UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DOCTORADO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

Transitividad Topológica en Productos, Productos Simétricos y Productos Simétricos Suspensión

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTORA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

M.M.M. ANAHÍ ROJAS CARRASCO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCO BARRAGÁN MENDOZA
CO-DIRECTOR DE TESIS:
DR. SERGIO MACÍAS ÁLVARES (UNAM)

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO, OCTUBRE DE 2020

Dedicatoria

A mis padres, Rosario Maribel y Naguib Guadalupe.

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial:

A mis padres, Rosario Maribel Carrasco Aguilar y Naguib Guadalupe Rojas Cruz, por el apoyo incondicional que me han brindado siempre.

A mi director de tesis, Dr. Franco Barragán Mendoza y a mi co-director de tesis, Dr. Sergio Macías Álvarez, por la atención que me brindaron durante la elaboración de este trabajo de investigación.

A mis sinodales, Dr. Jesús Tenorio Arvide, Dra. Alicia Santiago Santos, Dr. Virgilio Vázquez Hipólito, Dr. Segio Palafox Delgado, Dra. María de Jesús López Toriz y Dr. Raúl Escobedo Conde, por la revisión exhaustiva de este trabajo de tesis, buscando siempre la mejora del mismo.

Transitividad Topológica en Productos, Productos Simétricos y Productos Simétricos Suspensión

Anahí Rojas Carrasco

Octubre de 2020

Índice general

Introducción

Esta tesis se encuentra ubicada dentro de dos ramas de la Matemática, Topología y Sistemas Dinámicos. Un *sistema dinámico* es un par (X, f), donde X es un espacio topológico y $f : X \to X$ es una función. Por otro lado, dados un espacio topológico X y un entero positivo n, se definen el *n-ésimo producto simétrico de X*, $\mathcal{F}_n(X)$, que consiste de todos los subconjuntos no vacíos de X con a los más n puntos [26] y la función inducida $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ dada por $\mathcal{F}_n(f)(A) = f(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}_n(X)$ [10]. De esta manera, el sistema dinámico (X, f), induce el sistema dinámico $(\mathcal{F}_n(X), \mathcal{F}_n(f))$. Desde la introducción del espacio topológico $\mathcal{F}_n(X)$ y la función inducida $\mathcal{F}_n(f)$ se han seguido principalmente dos líneas de investigación:

(L1) Dada una propiedad $\mathcal{P}$ definida en algún espacio topológico, se analizan las relaciones que existen entre las siguientes dos condiciones:

(1) X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

(2) $\mathcal{F}_n(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

(L2) Dada una clase de funciones entre espacios topológicos, $\mathcal{M}$, se investiga qué relaciones existen entre las siguientes condiciones:

(1) $f \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

Referente a (L1), en [9, 11, 30] y [32] se analizan varias propiedades que son conocidas dentro de la teoría de continuos, por ejemplo, cuando $\mathcal{P}$ es alguna de las siguientes propiedades: tipos de conexidad, tipos de aposindésis, unicoherencia, por mencionar algunas.

Respecto a (L2), en [6, 10, 15] y [53] se analizan clases de funciones que son conocidas dentro de la teoría de continuos, por ejemplo, cuando $\mathcal{M}$ es alguna de las siguientes clases de funciones: confluente, ligera, monótona, abierta, MO, pseudo-confluente, casi-interior, débilmente confluente, débilmente monótona, casi monótona, atriódica, libremente descomponible, de unión, monótonamente refinable, refinable, semi-confluente, semi-abierta, simple, fuertemente libremente descomponible, atriódica, homeomorfismo local, localmente confluente, localmente débilmente confluente, fuertemente monótona o débilmente semi-confluente.

Siguiendo estas ideas, G. Acosta, A. Illanes, H. Méndez-Lango, J. Camargo, C. García, A. Ramirez y G. Higuera en [1, 28, 41] y [47], consideran los hiperespacios $2^X, \mathcal{C}(X), \mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(X)$ junto con sus funciones inducidas $2^f, \mathcal{C}(f), \mathcal{C}_n(f)$ y $\mathcal{F}_n(f)$ y estudian (L1) y (L2) considerando propiedades dinámicas, principalmente la transitividad topológica en continuos.

Sean $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, con $m \geq 2$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la función $\prod_{i=1}^m f_i : \prod_{i=1}^m X_i \to \prod_{i=1}^m X_i$ dada por $\prod_{i=1}^m f_i((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m))$, para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Esta función es llamada *función producto*. Recientemente, se inició el estudio de las líneas de investigación (L1) y (L2) para el sistema dinámico $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$. De este modo, podemos analizar las relaciones entre los sistemas dinámicos (1) $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i), \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))$; (2) $(\mathcal{F}_n(X_i), \mathcal{F}_n(f_i))$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$; (3) $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (4) (X_i, f_i), para cada $i \in \{1, \ldots, , m\}$. B. Hou, G. Liao y H. Liu [48] consideraron dos espacios métricos compactos sin puntos aislados X y Y, y dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, y demostraron el siguiente resultado: si f y g son funciones sensitivas, entonces la función $2^{f\times g} : 2^{X\times Y} \to 2^{X\times Y}$ es sensitiva. Más tarde, N. Değirmenci y Ş. Koçak [34] consideraron dos espacios métricos, X y Y, y dos funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ (no necesariamente continuas) y analizaron las relaciones entre f, g y $f \times g$ cuando alguna de ellas es una función caótica en el sentido de Devaney. En particular, demostraron el siguiente resultado: si f es continua y caótica en el sentido de Devaney, y g es caótica en el sentido de Devaney y mezclante (no necesariamente continua), entonces $f \times g$ es caótica en el sentido de Devaney. Años después, X. Wu y P. Zhu [87] demostraron que para cada entero $m \geq 2$, si $\prod_{i=1}^m f_i$ es caótica en el sentido de Devaney, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es también caótica en el sentido de Devaney. Además, demostraron que si $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es transitiva. El recíproco no es cierto en general. En [87], X. Wu y P. Zhu consideraron espacios métricos sin puntos aislados y funciones continuas. Más aún, R. Li y X. Zhou [61] analizaron relaciones entre f, g y $f \times g$ cuando alguna de ellas es: topológicamente transitiva, topológicamente débilmente mezclante, sindéticamente transitiva, cofinitamente sensitiva, multi-sensitiva y ergódicamente sensitiva, siempre considerando espacios métricos y funciones no necesariamente continuas. X. Wu, J. Wang y G. Chen [86] estudiaron la $\mathcal{F}$-sensitividad y la multi-sensitividad del sistema dinámico $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$, cuando X y Y son ambos espacios métricos compactos. Recientemente, K. B. Mangang [66] estudió el caos Li-Yorke del sistema dinámico producto $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ cuando cada sistema dinámico (X_i, f_i) tiene dicha propiedad. En particular, demostró que (X, f) y (Y, g) son sistemas dinámicos exactos si y sólo si el sistema dinámico producto $(X \times Y, f \times g)$ es exacto. En este último trabajo, X y Y son espacios métricos compactos y f y g son funciones continuas.

Siguiendo las ideas en [34, 48, 61, 66, 86] y [87], para este trabajo de tesis nos planteamos, entre muchas otras preguntas, las que mostramos a continuación:

(a) ¿Bajo qué hipótesis las condiciones (1) la órbita del punto $(x_1, \ldots, x_m)$ bajo la función $\prod_{i=1}^m f_i$ es densa en $\prod_{i=1}^m X_i$ y (2) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, la órbita del punto x_i bajo la función f_i es densa en X_i, son equivalentes?

(b) ¿Es una condición necesaria y suficiente que el conjunto de puntos periódicos de la función $\prod_{i=1}^{m} f_i$ sea denso en $\prod_{i=1}^{m} X_i$ para que el conjunto de puntos periódicos de la función f_i sea denso en X_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$?

(c) ¿Bajo qué condiciones la órbita-transitividad de las funciones f_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, es equivalente a la órbita-transitividad de la función $\prod_{i=1}^{m} f_i$?

Con el fin de hacer una contribución al estudio de la transitividad topológica en productos y productos simétricos, sea $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: exacta, mezclante, transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, suavemente mezclante, exactamente Devaney caótica, minimal inversa, totalmente minimal, dispersora, Touhey o un F-sistema, en esta tesis también estudiamos relaciones entre las siguientes cuatro condiciones:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

(2) $\prod_{i=1}^{m} f_i \in \mathcal{M}$.

(3) $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i) \in \mathcal{M}$.

(4) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i) \in \mathcal{M}$.

Es importante enfatizar que en los artículos antes mencionados, los autores trabajan con espacios métricos compactos o espacios métricos sin puntos aislados y funciones continuas. En este trabajo de investigación contestamos preguntas similares a las que se pueden encontrar en [34, 48, 61, 66, 86] y [87], considerando espacios topológicos y funciones no necesariamente continuas.

Por otro lado, al considerar los conjuntos unipuntuales de X se define el subconjunto $\mathcal{F}_1(X)$ de $\mathcal{F}_n(X)$ y, si n es un entero mayor o igual que dos, se denota con $\mathcal{SF}_n(X)$ al espacio cociente $\mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X)$ [9]. Este espacio es llamado *n-ésimo producto simétrico suspensión del espacio topológico X*. También, se define la función inducida $\mathcal{SF}_n(f) : \mathcal{SF}_n(X) \to \mathcal{SF}_n(X)$, la cual se conoce como *función inducida por f al n-ésimo producto simétrico suspensión de X* [10]. De esta manera, F. Barragán, A. Santiago-Santos y J. Tenorio [17] agregan las condiciones (3) $\mathcal{SF}_n(X) \in \mathcal{P}$ y (3) $\mathcal{SF}_n(f) \in \mathcal{M}$ a las líneas de investigación (L1) y (L2), respectivamente. Considerando los sistemas dinámicos (X, f), $(\mathcal{F}_n(X), \mathcal{F}_n(f))$ y $(\mathcal{SF}_n(X), \mathcal{SF}_n(f))$ en continuos y para funciones continuas, principalmente, analizan las relaciones que existen entre las condiciones (1), (2) y (3) de (L2) para las siguientes clases de funciones: exactas, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, caóticas en el sentido de Devaney, minimales, irreducibles, débilmente abiertas y turbulentas. De este último trabajo surgen para nosotros las siguientes preguntas:

(i) ¿Los resultados que se obtienen en [17], siguen siendo válidos considerando espacios topológicos más generales?

(ii) ¿Qué relaciones existen entre las funciones f, $\mathcal{F}_n(f)$ y $\mathcal{SF}_n(f)$ cuando alguna de ellas es: órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, minimal inversa, exactamente Devaney caótica, un F-sistema, totalmente minimal, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}?

Por esta razón, en este trabajo de tesis también estudiamos relaciones entre los sistemas dinámicos (X, f) y $(\mathcal{F}_n(X), \mathcal{F}_n(f))$, considerando espacios topológicos y funciones no necesariamente continuas, y relaciones entre estos mismos, vía el sistema $(\mathcal{SF}_n(X), \mathcal{SF}_n(f))$ cuando X es un espacio topológico compacto, perfecto y de Hausdorff y f no necesariamente continua. Específicamente, si $\mathcal{M}$ es alguna de las siguientes clases de funciones: exacta, mezclante, transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, suavemente mezclante, exactamente Devaney caótica, minimal inversa, totalmente minimal, dispersora, Touhey o un F-sistema, estudiamos relaciones entre las condiciones (1), (2) y (3) de la línea de investigación (L2).

Es importante recalcar que para las funciones: exactas, mezclantes, transitivas, débilmente mezclantes, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, caóticas en el sentido de Devaney y minimales, las funciones inducidas $\mathcal{SF}_n(f)$ ya han sido analizadas cuando X es un continuo y $f : X \to X$ es una función continua [17]. En esta tesis, generalizamos algunos resultados de [17] a espacios topológicos compactos, perfectos y de Hausdorff y funciones no necesariamente continuas. Para el resto de las clases de funciones que se mencionan en el párrafo anterior, el análisis de las funciones inducidas $\mathcal{SF}_n(f)$ no se encuentra en ningún otro trabajo.

De este trabajo de tesis se publicaron dos artículos [13] y [78] y seguimos trabajando en la elaboración de un tercer artículo que esperamos poder someterlo a revisión para su posible publicación.

Para una mejor comprensión de este trabajo de investigación, hemos distribuido su contenido en cinco capítulos. En el capítulo uno presentamos los conceptos de sistemas dinámicos que necesitamos para comprender mejor el resto del trabajo. También, presentamos la definición de cada uno de los tipos de sistemas dinámicos con los que trabajamos en esta tesis, relaciones entre ellos que se dan de manera general y relaciones que se obtienen condicionando al espacio fase o a la función. En el capítulo dos iniciamos el estudio de la transitividad topológica en productos simétricos. En el capítulo tres estudiamos la transitividad topológica en productos y productos simétricos de productos cartesianos. Particularmente, respondemos preguntas del tipo (a), (b) y (c). En el capítulo cuatro analizamos propiedades dinámicas de espacios cociente, principalmente, estudiamos la dinámica de los productos simétricos suspensión de un espacio topológico. Finalmente, en el capítulo cinco presentamos una aplicación de los sistemas caóticos en la Criptografía.

Capítulo 1

Preliminares

Nuestro trabajo de tesis se encuentra ubicado dentro de dos ramas de la matemática, sistemas dinámicos y teoría de hiperespacios. En este primer capítulo presentamos los conceptos básicos de sistemas dinámicos necesarios para un buen desarrollo de este trabajo de investigación. Además, damos la definición de cada uno de los sistemas dinámicos con los que trabajamos, relaciones entre ellos para el caso general (considerando espacios topológicos y funciones no necesariamente continuas) y condiciones para obtener otras relaciones.

1.1. Sistemas dinámicos discretos

Desde tiempos remotos los procesos que evolucionan continuamente con el tiempo han sido de gran interés para muchos investigadores; una de las primeras herramientas que se tuvo para intentar predecir el comportamiento de estos procesos fueron las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, se presentaron algunos inconvenientes que incitaron la búsqueda de métodos más eficaces que ayudaran a resolver esta problemática, el estudio de los sistemas dinámicos es el que más fuerza ha ido cobrando con el paso de los años. Es una larga lista de matemáticos a los que les debemos el poder utilizar hoy en día esta poderosa herramienta que nos permite tener una noción del comportamiento de ciertos fenómenos de la naturaleza en los que está involucrado el movimiento conforme el tiempo transcurre. Sin embargo, las ideas de H. Poincaré y G. D. Birkhoff fueron las que dieron vida a lo que hoy se conoce como teoría de sistemas dinámicos [22, 76].

H. Poincaré trabajó mucho tiempo en tratar de encontrar técnicas topológicas que le ayudaran a predecir el comportamiento de todas las soluciones de una ecuación diferencial no lineal, en lugar de encontrar soluciones individuales de dicha ecuación [76]. Este trabajo de H. Poincaré fue a lo que más tarde se le llamó caos. Después de varios intentos fallidos y en vista de las grandes dificultadas con las que se encontraba H. Poincaré en su lucha por tratar de entender el comportamiento caótico de las ecuaciones diferenciales no lineales, él y grandes matemáticos que seguían sus pasos abandonaron dicha investigación, lo que provocó que el estudio de los sistemas dinámicos pereciera. Pero no todo estaba perdido, pues G. D. Birkhoff compartía las ideas de H. Poincaré sobre la importancia de un análisis cualitativo de las soluciones de una ecuación diferencial no lineal. Además, defendió a toda costa el estudio de procesos iterativos como una forma más simple para intentar comprender el comportamiento dinámico de las ecuaciones diferenciales. Es gracias a las ideas de estas dos personalidades que el estudio de los sistemas dinámicos cobra más fuerza con el paso de los años.

En esta sección presentamos los conceptos de la teoría de sistemas dinámicos necesarios para un buen desarrollo de este trabajo de investigación. Por esta razón, antes de introducir el concepto de sistema dinámico, revisamos algunos conceptos de topología general que más adelante vamos a necesitar. Denotamos con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$ al conjunto de los números naturales, números enteros, números enteros no negativos, números irracionales y números reales, respectivamente.

Por formalidad e importancia, iniciamos definiendo uno de nuestros objetos de estudio.

Definición 1.1.1. Sean X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos de X. Se dice que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *topología sobre* X si cumple:

(1) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

(2) Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.

(3) Sea I un conjunto. Si $U_\alpha \in \tau$, para cada $\alpha \in I$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman *abiertos* y a la pareja (X, τ) se le llama *espacio topológico*.

Definición 1.1.2. Sean (X, τ) un espacio topológico y Y un subconjunto de X. La colección $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ es una topología sobre Y y se denomina *topología de subespacio o relativa*. A la pareja (Y, τ_Y) se le llama *subespacio* de X.

Una subfamilia de los espacios topológicos son los espacios métricos que presentamos a continuación.

Definición 1.1.3. Un *espacio métrico* es una pareja formada por un conjunto no vacío X junto con una función $d : X \times X \to [0, \infty)$, la cual satisface las siguientes condiciones:

(1) Para cada x y y en X, $d(x, y) \geq 0$.

(2) Para cada x y y en X, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(3) Para cada x, y y z en X, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. A esta propiedad se le conoce como *la desigualdad del triángulo*.

Además, a la función d se le llama *métrica* en X y a la pareja (X, d) *espacio métrico*. Si no hay riesgo de confusión, lo denotamos simplemente por X.

Definición 1.1.4. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Se dice que A es *cerrado en* X si el conjunto $X \backslash A$ es abierto en X.

Definición 1.1.5. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $a \in X$. Se dice que a es un *punto adherente* de A si, para cada subconjunto abierto V de X tal que $a \in V$, se cumple que $V \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos adherentes de A en X se le denota por $\mathrm{cl}_X(A)$ y se le llama *adherencia o clausura* de A en X. Si no hay confusión se escribe $\mathrm{cl}(A)$.

Definición 1.1.6. Sean X un espacio topológico y E un subconjunto de X. Se dice que E es *denso* en X si $\mathrm{cl}_X(E) = X$.

Una caracterización de un conjunto denso a la que hacemos referencia a lo largo de este escrito es la que mostramos a continuación.

Teorema 1.1.7. Sean X un espacio topológico y E un subconjunto de X. Luego, E es denso en X si y sólo si, para cada subconjunto abierto no vacío U de X, se cumple que $U \cap E \neq \emptyset$.

Definición 1.1.8. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $x \in A$. Se dice que x es un *punto aislado* de A si existe un subconjunto abierto U de X tal que $U \cap A = \{x\}$. Al conjunto de todos los puntos aislados de A se le denota con $PI(A)$.

Definición 1.1.9. Se dice que un espacio topológico es *perfecto* si no tiene puntos aislados.

Siempre que se habla de propiedades topológicas, forzosamente se tiene que trabajar con la colección de subconjuntos abiertos en un espacio topológico. Sin embargo, restringirse a trabajar con una subcolección de esta familia resulta mucho más práctico y conveniente. Por estas razones es muy importante tener en cuenta la definición y construcción de una base para un espacio topológico.

Teorema 1.1.10. Sean X un conjunto y β una colección de subconjuntos de X. Si β satisface las siguientes condiciones:

(1) $X = \bigcup\{B : B \in \beta\}$ y

(2) Si $B_1, B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,

entonces $\tau_\beta = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : E \text{ es unión de elementos de } \beta\}$ es una topología en X.

Definición 1.1.11. Sean (X, τ) un espacio topológico y β una subcolección de τ. Se dice que β es una *base* para τ si, para cada elemento $A \in \tau$, existe $\mathcal{A} \subseteq \beta$ tal que $A = \bigcup \mathcal{A}$.

Teorema 1.1.12. Sean (X, τ) un espacio topológico y β una subcolección de τ. Luego, β es una base para τ si y sólo si, para cada $A \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ y, para cada $x \in A$, existe $B \in \beta$ con la propiedad de que $x \in B \subseteq A$.

Definición 1.1.13. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un *espacio topológico* T_1 si para cualesquiera dos puntos distintos x y y en X, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \backslash V$ y $y \in V \backslash U$.

Definición 1.1.14. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un *espacio topológico de Hausdorff o T_2* si para cualquier par de puntos distintos x y y de X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.1.15. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un *espacio topológico regular* si para cada subconjunto cerrado F de X y para cada $x \in X \backslash F$, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $F \subseteq U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Existe una clase más grande que la clase de los espacios regulares.

Definición 1.1.16. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *pseudo-regular* si para cualquier conjunto abierto no vacío U de X, existe un subconjunto abierto no vacío V de U tal que $\mathrm{cl}(V) \subseteq U$.

En [63, Ejemplo 5.4] se muestra un espacio pseudo-regular que no es regular.

Dos nociones importantes de las que más adelante vamos a hablar son la conexidad y compacidad de un espacio topológico.

Definición 1.1.17. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *disconexo* si existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Se dice que X es *conexo* si no es disconexo.

Definición 1.1.18. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{U}$ es una *cubierta* de X si $X = \bigcup \mathcal{U}$. Si además, cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, se dice que $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta* de X.

Definición 1.1.19. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ una cubierta de X y $\mathcal{V}$ una subcolección de $\mathcal{U}$. Se dice que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta* de $\mathcal{U}$ para X si $\bigcup \mathcal{V} = X$.

Definición 1.1.20. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Definición 1.1.21. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *parcialmente compacto y pseudo-regular* si existe un subconjunto abierto no vacío U de X tal que $\mathrm{cl}(U)$ es un subespacio de X compacto y pseudo-regular.

Una propiedad muy importante en este trabajo de investigación es la continuidad en una función. Más adelante vamos a ver que esta propiedad es clave para verificar la validez de algunos resultados.

Definición 1.1.22. Sean X y Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es *continua en el punto x* si para cualquier subconjunto abierto A de Y que contiene a $f(x)$, existe un subconjunto abierto B de X que contiene a x y que satisface que $f(B) \subseteq A$. Se dice que f es *continua en X* si es continua en cada punto de X.

La prueba del Teorema 1.1.23 se puede consultar en [70, Teorema 18.1].

Teorema 1.1.23. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es continua.

(2) Para cualquier subconjunto abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en X.

(3) Para cualquier subconjunto cerrado F de Y, $f^{-1}(F)$ es un subconjunto cerrado en X.

(4) Para cualquier subconjunto A de X, $f(\mathrm{cl}_X(A)) \subseteq \mathrm{cl}_Y(f(A))$.

Un espacio muy importante en este trabajo de tesis es el espacio producto que presentamos a continuación.

Definición 1.1.24. Sean X y Y conjuntos no vacíos. Se define y denota su *producto cartesiano* como el conjunto:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

Cuando $X = Y$ al conjunto $X \times X$ se le denota con X^2.

Definición 1.1.25. Sean X y Y espacios topológicos. La *topología producto sobre* $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y.

Definición 1.1.26. Sean X y Y conjuntos no vacíos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones. Se define la *función producto* $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ como:

$$(f \times g)((x, y)) = (f(x), g(y)), \text{ para cada } (x, y) \in X \times Y.$$

Cuando $f = g$ a la función $f \times f$ se le denota con $f^{\times 2}$.

Ahora que tenemos claro los conceptos de espacio topológico y función, estamos listos para definir lo que en este trabajo consideramos como un sistema dinámico.

Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima iteración de f la definimos como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k. Esto es, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id_X$ la función identidad en X. Debe quedar claro que $f^k \circ f^s = f^{k+s}$ y $(f^k)^s = f^{ks}$. Para un subconjunto A de X y k un entero, denotamos con $f^k(A)$ a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geq 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$. En el caso del conjunto que consta de un único punto x, escribimos $f^{-k}(x)$ para denotar al conjunto $f^{-k}(\{x\})$, donde $k > 0$.

Definición 1.1.27. Un *sistema dinámico* es cualquier pareja formada por un espacio topológico X y cualquier función $f : X \to X$ y lo denotamos con (X, f).

Para referirse al sistema dinámico (X, f), generalmente se hace referencia únicamente a la función f.

Definición 1.1.28. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. La *órbita de un punto $x \in X$ bajo f*, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. Esto es: $\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Ejemplo 1.1.29. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x + 1$. La órbita de $x_0 = 1$ bajo f es el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

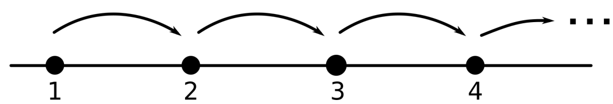


Figura 1.1: Órbita de $x_0 = 1$ bajo $f(x) = x + 1$.

Existen puntos con la particularidad de generar órbitas finitas.

Definición 1.1.30. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que x es un *punto periódico de f* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f se le denota con $Per(f)$.

Ejemplo 1.1.31. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 - 1$. Luego, $x_0 = 0$ es un punto periódico ya que $f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(-1) = 0$. Y la órbita de x_0 es $\{0, -1\}$.

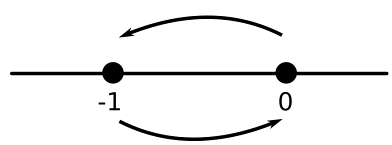


Figura 1.2: Órbita de $x_0 = 0$ bajo $f(x) = x^2 - 1$.

En el Ejemplo 1.1.31, podemos observar que no solo $f^2(x_0) = x_0$, también se cumple que $f^4(x_0) = f^6(x_0) = \cdots = f^{2n}(x_0) = x_0$, con $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, de entre todos estos naturales consideramos uno al cual llamaremos periodo del punto x_0.

Definición 1.1.32. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in Per(f)$. Se dice que x_0 tiene periodo k, si $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}$.

Notemos que si x_0 es un punto periódico de f de periodo k con $k \geq 2$, entonces, para cada $1 \leq j < k$, $f^j(x_0)$ es distinto de x_0. Además, si x_0 es un punto periódico de f de periodo k, a su respectiva órbita se le llama *órbita periódica*.

Definición 1.1.33. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que x es un *punto preperiódico de f* si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x) \in Per(f)$.

En este caso se dice que x tiene *órbita preperiódica*. A estos puntos también se les denomina *eventualmente periódicos*.

Ejemplo 1.1.34. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 - 1$. Luego, $x_0 = 1$ es un punto preperiódico de f ya que $f^2(f(1)) = 0 = f(1)$.

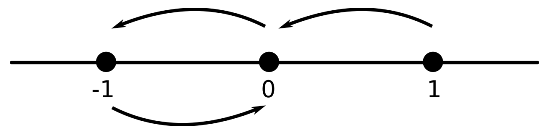


Figura 1.3: Punto preperiódico de $f(x) = x^2 - 1$.

Definición 1.1.35. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que x es un *punto recurrente de* f si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in U$.

Ejemplo 1.1.36. Sean el conjunto $\{0, 1\}$ con la topología discreta, $X = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots$ con la topología producto y $f : X \to X$ la función dada por $f((x_1, x_2, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots)$. Definamos los conjuntos $I_0 = \{0, 1\}, I_1 = \{0, 1, 5^1, 5^1 + 1\}$ y en general, para cada $m \geq 1$, $I_m = I_{m-1} \cup \{5^m + k : k \in I_{m-1}\}$. Finalmente, definamos el conjunto $I = (\bigcup\{I_m : m \in \mathbb{N}\}) \backslash \{0\}$. Se cumple que $(a_1, a_2, \ldots)$ con:

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in I; \\ 0, & \text{si } k \notin I; \end{cases}$$

es un punto recurrente de f [41, Ejemplo 3].

Definición 1.1.37. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que x es un *punto casi-periódico de* f si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{km}(x) \in U$, para cada $k \geq 0$.

Definición 1.1.38. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que x es un *punto no errante de* f si para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.1.39. Sea $X = \{(0,0)\} \bigcup \{(\frac{1}{i}, 0) : i \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(0, \frac{1}{j}) : j \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}) : i, j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dado un entero $m \geq 3$, sea $q_m = (0, 1)$ y consideremos la función $g(m) : X \to X$ dada por:

$$g(m)(p) = \begin{cases} \left(\frac{1}{i-1}, 0\right), & \text{si } \ p = \left(\frac{1}{i}, 0\right) \ \text{ e } \ i \geq 2; \\ (0,0), & \text{si } \ p = (0,0); \\ \left(0, \frac{1}{j+1}\right), & \text{si } \ p = \left(0, \frac{1}{j}\right); \\ (y, 1), & \text{si } \ p = (1, y), \ \text{ donde } \ y = 0 \ \text{ o } \ y = \frac{1}{j}; \\ \left(\frac{1}{i}, \frac{1}{j+1}\right), & \text{si } \ p = \left(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}\right), \ j \leq m^i - i \ \text{ e } \ i \geq 2; \\ \left(\frac{1}{i-1}, \frac{1}{j+1}\right), & \text{si } \ p = \left(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}\right), \ j > m^i - i \ \text{ e } \ i \geq 2. \end{cases}$$

Se cumple que q_m es un punto no errante de $g(m)$ [41, Ejemplo 14].

Además de los puntos que acabamos de revisar, existen dos clases de puntos muy importantes dentro de la teoría de los sistemas dinámicos: puntos transitivos y puntos fijos. Particularmente, los puntos transitivos que presentamos a continuación, juegan un papel muy importante en el desarrollo de capítulos posteriores.

Definición 1.1.40. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que x es un *punto transitivo de* f si la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Al conjunto de todos lo puntos transitivos de f se le denota con $trans(f)$.

Definición 1.1.41. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que x es un *punto fijo de* f si $f(x) = x$. O bien, x es punto fijo de f si $x \in Per(f)$ y tiene periodo uno.

Ejemplo 1.1.42. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$. Luego, los puntos fijos de f son 1, 0 y -1. Sin embargo, sólo 1 y 0 son puntos fijos de g.

Observemos que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{1}{2}x$ tiene un único punto fijo $x_0 = 0$. Si consideramos la órbita $\mathcal{O}(1, f) = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots\}$, observamos que sus elementos se aproximan cada vez más al punto fijo de la función. Por otro lado, si consideramos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -2x$, cuyo punto fijo es también $x_0 = 0$, observamos que en este caso, $\mathcal{O}(1, g) = \{1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots\}$ y así concluimos que los puntos de esta órbita se alejan cada vez más del punto fijo. Este tipo de comportamientos en las órbitas de ciertos puntos nos hace pensar en una clasificación de los puntos fijos de una función.

Definición 1.1.43. Sean X un espacio métrico, $f : X \to X$ una función y $x_0 \in X$ un punto fijo.

(1) Se dice que x_0 es un *punto fijo atractor de* f si para todo conjunto abierto U de X con $x_0 \in U$, existe un subconjunto abierto $V \subseteq U$ tal que $x_0 \in V$, $f(V) \subseteq V$, y para cada $x \in V$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

(2) Se dice que x_0 es un *punto fijo repulsor de* f si existe un subconjunto abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y para cada $x \in U$, con $x \neq x_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin U$.

Existe un método gráfico que nos permite analizar el comportamiento de la órbita de un punto bajo una función continua de una variable real. A continuación explicamos a grandes rasgos dicho procedimiento. Para más detalles puede consultar [54].

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que se conoce la gráfica de la función f. Deseamos conocer el comportamiento de la órbita de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ mediante la gráfica de f. Lo primero que haremos es dibujar la recta $y = x$ y la gráfica de f. Notemos que los puntos de intersección de la recta $y = x$ con la gráfica de f son justamente los puntos fijos de f. Para encontrar la órbita del punto x_0, nos situamos en el punto $(x_0, 0)$ y dibujamos una recta paralela al eje y desde el punto $(x_0, 0)$ a la gráfica de f. Cuando esta recta toca a la gráfica de f, hemos alcanzado el punto $(x_0, f(x_0))$ (Figura

1.4 (a)). A continuación, dibujamos una recta paralela al eje x, desde este último punto hasta la gráfica de la recta $y = x$. Al trazar esta recta, hemos alcanzado el punto de la recta $y = x$, $(f(x_0), f(x_0))$ (Figura 1.4, (b)). Así, el siguiente punto de la órbita de x_0 es $f(x_0)$. Continuando con este proceso, dibujamos una recta paralela al eje y, del punto $(f(x_0), f(x_0))$ de la recta $y = x$ a la gráfica de f, esto nos sitúa en el punto $(f(x_0), f^2(x_0))$ (Figura 1.4, (c)). Luego, al dibujar una recta paralela al eje x, del punto anterior hasta la gráfica de la recta $y = x$, hemos alcanzado el punto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$ (Figura 1.4, (d)), directamente sobre el siguiente punto de la órbita de x_0. Siguiendo este procedimiento logramos obtener el comportamiento de la órbita del punto x_0 bajo la función f de manera gráfica.

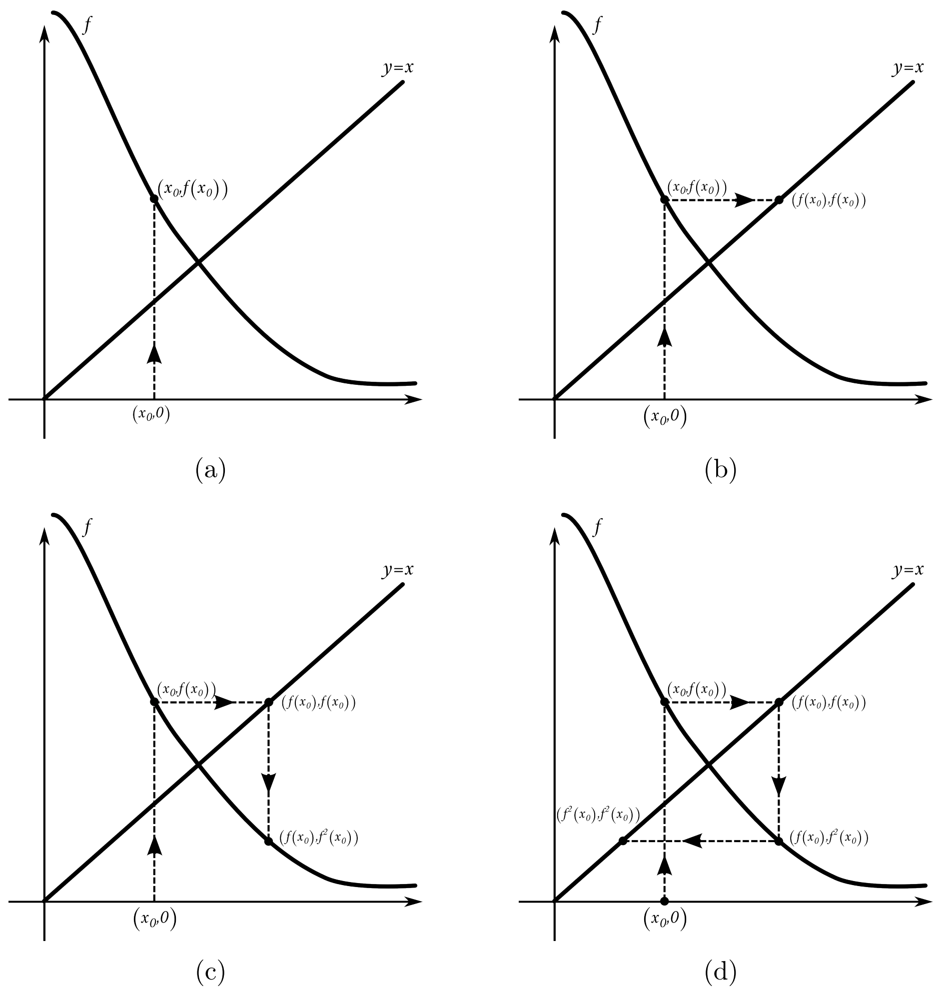


Figura 1.4: Análisis gráfico de órbitas.

Ejemplo 1.1.44. Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta función se conoce como *función tienda*. De acuerdo al método gráfico que acabamos de explicar, la órbita del punto $x_0 = \frac{1}{32}$ bajo T se comporta como se muestra en la Figura 1.5. Así, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{32}, T\right) = \left\{\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0\right\}$.

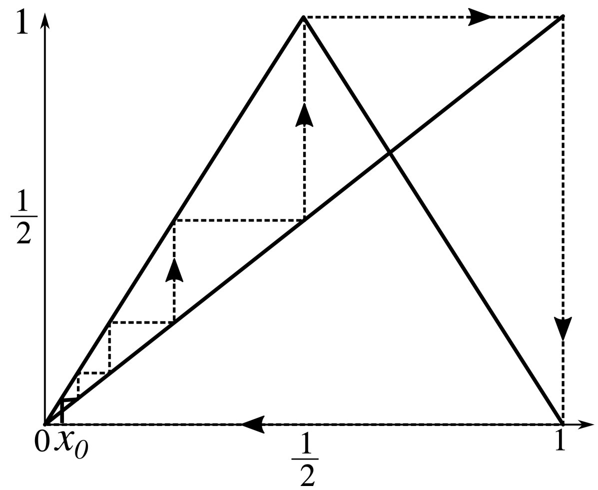


Figura 1.5: Análisis gráfico de la órbita del punto $x_0 = \frac{1}{32}$ bajo T.

Ejemplo 1.1.45. Sean $\lambda \in (0, 4]$ y $L : [0, 1] \to [0, 1]$ la función dada por:

$$L(x) = \lambda x(1 - x), \text{ para cada } x \in [0, 1].$$

Esta función se conoce como *función logística*. El comportamiento de la órbita del punto $x_0 = 0.3$ bajo L se puede ver en la Figura 1.6.

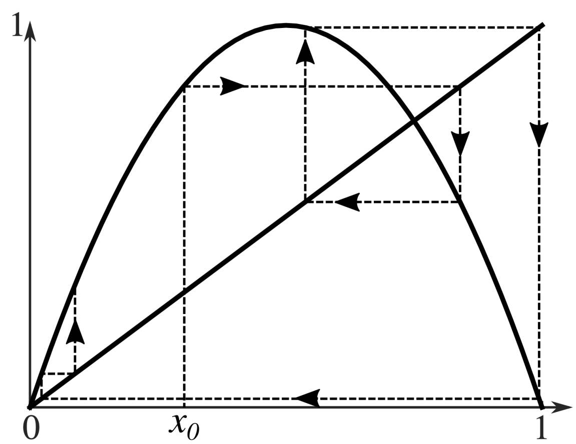


Figura 1.6: Análisis gráfico de la órbita del punto $x_0 = 0.3$ bajo L.

Para finalizar esta sección, presentamos la definición de punto ω-límite y conjunto ω-límite.

