-Yorke.

Demostración. Como (X, f) es caótico Auslander-Yorke, de la Proposición 4.1.1, es también un sistema transitivo. Así, por el Teorema 1.4.6, deducimos que (Y, g) es transitivo. Con lo cual nuevamente de la Proposición 4.1.1, nos dice que existe un punto transitivo. Por otro lado, para cada $x \in X$, x es inestable en X, por lo que del Corolario 2.1.8, $\phi(x)$ es inestable en Y para cada $x \in X$. Ya que ϕ es un homeomorfismo, esto implica que para cada $y \in Y$, y es inestable en Y. Por lo tanto (Y, g) es caótico Auslander-Yorke. $\square$

Presentamos a continuación un resultado que nos brinda condiciones suficientes para que un sistema sea caótico Auslander-Yorke.

Teorema 4.1.6. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es minimal y X contiene al menos un punto inestable, entonces (X, f) es caótico Auslander-Yorke.

Demostración. Supongamos que f es minimal y que X contiene un punto inestable. Como (X, f) es minimal, de la Proposición 1.4.27, tenemos que (X, f) es transitivo.

Así, de la Proposición 4.1.1, se tiene que X contiene un punto transitivo. Además, considerando que X contiene un punto inestable, del Teorema 2.1.10, parte (2), se tiene que todos los puntos del sistema son inestables. Por lo tanto (X, f) es caótico Auslander-Yorke. □

4.1.2 Caos Devaney

Ahora pasemos al tipo de caos más popular en la literatura de sistemas dinámicos discretos; el caos Devaney. En 1989, R.L. Devaney, en su libro *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* [16], definió los sistemas caóticos considerando tres aspectos; transitividad, sensibilidad a las condiciones iniciales y un comportamiento muy específico en el conjunto de puntos periódicos.

Definición 4.1.7. Sean (X, f) un sistema dinámico. Se dice que (X, f) es *caótico Devaney* si se cumplen las siguientes tres propiedades para la función f:

(1) Es transitiva.

(2) Es sensible a las condiciones iniciales.

(3) El conjunto $Per(f)$ es denso en X.

Si analizamos de manera intuitiva los sistemas caóticos Devaney, tenemos en primer lugar a la transitividad, que nos provee de cierta uniformidad en el comportamiento de los puntos, pues los puntos de cualquier abierto recorrerán eventualmente todo el espacio. Por otro lado, sensibilidad a las condiciones iniciales que es inestabilidad en todos los puntos y más aún, inestabilidad uniforme de acuerdo a la constante de sensibilidad del sistema. Estas dos nociones, aunque de un modo ligeramente distinto, son incluidas en el caos Auslander-Yorke. Sin embargo, en el caos Devaney, además, el conjunto de puntos periódicos es un conjunto denso. Esto nos dice que tan cerca como queramos de cualquier parte del espacio podemos hallar un punto periódico.

El caos Devaney ha sido uno de los más estudiados. En 1992 Banks, Brooks, et. al. en el artículo *On Devaney's definition of Chaos* [6], demostraron el siguiente resultado:

Teorema 4.1.8. Sean (X, f) un sistema dinámico. Si f es transitiva y el conjunto $Per(f)$ es denso en X, entonces f es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Supongamos que f es transitiva y el conjunto $Per(f)$ es denso en X. Sean $q_1, q_2 \in Per(f)$, tales que $q_1 \notin \mathcal{O}(q_2, f)$. Luego, por la Proposición 1.2.29, las órbitas de q_1 y q_2 son conjuntos disjuntos. Más aún, son conjuntos finitos, por lo cual $\mathcal{O}(q_1, f)$ y $\mathcal{O}(q_2, f)$ son conjuntos cerrados. Pongamos $\delta_0 = d(\mathcal{O}(q_1, f), \mathcal{O}(q_2, f))$, luego $\delta_0 > 0$.

Veamos que f es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{\delta_0}{8}$. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Ahora pongamos $U = B(x, \epsilon) \cap B(x, \delta)$. Luego U es un conjunto abierto no vacío en X. Como $Per(f)$ es un conjunto denso en X, $Per(f) \cap U \neq \emptyset$. Sea $p \in Per(f) \cap U$ y sea $n \in \mathbb{N}$ el periodo de p. Por otro lado:

$$d(\mathcal{O}(q_1, f), \mathcal{O}(q_2, f)) \leq d(\mathcal{O}(q_1, f), x) + d(x, \mathcal{O}(q_2, f)),$$

por lo cual debe ocurrir que $d(\mathcal{O}(q_1, f), x) > \frac{\delta_0}{2}$ o bien $d(x, \mathcal{O}(q_2, f)) > \frac{\delta_0}{2}$. Lo cual prueba que existe $q \in Per(f)$ tal que $d(\mathcal{O}(q, f), x) > \frac{\delta_0}{2} = 4\delta$. Sea:

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(B(f^i(q), \delta)).$$

Se tiene que V es no vacío, pues $q \in V$ y ya que f es continua V es abierto. Como f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(V) \cap U \neq \emptyset$. Sea $y \in V$ tal $f^k(y) \in U$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq nj - k \leq n$. Luego $f^{n_j}(y) = f^{n_j - k}(f^k(y))$. Así $f^{n_j}(y) \in f^{n_j - k}(f^k(V))$, con lo que

$$f^{n_j}(y) \in B(f^{n_j - k}(q), \delta). \tag{4.1}$$

Por otro lado, $f^{n_j}(p) = p$. Con esto y la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(f^{n_j}(p), f^{n_j}(y)) &= d(f^{n_j}(y), p) \\
&\geq d(f^{n_j}(y), x) - d(x, p) \\
&= d(x, f^{n_j}(y)) - d(x, p) \\
&\leq d(x, f^{n_j - k}(q)) - d(f^{n_j - k}(q), f^{n_j}(y)) - d(x, p).
\end{aligned}$$

Dado que $p \in U$, $d(x, p) < \delta$. Además del punto (4.1), obtenemos que $f^{n-j}(y) \in$

$B(f^{n_j-k}(q),\delta)$ y por último, por la elección de q, $d(\mathcal{O}(q,f),x) > 4\delta$. De aquí que:

$$d(f^{n_j}(p), f^{n_j}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Nuevamente, por la desigualdad del triángulo, se cumple que $d(f^{n_j}(p), f^{n_j}(x)) > \delta$ o bien $d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)) > \delta$. En cualquier caso, hemos encontrado un punto cuya n_j-ésima iteración está a distancia mayor que δ de $f^{n_j}(x)$. Esto prueba que f es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad δ. $\square$

El Teorema 4.1.8, nos dice que podemos reformular la definición de caos Devaney, puesto en la Definición 4.1.7, los puntos (1) y (3) implican el punto (2). Una de las ventajas de este resultado es que nos da pie a generalizar la noción de caos Devaney a espacios topológicos en general, pues al eliminar a la sensibilidad a las condiciones iniciales, no se requiere de la métrica. Además, la densidad del conjunto $Per(f)$ y la transitividad se pueden definir sin ningún problema en espacios topológicos (vea [43]). Sin embargo, pese a ello y aunque el Teorema 4.1.8, fue publicado en 1992, hasta la fecha, en la mayoría de los textos (como [31, 33]), para espacios métricos se sigue definiendo al caos Devaney de la misma forma que en la Definición 4.1.7. A pesar de ello, el conocer este resultado nos facilita las cosas al momento de verificar si un sistema es caótico Devaney, pues son menos propiedades las que hay que validar. Respetando las convenciones encontradas en la literatura, enunciamos esta nueva definición como una caracterización del caos Devaney.

Teorema 4.1.9. Sea (X,f) un sistema dinámico. Se cumple que, (X,f) es caótico Devaney si y sólo si f es transitiva y el conjunto $Per(f)$ es denso en X.

Recordemos que una de las características que es fundamental verificar, es si el caos Devaney es una propiedad dinámica. Para ello, veamos primero qué sucede con los puntos periódicos bajo la conjugación topológica.

Proposición 4.1.10. Sean (X,f) y (Y,g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados bajo el homeomorfismo $\phi : X \to Y$. Si $x \in Per(f)$, entonces $\phi(x) \in Per(g)$ y además x y $\phi(x)$ tienen el mismo periodo.

Demostración. Sea $x \in Per(f)$ y sea k el periodo de x. Considerando que $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ tenemos que:

$$g^k(\phi(x)) = (\phi \circ f^k \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = \phi(f^k(x)) = \phi(x).$$

Por lo tanto, $\phi(x) \in Per(g)$. Ahora veamos que k es el periodo de $\phi(x)$. Si $k = 1$ el resultado se obtiene de la igualdad anterior. Si $k > 1$, tomamos $1 \leq r < k$. Luego $f^r(x) \neq x$, pues k es el periodo de x. Así:

$$g^r(\phi(x)) = (\phi \circ f^r \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = \phi(f^r(x)) \neq \phi(x).$$

Por lo que k es el periodo de $\phi(x)$. $\square$

A continuación presentamos el resultado que nos dice que en efecto, el ser caótico Devaney es una propiedad dinámica.

Teorema 4.1.11. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados bajo el homeomorfismo $\phi : X \to Y$. Si (X, f) es caótico Devaney, entonces (Y, g) es caótico Devaney.

Demostración. Supongamos que (X, f) es caótico Devaney. En particular se tiene que (X, f) es un sistema transitivo. Así, del Teorema 1.4.6, se obtiene que (Y, g) es un sistema transitivo. Por otro lado, se cumple que $Per(f)$ es un conjunto denso en X. Veamos que $Per(g)$ es denso en Y. Sean $y \in Y$ y $\epsilon > 0$. Como ϕ es continua en $\phi^{-1}(y)$, existe $\delta > 0$ tal que $\phi(B(\phi^{-1}(y), \delta)) \subseteq B(y, \epsilon)$. Por otra parte, considerando que $Per(f)$ es un conjunto denso en X, existe $z \in Per(f)$ tal que $z \in B(\phi^{-1}(y), \delta)$, luego $\phi(z) \in B(y, \epsilon)$. Sin embargo, de la Proposición 4.1.10, $\phi(z) \in Per(g)$, lo cual prueba que $Per(g)$ es un conjunto denso en Y. Por lo tanto, (Y, g) es transitivo y $Per(g)$ es denso en Y, así del Teorema 4.1.9, concluimos que (Y, g) es caótico Devaney. $\square$

4.1.3 Caos Wiggins

Pasemos al último tipo de caos en la lista de caos en sistemas transitivos. En 2003, Wiggings en su libro *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* [53], formuló una noción de caos como sigue:

Definición 4.1.12. Un sistema dinámico (X, f) es llamado *caótico Wiggins* si existe un subsistema (X_1, f_1) de (X, f) de tal forma que (X_1, f_1) es transitivo y sensible a las condiciones iniciales.

Recordemos que el subsistema (X_1, f_1) de la Definición 4.1.12, es tal que $X_1 \subseteq X$ es un conjunto cerrado en X, +invariante y $f_1 = f|_{X_1}$. También recordemos que todo sistema se puede ver como subsistema de sí mismo. Por lo cual tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1.13. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es transitivo y sensible a las condiciones iniciales, entonces (X, f) es caótico Wiggins.

Para mostrar que el caos Wiggins es una propiedad dinámica, requerimos primero saber si la sensibilidad a las condiciones iniciales lo es.

Teorema 4.1.14. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados bajo el homeomorfismo $\phi : X \to Y$. Si (X, f) es sensible a las condiciones iniciales, entonces (Y, g) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Supongamos que (X, f) es sensible a las condiciones iniciales. Sea $\delta > 0$ la constante de sensibilidad de (X, f). Como Y es un espacio métrico compacto, de la Proposición 3.1.3, parte (4), la función ϕ^{-1} es una función uniformemente continua. Por lo cual, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\text{si } d(v, w) < \delta_1, \text{ entonces } d(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(w)) < \delta. \tag{4.2}$$

Pongamos $\delta^* = \frac{\delta_1}{2} > 0$. Veamos que (Y, g) es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad δ^*. Sean $y \in Y$ y $\epsilon > 0$. Como ϕ es continua en $\phi^{-1}(y)$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\text{si } d(\phi^{-1}(y), x) < \delta_2, \text{ entonces } d(y, \phi(x)) < \epsilon. \tag{4.3}$$

Como (X, f) es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta > 0$, existen $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(\phi^{-1}(y), x) < \delta_1$ y $d(f^n(\phi^{-1}(y)), f^n(x)) > \delta$.

Del contrarecíproco de (4.2), tenemos que $d((\phi \circ f^n \circ \phi^{-1})(y), (\phi \circ f^n)(x)) > \delta_1$. Pero $\phi \circ f^n \circ \phi^{-1} = g^n$, por lo cual:

$$d(g^n(y), g^n(\phi(x))) > \delta_1. \tag{4.4}$$

Además, dado que $d(\phi^{-1}(y), x) < \delta_1$, de (4.3), obtenemos que:

$$d(y, \phi(x)) < \epsilon. \tag{4.5}$$

De (4.4) y (4.5) obtenemos que (Y, g) es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad δ^*. □

Ahora pasemos a verificar que el caos Wiggins es también una propiedad dinámica.