Definición 1.1.46. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se dice que $y \in X$ es un punto *ω-límite de x bajo f* si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cualquier abierto U tal que $y \in U$, existe un entero $n \geq k$ tal que $f^n(x) \in U$. El conjunto de todos los puntos ω-límite de x bajo f, se denota por $\omega(x, f)$ y se llama *conjunto ω-límite de x bajo f*.

Ejemplo 1.1.47. Sean $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq [0, 1]$ con la métrica usual y $f : X \to X$ definida por; $f(0) = 0$ y $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ [63, Ejemplo 2.9]. Luego, $0 \in \omega(1, f)$.

A continuación mencionamos algunas propiedades básicas que cumple el conjunto ω-límite.

Teorema 1.1.48. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) El conjunto $\omega(x, f)$ es un subconjunto cerrado de X.

(2) $\omega(x, f) \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f(x), f))$.

(3) Si f es continua, entonces $f(\omega(x_0, f)) \subseteq \omega(x_0, f)$.

Demostración. De [80, Teorema 2.1.3] tenemos que $\omega(x, f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{cl}(\{f^k(x) : k \geq n\})$. Así, se cumple (1).

Sean $y \in \omega(x, f)$ y U un subconjunto abierto de X tal que $y \in U$. Por hipótesis, para $k = 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$ y $f^n(x) \in U$. Así, $f^n(x) \in U \cap \mathcal{O}(f(x), f)$. De aquí, $y \in \mathrm{cl}(\mathcal{O}(f(x), f))$.

Ahora supongamos que f es continua. Sean $x \in f(\omega(x_0, f))$, $k \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Luego, existe $z \in \omega(x_0, f)$ tal que $f(z) = x$. Como $k \in \mathbb{N}$, $k-1 \geq 0$. Luego, de [80, Teorema 2.1.3], $z \in \mathrm{cl}(\{f^n(x_0) : n \geq k-1\})$. Por otra parte, dado que f es continua, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en X. Luego, $f^{-1}(U) \cap \{f^n(x_0) : n \geq k-1\} \neq \emptyset$. Así, existe $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq k-1$, tal que $f^n(x_0) \in f^{-1}(U)$. De donde, $f(f^n(x_0)) = f^{n+1}(x_0) \in U$. Notemos que $n + 1 \geq k$. Por lo tanto, $x \in \omega(x_0, f)$. $\square$

A los interesados en revisar con más detalle las definiciones y propiedades que presentamos en esta sección les sugerimos revisar [38, 54, 77] y [80].

1.2. Funciones del tipo transitivas

Desde hace muchos años el estudio de propiedades particulares en una función se ha convertido en una herramienta importante en muchas áreas de la matemática. Una de las primeras propiedades que se observó en ciertas funciones fue la continuidad. Definición que introduce M. Fréchet en 1910 [39]. Después de la definición de M. Fréchet, empezaron a surgir otras clases de funciones. En 1913, H. Weyl [85] introduce la clase de las funciones abiertas; once años después, R. L. Moore [69] introduce el concepto de función monótona;

y en 1964, J. J. Charatonik [31] establece las condiciones para que una función pertenezca a la clase de las funciones confluentes. Desde la introducción de estas tres clases de funciones, se han definido otras que están contenidas o contienen a alguna de las tres anteriores. Por ejemplo, los homeomorfismos, las funciones semi abiertas, MO, OM y casi interiores, son funciones del tipo abiertas. Por otro lado, las funciones fuertemente monótonas, a lo más monótonas, casi monótonas, débilmente monótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles, son del tipo monótonas. Finalmente, las funciones semiconfluentes, empalmantes, débilmente confluentes, atriódicas, pseudoconfluentes, frágilmente confluentes y frágilmente semiconfluentes, son funciones del tipo confluentes (la definición de cada una de estas funciones se puede consultar en [12]). Hoy en día, las funciones del tipo abiertas, monótonas y confluentes son muy estudiadas dentro de la teoría de continuos. Sin embargo, el inicio de la teoría de sistemas dinámicos trajo consigo la necesidad de comenzar a definir lo que hoy conocemos como funciones dinámicas. En 1912, G. D. Birkhoff [22] introduce el concepto de función minimal y en 1920 inicia el estudio de las funciones transitivas [23], quedando contenida la primera clase dentro de la segunda. Después del surgimiento de las funciones transitivas se empezaron a definir muchas otras que están relacionadas o son equivalentes a dicha clase. Una de las más estudiadas es la clase de las funciones caóticas en el sentido de Devaney. La palabra caos fue usada por primera vez en 1975 por T. Y. Li y J. A. Yorke [60] sin una definición formal, y aunque no existe una definición matemática universal de la palabra caos, la más utilizada es la dada por R. L. Devaney [36]. Otra clase muy estudiada en la teoría de sistemas dinámicos es la clase de las funciones mezclantes, definida en 1955 por W. Gottschalk y G. Hedlung [44]. Posteriormente, en 1967, H. Furstenberg [40] introduce una condición más débil que la de W. Gottschalk y G. Hedlung e inicia el estudio de las funciones débilmente mezclantes. Otras funciones del tipo transitivas son las funciones: exactas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, e irreducibles.

En esta sección presentamos la definición de cada una de estas funciones del tipo transitivas, relaciones que existen entre ellas cuando se consideran espacios topológicos y funciones no necesariamente continuas y algunos ejemplos de estas funciones.

En el desarrollo de este trabajo hablamos de diferentes clases de conjuntos, sin embargo, los conjuntos que presentamos a continuación juegan un papel muy importante en esta investigación.

Definición 1.2.1. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $f : X \to X$ una función. Se dice que A es $+$*invariante* bajo f si $f(A) \subseteq A$, A es $-$*invariante* bajo f si $f^{-1}(A) \subseteq A$ y A es *invariante* bajo f si $f(A) = A$.

Ejemplo 1.2.2. Veamos algunos ejemplos de conjuntos $+$invariantes, $-$invariantes e invariantes.

(1) Sean $X = [0, 1]$ y $f : X \to X$ la función dada por $f(x) = \frac{1}{2}$, para cada $x \in [0, 1]$. Notemos que $f\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \subseteq \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ y $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right) = [0, 1] \not\subseteq \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Lo cual implica que el conjunto $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ es $+$invariante y no es $-$invariante.

(2) Sean $X = [0,1]$ y $f : X \to X$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que $f\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \nsubseteq \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ y $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right) \subseteq \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Así, el conjunto $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ es $-$invariante pero no $+$invariante.

(3) Sean $X = [-2,2]$ y $f : X \to X$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\big||x+1|-1\big|, & \text{si } -2 \leq x \leq 0; \\ \big||-x+1|-1\big|, & \text{si } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Notemos que $f([-1,1]) = [-1,1]$ y $f^{-1}([-1,1]) = [-2,2] \nsubseteq [-1,1]$. Así, concluimos que el conjunto $[-1,1]$ es invariante y sin embargo no es $-$ invariante.

En el Ejemplo 1.2.2 vimos que en un espacio topológico pueden o no existir conjuntos $+$invariantes. Así que tiene sentido darle un nombre especial a aquellos espacios topológicos en los que toda una familia de subconjuntos son $+$invariantes.

En nuestro proyecto de maestría [80] los espacios topológicos en los que cada subconjunto abierto es $+$invariante, fueron muy importantes para verificar el recíproco de muchos de nuestros resultados. Sin embargo, no le dimos un nombre especial a estos espacios. Ya que en este nuevo proyecto de tesis esta propiedad vuelve a ser punto clave en la prueba de resultados, le damos un nombre especial. Por ello, la siguiente definición es una aportación original de este trabajo de tesis.

Definición 1.2.3. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se dice que X es *$+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo* f, si cada subconjunto abierto de X es $+$invariante bajo f.

Ejemplo 1.2.4. Sean $X = \{1,2\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ y $f : X \to X$ la función dada por $f(1) = 1$ y $f(2) = 1$. Luego, X es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f.

Ejemplo 1.2.5. Sean (X, τ) como en el Ejemplo 1.2.4 y $f : X \to X$ la función dada por $f(1) = 2$ y $f(2) = 1$. Notemos que $f^{\times 2}(\{1\} \times \{1\}) = \{(2,2)\} \nsubseteq \{1\} \times \{1\}$. Así, X^2 no es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $f^{\times 2}$.

Observación 1.2.6. Sean X un espacio topológico, U un subconjunto de X y $f : X \to X$ una función. Observemos que si X es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f, entonces X es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f^k, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Lema 1.2.7. Sean s un entero mayor o igual que dos, X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, U_i un subconjunto abierto de X y $x_i \in U_i$. Si X es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f y para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(x_i) \in U_i$, entonces, para $k = \max\{k_1, \ldots, k_s\}$, se cumple que, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, $f^k(x_i) \in U_i$.

Demostración. Supongamos que X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f y que, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(x_i) \in U_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_s\}$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, existe $l_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = l_i + k_i$. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$, $f^k(x_i) = f^{l_i}(f^{k_i}(x_i)) \in f^{l_i}(U_i)$. Puesto que X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f, por la Observación 1.2.6, concluimos que, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, $f^k(x_i) \in U_i$. □

En lo que resta de esta sección presentamos el primer grupo de sistemas dinámicos con el que trabajamos en esta tesis y analizamos inclusiones que se dan entre estas clases de funciones.

Definición 1.2.8. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se dice que f es:

(1) *Exacta* si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$.

(2) *Mezclante* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$.

(3) *Transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

(4) *Débilmente mezclante* si $f^{\times 2}$ es transitiva.

(5) *Totalmente transitiva* si f^s es transitiva, para cada $s \in \mathbb{N}$.

(6) *Fuertemente transitiva* si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$.

(7) *Caótica* si f es transitiva y $Per(f)$ es denso en X (esta definición corresponde al caos en el sentido de Devaney [8]).

(8) *Minimal* si no existe un subconjunto propio A de X el cuál es no vacío, cerrado e invariante.

(9) *Irreducible* si el único subconjunto cerrado A de X tal que $f(A) = X$ es $A = X$.

En el diagrama de la Figura 1.7, presentamos las relaciones que se dan de manera general entre las funciones dadas en la Definición 1.2.8. Es decir, considerando a X como cualquier espacio topológico y a $f : X \to X$ cualquier función (no necesariamente continua). La prueba de estas relaciones entre funciones se pueden consultar en [14, Teoremas 3.1, 3.3, 3.5, 3.6 y 3.7].

$$
\begin{tikzcd}
\text{Irreducible} \arrow[dr] & \text{Exacta} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Mezclante} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Débilmente mezclante} \\
& \text{Sobreyectiva} & \text{Totalmente transitiva} \arrow[d] & \\
& \text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} & \text{Fuertemente transitiva} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.7: Resumen de relaciones que se dan cuando X es un espacio topológico y $f : X \to X$ una función no necesariamente continua.

Bajo ciertas hipótesis se pueden obtener otras relaciones entre las clases de funciones que presentamos en la Definición 1.2.8. En el diagrama de la Figura 1.8 mostramos algunos de estos resultados (con F. transitiva, Déb. M. y T. transitiva denotamos a las funciones fuertemente transitivas, débilmente mezclantes y totalmente transitivas, respectivamente). La prueba de las implicaciones que se muestran en el diagrama de la Figura 1.8 se pueden consultar en [14, Teorema 6.3] y [80, Teoremas 1.5.19 y 1.5.20].

$$
\begin{tikzcd}
& \text{Irreducible} \arrow[drr, "\text{(C.1)}"] & & \text{Exacta} \arrow[r, "\text{(C.1)}"] \arrow[d, "\text{(C.1)}"] & \text{Mezclante} \arrow[r, "\text{(C.1)}"] \arrow[d, "\text{(C.1)}"] & \text{Déb. M} \arrow[dl, "\text{(C.2)}"] \\
\text{Minimal} \arrow[ur, "\text{(C.3)}"] \arrow[dr, "\text{(C.3)}"] & & & \text{Sobreyectiva} & \text{T. transitiva} \arrow[dl, "\text{(C.1)}"] & \\
& \text{F. transitiva} \arrow[rr, "\text{(C.1)}"] & & \text{Transitiva} & \text{Caótica} \arrow[l, "\text{(C.1)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.8: Relaciones entre funciones con dominio compacto (y/o de Hausdorff) y f continua.

En el diagrama de la Figura 1.8, las condiciones (C.1), (C.2) y (C.3) son como sigue:

(C.1) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función $f : X \to X$.

(C.2) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función continua $f : X \to X$.

(C.3) Para cualquier espacio topológico X compacto y para cualquier función continua $f : X \to X$.

Se sabe que la dinámica de las funciones tienda y logística es muy interesante [54] y en consecuencia, son muchas las propiedades que se podrían analizar de ellas. Sin embargo, en este trabajo retomamos únicamente las propiedades necesarias para un buen desarrollo del mismo.

Proposición 1.2.9. ([54, Proposición 7.2]) La función tienda es exacta en el intervalo $[0, 1]$.

De la Proposición 1.2.9 y del diagrama de la Figura 1.8, obtenemos el resultado de la Proposición 1.2.10.

Proposición 1.2.10. La función tienda es mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva y transitiva en el intervalo $[0, 1]$.

Proposición 1.2.11. ([54, Proposición 11.10]) La función logística es transitiva.

Otra función muy importante dentro del estudio de la transitividad topológica es la rotación irracional. A continuación presentamos la definición de esta función.

Definición 1.2.12. Sean $\theta \in \mathbb{I}$ y $S^1 = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in [0, 1]\}$. Se define la *función rotación irracional* $R_\theta : S^1 \to S^1$ como $R_\theta(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i\theta}(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}$, para cada $\alpha \in [0, 1]$ o simplemente;

$$R_\theta(z) = (e^{2\pi i\theta})z, \text{ para cada } z \in S^1.$$

Proposición 1.2.13. ([80, Proposición 1.6.14]) La función rotación irracional es minimal.

De la Proposición 1.2.13 y del diagrama de la Figura 1.8, obtenemos el Teorema 1.2.14.

Teorema 1.2.14. La función rotación irracional es irreducible, fuertemente transitiva y transitiva.

A los interesados en conocer los detalles de los resultados y definiciones que presentamos en esta sección, les sugerimos revisar [38, 54, 77] y [80].

Hablemos un poco de la teoría del caos. Se sabe que esta palabra fue utilizada por primera vez en 1975 por T. Y. Li y J. A. Yorke en el artículo *Period Three implies chaos* [60]. En dicho trabajo se puede leer lo siguiente: "En este trabajo, analizamos el caso donde la sucesión $\{F^n(x)\}$ no es periódica y podemos llamarla 'caótica'..." [60, pág. 986]. Sin embargo, T. Y. Li y J. A. Yorke no dan una definición formal de esta palabra. Hasta ahora no existe una definición universal aceptada de la palabra caos, sin embargo, la más popular de todas es la dada por R. L. Devaney en 1989:

Definición 1.2.15. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es *caótica* en el sentido de Devaney si:

(1) Existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$ y para cada $\delta > 0$ existe $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$.

(2) f es transitiva.

(3) El conjunto $Per(f)$ es denso en X.

Se sabe [8] que las condiciones (2) y (3) implican la condición (1), por ello, en diferentes trabajos se considera a una función como caótica en el sentido de Devaney si satisface solamente las condiciones (2) y (3).

Desde la definición formal de la palabra caos dada por R. L. Devaney, la cantidad de publicaciones que han surgido en torno a esta teoría se vuelve cada vez más importante. En particular, se ha dado a los sistemas caóticos en el sentido de Devaney una aplicación muy fuerte en otras ciencias. Recientemente se ha hecho uso de estos sistemas en Criptografía [2, 19, 20, 33, 56, 58, 67, 75, 82]. Más adelante veremos una aplicación en particular de la teoría del caos en Criptografía. Mientras tanto, revisemos un poco más la condición (1) de la Definición 1.2.15.

Cuando una función satisface la condición (1) de la Definición 1.2.15, se dice que es *sensible a las condiciones iniciales*. Este concepto es muy importante en el estudio de aplicaciones de sistemas dinámicos, y lo podemos interpretar de la siguiente manera: dados dos puntos iniciales muy próximos el uno del otro, sus respectivas órbitas divergen después de muy pocas iteraciones (ver Figura 1.9). Esta es la principal razón por la cual muchos de los algoritmos criptográficos que se han creado en los últimos años están basados en el uso de funciones caóticas.

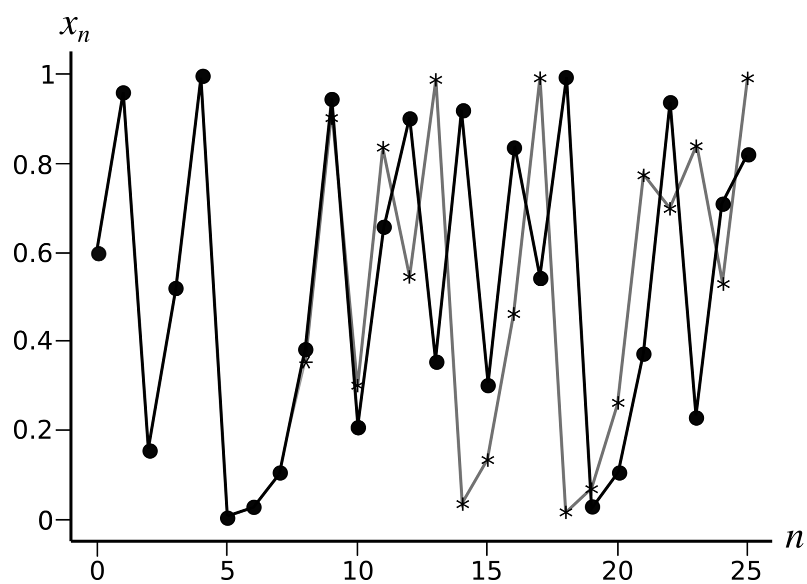


Figura 1.9: En esta gráfica se muestra la trayectoria de las condiciones iniciales $x_0 = 0.6$ y $x_0 = 0.6001$ bajo la función $f(x) = 4x(1-x)$. Con los asteriscos representamos la órbita de la condición inicial $x_0 = 0.6$ y con los puntos negros la órbita de la condición inicial $x_0 = 0.6001$.

Por otro lado, el ritmo al que dos trayectorias inicialmente cercanas divergen es una información importante para saber si una función es caótica en el sentido de Devaney o no. Esta información viene dada por el denominado *exponente de Lyapunov*.

Definición 1.2.16. Sean J un intervalo acotado, y $f : J \to J$ una función continuamente diferenciable en J. Fijemos x en J, y sea $\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln \mid (f^n(x)) \mid$ siempre que el límite exista. En tal caso, $\lambda(x)$ es el *exponente de Lyapunov de f en x*. Si $\lambda(x)$ es independiente de x, entonces el valor común de $\lambda(x)$ es denotado por λ y es el *exponente de Lyapunov de f*.

Ahora bien, como mencionamos anteriormente, este número nos permite determinar cuándo una función es caótica. A saber, una función es caótica si tiene un exponente de Lyapunov positivo [81, pág. 90].

1.3. Más funciones del tipo transitivas y relaciones entre estas

A través de la historia de los sistemas dinámicos se ha definido un gran número de clases de funciones (tipos de sistemas dinámicos), unos más conocidos que otros. Por ejemplo, en 1967, H. Furstenberg [40] no sólo introduce el concepto de función débilmente mezclante, también define los F-sistemas, sin embargo, estos últimos son menos populares que los sistemas débilmente mezclantes. Por otro lado, los tipos de sistemas dinámicos presentados en la Definición 1.2.8 han dado pie al surgimiento de nuevos sistemas. En 1997, P. Touhey [83] define una variante de las funciones caóticas en el sentido de Devaney, a esta clase de funciones las conocemos como funciones Touhey. Tres años después, F. Blanchard, B. Host y A. Maass [24] introducen el concepto de función dispersora y en el 2005, D. Kwietniak [59] inicia el estudio de las funciones exactamente Devaney caóticas. En su gran mayoría, los tipos de sistemas dinámicos que hemos mencionado fueron definidos entre continuos, espacios métricos compactos o espacios compactos y de Hausdorff. Recientemente, se han definido tipos de sistemas dinámicos sobre espacios topológicos. Por ejemplo, J. H. Mai y W. H. Sun, en el 2010 [63] inician el estudio de las funciones órbita-transitivas, estrictamente órbita transitivas y ω-transitivas. Finalmente, en el 2017, E. Akin, J. Auslander y A. Nagar [4] definen una clase más grande que la clase de las funciones minimales, la clase de las funciones minimales inversas sobre espacios métricos.

En esta sección presentamos más clases de funciones del tipo transitivas y vemos de qué manera se relacionan con las funciones definidas en la sección anterior.

Definición 1.3.1. Sean X un espacio topológico, A y B subconjuntos de X y $f : X \to X$ una función. Se define el siguiente conjunto:

$$n_f(A, B) = \{k \in \mathbb{N} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.3.2. Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función. Se dice que f es:

(1) *Órbita-transitiva* si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$.

(2) *Estrictamente órbita-transitiva* si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$.

(3) *ω-transitiva* si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.

(4) *TT_{++}* si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $n_f(U, V)$ es infinito.

(5) *Suavemente mezclante* si para cualquier espacio topológico Y y cualquier función transitiva, $g : Y \to Y$, la función $f \times g$ es transitiva.

(6) *Exactamente Devaney caótica* si f es exacta y $Per(f)$ es denso en X.

(7) *Minimal inversa* si para cada $x \in X$, el conjunto $\{y \in X : f^l(y) = x, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

(8) *Totalmente minimal* si para cada $s \in \mathbb{N}$, f^s es minimal.

(9) *Dispersora* si para cualquier espacio topológico Y y cualquier función minimal, $g : Y \to Y$, la función $f \times g$ es transitiva.

(10) *Touhey* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existen un punto periódico $x \in U$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f^k(x) \in V$.

(11) Un *F-sistema* si f es totalmente transitiva y $Per(f)$ es denso en X.

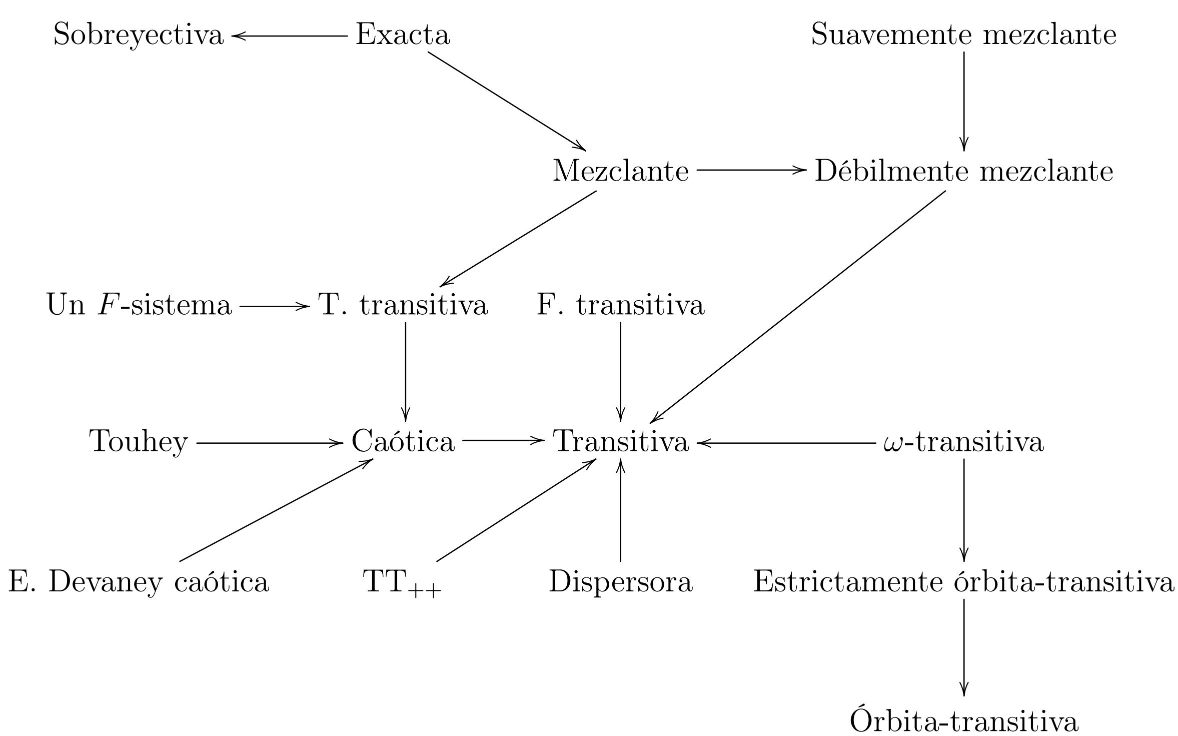


Figura 1.10: Resumen de relaciones que se dan de manera general.

En el diagrama de la Figura 1.10 mostramos relaciones entre las funciones de las Definiciones 1.2.8 y 1.3.2 para el caso general, es decir, cuando X es un espacio topológico y $f\colon X \to X$ cualquier función. Para las pruebas de estas inclusiones recomendamos revisar [3, 14, 21] y [63] (denotamos con T. transitiva, F. transitiva y E. Devaney caótica a las funciones totalmente transitivas, exactamente Devaney caóticas y fuertemente transitivas, respectivamente).

En el Teorema 1.3.3 se presentan otras relaciones que no se muestran en el diagrama de la Figura 1.10. Incluimos su demostración ya que las pruebas no se siguen inmediatamente de la definición como en el caso de las funciones Touhey, exactamente Devaney caóticas, dispersoras, suavemente mezclantes y los F-sistemas.

Teorema 1.3.3. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Si f es exacta, entonces f es minimal inversa.

(2) Si f es minimal inversa, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es exacta. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que f es exacta, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$. Por otro lado, ya que x es un punto en X, por la igualdad anterior podemos concluir que $x \in f^k(U)$. Con esto último aseguramos la existencia de $u \in U$ tal que $f^k(u) = x$. Por lo tanto, $u \in \{y \in X : f^l(y) = x, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$. Así, f es minimal inversa.

Ahora supongamos que f es minimal inversa. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $v \in V$. Ya que f es minimal inversa, el conjunto $\{y \in X : f^l(y) = v, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. Esto implica que la intersección $\{y \in X : f^l(y) = v, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\} \cap U$ es no vacía. Así, existen $u \in U$ y $l \in \mathbb{N}$ tales que $f^l(u) = v$. Con lo cual podemos concluir que $f^l(u) \in f^l(U) \cap V$. Por lo tanto, f es transitiva. □

A continuación presentamos ejemplos de las funciones dadas en la Definición 1.3.2.

Ejemplo 1.3.4. Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ como en el Ejemplo 1.1.44. En [54, Proposición 7.3] se verifica que $Per(T)$ es denso en el intervalo $[0, 1]$. Además, por la Proposición 1.2.9, tenemos que T es exacta. Por lo tanto, T es exactamente Devaney caótica. Finalmente, por el diagrama de la Figura 1.10, tenemos que T es totalmente transitiva. En consecuencia, T es un F-sistema. También, de [63, pág. 952], sabemos que las propiedades de ω-transitividad y transitividad son equivalentes para espacios topológicos con una base numerable, parcialmente compactos y pseudo-regulares y para cualquier función continua. Así, por la Proposición 1.2.10, T también es ω-transitiva.

Ejemplo 1.3.5. Sea $R_\theta : S^1 \to S^1$ como en la Definición 1.2.12. Sabemos que R_θ es minimal, irreducible, fuertemente transitiva y transitiva. En este ejemplo agregamos otras dos propiedades que cumple la rotación irracional: minimal inversa y TT_{++}. Además, si $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z) = e^{2\pi i r\theta} z$. De aquí, para cada $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z)$ es también una rotación irracional. Por lo tanto, para cada $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z)$ es minimal. Consecuentemente, R_θ es totalmente minimal.

Ejemplo 1.3.6. Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 1.1.47. Luego, f es órbita-transitiva ya que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(1, f)) = X$ [63, Ejemplo 3.3].

Ejemplo 1.3.7. Sean $f : X \to X$ como en el Ejemplo 1.3.6 y $Y = [0, 1]$ con la topología $\tau = \{[0, t) : t \in (0, 1]\} \cup \{\emptyset, Y\}$. Definamos la función $F_1 : X \times Y \to X \times Y$ como sigue:

$$F_1((s,t)) = \begin{cases} (s,0), & t \neq 0; \\ (f(s),0), & t = 0. \end{cases}$$

Luego, F_1 es una función estrictamente órbita-transitiva ya que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(F_1((1,1)), F_1)) = X \times Y$ [63, Ejemplo 3.3].

Ejemplo 1.3.8. Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -2x+3, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \\ -x+2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Se cumple que f es caótica y Touhey [34, Ejemplo 1].

1.4. Condiciones para obtener equivalencias y nuevas relaciones

En esta sección presentamos una recopilación de inclusiones que se dan entre las clases de funciones dadas en las Definiciones 1.2.8 y 1.3.2 cuando se añaden condiciones al espacio o a la función. Cabe señalar que la prueba de la mayoría de los resultados que presentamos requieren el uso de conceptos y teoremas que no están dentro de los objetivos de esta tesis, por ello, a los interesados en conocer estos detalles les recomendamos revisar [5, 7, 24, 45, 48, 55] y [83].

Teorema 1.4.1. Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es totalmente minimal, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es totalmente minimal. Por definición, tenemos que f es minimal. Además, ya que X es compacto y f continua, de [80, Teorema 1.5.20], obtenemos que f es fuertemente transitiva. Finalmente, por el diagrama de la Figura 1.10, podemos concluir que f es transitiva. □

Teorema 1.4.2. ([83, Proposición 2.6]) Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es caótica, entonces f es Touhey.

Demostración. Supongamos que f es caótica. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por hipótesis, existen $k \in \mathbb{N}$ y $u \in U$ tales que $f^k(u) \in V$. De aquí, $u \in f^{-k}(V)$. Además, ya que f es continua y transitiva, $W = U \cap f^{-k}(V)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Notemos que $f^k(W) \subseteq V$. Por otro lado, ya que $Per(f)$ es denso en X, existe $p \in W$ tal que p es un punto periódico. De todo lo anterior podemos concluir que existen el punto periódico $p \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $f^k(p) \in V$. Por lo tanto, f es Touhey. □

Teorema 1.4.3. ([4, pág. 26]) Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal entonces f es minimal inversa.

Vimos en los diagramas de las Figuras 1.7, 1.8 y 1.10 que las funciones minimales y totalmente transitivas no guardan alguna relación entre sí cuando se consideran sobre espacios topológicos generales, sin embargo, al considerar espacios conexos, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4.4. ([7, Teorema 2.5]) Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si X es conexo y f es minimal, entonces f es totalmente transitiva.

A continuación mostramos otro resultado interesante que podemos encontrar en [7].

Teorema 1.4.5. ([7, Lema 7.2]) Sean S^1 como en la Definición 1.2.12 y $f : S^1 \to S^1$ una función continua con $Per(f)$ denso en S^1. Si f es totalmente transitiva, entonces f es mezclante.

De la Definición 1.3.2, parte (8), concluimos de inmediato que toda función totalmente minimal es minimal, sin embargo, el recíproco ya no es para nada trivial. En [48, Lema 4] podemos encontrar la prueba del Teorema 1.4.6.

Teorema 1.4.6. ([48, Lema 4]) Sean X un espacio métrico, compacto y sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal y débilmente mezclante, entonces f es totalmente minimal.

Condiciones alternativas a las dadas en [48, Lema 4], son las que se mencionan en [55, pág. 4].

Teorema 1.4.7. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, compacto y conexo y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es totalmente minimal.

En [7, pág. 507], J. Banks menciona que existen funciones débilmente mezclantes que no son mezclantes. Más aún, da condiciones bajo las cuales estas nociones son equivalentes.

Teorema 1.4.8. ([7, Corolario 1.1]) Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es totalmente transitiva y $Per(f)$ es denso en X, entonces, para cada $n \geq 1$, f^n es débilmente mezclante.

Demostración. Sea $l \in \mathbb{N}$. Veamos que f^l es débilmente mezclante. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X \times X$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X tales que $U_1 \times U_2 \subseteq \mathcal{U}$ y $V_1 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Ya que f^l es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{lk}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Luego, por [80, Teorema 1.2.1] y puesto que f^{lk} es continua, la intersección $U_1 \cap f^{-lk}(V_1)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Así, por hipótesis, $(U_1 \cap f^{-lk}(V_1)) \cap Per(f) \neq \emptyset$. Con lo cual obtenemos que existe $x \in U_1$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) = x$ y $f^{lk}(x) \in V_1$. Esto implica que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $f^{mlj+lk}(x) = f^{lk}(x)$. Finalmente, para cada $j \in \mathbb{N}$, $f^{mlj+lk}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$.

Por otro lado, ya que f^{ml} es transitiva y $f^{-lk}(V_2)$ es un subconjunto abierto no vacío de X, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(f^{ml})^{j_1}(U_2) \cap f^{-lk}(V_2) \neq \emptyset$. Lo cual nos lleva a concluir que, $f^{mlj_1+lk}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Pongamos $p = mj_1 + k$. De todo lo anterior, tenemos que $(f^l)^p(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $(f^l)^p(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Sea $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2$ tal que $(f^l \times f^l)^p((u_1, u_2)) \in V_1 \times V_2$. Luego, $(f^l \times f^l)^p((u_1, u_2)) \in (f^l \times f^l)^p(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$. Por lo tanto, $f^l \times f^l$ es transitiva y así, f^l es débilmente mezclante. $\square$

Del Teorema 1.4.8 y el hecho de que para funciones continuas toda función totalmente transitiva es mezclante, J. Banks deduce que bajo las condiciones del Teorema 1.4.8, toda función débilmente mezclante es mezclante.

Por otra parte, G. Harańczyk, D. Kwietniak y P. Oprocha [45, Teorema 4.4] obtienen condiciones alternativas bajo las cuales una función débilmente mezclante es mezclante.

Teorema 1.4.9. ([45, Teorema 4.4]) Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es la gráfica de una función ([45, pág. 1550]) débilmente mezclante, entonces f es mezclante.

L. I. Alsedà, M. A. Del Río y J. A. Rodríguez [5, pág. 283] también analizan algunas nociones relacionadas con la transitividad topológica sobre gráficas de funciones y logran dar condiciones bajo las cuales una función transitiva es totalmente transitiva. Cabe mencionar que en [45] las gráficas de funciones no se definen de la misma manera que en [5], sin embargo, es muy probable que estas dos definiciones sean equivalentes.

Teorema 1.4.10. ([5, Teorema 10]) Sean G una gráfica topológica ([5, pág. 283]) y $f : G \to G$ una función continua. Si f es transitiva, entonces f es totalmente transitiva.

Este último resultado permite deducir las condiciones bajo las cuales una función totalmente transitiva es un F-sistema.

Teorema 1.4.11. Sean G una gráfica topológica y $f : G \to G$ una función continua. Si f es transitiva y $Per(f)$ es denso en G, entonces f es un F-sistema.

La prueba del Teorema 1.4.12 se pude consultar en [24, Proposición 3.4]. Cabe mencionar que en [24, pág. 647], las funciones dispersoras se definen de manera diferente a como lo hacemos en esta tesis, sin embargo, en [24, Proposición 4.1] se verifica que dicha definición es equivalente a la dada en la Definición 1.3.2, parte (9), para espacios métricos compactos y funciones continuas y sobreyectivas.

Teorema 1.4.12. ([24, Proposición 3.4]) Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua y sobreyectiva. Si f es débilmente mezclante, entonces f es dispersora.

También, en [24, Proposición 3.8] se dan las condiciones bajo las cuales las funciones dispersoras y débilmente mezclantes son equivalentes.

Teorema 1.4.13. ([24, Proposición 3.8]) Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua y sobreyectiva. Si f es minimal, entonces dispersora y débilmente mezclante son conceptos equivalentes.

Capítulo 2

Transitividad topológica en productos simétricos

En este capítulo presentamos los conceptos de teoría de hiperespacios necesarios para el desarrollo de este trabajo de investigación. Además, estudiamos las primeras nociones de transitividad topológica en los productos simétricos de un espacio topológico.

2.1. Productos simétricos

Hasta hace poco el estudio de los sistemas dinámicos discretos había resultado suficiente para responder preguntas sobre el posible comportamiento de un fenómeno de la naturaleza en el que estuvieran involucrados el movimiento y el tiempo. Sin embargo, para estudiar muchos otros fenómenos de la naturaleza con estas dos características es necesario tener una noción del comportamiento de todo un conjunto de objetos. A esta otra cara de los sistemas dinámicos se le conoce como *dinámica colectiva*. Es por esta problemática que surgió la necesidad de tener una herramienta que permitiera analizar propiedades de conjuntos cuyos puntos son subconjuntos, y hasta ahora, la herramienta más poderosa que se tiene para abordar este problema es la teoría de hiperespacios.

La teoría de hiperespacios tiene sus inicios alrededor del año 1900 con los trabajos de F. Hausdorff [46] y L. Vietoris [84]. Uno de los primeros hiperespacios que se define es el hiperespacio $CL(X)$ el cual consiste de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de X. Algunos de sus hiperespacios más conocidos son: 2^X que consiste de los elementos de $CL(X)$ que son compactos, $\mathcal{F}(X)$ conformado por todos los elementos de $CL(X)$ que tienen un número finito de puntos y $\mathcal{C}(X)$ que consiste de los elementos de 2^X que son conexos. Dado un número natural n, otros hiperespacios que se han definido son: $\mathcal{C}_n(X)$ que consiste de los elementos de $CL(X)$ que tienen a lo más n componentes, y $\mathcal{F}_n(X)$ formado por los elementos de $CL(X)$ que tienen a lo más n puntos. En particular, el hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ fue introducido originalmente por K. Borsuk y S. Ulam en 1931, al cual denominaron el *n-ésimo producto simétrico de X* [26]. Más tarde, L. Vietoris construye una base para una topología sobre $\mathcal{F}_n(X)$ [84], a la que hoy en día se le conoce como la *topología de Vietoris*. Se ha comprobado que esta topología es la mejor topología que hace que propiedades de X sean heredadas al hiperespacio $CL(X)$ y viceversa. Hoy en día son muchos los problemas que se pueden atacar dentro de la teoría de hiperespacios, sin embargo, la experiencia nos dice que la esencia de ésta consiste en tratar de responder la siguiente pregunta: dado un espacio topológico, una familia de espacios topológicos P, y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X, ¿qué relaciones existen entre las siguientes dos condiciones?: (1) $X \in P$ y (2) $\mathcal{H}(X) \in P$. Parte de la fuerza que sigue teniendo esta pregunta se debe a la construcción de nuevos hiperespacios. Un ejemplo claro es el trabajo de S. B. Nadler, Jr. quien en 1979 inicia el estudio del hiperespacio suspensión $\mathcal{HS}(X) = \mathcal{C}(X)\diagup\mathcal{F}_1(X)$ al cual llamó el *hiperespacio suspensión del continuo* X [71]. Años más tarde, S. Macías generalizó el estudio del hiperespacio suspensión, considerando el espacio cociente $\mathcal{HS}_n(X) = \mathcal{C}_n(X)\diagup\mathcal{F}_n(X)$, a este hiperespacio lo llamó *n-ésimo hiperespacio suspensión del continuo* X [64]. Posteriormente, en el 2010, F. Barragán, para $n \geq 2$, define e inicia el estudio del espacio cociente $\mathcal{SF}_n(X) = \mathcal{F}_n(X)\diagup\mathcal{F}_1(X)$, al que denominó *n-ésimo producto simétrico suspensión del continuo* X [9].