Teorema 4.1.15. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados bajo el homeomorfismo $\phi : X \to Y$. Si (X, f) es caótico Wiggins, entonces (Y, g) es caótico Wiggins.

Demostración. Supongamos que (X, f) es caótico Wiggins. Luego, existe un subsistema (X_1, f_1) de (X, f), tal que (X_1, f_1) es transitivo y sensible a las condiciones iniciales. Sea $Y_1 = \phi(X_1)$. Se tiene que X_1 es un conjunto cerrado en X y +invariante con respecto a f. Así, dado que ϕ es un homeomorfismo, Y_1 es un conjunto cerrado en Y y +invariante con respecto a g. Veamos que $(Y_1, g|_{Y_1})$ es un sistema transitivo y sensible a las condiciones iniciales. Notemos que:

$$f_1 = f|_{X_1} = (\phi|_{X_1})^{-1} \circ g|_{Y_1} \circ \phi|_{X_1}.$$

Luego (X_1, f_1) y (Y_1, g_1) son topológicamente conjugados bajo el homeomorfismo $\phi|_{X_1} : X_1 \to Y_1$. Como (X_1, f_1) es transitivo y sensible a las condiciones iniciales, del Teorema 1.4.6 y el Teorema 4.1.14, se tiene que $(Y_1, g|_{Y_1})$ es transitivo y sensible a las condiciones iniciales. Por lo tanto, (Y, g) es caótico Wiggins. □

4.2 Relaciones entre caos

Como hasta ahora hemos visto, a lo largo de los años han surgido distintas definiciones formales, en el sentido matemático, de lo que significa para un sistema ser caótico. Lo cual ha creado cierta confusión en la literatura matemática actual, pues en un artículo científico, al encontrarnos con la palabra caos, no siempre se hará referencia al mismo concepto. Fruto de esta confusión, existen algunas preguntas que surgen de manera natural. Por ejemplo ¿Qué tipo de relaciones guardan las distintas nociones existentes de caos entre sí? o de manera más específica ¿Existe alguna más general, que abarque todos los posibles comportamientos descritos en los distintos tipos de caos? Esto último permitiría acercarnos a una definición ideal y única de lo que es el caos en matemáticas. Sin embargo, basta fijarnos en la interpretación intuitiva de los conceptos que hasta ahora hemos visto, para darnos cuenta que esto tiene muy pocas esperanzas de ocurrir.

Para empezar, la transitividad y la existencia de órbitas densas sólo son equivalentes si nos restringimos a un tipo específico de espacios. Aún si nos restringimos, las definiciones de caos según Auslander-Yorke, Wiggins y Devaney, en virtud de la transitividad, tienen cierta uniformidad en cuanto a la concepción del caos, que la entropía positiva y el caos Li-Yorke no poseen. La entropía positiva y el caos Li-Yorke se pueden interpretar como cierta cantidad de caos o como caos acumulado en algún lugar del espacio. Mientras que los caos Auslander-Yorke, Wiggins y Devaney representan comportamiento caótico por todos lados.

A pesar de estas aparentes diferencias, resulta de suma utilidad conocer de manera específica las relaciones que existen entre estos conceptos, para responder de forma certera las preguntas que hemos planteado. Dedicamos el resto del capítulo a esta tarea. Cabe mencionar que todo lo desarrollado en los capítulos anteriores, es fundamental para los próximos resultados, por lo cual sugerimos al lector proceder con paciencia a las referencias de los resultados de otros capítulos, para así poder comprender mejor las demostraciones presentadas.

4.2.1 Relaciones en espacios métricos compactos

En esta subsección analizamos las relaciones que existen entre los tipos de caos que hemos presentado; el caos Auslander-Yorke, el caos Devaney, el caos Wiggins, el caos Li-Yorke y la entropía topológica positiva en un sistema. Todas estas relaciones se consideran en un sistema dinámico (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y perfecto y f una función continua. Comencemos con las más sencillas de verificar, que son aquellas que se desprenden de manera casi directa de las definiciones.

Teorema 4.2.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si el sistema es caótico Devaney, entonces es caótico Auslander-Yorke.

Demostración. Supongamos que (X, f) es caótico Devaney. Así, (X, f) es transitivo. Por lo cual, de la Proposición 4.1.1, se tiene que X contiene un punto transitivo. Por otro lado, dado que (X, f) es sensible a las condiciones iniciales, todos los puntos en X son inestables. Por lo tanto (X, f) es caótico Auslander-Yorke. □

Teorema 4.2.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si el sistema es caótico Devaney, entonces es caótico Wiggings.

Demostración. Supongamos que (X, f) es caótico Devaney. En particular, (X, f) es transitivo y sensible a las condiciones iniciales. Dado que cada sistema puede considerarse como subsistema de sí mismo, (X, f) es caótico Wiggins. □

Ahora analizamos las otras relaciones, las cuales requieren un poco más de trabajo. A continuación presentamos un resultado sobre relaciones binarias que es útil para demostrar la relación que guarda el caos Li-Yorke con otros tipos de caos. Cabe resaltar que para el siguiente resultado y para resultados posteriores, es fundamental tener presente los conceptos definidos en la Sección 3.3, del Capítulo 3. La demostración de este resultado se puede hallar en el Lemma 3.1 de [28]. Sin embargo, hemos procurado que la versión aquí presentada sea más detallada y por tanto más accesible. La demostración es bastante extensa, por lo cual sugerimos al lector proceder con calma.

Lema 4.2.3. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si R es una relación simétrica que cumple que existe $A \subseteq X$ denso G_δ tal que para cada $x \in A$, $R(x)$ contiene un subconjunto denso G_δ, entonces existe $B \subseteq X$ denso y no numerable tal que $(B \times B) \setminus \Delta \subseteq R$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos $F \subseteq A$ tales que F es no vacío y $(F \times F) \setminus \Delta \subseteq R$. Veamos primero que $\mathcal{F}$ es no vacía. Sean $x \in A$. Por hipótesis, A es un conjunto denso en X y existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos no vacíos tales que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. También por hipótesis, existe $C_x \subseteq R(x)$ tal que C_x es un conjunto denso en X y existe una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos no vacíos tales que $C_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Como $A \subseteq A_n$ y A es denso en X, se tiene que A_n es un conjunto denso en X. Similarmente C_n es un conjunto denso en X. Así, A_n y C_n son conjuntos abiertos, no vacíos y densos. Por el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.4.20), tenemos que $A_n \cap C_n \neq \emptyset$ y $A_n \cap C_n$ es un conjunto denso en X. Hemos probado que $\{A_n \cap C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos, no vacíos y densos. Nuevamente, del Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.4.20), obtenemos que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap C_n) \neq \emptyset,$$

y además, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap C_n)$ es un conjunto denso. Sin embargo:

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap C_n) &= \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)\\ &= A \cap C_x\\ &\subseteq A \cap R(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cap R(x)$ es un conjunto no vacío y denso en X. Más aún:

$$A \cap R(x) \text{ contiene un subconjunto denso y } G_\delta. \tag{4.6}$$

En particular, existe $y \in A \cap R(x)$ tal que $x \neq y$. Pongamos $F_0 = \{x, y\}$. Como $x \neq y$, $(F_0 \times F_0) \setminus \Delta = \{(x, y), (y, x)\}$. Dado que $y \in R(x)$ y R es una relación simétrica, se tiene que $F_0 \in \mathcal{F}$. Hemos probado que $\mathcal{F}$ es no vacía.

Puesto que X es compacto, podemos considerar $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base para X. Vamos a construir un conjunto denso $C = \{x_i|\ i \in \mathbb{N}\}$ tal que $C \in \mathcal{F}$ y $x_i \in U_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Para lograrlo, construimos primero una sucesión de conjuntos $\{C_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ con propiedades similares. Procedamos por inducción para la construcción de dichos conjuntos. Como A es denso, tomemos $x_1 \in A \cap U_1$ y sea $D_1 = A \cap R(x_1)$. Como en (4.6), tenemos que D_1 contiene un subconjunto denso y G_δ. Esto nos lleva a que $D_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sea $x_2 \in D_1 \cap U_2$ con $x_1 \neq x_2$ y pongamos $C_2 = \{x_1, x_2\}$. Luego $C_2 \in \mathcal{F}$. Ahora supongamos que para $n \in \mathbb{N}$, hemos construido $C_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tal que $C_n \in \mathcal{F}$ y $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $D_n = A \cap (\cap_{i=1}^n R(x_i))$. Usando argumentos similares a los utilizados para demostrar (4.6), se puede probar que D_n contiene un conjunto denso y G_δ. Luego $D_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$. Sea $x_{n+1} \in D_n \cap U_{n+1}$ y hacemos $C_{n+1} = C_n \cup \{x_{n+1}\}$. Nuevamente se cumple que $C_{n+1} \in \mathcal{F}$ y $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Considerando los conjuntos C_n construidos de este modo, el conjunto:

$$C = \bigcup_{n=2}^{\infty} C_n,$$

es un conjunto denso que cumple que $C \in \mathcal{F}$ y $x_i \in U_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Veamos que toda cadena en $\mathcal{F}$ es acotada superiormente. Sea $\mathcal{G}$ una cadena en $\mathcal{F}$. Por definición de $\mathcal{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq A$. En particular A es una cota superior para $\mathcal{G}$. Por el Lema de Zorn[1](Teorema 8.10 de [27]), existe un conjunto $B \in \mathcal{F}$ el cual es maximal para $\mathcal{F}$ (bajo la inclusión de conjuntos). En particular $C \subseteq B$. Veamos que B no es numerable. Supongamos que B es numerable. Pongamos $B = \{z_i | \ i \in \mathbb{N}\}$. Como $A \cap (\cap_{i\in\mathbb{N}} R(x_i))$ contiene un conjunto G_δ denso y además X no tiene puntos aislados, tomamos $z \in A \cap (\cap_{i\in\mathbb{N}} R(x_i))$, tal que $z \neq z_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Claramente $z \in A$ y $(x, x_i) \in R$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $B' = B \cup \{z\}$, luego $(B' \times B') \setminus \Delta \subseteq R$. Esto último es una contradicción con la elección de B pues $B \subsetneq B'$. Por lo tanto B es no numerable, lo que culmina la demostración. □

Presentamos a continuación el resultado que nos dice cómo se relaciona la transitividad con la existencia de conjuntos scrambled. Este resultado es fundamental para demostrar las relaciones entre el caos Li-Yorke y los otros tipos de caos definidos en este capítulo.

Teorema 4.2.4. Sea (X, f) un sistema dinámico con X infinito. Si f es transitiva y $Per(f) \neq \emptyset$, entonces existe un subconjunto de X que es scrambled y no numerable.

Demostración. Supongamos que f es transitiva y $Per(f) \neq \emptyset$. Sea $p \in Per(f)$. Consideramos los siguientes casos:

> Caso (1) p es un punto fijo. Como f es transitiva, de la Proposición 4.1.1, se tiene que $Trans_f(X) \neq \emptyset$. Sea $x \in Trans_f(X)$, luego de la Proposición 1.4.18, $\omega(x, f) = X$. De aquí que $p \in \omega(x, f)$, por lo cual, de la Proposición 1.3.4, existe una sucesión $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} f^{n_j}(x) = p$. Ahora veamos que $(f^m(x), x) \in PR$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Sean $m, k \in \mathbb{N}$. Como f^m es continua en p, existe $\delta > 0$

[1]El Lema de Zorn es un resultado muy popular de teoría de conjuntos. Es por ello que nos hemos tomado la libertad de omitir su enunciado formal en la tesis. Lo que nos dice este resultado es que todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena es acotada superiormente, contiene un elemento maximal. La demostración se puede encontrar en el Teorema 8.10 de [27].

tal que si $z \in B(p,\delta)$, entonces $d(f^m(z),p) < \frac{1}{2k}$. Sea $\epsilon = \min\{\delta, \frac{1}{2k}\}$. Como $\{f^{n_j}(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N$, entonces $f^{n_i}(x) \in B(p,\epsilon)$. Sea $i \geq N$, debido a la elección de ϵ, se cumple que:

$$d(f^{n_i}(f^m(x)), f^{n_i}(x)) \leq d(f^m(f^{n_i}(x)), p) + d(p, f^{n_i}(x)) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}.$$

Luego $(f^m(x), x) \in (f^{\times 2})^{-n_i}(\Delta_k)$ y de este modo:

$$(f^m(x), x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{\times 2})^{-n}(\Delta_k).$$

Como k fue elegido de manera arbitraria:

$$(f^m(x), x) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{\times 2})^{-n}(\Delta_k) \right).$$

Por lo cual, del Lema 3.3.11, parte (3), se sigue que $(f^m(x), x) \in PR$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Esto último implica que $\mathcal{O}(x,f) \subset PR(x)$. Considerando que $x \in Trans_f(X)$, tenemos que $PR(x)$ es un conjunto denso en X. Además, del Lema 3.3.11, parte (3), se tiene que $PR(x)$ es un conjunto G_δ. Con todo lo anterior hemos probado que para cada $x \in Trans_f(X)$, $PR(x)$ es un conjunto denso y G_δ.

Pongamos $R = SCR$ (relación scrambled) y $A = Trans_f(X)$. De la Proposición 1.4.17 y la Proposición 3.3.5, tenemos que A es un conjunto denso y G_δ. Sea $x \in A$. Dado que f es transitiva, del Corolario 3.3.13, se tiene que $AR(x)$ es de primera categoría. Así, de la Proposición 3.3.2 parte (2), existe un subconjunto $B \subseteq X$ tal que B es denso, G_δ y $B \subseteq AR(x)^c$. Pongamos $C_x = PR(x) \cap B$. Tenemos que B es denso y G_δ. Además, $PR(x)$ es un conjunto denso y G_δ, por lo cual de la Proposición 3.3.4, C_x es un conjunto denso y G_δ. Sin embargo, de la Proposición 3.3.16:

$$C_x \subseteq PR(x) \cap AR(x)^c = PR(x) \setminus AR(x) = SCR(x).$$

Hemos probado que A y R como las definimos cumplen las hipótesis del Lema 4.2.3. Por lo tanto existe $B \subseteq X$ denso y no numerable tal que $(B \times B) \setminus \Delta \subseteq R$. Es decir, B es un subconjunto de X que es scrambled y no numerable.

Caso (2) p es un punto de periodo $n > 1$. Sea $x \in Trans_f(X)$. De la Proposición 1.4.18, $\omega(x, f) = X$. Sea $D_i = \omega(f^i(x), f^n)$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Luego $f(D_i) = D_{(i+1) \mod n}$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, lo cual nos lleva a que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, D_i contiene un punto de periodo n. Además, dado que $x \in Trans_f(X)$, D_i es no numerable para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Nuevamente utilizando la Proposición 1.4.18, la función $f^n|_{D_0}$ es una función transitiva que contiene un punto fijo. Por lo cual, podemos aplicar lo demostrado en el Caso (1). Es decir, existe un subconjunto B de D_0 que es scrambled y no numerable. Claramente B es el conjunto scrambled buscado.

Del Caso (1) y el Caso (2) damos por concluida la prueba. □

En el Teorema 4.2.4, las hipótesis nos dicen que el espacio X debe ser infinito. La razón de ello es que para hablar de conjuntos scrambled no numerables, se requiere que el espacio sea no numerable. Como corolarios del Teorema 4.2.4, se tienen los siguientes resultados, que enunciamos como teoremas por la importancia que tienen para nuestros propósitos.

Teorema 4.2.5. Sea (X, f) un sistema dinámico con X infinito. Si el sistema es caótico Devaney, entonces es caótico Li-Yorke.

Demostración. Supongamos que (X, f) es caótico Devaney. En particular, (X, f) es transitivo y $Per(f)$ es un conjunto denso en X y por tanto un conjunto no vacío. Así, por el Teorema 4.2.4, (X, f) es caótico Li-Yorke. □

Teorema 4.2.6. Sea (X, f) un sistema dinámico con X infinito y $Per(f) \neq \emptyset$. Si el sistema es caótico Auslander-Yorke, entonces es caótico Li-Yorke.

Demostración. Supongamos que (X, f) es caótico Auslander-Yorke. En particular, X contiene un punto transitivo. Por lo cual, de la Proposición 4.1.1, se tiene que (X, f) es un sistema transitivo. Además, por hipótesis, $Per(f) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es caótico Li-Yorke, en virtud del Teorema 4.2.4. □

Utilizando el Teorema 4.2.4, hemos demostrado que tanto el caos Devaney como el caos Auslander-Yorke implican al caos Li-Yorke. Podríamos esperar algo similar del caos Wiggins, pues la hipótesis principal del Teorema 4.2.4, es la transitividad. Sin embargo, en un sistema caótico Wiggins, la transitividad del subsistema correspondiente, no nos asegura la transitividad de todo el sistema. La relación que sí se da es que el caos Auslander-Yorke implica al caos Wiggins, el cual enunciamos de manera formal a continuación.

Teorema 4.2.7. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si el sistema es caótico Auslander-Yorke, entonces es caótico Wiggins.

Demostración. Supongamos que (X, f) es caótico Auslander-Yorke. En particular X contiene un punto transitivo. Por lo cual, de la Proposición 4.1.1, se tiene que (X, f) es un sistema transitivo. Por otro lado, para cada $x \in X$, x es un punto inestable, lo cual nos dice que el sistema no posee puntos estables. Así, del Teorema 2.4.2, el sistema es sensible a las condiciones iniciales. Dado que cada sistema puede considerarse como subsistema de sí mismo, (X, f) es caótico Wiggins. $\square$

En el diagrama de la Figura 4.1, se muestran las relaciones que se dan en general para espacios métricos compactos. Las condiciones C_1 y C_2 dependen de las hipótesis de los resultados que se utilizan para completar este diagrama. Estos resultados son: el Teorema 3.3.29, que nos dice que la entropía positiva en un sistema implica que el sistema es caótico Li-Yorke. El Teorema 4.2.6, que nos dice que el caos Auslander-Yorke implica el caos Li-Yorke. El Teorema 4.2.5, donde se prueba que el caos Devaney implica el caos Li-Yorke. El Teorema 4.2.1, que muestra que el caos Devaney implica el caos Auslander-Yorke. El Teorema 4.2.2, donde se muestra que el caos Devaney implica el caos Wiggins. Por último el Teorema 4.2.7, que nos dice que el caos Auslander-Yorke implica el caos Wiggins.

Es importante notar que en el diagrama de la Figura 4.1, sólo se presentan las relaciones positivas, es decir, las flechas indican las relaciones para las cuales se cuenta con una demostración. Sin embargo, no todas las posibles conexiones aparecen en el diagrama y lo natural es que nos preguntemos ¿qué ocurre con el resto de las posibles relaciones? Para responder, es útil estudiar qué ocurre con los sistemas en un intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

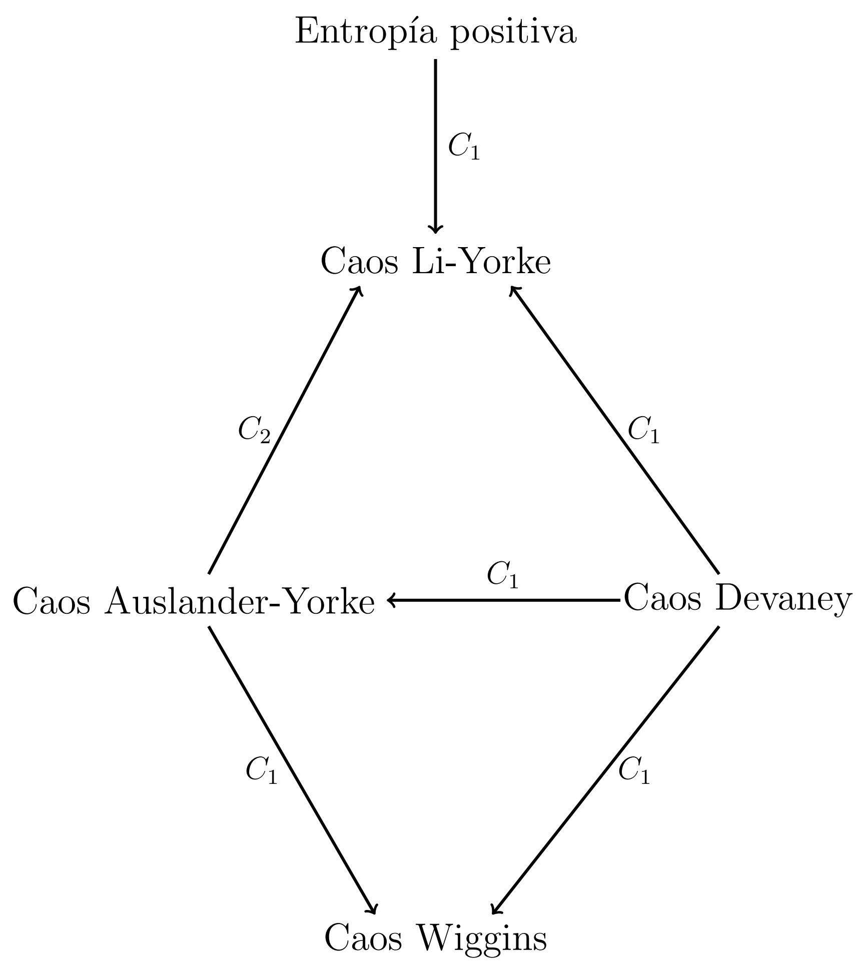

Figura 4.1: Diagrama de relaciones para espacios métricos compactos
C_1: Un sistema dinámico (X, f) con X compacto y f continua.
C_2: Un sistema dinámico (X, f) con X compacto, f continua y $Per(f) \neq \emptyset$.

4.2.2 Relaciones en el intervalo

Esta subsección la dedicamos a presentar los resultados que existen sobre sistemas dinámicos caóticos en el intervalo I. Cabe mencionar que no incluimos las demostraciones, pues el objetivo principal de este trabajo es estudiar los sistemas dinámicos de manera general en espacios métricos compactos y las demostraciones de los resultados de esta subsección, requieren de teoría específica que no hemos desarrollado en la tesis. Sin embargo, si fuese de su interés, el lector puede encontrar las demostraciones en las fuentes citadas en cada resultado.

En 1986 fue demostrado de manera independiente por Xiong [54] y Simital [50], el siguiente resultado.

Teorema 4.2.8. Existe una función continua $f : I \to I$ tal que f es caótica Li-Yorke y $h_{top}(f) = 0$.

El Teorema 4.2.8, nos dice que para sistemas en el intervalo I, el caos Li-Yorke no implica la entropía topológica positiva del sistema. Este es el primer resultado que nos muestra que dos de las definiciones que hemos presentado de caos no son equivalentes. Continuemos con el resto. En 2005, Ruette [46], investigó sobre los subsistemas sensitivos y transitivos de funciones en intervalos de $\mathbb{R}$, es decir, los sistemas caóticos Wiggins en el intervalo I. Ella probó el siguiente resultado.

Teorema 4.2.9. (1) Para funciones transitivas $f : [0,1] \to [0,1]$ se cumple que: si f es caótica Wiggins, entonces f es caótica Li-Yorke .

(2) Existe una funcion continua $f : [0,1] \to [0,1]$ con entropía topológica cero que es caótica Wiggins.

(3) Existe una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ que es caótica Li-Yorke pero no caótica Wiggins.

El Teorema 4.2.9, nos proporciona información sobre las relaciones entre el caos Wiggins y otros tipos de caos. El punto (1) nos dice que el caos Wiggins implica el caos Li-Yorke. El punto (2) nos dice que el caos Wiggins no implica la entropía topológica positiva. El punto (3) nos dice que el recíproco del punto (1) no se da, es decir, que el caos Li-Yorke no implica el caos Wiggins. Como conclusión del Teorema 4.2.9, tenemos que el caos Wiggins y la entropía positiva no son nociones equivalentes de caos y que el caos Wiggins y el caos Li-Yorke tampoco lo son.

Ahora pasemos a un resultado que nos dice cómo se relaciona la transitividad con la entropía en funciones definidas en el intervalo. La demostración está en el Teorema 17.20 de [31].

Teorema 4.2.10. Sea $f : I \to I$ una función continua. Si f es transitiva, entonces $h_{top}(f) > 0$.

El Teorema 4.2.10, nos dice que la transitividad de una función en el intervalo, basta para asegurar que dicha función tiene entropía positiva. En consecuencia, este resultado nos indica cómo se comportan los tipos de caos en sistemas transitivos, con respecto a la entropía, en funciones del intervalo. Presentamos estos resultados como corolarios del Teorema 4.2.10.

Teorema 4.2.11. Sea $f : I \to I$ una función continua. Si f es caótica Auslander-Yorke, entonces $h_{top}(f) > 0$.

Demostración. Supongamos que f es caótica Auslander-Yorke. En particular, f es transitiva. Así, del Teorema 4.2.10, se tiene que $h_{top}(f) > 0$. □

Teorema 4.2.12. Sea $f : I \to I$ una función continua. Si f es caótica Devaney, entonces $h_{top}(f) > 0$.

Demostración. Supongamos que f es caótica Devaney. En particular, f es transitiva. Así, del Teorema 4.2.10, se tiene que $h_{top}(f) > 0$. □

Otro resultado que nos dice cómo se comporta la entropía en funciones del intervalo, es el que enunciamos a continuación. La demostración se encuentra en el libro *Dynamics in One Dimension* [11].

Teorema 4.2.13. Sea $f : I \to I$ una función continua. Se cumple que $h_{top}(f) > 0$ si y sólo si existe $B \subseteq I$ tal que B es cerrado, +invariante y $f|_B$ es caótica Devaney.

Tanto del Teorema 4.2.12, como del Teorema 4.2.13, podemos notar que el caos Devaney en una función, basta para que la entropía de dicha función sea positiva. Sin embargo, el Teorema 4.2.13, no basta para asegurar el recíproco, es decir, no basta para demostrar que la entropía positiva de una función implica que dicha función es caótica Devaney. Sin embargo, sí es útil para demostrar otra de las relaciones.