A continuación damos los conceptos básicos necesarios sobre la teoría de hiperespacios que necesitamos para una mejor comprensión del presente escrito. A los interesados en hacer una investigación más profunda sobre estos conceptos les sugerimos revisar [9, 10] y [80].

Definición 2.1.1. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Se define y denota el *n-ésimo producto simétrico de* X como sigue:

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

Definición 2.1.2. Sean X un espacio topológico, k un número natural y $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos no vacíos de X. Se define el conjunto:

$$\langle A_1, \ldots, A_k \rangle = \left\{ B \subseteq X : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\} \right\}.$$

Observación 2.1.3. A partir de ahora, vamos a trabajar con las colecciones $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ tales que $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle \subseteq \mathcal{F}_n(X)$.

La prueba del Teorema 2.1.4 se puede revisar en [47, Lemma 4.2].

Teorema 2.1.4. Sean (X, τ) un espacio topológico y n un número natural. Luego, la colección $\beta = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : \text{para cada } i \in \{1, \ldots, n\}, U_i \in \tau\}$, genera una topología sobre $\mathcal{F}_n(X)$, para la cual β es una base.

La topología generada por β para $\mathcal{F}_n(X)$ se denota por τ_V y se llama *topología de Vietoris*

Observemos en la Definición 2.1.1 que los espacios topológicos X y $\mathcal{F}_n(X)$ están estrechamente relacionados. Por lo que, era de esperarse que algunas propiedades topológicas se heredaran de un espacio al otro. En la actualidad existe un gran número de trabajos en los que se analiza esta relación para diferentes propiedades topológicas [13, 16, 26, 72, 80].

Cabe mencionar que el estudio de las relaciones entre los espacios X y $\mathcal{F}_n(X)$ se ha analizado a profundidad considerando a X un continuo. Sin embargo, en los últimos años, se ha buscado analizar más propiedades topológicas considerando ahora espacios topológicos de Hausdorff [42] o espacios topológicos T_1 [80]. Algunos ejemplos de esta última afirmación se muestran en la tabla de la Figura 2.1. Las pruebas de estos y muchos otros resultados se pueden revisar en [42] y [80].

Propiedad	$\mathcal{F}_n(X) \Rightarrow X$	$X \Rightarrow \mathcal{F}_n(X)$
Perfecto	Sí	Sí
Parcialmente compacto y pseudo-regular	Pregunta abierta	Sí
Separable	Sí	Sí
Primero numerable	Sí	Sí
Regular	Sí	Sí
Localmente compacto	Sí	Sí

Figura 2.1: Relaciones entre X y $\mathcal{F}_n(X)$ cuando X es un espacio topológico de Hausdorff o T_1.

En este trabajo de tesis además de considerar simplemente espacios topológicos, analizamos propiedades dinámicas y topológicas que no se han estudiado en ningún otro proyecto de investigación.

Otro atractivo dentro de la teoría de hiperespacios es la construcción de modelos [29, 50, 52, 68].

Los siguientes son ejemplos clásicos de modelos del hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$ y en [50] se puede revisar con gran detalle la construcción de estos y otro modelos.

Ejemplo 2.1.5. El triángulo $\{(u,v) : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$ es un modelo para el hiperespacio $\mathcal{F}_2([0,1])$ [50, pág. 51].

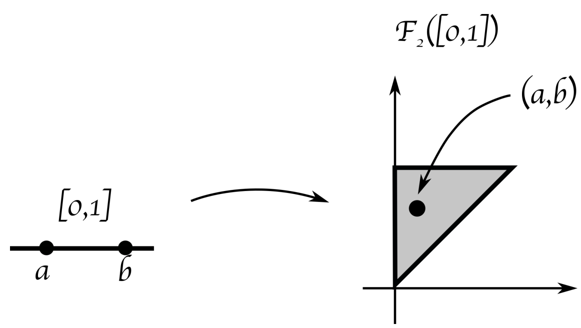


Figura 2.2: Modelo para $\mathcal{F}_2([0,1])$.

Ejemplo 2.1.6. Sea Y un triodo simple [79, Ejemplo 2.1.5]. Un modelo para $\mathcal{F}_2(Y)$ es el que se muestra en la Figura 2.3 ([50, pág. 55]).

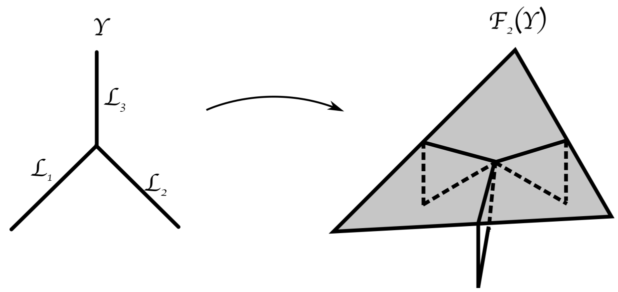


Figura 2.3: Modelo para $\mathcal{F}_2(Y)$.

Ejemplo 2.1.7. Sea $S^1 = \{e^{ix} : x \in [0, 2\pi]\}$. El modelo para $\mathcal{F}_2(S^1)$ es la cinta de Möbius [50, pág. 53]. Ver Figura 2.4.

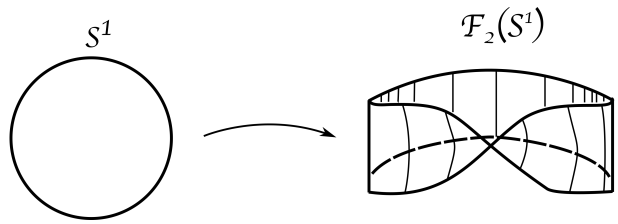
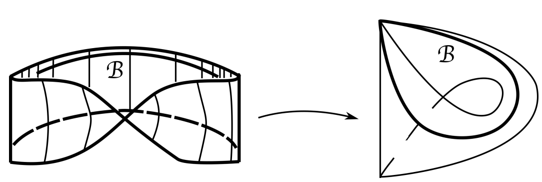


Figura 2.4: Modelo para $\mathcal{F}_2(S^1)$.

Ejemplo 2.1.8. Un modelo para $\mathcal{F}_2$(Continuo de la figura ocho) se construye haciendo los pegados que se muestran en la Figura 2.5 ([50, pág. 57]).



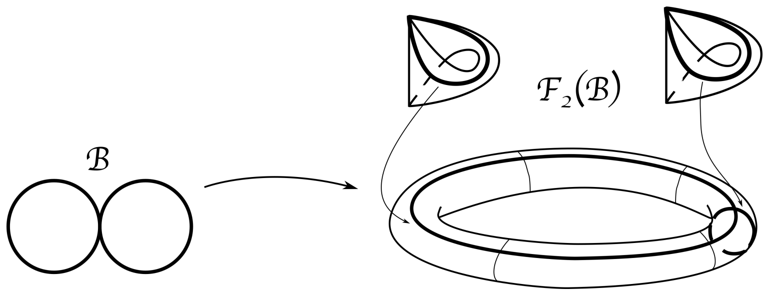


Figura 2.5: Modelo para $\mathcal{F}_2$(Continuo de la figura ocho).

Como se mencionó anteriormente, los modelos que se acaban de revisar son algunos de los ejemplos clásicos dentro de la teoría de hiperespacios, sin embargo, aunque poco conocidos, se han construido otros modelos igual de importantes que los anteriores pero que ya no es posible visualizarlos en $\mathbb{R}^3$. A continuación, presentamos un pequeño panorama de los diferentes modelos de hiperespacios que se conocen.

Notemos que los únicos subconjuntos del continuo de la figura ocho son el arco, la circunferencia, el tríodo simple, la paleta, el 4-odo simple y la medalla (ver Figura 2.6). Además, ya vimos que el continuo de la figura ocho se puede encajar en $\mathbb{R}^3$. Así que los modelos para $\mathcal{F}_2(X)$, donde X es un subcontinuo de la figura ocho, también se pueden encajar en $\mathbb{R}^3$. Más aún, estos continuos son todos los continuos localmente conexos cuyos modelos para $\mathcal{F}_2(X)$ se pueden encajar en $\mathbb{R}^3$. La prueba de esta afirmación se puede consultar en [29, Teorema 3].

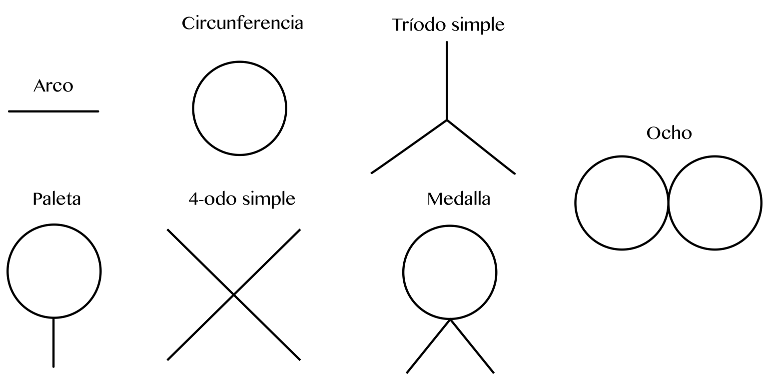


Figura 2.6: Continuos localmente conexos cuyo modelo para $\mathcal{F}_2(X)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^3$.

En [52, Teorema 2.4] se demuestra que para cualquier número natural n, el hiperespacio $\mathcal{F}_n(Q)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, donde Q es el cubo de Hilbert.

En [68, Teorema 1], se verifica que $\mathcal{F}_2([0,1]^2)$ es homeomorfo a $[0,1]^4$.

En el mismo artículo de 1931 [26] en el que K. Borsuk y S. Ulam definen el n-ésimo producto simétrico de un espacio topológico, ellos verifican que $\mathcal{F}_3([0,1])$ es homeomorfo a

$[0,1]^3$ [26, Teorema 6]. Uno supondría que $\mathcal{F}_4([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]^4$. Sin embargo, esto no se acerca nada a la realidad. En [26, Teorema 7], K. Borsuk y S. Ulam también verifican que, para cada número natural n mayor o igual que cuatro, no es posible encajar a $\mathcal{F}_n([0,1])$ en $[0,1]^n$.

La construcción de modelos de hiperespacios no ha sido un trabajo fácil ni siquiera para aquellos matemáticos de gran prestigio. Algunos de ellos tuvieron que errar para que otros pudieran llegar a la verdad. Un ejemplo fue el trabajo de K. Borsuk en 1949, quien escribe un artículo [25] en el que "prueba" que $\mathcal{F}_3(S^1)$ es homeomorfo al producto cartesiano de la circunferencia unitaria y la esfera de dos dimensiones. Nadie hubiera imaginado que el gran matemático que definió el n-ésimo producto simétrico 18 años antes, estuviera equivocado. Sin embargo, en el año 1952, R. Bott escribe una carta a K. Borsuk haciéndole saber los errores que había encontrado en su trabajo: "*En su artículo, Sobre la tercera potencia simétrica de la circunferencia, usted afirma que la tercera potencia simétrica $S_1^{(3)}$ del círculo S_1 es homeomorfo al producto Cartesiano de S_1 y la esfera de dos dimensiones S_2. En la prueba de este enunciado, dos partes deben resaltarse. En la primera y principal parte, usted demuestra que $S_1^{(3)}$ puede ser obtenido por una adecuada identificación de la frontera de dos anillos de anclaje. Como segunda parte, usted afirma que la identificación de la frontera de estos anillo de anclaje es tal que la variedad obtenida es homeomorfa a $S_1 \times S_2$. Pero de hecho, la identificación que usted realiza es incorrecta y, en consecuencia, su conclusión final de que la variedad obtenida es homeomorfa a $S_1 \times S_2$ es falsa*" ([27]).

Para conocer más sobre la historia del desarrollo de modelos de hiperespacios se puede consultar [74].

2.2. Funciones inducidas

Dados dos continuos X y Y, $f : X \to Y$ una función continua y $\mathcal{H}(X)$ y $\mathcal{H}(Y)$ hiperespacios para X y Y, respectivamente, tales que si $A \in \mathcal{H}(X)$, entonces $f(A) \in \mathcal{H}(Y)$, se puede definir una función $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(Y)$, dada por $\mathcal{H}(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in \mathcal{H}(X)$. A esta clase de funciones se les conoce como *funciones inducidas entre hiperespacios*. Existe un gran número de trabajos en los que se analizan propiedades de las funciones inducidas entre hiperespacios, las más estudiadas hoy en día son 2^f, $\mathcal{C}(f)$, $\mathcal{C}_n(f)$ y $\mathcal{F}_n(f)$ (ver [6, 17, 49, 53] y [65]). Son algunos de estos trabajos de los cuales surgió nuestro deseo de intentar contribuir al engrandecimiento de esta rama tan importante de las matemáticas analizando propiedades dinámicas de la función $\mathcal{F}_n(f)$ que se define a continuación.

Definición 2.2.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. A la función $\mathcal{F}_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ dada por $\mathcal{F}_n(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in \mathcal{F}_n(X)$, se le llama *función inducida por f, al hiperespacio $\mathcal{F}_n(X)$.*

Observación 2.2.2. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $n, s \in \mathbb{N}$. Observemos que $\mathcal{F}_n(f^s) = (\mathcal{F}_n(f))^s$.

Son muchas las propiedades topológicas y dinámicas de la función $\mathcal{F}_n(f)$ que se han analizado a lo largo de la historia de la teoría de hiperespacios y no bastaría una sección para mencionar cada una de ellas. Por ello, en la tabla de la Figura 2.7, a manera de resumen, se muestran algunas de estas propiedades. Los interesados en conocer la prueba de cada una de estas afirmaciones pueden consultar [80]. Es importante resaltar que en este proyecto de investigación además de analizar más clases de funciones, trabajamos con funciones no necesariamente continuas.

Propiedad	$\mathcal{F}_n(f) \Rightarrow f$	$f \Rightarrow \mathcal{F}_n(f)$
Continua	Sí	Sí
Inyectiva	Sí	Sí
Sobreyectiva	Sí	Sí
Homeomorfismo	Sí	Sí
Transitiva	Sí	No
Mezclante	Sí	Sí
Débilmente mezclante	Sí	Sí
Totalmente transitiva	Sí	No
Fuertemente transitiva	Sí	No
Localmente eventualmente sobreyectiva	Sí	Sí
Irreducible	Sí	Problema abierto
Minimal	Sí	No
Caótica	Sí	No
Semi-abierta	Sí	Sí

Figura 2.7: Resumen de relaciones entre f y $\mathcal{F}_n(f)$ cuando X es T_1 y f cualquier función.

A los interesados en conocer más sobre cómo se ha desarrollado la teoría de los hiperespacios a través de la historia, avances y los últimos hiperespacios que se han definido, les sugerimos revisar [74].

2.3. Transitividad topológica en productos simétricos

El concepto de sistema dinámico discreto transitivo, actualmente conocido como transitividad topológica, fue introducido en 1920 por G. D. Birkhoff [23] (para espacios métricos). Desde sus inicios, este concepto ha sido objeto de estudio de un gran número de matemáticos y por esta razón, son muchos los trabajos en los que se puede encontrar información de esta noción. Sin embargo, a nuestro parecer, un buen texto introductorio al estudio de la transitividad topológica se encuentra en [54]. Además, han surgido otras nociones muy similares, las cuales están relacionadas o son equivalentes a la transitividad topológica en espacios topológicos generales y/o particulares, algunas de ellas se encuentran en [3, 43, 63] y [83]. Por otro lado, el número de publicaciones referente al estudio de esta noción en los productos simétricos y en general en hiperespacios, ha ido en aumento en los último años (ver [6, 10, 17] y [41]). Es de resaltar que la transitividad topológica en productos simétricos ha sido muy estudiada dentro de la teoría de continuos, sin embargo, el trabajo de C. Good y S. Macías [42] sugiere que muchas de estas nociones se pueden generalizar a espacios topológicos más generales, y en efecto, en [80] iniciamos con el estudio de la transitiviadad topológica en espacios topológicos T_1 y en [13], continuando con la generalización de resultados, iniciamos el estudio de la transitividad topológica en productos simétricos considerando espacios topológicos.

Continuando con estas ideas, en esta sección presentamos más propiedades topológicas y dinámicas de los productos simétricos de un espacio topológico. Es importante señalar que a partir de esta sección, todos los resultados que se presentan en este trabajo de tesis son originales a excepción de algunos ejemplos que tomamos de artículos a los cuales hacemos referencia. Referente a los resultados de esta sección, los Teoremas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 y 2.3.5 los incluimos en [13]. Por otro lado, los Teoremas 2.3.11, 2.3.13, 2.3.15, 2.3.17, 2.3.18 y Proposiciones 2.3.12 y 2.3.19 los incluimos en [78].

Teorema 2.3.1. Sea (X,τ) un espacio topológico. Luego, X tiene una base numerable si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ tiene una base numerable.

Demostración. Sea $\gamma = \{V_i \in \tau \mid i \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para X. Vamos a verificar que:

$$\gamma' = \{\langle V_1, \dots, V_l\rangle \mid V_i \in \gamma, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \dots, l\} \quad \text{y} \quad l \in \mathbb{N}\}$$

es una base numerable para $\mathcal{F}_n(X)$. Claramente, γ' es una colección numerable. Por [47, Lema 4.2], $\beta' = \{\langle U_1, \dots, U_n\rangle \mid U_i \in \tau, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}$ forma una base para la topología de Vietoris, τ_V, en $\mathcal{F}_n(X)$. Así, por el Teorema 1.1.12, es suficiente con verificar que, para cada $\mathcal{A} \in \beta'$ y para cada $A \in \mathcal{A}$, existen $l \in \mathbb{N}$ y $V_1, \dots, V_l$ en γ, tales que $A \in \langle V_1, \dots, V_l\rangle \subseteq \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{A} \in \beta'$ y $A = \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{A}$. Por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \dots, U_n$ de X tales que $A \in \langle U_1, \dots, U_n\rangle \subseteq \mathcal{A}$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, sea $U_{x_i} = \bigcap\{U \in \{U_1, \dots, U_n\} \mid x_i \in U\}$. Notemos que, $A \in \langle U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\rangle \subseteq \langle U_1, \dots, U_n\rangle$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existe $V_i \in \gamma$ tal que $x_i \in V_i \subseteq U_{x_i}$. De aquí, $A \in \langle V_1, \dots, V_k\rangle \subseteq \mathcal{A}$, con $\langle V_1, \dots V_k\rangle \in \gamma'$. Por lo tanto:

$$\gamma' = \{\langle V_1, \dots, V_l\rangle \mid V_i \in \beta \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \dots, l\} \quad \text{y} \quad l \in \mathbb{N}\}$$

es una base para $\mathcal{F}_n(X)$.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(X)$ tiene una base numerable $\mathfrak{V}$. Sea $\mathcal{B} = \{\bigcup \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \in \mathfrak{V}\}$. Por [13, Teorema 3.2], los elementos de $\mathcal{B}$ son subconjuntos abiertos de X, claramente, $\mathcal{B}$ es un conjunto numerable. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base para X. Sea U un subconjunto abierto de X y $x \in U$. Luego, $\langle U\rangle$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$ y $\{x\} \in \langle U\rangle$. Ya que $\mathfrak{V}$ es una base para $\mathcal{F}_n(X)$, por el Teorema 1.1.12, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{V}$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U} \subseteq \langle U\rangle$. Luego, $x \in \bigcup \mathcal{U} \subseteq U$. Notemos que $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base numerable para X. □

Teorema 2.3.2. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Luego, X es T_1 si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es T_1.

Demostración. Supongamos que X es T_1. Sean A y B puntos distintos en $\mathcal{F}_n(X)$. De aquí, $A \nsubseteq B$ o $B \nsubseteq A$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \nsubseteq B$. Así, existe $a \in A$ tal que $a \notin B$. Sea $l \in \mathbb{N}$ con $l \leq n$ y pongamos $B = \{b_1, \dots, b_l\}$. Esto implica que, para cada $j \in \{1, \dots, l\}$, $a \neq b_j$. Ya que X es T_1, para cada $j \in \{1, \dots, l\}$, existen subconjuntos abiertos U_j y V_j de X tales que $a \in U_j \setminus V_j$ y $b_j \in V_j \setminus U_j$. Sea $U = \bigcap_{i=1}^{l} U_i$. Notemos que U es un subconjunto abierto no vacío de X tal que $A \in \langle X, U \rangle \setminus \langle V_1, \dots, V_l \rangle$ y $B \in \langle V_1, \dots, V_l \rangle \setminus \langle X, U \rangle$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X)$ es T_1.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}_n(X)$ es T_1. Sean x y y puntos distintos de X. Luego, $\{x\}$ y $\{y\}$ son puntos diferentes de $\mathcal{F}_n(X)$. Ya que $\mathcal{F}_n(X)$ es T_1, existen subconjuntos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}_n(X)$ tales que $\{x\} \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ y $\{y\} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $V_1, \dots, V_l, U_1, \dots, U_r$ de X tales que $\{x\} \in \langle U_1, \dots, U_r \rangle \setminus \langle V_1, \dots, V_l \rangle$ y $\{y\} \in \langle V_1, \dots, V_l \rangle \setminus \langle U_1, \dots, U_r \rangle$. En consecuencia, $x \in \bigcap_{j=1}^{r} U_j$ y existe $k \in \{1, \dots, l\}$ tal que $x \notin V_k$. Además, $y \in \bigcap_{j=1}^{l} V_j$ y existe $m \in \{1, \dots, r\}$ tal que $y \notin U_m$. Sean $U = \bigcap_{j=1}^{r} U_j$ y $V = \bigcap_{j=1}^{l} V_j$. Luego, U y V son subconjuntos abiertos de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$. Por lo tanto, X es T_1. □

Teorema 2.3.3. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Luego, X es de Hausdorff si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es de Hausdorff.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(X)$ es de Hausdorff. Sean x_1 y x_2 puntos distintos de X. Así, $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ son puntos distintos de $\mathcal{F}_n(X)$. Ya que $\mathcal{F}_n(X)$ es de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}_n(X)$ tales que $\{x_1\} \in \mathcal{U}$, $\{x_2\} \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ de X tales que $\{x_1\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\{x_2\} \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subseteq \mathcal{V}$. Notemos que $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1 \dots, V_n \rangle = \emptyset$. Sean $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Luego, $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, X es de Hausdorff.

Ahora supongamos que X es de Hausdorff. Sean A y B puntos distintos de $\mathcal{F}_n(X)$. De aquí, $A \nsubseteq B$ o $B \nsubseteq A$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \nsubseteq B$. Sean $a \in A \setminus B$, $m \in \mathbb{N}$ y $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Así, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $a \neq b_i$. Ya que X es de Hausdorff, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos U_i y V_i de X tales que $a \in U_i$, $b_i \in V_j$ y $U_i \cap V_i = \emptyset$. Sean $\mathcal{U} = \langle X, \bigcap_{i=1}^{m} U_i \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$. Luego, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}_n(X)$ tales que $A \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{V}$. Veamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Supongamos que existe $D \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Esto implica que $D \cap (\bigcap_{i=1}^{m} U_i) \neq \emptyset$ y $D \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Sea $z \in D \cap (\bigcap_{i=1}^{m} U_i)$. Así, $z \in \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. De aquí, existe $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $z \in V_{i_0}$. Ya que $z \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i$, obtenemos que $z \in U_{i_0}$ y así, $z \in V_{i_0} \cap U_{i_0}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ y $\mathcal{F}_n(X)$ es de Hausdorff. □

Teorema 2.3.4. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Luego, X es pseudo-regular si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudo-regular.

Demostración. Supongamos que X es pseudo-regular. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Así, por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \dots, U_n$ de X tales que $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Ya que X es pseudo-regular, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe un subconjunto abierto no vacío V_i de U_i tal que $\mathrm{cl}_X(V_i) \subseteq U_i$. Notemos que

$\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle V_1, \ldots, V_n \rangle) \subseteq \mathcal{U}$. Por [13, Teorema 3.2], tenemos que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle V_1, \ldots, V_n \rangle) = \langle \mathrm{cl}_X(V_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V_n) \rangle$. Claramente, $\langle \mathrm{cl}_X(V_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V_n) \rangle \subseteq \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. En consecuencia, $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle V_1, \ldots, V_n \rangle) \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudo-regular.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudo-regular. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Así, $\langle U \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Ya que $\mathcal{F}_n(X)$ es pseudo-regular, existe un subconjunto abierto no vacío $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{V}) \subseteq \langle U \rangle$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $V_1, \ldots, V_n$ de X tales que $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subseteq \mathcal{V}$. Por otro lado, de [13, Teorema 3.2], tenemos que $\langle \mathrm{cl}_X(V_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V_n) \rangle \subseteq \langle U \rangle$. Sea $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$. Luego, V es un subconjunto abierto no vacío de X. Resta verificar que $\mathrm{cl}_X(V) \subseteq U$. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(V)$. De aquí, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in \mathrm{cl}_X(V_{i_0})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 1$. Para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, sea $y_i \in \mathrm{cl}_X(V_i)$. Notemos que $\{x, y_2, \ldots, y_n\} \in \langle \mathrm{cl}_X(V_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V_n) \rangle$. Luego, $\{x, y_2, \ldots, y_n\} \in \langle U \rangle$. Así, $\{x, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq U$. Finalmente, $x \in U$ y $\mathrm{cl}_X(V) \subseteq U$. Por lo tanto, X es pseudo-regular. □

Teorema 2.3.5. Sean X un espacio topológico, U un subconjunto abierto de X y $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathrm{cl}_X(U)$ es pseudo-regular si y sólo si $\langle \mathrm{cl}_X(U) \rangle$ es pseudo-regular.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cl}_X(U)$ es pseudo-regular y verifiquemos que $\langle \mathrm{cl}_X(U) \rangle$ es pseudo-regular. De [13, Teorema 3.2], esto es equivalente a verificar que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle)$ es pseudo-regular en $\mathcal{F}_n(X)$. Sea $\mathcal{W}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle)$. De aquí, $\mathcal{W} = \mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle) \cap \mathcal{W}'$, con $\mathcal{W}'$ subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$. Ya que $\mathcal{W} \neq \emptyset$, podemos tomar un punto $B \in \mathcal{W}$. Luego, existen subconjuntos abiertos $W_1, \ldots, W_m$ de X tales que $B \in \langle W_1, \ldots, W_m \rangle \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle) \subseteq \mathcal{W}$. De [13, Teorema 3.2], tenemos que $\langle W_1, \ldots, W_m \rangle \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle) = \langle W_1, \ldots, W_m \rangle \cap \langle \mathrm{cl}_X(U) \rangle$. De [80, Observación 3.1.9], obtenemos que $\langle W_1, \ldots, W_m \rangle \cap \langle \mathrm{cl}_X(U) \rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^n W_i \cap \mathrm{cl}_X(U), \mathrm{cl}_X(U) \cap W_1, \ldots, \mathrm{cl}_X(U) \cap W_m \right\rangle$. De aquí, $B \in \left\langle \bigcup_{i=1}^n W_i \cap \mathrm{cl}_X(U), \mathrm{cl}_X(U) \cap W_1, \ldots, \mathrm{cl}_X(U) \cap W_m \right\rangle$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $B \cap (\mathrm{cl}_X(U) \cap W_i) \neq \emptyset$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $T_i = W_i \cap \mathrm{cl}_X(U)$. Notemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $T_i \neq \emptyset$. Ya que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, T_i es un subconjunto abierto de $\mathrm{cl}_X(U)$ y $\mathrm{cl}_X(U)$ es pseudo-regular, existe un subconjunto abierto no vacío T_i' en $\mathrm{cl}_X(U)$ tal que $\mathrm{cl}_X(T_i') \subseteq T_i$. Sea $\mathcal{T} = \langle T_1', \ldots, T_m' \rangle$. Luego, $\mathcal{T}$ es un subconjunto abierto de $\langle \mathrm{cl}_X(U) \rangle$. También, de [13, Teorema 3.2], tenemos que $\langle \mathrm{cl}_X(U) \rangle = \mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle)$. Así, $\mathcal{T}$ es un subconjunto abierto de $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle)$. Observemos que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{T}) = \langle \mathrm{cl}_X(T_1'), \ldots, \mathrm{cl}_X(T_m') \rangle$. Ya que $\langle \mathrm{cl}_X(T_1'), \ldots, \mathrm{cl}_X(T_m') \rangle \subseteq \langle W_1 \cap \mathrm{cl}_X(U), \ldots, W_m \cap \mathrm{cl}_X(U) \rangle$, obtenemos que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{T}) \subseteq \langle W_1 \cap \mathrm{cl}_X(U), \ldots, W_m \cap \mathrm{cl}_X(U) \rangle$. Finalmente, puesto que $\langle W_1 \cap \mathrm{cl}_X(U), \ldots, W_m \cap \mathrm{cl}_X(U) \rangle \subseteq \langle W_1, \ldots, W_m \rangle \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle)$ y $\langle W_1, \ldots, W_m \rangle \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle) \subseteq \mathcal{W}$, tenemos que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ es arbitrario, deducimos que, para cada subconjunto abierto $\mathcal{W}$ de $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle)$, existe un subconjunto abierto $\mathcal{T}$ de $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle)$ tal que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{W}$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle U \rangle)$ es pseudo-regular en $\mathcal{F}_n(X)$.

Ahora supongamos que $\langle \mathrm{cl}_X(U) \rangle$ es pseudo-regular. Sea V un subconjunto abierto no vacío de $\mathrm{cl}_X(U)$. Veamos que existe un subconjunto abierto no vacío W de V tal que $\mathrm{cl}_{\mathrm{cl}_X(U)}(W) \subseteq V$. Recordemos que $V = T \cap \mathrm{cl}_X(U)$, con T subconjunto abierto no vacío de

X. Así, $\langle V\rangle = \langle T\rangle \cap \langle \mathrm{cl}_X(U)\rangle$ es un subconjunto abierto de $\langle \mathrm{cl}_X(U)\rangle$. Ya que $\langle \mathrm{cl}_X(U)\rangle$ es pseudo-regular, existe un subconjunto abierto no vacío $\mathcal{W}$ de $\langle V\rangle$ tal que $\mathrm{cl}_{\langle \mathrm{cl}_X(U)\rangle}(\mathcal{W}) \subseteq \langle V\rangle$. Observemos que $\mathcal{W} = \mathcal{A} \cap \langle V\rangle$, con $\mathcal{A}$ subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X)$. De [47, Lema 4.2], tenemos que, existen subconjuntos abiertos no vacíos $A_1, \ldots, A_n$ de X tales que $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \subseteq \mathcal{A}$. Esto implica que, $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \cap \langle V\rangle \subseteq \mathcal{A} \cap \langle V\rangle = \mathcal{W}$. También, notemos que [80, Observación 3.1.9], $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \cap \langle V\rangle) = \mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle \bigcup_{i=1}^n A_i \cap V, V \cap A_1, \ldots, V \cap A_n\rangle)$, $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\langle \bigcup_{i=1}^n A_i \cap V, V \cap A_1, \ldots, V \cap A_n\rangle) = \langle \mathrm{cl}_X(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap V), \mathrm{cl}_X(V \cap A_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V \cap A_n)\rangle$ y $\langle \mathrm{cl}_X(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap V), \mathrm{cl}_X(V \cap A_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V \cap A_n)\rangle \subseteq \langle V\rangle$. Sea $W = \bigcup_{i=1}^n (V \cap A_i)$. Veamos que $\mathrm{cl}_{\mathrm{cl}_X(U)}(W) \subseteq V$. Recordemos que $\mathrm{cl}_{\mathrm{cl}_X(U)}(W) = \mathrm{cl}_X(W) \cap \mathrm{cl}_X(U)$. Ya que $\mathrm{cl}_X(W) \subseteq \mathrm{cl}_X(U)$, tenemos que $\mathrm{cl}_X(W) \cap \mathrm{cl}_X(U) = \mathrm{cl}_X(W)$. Así, sólo debemos verificar que $\mathrm{cl}_X(W) \subseteq V$. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(W) = \mathrm{cl}_X(\bigcup_{i=1}^n (V \cap A_i)) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{cl}_X(V \cap A_i)$. De aquí, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in \mathrm{cl}_X(V \cap A_{i_0})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 1$. Sea $y_i \in \mathrm{cl}_X(V \cap A_i)$, para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$. Luego, $\{x, y_2, \ldots, y_n\} \in \langle \mathrm{cl}_X(V \cap A_1), \ldots, \mathrm{cl}_X(V \cap A_n)\rangle$. Así, $\{x, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq V$. En particular, $x \in V$. Ya que $x \in \mathrm{cl}_X(W)$ es arbitrario, concluimos que $\mathrm{cl}_X(W) \subseteq V$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(U)$ es pseudo-regular. $\square$

Teorema 2.3.6. Sean X un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{F}_n(X)$ y $f : X \to X$ una función. Entonces, para cada $b \in B$, b es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(f)$ si y sólo si B es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(f)$.

Demostración. Pongamos $B = \{x_1, \ldots, x_r\}$ con $2 \leq r \leq n$. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, x_i es un punto periódico de f. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(x_i) = x_i$. Sea $k = k_1 \cdots k_r$. Se cumple que, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^k(x_i) = x_i$. Así, $(\mathcal{F}_n(f))^k(B) = B$. Por lo tanto, B es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(f)$.

Ahora supongamos que, B es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(f)$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{F}_n(f))^k(B) = B$. Lo cual implica que, $f^k(B) = B$. Se sigue que, $f^k \big|_B : B \to B$ es una permutación. Ya que B es un subconjunto finito, el número de permutaciones de B es $r!$. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(f^k)^m \big|_B = id_B$. En consecuencia, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^{km}(x_i) = x_i$. Por lo tanto, para cada $x_i \in B$, x_i es un punto periódico de f. $\square$

Por la importancia que tienen los conjuntos +invariantes para la obtención de resultados en [80], en este trabajo retomamos esta propiedad con el fin de enriquecer el estudio de esta noción en los productos simétricos.

El Teorema 2.3.7, es una generalización de [13, Teorema 3.3].

Teorema 2.3.7. Sean m y n números naturales, X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos no vacíos de X. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, A_i es +invariante bajo f, entonces el conjunto $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ es +invariante bajo $\mathcal{F}_n(f)$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, A_i es +invariante bajo f. Sea $B \in \mathcal{F}_n(f)(\langle A_1, \ldots, A_m\rangle)$. Luego, existe $A \in \langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ tal que $\mathcal{F}_n(f)(A) = B$. De aquí, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $A \cap A_i \neq \emptyset$. Esto implica que, $f(A) \subseteq f(\bigcup_{i=1}^m A_i) = \bigcup_{i=1}^m f(A_i)$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, A_i es +invariante bajo f, tenemos que $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i$. Con lo cual deducimos que $B = \mathcal{F}_n(f)(A) = f(A) \subseteq$

$\bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Ahora veamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $B \cap A_i \neq \emptyset$. Sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Por hipótesis, $A \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Sea $z \in A \cap A_{i_0}$. Luego, $f(z) \in f(A)$ y $f(z) \in f(A_{i_0})$. De aquí, $f(z) \in B$ y $f(z) \in A_{i_0}$. Así, $f(z) \in B \cap A_{i_0}$. Ya que i_0 se tomó arbitrario, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $B \cap A_i \neq \emptyset$. De todo lo anterior, podemos concluir que $B \in \langle A_1, \ldots, A_m \rangle$. Por lo tanto, el conjunto $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ es +invariante bajo $\mathcal{F}_n(f)$. □

Teorema 2.3.8. Sean m y n números naturales, X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos no vacíos de X. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, A_i es $-$invariante bajo f, entonces $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ es $-$invariante bajo $\mathcal{F}_n(f)$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, A_i es $-$invariante bajo f. Sea $B \in (\mathcal{F}_n(f))^{-1}(\langle A_1, \ldots, A_m \rangle)$. Luego, $\mathcal{F}_n(f)(B) \in \langle A_1, \ldots, A_m \rangle$. De aquí, $f(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f(B) \cap A_i \neq \emptyset$. Así, $f^{-1}(f(B)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(A_i)$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, A_i es $-$invariante bajo f, tenemos que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Ahora veamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $B \cap A_i \neq \emptyset$. Sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Por hipótesis, $f(B) \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Sea $z \in f(B) \cap A_{i_0}$. Luego, existe $b \in B$ tal que $f(b) = z$. De aquí, $f(b) \in A_{i_0}$. Se sigue que, $f^{-1}(f(b)) \subseteq f^{-1}(A_{i_0})$. Así, ya que $\{b\} \subseteq f^{-1}(f(b))$ y A_{i_0} es $-$invariante bajo f, $b \in B \cap A_{i_0}$. Como i_0 es arbitrario, concluimos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $B \cap A_i \neq \emptyset$. De todo lo anterior, obtenemos que $B \in \langle A_1, \ldots, A_m \rangle$. Por lo tanto, $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ es $-$invariante bajo $\mathcal{F}_n(f)$. □

En los Teoremas 2.3.7 y 2.3.8, a partir de conjuntos +invariantes ($-$invariantes) en X, construimos conjuntos +invariantes ($-$invariantes) en $\mathcal{F}_n(X)$. A continuación presentamos un resultado en el que se analiza el recíproco para conjuntos +invariantes.

Teorema 2.3.9. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto de $\mathcal{F}_n(X)$. Si $\mathcal{U}$ es +invariante bajo $\mathcal{F}_n(f)$, entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es +invariante bajo f.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es +invariante bajo $\mathcal{F}_n(f)$. Sea $x \in f(\bigcup \mathcal{U})$. De aquí, existe $y \in \bigcup \mathcal{U}$ tal que $f(y) = x$. Con lo cual tenemos que, existe $B \in \mathcal{U}$ tal que $y \in B$. Puesto que $\mathcal{U}$ es +invariante bajo $\mathcal{F}_n(f)$, tenemos que $\mathcal{F}_n(f)(B) \in \mathcal{U}$. En consecuencia, $f(B) \in \mathcal{U}$ y $f(B) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. En particular $f(y) \in \bigcup \mathcal{U}$. Por lo tanto, $x \in \bigcup \mathcal{U}$ y así, $\bigcup \mathcal{U}$ es +invariante bajo f. □

El teorema que mostramos a continuación involucra una propiedad muy importante en la demostración de resultados que presentamos en lo que resta de este capítulo y en el capítulo 3.

Teorema 2.3.10. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Luego, X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f si y sólo si $\mathcal{F}_n(X)$ es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $\mathcal{F}_n(f)$.

Demostración. Supongamos que X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Veamos que $\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$. Sean $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ y $\{x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{F}_n(f)(\mathcal{U})$. De aquí, existen $l \in \mathbb{N}$ con $l \leq n$ y

$\{y_1, \ldots, y_l\} \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F}_n(f)(\{y_1, \ldots, y_l\}) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Por otro lado, de [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ de X tales que $\{y_1, \ldots, y_l\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Veamos que $\{x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{U}$. O bien, que $\{x_1, \ldots, x_m\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Sea $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$. De aquí, existe $k \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $x = f(y_k)$. Puesto que $\{y_1, \ldots, y_l\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, existe $s \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y_k \in U_s$. Así, $x = f(y_k) \in f(U_s)$. Como U_s es +invariante bajo f, $x \in U_s$. De aquí, $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Ahora bien, sea $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Veamos que $\{x_1, \ldots, x_m\} \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. Por hipótesis, $\{y_1, \ldots, y_l\} \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. Sea $k \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $y_k \in U_{i_0}$. De aquí, $f(y_k) \in f(U_{i_0})$. Como $\{f(y_1), \ldots, f(y_l)\} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $f(y_k) = x_j$. Además, ya que U_{i_0} es +invariante bajo f, $x_j = f(y_k) \in U_{i_0}$. En consecuencia, $\{x_1, \ldots, x_m\} \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. Como $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ es arbitrario, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\{x_1, \ldots, x_m\} \cap U_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\{x_1, \ldots, x_m\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Finalmente, $\mathcal{F}_n(f)(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{F}_n(X)$ es +invariante sobre abiertos bajo $\mathcal{F}_n(f)$.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}_n(X)$ es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $\mathcal{F}_n(f)$. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Notemos que $\langle U \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, $\mathcal{F}_n(f)(\langle U \rangle) \subseteq \langle U \rangle$. Como $\bigcup \langle U \rangle = U$, por el Teorema 2.3.9, se tiene que $f(U) \subseteq U$. Por lo tanto, X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f. □

Sean X un espacio topológico T_1, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. En [80] se analizan relaciones entre las funciones f y $\mathcal{F}_n(f)$ para cuando alguna de ellas es: exacta, mezclante, débilmente mezclante, transitiva, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, irreducible, semi-abierta, turbulenta, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, IN, TT o TT_{++}. A continuación hacemos un análisis semejante al que se hace en [80] considerando a X un espacio topológico y las siguientes clases de funciones: exactamente Devaney caótica, Touhey, minimal inversa, totalmente minimal, suavemente mezclante, dispersora o un F-sistema.

Teorema 2.3.11. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(f) \times g$ es transitiva, entonces $f \times g$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f) \times g$ es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X \times Y$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X y V_1 y V_2 de Y tales que $U_1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $U_2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Así, $\langle U_1 \rangle$ y $\langle U_2 \rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{F}_n(f) \times g)^k(\langle U_1 \rangle \times V_1) \cap (\langle U_2 \rangle \times V_2) \neq \emptyset$. Esto implica que, existe $(\{x_1, \ldots, x_r\}, v_1) \in \langle U_1 \rangle \times V_2$ tal que $[\mathcal{F}_n(f) \times g]^k((\{x_1, \ldots, x_r\}, v_1)) \in \langle U_2 \rangle \times V_2$. Sea $x \in \{x_1, \ldots, x_r\}$. Notemos que, $x \in U_1$ y $f^k(x) \in U_2$. Consecuentemente, para cada $x \in \{x_1, \ldots, x_r\}$, $(x, v_1) \in U_1 \times V_1$ y $(f \times g)^k((x, v_1)) \in U_2 \times V_2$. Por lo tanto, $(f \times g)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así $f \times g$ es transitiva. □

La prueba de la Proposición 2.3.12 se sigue de [13, Teoremas 3.4 y 4.10].

Proposición 2.3.12. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Luego, f es exactamente Devaney caótica si y sólo si $\mathcal{F}_n(f)$ es exactamente Devaney caótica.

Teorema 2.3.13. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: Touhey, un F-sistema, minimal inversa, totalmente minimal, suavemente mezclante o dispersora. Si $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$, entonces $f \in \mathcal{M}$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es Touhey. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\langle U \rangle$ y $\langle V \rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $\mathcal{F}_n(f)$ es Touhey, existen un punto periódico $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U \rangle$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $(\mathcal{F}_n(f))^k(\{x_1, \ldots, x_r\}) \in \langle V \rangle$. Así, por el Teorema 2.3.6, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, x_i es un punto periódico de f. Más aún, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $x_i \in U$ y $f^k(x_i) \in V$. Por lo tanto, f es Touhey.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es un F-sistema. De aquí, $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente transitiva y $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. De [13, Teorema 4.14], tenemos que f es totalmente transitiva y por [13, Teorema 3.4], obtenemos que $Per(f)$ es denso en X. Por lo tanto, f es un F-sistema.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal inversa. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. De aquí, $\langle U \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$ y $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Puesto que $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal inversa, el conjunto $\{A \in \mathcal{F}_n(X) : (\mathcal{F}_n(f))^l(A) = \{x\},\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Lo cual implica que, existen $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle U \rangle$ y $l \in \mathbb{N}$ tales que $(\mathcal{F}_n(f))^l(\{x_1, \ldots, x_r\}) = \{x\}$. De esto último obtenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $x_i \in U$ y $f^l(x_i) = x$. En consecuencia, $\{y \in X : f^l(y) = x,\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\} \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, el conjunto $\{y \in X : f^l(y) = x,\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. Como $x \in X$ es arbitrario, tenemos que, f es minimal inversa.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente minimal. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(\mathcal{F}_n(f))^s$ es minimal. Luego, por la Observación 2.2.2, $\mathcal{F}_n(f^s)$ es minimal. Así, de [13, Teorema 4.18], f^s es minimal.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es suavemente mezclante. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función transitiva. Por hipótesis, $\mathcal{F}_n(f) \times g$ es transitiva. De aquí, por el Teorema 2.3.11, $f \times g$ es transitiva. Por lo tanto, f es suavemente mezclante.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(f)$ es dispersora. Sean Y un espacio topológico, $g : Y \to Y$ una función minimal. Por hipótesis, $\mathcal{F}_n(f) \times g$ es transitiva. De aquí, por el Teorema 2.3.11, $f \times g$ es transitiva. Por lo tanto, f es dispersora. $\square$

El recíproco del Teorema 2.3.13 no se cumple en general. Veamos un ejemplo parcial de esto considerando a la clase de las funciones Touhey.

Ejemplo 2.3.14. Sean $X = [0, 1]$ y $f : X \to X$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]; \\ 1 - x, & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

En [47, Ejemplo 4.10] se prueba que f es una función caótica, pero que sin embargo, la función $\mathcal{F}_n(f)$ no es caótica. Por otro lado, observemos que f es una función continua. Así, por [83, Proposición 2.6], f es Touhey. Si suponemos que $\mathcal{F}_n(f)$ es Touhey, nuevamente, por [83, Proposición 2.6], $\mathcal{F}_n(f)$ es una función caótica, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ no es Touhey.

Teorema 2.3.15. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones y $n \in \mathbb{N}$. Si X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f y $f \times g$ es transitiva, entonces $\mathcal{F}_n(f) \times g$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f y que $f \times g$ es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X) \times Y$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ de $\mathcal{F}_n(X)$ y V_1 y V_2 de Y tales que $\mathcal{U}_1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1^1 \dots, U_n^1$, $U_1^2, \dots, U_n^2$ de X tales que $\langle U_1^1, \dots, U_n^1 \rangle \subseteq \mathcal{U}_1$ y $\langle U_1^2, \dots, U_n^2 \rangle \subseteq \mathcal{U}_2$. Puesto que $f \times g$ es transitiva, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f \times g)^{k_i}(U_i^1 \times V_1) \cap (U_i^2 \times V_2) \neq \emptyset$. En consecuencia, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $(u_i, v_i) \in U_i^1 \times V_1$ tal que $(f \times g)^{k_i}((u_i, v_i)) \in U_i^2 \times V_2$. Esto implica que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $f^{k_i}(u_i) \in U_i^2$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_n\}$. Por el Lema 1.2.7, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $f^k(u_i) \in U_i^2$. Consecuentemente, $\{f^k(u_1), \dots, f^k(u_n)\} \in \langle U_1^2, \dots, U_n^2 \rangle$ lo cual implica que, $[\mathcal{F}_n(f)]^k(\{u_1, \dots, u_n\}) \in \langle U_1^2, \dots, U_n^2 \rangle$. Además, $\{u_1, \dots, u_n\} \in \langle U_1^1, \dots, U_n^1 \rangle$. Supongamos que $k = k_{i_0}$, donde $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, y sea $v = v_{i_0}$. Así, $g^k(v) \in V_2$ y $v \in V_1$. Finalmente, $(\mathcal{F}_n(f) \times g)^k((\{u_1, \dots, u_n\}, v)) \in \langle U_1^2, \dots, U_n^2 \rangle \times V_2$ y $(\{u_1, \dots, u_n\}, v) \in \langle U_1^1, \dots, U_n^1 \rangle \times V_2$. Por lo tanto, $(\mathcal{F}_n(f) \times g)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así, $\mathcal{F}_n(f) \times g$ es transitiva. □

Observación 2.3.16. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Observemos que si X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f, entonces f no puede ser fuertemente transitiva a menos que X tenga la topología trivial.

A continuación analizamos el recíproco del Teorema 2.3.13.

Teorema 2.3.17. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, totalmente transitiva, caótica, Touhey, un F-sistema, suavemente mezclante o dispersora. Si $f \in \mathcal{M}$ y X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f, entonces $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. Por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \dots, U_n$, $V_1, \dots, V_n$ de X tales que $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1, \dots, V_n \rangle \subseteq \mathcal{V}$. Puesto que f es transitiva, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $u_i \in U_i$ tal que $f^{k_i}(u_i) \in V_i$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_n\}$. Por el Lema 1.2.7, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $f^k(u_i) \in V_i$. Esto implica que, $\{u_1, \dots, u_n\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ y $(\mathcal{F}_n(f))^k(\{u_1, \dots, u_n\}) \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$. Por lo tanto, $(\mathcal{F}_n(f))^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva.

Supongamos que f es totalmente transitiva. Sean $s \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ de X tales que, $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1, \dots, V_n \rangle \subseteq \mathcal{V}$. Ya que f^s es transitiva, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f^s)^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $u_i \in U_i$ tal que $(f^s)^{k_i}(u_i) \in V_i$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_n\}$. Del Lema 1.2.7, obtenemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $(f^s)^k(u_i) \in V_i$. De aquí, $\{u_1, \dots, u_n\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ y $\{(f^s)^k(u_1), \dots, (f^s)^k(u_n)\} \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$. Así, $([\mathcal{F}_n(f)]^s)^k(\{u_1, \dots, u_n\}) \in$

$\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. Con lo cual podemos deducir que, $([\mathcal{F}_n(f)]^s)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Consecuentemente, $(\mathcal{F}_n(f))^s$ es transitiva. Finalmente, ya que s es arbitrario, tenemos que $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente transitiva.

Supongamos que f es caótica. Esto es, f es transitiva y $Per(f)$ es denso en X. Así, de [13, Teorema 3.4], deducimos que $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Además, por el primer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que $\mathcal{F}_n(f)$ es transitiva. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es caótica.

Supongamos que f es Touhey. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$, $V_1, \ldots, V_n$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subseteq \mathcal{V}$. Puesto que f es Touhey, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existen un punto periódico $x_i \in U_i$ y $k_i \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f^{k_i}(x_i) \in V_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Del Lema 1.2.7, deducimos que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f^k(x_i) \in V_i$. Consecuentemente, $(\mathcal{F}_n(f))^k(\{x_1, \ldots, x_n\}) \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. Más aún, $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Por otro lado, ya que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, x_i es un punto periódico de f_i, del Teorema 2.3.6, tenemos que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(f)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es Touhey.

Supongamos que f es un F-sistema. Así, f es totalmente transitiva y $Per(f)$ es denso en X. Por la segunda parte de la prueba de este teorema, tenemos que $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente transitiva. También, de [13, Teorema 3.4], $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es un F-sistema.

Supongamos que f es suavemente mezclante. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función transitiva. Por hipótesis, $f \times g$ es transitiva. Puesto que X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f, por el Teorema 2.3.15, $\mathcal{F}_n(f) \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f)$ es suavemente mezclante.

Supongamos que f es dispersora. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función minimal. Por hipótesis, $f \times g$ es transitiva. Puesto que, X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f, por el Teorema 2.3.15, $\mathcal{F}_n(f) \times g$ es transitiva. Por lo tanto $\mathcal{F}_n(f)$ es dispersora. □

En el Teorema 2.3.17 no consideramos a las funciones minimales ni a las funciones totalmente minimales ya que para estas dos clases de funciones es necesario añadir la hipótesis de continuidad a la función.

Teorema 2.3.18. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si f es minimal y X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal.

Demostración. Supongamos que f es minimal y que X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f. Puesto que f es una función continua, de [13, Teorema 6.1], tenemos que $\mathcal{F}_n(f)$ es una función continua. Así, para verificar que $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal, por [63, Proposición 6.2], basta verificar que, para cada $A \in \mathcal{F}_n(X)$, $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{O}(A, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Ya que f es minimal, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(x_i, f)) = X$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ de X tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso (i): $r = n$. En este caso, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $k_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^{k_i}(x_i) \in U_i$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_n\}$. De aquí, por el Lema 1.2.7, tenemos que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f^k(x_i) \in U_i$. Así, $(\mathcal{F}_n(f))^k(\{x_1, \ldots, x_r\}) \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Esto implica que, $\mathcal{O}(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f)) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\text{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{O}(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Finalmente, ya que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$ es arbitrario, obtenemos que $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal.

Caso (ii): $r < n$. En este caso, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathcal{O}(x_i, f) \cap U_i \neq \emptyset$ y para cada $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, $\mathcal{O}(x_r, f) \cap U_j \neq \emptyset$. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe $k_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^{k_i}(x_i) \in U_i$ y para cada $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, existe $k_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^{k_j}(x_r) \in U_j$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_n\}$. Luego, por el Lema 1.2.7, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^k(x_i) \in U_i$ y para todo $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, $f^k(x_r) \in U_j$. Notemos que en este caso, $U_1, \ldots, U_n$ no pueden ser mutuamente ajenos. De lo anterior concluimos que, $\{f^k(x_1), \ldots, f^k(x_r)\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Consecuentemente, $(\mathcal{F}_n(f))^k(\{x_1, \ldots, x_r\}) \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{O}(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f)) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\text{cl}_{\mathcal{F}_n(X)}(\mathcal{O}(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f))) = \mathcal{F}_n(X)$. Finalmente, como $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X)$ es arbitrario, concluimos que $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal. □

Proposición 2.3.19. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si f es totalmente minimal y X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente minimal.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, f^s es minimal y continua. De aquí, por el Teorema 2.3.18, $\mathcal{F}_n(f^s)$ es minimal. Así, de la Observación 2.2.2, $(\mathcal{F}_n(f))^s$ es minimal. Como $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, concluimos que $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente minimal. □

Capítulo 3

Transitividad topológica en productos y productos simétricos

Es complicado dar una fecha exacta en la que inicia el estudio de propiedades dinámicas de funciones producto. Ya que en muchos trabajos, aunque no se habla de la dinámica de funciones producto como tal, se pueden encontrar algunos resultados que involucran alguna propiedad dinámica de estas funciones. En 1967, H. Furstenberg ya hablaba de dinámica topológica, producto de procesos y producto de flujos [40]. Años más tarde, W. Bauer y K. Sigmund, citando algunas ideas de H. Furstenberg, analizan la dinámica topológica de transformaciones inducidas sobre espacios de medida [18], en dicho trabajo, también se pueden encontrar algunos resultados encaminados al estudio de propiedades dinámicas de funciones producto. Es hasta el año 2010 cuando N. Değirmenci y Ş. Koçak le dan formalidad al estudio de propiedades dinámicas (principalmente el caos en el sentido de Devaney) en espacios producto [34]. Después del trabajo de N. Değirmenci y Ş. Koçak, el número de publicaciones que han surgido referente a esta problemática se vuelve cada vez más importante (ver [61, 66, 73, 86] y [87]). Referente a las funciones inducidas a los productos simétricos de espacios producto, hasta donde sabemos, los únicos trabajos en los que se analiza este problema son [48] y [86].

Retomando las ideas de los artículos mencionados en el párrafo anterior, sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. En este capítulo estudiamos propiedades topológicas y dinámicas del espacio producto $\prod_{i=1}^m X_i$ y de la función producto $\prod_{i=1}^m f_i$. Además, considerando a $\mathcal{M}$ como alguna de las siguientes clases de funciones: exacta, transitiva, fuertemente transitiva, totalmente transitiva, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, mezclante, débilmente mezclante, suavemente mezclante, caótica, exactamente Devaney caótica, minimal, minimal inversa, totalmente minimal, TT_{++}, dispersora, Touhey o un F-sistema, obtenemos relaciones entre las siguientes cuatro condiciones: (1) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$, (2) $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$, (3) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i) \in \mathcal{M}$ y (4) $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \in \mathcal{M}$.

3.1. Transitividad topológica sobre el producto cartesiano

En esta sección generalizamos los conceptos de producto cartesiano, topología producto y función producto que dimos en la Sección 2 del Capítulo 1 y estudiamos propiedades topológicas y dinámicas del espacio producto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ y su relación con los espacios topológicos X_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. La mayoría de los resultados que presentamos en este capítulo los incluimos en [78].

Definición 3.1.1. Sean m un entero mayor o igual que dos y $X_1, \ldots, X_m$ conjuntos no vacíos. Se define y denota su *producto cartesiano* como el conjunto:

$$\prod_{i=1}^{m} X_i = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Si en la Definición 3.1.1 en vez de considerar conjuntos, consideramos espacios topológicos, una pregunta que surge inmediatamente es: ¿Existe una forma natural de definir una topología sobre el producto cartesiano de estos espacios topológicos?

Definición 3.1.2. Sean m un entero mayor o igual que dos y $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_m, \tau_m)$ espacios topológicos. La *topología producto* $\mathcal{X}$ sobre el conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ es la topología que tiene como base la colección $\beta = \{U_1 \times \cdots \times U_m : U_i \in \tau_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}\}$. El espacio topológico $(\prod_{i=1}^{m} X_i, \mathcal{X})$ se llama *espacio producto* de la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{m}$ y se denota simplemente por $\prod_{i=1}^{m} X_i$.

Una vez definido el espacio producto $\prod_{i=1}^{m} X_i$, lo siguiente es definir una función sobre este nuevo espacio y así poder estudiar propiedades topológicas y dinámicas del sistema dinámico que se genera.

Definición 3.1.3. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ conjuntos no vacíos y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la *función producto* $\prod_{i=1}^{m} f_i : \prod_{i=1}^{m} X_i \to \prod_{i=1}^{m} X_i$ como:

$$\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)),$$

para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i$.

Las siguientes propiedades no son difíciles de verificar.

Observación 3.1.4. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean U_i y V_i subconjuntos no vacíos de X_i, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $k \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^k = \prod_{i=1}^{m} f_i^k$.

(2) $[\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)]^k = \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i^k)$.

(3) Si $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) = \prod_{i=1}^m V_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) = V_i$.

Lema 3.1.5. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean U_i y V_i subconjuntos no vacíos de X_i, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $k \in \mathbb{N}$. Para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ si y sólo si $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Sea $(u_1, \ldots, u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((u_1, \ldots, u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Por la Observación 3.1.4, parte (1), tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in V_i$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in f_i^k(U_i) \cap V_i$. Finalmente, para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $u_i \in U_i$ tal que $f_i^k(u_i) \in V_i$. Así, $(u_1, \ldots, u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $(f_1^k(u_1), \ldots, f_m^k(u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Por la Observación 3.1.4, parte (1), tenemos que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((u_1, \ldots, u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. □

En base a la Definición 3.1.1, es natural pensar que si el espacio producto $\prod_{i=1}^m X_i$ tiene alguna propiedad topológica o dinámica, esta se herede a los espacios topológicos X_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. A continuación nos enfocamos en analizar relaciones entre los espacios $\prod_{i=1}^m X_i$ y X_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, considerando algunas propiedades topológicas. De propiedades dinámicas nos ocupamos más adelante.

Teorema 3.1.6. Sean m un entero mayor o igual que dos y $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos. Luego, $(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ es un punto aislado en $\prod_{i=1}^m X_i$ si y sólo si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, a_i es un punto aislado en X_i.

Demostración. Supongamos que $(a_1, \ldots, a_m)$ es un punto aislado en $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(\prod_{i=1}^m X_i) \cap \mathcal{U} = \{(a_1, \ldots, a_m)\}$. Más aún, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m X_i) = \{(a_1, \ldots, a_m)\}$. Observemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $U_i \cap X_i = \{a_i\}$. Consecuentemente, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, a_i es un punto aislado en X_i.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, a_i es un punto aislado en X_i. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto U_i de X_i tal que $U_i \cap X_i = \{a_i\}$. Notemos que, $(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m X_i) = \{(a_1, \ldots, a_m)\}$. De aquí, $(a_1, \ldots, a_m)$ es un punto aislado en $\prod_{i=1}^m X_i$. □

Corolario 3.1.7. Sean m un entero mayor o igual que dos y $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos. Luego, $\prod_{i=1}^m X_i$ es perfecto si y sólo si, existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, tal que X_{i_0} es perfecto.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m X_i$ no es perfecto. De aquí, existe $(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(a_1, \ldots, a_m)$ es aislado. Por el Teorema 3.1.6, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, a_i es un punto aislado en X_i. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i no es perfecto.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i no es perfecto. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un punto aislado a_i en X_i. Así, por el Teorema 3.1.6, $(a_1, \ldots, a_m)$ es aislado en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m X_i$ no es perfecto. $\square$

Teorema 3.1.8. Sean m un entero mayor o igual que dos y $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos. Luego, $\prod_{i=1}^m X_i$ es pseudo-regular si y sólo si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es pseudo-regular.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m X_i$ es pseudo-regular. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0}. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $V_i = X_i$ y $V_{i_0} = U_{i_0}$. Así, $\prod_{i=1}^m V_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que $\prod_{i=1}^m X_i$ es pseudo-regular, existe un subconjunto abierto no vacío $\mathcal{V}$ de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{V}) \subseteq \prod_{i=1}^m V_i$. Más aún, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío $V_i' \subseteq X_i$ tal que $\prod_{i=1}^m V_i' \subseteq \mathcal{V}$. Consecuentemente, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m V_i') \subseteq \prod_{i=1}^m V_i$. De lo anterior obtenemos que, $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(V_{i_0}') \subseteq U_{i_0}$. Por lo tanto, X_{i_0} es pseudo-regular. Ya que, $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ es arbitrario, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es pseudo-regular.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es pseudo-regular. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es pseudo-regular, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío V_i de X_i tal que $\mathrm{cl}_{X_i}(V_i) \subseteq U_i$. Así, $\prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(V_i) \subseteq \prod_{i=1}^m U_i$. Por otro lado, ya que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m V_i) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(V_i)$, obtenemos que, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m V_i) \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m X_i$ es pseudo-regular. $\square$

El resultado del Lema 3.1.9 es una generalización del Lema 1.2.7.

Lema 3.1.9. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i un subconjunto no vacío de X_i, $x_i \in X_i$ y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$, entonces, para $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$, se cumple que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$. Pongamos $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Se sigue que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = k_i + l_i$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) = f_i^{k_i + l_i}(x_i) = f_i^{l_i}(f_i^{k_i}(x_i))$. Consecuentemente, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in f_i^{l_i}(U_i)$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es $+$invariante bajo f_i, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$. $\square$

En el Teorema 3.1.10 retomamos la idea del Teorema 3.1.6 considerando ahora puntos transitivos, periódicos y la noción de conjunto ω-límite de un punto.

Teorema 3.1.10. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Si $(x_1,\dots,x_m)$ es un punto transitivo de $\prod_{i=1}^m f_i$, entonces, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, x_i es un punto transitivo de f_i.

(2) Si $\omega((x_1,\dots,x_m),\prod_{i=1}^m f_i)=\prod_{i=1}^m X_i$, entonces, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, $\omega(x_i,f_i)=X_i$.

(3) $(x_1,\dots,x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$ si y sólo si, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, x_i es un punto periódico de f_i.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1,\dots,x_m),\prod_{i=1}^m f_i))=\prod_{i=1}^m X_i$. Sean $i_0\in\{1,\dots,m\}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i_0\}$, sea $U_i=X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, $\mathcal{O}((x_1,\dots,x_m),\prod_{i=1}^m f_i)\cap(\prod_{i=1}^m U_i)\neq\emptyset$. Se sigue que, existe $k\in\mathbb{Z}_+$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\dots,x_m))\in\prod_{i=1}^m U_i$. Luego, por la Observación 3.1.4, parte (1), tenemos que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\dots,x_m))=(f_1^k(x_1),\dots,f_m^k(x_m))$ y en consecuencia, $f_{i_0}^k(x_{i_0})\in U_{i_0}$. Por lo tanto, $U_{i_0}\cap\mathcal{O}(x_{i_0},f_{i_0})\neq\emptyset$ y $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x_{i_0},f_{i_0}))=X_{i_0}$.

Supongamos que $\omega((x_1,\dots,x_m),\prod_{i=1}^m f_i)=\prod_{i=1}^m X_i$. Sean $i_0\in\{1,\dots,m\}$, $y_{i_0}\in X_{i_0}$, $k\in\mathbb{N}$, U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $y_{i_0}\in U_{i_0}$ y, para cada $j\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i_0\}$, sea $y_j\in X_j$. Además, para cada $i\in\{1,\dots,m\}\setminus\{i_0\}$, pongamos $U_i=X_i$. De lo anterior obtenemos que, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(y_1,\dots,y_m)\in\prod_{i=1}^m U_i$. Así, por hipótesis, existe $l\in\mathbb{N}$ con $l\geq k$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((x_1,\dots,x_m))\in\prod_{i=1}^m U_i$. Por la Observación 3.1.4, parte (1), tenemos que, $f_{i_0}^l(x_{i_0})\in U_{i_0}$. Por lo tanto, $y_{i_0}\in\omega(x_{i_0},f_{i_0})$. Consecuentemente, $X_{i_0}=\omega(x_{i_0},f_{i_0})$.

Supongamos que $(x_1,\dots,x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. De aquí, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\dots,x_m))=(x_1,\dots,x_m)$. Así, por la Observación 3.1.4, parte (1), para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, $f_i^k(x_i)=x_i$. Por lo tanto, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, x_i es un punto periódico de f_i.

Ahora supongamos que, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, x_i es un punto periódico de f_i. Así, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, existe $k_i\in\mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i)=x_i$. Sea $k=k_1\cdots k_m$. De aquí, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, $f_i^k(x_i)=x_i$. En consecuencia, $(f_1^k(x_1),\dots,f_m^k(x_m))=(x_1,\dots,x_m)$. Por la Observación 3.1.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\dots,x_m))=(x_1,\dots,x_m)$. Por lo tanto, $(x_1,\dots,x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. $\square$

El Corolario 3.1.11, se deduce de los Teoremas 3.1.6 y 3.1.10.

Corolario 3.1.11. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\dots,X_m$ espacios topológicos y, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, sea $f_i:X_i\to X_i$ una función. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) $trans(\prod_{i=1}^m f_i)\subseteq\prod_{i=1}^m trans(f_i)$.

(2) $\omega((x_1,\dots,x_m),\prod_{i=1}^m f_i)\subseteq\prod_{i=1}^m\omega(x_i,f_i)$.

(3) $PI(\prod_{i=1}^m X_i)=\prod_{i=1}^m PI(X_i)$.

(4) $Per(\prod_{i=1}^m f_i)=\prod_{i=1}^m Per(f_i)$.

Teorema 3.1.12. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(trans(\prod_{i=1}^m f_i)) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$.

(2) $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$.

Demostración. En virtud del Corolario 3.1.11, parte (1), es suficiente con verificar que:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\prod_{i=1}^m trans(f_i)\right) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i)).$$

Sean un punto $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m trans(f_i))$ e $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Veamos que $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(trans(f_{i_0}))$. Sea U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. Observemos que $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y que $\prod_{i=1}^m U_i$ es abierto en $\prod_{i=1}^m X_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m trans(f_i)) \neq \emptyset$. Sea $(u_1, \ldots, u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $u_i \in trans(f_i)$. De aquí, $U_{i_0} \cap trans(f_{i_0}) \neq \emptyset$. Como U_{i_0} e $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ son arbitrarios, tenemos que $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(trans(f_{i_0}))$ y en consecuencia, $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m trans(f_i)) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$. Finalmente, por el Corolario 3.1.11, parte (1), tenemos que, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(trans(\prod_{i=1}^m f_i)) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$.

Sean $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i))$ e $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Veamos que $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(Per(f_{i_0}))$. Sea U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. Notemos que $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y que $\prod_{i=1}^m U_i$ es abierto en $\prod_{i=1}^m X_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) \cap (\prod_{i=1}^m U_i) \neq \emptyset$. Sea $(u_1, \ldots, u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $u_i \in Per(f_i)$. De aquí, $u_{i_0} \in Per(f_{i_0}) \cap U_{i_0}$. Ya que U_{i_0} e $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ son arbitrarios, obtenemos que, $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(Per(f_{i_0}))$ y así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x_i \in \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$. Por lo tanto, $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$.

Ahora, sean $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}$. Veamos que $(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $U_i \cap Per(f_i) \neq \emptyset$. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $u_i \in U_i \cap Per(f_i)$. De aquí, $(u_1, \ldots, u_m) \in (\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m Per(f_i))$. En consecuencia, $\mathcal{U} \cap (\prod_{i=1}^m Per(f_i)) \neq \emptyset$. Ya que $\mathcal{U}$ es arbitrario, tenemos que $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i))$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$. □

El Ejemplo 3.1.13 muestra que los recíprocos del Teorema 3.1.10, partes (1) y (2) no se cumplen en general.

Ejemplo 3.1.13. Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 1.2.5. Notemos que:

(1) $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(1, f)) = X$ y $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(2, f)) = X$. Sin embargo, $\mathcal{O}((1, 2), f^{\times 2}) \cap \{1\}^2 = \emptyset$. En consecuencia, $\mathrm{cl}_{X^2}(\mathcal{O}((1, 2), f^{\times 2})) \neq X^2$.

(2) $\omega(1, f) = X$ y $\omega(2, f) = X$. Sin embargo, $\omega((1, 2), f^{\times 2}) \neq X^2$.

Existen condiciones bajo las cuales se cumplen los recíprocos del Teorema 3.1.10, partes (1) y (2). Una de estas condiciones es la que mostramos en el Teorema 3.1.14.

Teorema 3.1.14. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x_i \in X_i$ y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

(2) Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$ y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Sean $(y_1, \ldots, y_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$, $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{U}$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i, tal que $(y_1, \ldots, y_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que $l_i \geq k$ y $f_i^{l_i}(x_i) \in U_i$. Sea $l = \max\{l_1, \ldots, l_m\}$. Por el Lema 3.1.9, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^l(x_i) \in U_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{U}$. También, note que $l \geq k$. Por lo tanto, $(y_1, \ldots, y_m) \in \omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$ y así $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{O}(x_i, f_i) \cap U_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Por el Lema 3.1.9, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1^k(x_1), \ldots, f_m^k(x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. De aquí concluimos que, $\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i$. $\square$

El resultado del Teorema 3.1.14 nos hace pensar que los conjuntos +invariantes juegan un papel fundamental para que el recíproco de algunas condiciones se cumpla. Es por esto que a continuación veremos una forma natural de construir conjuntos +invariantes en el espacio producto $\prod_{i=1}^m X_i$ a partir de conjuntos +invariantes en los factores X_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Proposición 3.1.15. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i un subconjunto de X_i y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es +invariante bajo f_i si y sólo si $\prod_{i=1}^m U_i$ es +invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es +invariante bajo f_i. Sea $(a_1, \ldots, a_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)(\prod_{i=1}^m U_i)$. Se sigue que, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que

$(\prod_{i=1}^m f_i)((x_1,\ldots,x_m)) = (a_1,\ldots,a_m)$. De aquí, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i(x_i) = a_i$. Luego, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $a_i \in f_i(U_i)$. Puesto que, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, U_i es +invariante bajo f_i, tenemos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $a_i \in U_i$. Por lo tanto, $(a_1,\ldots,a_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Consecuentemente, $\prod_{i=1}^m U_i$ es +invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$.

Ahora supongamos que $\prod_{i=1}^m U_i$ es +invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ y $x_{i_0} \in f_{i_0}(U_{i_0})$. Así, existe $u_{i_0} \in U_{i_0}$ tal que $f_{i_0}(u_{i_0}) = x_{i_0}$. Para cada $j \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, sea $u_j \in U_j$. Se sigue que, $(u_1,\ldots,u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Puesto que $\prod_{i=1}^m U_i$ es +invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$, obtenemos que $(\prod_{i=1}^m f_i)((u_1,\ldots,u_m)) = (f_1(u_1),\ldots,f_m(u_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Así, $x_{i_0} = f_{i_0}(u_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por lo tanto, $f_{i_0}(U_{i_0}) \subseteq U_{i_0}$. $\square$

Proposición 3.1.16. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, U_i un subconjunto de X_i y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, U_i es $-$invariante bajo f_i, entonces $\prod_{i=1}^m U_i$ es $-$invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$.

Demostración. Supongamos que, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, U_i es $-$invariante bajo f_i. Sea $(a_1,\ldots,a_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{-1}(\prod_{i=1}^m U_i)$. De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)((a_1,\ldots,a_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Esto implica que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i(a_i) \in U_i$. Así, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $a_i \in f_i^{-1}(U_i)$. Puesto que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, U_i es $-$invariante bajo f_i, tenemos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $a_i \in U_i$. Consecuentemente, $(a_1,\ldots,a_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m U_i$ es $-$invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$. $\square$

El recíproco de la Proposición 3.1.16 no se cumple en general.

Ejemplo 3.1.17. Sean $X = \{1,2,3,4\}$ un conjunto con la topología $\{X,\emptyset,\{1,2\}\}$ y $f : X \to X$ la función dada por $f(x) = 1$, para cada $x \in X$. Sea $A = \{1\} \times \{2,3,4\}$. Notemos que $(f^{\times 2})^{-1}(A) = \emptyset$. Así, $(f^{\times 2})^{-1}(A) \subseteq A$. De aquí, A es $-$invariante bajo $f^{\times 2}$. Por otro lado, $f^{-1}(\{1\}) = X$. Se sigue que, $f^{-1}(\{1\}) \nsubseteq \{1\}$. Consecuentemente, $\{1\}$ no es $-$invariante bajo f.

Siempre que sea posible daremos condiciones bajo las cuales los recíprocos de algunos resultados se cumplen.

Teorema 3.1.18. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, U_i un subconjunto de X_i y $f_i : X_i \to X_i$ una función sobreyectiva. Luego, $\prod_{i=1}^m U_i$ es $-$invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$ si y sólo si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, U_i es $-$invariante bajo f_i.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m U_i$ es $-$invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ y $a_{i_0} \in f_{i_0}^{-1}(U_{i_0})$. Así, $f_{i_0}(a_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por otro lado, puesto que, para todo $j \in \{1,\ldots,m\}$, f_j es sobreyectiva, tenemos que, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$, $f_j^{-1}(U_j) \neq \emptyset$. De aquí, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, podemos tomar $a_j \in f_j^{-1}(U_j)$. En consecuencia, para todo $j \in \{1,\ldots,m\}$, $f_j(a_j) \in U_j$. De lo anterior concluimos que, $(f_1(a_1),\ldots,f_m(a_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m f_i)((a_1,\ldots,a_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Luego, $(a_1,\ldots,a_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{-1}(\prod_{i=1}^m U_i)$. Finalmente, puesto que $\prod_{i=1}^m U_i$ es $-$invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$, $(a_1,\ldots,a_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Esto implica que, $a_{i_0} \in U_{i_0}$. Por lo tanto, U_{i_0} es $-$invariante.

El recíproco se sigue de la Proposición 3.1.16. $\square$

Nos falta analizar la relación entre los espacios $\prod_{i=1}^m X_i$ y X_i, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, para cuando alguno de ellos es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $\prod_{i=1}^m f_i$ y f_i, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, respectivamente.

Teorema 3.1.19. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Luego, $\prod_{i=1}^m X_i$ es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $\prod_{i=1}^m f_i$ si y sólo si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$ y $(x_1,\ldots,x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)(\mathcal{U})$. Así, existe $(a_1,\ldots,a_m) \in \mathcal{U}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)((a_1,\ldots,a_m)) = (x_1,\ldots,x_m)$. Esto implica que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $(a_1,\ldots,a_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis y la Proposición 3.1.15, $(\prod_{i=1}^m f_i)(\prod_{i=1}^m U_i) \subseteq \prod_{i=1}^m U_i$. Así, $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es +invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$. Ya que $\mathcal{U}$ es arbitrario, tenemos que $\prod_{i=1}^m X_i$ es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $\prod_{i=1}^m f_i$.

Ahora supongamos que $\prod_{i=1}^m X_i$ es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo la función $\prod_{i=1}^m f_i$. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$, U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\setminus\{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. Luego, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que $\prod_{i=1}^m X_i$ es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $\prod_{i=1}^m f_i$, tenemos que $\prod_{i=1}^m U_i$ es +invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$. Así, por la Proposición 3.1.15, U_{i_0} es +invariante bajo f_{i_0}. Como $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ es arbitrario, concluimos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. $\square$

En los siguientes tres resultados analizamos propiedades del conjunto de puntos periódicos y transitivos de una función producto.