Teorema 4.2.14. Sea $f : I \to I$ una función continua. Si $h_{top}(f) > 0$, entonces f es caótica Wiggins.

Demostración. Supongamos que $h_{top}(f) > 0$. Así, del Teorema 4.2.13, existe $B \subseteq I$ tal que B es cerrado, +invariante y $f|_B$ es caótica Devaney. En particular, $f|_B$ es transitiva y sensible a las condiciones iniciales. Por lo tanto, f es caótica Wiggins. □

En el diagrama de la Figura 4.1, se muestran las relaciones que se dan en sistemas dinámicos definidos en espacios compactos. En particular, el intervalo I es un espacio compacto, por lo cual, todos los resultados de dicho diagrama son válidos también en sistemas en el intervalo I.

El diagrama de la Figura 4.2, muestra las relaciones que existen entre los tipos de caos que hemos definido, en sistemas dinámicos definidos en el intervalo I. Este diagrama es el resultado de considerar los resultados que se muestran en el diagrama de la Figura 4.1, y los siguientes resultados. El Teorema 4.2.8, que nos dice que el caos Li-Yorke no implica la entropía topológica del sistema. El Teorema 4.2.9, que nos dice que el caos Wiggins implica al caos Li-Yorke, que el caos Li-Yorke no implica el caos Wiggins y que el caos Wiggins no implica la entropía topológica positiva del sistema. El Teorema 4.2.11, en el que se demuestra que el caos Auslander-Yorke implica la entropía topológica positiva del sistema. El Teorema 4.2.12, que indica que el caos Devaney implica la entropía topológica positiva del sistema. Por último, el Teorema 4.2.14, que nos dice que la entropía topológica positiva del sistema implica al caos Wiggins.

Del diagrama de la Figura 4.2, podemos observar que no hay dos definiciones equivalentes de caos, a pesar de que nos hemos restringido únicamente a sistemas en el intervalo. También es importante recalcar que en este diagrama, a diferencia de la Figura 4.1, se exhiben relaciones negativas, es decir, las flechas canceladas indican que la relación correspondiente no ocurre. Esto último es además útil para completar el diagrama de relaciones en espacios compactos en general. Sin embargo, dejamos esto

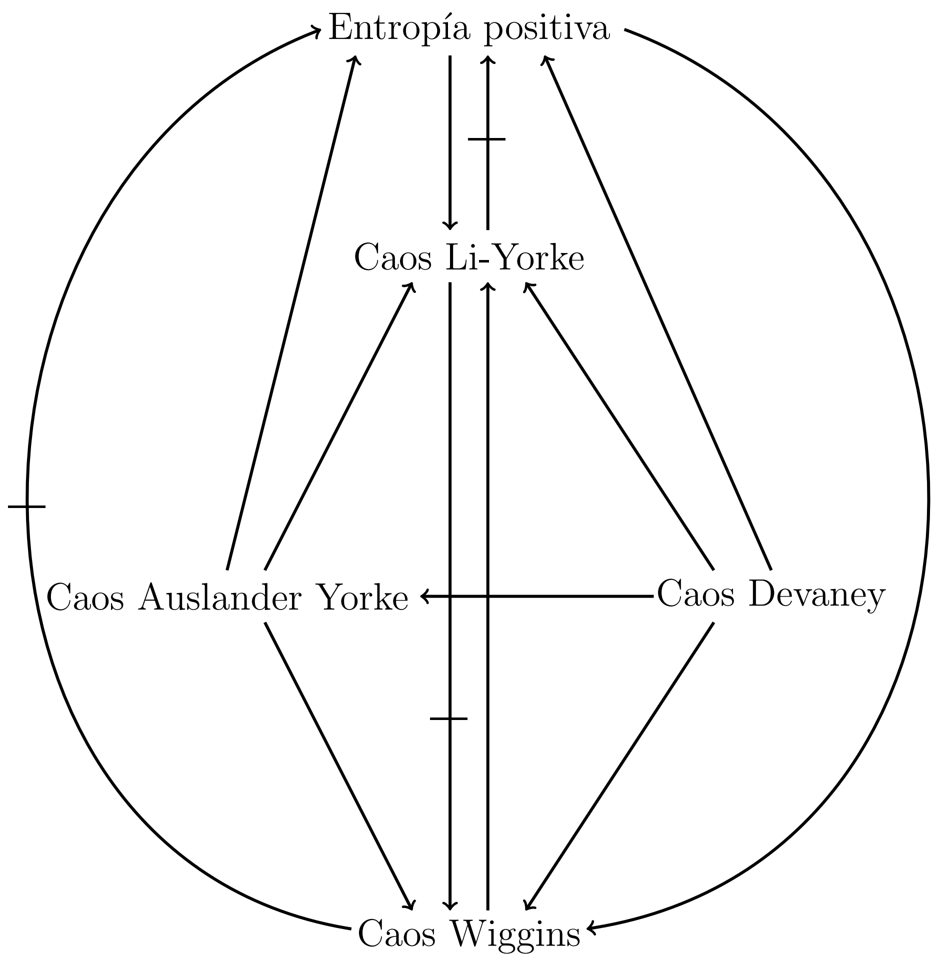

Figura 4.2: Diagrama de relaciones en sistemas dinámicos en el intervalo

para el siguiente capítulo donde presentamos algunos ejemplos que también sirven para completar el diagrama.

Capítulo 5

Sistemas caóticos

Y como sé que el caminar
no sólo deja sus huellas hoy
tomo las mías y me voy
a buscar nuestro final.

En este capítulo se analizan distintos tipos de sistemas dinámicos de manera detallada, utilizando herramientas presentadas en capítulos anteriores. También se muestra cómo estos sistemas sirven de ejemplo para la mayoría de los conceptos estudiados en la tesis. Finalmente se muestra cómo algunos de estos ejemplos sirven para complementar el diagrama de las relaciones de los tipos de caos.

Cada vez que se introduce un nuevo concepto en matemáticas es imprescindible mostrar ejemplos, los cuales no sólo nos indican que lo que estamos estudiando tiene sentido. También en muchas ocasiones los ejemplos sirven para clarificar los conceptos, al concentrarse en casos particulares. Pero la característica que puede ser considerada como la más útil que tienen los ejemplos, es que pueden servir como contraejemplos.

Hablando particularmente de lo que compete a este trabajo de tesis, en los capítulos anteriores, no se presta especial atención a dar ejemplos de los conceptos presentados. La razón, es que dedicamos este capítulo exclusivamente a esta tarea. Presentamos sistemas dinámicos definidos en distintos tipos de espacios métricos. Algunos de ellos sirven como contraejemplos útiles para completar el diagrama de la Figura 4.1, que muestra las relaciones entre los tipos de caos que hemos definido. Otros simplemente sirven para exhibir la utilidad de los resultados presentados en capítulos anteriores, al momento de analizar un sistema en particular.

5.1 Función rotación irracional

El primer sistema que analizamos en este capítulo está definido en un subconjunto de los números complejos. Sea $S^1 = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in I\}$, el círculo unitario en los complejos. Consideramos a S^1 con la métrica usual de $\mathbb{C}$ restringida a S^1. Con esta métrica S^1 es un conjunto compacto. Para más detalles sobre la dinámica existente en S^1 consulte [38, 14]. En esta sección nos dedicamos únicamente a la función que definimos a continuación.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número irracional. La función *rotación irracional* $R_\theta : S^1 \to S^1$ se define como:

$$R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}z, \text{ para cada } z \in S^1.$$

Se puede considerar la función rotación en general partiendo de cualquier $\theta \in \mathbb{R}$. Sin embargo, cuando se consideran números irracionales, la función resultante tiene propiedades dinámicas muy interesantes.

Hay que notar que la Figura 5.1, no muestra la gráfica de R_θ pues se requiere para ello un espacio homeomorfo a $\mathbb{C}^2$. Sin embargo, la Figura 5.1, muestra el resultado de aplicar la función R_θ al punto z. $R(z)$ resulta de la rotación de z según el ángulo θ sobre S^1. Para ser más precisos, consideremos $z \in S^1$, luego existe $\alpha \in I$ tal que $z = e^{2\pi i\alpha}$. Así:

$$R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}e^{2\pi i\alpha} = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}.$$

Más aún, utilizando la fórmula de Moivre[1], podemos deducir la forma general de las iteraciones de R_θ. Para cada $z \in S^1$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$R_\theta^n(z) = \left(e^{2\pi i\theta}\right)^n z = e^{2\pi in\theta}z.$$

[1]La fórmula de Moivre(nombraba así en honor a Abraham de Moivre), nos dice cómo se comporta la potencia de los números complejos. De manera formal: $\left(re^{2\pi i\theta}\right)^n = r^n e^{2\pi in\theta}$.

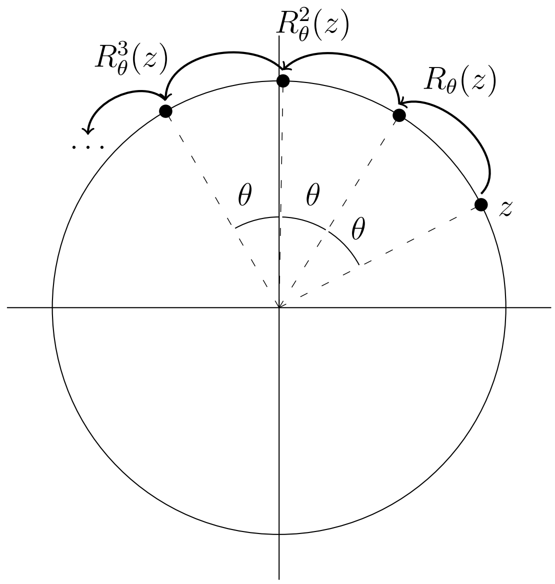

Figura 5.1: Función rotación irracional

Es decir, aplicar n veces la función R_θ al punto z, es el resultado de la rotación de z según el ángulo $n\theta$ sobre S^1.

Una de las primeras caraterísticas que resalta de esta función es que la distancia entre cualquier punto en S^1 y su imagen bajo la función R_θ es constante.

Proposición 5.1.1. La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ cumple que para cada $z \in S^1$, $d(z, R_\theta(z))$ es constante.

Demostración. En efecto. Sea $z \in S^1$. Luego:

$$\begin{aligned} d(z, R_\theta(z)) &= ||z - e^{2\pi i\theta} z|| \\ &= ||z(1 - e^{2\pi i\theta})|| \\ &= ||z|| ||1 - e^{2\pi i\theta}|| \\ &= ||1 - e^{2\pi i\theta}||. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(z, R_\theta(z))$ es constante. $\square$

De forma muy similar, haciendo uso de propiedades de la norma en $\mathbb{C}$, se prueba el siguiente resultado, que muestra una de las propiedades más importantes que cumple la rotación irracional.

Proposición 5.1.2. La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ es una isometría.

Demostración. Sean $z, w \in S^1$. Luego:

$$\begin{aligned} d(R_\theta(z), R_\theta(w)) &= ||R_\theta(z) - R_\theta(w)|| \\ &= ||e^{2\pi i\theta} z - e^{2\pi i\theta} w|| \\ &= ||e^{2\pi i\theta}||||z - w|| \\ &= ||z - w||. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(R_\theta(z), R_\theta(w)) = d(z, w)$. Lo que prueba que R_θ es una isometría. $\square$

Recordemos que las isometrías juegan un papel especial en varios de los conceptos que hemos visto. Por ejemplo que todas las isometrías son equicontinuas y tienen entropía igual a cero.

Proposición 5.1.3. La función rotación irracional cumple que $h_{top}(R_\theta) = 0$.

Demostración. La Proposición 5.1.2, nos dice que la función R_θ es una isometría. Luego, de la Proposición 3.1.38, se tiene que $h_{top}(R_\theta) = 0$. $\square$

Proposición 5.1.4. La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ es una función equicontinua.

Demostración. Sabemos de la Proposición 5.1.2, que R_θ es una isometría. Luego del Teorema 2.3.3, tenemos que R_θ es equicontinua. $\square$

Otra de las propiedades interesantes de la función rotación irracional es que no posee puntos periódicos, lo cual enunciamos de manera formal a continuación.

Proposición 5.1.5. Sean θ un número irracional y $R_\theta : S^1 \to S^1$ la función rotación irracional. Se cumple que $Per(R_\theta) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $Per(R_\theta) \neq \emptyset$. Sea $z \in Per(R_\theta)$, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_\theta^k(z) = z$, es decir, $e^{2\pi ik\theta} z = z$. Esto útlimo ocurre si y sólo si $e^{2\pi ik\theta} = 1$. Lo que nos lleva a que $k\theta \in \mathbb{Z}$ y dado que $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\theta \in \mathbb{Z}$, lo cual es una contradicción, pues θ es un número irracional. Por lo tanto, $Per(R_\theta) = \emptyset$. $\square$

La Proposición 5.1.5, nos puede llevar a pensar que la función R_θ tiene un comportamiento complejo, pues la regularidad o periodicidad no están presentes. Sin embargo, del Teorema 3.3.22, podemos inferir que R_θ no es una función caótica Li-Yorke, pues $Per(R_\theta) = \emptyset$. A pesar de ello, la función R_θ sí cumple otra propiedad importante que es fundamental en casi todos los tipos de caos que hemos visto.