Teorema 3.1.20. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Luego, $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$ si y sólo si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i.

Demostración. Supongamos que $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por el Teorema 3.1.12, parte (2), $\prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Consecuentemente, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = X_i$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i.

Ahora supongamos que, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. En consecuencia, $\prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por otro lado, por el Corolario 3.1.11 y el Teorema 3.1.12, parte (2), obtenemos que $\prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) = \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(Per(\prod_{i=1}^m f_i))$. Esto implica que, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(Per(\prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. $\square$

Proposición 3.1.21. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Si $trans(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$, entonces, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $trans(f_i)$ es denso en X_i.

Demostración. Supongamos que $trans(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(trans\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Luego, por el Teorema 3.1.12, parte (1), $\prod_{i=1}^m X_i \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$. Consecuentemente, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $X_i \subseteq \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$. Por lo tanto, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $trans(f_i)$ es denso en X_i. □

El recíproco de la Proposición 3.1.21 no se cumple en general.

Ejemplo 3.1.22. Sean $X = \{1,2\}$ un conjunto con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$, y $f : X \to X$ la función dada por $f(1) = 2$ y $f(2) = 1$. Notemos que:

(1) $\mathcal{O}(1,f) = \{1,2\}$ es denso en X y $\mathcal{O}(2,f) = \{2,1\}$ es denso en X. Así, $trans(f)$ es denso en X.

(2) $trans(f \times f) = \emptyset$.

Teorema 3.1.23. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $trans(f_i)$ es denso en X_i y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $trans(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $trans(f_i)$ es denso en X_i y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $U_i \cap trans(f_i) \neq \emptyset$. Consecuentemente, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $x_i \in U_i$ tal que x_i es punto transitivo de f_i. Puesto que, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, por el Teorema 3.1.14, parte (2), tenemos que $(x_1,\ldots,x_m)$ es un punto transitivo de $\prod_{i=1}^m f_i$. Por otra parte, $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $trans(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. □

Lema 3.1.24. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Si $j \in \{1,\ldots,m\}$ y U_j y V_j son dos subconjuntos abiertos no vacíos de X_j y, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\setminus\{j\}$, ponemos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$, entonces $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i) \subseteq n_{f_j}(U_j, V_j)$.

Demostración. Sea $k \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i)$. Así, $(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^{-k}(\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Sea $(y_1,\ldots,y_m) \in (\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^{-k}(\prod_{i=1}^m V_i)$. De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((y_1,\ldots,y_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Por la Observación 3.1.4, parte (1), tenemos que, $(f_1^k(y_1),\ldots,f_m^k(y_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Luego, $y_j \in U_j \cap f_j^{-k}(V_j)$. Por lo tanto, $k \in n_{f_j}(U_j, V_j)$ y así, $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i) \subseteq n_{f_j}(U_j, V_j)$. □

3.2. Propiedades dinámicas de funciones producto

Como mencionamos anteriormente, es difícil saber a ciencia cierta en qué año se introduce el análisis de propiedades dinámicas de una función producto. Sin embargo, dos trabajos son de resaltar, el primero y más importante es el de N. Değirmenci y Ş. Koçak [34], quienes en el 2010 analizan las condiciones bajo las cuales el producto de dos funciones (sobre espacios métricos) f y g caóticas en el sentido de Devaney es también una función caótica. Además, demuestran que si el producto $f \times g$ es mezclante, entonces f y g también lo son. Tres años después, R. Li y X. Zhou [61], considerando a $\mathcal{M}$ como alguna de las siguientes clases de funciones: sindéticamente transitivas, sindéticamente sensitivas, cofinitamente sensitivas, multi-sensitivas, ergodicamente sensitivas, mezclantes y transitivas, analizan las relaciones entre las condiciones: (1) $f \times g \in \mathcal{M}$ y (2) $f, g \in \mathcal{M}$.

Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: exacta, transitiva, débilmente mezclante, mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, suavemente mezclante, minimal inversa, Touhey, totalmente minimal, dispersora, exactamente Devaney caótica o un F-sistema. Motivados por las ideas de N. Değirmenci, Ş. Koçak, R. Li y X. Zhou, en esta sección analizamos relaciones entre las siguientes condiciones: (1) $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$ y (2) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

Comencemos analizando las nociones para las cuales las condiciones (1) y (2) son equivalentes.

Teorema 3.2.1. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0}. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por la Observación 3.1.4, parte (3), $f_{i_0}^k(U_{i_0}) = X_{i_0}$. Por lo tanto, f_{i_0} es exacta.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i) = X_i$. Por otro lado, por el diagrama de la Figura 1.10, tenemos que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es sobreyectiva. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para cada $l \in \mathbb{N}$, $f_i^l(X_i) = X_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Se sigue que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = k_i + l_i$. Esto implica que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) = f_i^{l_i+k_i}(U_i) = f_i^{l_i}(f_i^{k_i}(U_i)) = f_i^{l_i}(X_i) = X_i$. Finalmente, por la Observación 3.1.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) = \prod_{i=1}^m f_i^k(U_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) = \prod_{i=1}^m X_i$ y así $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. $\square$

De los Teoremas 3.1.20 y 3.2.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exactamente Devaney caótica si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i$ es exactamente Devaney caótica.

Teorema 3.2.3. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Luego, $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante si y sólo si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ y $\prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k (\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$, para todo $k \geq N$. De aquí, por el Lema 3.1.5, para cada $k \geq N$ y todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. En particular, $f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$. Por lo tanto, f_{i_0} es mezclante.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i, tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Ya que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geq N_i$. Sean $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$ y $l \geq N$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^l(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. De aquí, por el Lema 3.1.5, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l (\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Ya que $l \geq N$ es arbitrario, concluimos que, para cada $l \geq N$, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l (\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante. $\square$

Son pocas las clases de funciones para las cuales las condiciones (1) y (2) mencionadas al inicio de esta sección, son equivalentes. En el siguiente teorema observamos que para la mayoría de estas funciones se satisface la proposición: (1) implica (2).

Teorema 3.2.4. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, minimal inversa, Touhey, un F-sistema, dispersora o suavemente mezclante. Si $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ y $\prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que, $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k (\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Luego, por el Lema 3.1.5, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. En particular, $f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$. Por lo tanto, f_{i_0} es transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es débilmente mezclante. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X_{i_0} \times X_{i_0}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_{i_0}^1, U_{i_0}^2, V_{i_0}^1$ y $V_{i_0}^2$ de X_{i_0} tales que $U_{i_0}^1 \times U_{i_0}^2 \subseteq \mathcal{U}$ y $V_{i_0}^1 \times V_{i_0}^2 \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i^1 = U_i^2 = V_i^1 = V_i^2 = X_i$. Luego, $(\prod_{i=1}^m U_i^1) \times (\prod_{i=1}^m U_i^2)$ y

$(\prod_{i=1}^m V_i^1) \times (\prod_{i=1}^m V_i^2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $(\prod_{i=1}^m X_i) \times (\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, existen $((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) \in (\prod_{i=1}^m U_i^1) \times (\prod_{i=1}^m U_i^2)$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $((\prod_{i=1}^m f_i) \times (\prod_{i=1}^m f_i))^k((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) \in (\prod_{i=1}^m V_i^1) \times (\prod_{i=1}^m V_i^2)$. Así, por la Observación 3.1.4, parte (1), $(f_{i_0} \times f_{i_0})^k((a_{i_0}, b_{i_0})) \in V_{i_0}^1 \times V_{i_0}^2$. Más aún, $(a_{i_0}, b_{i_0}) \in U_{i_0}^1 \times U_{i_0}^2$. Por lo tanto, $(f_{i_0} \times f_{i_0})^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $f_{i_0}^{\times 2}$ es transitiva. Finalmente, f_{i_0} es débilmente mezclante.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es transitiva. Luego, por la Observación 3.1.4, parte (1), $\prod_{i=1}^m f_i^s$ es transitiva. Así, por el primer párrafo de la prueba de este teorema, se tiene que $f_{i_0}^s$ es transitiva. Por lo tanto, f_{i_0} es totalmente transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^m X_i = \bigcup_{k=0}^s (\prod_{i=1}^m f_i)^k (\prod_{i=1}^m U_i)$. Sea $x_{i_0} \in X_{i_0}$ y, para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $x_i \in X_i$. Luego, existe $k_1 \in \{0, \ldots, s\}$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1} (\prod_{i=1}^m U_i)$. Así, por la Observación 3.1.4, parte (1), tenemos que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{k_1}(U_{i_0})$. Por lo tanto, $X_{i_0} = \bigcup_{k=0}^s f_{i_0}^k(U_{i_0})$ y así f_{i_0} es fuertemente transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es caótica. Por el primer párrafo de la prueba de este teorema, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es transitiva. Además, por el Teorema 3.1.20, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es caótica.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es órbita-transitiva. Consecuentemente, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por el Teorema 3.1.10, parte (1), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. Así, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es órbita-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es estrictamente órbita-transitiva. Así, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((\prod_{i=1}^m f_i)((x_1, \ldots, x_m)), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por el Teorema 3.1.10, parte (1), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(f_i(x_i), f_i)) = X_i$ y así, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es estrictamente órbita-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es ω-transitiva. Consecuentemente, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ tal que $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Así, por el Teorema 3.1.10, parte (2), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$. Por lo tanto, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es ω-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es TT_{++}. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, por el Lema 3.1.24, $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i) \subseteq n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, V_{i_0})$. Además, por hipótesis, $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i)$ es infinito. Por lo tanto, $n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, V_{i_0})$ es infinito y así f_{i_0} es TT_{++}.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal inversa. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $x_{i_0} \in X_{i_0}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sean $U_i = X_i$ y $x_i \in X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, tenemos que $\{A \in \prod_{i=1}^m X_i : (\prod_{i=1}^m f_i)^l(A) = (x_1, \ldots, x_m),$ para algún $l \in \mathbb{N}\} \cap (\prod_{i=1}^m U_i) \neq \emptyset$. Sean $(u_1, \ldots, u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $l \in \mathbb{N}$ tales que $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((u_1, \ldots, u_m)) = (x_1, \ldots, x_m)$. De la Observación 3.1.4, parte (1), $u_{i_0} \in \{y \in X_{i_0} : f_{i_0}^l(y) = x_{i_0},$ para algún $l \in \mathbb{N}\} \cap U_{i_0} \neq \emptyset$.

Así, el conjunto $\{y \in X_{i_0} : f_{i_0}^l(y) = x_{i_0}, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en X_{i_0}. Puesto que $x_{i_0} \in X_{i_0}$ es arbitrario, podemos concluir que f_{i_0} es minimal inversa.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. Así, $\prod_{i=1}^m U_i$ y $\prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existen un punto periódico $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \ldots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Por el Teorema 3.1.10, parte (3), x_{i_0} es un punto periódico de f_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y por la Observación 3.1.4, parte (1), $f_{i_0}^k(x_{i_0}) \in V_{i_0}$. Por lo tanto, f_{i_0} es Touhey.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es un F-sistema. De aquí, $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva y $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente transitiva. Además, por el Teorema 3.1.20, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es un F-sistema.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es dispersora. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, Y un espacio topológico, $g : Y \to Y$ una función minimal y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X_{i_0} \times Y$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_{i_0}^1$ y $U_{i_0}^2$ de X_{i_0} y subconjuntos abiertos no vacíos V_1 y V_2 de Y tales que $U_{i_0}^1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $U_{i_0}^2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i^1 = U_i^2 = X_i$. Así, $\prod_{i=1}^m U_i^1$ y $\prod_{i=1}^m U_i^2$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que $(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva, existen $((u_1, \ldots, u_m), v_1) \in (\prod_{i=1}^m U_i^1) \times V_1$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $((\prod_{i=1}^m f_i) \times g)^k((u_1, \ldots, u_m), v_1) \in (\prod_{i=1}^m U_i^2) \times V_2$. De aquí, $(u_{i_0}, v_1) \in U_{i_0}^1 \times V_1$ y por la Observación 3.1.4, parte (1), $(f_{i_0} \times g)^k((u_{i_0}, v_1)) \in U_{i_0}^2 \times V_2$. Por lo tanto, $(f_{i_0} \times g)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así f_{i_0} es dispersora.

La prueba para las funciones suavemente mezclantes es análoga a la prueba dada para funciones dispersoras. □

El recíproco del Teorema 3.2.4 no es cierto en general. Veamos un ejemplo parcial de esto en el siguiente:

Ejemplo 3.2.5. Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -2x + 3, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \\ -x + 2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

En [34, Ejemplo 1], se verifica que f es una función caótica. Además, se prueba que $f^{\times 2} : [0, 2]^2 \to [0, 2]^2$ no es transitiva y por lo tanto, no es caótica. Más aún, en [3] y [63], se verifica que para continuos y funciones continuas, las funciones: transitiva, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva y TT_{++} son equivalentes. Por lo tanto, el recíproco del Teorema 3.2.4, para todas estas clases de funciones no se cumple en general.

Las funciones minimales y totalmente minimales no las incluimos en el Teorema 3.2.4 ya que para estas dos clases de funciones requerimos la continuidad de la función.

Teorema 3.2.6. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua. Si $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal.

Demostración. Sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Puesto que f_{i_0} es continua, por [63, Proposición 6.2] es suficiente con verificar que, para cada $x \in X_{i_0}$, $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x, f_{i_0})) = X_{i_0}$. Sean $x_{i_0} \in X_{i_0}$ y para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, $x_i \in X_i$. De aquí, $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es continua, tenemos que, $\prod_{i=1}^m f_i$ es una función continua y minimal. Así, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Luego, por el Teorema 3.1.10, parte (1), para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. En particular, $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0})) = X_{i_0}$. Como $x_{i_0} \in X_{i_0}$ es arbitrario, de [63, Proposición 6.2], f_{i_0} es minimal. $\square$

Corolario 3.2.7. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua. Si $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente minimal.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es minimal. De aquí, por la Observación 3.1.4, parte (1), $\prod_{i=1}^m f_i^s$ es minimal. Así, por el Teorema 3.2.6, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i^s es minimal. $\square$

Teorema 3.2.8. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Si $\prod_{i=1}^m X_i$ es perfecto y $(a_1, \ldots, a_m)$ es un punto transitivo de $\prod_{i=1}^m f_i$, entonces, existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, tal que f_{i_0} es transitiva.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m X_i$ es perfecto y que $(a_1, \ldots, a_m)$ es un punto transitivo de $\prod_{i=1}^m f_i$. Luego, por el Teorema 3.1.10, parte (1), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, a_i es un punto transitivo de f_i. Además, por el Corolario 3.1.7, existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, tal que X_{i_0} es perfecto. Así, por [80, Teorema 1.5.15], f_{i_0} es transitiva. $\square$

Lema 3.2.9. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_{m+1}$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y $f_i \times f_{m+1}$ es transitiva, entonces $(\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y que $f_i \times f_{m+1}$ es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos subconjuntos abiertos no vacíos de $(\prod_{i=1}^m X_i) \times X_{m+1}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ de $\prod_{i=1}^m X_i$ y subconjuntos abiertos no vacíos V_1 y V_2 de X_{m+1} tales que, $\mathcal{U}_1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i^1 y U_i^2 de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i^1 \subseteq \mathcal{U}_1$ y $\prod_{i=1}^m U_i^2 \subseteq \mathcal{U}_2$. Por hipótesis, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f_i \times f_{m+1})^{k_i}(U_i^1 \times V_1) \cap (U_i^2 \times V_2) \neq \emptyset$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $(u_i, v_i) \in U_i^1 \times V_1$ tal que $(f_i \times f_{m+1})^{k_i}((u_i, v_i)) \in U_i^2 \times V_2$. Consecuentemente, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{k_i}(u_i) \in U_i^2$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_m\}$. Por el Lema 3.1.9, obtenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in U_i^2$. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$

tal que $k = k_{i_0}$ y $v = v_{i_0}$. Así, $f_{m+1}^k(v) \in V_2$. Esto implica que, $((u_1, \dots, u_m), v) \in (\prod_{i=1}^m U_i^1) \times V_1$ y $((\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1})^k(((u_1, \dots, u_m), v)) \in (\prod_{i=1}^m U_i^2) \times V_2$. Consecuentemente, $((\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1})^k(\mathcal{U}_1 \times V_1) \cap (\mathcal{U}_2 \times V_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva. □

Como mencionamos anteriormente, los conjuntos +invariantes juegan un papel muy importante para que el recíproco de varios de los resultados que presentamos en este trabajo se puedan verificar. Veamos por ejemplo la prueba del Teorema 3.2.10.

Teorema 3.2.10. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \dots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, Touhey, dispersora, un F-sistema o suavemente mezclante. Si, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$.

Demostración. En toda la prueba estamos suponiendo que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Por hipótesis, para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, podemos tomar $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{k_i}(u_i) \in V_i$. Pongamos $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Por el Lema 3.1.9, tenemos que, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in V_i$. Esto implica que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Así, por el Lema 3.1.5, parte (2), $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es débilmente mezclante. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i^1, U_i^2, V_i^1 y V_i^2 de X_i, tales que $\prod_{i=1}^m U_i^1 \subseteq \mathcal{U}_1$, $\prod_{i=1}^m U_i^2 \subseteq \mathcal{U}_2$, $\prod_{i=1}^m V_i^1 \subseteq \mathcal{V}_1$ y $\prod_{i=1}^m V_i^2 \subseteq \mathcal{V}_2$. Puesto que f_i es débilmente mezclante, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i^j) \cap V_i^j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2\}$. Para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, sea $a_i \in U_i^1$ tal que $f_i^{k_i}(a_i) \in V_i^1$ y $a_i' \in U_i^2$ tal que $f_i^{k_i}(a_i') \in V_i^2$ y pongamos $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Luego, por el Lema 3.1.9, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(a_i) \in V_i^1$ y $f_i^k(a_i') \in V_i^2$. Esto implica que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((a_1, \dots, a_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i^1$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((a_1', \dots, a_m')) \in \prod_{i=1}^m V_i^2$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es débilmente mezclante.

Supongamos que, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es totalmente transitiva. Sean $s \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Puesto que, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es totalmente transitiva, tenemos que, para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f_i^s)^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Esto implica que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^{sk_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Ahora, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, podemos tomar $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{sk_i}(u_i) \in V_i$. Sea $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Por el Lema

3.1.9, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{sk}(u_i) \in V_i$. Así, $(f_1^{sk}(u_1), \ldots, f_m^{sk}(u_m)) \in \prod_{i=1}^m f_i^{sk}(U_i)$ y $(f_1^{sk}(u_1), \ldots, f_m^{sk}(u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Además, por la Observación 3.1.4, parte (1), tenemos que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}((u_1, \ldots, u_m)) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}(\prod_{i=1}^m U_i)$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}((u_1, \ldots, u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Consecuentemente:

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{sk}((u_1, \ldots, u_m)) \in \left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{sk}\left(\prod_{i=1}^m U_i\right)\right) \cap \left(\prod_{i=1}^m V_i\right).$$

De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es transitiva y como $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es caótica. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es transitiva y $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por la primera parte de la prueba de este teorema, tenemos que, $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva y por el Teorema 3.1.20, $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es caótica.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es órbita-transitiva. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. Por el Teorema 3.1.14, parte (2),

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es órbita-transitiva.

Supongamos que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es estrictamente órbita-transitiva. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(f_i(x_i), f_i)) = X_i$. Por el Teorema 3.1.14, parte (2):

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Consecuentemente, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)((x_1, \ldots, x_m)), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es estrictamente órbita-transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es ω-transitiva. De aquí, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\omega(x_i, f_i) = X_i$. Por el Teorema 3.1.14, parte (1), $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es ω-transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es TT_{++}. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Puesto que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es TT_{++}, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $n_{f_i}(U_i, V_i)$ es infinito. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $k_i \in n_{f_i}(U_i, V_i)$. Así, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Se sigue que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{k_i}(u_i) \in V_i$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_m\}$. Por el Lema 3.1.9, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in V_i$. De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((u_1, \ldots, u_m)) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i)$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $k \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Ahora, ya que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $n_{f_i}(U_i, V_i)$ es infinito, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, podemos tomar

$k_i' \in n_{f_i}(U_i, V_i)$ tal que $k_i' > k$. Sea $k_1 = \text{máx}\{k_1', \dots, k_m'\}$. Por el Lema 3.1.9, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^{k_1}(u_i) \in V_i$. Se sigue que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. En consecuencia, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $k_1 \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ y $k_1 > k$. Continuando con este proceso, obtenemos que $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es un conjunto infinito y como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son arbitrarios, concluimos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es TT_{++}.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es Touhey. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Además, ya que, para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es Touhey, tenemos que, para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i, existen un punto periódico $x_i \in U_i$ y $k_i \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f_i^{k_i}(x_i) \in V_i$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_m\}$. Luego, por el Lema 3.1.9, obtenemos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in V_i$. Por el Teorema 3.1.10, parte (4), podemos concluir que, $(x_1, \dots, x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$ tal que $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \dots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es un F-sistema. Así, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es totalmente transitiva y $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva. Además, por el Teorema 3.1.20, sabemos que $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es un F-sistema.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es suavemente mezclante. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función transitiva. Por hipótesis, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \times g$ es transitiva. Así, por el Lema 3.2.9, $(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es suavemente mezclante.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es dispersora. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función minimal. Por hipótesis, para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \times g$ es transitiva. Así, por el Lema 3.2.9, $(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es dispersora. $\square$

Las funciones minimales y totalmente minimales no las incluimos en el enunciado del Teorema 3.2.10 porque para estas dos condiciones volvemos a requerir la continuidad de la función.

Proposición 3.2.11. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \dots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua. Si, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es minimal y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es minimal y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Por hipótesis tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es continua. Así, por [63, Proposición 6.2], solo hay que verificar que, para todo $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$, $\text{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Sea $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Ya que, para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es minimal, obtenemos que $\text{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y puesto que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, por el Teorema 3.1.14, parte (2), tenemos que $\text{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \dots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal. $\square$

Corolario 3.2.12. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua. Si, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente minimal y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente minimal.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i^s es minimal y continua. Así, por la Proposición 3.2.11, $\prod_{i=1}^m f_i^s$ es minimal. Luego, por la Observación 3.1.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es minimal. Finalmente, ya que $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente minimal. □

3.3. Funciones inducidas a los productos simétricos de espacios producto

En el 2008, B. Hou, G. Liao y H. Liu [48] demuestran el siguiente resultado para funciones continuas entre espacios métricos compactos sin puntos aislados: Si 2^f es sensitiva, entonces $2^{f\times g}$ es sensitiva. Más tarde, citando algunas ideas de B. Hou, G. Liao y H. Liu, X. Wu, J. Wang y G. Chen [86] prueban, entre muchas otras cosas, que la $\mathcal{F}$-sensitividad de 2^f o 2^g implica la $\mathcal{F}$-sensitividad de $2^{f\times g}$ (f y g funciones continuas entre espacios métricos compactos). Hasta donde sabemos, estos son los únicos trabajos en los que se analiza una función inducida de un producto de funciones. Además, referente a las funciones inducidas a los productos simétricos de espacios producto, no existe ninguna publicación en la que se haga un análisis semejante a los dos anteriores. Por estas razones, es importante para nosotros, contribuir al engrandecimiento de esta nueva línea de investigación mediante la realización de esta sección.

Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: exacta, transitiva, débilmente mezclante, mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, suavemente mezclante, minimal inversa, Touhey, totalmente minimal, dispersora, exactamente Devaney caótica o un F-sistema. En esta sección estudiamos principalmente, relaciones entre las siguientes condiciones: (1) $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \in \mathcal{M}$, (2) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i) \in \mathcal{M}$ y (3) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

Lema 3.3.1. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\{a_1, \ldots, a_r\} \in \mathcal{F}_n(X_{i_0})$ con $r \leq n$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} tales que $\{a_1, \ldots, a_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ y para toda $l \in \{1, \ldots, r\}$, sean $a_i^l \in X_i$ y $a_{i_0}^l = a_l$.

(1) Si, para cada $l \in \{1, \ldots, r\}$, ponemos $b_l = (a_1^l, \ldots, a_{i_0}^l, \ldots, a_m^l)$, entonces $\{b_1, \ldots, b_r\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$.

(2) Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ y para cualquier $j \in \{1, \ldots, n\}$, $V_i^j = X_i$ y $V_{i_0}^j = U_j$, entonces $\{b_1, \ldots, b_r\} \in \langle U_1', \ldots, U_n' \rangle$, donde, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $U_j' = \prod_{i=1}^m V_i^j$.

Demostración. No es difícil verificar que (1) se satisface. Veamos que se cumple (2). Sea $p \in \{1, \ldots, r\}$. Puesto que $\{a_1, \ldots, a_r\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_p = a^p_{j_0} \in U_{j_0}$. Así, $b_p = (a^p_1, \ldots, a^p_{i_0}, \ldots, a^p_m) \in \prod_{i=1}^m V_i^{j_0} = U'_{j_0}$. Por lo tanto, $b_p \in \bigcup_{j=1}^n U'_j$. Consecuentemente, $\{b_1, \ldots, b_r\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n U'_j$. Ahora veamos que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\{b_1, \ldots, b_r\} \cap U'_j \neq \emptyset$. Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$. De aquí, $U'_k = \prod_{i=1}^m V_i^k$. Como $\{a_1, \ldots, a_r\} \cap U_k \neq \emptyset$, existe $l_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $a_{l_0} \in U_k$. Esto implica que, $(a^k_1, \ldots, a_{l_0}, \ldots, a^k_m) \in U'_k$. Consecuentemente, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\{b_1, \ldots, b_r\} \cap U'_j \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\{b_1, \ldots, b_r\} \in \langle U'_1, \ldots, U'_n \rangle$. □

El siguiente resultado es clave para un mejor desarrollo de esta sección.

Lema 3.3.2. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, $l, n \in \mathbb{N}$ tales que $l \leq n$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $U_1^i, \ldots, U_n^i$ subconjuntos abiertos no vacíos de X_i y, para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$, $(x_1^j, \ldots, x_m^j) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Si $\{(x_1^j, \ldots, x_m^j) : j \in \{1, \ldots, l\}\} \in \langle \prod_{i=1}^m U_1^i, \ldots, \prod_{i=1}^m U_n^i \rangle$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\{x_i^1, \ldots, x_i^l\} \in \langle U_1^i, \ldots, U_n^i \rangle$.

Demostración. Sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Vamos a verificar que $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\} \in \langle U_1^{i_0}, \ldots, U_n^{i_0} \rangle$. Primero veamos que $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j^{i_0}$. Sea $k \in \{1, \ldots, l\}$. Por hipótesis, existe $s \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(x_1^k, \ldots, x_m^k) \in \prod_{p=1}^m U_s^p$. De aquí, $x_{i_0}^k \in U_s^{i_0}$. Esto implica que, $x_{i_0}^k \in \bigcup_{j=1}^n U_j^{i_0}$. Por lo tanto, $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j^{i_0}$.

Ahora veamos que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\} \cap U_j^{i_0} \neq \emptyset$. Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Por hipótesis, $\{(x_1^j, \ldots, x_m^j) : j \in \{1, \ldots, l\}\} \cap (\prod_{i=1}^m U_p^i) \neq \emptyset$. Así, existe $j \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $(x_1^j, \ldots, x_m^j) \in \prod_{i=1}^m U_p^i$. Esto implica que, $x_{i_0}^j \in U_p^{i_0}$. En consecuencia, $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\} \cap U_p^{i_0} \neq \emptyset$. Puesto que $p \in \{1, \ldots, n\}$ es arbitrario, tenemos que, para cada $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\} \cap U_p^{i_0} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\} \in \langle U_1^{i_0}, \ldots, U_n^{i_0} \rangle$. Finalmente, ya que $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ es arbitrario, podemos concluir que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\{x_i^1, \ldots, x_i^l\} \in \langle U_1^i, \ldots, U_n^i \rangle$. □

Lema 3.3.3. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $U_i^1, \ldots, U_i^n, V_i^1, \ldots, V_i^n$ subconjuntos abiertos no vacíos de X_i. Si, $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k(\langle U'_1, \ldots, U'_n \rangle) \cap \langle V'_1, \ldots, V'_n \rangle \neq \emptyset$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $(\mathcal{F}_n(f_i))^k(\langle U_i^1, \ldots, U_i^n \rangle) \cap \langle V_i^1, \ldots, V_i^n \rangle \neq \emptyset$. Donde, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $U'_j = \prod_{i=1}^m U_i^j$ y $V'_j = \prod_{i=1}^m V_i^j$.

Demostración. Supongamos que $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k (\langle U'_1, \ldots, U'_n \rangle) \cap \langle V'_1, \ldots, V'_n \rangle \neq \emptyset$. Así, existe $\{(x_1^j, \ldots, x_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\} \in \langle U'_1, \ldots, U'_n \rangle$, con $r \leq n$ tal que:

$$\left(\mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right)^k (\{(x_1^j, \ldots, x_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\}) \in \langle V'_1, \ldots, V'_n \rangle.$$

Por la Observación 3.1.4, partes (1) y (2), $\{(f_1^k(x_1^j), \ldots, f_m^k(x_m^j)) : j \in \{1, \ldots, r\}\} \in \langle V'_1, \ldots, V'_n \rangle$. Así, por el Lema 3.3.2, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\{f_i^k(x_i^1), \ldots, f_i^k(x_i^r)\} \in \langle V_i^1, \ldots, V_i^n \rangle$. Lo cual implica que $(\mathcal{F}_n(f_i))^k(\{x_i^1, \ldots, x_i^r\}) \in \langle V_i^1, \ldots, V_i^n \rangle$. Por otro lado, $\{x_i^1, \ldots, x_i^r\} \in \langle U_i^1, \ldots, U_i^n \rangle$. Por lo tanto, $(\mathcal{F}_n(f_i))^k(\langle U_i^1, \ldots, U_i^n \rangle) \cap \langle V_i^1, \ldots, V_i^n \rangle \neq \emptyset$. □

Lema 3.3.4. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1^i, \ldots, U_n^i, V_1^i, \ldots, V_n^i$ subconjuntos abiertos no vacíos de X_i. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$n_{\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)} \left(\langle U_1', \ldots, U_n' \rangle, \langle V_1', \ldots, V_n' \rangle\right) \subseteq n_{\mathcal{F}_n(f_i)}(\langle U_1^i, \ldots, U_n^i \rangle, \langle V_1^i, \ldots, V_n^i \rangle).$$

Donde, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $U_j' = \prod_{i=1}^m U_j^i$ y $V_j' = \prod_{i=1}^m V_j^i$.

Demostración. Sea $k \in n_{\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)}(\langle \prod_{i=1}^m U_1^i, \ldots, \prod_{i=1}^m U_n^i \rangle, \langle \prod_{i=1}^m V_1^i, \ldots, \prod_{i=1}^m V_n^i \rangle)$. De aquí, $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k (\langle \prod_{i=1}^m U_1^i, \ldots, \prod_{i=1}^m U_n^i \rangle) \cap \langle \prod_{i=1}^m V_1^i, \ldots, \prod_{i=1}^m V_n^i \rangle \neq \emptyset$. Por el Lema 3.3.3, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ se cumple que:

$$(\mathcal{F}_n(f_i))^k(\{x_i^1, \ldots, x_i^l\}) \in (\mathcal{F}_n(f_i))^k(\langle U_1^i, \ldots, U_n^i \rangle) \cap \langle V_1^i, \ldots, V_n^i \rangle.$$

Por lo tanto, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in n_{\mathcal{F}_n(f_i)}(\langle U_1^i, \ldots, U_n^i \rangle, \langle V_1^i, \ldots, V_n^i \rangle)$. □

Por el Corolario 3.1.7 y por [13, Teorema 3.14], podemos concluir lo siguiente.

Proposición 3.3.5. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$ es perfecto si y sólo si $\prod_{i=1}^m X_i$ es perfecto.

(2) Existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que X_{i_0} es perfecto si y sólo si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$ es perfecto.

(3) Existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$ es perfecto si y sólo si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$ es perfecto.

Por el Teorema 3.1.8 y [13, Teorema 3.8], se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.3.6. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es pseudo-regular si y sólo si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$ es pseudo-regular.

(2) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(X_i)$ es pseudo-regular si y sólo si $\prod_{i=1}^m X_i$ es pseudo-regular.

En los Teoremas 3.3.7 y 3.3.8 mostramos la forma en la que podemos construir puntos transitivos o puntos ω-límites en los espacios $\mathcal{F}_n(X_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, a partir de puntos en $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$ con la misma propiedad.

Teorema 3.3.7. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $l, n \in \mathbb{N}$ tales que $l \leq n$. Si $\mathcal{A} = \{(x_1^j, \ldots, x_m^j) : j \in \{1, \ldots, l\}\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$ es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\{x_i^1, \ldots, x_i^l\}$ es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(f_i)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. Así, por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1,\ldots,U_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$ y para toda $j \in \{1,\ldots,n\}$, pongamos $V_i^j = X_i$ y $V_{i_0}^j = U_j$ y, para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$, sea $U_j' = \prod_{i=1}^m V_i^j$. De aquí, $\langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, $\langle U_1',\ldots,U_n'\rangle \cap \mathcal{O}(\mathcal{A},\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)) \neq \emptyset$. En consecuencia, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k(\mathcal{A}) \in \langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$. Esto implica que, $\{(f_1^k(x_1^j),\ldots,f_m^k(x_m^j)) : j \in \{1,\ldots,l\}\} \in \langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$. Por el Lema 3.3.2, tenemos que $\{f_{i_0}^k(x_{i_0}^1),\ldots,f_{i_0}^k(x_{i_0}^l)\} \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Consecuentemente, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\{x_{i_0}^1,\ldots,x_{i_0}^l\}) \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{O}(\{x_{i_0}^1,\ldots,x_{i_0}^l\},\mathcal{F}_n(f)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\{x_{i_0}^1,\ldots,x_{i_0}^l\}$ es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$. Ya que $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ es arbitrario, podemos concluir que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\{x_i^1,\ldots,x_i^l\}$ es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(f_i)$. □

Teorema 3.3.8. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función, $l,n \in \mathbb{N}$ tales que $l \leq n$, y $\mathcal{A} = \{(x_1^j,\ldots,x_m^j) : j \in \{1,\ldots,l\}\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Si $\omega(\mathcal{A},\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)) = \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$, entonces, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\omega(\{x_i^1,\ldots,x_i^l\},\mathcal{F}_n(f_i)) = \mathcal{F}_n(X_i)$.

Demostración. Supongamos que $\omega(\mathcal{A},\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)) = \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Sea $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$. Vamos a verificar que $\omega(\{x_{i_0}^1,\ldots,x_{i_0}^l\},\mathcal{F}_n(f_{i_0})) = \mathcal{F}_n(X_{i_0})$. Sea $\{a_1,\ldots,a_r\} \in \mathcal{F}_n(X_{i_0})$ con $r \leq n$, $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$ tal que $\{a_1,\ldots,a_r\} \in \mathcal{U}$ y $k \in \mathbb{N}$. Por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1,\ldots,U_n$ de X_{i_0} tales que $\{a_1,\ldots,a_r\} \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$. Para cada $l \in \{1,\ldots,r\}$ y para todo $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, sean $a_i^l \in X_i$ y $a_{i_0}^l = a_l$. Luego, para cada $l \in \{1,\ldots,r\}$, sea $a_l' = (a_1^l,\ldots,a_m^l)$. Por otro lado, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$ y para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$, pongamos $V_i^j = X_i$ y $V_{i_0}^j = U_j$. Finalmente, para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, sea $U_j' = \prod_{i=1}^m V_i^j$. Por el Lema 3.3.1, parte (1), $\{a_1',\ldots,a_r'\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Además, por hipótesis, $\{a_1',\ldots,a_r'\} \in \omega(\mathcal{A},\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))$. De aquí, por el Lema 3.3.1, parte (2), $\{a_1',\ldots,a_r'\} \in \langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$. Así, existe $s \geq k$, tal que $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^s(\mathcal{A}) \in \langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$. Por la Observación 3.1.4, partes (1) y (2), tenemos que $\{(f_1^s(x_1^p),\ldots,f_{i_0}^s(x_{i_0}^p),\ldots,f_m^s(x_m^p)) : p \in \{1,\ldots,l\}\} \in \langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$. Por el Lema 3.3.2, $\{f_{i_0}^s(x_{i_0}^1),\ldots,f_{i_0}^s(x_{i_0}^l)\} \in \langle U_1,\cdots,U_n\rangle$. Esto implica que, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^s(\{x_{i_0}^1,\ldots,x_{i_0}^l\}) \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$. De aquí, $\{a_1,\ldots,a_r\} \in \omega(\{x_{i_0}^1,\ldots,x_{i_0}^l\},\mathcal{F}_n(f_{i_0}))$. Por lo tanto, $\omega(\{x_{i_0}^1,\ldots,x_{i_0}^l\},\mathcal{F}_n(f_{i_0})) = \mathcal{F}_n(X_{i_0})$. □

Por el Teorema 3.1.20 y [13, Teorema 3.4], tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.9. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1,\ldots,X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función, y $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i si y sólo si $Per(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))$ es denso en $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$.

(2) Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(\mathcal{F}_n(f_i))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X_i)$ si y sólo si $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$.

Por la Proposición 3.1.15 y [13, Teorema 3.3], podemos concluir lo siguiente:

Proposición 3.3.10. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es +invariante bajo f_i si y sólo si $\langle \prod_{i=1}^m U_i \rangle$ es +invariante bajo $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$.

(2) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\langle U_i \rangle$ es +invariante bajo $\mathcal{F}_n(f_i)$ si y sólo si $\prod_{i=1}^m U_i$ es +invariante bajo $\prod_{i=1}^m f_i$.

En lo que resta de este capítulo analizamos las relaciones entre las condiciones: (1) $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \in \mathcal{M}$, (2) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i) \in \mathcal{M}$ y (3) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

Teorema 3.3.11. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es exacta si y sólo si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es exacta.

(2) $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es exacta si y sólo si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es exacta. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. Por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ y para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, pongamos $U_i^j = X_i$ y $U_{i_0}^j = U_j$. También, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sea $U'_j = \prod_{i=1}^m U_i^j$. Notemos que $\langle U'_1, \ldots, U'_n \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Puesto que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es exacta, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k(\langle U'_1, \ldots, U'_n \rangle) = \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X_{i_0})$, con $r \leq n$. Para cada $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ y para cada $l \in \{1, \ldots, r\}$ sean $a_j^l \in X_j$ y $a_{i_0}^l = x_l$. Finalmente, para todo $l \in \{1, \ldots, r\}$, sea $x'_l = (a_1^l, \ldots, a_m^l)$. Por el Lema 3.3.1, parte (1), $\{x'_1, \ldots, x'_r\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Luego, $\{x'_1, \ldots, x'_r\} \in (\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k(\langle U'_1, \ldots, U'_n \rangle)$. Así, existe $\{(b_1^j, \ldots, b_m^j) : j \in \{1, \ldots, p\}\} \in \langle U'_1, \ldots, U'_n \rangle$ tal que $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k(\{(b_1^j, \ldots, b_m^j) : j \in \{1, \ldots, p\}\}) = \{x'_1, \ldots, x'_r\}$. En consecuencia, $\{f_{i_0}^k(b_{i_0}^1), \ldots, f_{i_0}^k(b_{i_0}^p)\} = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Se sigue que, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\{b_{i_0}^1, \ldots, b_{i_0}^p\}) = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Por otro lado, por el Lema 3.3.2, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in (\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\langle U_1 \ldots, U_n \rangle)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X_{i_0}) = (\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\mathcal{U})$ y $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es exacta.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es exacta. De aquí, por [13, Teorema 4.10], para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta. Así, por el Teorema 3.2.1, $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. Finalmente, por [13, Teorema 4.10], $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es exacta.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es exacta. Por [13, Teorema 4.10], $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. Así, por el Teorema 3.2.1, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta.

Finalmente, supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta. Por el Teorema 3.2.1, $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. De aquí, por [13, Teorema 4.10], $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es exacta. □

De la Proposición 2.3.12 y el Teorema 3.2.2, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.12. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exactamente Devaney caótica.

(2) $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es exactamente Devaney caótica.

(3) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es exactamente Devaney caótica.

De [13, Teorema 4.8] y el Teorema 3.2.3, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.13. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante.

(2) $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es mezclante.

(3) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es mezclante.

Teorema 3.3.14. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, , X_{m+1}$ espacios topológicos, $n \in \mathbb{N}$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X_{i_0}) \times X_{m+1}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$ y F_1 y F_2 de X_{m+1} tales que $\mathcal{U} \times F_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{V} \times F_2 \subseteq \mathcal{U}_2$. Luego, por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$, $V_1, \ldots, V_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subseteq \mathcal{V}$. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ y, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, pongamos $U_i^j = X_i$, $V_i^j = X_i$, $U_{i_0}^j = U_j$ y $V_{i_0}^j = V_j$. Finalmente, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sean $U_j' = \prod_{i=1}^m U_i^j$ y $V_j' = \prod_{i=1}^m V_i^j$. Se sigue que, $\langle U_1', \ldots, U_n' \rangle$ y $\langle V_1', \ldots, V_n' \rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, tenemos que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1}]^k(\langle U_1', \ldots, U_n' \rangle \times F_1) \cap (\langle V_1', \ldots, V_n' \rangle \times F_2) \neq \emptyset$. Esto implica que, existe $(\{(x_1^l, \ldots, x_m^l) : l \leq n\}, v_1) \in \langle U_1', \ldots, U_n' \rangle \times F_1$ tal que $[\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1}]^k((\{(x_1^l, \ldots, x_m^l) : l \leq n\}, v_1)) \in \langle V_1', \ldots, V_n' \rangle \times F_2$. Luego, por el Lema 3.3.2, $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\{f_{i_0}^k(x_{i_0}^1), \ldots, f_{i_0}^k(x_{i_0}^l)\} \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. En consecuencia, $(\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\}, v_1) \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \times F_1$ y $[\mathcal{F}_n(f_{i_0}) \times f_{m+1}]^k((\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^l\}, v_1)) \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \times F_2$. Por lo tanto, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}) \times f_{m+1})^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$ y así $\mathcal{F}_n(f_{i_0}) \times f_{m+1}$ es transitiva. $\square$

Sólo para las funciones exactas, exactamente Devaney caóticas y mezclantes es posible verificar la equivalencia de las condiciones (1), (2) y (3) que se mencionaron al inicio de esta sección. Ahora veamos lo que sucede para el resto de las clases de funciones que en este trabajo estamos considerando.

Teorema 3.3.15. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, un F-sistema, minimal inversa, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}. Si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i) \in \mathcal{M}$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. De aquí, por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$, $V_1, \ldots, V_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}\setminus\{i_0\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, pongamos $U_i^j = X_i$, $U_{i_0}^j = U_j$, $V_i^j = X_i$ y $V_{i_0}^j = V_j$. Finalmente, para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, pongamos $U'_j = \prod_{i=1}^m U_i^j$ y $V'_j = \prod_{i=1}^m V_i^j$. Notemos que $\langle U'_1, \ldots, U'_n\rangle$ y $\langle V'_1, \ldots, V'_n\rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k(\langle U'_1, \ldots, U'_n\rangle) \cap \langle V'_1, \ldots, V'_n\rangle \neq \emptyset$. De aquí, por el Lema 3.3.3, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $(\mathcal{F}_n(f_i))^k(\langle U_i^1, \ldots, U_i^n\rangle) \cap \langle V_i^1, \ldots, V_i^n\rangle \neq \emptyset$. En particular, podemos concluir que $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle) \cap \langle V_1, \ldots, V_n\rangle \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es transitiva.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es débilmente mezclante. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. De aquí, por [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1^1, \ldots, U_n^1$, $U_1^2, \ldots, U_n^2$, $V_1^1, \ldots, V_n^1$, $V_1^2, \ldots, V_n^2$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1^1, \ldots, U_n^1\rangle \subseteq \mathcal{U}_1$, $\langle U_1^2, \ldots, U_n^2\rangle \subseteq \mathcal{U}_2$, $\langle V_1^1, \ldots, V_n^1\rangle \subseteq \mathcal{V}_1$ y $\langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle \subseteq \mathcal{V}_2$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}\setminus\{i_0\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, pongamos $W_i^j = X_i$, $T_i^j = X_i$, $F_i^j = X_i$, $L_i^j = X_i$, $W_{i_0}^j = U_j^1$, $T_{i_0}^j = U_j^2$, $F_{i_0}^j = V_j^1$ y $L_{i_0}^j = V_j^2$. También, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sean $W_j = \prod_{i=1}^m W_i^j$, $T_j = \prod_{i=1}^m T_i^j$, $F_j = \prod_{i=1}^m F_i^j$ y $L_j = \prod_{i=1}^m L_i^j$. Se sigue que, $\langle W_1, \ldots, W_n\rangle$, $\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$, $\langle F_1, \ldots, F_n\rangle$ y $\langle L_1, \ldots, L_n\rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k(\langle W_1, \ldots, W_n\rangle) \cap \langle F_1, \ldots, F_n\rangle \neq \emptyset$ y $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^k(\langle T_1, \ldots, T_n\rangle) \cap \langle L_1, \ldots, L_n\rangle \neq \emptyset$. Así, existen $\{(x_1^j, \ldots, x_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\} \in \langle W_1, \ldots, W_n\rangle$ y $\{(y_1^j, \ldots, y_m^j) : j \in \{1, \ldots, p\}\} \in \langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ tales que:

$$\left(\mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right)^k (\{(x_1^j, \ldots, x_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\}) \in \langle F_1, \ldots, F_n\rangle$$

y

$$\left(\mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right)^k (\{(y_1^j, \ldots, y_m^j) : j \in \{1, \ldots, p\}\}) \in \langle L_1, \ldots, L_n\rangle.$$

De aquí, por la Observación 3.1.4, partes (1) y (2), tenemos que $\{(f_1^k(x_1^j), \ldots, f_m^k(x_m^j)) : j \in \{1, \ldots, r\}\} \in \langle F_1, \ldots, F_n\rangle$ y $\{(f_1^k(y_1^j), \ldots, f_m^k(y_m^j)) : j \in \{1, \ldots, p\}\} \in \langle L_1, \ldots, L_n\rangle$. En consecuencia, por el Lema 3.3.2, tenemos que $\{f_{i_0}^k(x_{i_0}^1), \ldots, f_{i_0}^k(x_{i_0}^r)\} \in \langle V_1^1, \ldots, V_n^1\rangle$ y $\{f_{i_0}^k(y_{i_0}^1), \ldots, f_{i_0}^k(y_{i_0}^p)\} \in \langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle$. Luego, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^r\}) \in \langle V_1^1, \ldots, V_n^1\rangle$ y $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\{y_{i_0}^1, \ldots, y_{i_0}^p\}) \in \langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle$. Además, como $\{x_{i_0}^1, \ldots, x_{i_0}^r\} \in \langle U_1^1, \ldots, U_n^1\rangle$ y $\{y_{i_0}^1, \ldots, y_{i_0}^p\} \in \langle U_1^2, \ldots, U_n^2\rangle$, obtenemos que, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\langle U_1^1, \ldots, U_n^1\rangle) \cap \langle V_1^1, \ldots, V_n^1\rangle \neq \emptyset$ y $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\langle U_1^2, \ldots, U_n^2\rangle) \cap \langle V_1^2, \ldots, V_n^2\rangle \neq \emptyset$. Esto implica que, para cada $i \in \{1, 2\}$, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\mathcal{U}_i) \cap \mathcal{V}_i \neq \emptyset$. Finalmente, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es débilmente mezclante.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es totalmente transitiva. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$, $s \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1,\ldots,U_n,V_1,\ldots,V_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1,\ldots,V_n\rangle \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$ y para toda $j \in \{1,\ldots,n\}$, pongamos $U_i^j = X_i$, $V_i^j = X_i$, $U_{i_0}^j = U_j$ y $V_{i_0}^j = V_j$. También, para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, sean $U_j' = \prod_{i=1}^m U_i^j$ y $V_j' = \prod_{i=1}^m V_i^j$. Se sigue que $\langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$ y $\langle V_1',\ldots,V_n'\rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. De aquí, puesto que $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^s$ es transitiva, tenemos que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $([\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)]^s)^k(\langle U_1',\ldots,U_n'\rangle) \cap \langle V_1',\ldots,V_n'\rangle \neq \emptyset$. Luego, por el Lema 3.3.3, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $((\mathcal{F}_n(f_i))^k)^s(\langle U_i^1,\ldots,U_i^n\rangle)\cap\langle V_i^1,\ldots,V_i^n\rangle \neq \emptyset$. En particular, $([\mathcal{F}_n(f_{i_0})]^s)^k(\langle U_1,\ldots,U_n\rangle)\cap\langle V_1,\ldots,V_n\rangle \neq \emptyset$. Finalmente, $([\mathcal{F}_n(f_{i_0})]^s)^k(\mathcal{U})\cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^s$ es transitiva. Ya que $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, obtenemos que $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es totalmente transitiva.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es fuertemente transitiva. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1,\ldots,U_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$. Luego, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$ y para cualquier $j \in \{1,\ldots,n\}$, pongamos $U_i^j = X_i$ y $U_{i_0}^j = U_j$. También, para toda $j \in \{1,\ldots,n\}$, sea $U_j' = \prod_{i=1}^m U_i^j$. Notemos que $\langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m X_i\right) = \bigcup_{k=0}^s \left[\mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right]^k (\langle U_1',\ldots,U_n'\rangle)$. Sea $\{x_1,\ldots,x_r\} \in \mathcal{F}_n(X_{i_0})$. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$ y para todo $j \in \{1,\ldots,r\}$, sean $a_i^j \in X_i$ y $a_{i_0}^j = x_j$. Así, para cualquier $j \in \{1,\ldots,r\}$, sea $x_j' = (a_1^j,\ldots,a_m^j)$. Notemos que $\{x_1',\ldots,x_r'\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. De aquí, existe $k \in \{0,\ldots,s\}$ tal que $\{x_1',\ldots,x_r'\} \in [\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)]^k(\langle U_1',\ldots,U_n'\rangle)$. Como consecuencia, tenemos que, existe $\{(y_1^j,\ldots,y_m^j) : j \in \{1,\ldots,p\}\} \in \langle U_1',\ldots,U_n'\rangle$ tal que $\left[\mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right]^k (\{(y_1^j,\ldots,y_m^j) : j \in \{1,\ldots,p\}\}) = \{x_1',\ldots,x_r'\}$. Por la Observación 3.1.4, partes (1) y (2), podemos concluir que $\{(f_1^k(y_1^j),\ldots,f_m^k(y_m^j)) : j \in \{1,\ldots,p\}\} = \{x_1',\ldots,x_r'\}$. Así, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\{y_{i_0}^1,\ldots,y_{i_0}^p\}) = \{x_1,\ldots,x_r\}$. Por otro lado, por el Lema 3.3.2, $\{y_{i_0}^1,\ldots,y_{i_0}^p\} \in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. De aquí, $\{x_1,\ldots,x_r\} \in (\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\langle U_1,\ldots,U_n\rangle)$. Por lo tanto, $\{x_1,\ldots,x_r\} \in \bigcup_{k=0}^s(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\mathcal{U})$ y así, $\mathcal{F}_n(X_{i_0}) = \bigcup_{k=0}^s(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\mathcal{U})$. De donde, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es fuertemente transitiva.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es caótica. De aquí, tenemos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es transitiva y el conjunto $Per(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))$ es denso en $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Así, por el primer párrafo de la prueba de este teorema, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es transitiva y por el Teorema 3.3.9, parte (2), para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(\mathcal{F}_n(f_i))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X_i)$. Por lo tanto, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es caótica.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es órbita-transitiva. De aquí, existe un punto transitivo $\{(x_1^j,\ldots,x_m^j) : j \in \{1,\ldots,l\}\}$ de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$. Por el Teorema 3.3.7, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\{x_i^1,\ldots,x_i^l\}$ es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(f_i)$. Así, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathcal{O}(\{x_i^1,\ldots,x_i^l\},\mathcal{F}_n(f_i))$ es un subconjunto denso de $\mathcal{F}_n(X_i)$. Lo cual implica que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es órbita-transitiva.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es estrictamente órbita-transitiva. De aquí, existe un punto transitivo $\{(f_1(x_1^j),\ldots,f_m(x_m^j)) : j \in \{1,\ldots,l\}\}$ de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$. Por el Teorema 3.3.7, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, tenemos que $\{f_i(x_i^1),\ldots,f_i(x_i^l)\}$ es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(f_i)$. Así, para todo $i \in \{1,\dots,m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)(\{x_i^1,\dots,x_i^l\})$ es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(f_i)$. En consecuencia, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, el subconjunto $\mathcal{O}(\mathcal{F}_n(f_i)(\{x_i^1,\dots,x_i^l\}),\mathcal{F}_n(f_i))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X_i)$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es estrictamente órbita-transitiva.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es ω-transitiva. Por hipótesis, existe $\{(x_1^j,\dots,x_m^j) : j \in \{1,\dots,l\}\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$ tal que $\omega(\{(x_1^j,\dots,x_m^j) : j \in \{1,\dots,l\}\},\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)) = \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. De aquí, por el Teorema 3.3.8, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, tenemos que $\omega(\{x_i^1,\dots,x_i^l\},\mathcal{F}_n(f_i)) = \mathcal{F}_n(X_i)$, lo cual implica que, para todo $i \in \{1,\dots,m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es ω-transitiva.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es TT_{++}. Sean $i_0 \in \{1,\dots,m\}$ y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1,\dots,U_n$,$V_1,\dots,V_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1,\dots,U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1,\dots,V_n\rangle \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$ y para toda $j \in \{1,\dots,n\}$, pongamos $U_i^j = X_i$, $V_i^j = X_i$, $U_{i_0}^j = U_j$ y $V_{i_0}^j = V_j$. También, para cada $j \in \{1,\dots,n\}$, sean $U'_j = \prod_{i=1}^m U_i^j$ y $V'_j = \prod_{i=1}^m V_i^j$. Notemos que $\langle U'_1,\dots,U'_n\rangle$ y $\langle V'_1,\dots,V'_n\rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, $n_{\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)}(\langle U'_1,\dots,U'_n\rangle,\langle V'_1,\dots,V'_n\rangle)$ es infinito. Por otro lado, por el Lema 3.3.4, tenemos que:

$$n_{\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)}(\langle U'_1,\dots,U'_n\rangle,\langle V'_1,\dots,V'_n\rangle) \subseteq n_{\mathcal{F}_n(f_{i_0})}(\langle U_1,\dots,U_n\rangle,\langle V_1,\dots,V_n\rangle).$$

Consecuentemente, $n_{\mathcal{F}_n(f_{i_0})}(\langle U_1,\dots,U_n\rangle,\langle V_1,\dots,V_n\rangle)$ es infinito. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es TT_{++}.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es Touhey. Sean $i_0 \in \{1,\dots,m\}$ y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1,\dots,U_n$, $V_1,\dots,V_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1,\dots,U_n\rangle \subseteq \mathcal{U}$ y $\langle V_1,\dots,V_n\rangle \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$ y para todo $j \in \{1,\dots,n\}$, sea $U_i^j = X_i$, $V_i^j = X_i$, $U_{i_0}^j = U_j$ y $V_{i_0}^j = V_j$. Finalmente, para cada $j \in \{1,\dots,n\}$, sean $U'_j = \prod_{i=1}^m U_i^j$ y $V'_j = \prod_{i=1}^m V_i^j$. Se sigue que, $\langle U'_1,\dots,U'_n\rangle$ y $\langle V'_1,\dots,V'_n\rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Puesto que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es Touhey, existen un punto periódico $\{(x_1^l,\dots,x_m^l) : r \leq n \text{ y } l \in \{1,\dots,r\}\} \in \langle U'_1,\dots,U'_n\rangle$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $\left[\mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right]^k\left(\{(x_1^l,\dots,x_m^l) : r \leq n \text{ y } l \in \{1,\dots,r\}\}\right) \in \langle V_1,\dots,V_n\rangle$. Por la Observación 3.1.4, parte (2), $\{(f_1^k(x_1^l),\dots f_m^k(x_m^l)) : r \leq n \text{ y } l \in \{1,\dots,r\}\} \in \langle V_1',\dots,V_n'\rangle$. Luego, por el Lema 3.3.2, $\{f_{i_0}^k(x_{i_0}^1),\dots,f_{i_0}^k(x_{i_0}^r)\} \in \langle V_1,\dots,V_n\rangle \subseteq \mathcal{V}$. Así, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^k(\{x_{i_0}^1,\dots,x_{i_0}^r\}) \in \mathcal{V}$. Por otro lado, como $\{(x_1^l,\dots,x_m^l) : r \leq n \text{ y } l \in \{1,\dots,r\}\} \in \langle U'_1,\dots,U'_n\rangle$, por el Lema 3.3.2, $\{x_{i_0}^1,\dots,x_{i_0}^r\} \in \langle U_1,\dots,U_n\rangle$. También, puesto que $\{(x_1^l,\dots,x_m^l) : r \leq n \text{ y } l \in \{1,\dots,r\}\}$ es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$, del Teorema 2.3.6, para todo $l \in \{1,\dots,r\}$, $(x_1^l,\dots,x_m^l)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. Así, por el Teorema 3.1.10, parte (3), para cualquier $l \in \{1,\dots,r\}$, $x_{i_0}^l$ es un punto periódico de f_{i_0}. Nuevamente, del Teorema 2.3.6, $\{x_{i_0}^1,\dots,x_{i_0}^r\}$ es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es Touhey.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es un F-sistema. De aquí, $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es totalmente transitiva y el conjunto $Per(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))$ es denso en $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. De [13, Teorema 3.4], $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. En consecuencia, por el Teorema 3.1.20, para todo $i \in \{1,\dots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Nuevamente, de [13, Teorema 3.4], para cada

$i \in \{1, \ldots, m\}$, $Per(\mathcal{F}_n(f_i))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X_i)$. Por otro lado, por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es totalmente transitiva. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es un F-sistema.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es minimal inversa. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y un punto $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X_{i_0})$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ y para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, sean $y_i^j \in X_i$ y $y_{i_0}^j = x_j$. De aquí, $\{(y_1^j, \ldots, y_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Ya que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es minimal inversa, el conjunto $\{\mathcal{A} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i) : [\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)]^l(\mathcal{A}) = \{(y_1^j, \ldots, y_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\}$, para algún $l \in \mathbb{N}\}$, es denso en $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$. De [47, Lema 4.2], existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n$ de X_{i_0} tales que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, sean $U_i^j = X_i$ y $U_{i_0}^j = U_j$. Finalmente, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, pongamos $U_j' = \prod_{i=1}^m U_i^j$. Así, $\langle U_1', \ldots, U_n' \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, existen $\{(z_1^j, \ldots, z_m^j) : p \leq n$ y $j \in \{1, \ldots, p\}\} \in \langle U_1', \ldots, U_n' \rangle$ y $l \in \mathbb{N}$ tales que $[\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)]^l(\{(z_1^j, \ldots, z_m^j) : p \leq n$ y $j \in \{1, \ldots, p\}\}) = \{(y_1^j, \ldots, y_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\}$. Mientras tanto, por el Lema 3.3.2, $\{z_{i_0}^1, \ldots, z_{i_0}^p\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. También, por la Observación 3.1.4, partes (1) y (2), $\{(f_1^l(z_1^j), \ldots, f_m^l(z_m^j)) : p \leq n$ y $j \in \{1, \ldots, p\}\} = \{(y_1^j, \ldots, y_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\}$. Se sigue que, $\{f_{i_0}^l(z_{i_0}^1), \ldots, f_{i_0}^l(z_{i_0}^p)\} = \{y_{i_0}^1, \ldots, y_{i_0}^r\}$. Consecuentemente, $(\mathcal{F}_n(f_{i_0}))^l(\{z_{i_0}^1, \ldots, z_{i_0}^p\}) = \{y_{i_0}^1, \ldots, y_{i_0}^r\}$. Por lo tanto, el conjunto $\{A \in \mathcal{F}_n(X_{i_0}) : [\mathcal{F}_n(f_{i_0})]^l(A) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, para algún $l \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathcal{F}_n(X_{i_0})$ y así, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es minimal inversa.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es suavemente mezclante. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función transitiva. Por hipótesis, $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva. Así, por el Teorema 3.3.14, $\mathcal{F}_n(f_{i_0}) \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es suavemente mezclante.

Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es dispersora. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función minimal. Por hipótesis, $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva. En consecuencia, por el Teorema 3.3.14, $\mathcal{F}_n(f_{i_0}) \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es dispersora. □

Teorema 3.3.16. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es minimal.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es minimal. Sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Por hipótesis, f_{i_0} es continua. De aquí, $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es continua. Así, de [63, Proposición 6.2], es suficiente con verificar que, para cada $A \in \mathcal{F}_n(X_{i_0})$, $\text{cl}_{\mathcal{F}_n(X_{i_0})}(\mathcal{O}(A, \mathcal{F}_n(f_{i_0}))) = \mathcal{F}_n(X_{i_0})$. Sea $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X_{i_0})$ con $r \leq n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, r\}$, sean $y_i^j \in X_i$ y $y_{i_0}^j = x_j$. Luego, $\{(y_1^j, \ldots, y_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\} \in \mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)$. Puesto que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es minimal, tenemos que:

$$\text{cl}_{\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m X_i)}\left(\mathcal{O}\left(\{(y_1^j, \ldots, y_m^j) : j \in \{1, \ldots, r\}\}, \mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right)\right) = \mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m X_i\right).$$

Así, del Teorema 3.3.7, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X_i)}(\mathcal{O}(\{y_i^1, \ldots, y_i^r\}, \mathcal{F}_n(f_i))) = \mathcal{F}_n(X_i)$. En particular, tenemos que $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X_{i_0})}(\mathcal{O}(\{y_{i_0}^1, \ldots, y_{i_0}^r\}, \mathcal{F}_n(f_{i_0}))) = \mathcal{F}_n(X_{i_0})$. Así:

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{F}_n(X_{i_0})}(\mathcal{O}(\{x_1, \ldots, x_r\}, \mathcal{F}_n(f_{i_0}))) = \mathcal{F}_n(X_{i_0}).$$

Finalmente, ya que $\{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{F}_n(X_{i_0})$ es arbitrario, concluimos que $\mathcal{F}_n(f_{i_0})$ es minimal. $\square$

Teorema 3.3.17. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es totalmente minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es totalmente minimal.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i)$ es totalmente minimal. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i))^s$ es minimal. De aquí, por la Observación 3.1.4, parte (2), $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i^s)$ es minimal. Así, por el Teorema 3.3.16, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i^s)$ es minimal. Nuevamente, por la Observación 3.1.4, parte (2), para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $(\mathcal{F}_n(f_i))^s$ es minimal. Ya que $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es totalmente minimal. $\square$

La prueba del siguiente teorema se sigue de [13, Teoremas 4.11, 4.12, 4.14, 4.15, 4.19, 5.1, 5.3, 5.6 y 5.9] y de los Teoremas 2.3.13 y 3.3.15.

Teorema 3.3.18. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, Touhey, un F-sistema, minimal inversa, suavemente mezclante o dispersora. Si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^m f_i) \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

El recíproco del Teorema 3.3.18 no se cumple en general. Veamos un ejemplo parcial de esto.

Ejemplo 3.3.19. Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -2x + 3, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \\ -x + 2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

En [34, Ejemplo 1], se verifica que f es transitiva, sin embargo, $f^{\times 2} : [0, 2]^2 \to [0, 2]^2$ no es transitiva. Si suponemos que $\mathcal{F}_n(f^{\times 2})$ es transitiva, por [13, Teorema 4.11], tenemos que $f^{\times 2}$ es transitiva. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(f^{\times 2})$ no es transitiva.

De los Teoremas 2.3.13, 3.3.16 y 3.3.17 y de [13, Teorema 4.18], tenemos lo siguiente.

Teorema 3.3.20. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal.

(2) Si $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es totalmente minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente minimal.

De los Teoremas 2.3.17, 3.1.19 y 3.2.10 y de [13, Teoremas 5.2, 5.4 y 5.7], obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.21. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: transitiva, totalmente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, un F-sistema, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y $f_i \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i) \in \mathcal{M}$.

Corolario 3.3.22. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, totalmente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, un F-sistema, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y $\mathcal{F}_n(f_i) \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i) \in \mathcal{M}$.

Teorema 3.3.23. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es débilmente mezclante y continua, y X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es débilmente mezclante y continua y que X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. De aquí, por el Teorema 3.2.10, $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es débilmente mezclante. Más aún, $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es continua. Así, de [13, Teorema 4.13], tenemos que $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es débilmente mezclante. □

Corolario 3.3.24. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función tal que $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es continua y $n \in \mathbb{N}$. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es débilmente mezclante y X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es débilmente mezclante, y que X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y $\prod_{i=1}^{m} f_i$ continua. De aquí, por [13, Teorema 4.12], para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es débilmente mezclante. Más aún, no es difícil verificar que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es continua. Así, por el Teorema 3.3.23, $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es débilmente mezclante. □

Teorema 3.3.25. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal y X_i es $+$invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es minimal.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. De aquí, por la Proposición 3.2.11, $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es minimal. Más aún, $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es continua y por el Teorema 3.1.19, $\prod_{i=1}^{m} X_i$ es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $\prod_{i=1}^{m} f_i$. Así, por el Teorema 2.3.18, $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es minimal. □

Como una consecuencia del Teorema 3.3.25 y de [13, Teorema 4.18], tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.3.26. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es minimal y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es minimal.

Del Corolario 3.2.12, el Teorema 3.1.19 y la Proposición 2.3.19, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.27. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente minimal y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es totalmente minimal.

El siguiente corolario es una consecuencia del Teorema 2.3.13 y el Corolario 3.3.27.

Corolario 3.3.28. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i)$ es totalmente minimal y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathcal{F}_n(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es totalmente minimal.

Capítulo 4

Espacios cociente

En este capítulo se introduce la definición de espacio cociente. Principalmente, presentamos la definición de los productos simétricos suspensión de un espacio topológico y analizamos algunas propiedades de transitividad topológica sobre los sistemas dinámicos que estos espacios inducen.

4.1. Espacios cociente

De manera intuitiva, un espacio cociente es un espacio que surge de identificar ciertos puntos de un espacio topológico dado, por ejemplo:

Ejemplo 4.1.1. (1) El círculo se obtiene al identificar los puntos 0 y 1 del intervalo $[0, 1]$.

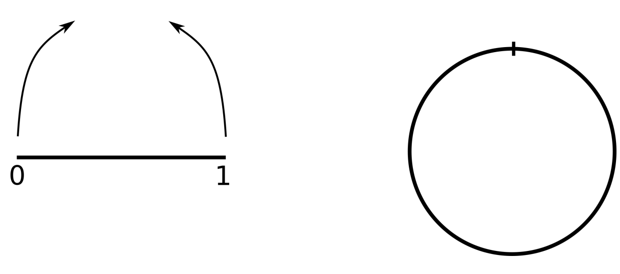


Figura 4.1: S^1.

(2) Si identificamos todos los puntos de la tapa superior de un cilindro obtenemos un cono.

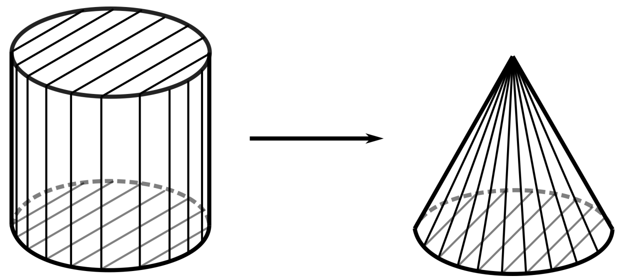


Figura 4.2: Cono.

(3) Partiendo del cuadrado $I^2 = [0,1]^2$, podemos identificar los puntos de dos lados opuestos y obtener dos espacios cociente diferentes. Con las flechas se indica el sentido en el que identificamos los lados (ver Figura 4.3). En el primer caso obtenemos la famosa banda de Möbius. En el segundo caso obtenemos la superficie lateral de un cilindro.

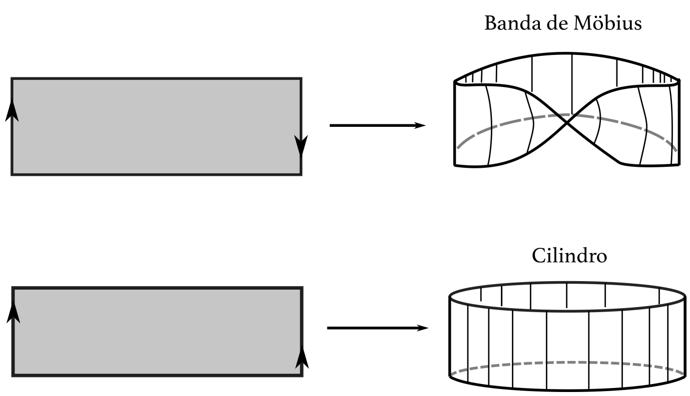


Figura 4.3: Banda de Möbius - Cilindro.

(4) Identificando los dos pares de lados opuestos del cuadrado I^2 en el mismo sentido, obtenemos el espacio conocido como Toro (ver Figura 4.4).

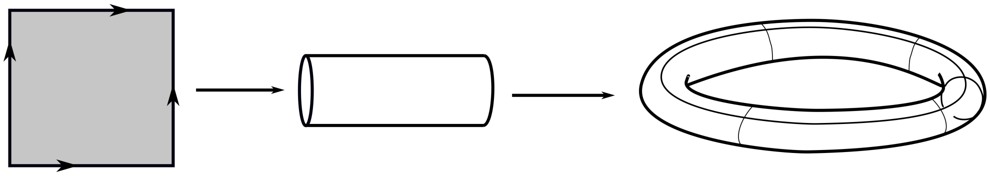


Figura 4.4: Toro.

(5) Trataremos ahora de identificar los dos pares de lados opuestos de I^2 mediante el esquema de la Figura 4.5. Hacer esta última identificación de puntos de I^2 ya no resulta tan sencilla de visualizar como en los ejemplos anteriores. Sin embargo, se sabe que el resultado (la *botella de Klein*) ya no puede representarse de manera adecuada en $\mathbb{R}^3$. Pese a esto, existe un modelo bidimensional que nos sirve para formarnos una idea de este nuevo espacio, aunque tenga autointersecciones que la botella de Klein no tiene en realidad.

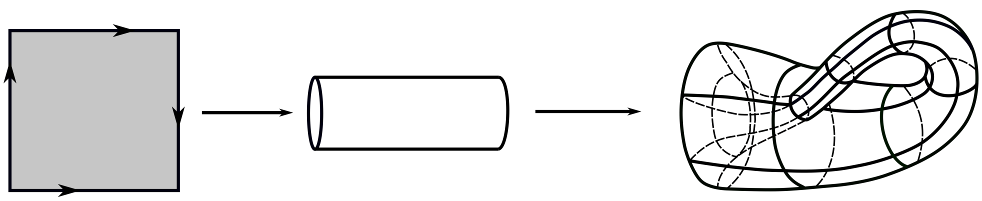


Figura 4.5: Botella de Klein.

En base al último ejemplo podemos concluir que no siempre es posible obtener una representación gráfica de un espacio cociente. Por este motivo, es necesario conocer una manera matemática de poder definir estos espacios.

Definición 4.1.2. Sean A y B dos conjuntos. Una *relación binaria entre A y B o de A en B* es un subconjunto R de $A \times B$.

Cuando $A = B$, se dice que R es una relación en A. Para indicar que $(a, b) \in R$, escribimos aRb y se dice que a está relacionado con b.

Ejemplo 4.1.3. Los siguientes son ejemplos de relaciones binarias.

(1) Sea A un conjunto. Luego, $\{(a, a) : a \in A\}$ es una relación binaria en A.

(2) Sean A un conjunto y $R = (A^2)\backslash\{(a, a) : a \in A\}$. Se tiene que R es una relación binaria en A.

(3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ es una relación binaria en $\mathbb{R}$.

(4) Sean X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Luego, $\mathcal{A} = \{(A, B) : A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{P}(X)^2$ es una relación binaria.

Existen relaciones binarias con propiedades muy particulares, tal es el caso de las relaciones de equivalencia que presentamos a continuación.

Definición 4.1.4. Sean A un conjunto y R una relación binaria en A, se dice que R *es de equivalencia* si:

(1) Para cada $a \in A$: aRa. En este caso se dice que R es *reflexiva*.

(2) Para cada a y b en A: si aRb, entonces bRa. En este caso se dice que R es *simétrica*.

(3) Para cada a, b y c en A: si aRb y bRc, entonces aRc. En este caso se dice que R es *transitiva*.

Definición 4.1.5. Sean A un conjunto, R una relación de equivalencia en A y $a \in A$. Se define el conjunto $[a] = Ra = \{b \in A : bRa\}$. Este conjunto es llamado *clase de equivalencia de a*.

Ejemplo 4.1.6. A continuación presentamos dos ejemplos de relaciones de equivalencia. Además en cada caso damos las respectivas clases de equivalencia.

(1) Sea R como en el Ejemplo 4.1.3, parte (1). Luego, R es una relación de equivalencia. Además, para cada $a \in A$, $Ra = \{a\}$.

(2) Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Luego, la relación $R = \{(x, x') : f(x) = f(x')\}$ es una relación de equivalencia en X. Además, para cada $x \in X$, $Rx = \{x' \in X : f(x) = f(x')\} = f^{-1}(f(x))$.

Una propiedad muy importante que cumplen las clases de equivalencia de una relación de equivalencia dada, es que definen una familia de subconjuntos disjuntos no vacíos cuya unión es todo el conjunto sobre el que se definen. Esta propiedad la describimos formalmente en el Teorema 4.1.7.

Teorema 4.1.7. Sean A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) $\bigcup\{Ra : a \in A\} = A$

(2) Sean a y b elementos de A. Si aRb, entonces $Ra = Rb$.

(3) Sean a y b elementos de A. Si a no está relacionado con b, entonces $Ra \cap Rb = \emptyset$.

En este punto del trabajo nos queda claro que a partir de un conjunto dado, podemos construir nuevos conjuntos. Más aún, si consideramos un espacio topológico, podemos definir un nuevo espacio topológico a partir de él. Hemos visto por ejemplo los productos cartesianos y los productos simétricos. Otro ejemplo muy importante en nuestro trabajo es el producto simétrico suspensión de un espacio topológico.

Definición 4.1.8. Sean A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. El conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia en A es llamado el *conjunto cociente de A por R* y se denota por A/R. La función $p_A : A \to A/R$ dada por $p_A(x) = Rx$ es llamada *función cociente* de A en A/R.

Definición 4.1.9. Sean A y B dos conjuntos con relaciones de equivalencia R y S, respectivamente. Una función $f : A \to B$ es llamada una *función que preserva la relación* si cumple lo siguiente: si aRb, entonces $f(a)Sf(b)$, para cualesquiera a y b en A.

Ejemplo 4.1.10. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la función dada por $f(x) = x + 2$ y R la relación de equivalencia: aRb si y sólo si $a \equiv b(\text{mód}\, 10)$. Veamos que f es una función que preserva la relación. Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 R x_2$. De aquí, existe una constante c tal que $x_1 - x_2 = 10c$. Así, $(x_1 + 2) - (x_2 + 2) = 10c$. De donde, $x_1 + 2 \equiv x_2 + 2(\text{mód}\, 10)$. Por lo tanto, $f(x_1)Sf(x_2)$ y así f es una función que preserva la relación.

La importancia de un conjunto reside en las propiedades con las que cuenta. Por esto, siempre que se define un nuevo conjunto es sumamente necesario averiguarlas y una herramienta muy poderosa para atacar esta problemática es la definición de funciones sobre estos conjuntos.

Teorema 4.1.11. ([37, Teorema 7.7, pág. 17]) Sean A y B dos conjuntos, R y S relaciones de equivalencia en A y B, respectivamente, p_A y p_B la función cociente de A en A/R y la función cociente de B en B/S, respectivamente y $f : A \to B$ una función que preserva la relación. Luego, existe una única función f_* tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "p_B"] \\ A/R \arrow[r, "f_*"] & B/S \end{tikzcd}$$

es decir, $p_B \circ f = f_* \circ p_A$.

Demostración. Sea $f_* : A/R \to B/S$, dada por $f_*(Ra) = Sf(a)$. Primero vamos a verificar que f_* está bien definida. Sean Ra y Ra' elementos de A/R tales que $Ra = Ra'$. Veamos que $f_*(Ra) = f_*(Ra')$ o bien, que $Sf(a) = Sf(a')$. Existen dos posibles casos por los cuales $Ra = Ra'$:

Caso (i): $a = a'$. En este caso, es fácil ver que $Sf(a) = Sf(a')$.