Proposición 5.1.6. La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ cumple que para cada $z \in S^1$, $\mathcal{O}(z, R_\theta)$ es un conjunto denso en S^1.

Demostración. Sea $z \in S^1$. De la Proposición 5.1.5, tenemos que $Per(f) = \emptyset$, por lo cual, de la Proposición 1.2.25, $Ap(R_\theta) = \emptyset$. Esto nos lleva a que $z \notin Ap(R_\theta)$, es decir $\mathcal{O}(z, R_\theta)$ es un conjunto infinito. Sea $h : I \to S^1$ la función definida por:

$$h(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}, \text{ para cada } \alpha \in I.$$

Se tiene que h es un homeomorfismo. Sean $y \in S^1$ y $\epsilon > 0$. Veamos que $\mathcal{O}(z, R_\theta) \cap B(y, \epsilon) \neq \emptyset$. Pongamos $y = e^{2\pi i\alpha}$ y $z = e^{2\pi i\gamma}$. Como h es un homeomorfismo, existe $\delta > 0$ tal que si $|\beta - \alpha| < \delta$, entonces $||e^{2\pi i\beta} - e^{2\pi i\alpha}|| < \epsilon$. Como θ es irracional, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta = (m\theta + \gamma) \mod 1$, cumple que $\beta \in I$ y $|\beta - \alpha| < \delta$. Luego, $||e^{2\pi i\beta} - e^{2\pi i\alpha}|| < \epsilon$. Pero $e^{2\pi i\beta} = e^{2\pi i(m\theta+\gamma)} = R_\theta^m(z)$. Esto nos lleva a que $||R_\theta^m(z) - e^{2\pi i\alpha}|| < \epsilon$. Por lo tanto $\mathcal{O}(z, R_\theta) \cap B(y, \epsilon) \neq \emptyset$. Esto es, $\mathcal{O}(z, R_\theta)$ es denso en S^1. $\square$

Por la Proposición 5.1.6, considerando la Proposición 1.4.26, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.7. Sea $R_\theta : S^1 \to S^1$ la función rotación irracional, el sistema dinámico (S^1, R_θ) es un sistema minimal.

Por el Teorema 1.4.27 y la Proposición 5.1.7, obtenemos de inmediato el siguiente resultado.

Proposición 5.1.8. La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ es una función transitiva.

La Proposición 5.1.8, muestra que R_θ cumple una de las propiedades más importantes que hemos visto: la transitividad. Sin embargo, R_θ es aún más especial en este sentido.

Proposición 5.1.9. La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ es una función totalmente transitiva.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Sabemos que $R_\theta^m(z) = e^{2\pi i m\theta} z$ para cada $z \in S^1$. Dado que $m\theta$ es también un número irracional, se tiene que $R_\theta^m = R_{m\theta}$. Así, por la Proposición 5.1.8, $R_{m\theta}$ es transitiva y por lo tanto R_θ^m es transitiva. $\square$

A pesar de la esperanza que nos brinda la transitividad de estar ante la presencia de un sistema caótico, debemos recordar que la equicontinuidad es estabilidad global. Además, la equicontinuidad representa lo opuesto a la inestabilidad, que es otro de los ingredientes del caos.

Proposición 5.1.10. La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ no es una función sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. De la Proposición 5.1.4, se tiene que R_θ es equicontinua. Por otro lado, la Proposición 5.1.7, nos dice que (S^1, R_θ) es un sistema minimal. Luego, del Teorema 2.4.3, se tiene que R_θ no es sensible a las condiciones iniciales. $\square$

De la Proposición 5.1.10, podemos inferir que R_θ no es caótica Devaney, pues no es sensible a las condiciones iniciales. Del mismo modo no es caótica Auslander-Yorke. Por otro lado, ya que (S^1, R_θ) es un sistema minimal, el único subsistema que admite es sí mismo, por lo cual podemos concluir que (S^1, R_θ) no es caótico Wiggins.

Con todo lo que hemos visto podemos notar que el sistema dinámico (S^1, R_θ) es un ejemplo muy importante, pues nos sirve para mostrar que existen sistemas transitivos que no son caóticos bajo ninguna de las definiciones que hemos dado. Esto nos dice que la transitividad no es suficiente para considerar a un sistema caótico. De hecho la transitividad nos provee de cierta uniformidad en el sistema.

A modo de resumen, presentamos un listado de las propiedades que hemos analizado. La función rotación irracional R_θ cumple las siguientes propiedades:

(1) Es una isometría.

(2) Es equicontinua.

(3) $Per(R_\theta) = \emptyset$.

(4) Es totalmente transitiva.

(5) Todas sus órbitas son densas.

(6) Es minimal.

(7) No es sensible a las condiciones iniciales.

(8) No es caótica Li-Yorke.

(9) No es caótica Devaney.

(10) No es caótica Auslander-Yorke.

(11) No es caótica Wiggins.

(12) $h_{top}(R_\theta) = 0$.

5.2 Funciones tienda

En esta sección nos dedicamos a estudiar una familia de funciones definidas en I, las cuales, a pesar de lo sencillo que resulta definirlas, poseen una dinámica muy interesante. Comenzamos con la función tienda, la cual también se menciona en el Capítulo 1 como nuestro primer ejemplo de transitividad. Sin embargo, aquí analizamos algunas otras de sus propiedades.

5.2.1 La función tienda

El análisis detallado de la función tienda lo podemos hallar en [31]. En esta subsección nos centramos únicamente en las propiedades correspondientes a los tipos de caos que hemos definido. Comencemos con la definición formal de esta función.

Sea $T : I \to I$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2}, \\ \\ 2 - 2x & \text{si} \quad x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

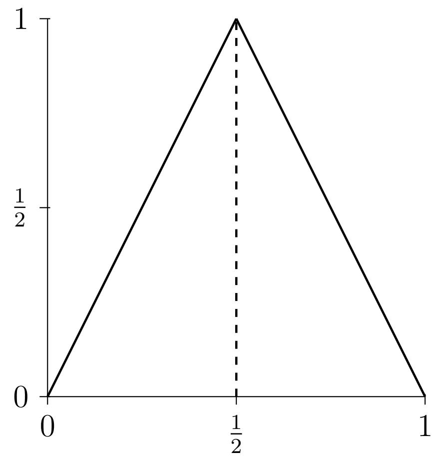

Figura 5.2: Gráfica de la función tienda

La función T es conocida como *función tienda* y es una de las funciones más estudiada en el campo de los sistemas dinámicos discretos. El nombre de "tienda" se debe a la forma que tiene la gráfica de la función T. Como podemos observar en la Figura 5.2, tiene la forma de una tienda de acampar.

Proposición 5.2.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x \in I$ tal que $x \in Per(T)$ y x es de periodo n. Esto es, la función tienda tiene puntos de todos los periodos.

Demostración. Analicemos qué sucede con el punto $\frac{2}{9}$ en I, bajo la función T. Se tiene que:

$$T\left(\frac{2}{9}\right) = 2\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9},\ T\left(\frac{4}{9}\right) = 2\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9},\ T\left(\frac{8}{9}\right) = 2 - 2\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{2}{9}.$$

Esto nos dice que la órbita está dada por:

$$\mathcal{O}\left(\frac{2}{9}, T\right) = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}.$$

Más aún, $\frac{2}{9}$ es un punto de periodo 3 para T. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $3 \triangleleft n$, por el Teorema de Sharkovskii (Teorema 1.2.32), obtenemos que la función tienda tiene puntos de todos los periodos. $\square$

A continuación presentamos un resultado cuya prueba omitimos pero se puede hallar en la Proposición 7.1 de [31].

Proposición 5.2.2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ se tiene que la función T^n restringida al intervalo $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ es un homeomorfismo.

Ahora pasamos a probar una de las propiedades que nos llevan a comprender la complejidad dinámica de la función T.

Proposición 5.2.3. El conjunto $Per(T)$ es denso en I.

Demostración. Sean $a, b \in I$ con $a < b$ y $(a, b) \subseteq I$ un conjunto abierto no vacío de I. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. De aquí existe $l \in \{1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que:

$$\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subseteq (a, b).$$

Por lo cual, de la Proposición 5.2.2, $T^N[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] = [0, 1]$. Esto nos lleva a que T^N tiene un punto fijo en $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$. Es decir, existe $x_0 \in [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \subseteq (a, b)$ tal que $T^N(x_0) = x_0$. Así, $x_0 \in (a, b) \cap Per(T)$. $\square$

Con los resultados que hemos obtenido, podemos sacar conclusiones de los tipos de caos que satisface esta función.

Proposición 5.2.4. La función tienda $T : I \to I$ es caótica Devaney.

Demostración. De la Proposición 1.4.3, tenemos que T es una función transitiva. Por otro lado, de la Proposición 5.2.3, tenemos que $Per(T)$ es un conjunto denso en I. Así, del Teorema 4.1.9, tenemos que T es una función caótica Devaney. $\square$

La demostración de la siguiente proposición se obtiene de inmediato al considerar los siguientes resultados: Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2 y Teorema 4.2.5.

Proposición 5.2.5. La función tienda $T : I \to I$ tiene las siguientes propiedades:

(1) Es caótica Li-Yorke.

(2) Es caótica Auslander-Yorke.

(3) Es caótica Wiggins.

En este punto es cuando resulta notoria la utilidad de conocer las relaciones entre los tipos de caos, pues nos ahorra el trabajo de verificar que T satisface las definiciones de caos Li-Yorke, caos Auslander-Yorke y caos Wiggins. Ahora analizamos la entropía de T. El siguiente resultado se puede hallar en la Proposición 17.6 de [31].

Proposición 5.2.6. La función tienda $T : I \to I$ cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_{top}(T^n) \geq \log(2^{n-1})$.

Ahora probamos que la entropía de la función tienda es positiva.

Proposición 5.2.7. La función tienda $T : I \to I$ tiene entropía positiva.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. La Proposición 5.2.6, nos dice que:

$$h_{top}(T^n) \geq \log(2^{n-1}).$$

Por otro lado, del Teorema 3.1.21, se tiene que $h_{top}(T^n) = nh_{top}(T)$. Además, considerando que $\log(2^{n-1}) = (n-1)\log(2)$ obtenemos:

$$h_{top}(T) \geq \frac{n-1}{n}\log(2).$$

Esto último se verifica para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual, al tomar el límite cuando n tiende a infinito obtenemos que:

$$h_{top}(T) \geq \log(2).$$

Por lo tanto la entropía de T es positiva. □

Como podemos observar, en la Proposición 5.2.7, sólo se prueba que la entropía de T es positiva, pero no se calcula de manera explícita. Lo último no es necesario pues nuestro interés está en si la entropía es o no positiva. Sin embargo, en el Ejemplo 2.7 de [20], se calcula de manera explicita que $h_{top}(T) = \log(2)$. Más aún, en [20], se presenta una forma de calcular en general la entropía de funciones lineales a trozos.

A continuación hacemos un listado de las propiedades que hemos analizado. La función tienda T cumple lo siguiente:

(1) Es transitiva.

(2) Tiene puntos de todos los periodos.

(3) El conjunto $Per(T)$ es denso en I.

(4) Es caótica Devaney.

(5) Es caótica Li-Yorke.

(6) Es caótica Auslander-Yorke.

(7) Es caótica Wiggins.

(8) $h_{top}(T) = \log(2)$.

5.2.2 Familia de las funciones tiendas truncadas

Ahora analizamos toda una familia de funciones que se definen a partir de la función tienda. Para información más detallada, consulte [4].

Definición 5.2.8. Sea $\lambda \in I$. La función *tienda truncada por* λ, $T_\lambda : I \to I$ está definida por:

$$T_\lambda(x) = \text{mín}\{\lambda, T(x)\}, \text{ para todo } x \in I.$$

Como se puede observar en la Figura 5.3, un elemento de la familia de funciones tienda truncadas se obtiene truncando a la función tienda por una constante. Claramente para $\lambda = 1$ se obtiene la función tienda. Probemos algunas de las relaciones que guardan entre sí los elementos de esta familia.

Proposición 5.2.9. Para cada $0 \leq \lambda < \gamma \leq 1$:

(1) T_λ es constante en el conjunto: $K_\lambda = (\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2})$.

(2) Las funciones T_λ y T_γ coinciden en el conjunto: $J_\lambda = [0, \frac{\lambda}{2}] \cup [1 - \frac{\lambda}{2}, 1]$.

(3) Los puntos periódicos de T_λ y T_γ coinciden en el conjunto J_λ con el mismo periodo.

Demostración. Sean $0 \leq \lambda < \gamma \leq 1$.