Caso (ii): $a \neq a'$. Luego, $a' \in Ra$. En este caso $a'Ra$. Puesto que f preserva la relación, $f(a')Sf(a)$. Así, por el Teorema 4.1.7, $Sf(a') = Sf(a)$.

De los casos (i) y (ii), tenemos que f_* está bien definida.

Ahora veamos que $p_B \circ f = f_* \circ p_A$. Observemos que $p_B \circ f : A \to B/S$ y $f_* \circ p_A : A \to B/S$. Así, $p_B \circ f$ y $f_* \circ p_A$ tienen el mismo dominio y el mismo rango. Resta verificar que tienen la misma regla de correspondencia. Sea a en A. Luego, $(p_B \circ f)(a) = p_B(f(a)) = Sf(a) = f_*(Ra) = (f_* \circ p_A)(a)$. Finalmente, hay que verificar que f_* es única. Supongamos que existe $g_* : A/R \to B/S$ tal que $p_B \circ f = g_* \circ p_A$ con $f_* \neq g_*$. De aquí, existe $A_\alpha \in A/R$ tal que $g_*(A_\alpha) \neq f_*(A_\alpha)$. Puesto que p_A es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $p_A(a) = A_\alpha$. Así, $g_*(p_A(a)) \neq f_*(p_A(a))$. Por otro lado, $g_*(p_A(a)) = (p_B \circ f)(a) = (f_* \circ p_A)(a)$, lo cual nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, f_* es única. $\square$

Recordemos que uno de nuestros objetivos principales es estudiar propiedades dinámicas sobre espacios cociente. Así que es importante tener a la mano propiedades sobre la composición de la función f_* que acabamos de definir.

Observación 4.1.12. Sean A un conjunto, R una relación de equivalencia en A, $f : A \to A$ una función que preserva la relación y $s \in \mathbb{N}$. Observemos que $(f_*)^s : A/R \to A/R$ y $(f^s)_* : A/R \to A/R$. Por otro lado, si $\varphi \in A/R$, $(f^s)_*(\varphi) = (f^s)_*(Ra) = Rf^s(a)$, con $a \in A$. Además:

$$\begin{aligned}
(f_*)^s(\varphi) &= \underbrace{(f_* \circ \cdots \circ f_*)}_{s-veces}(Ra) \\
&= \underbrace{(f_* \circ \cdots \circ f_*)}_{(s-1)-veces}(Rf(a)) \\
&= \underbrace{(f_* \circ \cdots \circ f_*)}_{(s-2)-veces}(Rf^2(a)) \\
&\vdots \\
&= Rf^s(a).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f^s)_* = (f_*)^s$.

Observación 4.1.13. Sean A un conjunto, R una relación de equivalencia en A, p_A la función cociente de A en A/R, $f : A \to A$ una función que preserva la relación y $s, k \in \mathbb{N}$. Del Teorema 4.1.11 y la Observación 4.1.12, concluimos lo siguiente:

(1) $p_A \circ f^k = (f_*)^k \circ p_A$.

(2) $p_A \circ f^k = (f^k)_* \circ p_A$.

(3) $p_A \circ (f^s)^k = ((f_*)^s)^k \circ p_A$.

(4) $p_A \circ (f^s)^k = ((f^s)_*)^k \circ p_A$.

Claramente uno puede definir distintas relaciones de equivalencia sobre un conjunto y así obtener diferentes conjuntos cociente. Sin embargo, en este trabajo estamos interesados particularmente en la relación de equivalencia y el espacio cociente que se definen a continuación.

Observación 4.1.14. Sean A un conjunto y K un subconjunto de A. Se define la colección de subconjuntos de A, $\mathcal{A} = \{\{x\} : x \in A \setminus K\} \cup \{K\}$. Si en A se define la relación: $x, y \in A$ están relacionados si y sólo si, existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $x, y \in B$, no es muy difícil verificar que esta relación es de equivalencia. Además, si $a \in A$, $Ra = \{a\}$ o $Ra = K$. De aquí, $A/R = \{\{a\} : a \in A \setminus K\} \cup \{K\}$. Esto es, $\mathcal{A} = A/R$. Puesto que este conjunto cociente queda perfectamente determinado por K, el conjunto A/R es denotado por A/K.

Teorema 4.1.15. ([57, Teorema 4, pág. 12]) Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff, F un subconjunto de X no vacío y cerrado y p_X la función cociente de X en X/F. Luego, $p_X \big|_{X \setminus F} : X \setminus F \to (X/F) \setminus \{F\}$ es un homeomorfismo.

La relación de equivalencia que se define en la Observación 4.1.14 tiene una propiedad muy particular, resulta que para un conjunto X, un subconjunto K de X y una función $f : X \to X$, si en X y en su imagen $f(X)$ definimos una relación de equivalencia como en la Observación 4.1.14, entonces f es una función que preserva la relación.

Teorema 4.1.16. Sean X un conjunto, $f : X \to X$ una función y K un subconjunto de X. Si en X se define la relación S: $x_1, y_1 \in X$ están relacionados si y sólo si, existe $\varphi \in X\diagup K$ tal que $x_1, y_1 \in \varphi$ y en $f(X)$ se define la relación R: $x_2, y_2 \in f(X)$ están relacionados si y sólo si, existe $\vartheta \in f(X)\diagup f(K)$ tal que $x_2, y_2 \in \vartheta$, entonces f es una función que preserva la relación.

Demostración. Sean $x', y' \in X$ tales que $x'Ry'$. Luego, existe $\varphi \in X\diagup K$ tal que $x', y' \in \varphi$. Se tienen los siguientes casos:

Caso (i): $\varphi = K$. En este caso, $x', y' \in K$. Así, $f(x'), f(y') \in f(K)$. Por lo tanto, $f(x')Sf(y')$.

Caso (ii): $\varphi = \{z\}$ con $z \in X\backslash K$. En este caso, $x' = y' = z$. Se sigue que $f(x') = f(y') = f(z)$. De aquí, $f(x'), f(y') \in \{f(z)\}$. Consideremos los siguientes subcasos:

Subcaso (a): $f(z) \in f(K)$. En este caso, $f(x'), f(y') \in f(K)$. Por lo tanto, $f(x')Sf(y')$.

Subcaso (b): $f(z) \notin f(K)$. En este caso, $f(x'), f(y') \in \{f(z)\}$, con $f(z) \in f(X)\backslash f(K)$. Por lo tanto, $f(x')Sf(y')$.

De los casos (i) y (ii), concluimos que f es una función que preserva la relación. □

Hasta este punto ya hemos definido el conjunto cociente $A\diagup K$ y la función $f_* : A\diagup K \to A\diagup K$, podríamos decir que estamos listos para empezar a analizar propiedades del sistema dinámico $(A\diagup K, f_*)$, sin embargo, hay que recordar que un sistema dinámico es una pareja formada por un espacio topológico y cualquier función definida sobre este espacio. Así que nos hace falta dotar de una topología al conjunto cociente y entonces estaremos listos para estudiar el sistema dinámico que este espacio induce.

Definición 4.1.17. Sean (X, τ) un espacio topológico, R una relación de equivalencia sobre X y p_X la función cociente de X en $X\diagup R$. La topología $\{U \subseteq X\diagup R : p_X^{-1}(U) \in \tau\}$ se llama *topología cociente de τ por R* y es denotada por $\tau\diagup R$. Al espacio topológico $(X\diagup R, \tau\diagup R)$ se le llama *espacio cociente* de (X, τ) bajo R.

Finalizamos esta sección con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.18. Sean $X = \{0, 1, 2, 3\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{0, 1\}, \{2, 3\}\}$, la relación de equivalencia R definida como sigue: xRy si y sólo si, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 3k$ y p_X la función cociente de X en $X\diagup R$. Observemos que $[0] = \{0, 3\}$, $[1] = \{1\}$, $[2] = \{2\}$ y $[3] = \{0, 3\}$. De aquí, $X\diagup R = \{[0], [1], [2]\}$. Además, notemos que, $p_X^{-1}(\{[0]\}) = \{0, 3\} \notin \tau$, $p_X^{-1}(\{[1]\}) = \{1\} \notin \tau$, $p_X^{-1}(\{[2]\}) = \{2\} \notin \tau$, $p_X^{-1}(\{[0], [1]\}) = \{0, 3, 1\} \notin \tau$, $p_X^{-1}(\{[0], [2]\}) = \{0, 3, 2\} \notin \tau$ y $p_X^{-1}(\{[1], [2]\}) = \{1, 2\} \notin \tau$. Así, $\tau\diagup R = \{\emptyset, X\diagup R\}$.

Como vimos a lo largo de esta sección, los espacios topológicos X y $X\diagup K$ y las funciones f y f_* están fuertemente relacionadas. Así que es de esperarse que muchas de las propiedades que se cumplen para X y f sean heredadas a $X\diagup K$ y f_* y viceversa.

4.2. Productos simétricos suspensión de un espacio topológico

Dado un espacio topológico (X,τ), un subconjunto K de X y una función $f: X \to X$, en la sección anterior vimos que con estos elementos podemos construir el espacio X/K y una función $f_*: X/K \to X/K$. Por otro lado, se define el n-ésimo producto simétrico de X, $\mathcal{F}_n(X)$, y un subconjunto muy particular de $\mathcal{F}_n(X)$ es el subconjunto $\mathcal{F}_1(X)$, que consta de todos los subconjuntos unipuntuales de X. Se define también la función $\mathcal{F}_n(f): \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ como $\mathcal{F}_n(A) = f(A)$, para cada $A \in \mathcal{F}_n(X)$. Observemos que si en el Teorema 4.1.16, consideramos a $X = \mathcal{F}_n(X)$ y $K = \mathcal{F}_1(X)$, tenemos que $\mathcal{F}_n(f)$ es una función que preserva la relación. De aquí, por el Teorema 4.1.11, existe una única función $f_*: \mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X)$ tal que $p_{\mathcal{F}_n(X)} \circ \mathcal{F}_n(f) = f_* \circ p_{\mathcal{F}_n(X)}$. El espacio cociente $\mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X)$ y la función $f_*: \mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X)$ tienen una notación especial. A continuación definimos de manera formal este nuevo espacio cociente y la función f_* que induce.

Definición 4.2.1. Sean X un espacio topológico y n un entero mayor o igual que dos. Se define el *n-ésimo producto simétrico suspensión del espacio topológico* X denotado por $\mathcal{SF}_n(X)$ como el espacio cociente $\mathcal{F}_n(X)/\mathcal{F}_1(X)$ con la topología cociente [9]. Denotamos a la función cociente con $p: \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{SF}_n(X)$ y el elemento $p(\mathcal{F}_1(X))$ lo denotamos por F_X. Así:

$$\mathcal{SF}_n(X) = \{\{A\} : A \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_1(X)\} \cup \{F_X\}.$$

Si $f: X \to X$ es una función, se define la función $\mathcal{SF}_n(f): \mathcal{SF}_n(X) \to \mathcal{SF}_n(X)$ dada de la siguiente manera [10]:

$$\mathcal{SF}_n(f)(\mathcal{X}) = \begin{cases} p(\mathcal{F}_n(f))(p^{-1}(\mathcal{X})), & \text{si} \quad \mathcal{X} \neq F_X; \\ \\ F_X, & \text{si} \quad \mathcal{X} = F_X. \end{cases}$$

Observación 4.2.2. Sean X un espacio topológico, $f: X \to X$ una función, p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$ y n un entero mayor o igual que dos. Por el Teorema 4.1.11, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_n(X) \arrow[r, "\mathcal{F}_n(f)"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{F}_n(X) \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{SF}_n(X) \arrow[r, "\mathcal{SF}_n(f)"] & \mathcal{SF}_n(X)
\end{tikzcd}$$

Esto es, $p \circ \mathcal{F}_n(f) = \mathcal{SF}_n(f) \circ p$.

Observación 4.2.3. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto y de Hausdorff, p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$ y n un entero mayor o igual que dos. Notemos que $p\mid_{\mathcal{F}_n(X)\setminus\mathcal{F}_1(X)}: \mathcal{F}_n(X)\setminus\mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{SF}_n(X)\setminus\{F_X\}$ es un homeomorfismo. En efecto, por [80, Teorema 3.2.11], $\mathcal{F}_n(X)$ es compacto y por el Teorema 2.3.3, $\mathcal{F}_n(X)$ es de Hausdorff. Además, de [51, pág. 8], X es homeomorfo a $\mathcal{F}_1(X)$ y así, $\mathcal{F}_1(X)$ es cerrado. Finalmente, por el Teorema 4.1.15, concluimos que la función $p\mid_{\mathcal{F}_n(X)\setminus\mathcal{F}_1(X)}$: $\mathcal{F}_n(X)\setminus\mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{SF}_n(X)\setminus\{F_X\}$ es un homeomorfismo.

A continuación presentamos el n-ésimo producto simétrico suspensión de tres espacios topológicos muy conocidos y estudiados. Cabe mencionar que no es parte de nuestro objetivo estudiar a detalle cada uno de ellos, por esto, damos sólo un bosquejo de la manera en la que se construyen estos tres espacios cociente. Para los interesados en conocer los detalles de estas construcciones sugerimos revisar [16, Ejemplos 4.4, 4.5 y 4.6].

Ejemplo 4.2.4. (1) Sea I un arco [79, Ejemplo 2.1.3]. Sabemos que $\mathcal{F}_2(I)$ es homeomorfo a I^2. Además, $\mathcal{F}_1(I)$ queda representado por el conjunto $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$. Si identificamos $\mathcal{F}_1(I)$ a un punto, obtenemos una 2-celda. De manera que $\mathcal{SF}_2(I)$ es homeomorfo a I^2.

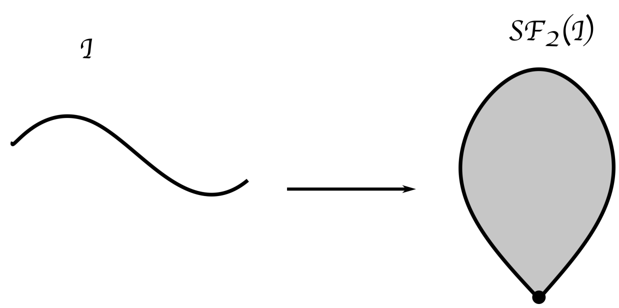


Figura 4.6: $\mathcal{SF}_2(I)$.

(2) Sea T un triodo simple [79, Ejemplo 2.1.5]. Sabemos que $\mathcal{F}_2(T)$ es un triángulo con alas como el que se muestra en la Figura 4.7. Este triángulo consiste de un triángulo $\mathcal{D}$ y los tres triángulos $\mathcal{F}_2(I_1)$, $\mathcal{F}_2(I_2)$ y $\mathcal{F}_2(I_3)$. Notemos que $\mathcal{F}_1(T) = \mathcal{F}_1(I_1) \cup \mathcal{F}_1(I_2) \cup \mathcal{F}_1(I_3)$ (representado por una línea más gruesa), para cada $i \in \{1,2,3\}$, $\mathcal{F}_1(I_i) \cap \mathcal{D}$ es un segmento de recta y $\mathcal{F}_1(T) \cap \mathcal{D} = \{\{p\}\}$. Así que, si identificamos al conjunto $\mathcal{F}_1(T)$ a un punto, obtenemos nuevamente un triángulo con alas. Por lo tanto, un modelo geométrico para $\mathcal{SF}_2(T)$ es también un triángulo con alas (ver Figura 4.7).

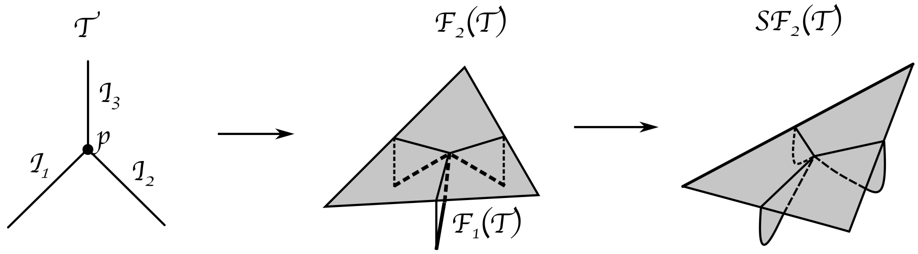


Figura 4.7: $\mathcal{SF}_2(T)$.

(3) El modelo geométrico de $\mathcal{SF}_2(S^1)$ es el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$.

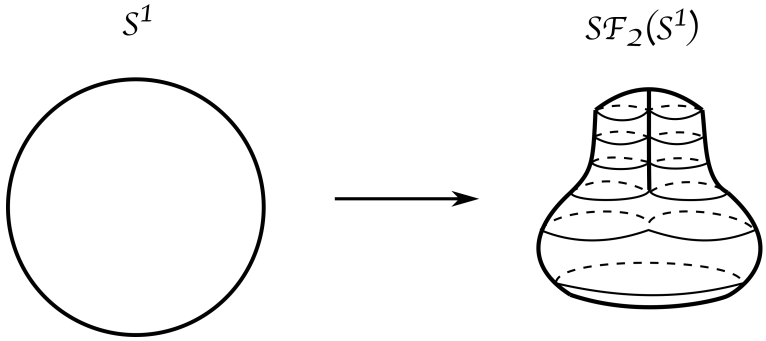


Figura 4.8: $\mathcal{SF}_2(S^1)$.

Como una consecuencia inmediata de la Observación 4.1.13, tenemos la Observación 4.2.5

Observación 4.2.5. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función, p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$ y n un entero mayor o igual que dos. De la Observación 4.1.13, tenemos lo siguiente:

(1) $p \circ (\mathcal{F}_n(f))^k = (\mathcal{SF}_n(f))^k \circ p$.

(2) $p \circ (\mathcal{F}_n(f))^k = (\mathcal{SF}_n(f^k)) \circ p$.

(3) $p \circ ((\mathcal{F}_n(f))^s)^k = ((\mathcal{SF}_n(f))^s)^k \circ p$.

(4) $p \circ ((\mathcal{F}_n(f))^s)^k = (\mathcal{SF}_n(f^s))^k \circ p$.

4.3. Dinámica en los productos simétricos suspensión

En esta sección estudiamos propiedades dinámicas sobre el n-ésimo producto simétrico suspensión de un espacio topológico no degenerado, compacto y de Hausdorff. Además, dados un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff X, una función

$f : X \to X$, un número entero n mayor o igual a dos y alguna de las siguientes clases de funciones, $\mathcal{M}$: continua, exacta, débilmente mezclante, transitiva, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, minimal inversa, exactamente Devaney caótica, un F-sistema, totalmente minimal, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}, analizamos principalmente las relaciones que existen entre las siguientes tres condiciones:

(1) $f \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

(3) $\mathcal{SF}_n(f) \in \mathcal{M}$.

Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y K un subconjunto de X. Comenzamos esta sección estableciendo relaciones entre los espacios X y X/K y las funciones $f : X \to X$ y $f_* : X/K \to X/K$. Estos resultados nos servirán más adelante para el caso particular en el que $X = \mathcal{F}_n(X)$ y $f = \mathcal{F}_n(f)$.

Teorema 4.3.1. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función, K un subconjunto de X, p_X la función cociente de X en X/K y $x \in X$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) Si x es un punto transitivo, periódico, casi-periódico, recurrente o no errante de f, entonces $p_X(x)$ es un punto transitivo, periódico, casi-periódico, recurrente o no errante de f_*, respectivamente.

(2) Si $\omega(x, f) = X$, entonces $\omega(p_X(x), f_*) = X/K$.

Demostración. Supongamos que x es un punto transitivo de f. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de X/K. De aquí, $p_X^{-1}(\Omega)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Por hipótesis, $p_X^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Sea $y \in p_X^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{O}(x, f)$. Se sigue que, $p_X(y) \in \Omega$ y existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^k(x) = y$. Esto implica que, $p_X(y) = p_X(f^k(x))$. Por la Observación 4.1.13, parte (1), $(f_*)^k(p_X(x)) = p_X(y)$. Consecuentemente, $p_X(y) \in \mathcal{O}(p_X(x), f_*)$. Por lo tanto, $\Omega \cap \mathcal{O}(p_X(x), f_*) \neq \emptyset$ y así, $p_X(x)$ es un punto transitivo de f_*.

Supongamos que x es un punto periódico de f. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Esto implica que, $p_X(f^k(x)) = p_X(x)$. Luego, por la Observación 4.1.13, parte (1), $p_X(x) = (f_*)^k(p_X(x))$. Por lo tanto, $p_X(x)$ es un punto periódico de f_*.

Supongamos que x es un punto casi-periódico de f. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de X/K tal que $p_X(x) \in \Omega$. Así, $p_X^{-1}(p_X(x)) \subseteq p_X^{-1}(\Omega)$. En consecuencia, $x \in p_X^{-1}(\Omega)$. Puesto que $p_X^{-1}(\Omega)$ es abierto y x es casi-periódico, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{km}(x) \in p_X^{-1}(\Omega)$, para cada $k \geq 0$. Consecuentemente, para todo $k \geq 0$, $p_X(f^{km}(x)) \in \Omega$. Finalmente, por la Observación 4.1.13, parte (1), para cualquier $k \geq 0$, $(f_*)^{km}(p_X(x)) \in \Omega$. Por lo tanto, $p_X(x)$ es un punto casi-periódico de f_*.

Supongamos que x es un punto recurrente de f. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de X/K tal que $p_X(x) \in \Omega$. De aquí, $x \in p_X^{-1}(\Omega)$. Puesto que x es recurrente y $p_X^{-1}(\Omega)$ es abierto en X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in p_X^{-1}(\Omega)$. En consecuencia, $p_X(f^m(x)) \in \Omega$.

Así, por la Observación 4.1.13, parte (1), $(f_*)^m(p_X(x)) \in \Omega$. Por lo tanto, $p_X(x)$ es un punto recurrente de f_*.

Supongamos que x es un punto no errante de f. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $X \diagup K$ tal que $p_X(x) \in \Omega$. De aquí, $x \in p_X^{-1}(\Omega)$. Puesto que $p_X^{-1}(\Omega)$ es un subconjunto abierto en X y x es no errante, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(p_X^{-1}(\Omega)) \cap p_X^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Sea $y \in p_X^{-1}(\Omega)$ tal que $f^m(y) \in p_X^{-1}(\Omega)$. Se sigue que $p_X(y) \in \Omega$ y $p_X(f^m(y)) \in \Omega$. Luego, por la Observación 4.1.13, parte (1), $(f_*)^m(p_X(y)) \in \Omega$. Así, $(f_*)^m(p_X(y)) \in (f_*)^m(\Omega) \cap \Omega$. Por lo tanto, $(f_*)^m(\Omega) \cap \Omega \neq \emptyset$ y así $p_X(x)$ es un punto no errante de f_*.

Ahora supongamos que $\omega(x, f) = X$. Sean $\varphi \in X \diagup K$, Ω un subconjunto abierto de $X \diagup K$ tal que $\varphi \in \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Puesto que p_X es sobreyectiva, existe $y \in X$ tal que $p_X(y) = \varphi$. De aquí, $y \in p_X^{-1}(\Omega)$. Ya que $y \in \omega(x, f)$ y $p_X^{-1}(\Omega)$ es un subconjunto abierto de X tal que $y \in p_X^{-1}(\Omega)$, existe $m \geq k$ tal que $f^m(x) \in p_X^{-1}(\Omega)$. Luego, $p_X(f^m(x)) \in \Omega$. Por la Observación 4.1.13, parte (1), $(f_*)^m(p_X(x)) \in \Omega$. Por lo tanto, $\varphi \in \omega(p_X(x), f_*)$ y en consecuencia, $\omega(p_X(x), f_*) = X \diagup K$. □

Lema 4.3.2. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y K un subconjunto de X. Si $Per(f)$ es denso en X, entonces $Per(f_*)$ es denso en $X \diagup K$.

Demostración. Supongamos que $Per(f)$ es denso en X. Sean Ω un subconjunto abierto no vacío de $X \diagup K$ y p_X la función cociente de X en $X \diagup K$. De aquí, $p_X^{-1}(\Omega)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Por hipótesis, $p_X^{-1}(\Omega) \cap Per(f) \neq \emptyset$. Sea $x \in p_X^{-1}(\Omega) \cap Per(f)$. Luego, $p_X(x) \in \Omega$. Además, por el Teorema 4.3.1, parte (1), $p_X(x) \in Per(f_*)$. En consecuencia, $p_X(x) \in \Omega \cap Per(f_*)$. Puesto que Ω es arbitrario, tenemos que $Per(f_*)$ es denso en $X \diagup K$. □

El recíproco del Lema 4.3.2 no se cumple en general.

Ejemplo 4.3.3. Sean $X = \{1, 2, 3\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ y $f : X \to X$ la función dada por $f(1) = 2$, $f(2) = 2$ y $f(3) = 1$. Luego, $X \diagup \{1, 2\} = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$. Además, $f_*(\{3\}) = \{1, 2\}$ y $f_*(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$. Así, $Per(f_*) = \{\{1, 2\}\}$ y $\tau_{X \diagup \{1,2\}} = \{\emptyset, X \diagup \{1, 2\}\}$. Consecuentemente, $Per(f_*)$ es denso en $X \diagup \{1, 2\}$. Sin embargo, $Per(f) \cap \{1\} = \emptyset$.

Teorema 4.3.4. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y K un subconjunto de X. Si $trans(f)$ es denso en X, entonces $trans(f_*)$ es denso en $X \diagup K$.

Demostración. Supongamos que $trans(f)$ es denso en X. Sean Ω un subconjunto abierto no vacío de $X \diagup K$ y p_X la función cociente de X en $X \diagup K$. De aquí, $p_X^{-1}(\Omega)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Por hipótesis, $trans(f) \cap p_X^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Sea $x \in p_X^{-1}(\Omega) \cap trans(f)$. Luego, $p_X(x) \in \Omega$. Además, por el Teorema 4.3.1, parte (1), $p_X(x)$ es un punto transitivo de f_*. En consecuencia, $\Omega \cap trans(f_*) \neq \emptyset$. Ya que Ω es arbitrario, tenemos que $trans(f_*)$ es denso en $X \diagup K$. □

Teorema 4.3.5. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y K un subconjunto de X. Si $f^{\times 2}$ es transitiva, entonces $(f_*)^{\times 2}$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que $f^{\times 2}$ es transitiva. Sean Ω y Λ subconjuntos abiertos no vacíos de $(X\diagup K)^2$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $\Omega_1, \Omega_2, \Lambda_1$ y Λ_2 de $X\diagup K$ tales que $\Omega_1 \times \Lambda_1 \subseteq \Omega$ y $\Omega_2 \times \Lambda_2 \subseteq \Lambda$. Sea p_X la función cociente de X en $X\diagup K$. Así, $p_X^{-1}(\Omega_1), p_X^{-1}(\Lambda_1), p_X^{-1}(\Omega_2)$ y $p_X^{-1}(\Lambda_2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X. De donde, $p_X^{-1}(\Omega_1) \times p_X^{-1}(\Lambda_1)$ y $p_X^{-1}(\Omega_2) \times p_X^{-1}(\Lambda_2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X^2. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f^{\times 2})^k(p_X^{-1}(\Omega_1) \times p_X^{-1}(\Lambda_1)) \cap (p_X^{-1}(\Omega_2) \times p_X^{-1}(\Lambda_2)) \neq \emptyset$. Sea $(x, y) \in p_X^{-1}(\Omega_1) \times p_X^{-1}(\Lambda_1)$ tal que $(f^{\times 2})^k((x, y)) \in p_X^{-1}(\Omega_2) \times p_X^{-1}(\Lambda_2)$. Esto implica que, $p_X(x) \in \Omega_1$, $p_X(y) \in \Lambda_1$, $p_X(f^k(x)) \in \Omega_2$ y $p_X(f^k(y)) \in \Lambda_2$. Por la Observación 4.1.13, parte (1), $(f_*)^k(p_X(x)) \in \Omega_2$ y $(f_*)^k(p_X(y)) \in \Lambda_2$. En consecuencia, $(p_X(x), p_X(y)) \in \Omega_1 \times \Lambda_1$ y $((f_*)^{\times 2})^k((p_X(x), p_X(y))) \in \Omega_2 \times \Lambda_2$. Por lo tanto, $((f_*)^{\times 2})^k(\Omega_1 \times \Lambda_1) \cap (\Omega_2 \times \Lambda_2) \neq \emptyset$ y $(f_*)^{\times 2}$ es transitiva. □

El Teorema 4.3.6 es una generalización de [17, Teorema 3.4] a espacios topológicos, y su prueba es esencialmente la misma que dan en [17, Teorema 3.4].

Teorema 4.3.6. (Comparar con [17, Teorema 3.4]) Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y K un subconjunto de X. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: continua, exacta, transitiva, mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva o caótica. Si $f \in \mathcal{M}$, entonces $f_* \in \mathcal{M}$.

La prueba del Teorema 4.3.7 es esencialmente la misma que se da en [17, Teorema 3.4].

Teorema 4.3.7. (Comparar con [17, Teorema 3.4]) Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y K un subconjunto de X. Si f es minimal, entonces f_* es minimal.

Teorema 4.3.8. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y K un subconjunto de X. Si Y es un espacio topológico y $g : Y \to Y$ es una función tal que $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ es transitiva, entonces $f_* \times g : (X\diagup K) \times Y \to (X\diagup K) \times Y$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que $f \times g$ es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $(X\diagup K) \times Y$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos Ω_1 y Ω_2 de $X\diagup K$ y subconjuntos abiertos no vacíos V_1 y V_2 de Y tales que $\Omega_1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $\Omega_2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Sea p_X la función cociente de X en $X\diagup K$. Se sigue que, $p_X^{-1}(\Omega_1) \times V_1$ y $p_X^{-1}(\Omega_2) \times V_2$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $X \times Y$. Por hipótesis, puesto que $f \times g$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f \times g)^k(p_X^{-1}(\Omega_1) \times V_1) \cap (p_X^{-1}(\Omega_2) \times V_2) \neq \emptyset$. En consecuencia, existe $(x, y) \in (p_X^{-1}(\Omega_1) \times V_1)$ tal que $(f \times g)^k((x, y)) \in (p_X^{-1}(\Omega_2) \times V_2)$. Esto implica que, $p_X(x) \in \Omega_1$ y $p_X(f^k(x)) \in \Omega_2$. Luego, por la Observación 4.1.13, parte (1), $(f_*)^k(p_X(x)) \in \Omega_2$. Con lo cual obtenemos que $(p_X(x), y) \in \Omega_1 \times V_1$ y $(f_* \times g)^k((p_X(x), y)) \in \Omega_2 \times V_2$. Consecuentemente, $(f_* \times g)^k(\Omega_1 \times V_1) \cap (\Omega_2 \times V_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f_* \times g$ es transitiva. □

En el Teorema 4.3.9, consideramos las clases de funciones: órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, minimal inversa, exactamente Devaney caótica, un F-sistema, suavemente mezclante, dispersora y TT_{++} y establecemos un resultado semejante al dado en el Teorema 4.3.6.

Teorema 4.3.9. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función, K un subconjunto de X y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, minimal inversa, exactamente Devaney caótica, un F-sistema, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}. Si $f \in \mathcal{M}$, entonces $f_* \in \mathcal{M}$.

Demostración. En toda la prueba, p_X es la función cociente de X en X/K.

Supongamos que f es órbita-transitiva. De aquí, existe $x_0 \in X$ tal que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(x_0, f)) = X$. Por el Teorema 4.3.1, parte (1), tenemos que $\mathrm{cl}_{X/K}(\mathcal{O}(p_X(x_0), f_*)) = X/K$. Así, f_* es órbita-transitiva.

Supongamos que f es estrictamente órbita-transitiva. Así, existe $x_0 \in X$ tal que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(f(x_0), f)) = X$. Por el Teorema 4.3.1, parte (1), $\mathrm{cl}_{X/K}(\mathcal{O}(p_X(f(x_0)), f_*)) = X/K$. Además, por la Observación 4.1.13, parte (1), $p_X(f(x_0)) = f_*(p_X(x_0))$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{X/K}(\mathcal{O}(f_*(p_X(x_0)), f_*)) = X/K$ y así, f_* es estrictamente órbita-transitiva.

Supongamos que f es ω-transitiva. De aquí, existe $x_0 \in X$ tal que $\omega(x_0, f) = X$. Luego, por el Teorema 4.3.1, parte (2), concluimos que $\omega(p_X(x_0), f_*) = X/K$. Por lo tanto, f_* es ω-transitiva.

Supongamos que f es Touhey. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X/K. De aquí, $p_X^{-1}(\Omega_1)$ y $p_X^{-1}(\Omega_2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X. Ya que f es Touhey, existen un punto periódico $x \in p_X^{-1}(\Omega_1)$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f^k(x) \in p_X^{-1}(\Omega_2)$. Luego, $p_X(x) \in \Omega_1$. Por otro lado, por la Observación 4.1.13, parte (1), tenemos que $(f_*)^k(p_X(x)) \in \Omega_2$. Además, por el Teorema 4.3.1, parte (1), $p_X(x)$ es un punto periódico de f_*. Por lo tanto, f_* es Touhey.

Supongamos que f es minimal inversa. Sea $\varphi \in X/K$. Veamos que $\{\alpha \in X/K : (f_*)^k(\alpha) = \varphi, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$ es denso en X/K. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de X/K. De aquí, $p_X^{-1}(\Omega)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que p_X es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $p_X(x) = \varphi$. Por hipótesis, $p_X^{-1}(\Omega) \cap \{y \in X : f^k(y) = x, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. De lo anterior podemos concluir que, existen $y \in p_X^{-1}(\Omega)$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $f^k(y) = x$. Luego, $p_X(y) \in \Omega$. Por otro lado, $p_X(f^k(y)) = p_X(x)$. Por la Observación 4.1.13, parte (1), $(f_*)^k(p_X(y)) = p_X(x) = \varphi$. En consecuencia, $p_X(y) \in \Omega \cap \{\alpha \in X/K : (f_*)^k(\alpha) = \varphi, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$. Así, el conjunto $\{\alpha \in X/K : (f_*)^k(\alpha) = \varphi, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$ es denso en X/K. Como φ es arbitrario, tenemos que f_* es minimal inversa.

Supongamos que f es exactamente Devaney caótica. De aquí, f es exacta y $Per(f)$ es denso en X. Por el Teorema 4.3.6, f_* es exacta. Más aún, por el Lema 4.3.2, $Per(f_*)$ es denso en X/K. Por lo tanto, f_* es exactamente Devaney caótica.

Supongamos que f es un F-sistema. De aquí, f es totalmente transitiva y $Per(f)$ es denso en X. Por el Teorema 4.3.6, f_* es totalmente transitiva y por el Lema 4.3.2, $Per(f_*)$ es denso en X/K. Por lo tanto, f_* es un F-sistema.

Supongamos que f es suavemente mezclante. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función transitiva. Por hipótesis, $f \times g$ es transitiva y así, por el Teorema 4.3.8, $f_* \times g$ es transitiva. Por lo tanto, f_* es suavemente mezclante.

Supongamos que f es dispersora. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función minimal. Por hipótesis, $f \times g$ es transitiva. Así, por el Teorema 4.3.8, $f_* \times g$ es transitiva. Por lo tanto, f_* es dispersora.

Supongamos que f es TT_{++}. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $X \diagup K$. De aquí, $p_X^{-1}(\Omega_1)$ y $p_X^{-1}(\Omega_2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X. Puesto que f es TT_{++}, el conjunto $n_f(p_X^{-1}(\Omega_1), p_X^{-1}(\Omega_2))$ es infinito. Sea $k \in n_f(p_X^{-1}(\Omega_1), p_X^{-1}(\Omega_2))$. Luego, $k \in \mathbb{N}$ y $f^k(p_X^{-1}(\Omega_1)) \cap p_X^{-1}(\Omega_2) \neq \emptyset$. Esto implica que, existe $x \in p_X^{-1}(\Omega_1)$ tal que $f^k(x) \in p_X^{-1}(\Omega_2)$. De lo anterior podemos concluir que, $p_X(x) \in \Omega_1$ y $p_X(f^k(x)) \in \Omega_2$. Por la Observación 4.1.13, parte (1), $(f_*)^k(p_X(x)) \in \Omega_2$. En consecuencia, $(f_*)^k(\Omega_1) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. De lo cual obtenemos que, $k \in n_{f_*}(\Omega_1, \Omega_2)$. Finalmente, ya que $n_f(p_X^{-1}(\Omega_1), p_X^{-1}(\Omega_2))$ es un conjunto infinito, tenemos que $n_{f_*}(\Omega_1, \Omega_2)$ es también un conjunto infinito. Por lo tanto, f_* es TT_{++}. □

Teorema 4.3.10. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y K un subconjunto de X. Si f es totalmente minimal, entonces f_* es totalmente minimal.

Demostración. Supongamos que f es totalmente minimal. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, f^s es minimal. De aquí, por el Teorema 4.3.7, $(f^s)_*$ es minimal. En consecuencia, por la Observación 4.1.12, $(f_*)^s$ es minimal. Puesto que $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que f_* es totalmente minimal. □

La prueba del Teorema 4.3.11 se sigue de los Teoremas 3.2.4, 4.3.6 y 4.3.9.

Teorema 4.3.11. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y K_i un subconjunto de X_i. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: continua, exacta, transitiva, mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, minimal inversa, exactamente Devaney caótica, un F-sistema, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}. Si $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $(f_i)_* \in \mathcal{M}$.

Como una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.2.6, 4.3.7 y 4.3.10 y del Corolario 3.2.7, tenemos el resultado del Teorema 4.3.12.

Teorema 4.3.12. Sean m un entero mayor o igual que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función continua y K_i un subconjunto de X_i. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: minimal o totalmente minimal. Si $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $(f_i)_* \in \mathcal{M}$.

Recordemos que el objetivo principal de esta sección es analizar algunas relaciones entre las funciones f, $\mathcal{F}_n(f)$ y $\mathcal{SF}_n(f)$. Además, hay que notar que los resultados que se han presentado hasta este punto de la sección, ya nos dan bastante información sobre las relaciones que existen entre las funciones $\mathcal{F}_n(f)$ y $\mathcal{SF}_n(f)$. Ahora veamos qué relaciones podemos encontrar entre las funciones f y $\mathcal{SF}_n(f)$.