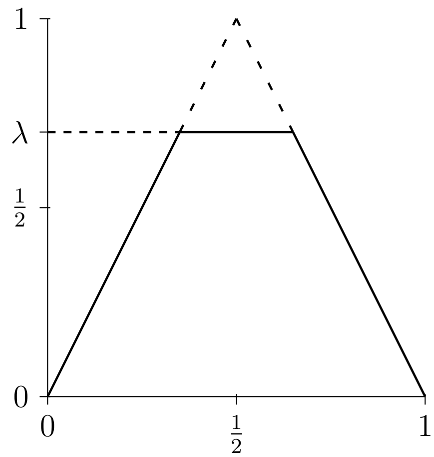

Figura 5.3: Función tienda truncada

(1) Sea $x \in K_\lambda$. Si $\frac{\lambda}{2} < x \leq \frac{1}{2}$, entonces $\lambda < 2x$. Esto es, $\lambda < T(x)$. Por lo tanto, $T_\lambda(x) = \lambda$. Ahora bien, si $\frac{1}{2} < x \leq 1 - \frac{\lambda}{2}$, entonces $\lambda < 2 - 2x$, lo que nos lleva a que $\lambda < T(x)$. Por lo tanto, $T_\lambda(x) = \lambda$. En cualquier caso $T_\lambda(x) = \lambda$.

(2) Del punto (1) tenemos que las funciones T_λ y T_γ son constantes en los intervalos $(\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2})$ y $(\frac{\gamma}{2}, 1 - \frac{\gamma}{2})$, respectivamente. Dado que $\lambda < \gamma$, se tiene que:

$$(\frac{\gamma}{2}, 1 - \frac{\gamma}{2}) \subseteq (\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2}).$$

Lo cual implica que las funciones coinciden en el conjunto:

$$I \setminus \left(\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2}\right) = J_\lambda.$$

(3) Se tiene que $T(K_\lambda) = T(\frac{\lambda}{2}, 1 - \frac{\lambda}{2})$. Así $T(\mathcal{O}(\lambda, T)) \subseteq J_\lambda$. Por lo cual, λ es también un punto periódico de T_{λ_n} y más aún, el periodo correspondiente a T_{λ_n}, es el mismo que T.

De los puntos (1), (2) y (3) se concluye la prueba. $\square$

Para poder analizar de manera mas detallada lo que ocurre con la familia de funciones tienda trucadas, debemos recordar una propiedad muy importante que cumple

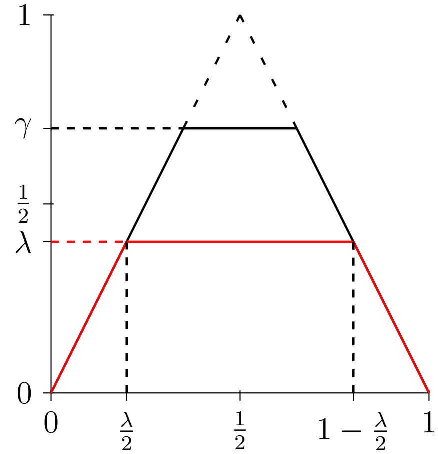

Figura 5.4: Comparación de tiendas truncadas

la función tienda. La Proposición 5.2.1, nos dice que la función tienda posee puntos periódicos de todos los periodos. Considerando esto, construimos la siguiente sucesión. Para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_n = \text{mín}\{\lambda \in I : T \text{ tiene un punto de periodo } 2^n \text{ en } [0, \lambda]\}.$$

Por como definimos la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, λ_n es un punto periódico de T de periodo 2^n. La primera pregunta que resulta obvia es si esta sucesión es convergente. La respuesta es afirmativa.

Proposición 5.2.10. La sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Demostración. Para verificar que es una sucesión convergente, basta con mostrar que es una sucesión creciente y acotada superiormente. Por definición, $\lambda_n \in I$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba que la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente por 1. Ahora veamos que $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por definición de la sucesión, se tiene que T tiene un punto de periodo 2^{n+1} en $[0, \lambda_{n+1}]$. De acuerdo al orden de Sharkovskii $2^{n+1} \lhd 2^n$. Por lo cual, del Teorema de Sharkovskii (Teorema 1.2.32), tenemos que T tiene un punto de periodo 2^n en $[0, \lambda_{n+1}]$. Esto nos indica que:

$$\lambda_{n+1} \in \{\lambda \in I : T \text{ tiene un punto de periodo } 2^n \text{ en } [0, \lambda_n]\}.$$

Por lo tanto $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Es decir, la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. $\square$

La Proposición 5.2.10, nos dice que la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Sea $\lambda^* \in I$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda^*$.

Calcular de manera explícita el valor de λ^* no es una tarea sencilla. Esto no resulta una dificultad para nuestros propósitos, pues nos basta con asegurar la existencia de tal límite. Sin embargo, en [4], se menciona que:

$$\lambda^* = \text{lím}_{n\to\infty}\lambda_n \approx 0.8249080\dots$$

Algunas propiedades relacionadas al caos de las funciones tiendas truncadas son las siguientes.

Proposición 5.2.11. Para cada $\lambda \in [0, \lambda^*)$, la función T_λ no es caótica Li-Yorke y tampoco es caótica Devaney.

Demostración. Sea $\lambda \in (\lambda^*, 1]$. Como la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es creciente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda < \lambda_n$. Luego, de la Proposición 5.2.9, parte (3), se tiene que cada punto periódico de T_λ en el conjunto J_λ es también un punto periódico de T_{λ_n}. Por otro lado, la función T_{λ_n} tiene un número finito de puntos periódicos. Por lo tanto, T_λ tiene únicamente un número finito de puntos periódicos. Así, del Teorema 3.3.22, T_λ no es Li-Yorke caótica. Por otro lado, $Per(T_\lambda)$ es un conjunto finito, por lo cual no es denso en I. Esto nos lleva a que T_λ no es caótica Devaney. $\square$

Las siguientes proposiciones se pueden hallar demostradas con detalle en [4]. La razón por la cual omitimos las pruebas es que estas se realizan desarrollando propiedades del caos Block-Coppel y esta noción no la incluimos en la tesis.

Proposición 5.2.12. La función $T_{\lambda*}$ es caótica Li-Yorke pero no es caótica Devaney.

Proposición 5.2.13. Para cada $\lambda \in (\lambda_*, 1]$, la función T_λ es caótica Li-Yorke y es caótica Devaney.

El sistema dinámico (I, T_{λ^*}) es un ejemplo muy especial pues de acuerdo a la Proposición 5.2.12, sirve de contraejemplo para mostrar que el caos Li-Yorke no implica al caos Devaney.

5.3 Funciones shift

Pasemos a sistemas de otro tipo de espacios métricos. Sea Σ_2 el conjunto de las sucesiones $a_0a_1a_2\dots$ donde $a_n \in \{0,1\}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Sea $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $a, b \in \Sigma_2$:

$$d(a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}}.$$

Con la métrica d, Σ_2 es un espacio métrico compacto. Además, por la elección de la métrica podemos notar que la distancia de cualesquiera dos puntos es a lo más 1, pues $|a_n - b_n| \leq 1$. Para más detalles sobre la dinámica de las funciones que en esta sección se estudian, consulte [9, 26].

5.3.1 La función shift

Definición 5.3.1. La función $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ conocida como *función shift o función corrimiento*, se define como:

$$\sigma(a_0a_1a_2\dots) = a_1a_2a_3\dots$$

Comencemos por ver que σ es una función continua.

Proposición 5.3.2. La función $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua.

Demostración. Sea $a \in \Sigma_2$. Veamos que σ es una función continua en a. Sea $\epsilon > 0$. Pongamos $\delta = \epsilon$. Sea $b \in \Sigma_2$ tal que $d(a,b) < \delta$, luego:

$$\begin{aligned} d(\sigma(a), \sigma(b)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} - \frac{|a_0 - b_0|}{2} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} \\ &= d(a,b). \end{aligned}$$

Así, $d(\sigma(a), \sigma(b)) < \epsilon$. Por lo tanto, σ es una función continua en a. $\square$

El siguiente resultado es únicamente sobre la métrica del espacio Σ_2, pero es útil para probar algunas propiedades de σ.

Lema 5.3.3. Sean $a, b \in \Sigma_2$. Si $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = b_i$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, entonces $d(a, b) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$.

Demostración. Supongamos que $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = b_i$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Por definición:

$$d(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^{k+1}}.$$

Por hipótesis $a_i = b_i$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, luego $|a_i - b_i| = 0$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Así:

$$\begin{aligned} d(a, b) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^{k+1}} \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2^k} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^{m+2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{m+1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(a, b) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$. $\square$

Ahora damos paso a las propiedades relacionadas con el caos en la función shift.

Proposición 5.3.4. La función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es totalmente transitiva.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que σ^n es una función transitiva. Sean U y V conjuntos abiertos y no vacíos de Σ_2. Tomemos $p = (p_0, p_1, \ldots) \in U$ y $t = (t_0, t_1, \ldots) \in$

V, con lo cual existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que $B(p, \epsilon_1) \subseteq U$ y $B(t, \epsilon_2) \subseteq V$. Ahora tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{nk}} < \epsilon_1$. Sea

$$\beta = (p_0, p_1, \ldots, p_{nk-1}, t_0, t_1, \ldots).$$

Por el Lema 5.3.3, se tiene que:

$$d(p, \beta) \leq \frac{1}{2^{nk}} < \epsilon.$$

Así, $\beta \in U$. Luego, $(\sigma^n)^k(\beta) \in (\sigma^n)^k(U)$. Por otro lado:

$$(\sigma^n)^k(\beta) = (t_0, t_1, \ldots) = t.$$

Por lo cual $(\sigma^n)^k(\beta) \in V$. Por lo tanto $(\sigma^n)^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto es, σ^n es una función transitiva. □

Proposición 5.3.5. La función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ cumple que $Per(\sigma)$ es un conjunto denso en Σ_2.

Demostración. Sean $a \in \Sigma_2$ y $\epsilon > 0$. Para probar que $Per(\sigma)$ es un conjunto denso en Σ_2, resta verificar que $B(a, \epsilon) \cap Per(\sigma) \neq \emptyset$. Pongamos $a = (a_0, a_1, \ldots)$ y tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{m+1}} < \epsilon$. Sea $p = (p_0, p_1, \ldots)$ tal que $p_i = a_i \mod (m+1)$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Es decir:

$$p = (a_0, a_1, \ldots, a_m, a_0, a_1, \ldots, a_m, a_0, \ldots).$$

De este modo se cumple que $\sigma^m(p) = p$, por lo cual $p \in Per(\sigma)$. Por otro lado, $p_i = a_i \mod (m+1)$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, lo cual, del Lema 5.3.3, implica que $d(a, p) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$. Por la elección de m, esto nos conduce a que $p \in B(a, \epsilon)$. Por lo tanto, $p \in B(a, \epsilon) \cap Per(\sigma)$. □

Las Proposiciones 5.3.4 y 5.3.5, bastan para obtener conclusiones respecto al caos de σ.

Proposición 5.3.6. La función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es caótica Devaney.

Demostración. De la Proposición 5.3.4, σ es totalmente transitiva. En particular σ es transitiva. Por otro lado de la Proposición 5.3.5, $Per(\sigma)$ es un conjunto denso en Σ_2. Por lo tanto, del Teorema 4.1.9, σ es caótica Devaney. □

La Proposición 5.3.6, nos dice que la función σ es caótica Devaney. Por lo cual, los siguientes resultados: Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.5, nos dan de inmediato la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 5.3.7. La función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ tiene las siguientes propiedades:

(1) Es caótica Li-Yorke.

(2) Es caótica Auslander-Yorke.

(3) Es caótica Wiggins.

Por último, en el Ejemplo 3.1.40, se calcula la entropía de la función σ. Se prueba que:

$$h_{top}(\sigma) = \log(2).$$

Hacemos un listado de las conclusiones obtenidas. La función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ tiene las siguientes propiedades:

(1) Es totalmente transitiva.

(2) Tiene entropía positiva, $h_{top}(\sigma) = log(2)$.

(3) Es caótica Li-Yorke.

(4) Es caótica Devaney.

(5) Es caótica Auslander-Yorke.

(6) Es caótica Wiggins.

5.3.2 Función shift complemento

Ahora presentamos la función *shift complemento* que es otra función definida en Σ_2.

Definición 5.3.8. La función $\sigma' : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es la *función shift complemento* y se define como:

$$\sigma'(a_0 a_1 a_2 \ldots) = a'_1 a'_2 a'_3 \ldots,$$

donde a'_n es el complemento de a_n en $\{0, 1\}$.

En primer lugar, veamos que σ' es topológicamente conjugada a σ.

Definición 5.3.9. Sea $\phi : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ definida por:

$$\phi(a_0 a_1 a_2 \ldots) = (a'_0 a'_1 a'_2 \ldots),$$

donde a'_n es el complemento de a_n en $\{0, 1\}$.

Según la definición de la función ϕ, es sencillo convencerse de que $\phi^{-1} = \phi$, es decir, que ϕ es su propia inversa. Por lo cual, para probar que ϕ es un homeomorfismo, basta con verificar que ϕ es continua.

Proposición 5.3.10. La función $\phi : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua.

Demostración. Sea $a \in \Sigma_2$. Veamos que ϕ es continua en a. Sea $\epsilon > 0$. Veamos primero que para cada $b \in \Sigma_2$, $|a_n - b_n| = |a'_n - b'_n|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos dos casos:

Caso (1): $a_n = b_n$. En este caso $a'_n = b'_n$, por lo cual $|a_n - b_n| = 0 = |a'_n - b'_n|$.

Caso (2): $a_n \neq b_n$. En este caso $a'_n \neq b'_n$, por lo cual $|a_n - b_n| = 1 = |a'_n - b'_n|$.

De los Casos (1) y (2) tenemos que $|a_n - b_n| = |a'_n - b'_n|$ para cada $b \in \Sigma_2$. Pongamos $\delta = \epsilon$. Sea $b \in \Sigma_2$ tal que $d(a, b) < \delta$, luego:

$$\begin{aligned} d(\phi(a), \phi(b)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a'_n - b'_n|}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} \\ &= d(a, b). \end{aligned}$$

Por lo tanto la función ϕ es una isometría. Lo que prueba que ϕ es continua. $\square$

Resta verificar que efectivamente σ y σ' son topológicamente conjugadas mediante el homeomorfismo ϕ.

Proposición 5.3.11. Las funciones σ y σ' son topológicamente conjugadas mediante el homeomorfismo $\phi : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ de la Definición 5.3.9.

Demostración. Sea $a \in \Sigma_2$. Luego:

$$\begin{aligned}(\phi \circ \sigma' \circ \phi^{-1})(a) &= (\phi \circ \sigma' \circ \phi^{-1})(a_0 a_1 a_2 \ldots) \\ &= (\phi \circ \sigma')(a'_0 a'_1 a'_2 \ldots) \\ &= \phi(a'_1 a'_2 a'_3 \ldots) \\ &= (a_1 a_2 a_3 \ldots) \\ &= \sigma(a).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi \circ \sigma' \circ \phi^{-1} = \sigma$. Dado que ϕ es un homeomorfismo, esto prueba que σ y σ' son topológicamente conjugadas. $\square$

La Proposición 5.3.11, nos dice que σ y σ' son topológicamente conjugadas. Por lo cual, los resultados: Teorema 1.4.6, Teorema 3.1.19, Teorema 3.3.19, Teorema 4.1.5, Teorema 4.1.11 y Teorema 4.1.15, prueban que las propiedades dinámicas que hemos verificado de la función shift, son también propiedades de la función shift complemento. A continuación hacemos un listado de dichas propiedades. La función shift complemento cumple que:

(1) Es totalmente transitiva.

(2) Tiene entropía positiva, $h_{top}(\sigma') = log(2)$.

(3) Es caótica Li-Yorke.

(4) Es caótica Devaney.

(5) Es caótica Auslander-Yorke.

(6) Es caótica Wiggins.

5.4 Operadores en espacios $\mathcal{L}_p$

Para finalizar los ejemplos de sistemas dinámicos, presentamos un sistema definido sobre un espacio de funciones. Para más detalles sobre los resultados de esta sección consulte [8].

Sea X un espacio normado compacto. Consideremos el espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, donde:

(1) X es un espacio de Banach[2].

(2) $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel.

(3) $\mu(X) \neq 0$.

Consideremos una función continua $f : X \to X$ tal que:

(1) Para cada $B \in \mathcal{B}$, $f(B) \in \mathcal{B}$ y $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.

(2) Existe $c > 0$ tal que $c\mu(B) \leq \mu(f(B))$, para cada $B \in \mathcal{B}$.

Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio de Lebesgue $\mathcal{L}_p(X)$ es el espacio de Banach de todas las funciones medibles con norma p finita. Para más detalles sobre estos espacios consulte [52, 23].

Definición 5.4.1. Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, $1 \leq p < \infty$ y f una función bimedible (esto es, una función medible que además cumple que $f(B) \in \mathcal{B}$, para cada $B \in \mathcal{B}$). Se define el operador composición $T_f : \mathcal{L}_p(X) \to \mathcal{L}_p(X)$ como:

$$T_f(\phi) = \phi \circ f, \text{ para cada } \phi \in \mathcal{L}_p(X)$$

Proposición 5.4.2. Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, $1 \leq p < \infty$ y f una función bimedible. Se tiene que T_f es un operador lineal continuo.

A continuación presentamos una caracterización de caos Li-Yorke en términos de operadores. La demostración se puede encontrar en el Teorema 1.1 de [8].

[2]Un espacio de Banach es un espacio normado, que es completo con la métrica generada por su norma.

Teorema 5.4.3. El operador composición $T_f : \mathcal{L}_p(X) \to \mathcal{L}_p(X)$ es caótico Li-Yorke si y sólo si existe una sucesión $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturales y una familia no vacía y numerable $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos de medida positiva finita tales que:

(1) $\lim_{j\to\infty}\mu(f^{-\alpha_j}(B_i)) = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

(2) $\sup\left\{\dfrac{\mu(f^{-n}(B_i))}{\mu(B_i)} : i, n \in \mathbb{N}\right\} = \infty$.

Utilizando la caracterización de la Proposición 5.4.3, construimos un ejemplo de un operador que es caótico Li-Yorke. Sean $X = \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$. Sea $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ una función, tal que para cada $(i,j) \in X$:

$$\mu(\{(i,j)\}) = \begin{cases} 2^{-j} & \text{si} \quad j \le 0, \\ 2^{j} & \text{si} \quad 1 \le j \le i, \\ 2^{2i-j} & \text{si} \quad i+1 \le j \le 2i, \\ 1 & \text{si} \quad 2i+1 \le j \le 4i, \\ 2^{-j+4i} & \text{si} \quad 4i+1 \le j. \end{cases}$$

Se tiene que μ es una medida en $\mathcal{B}$. Sea $g : X \to X$ una función definida por:

$$g(i,j) = (i, j-1).$$

Es claro que la función g es biyectiva. Además, para cada $B \in \mathcal{B}$ se cumple que $f(B) \in \mathcal{B}$ y $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$, es decir, g es una función bimedible. Utilizando inducción matemática se puede probar que, dados $(i,j) \in X$:

$$g^{-k}(i,j) = (i, j+k), \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Veamos que el operador composición T_g es caótico Li-Yorke. Para ello utilizamos el Teorema 5.4.3. Consideremos a la familia $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ tal que $B_i = \{(i,0)\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_j = j$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Lo primero que podemos observar de la familia que acabamos de definir es que está formada por conjuntos de medida positiva, pues para cada $i \in \mathbb{N}$:

$$\mu(B_i) = \mu(\{(i,0)\}) = 2^{-0} = 1.$$

Ahora, tomamos $i \in \mathbb{N}$, por lo que existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $J \geq 4i + 1$. Así, para cada $j \geq J$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu(f^{-\alpha_j}(B_i)) &= \mu(f^{-j}(\{(i,0)\})) \\
&= \mu(\{(i,j)\}) \\
&= 2^{-j+4i} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-4i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\text{lím}_{j\to\infty}\mu(f^{-\alpha_j}(B_i)) = \text{lím}_{j\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-4i} = 0. \tag{5.1}$$

Por otro lado, dados $i, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(f^{-n}(B_i))}{\mu(B_i)} &= \frac{\mu(f^{-n}(\{(i,0)\}))}{2^0} \\
&= \frac{\mu(\{(i,n)\})}{1} \\
&= \mu(\{(i,n)\}).
\end{aligned}$$

Sea $r \in \mathbb{R}$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r < 2^n$. Así:

$$r < 2^n = \mu(\{(1,n)\}) = \frac{\mu(f^{-n}(B_1))}{\mu(B_1)}.$$

Esto último implica que el conjunto $\{\frac{\mu(f^{-n}(B_i))}{\mu(B_i)} : i, n \in \mathbb{N}\}$ no es un conjunto acotado superiormente, por lo cual:

$$\sup\left\{\frac{\mu(f^{-n}(B_i))}{\mu(B_i)} : i,n\in\mathbb{N}\right\}=\infty. \tag{5.2}$$

De 5.1 y 5.2 aplicando el Teorema 5.4.3, obtenemos que T_g es caótico Li-Yorke.

5.5 Resultados derivados de los ejemplos

En el Capítulo 4, el diagrama de la Figura 4.1, nos muestran las relaciones positivas que existen ente el caos Li-Yorke, el caos Devaney, el caos Auslander-Yorke, el caos Wiggins y la entropía topológica positiva, de manera general en sistemas dinámicos definidos sobre espacios métricos compactos. Sin embargo, es también útil conocer las relaciones negativas existentes, es decir, cuándo podemos asegurar que una relación en general no ocurre. Para ello es necesario contar con contraejemplos, que hacen las veces de demostración en las relaciones negativas.

En este capítulo, en la Subsección 5.2.2, nos dedicamos a construir la función T_{λ^*}. La Proposición 5.2.12, nos dice que esta función es caótica Li-Yorke, pero no caótica Devaney. Por lo cual, esta función sirve de contraejemplo para mostrar que el caos Li-Yorke no implica al caos Devaney. Por otra parte, los siguientes resultados: Teorema 4.2.8 y Teorema 4.2.9 hablan de la existencia de contraejemplos de funciones definidas en I, los cuales se muestran como relaciones negativas en el diagrama de la Figura 4.2.

De manera más específica, el Teorema 4.2.8 nos dice que el caos Li-Yorke no implica la entropía topológica positiva del sistema. El Teorema 4.2.9, parte (2), nos dice que el caos Wiggins no implica la entropía positiva. Finalmente el Teorema 4.2.9, parte (3), nos dice que el caos Li-Yorke no implica al caos Wiggins. A pesar de que todos los resultados anteriormente mencionados, tratan de sistemas dinámicos definidos en I, las relaciones negativas, también lo son para espacios métricos en general. Pues en particular I es un espacio métrico compacto. Además, como consecuencia del Teorema 4.2.9, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.5.1. Existe un espacio métrico X y una función $f : X \to X$ tal que f es caótica Li-Yorke y no es caótica Auslander-Yorke.

Demostración. Sea $f : I \to I$ la función del Teorema 4.2.9, parte (3), la cual es caótica Li-Yorke y no es caótica Wiggins. Luego, del contrarrecíproco del Teorema 4.2.7, se tiene que f no es caótica Auslander-Yorke. $\square$

El Teorema 5.5.1, nos dice que el caos Li-Yorke no implica al caos Auslander-Yorke.

El diagrama de la Figura 5.5, nos muestra todas las relaciones, tanto positivas como negativas (flechas y flechas canceladas, respectivamente), que hemos analizado a lo largo de la tesis para sistemas dinámicos definidos sobre espacios métricos compactos. Las condiciones C_1 y C_2 dependen de las hipótesis de los resultados que se utilizan para completar este diagrama. Enunciamos todos estos resultados a continuación: Teorema 3.3.29, Teorema 4.2.6, Teorema 4.2.5, Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.7, Teorema 4.2.8, Teorema 4.2.9, Teorema 4.2.11, Proposición 5.2.12 y Teorema 5.5.1.

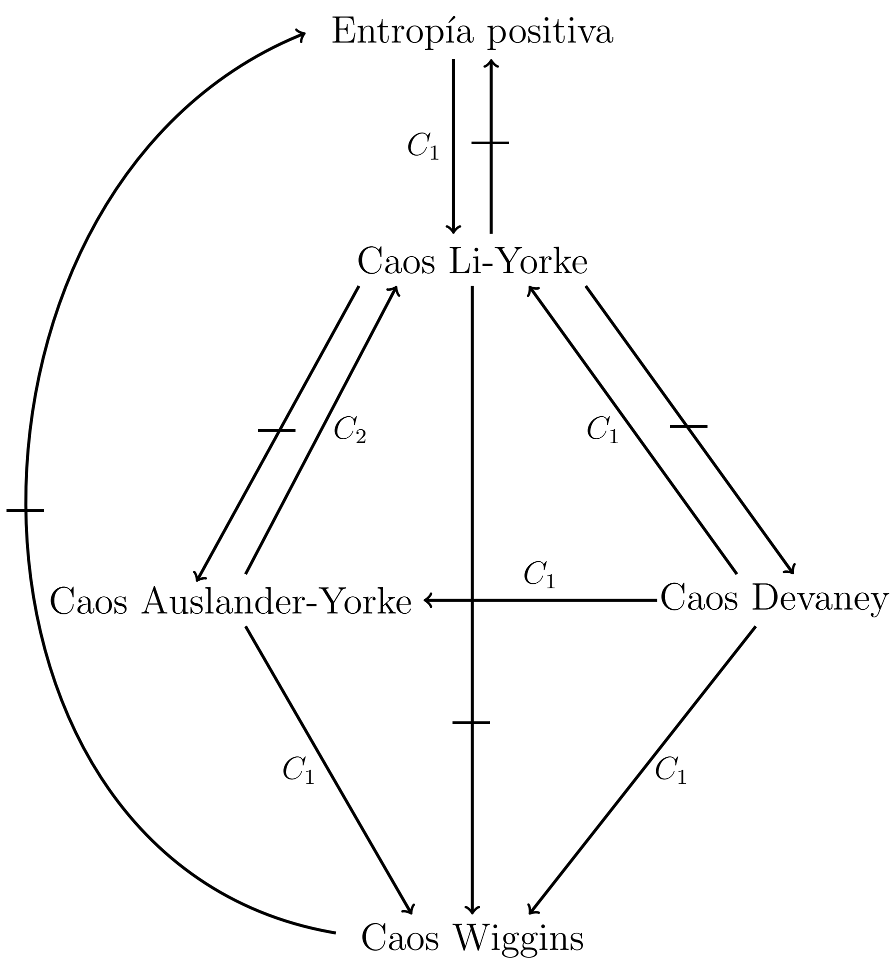

Figura 5.5: Diagrama completo de relaciones para espacios métricos compactos
C_1: Un sistema dinámico (X, f) con X compacto y f continua.
C_2: Un sistema dinámico (X, f) con X compacto, f continua y $Per(f) \neq \emptyset$.

Conclusiones

Orden es la propiedad que se espera encontrar siempre en la naturaleza, pues desde el principio de los tiempos el orden se consideraba una propiedad intrínseca del universo. Sin embargo, con el paso de los años se descubrió que el caos, aquello que era entendido como lo opuesto al orden, se hallaba presente hasta en los rincones más inesperados del cosmos.

El caos ha sido estudiado desde varios enfoques: filosófico, religioso y científico. Desde el punto de vista científico, los estudios del caos comenzaron en la física. Más tarde, el formalismo matemático se hizo presente. Así, para estudiar el caos, había que definirlo de manera matemática precisa para poder manipularlo. Por lo tanto al tratar de responder la pregunta ¿qué es el caos? en el sentido matemático y aún si restringimos el significado de esta palabra al caos determinista, es decir, al comportamiento caótico de un sistema dinámico, los matemáticos sugieren diferentes respuestas. La primera vez que se usó la palabra caos en matemáticas, fue en el 1975 en el artículo *Period three implies Chaos* de L. Li y J. Yorke [35]. Sin embargo, conforme transcurrió el tiempo, surgieron distintas definiciones de lo que significa para un sistema ser caótico.

En el presente trabajo de tesis, nos dedicamos a estudiar algunos tipos de caos en dinámica topológica. Específicamente, caos Li-Yorke, caos Auslander-Yorke, caos Wiggins y caos Devaney. Además las nociones relacionadas a éstos, tales como: transitividad, sensibilidad, entropía topológica, conjuntos scrambled y equicontinuidad.

A lo largo de la tesis, se analizan los distintos tipos de caos antes mencionados y se estudia de manera detallada las relaciones que existen entre estos conceptos. Los resultados más significativos los enunciamos a continuación. Teorema 3.3.29, Teorema 4.2.6, Teorema 4.2.5, Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.7, Teorema 4.2.8, Teorema 4.2.9, Teorema 4.2.11, Proposición 5.2.12 y Teorema 5.5.1. Estos resultados son utilizados para construir el diagrama de la Figura 5.5, el cual muestra de manera simbólica las relaciones entre los conceptos estudiados en la tesis.

Observando el diagrama de la Figura 5.5, podemos obtener distintas conclusiones. En primer lugar, podemos observar que no existen dos definiciones de caos equivalentes en todas las definiciones que hemos dado. Esto nos dice que no podemos dar una definición que englobe todos los tipos de comportamientos de los sistemas caóticos.

Otra de las preguntas que planteamos al comienzo de la tesis, es ¿existe una definición más general entre las definiciones que hemos dado? Al observar el diagrama de la Figura 5.5, podemos observar que el caos Li-Yorke es un buen candidato para esta tarea, pues el caos Li-Yorke es más general que el caos Auslander-Yorke, el caos Devaney y la entropía positiva en un sistema. Sin embargo, no lo podemos asegurar, pues en los resultados aquí presentados no se muestra si el caos Li-Yorke es más general que el caos Wiggins.

Hay que mencionar que el diagrama que aquí presentamos no es un diagrama completo, es decir, faltan por analizar algunas de las posibles relaciones. Por ejemplo las relaciones que existen entre la entropía topológica positiva y los tres tipos de caos: Auslader-Yorke, Wiggins y Devaney. Los resultados en cuanto a esto sólo se conocen para sistemas definidos en el intervalo I (ver Figura 4.2), pero en espacios métricos compactos en general, no se cuenta con información al respecto. Esto puede significar un posible trabajo futuro.

Sin embargo, con los resultados vistos en la tesis es suficiente para convencernos que no es posible atrapar todos los misterios de los sistemas caóticos en una sola definición.

Índice Alfabético

σ-álgebra de subconjuntos, 5

Caos
  Auslander-Yorke, 124
  Devaney, 126
  Li-Yorke, 115
  Wiggins, 130
Conjugación topológica, 36
Conjunto
  (n, ϵ)-abarcador, 86
  (n, ϵ)-separado, 86
  $+$invariante, 28
  $-$invariante, 28
  G_k, 51
  de Cantor, 117
  de Mycielski, 118
  de primera categoría, 107
  denso, 4
  denso en ninguna parte, 4, 107
  invariante, 29
  minimal, 45
  omega límite, 25
  scrambled, 114
Cubierta abierta de un espacio, 68

Entropía
  con respecto a una cubierta, 76
  condicional, 96
  de una cubierta, 72
  de una partición medible, 94
  métrica, 100
  respecto a una partición medible, 97
  topológica, 77
Espacio
  de Lebesgue, 165
  de medida, 6
  métrico, 3
Espacio métrico
  compacto, 68

Función
  2-rígida, 110
  Equicontinua, 57
  medible, 7
  producto, 2
  rotación irracional, 146
  sensible a las condiciones iniciales, 55
  Shift, 159
  Shift complemento, 163
  tienda, 152
  topológicamente transitiva, 33
  totalmente transitiva, 33

uniformemente rígida, 110

Isometría, 4

Lema de Lebesgue, 84

Métricas uniformemente equivalentes, 3
Medida, 6
f-invariante, 7
regular, 8

Órbita de un punto, 11

Partición generadora, 101
Principio variacional, 106
Punto
estable, 48
fijo, 15
fijo atractor, 17
fijo repulsor, 17
inestable, 48
no errante, 27
periódico, 18
preperiódico, 19
transitivo, 42
aislado, 4
recurrente, 27

Refinamiento de cubiertas, 84
Relación
asintótica, 111
proximal, 111
scrambled, 114

Sistema Dinámico, 10
discreto, 10
minimal, 46
continuo, 10
Subcubierta minimal, 71

Teorema
de categoría de Baire, 44
de Sharkovskii, 23

El universo tachonado
de mil caminos sin andar
que el tiempo ha trazado
como un capricho del azar.

Por la trémula finura
de los aleteos pequeños
delicados como sueños
dió inicio esta aventura.

Más medida está la duda
que llega como cualquiera
dando luz a la quimera
dejando la ilusión muda.

Inefable el desconcierto
serendipia al intentar
este universo hacer nuestro
más nos debemos resignar.

Y como sé que el caminar
no solo deja sus huellas hoy
tomo las mías y me voy
a buscar nuestro final.

D.I.F.S.

Bibliografía

[1] R. Adler, A. Konheim y M. McAndrew, Topological entropy, *Transactions of the American Mathematical Society*, 114(2): 309-319, 1965.

[2] E. Akin, J. Auslander y K. Berg. When is a transitive map chaotic, *Convergence in Ergodic Theory and Probability, Walter de Gruyter & Co*, 5: 25-40, 1996.

[3] F. Argoul, A. Arneodo, P. Richetti, J. C. Roux, H. Swinney. Chemical chaos: from hints to confirmation, *Accounts of Chemical Research*, 20(12): 436-442, 1987.

[4] B. Aulbach y B. Kieninger, On three definitions of chaos, *Nonlinear Dynamical Systems Theory* 1(1): 23-37, 2001.

[5] J. Auslander, y J. A. Yorke, Interval maps, factors of maps, and chaos, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 32(2):177-188, 1980.

[6] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey, On Devaney's definition of chaos, *The American mathematical monthly*, 99(4):332-334, 1992.

[7] J. Barrow-Green, Poincaré and the three body problem, *American Mathematical Society*, 11, 1997.

[8] N.C. Bernardes Jr., U.B. Darji y B. Pires, Li-Yorke Chaos for Composition Operators on L^p-Spaces. *arXiv preprint arXiv:1810.04210*. 2018.

[9] I. Bhaumik y B. S. Choudhury, The Shift Map and the Symbolic Dynamics and Application of Topological Conjugacy, *Department of Mathematics, Bengal Engineering and Science University,* 13: 149-160, 2009.

[10] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, y A. Maass, On Li-Yorke pairs, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 547: 51-68, 2002.

[11] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Springer, 2006.

[12] R. Bowen, Topological entropy for noncompact sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, 184: 125-136, 1973.

[13] K. Butt, An Introduction to t

Topological Entropy, 2014.

[14] G. Contreras, *Ejemplos de Sistemas Dinámicos: un curso introductorio*, CIMAT, P. O. Box 402, 36.000 Guanajuato Gto, México, 2006.

[15] K. M. Cuomo y A. V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Physical review letters*. 71(1): 65, 1993.

[16] R. L. Devaney y J. P. Eckmann, An introduction to chaotic dynamical systems, *Physics Today*, 40: 72, 1987.

[17] L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Opera Omnia Series*, I-7: 1-10, 176.

[18] S. Flores-Rodríguez. *Un acercamiento a la dinámica colectiva*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Física y Matemáticas, 2017.

[19] T. Gamelin y R. E. Greene, *Introduction to topology*, Courier Corporation, 1999.

[20] D. Martínez-González y G. González-Blé, Entropía topológica de funciones multimodales, *Journal of Basic Sciences*, 2(4), 2016.

[21] T. Goodman, Relating topological entropy and measure entropy, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 3(2): 176-180, 1971.

[22] L. W. Goodwyn, Topological entropy and expansive cascades (dissertation), *University of Maryland*, 1968.

[23] G. Grabinsky, Teoría de la medida*Publicaciones de la Facultad de Ciencias*, UNAM, 2010.

[24] J. Guckenheimer, Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps, *Communications in Mathematical Physics*, 70(2): 133-160, 1979.

[25] R. G. Harrison y D. J. Biswas, Chaos in light, *Nature*, 321(6068): 394, 1986.

[26] R. B. Hena, Chaotic features of the generalized shift map and the complemented shift map, *Barisal University*, 2017.

[27] F. Hernández, Teoría de conjuntos: una introducción, *Sociedad Matemática Mexicana*, 2003.

[28] W. Huang y X. Ye, Devaney's chaos or 2-scattering implies Li–Yorke's chaos, *Topology and its Applications*, 117(3): 259-272, 2002.

[29] I. Iribarren. *Topología de los espacios métricos*, Limusa-Wiley, 1973.

[30] A. Katok, Fifty years of entropy in dynamics: 1958–2007, *Journal of Modern Dynamics*, 1(4): 545, 2007.

[31] J. King y H. Méndez, Sistemas dinámicos discretos, *Publicaciones de la Facultad de Ciencias*, UNAM, 2014.

[32] G.C. Layek, *Theory of Bifurcations: An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 2015.

[33] J. Li y X. D. Ye, Recent development of chaos theory in topological dynamics, *Acta Mathematica Sinica, English Series,* Vol. 32, (2016), 83–114, Springer.

[34] S. Li, ω-chaos and topological entropy, *Transactions of the American Mathematical Society*, 339(1): 243-249, 1993.

[35] T. Li, y J. Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly.* 82(10): 985-992, 1975.

[36] J. Listing, *Vorstudien zur topologie*, Ripol Classic, 1848.

[37] E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences.* 20(2): 130-141, 1963.

[38] A. Luque, *Introducción a la dinámica de aplicaciones del círculo y problemas relacionados*, Departament de Matemaática Aplicada I, Universitat Politécnica de Catalunya, 2009.

[39] J. Mai, The structure of equicontinuous maps, *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(10): 4125-4136. 2003.

[40] J.R. Munkres, *Topología*, España Prentice Hall. 2000.

[41] H. Poincaré, Analysis situs. *J. de l'École Poly,* Vol. 1, 1895.

[42] J. P. Rijo, *Metric Entropy and Topological Entropy: The Variational Principle*, Tesis de maestría, Técnico de Lisboa, 2014.

[43] A. Rojas-Carrasco. *Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados*, Tesis de Maestría en Modelación Matemática, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Física y Matemáticas, 2017.

[44] H. L. Royden y P. Fitzpatrick, *Real analysis*, Macmillan New York, 32, 1988.

[45] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-hill New York, 1964.

[46] S. Ruette, Transitive sensitive subsystems for interval maps, *Studia Math*, 169(1): 81-104, 2005.

[47] A. N. Sharkovskii, Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself, *Ukrainian Math*, 16: 61-71, 1984.

[48] G. F. Simmons, *Introduction to topology and modern analysis*, Tokyo, 1963.

[49] J. Smítal, A chaotic function with some extremal properties, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 87(1): 54-56, 1983.

[50] J. Smítal, Chaotic functions with zero topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 297(1): 269-282, 1986.

[51] A. Valaristos, Equicontinuity of iterates of circle maps, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21(3): 453-458, 1998.

[52] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer Science & Business Media, 2000.

[53] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer Science & Business Media. Vol.2, 2003.

[54] J. Xiong, A chaotic map with topological entropy, *Transactions of the American Mathematical Society*, 4(1): 439-443, 1986