Ejemplo 4.3.13. Sea $R_\theta : S^1 \to S^1$ como en el Ejemplo 1.3.5. Observemos que S^1 es un espacio perfecto, parcialmente compacto y pseudo-regular con una base numerable. Además, R_θ es continua. De aquí, por el Diagrama en [63, pág. 952] y por [3, Teorema 1.4], las funciones: transitiva, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva y

TT_{++} son equivalentes. Así, por el Ejemplo 1.3.5, R_θ es transitiva, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva y TT_{++}.

Finalmente, notemos que R_θ es una isometría. De aquí, por [17, Teorema 4.4], R_θ es transitiva, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva y TT_{++}, sin embargo, $\mathcal{SF}_n(R_\theta)$ no es transitiva, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva ni TT_{++}.

Es muy importante conocer las condiciones que debe cumplir una función $f : X \to X$ o bien X, para que sus funciones inducidas $\mathcal{SF}_n(f)$ satisfagan o no alguna de las propiedades dadas en las Definiciones 1.2.8 y 1.3.2.

A continuación presentamos una alternativa para saber si las inducidas $\mathcal{SF}_n(f)$ de una función f pueden ser alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, exacta, mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, TT_{++}, ω-transitiva, suavemente mezclante, exactamente Devaney caótica, dispersora, Touhey o un F-sistema.

Teorema 4.3.14. (Comparar con [17, Teorema 4.3]) Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto y de Hausdorff, $f : X \to X$ una función y n un entero mayor o igual que dos. Si existen U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X, ajenos dos a dos, tales que dos de ellos son +invariantes bajo f, entonces $\mathcal{SF}_n(f)$ no es transitiva.

Demostración. Supongamos que existen U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X ajenos dos a dos, tales que dos de ellos son +invariantes y supongamos también que $\mathcal{SF}_n(f)$ es transitiva. Sin pérdida de generalidad, supongamos que U_1 y U_2 son +invariantes. Notemos que $\langle U_1, U_2\rangle$ y $\langle V_1, V_2\rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$ tales que $\langle U_1, U_2\rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$ y $\langle V_1, V_2\rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. De aquí, por la Observación 4.2.3, $p(\langle U_1, U_2\rangle)$ y $p(\langle V_1, V_2\rangle)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{SF}_n(X)$ con la propiedad de que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2\rangle)$ y $F_X \notin p(\langle V_1, V_2\rangle)$. Ya que $\mathcal{SF}_n(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^k(p(\langle U_1, U_2\rangle)) \cap p(\langle V_1, V_2\rangle) \neq \emptyset$. Sea $\varphi \in (\mathcal{SF}_n(f))^k(p(\langle U_1, U_2\rangle)) \cap p(\langle V_1, V_2\rangle)$. De aquí, existe $\vartheta \in p(\langle U_1, U_2\rangle)$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^k(\vartheta) = \varphi$. También, existen $C \in \langle V_1, V_2\rangle$ y $C' \in \langle U_1, U_2\rangle$ tales que $p(C) = \varphi$ y $p(C') = \vartheta$. Así, $(\mathcal{SF}_n(f))^k(p(C')) = p(C)$. Luego, por la Observación 4.2.5, parte (1), obtenemos que $p((\mathcal{F}_n(f))^k(C')) = p(C)$. Consecuentemente, por la Observación 4.2.3, $(\mathcal{F}_n(f))^k(C') = C$. Por otro lado, puesto que $C' \in \langle U_1, U_2\rangle$ y por el Teorema 2.3.7, $\langle U_1, U_2\rangle$ es +invariante bajo $\mathcal{F}_n(f)$, tenemos que $C \in \langle U_1, U_2\rangle$. Por lo tanto, $\langle U_1, U_2\rangle \cap \langle V_1, V_2\rangle \neq \emptyset$. Sea $A \in \langle U_1, U_2\rangle \cap \langle V_1, V_2\rangle$. De [80, Observación 3.1.9] tenemos que $A \in \langle (U_1 \cup U_2) \cap V_1, (U_1 \cup U_2) \cap V_2, U_1 \cap (V_1 \cup V_2), U_2 \cap (V_1 \cup V_2)\rangle$. De aquí, existe $a \in A$ tal que $a \in (U_1 \cup U_2) \cap V_1$. Luego, $a \in U_1 \cap V_1$ o $a \in U_2 \cap V_1$. Lo cual es una contradicción. Esta contradicción surge de suponer que $\mathcal{SF}_n(f)$ es transitiva. Por lo tanto, $\mathcal{SF}_n(f)$ no es transitiva. □

El resultado del Teorema 4.3.15 se sigue del Teorema 4.3.14 y el diagrama de la Figura 1.10.

Teorema 4.3.15. (Comparar con [17, Teorema 4.4]) Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto y de Hausdorff, $f : X \to X$ una función y n un entero mayor o igual que dos. Si existen U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X, ajenos dos a dos, tales que dos de ellos son +invariantes bajo f, entonces $\mathcal{SF}_n(f)$ no es exacta, mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, TT_{++}, ω-transitiva, suavemente mezclante, exactamente Devaney caótica, dispersora, Touhey ni un F-sistema.

Observación 4.3.16. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Como F_X es un punto fijo de $\mathcal{SF}_n(f)$, se tiene que si $\psi \in \mathcal{SF}_n(X)$ es un punto transitivo de $\mathcal{SF}_n(f)$ o $\omega(\psi, \mathcal{SF}_n(f)) = \mathcal{SF}_n(X)$, entonces $\psi \neq F_X$.

En [13], F. Barragán, S. Macías y A. Rojas, analizan relaciones entre los dos sistemas dinámicos (X, f) y $(\mathcal{F}_n(X), \mathcal{F}_n(f))$ considerando espacios topológicos T_1 y funciones no necesariamente continuas. En esta tesis retomamos el estudio de relaciones entre estos dos sistemas dinámicos vía el sistema dinámico $(\mathcal{SF}_n(X), \mathcal{SF}_n(f))$.

Teorema 4.3.17. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$, n un entero mayor o igual que dos, $B \in \mathcal{F}_n(X)$ y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) Para cada $x \in B$, x es un punto transitivo de f.

(2) B es un punto transitivo de $\mathcal{F}_n(f)$.

(3) $p(B)$ es un punto transitivo de $\mathcal{SF}_n(f)$.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Demostración. Del Teorema 4.3.1, parte (1), tenemos que (2) implica (3).

Supongamos que $p(B)$ es un punto transitivo de $\mathcal{SF}_n(f)$. De aquí, por la Observación 4.3.16, $p(B) \neq F_X$. Sea $x \in B$. Veamos que x es un punto transitivo de f. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $U_1 \cup U_2 \subseteq U$. Se sigue que $\langle U_1, U_2 \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\langle U_1, U_2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. De aquí, por la Observación 4.2.3, $p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{SF}_n(X)$ tal que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2 \rangle)$. Por hipótesis, $\mathcal{O}(p(B), \mathcal{SF}_n(f)) \cap p(\langle U_1, U_2 \rangle) \neq \emptyset$. Así, existen $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^k(p(B)) \in p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ y $C' \in \langle U_1, U_2 \rangle$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^k(p(B)) = p(C')$. Por la Observación 4.2.5, parte (1), $p([\mathcal{F}_n(f)]^k(B)) = p(C')$. De lo anterior y por la Observación 4.2.3, podemos concluir que, $(\mathcal{F}_n(f))^k(B) = C'$. En consecuencia, $f^k(B) = C'$. En particular, $f^k(x) \in C' \subseteq U$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x, f) \cap U \neq \emptyset$ y así x es un punto transitivo de f. Puesto que $x \in B$ es arbitrario, tenemos que, para cada $x \in B$, x es un punto transitivo de f. Luego, por transitividad tenemos que (2) implica (1).

Supongamos que (1) implica (3). Sea $R_\theta : S^1 \to S^1$ como en el Ejemplo 4.3.13. Luego, R_θ es una función órbita-transitiva. De aquí, existe $z \in S^1$ tal que z es un punto transitivo.

Por hipótesis, $p(\{z\}) = F_X$ es un punto transitivo. Lo cual, por la Observación 4.3.16, no puede ocurrir. Por lo tanto, (1) no implica (3).

Finalmente, si suponemos que (1) implica (2), ya que (2) implica (3), se concluye que (1) implica (3), los cual, por el párrafo anterior no puede suceder. Por lo tanto (1) no implica (2). □

Teorema 4.3.18. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) Existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.

(2) Existe $A \in \mathcal{F}_n(X)$ tal que $\omega(A, \mathcal{F}_n(f)) = \mathcal{F}_n(X)$.

(3) Existe $\varphi \in \mathcal{SF}_n(X)$ tal que $\omega(\varphi, \mathcal{SF}_n(f)) = \mathcal{SF}_n(X)$.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1) y (2) implica (1).

Demostración. Del Teorema 4.3.1, parte (2), tenemos que (2) implica (3).

Supongamos que existe $\varphi \in \mathcal{SF}_n(X)$ tal que $\omega(\varphi, \mathcal{SF}_n(f)) = \mathcal{SF}_n(X)$. Por la Observación 4.3.16, $\varphi \neq F_X$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. De aquí, $\varphi = p(B)$, con $B \in \mathcal{F}_n(X)\backslash\mathcal{F}_1(X)$. Sea $x \in B$. Veamos que $\omega(x, f) = X$. Sean $y \in X$, $k \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $y \in U$. Puesto que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $U_1 \cup U_2 \subseteq U$. Notemos que, $\langle U_1, U_2\rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\langle U_1, U_2\rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Así, por la Observación 4.2.3, $p(\langle U_1, U_2\rangle)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{SF}_n(X)$ tal que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2\rangle)$. Ahora, sean $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$. Notemos que, $p(\{x_1, x_2\}) \in p(\langle U_1, U_2\rangle)$. Además, por hipótesis, tenemos que, $p(\{x_1, x_2\}) \in \omega(\varphi, \mathcal{SF}_n(f))$. De aquí, existe $m \geq k$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^m(\varphi) \in p(\langle U_1, U_2\rangle)$. Esto es, $(\mathcal{SF}_n(f))^m(p(B)) \in p(\langle U_1, U_2\rangle)$. Luego, por la Observación 4.2.5, parte (1), $p((\mathcal{F}_n(f))^m(B)) \in p(\langle U_1, U_2\rangle)$. Nuevamente, por la Observación 4.2.3, tenemos que $(\mathcal{F}_n(f))^m(B) \in \langle U_1, U_2\rangle$. De aquí, $f^m(B) \subseteq U$. En particular, $f^m(x) \in U$. Por lo tanto, $y \in \omega(x, f)$ y $\omega(x, f) = X$. Puesto que $x \in B$ es arbitrario, concluimos que, para cada $x \in X$, $\omega(x, f) = X$.

Por transitividad tenemos que (2) implica (1). □

Teorema 4.3.19. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$, n un entero mayor o igual que dos, $B \in \mathcal{F}_n(X)\backslash\mathcal{F}_1(X)$ y $f : X \to X$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Para cada $x \in B$, x es un punto periódico de f.

(2) B es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(f)$.

(3) $p(B)$ es un punto periódico de $\mathcal{SF}_n(f)$.

Demostración. Del Teorema 2.3.6 tenemos que (1) y (2) son equivalentes y del Teorema 4.3.1, obtenemos que (2) implica (3).

Pongamos $B = \{x_1, \ldots, x_r\}$ con $2 \leq r \leq n$ y supongamos que $p(B)$ es un punto periódico de $\mathcal{SF}_n(f)$. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^k(p(B)) = p(B)$. Por la Observación 4.2.5, parte (1), $p((\mathcal{F}_n(f))^k(B)) = p(B)$. Luego, por la Observación 4.2.3, $(\mathcal{F}_n(f))^k(B) = B$. Se sigue que, $f^k \big|_B \colon B \to B$ es una permutación. Ya que B es un subconjunto finito, el número de permutaciones de B es $r!$. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(f^k)^m \big|_B = id_B$. En consecuencia, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f^{km}(x_i) = x_i$. Por lo tanto, para cada $x \in B$, x es un punto periódico de f. □

Teorema 4.3.20. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, $f : X \to X$ una función y n un entero mayor o igual que dos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) $Per(f)$ es denso en X.

(2) $Per(\mathcal{F}_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$.

(3) $Per(\mathcal{SF}_n(f))$ es denso en $\mathcal{SF}_n(X)$.

Demostración. De [13, Teorema 3.4], tenemos que (1) y (2) son equivalentes. Por otro lado, del Lema 4.3.2, obtenemos que (2) implica (3).

Supongamos que $Per(\mathcal{SF}_n(f))$ es denso en $\mathcal{SF}_n(X)$. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $U_1 \cup U_2 \subseteq U$. Notemos que $\langle U_1, U_2 \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\langle U_1, U_2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. Así, por la Observación 4.2.3, tenemos que, $p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{SF}_n(X)$ tal que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2 \rangle)$. Por hipótesis, $Per(\mathcal{SF}_n(f)) \cap p(\langle U_1, U_2 \rangle) \neq \emptyset$. Sea $\varphi \in p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ tal que φ es un punto periódico de $\mathcal{SF}_n(f)$. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^m(\varphi) = \varphi$. Por otro lado, existe $B \in \langle U_1, U_2 \rangle$ tal que $p(B) = \varphi$. De aquí, $(\mathcal{SF}_n(f))^m(p(B)) = p(B)$. Por la Observación 4.2.5, parte (1), $p(\mathcal{F}_n(f)^m(B)) = p(B)$ y por la Observación 4.2.3, $(\mathcal{F}_n(f))^m(B) = B$. Finalmente, por el Teorema 4.3.19, tenemos que, para cada $b \in B$, b es un punto periódico de f. Más aún, ya que $B \subseteq U_1 \cup U_2 \subseteq U$, concluimos que, para cada $b \in B$, $b \in U$. Por lo tanto, $U \cap Per(f) \neq \emptyset$ y $Per(f)$ es denso en X. □

Teorema 4.3.21. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, $f : X \to X$ una función y n un entero mayor o igual que dos. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) $trans(f)$ es denso en X.

(2) $trans(\mathcal{F}_n(f))$ es denso en $\mathcal{F}_n(X)$.

(3) $trans(\mathcal{SF}_n(f))$ es denso en $\mathcal{SF}_n(X)$.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1) y (2) implica (1).

Demostración. Del Teorema 4.3.4, tenemos que (2) implica (3).

Supongamos que $trans(\mathcal{SF}_n(f))$ es denso en $\mathcal{SF}_n(X)$. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $U_1 \cup U_2 \subseteq U$. Notemos que $\langle U_1, U_2 \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\langle U_1, U_2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. De aquí, por la Observación 4.2.3, $p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{SF}_n(X)$ tal que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2 \rangle)$. Por hipótesis, $trans(\mathcal{SF}_n(f)) \cap p(\langle U_1, U_2 \rangle) \neq \emptyset$. Sea $\varphi \in trans(\mathcal{SF}_n(f)) \cap p(\langle U_1, U_2 \rangle)$. De lo anterior podemos concluir que, existe $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$ tal que $\varphi = p(A)$. Por el Teorema 4.3.17, para cada $a \in A$, $a \in trans(f)$. Más aún, para cada $a \in A$, $a \in U$. Así, $trans(f) \cap U \neq \emptyset$. Como U es arbitrario, tenemos que $trans(f)$ es denso en X.

Por transitividad concluimos que (2) implica (1). □

Teorema 4.3.22. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, $f : X \to X$ una función y n un entero mayor o igual que dos. Si Y es un espacio topológico y $g : Y \to Y$ es una función tal que $\mathcal{SF}_n(f) \times g$ es transitiva, entonces $f \times g$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{SF}_n(f) \times g$ es transitiva. Sean $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X \times Y$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X y subconjuntos abiertos no vacíos V_1 y V_2 de Y tales que $U_1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ y $U_2 \times V_2 \subseteq \mathcal{U}_2$. Puesto que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1^1, U_1^2, U_2^1 y U_2^2 de X tales que $U_1^1 \cap U_1^2 = \emptyset$, $U_2^1 \cap U_2^2 = \emptyset$, $U_1^1 \cup U_1^2 \subseteq U_1$ y $U_2^1 \cup U_2^2 \subseteq U_2$. Observemos que $\langle U_1^1, U_1^2 \rangle$ y $\langle U_2^1, U_2^2 \rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$ tales que $\langle U_1^1, U_1^2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$ y $\langle U_2^1, U_2^2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. Así, por la Observación 4.2.3, tenemos que $p(\langle U_1^1, U_1^2 \rangle)$ y $p(\langle U_2^1, U_2^2 \rangle)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{SF}_n(X)$ tales que $F_X \notin p(\langle U_1^1, U_1^2 \rangle) \cup p(\langle U_2^1, U_2^2 \rangle)$. Puesto que $\mathcal{SF}_n(f) \times g$ es transitiva, existen $(\varphi, v_1) \in p(\langle U_1^1, U_1^2 \rangle) \times V_1$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $(\mathcal{SF}_n(f) \times g)^k((\varphi, v_1)) \in p(\langle U_2^1, U_2^2 \rangle) \times V_2$. De lo anterior tenemos que, existen $C \in \langle U_1^1, U_1^2 \rangle$ y $C' \in \langle U_2^1, U_2^2 \rangle$ tales que $p(C) = \varphi$ y $p(C') = (\mathcal{SF}_n(f))^k(\varphi)$. Así, $p(C') = (\mathcal{SF}_n(f))^k(p(C))$. Por la Observación 4.2.5, parte (1), $p(C') = p((\mathcal{F}_n(f))^k(C))$. Nuevamente, por la Observación 4.2.3, $C' = (\mathcal{F}_n(f))^k(C)$. Como $C' \in \langle U_2^1, U_2^2 \rangle$, se cumple que $(f)^k(C) \subseteq U_2$. En consecuencia, para cada $c \in C$, $(c, v_1) \in U_1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}_1$ y $(f \times g)^k((c, v_1)) \in U_2 \times V_2 \subseteq \mathcal{U}_2$. Por lo tanto, $(f \times g)^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$ y $f \times g$ es transitiva. □

De [13, Teorema 6.1] y del Teorema 4.3.6, tenemos el Teorema 4.3.23.

Teorema 4.3.23. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es continua.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es continua.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es continua.

Luego, se cumple lo siguiente: (1) y (2) son equivalentes y (2) implica (3).

Sean X un continuo, n un entero mayor o igual que dos, $f : X \to X$ una función continua y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: exacta, transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, minimal o irreducible. F. Barragán, A. Santiago-Santos y J. F. Tenorio [17] analizan relaciones entre las condiciones: (1) $f \in \mathcal{M}$, (2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$ y (3) $\mathcal{SF}_n(f) \in \mathcal{M}$. Con la finalidad de contribuir en esta línea de investigación, a continuación generalizamos los Teoremas 4.7, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.17 y 4.18 de [17], a espacios topológicos no degenerados, compactos, perfectos y de Hausdorff y funciones no necesariamente continuas, para después utilizar estos resultados como una herramienta que nos facilite establecer relaciones similares pero ahora considerando las nociones dadas en la Definición 1.3.2.

La prueba de los Teoremas 4.3.24, 4.3.25, 4.3.26 y 4.3.28 es similar a las dadas en [17, Teoremas 4.7, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.17 y 4.18].

Teorema 4.3.24. (Comparar con [17, Teoremas 4.7 y 4.9]) Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: exacta o mezclante. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $f \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

(3) $\mathcal{SF}_n(f) \in \mathcal{M}$.

Teorema 4.3.25. (Comparar con [17, Teoremas 4.10, 4.12 y 4.13]) Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, totalmente transitiva o fuertemente transitiva. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) $f \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

(3) $\mathcal{SF}_n(f) \in \mathcal{M}$.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Teorema 4.3.26. (Comparar con [17, Teorema 4.18]) Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función continua. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es minimal.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es minimal.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

En el Teorema 1.4.3, establecemos que para espacios métricos compactos y funciones continuas se cumple que toda función minimal es minimal inversa y en el Teorema 4.3.26, establecemos que la minimalidad de la función $\mathcal{SF}_n(f)$ implica la minimalidad de f. Esto nos lleva a establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.3.27. Sean X un espacio métrico no degenerado, compacto y perfecto, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función continua. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es minimal inversa.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es minimal.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Teorema 4.3.28. (Comparar con [17, Teoremas 4.11 y 4.17]) Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: caótica o débilmente mezclante. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) $f \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

(3) $\mathcal{SF}_n(f) \in \mathcal{M}$.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1) y (2) implica (1).

Los Teoremas 4.3.29, 4.3.30, 4.3.33, 4.3.36, 4.3.37, 4.3.38 y 4.3.39, son resultados que se pueden deducir fácilmente gracias a resultados que verificamos al inicio de esta sección.

De los Teoremas 4.3.20 y 4.3.24, tenemos el siguiente:

Teorema 4.3.29. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es exactamente Devaney caótica.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es exactamente Devaney caótica.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es exactamente Devaney caótica.

Como una consecuencia del Teorema 4.3.17, tenemos el resultado del Teorema 4.3.30.

Teorema 4.3.30. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es órbita-transitiva.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es órbita-transitiva.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es órbita-transitiva.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Demostración. Por el Teorema 4.3.9, tenemos que (2) implica (3).

Supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es órbita-transitiva. De aquí, existe $\varphi \in \mathcal{SF}_n(X)$ tal que φ es un punto transitivo de $\mathcal{SF}_n(f)$. Así, por la Observación 4.3.16, tenemos que, $\varphi \neq F_X$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. Luego, $\varphi = p(B)$ con $B \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_1(X)$. Finalmente, por el Teorema 4.3.17, para cada $x \in B$, x es un punto transitivo de f. Por lo tanto, f es órbit-transitiva. Por otra parte, por transitividad tenemos que (2) implica (1).

En virtud del Ejemplo 4.3.13, deducimos que (1) no implica (3). Por este mismo ejemplo y el Teorema 4.3.9, concluimos que (1) no implica (2). $\square$

En [63, Proposición 4.1] se verifica que en espacios topológicos perfectos y T_1, la transitividad y la órbita-transitividad son equivalentes y en el Teorema 4.3.30 se establece que la órbita-transitividad de $\mathcal{SF}_n(f)$ implica la órbita-transitividad de f, esto nos permite establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.3.31. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es transitiva.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es órbita-transitiva.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es órbita-transitiva.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Sabiendo que en [63, Proposición 2.7] se verifica que en espacios perfectos y T_1 la órbita-transitividad y la estrictamente órbita-transitividad son equivalentes y considerando el resultado del Teorema 4.3.30, podemos deducir lo siguiente.

Teorema 4.3.32. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es estrictamente órbita-transitiva.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es órbita-transitiva.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es órbita-transitiva.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (3) y (1) no implica (2).

Teorema 4.3.33. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es estrictamente órbita-transitiva.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Demostración. Por el Teorema 4.3.9, tenemos que (2) implica (3).

Supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva. Así, existe $\varphi \in \mathcal{SF}_n(X)$ tal que $\mathcal{SF}_n(f)(\varphi)$ es un punto transitivo. Por la Observación 4.3.16, $\mathcal{SF}_n(f)(\varphi) \neq F_X$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. De aquí, $\mathcal{SF}_n(f)(\varphi) = p(B)$, con $B \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_1(X)$. Notemos que $\varphi \neq F_X$. En consecuencia, $\varphi = p(A)$ con $A \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_1(X)$. De lo anterior concluimos que, $\mathcal{SF}_n(f)(p(A)) = p(B)$. Por la Observación 4.2.5, parte (1), $p(\mathcal{F}_n(f)(A)) = p(B)$. Consecuentemente, $p(\mathcal{F}_n(f)(A))$ es un punto transitivo de $\mathcal{SF}_n(X)$. Por la Observación 4.3.16, $\mathcal{F}_n(f)(A) \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_1(X)$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_r\}$ con $2 \leq r \leq n$. Luego, por el Teorema 4.3.17, para cada $x \in \{f(x_1), \ldots, f(x_r)\}$, x es un punto transitivo de f. Por lo tanto, f es estrictamente órbita-transitiva. Por transitividad deducimos que (2) implica (1).

Del Ejemplo 4.3.13 y del Teorema 4.3.9, podemos concluir que (1) no implica (3) y que (1) no implica (2). $\square$

De [63, Proposición 3.2], se tiene que en espacios topológicos perfectos la ω-transitividad y la estrictamente órbita-transitividad son nociones equivalentes. De lo anterior y del Teorema 4.3.33 deducimos lo siguiente:

Teorema 4.3.34. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es ω-transitiva.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (3) y (1) no implica (2).

En [63, Proposición 5.2] se establece que en espacios topológicos y para funciones continuas, una función es estrictamente órbita-transitiva si y sólo si es transitiva. Sabiendo lo anterior y considerando el resultado del Teorema 4.3.33, deducimos el Teorema 4.3.35.

Teorema 4.3.35. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función continua. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es transitiva.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es estrictamente órbita-transitiva.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (3) y (1) no implica (2).

Como una consecuencia del Teorema 4.3.18, del Ejemplo 4.3.13 y de [13, Teorema 5.6], tenemos el resultado del Teorema 4.3.36.

Teorema 4.3.36. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es ω-transitiva.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es ω-transitiva.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es ω-transitiva.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Demostración. Por el Teorema 4.3.9, tenemos que (2) implica (3).

Supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es ω-transitiva. Así, existe un punto $\varphi \in \mathcal{SF}_n(X)$ tal que $\omega(\varphi, \mathcal{SF}_n(f)) = \mathcal{SF}_n(X)$. Luego, por el Teorema 4.3.18, existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$. Por lo tanto, f es ω-transitiva. Así, (3) implica (1). Consecuentemente, (2) implica (1).

Finalmente, del Ejemplo 4.3.13, deducimos que (1) no implica (3) y que (1) no implica (2). □

Como una consecuencia de los Teoremas 4.3.20 y 4.3.25, obtenemos el siguiente:

Teorema 4.3.37. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es un F-sistema.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es un F-sistema.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es un F-sistema.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1) y (2) implica (1).

Teorema 4.3.38. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es dispersora.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es dispersora.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es dispersora.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (1), (2) implica (3) y (3) implica (1).

Demostración. Por el Teorema 4.3.9, concluimos que (2) implica (3).

Supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es dispersora. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función minimal. Por hipótesis, $\mathcal{SF}_n(f) \times g$ es transitiva. De aquí, por el Teorema 4.3.22, $f \times g$ es transitiva. Por lo tanto, f es dispersora. Así, concluimos que, (3) implica (1). Luego, por transitividad tenemos que (2) implica (1). □

Teorema 4.3.39. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es suavemente mezclante.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es suavemente mezclante.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es suavemente mezclante.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (1), (2) implica (3) y (3) implica (1).

Demostración. Por el Teorema 4.3.9, obtenemos que (2) implica (3).

Ahora supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es suavemente mezclante. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función transitiva. Por hipótesis, $\mathcal{SF}_n(f) \times g$ es transitiva. De aquí, por el Teorema 4.3.22, $f \times g$ es transitiva. Por lo tanto, f es suavemente mezclante. Por transitividad tenemos que (2) implica (1). $\square$

Teorema 4.3.40. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es TT_{++}.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es TT_{++}.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es TT_{++}.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (3), (3) implica (1), (2) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Demostración. Del Teorema 4.3.9, tenemos que (2) implica (3).

Supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es TT_{++}. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Veamos que $n_f(U, V)$ es un conjunto infinito. Puesto que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 \subseteq U$ y $V_1 \cup V_2 \subseteq V$. Observemos que $\langle U_1, U_2 \rangle$ y $\langle V_1, V_2 \rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$ tales que $\langle U_1, U_2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$ y $\langle V_1, V_2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. Así, por la Observación 4.2.3, $p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ y $p(\langle V_1, V_2 \rangle)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{SF}_n(X)$ tales que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2 \rangle) \cup p(\langle V_1, V_2 \rangle)$. Sea $k \in n_{\mathcal{SF}_n(f)}(p(\langle U_1, U_2 \rangle), p(\langle V_1, V_2 \rangle))$. De aquí, $(\mathcal{SF}_n(f))^k(p(\langle U_1, U_2 \rangle)) \cap p(\langle V_1, V_2 \rangle) \neq \emptyset$. Sea $\varphi \in (\mathcal{SF}_n(f))^k(p(\langle U_1, U_2 \rangle)) \cap p(\langle V_1, V_2 \rangle)$. De lo anterior concluimos que, existen $\mathcal{X} \in p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ y $C' \in \langle V_1, V_2 \rangle$ tales que $(\mathcal{SF}_n(f))^k(\mathcal{X}) = \varphi$ y $p(C') = \varphi$. Por otro lado, existe $C'' \in \langle U_1, U_2 \rangle$ tal que $p(C'') = \mathcal{X}$. Así, $(\mathcal{SF}_n(f))^k(p(C'')) = p(C')$. Por la Observación 4.2.5, parte (1), $p((\mathcal{F}_n(f))^k(C'')) = p(C')$. Más aún, por la Observación 4.2.3, $(\mathcal{F}_n(f))^k(C'') = C'$. Sea $x \in C''$. Luego, $x \in U$ y $f^k(x) \in V$. En consecuencia, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ y $k \in n_f(U, V)$. Finalmente, ya que $n_{\mathcal{SF}_n(f)}(p(\langle U_1, U_2 \rangle), p(\langle V_1, V_2 \rangle))$ es un conjunto infinito, tenemos que, $n_f(U, V)$ es un conjunto infinito. Por lo tanto, f es TT_{++}. Así, (3) implica (1). Luego, por transitividad, tenemos que (2) implica (1).

Del Ejemplo 4.3.13 y el Teorema 4.3.9, se deduce que (1) no implica (3) y (1) no implica (2). $\square$

Teorema 4.3.41. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es Touhey.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es Touhey.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es Touhey.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (1), (2) implica (3) y (3) implica (1).

Demostración. Del Teorema 4.3.9, obtenemos que (2) implica (3).

Ahora supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es Touhey. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Puesto que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 \subseteq U$ y $V_1 \cup V_2 \subseteq V$. Observemos que $\langle U_1, U_2 \rangle$ y $\langle V_1, V_2 \rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}_n(X)$ tales que $\langle U_1, U_2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$ y $\langle V_1, V_2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. Así, por la Observación 4.2.3, $p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ y $p(\langle V_1, V_2 \rangle)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{SF}_n(X)$ tales que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2 \rangle) \cup p(\langle V_1, V_2 \rangle)$. Por hipótesis, ya que $\mathcal{SF}_n(f)$ es Touhey, existen, un punto periódico $\varphi \in p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $(\mathcal{SF}_n(f))^k(\varphi) \in p(\langle V_1, V_2 \rangle)$. Esto implica que, existan $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$ y $C \in \langle V_1, V_2 \rangle$ tales que $p(A) = \varphi$ y $p(C) = (\mathcal{SF}_n(f))^k(\varphi)$. En consecuencia, $p(C) = (\mathcal{SF}_n(f))^k(p(A))$. Por la Observación 4.2.5, parte (1), $p(C) = p((\mathcal{F}_n(f))^k(A))$ y de la Observación 4.2.3, tenemos que $(\mathcal{F}_n(f))^k(A) = C$. Por otro lado, ya que A es un punto periódico de $\mathcal{F}_n(f)$ y $A \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_1(X)$, por el Teorema 4.3.19, para cada $a \in A$, a es un punto periódico de f. Consecuentemente, para cada $a \in A$, a es un punto periódico de f tal que $a \in U$. Por otra parte, ya que $(\mathcal{F}_n(f))^k(A) = C$ y $C \in \langle V_1, V_2 \rangle$, tenemos que, para cada $a \in A$, $f^k(a) \in V$. Por lo tanto, f es Touhey. De lo anterior concluimos que (3) implica (1). Finalmente, por transitividad concluimos que (2) implica (1). □

Teorema 4.3.42. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es minimal inversa

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es minimal inversa.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es minimal inversa.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (1), (2) implica (3), (3) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Demostración. Del Teorema 4.3.9, deducimos que (2) implica (3).

Supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es minimal inversa. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. Ya que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen dos subconjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $U_1 \cup U_2 \subseteq U$. Notemos que $\langle U_1, U_2 \rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. Así, por la Observación 4.2.3, $p(\langle U_1, U_2 \rangle)$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{SF}_n(X)$ tal que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2 \rangle)$. Sea $y \in X$ tal que $x \neq y$. Por hipótesis, $\{\psi \in \mathcal{SF}_n(X) : (\mathcal{SF}_n(f))^k(\psi) = p(\{x, y\}),\ \text{para algún } k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathcal{SF}_n(X)$. De aquí,

$\{\psi \in \mathcal{SF}_n(X) : (\mathcal{SF}_n(f))^k(\psi) = p(\{x,y\}),$ para algún $k \in \mathbb{N}\} \cap p(\langle U_1, U_2\rangle) \neq \emptyset$. Sea $\varphi \in \{\psi \in \mathcal{SF}_n(X) : (\mathcal{SF}_n(f))^k(\psi) = p(\{x,y\}),$ para algún $k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\varphi \in p(\langle U_1, U_2\rangle)$. Esto implica que, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^{k_1}(\varphi) = p(\{x,y\})$. Ya que $\varphi \in p(\langle U_1, U_2\rangle)$ y $F_X \notin p(\langle U_1, U_2\rangle)$, $\varphi = p(B)$, con $B \in \mathcal{F}_n(X)\backslash\mathcal{F}_1(X)$. De aquí, $(\mathcal{SF}_n(f))^{k_1}(p(B)) = p(\{x,y\})$. Luego, por la Observación 4.2.5, parte (1), $p((\mathcal{F}_n(f))^{k_1}(B)) = p(\{x,y\})$ y por la Observación 4.2.3, $(\mathcal{F}_n(f))^{k_1}(B) = \{x,y\}$. Por otro lado, puesto que $\varphi \in p(\langle U_1, U_2\rangle)$, existe $C \in \langle U_1, U_2\rangle$ tal que $p(C) = p(B)$. Así, por la Observación 4.2.3, $C = B$. En consecuencia, $B \in \langle U_1, U_2\rangle$ y $B \subseteq U$. Finalmente, existe $b \in B$ tal que $f^{k_1}(b) = x$ y $b \in U$. Por lo tanto, $b \in U \cap \{y \in X : f^k(y) = x,$ para algún $k \in \mathbb{N}\}$ y el conjunto $\{y \in X : f^k(y) = x,$ para algún $k \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. Puesto que $x \in X$ es arbitrario, tenemos que f es minimal inversa. Así, (3) implica (1). Luego, por transitividad tenemos que (2) implica (1).

Por el Ejemplo 1.3.5, tenemos que R_θ es minimal inversa. Además, del Ejemplo 4.3.13, $\mathcal{SF}_n(R_\theta)$ no es transitiva. Por lo tanto, del Teorema 1.3.3, tenemos que $\mathcal{SF}_n(R_\theta)$ no es minimal inversa.

Finalmente, por [17, Ejemplo 4.6], tenemos que $\mathcal{F}_n(R_\theta)$ no es transitiva. Nuevamente, por el Teorema 1.3.3, tenemos que $\mathcal{F}_n(R_\theta)$ no es minimal inversa. □

Teorema 4.3.43. Sean X un espacio topológico no degenerado, compacto, perfecto y de Hausdorff, n un entero mayor o igual que dos y $f : X \to X$ una función continua. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) f es totalmente minimal.

(2) $\mathcal{F}_n(f)$ es totalmente minimal.

(3) $\mathcal{SF}_n(f)$ es totalmente minimal.

Luego, se cumple lo siguiente: (2) implica (1), (2) implica (3), (3) implica (1), (1) no implica (2) y (1) no implica (3).

Demostración. Del Teorema 4.3.10, concluimos que (2) implica (3).

Supongamos que $\mathcal{SF}_n(f)$ es totalmente minimal. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Por el resultado en [3, Proposición 6.2], es suficiente con verificar que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(x,f)) = X$. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Ya que X es un espacio topológico no degenerado, perfecto y de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $U_1 \cup U_2 \subseteq U$. Notemos que $\langle U_1, U_2\rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}_n(X)$ tal que $\langle U_1, U_2\rangle \cap \mathcal{F}_1(X) = \emptyset$. Sea p la función cociente de $\mathcal{F}_n(X)$ en $\mathcal{SF}_n(X)$. Así, por la Observación 4.2.3, $p(\langle U_1, U_2\rangle)$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{SF}_n(X)$ tal que $F_X \notin p(\langle U_1, U_2\rangle)$. Sea $y \in X$ con $x \neq y$. Puesto que f es continua, por el Teorema 4.3.23, $\mathcal{SF}_n(f)$ es continua. Por hipótesis, ya que $(\mathcal{SF}_n(f))^m$ es minimal, por [3, Proposición 6.2], $\mathcal{O}(p(\{x,y\}), (\mathcal{SF}_n(f))^m) \cap p(\langle U_1, U_2\rangle) \neq \emptyset$. Sea $\varphi \in \mathcal{O}(p(\{x,y\}), (\mathcal{SF}_n(f))^m) \cap p(\langle U_1, U_2\rangle)$. Luego, existe $C \in \langle U_1, U_2\rangle$ tal que $p(C) = \varphi$. Si $\varphi = p(\{x,y\})$, entonces $C = \{x,y\}$. Como $C \subseteq U$, concluimos que $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$. De otra forma, existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(\mathcal{SF}_n(f))^{m+l}(p(\{x,y\})) = \varphi$. De aquí, $p(C) = (\mathcal{SF}_n(f))^{m+l}(p(\{x,y\}))$. Por la Observación 4.2.5, parte (1), $p(C) = p((\mathcal{F}_n(f))^{m+l}(\{x,y\}))$. Así, por la Observación 4.2.3,

$C = (\mathcal{F}_n(f))^{m+l}(\{x,y\})$. En consecuencia, ya que $C \subseteq U$, concluimos que $f^{m+l}(x) \in U$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x, f^m) \cap U \neq \emptyset$ y así f^m es minimal. Finalmente, ya que $m \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que f es totalmente minimal. De lo anterior concluimos que (3) implica (1). De aquí, por transitividad podemos concluir que (2) implica (1).

Por el Ejemplo 1.3.5, tenemos que R_θ es totalmente minimal y por el Teorema 1.4.1 y por [17, Ejemplo 4.6], concluimos que $\mathcal{F}_n(R_\theta)$ y $\mathcal{SF}_n(R_\theta)$ no son totalmente minimales. □

De los Teoremas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 4.3.24 y 4.3.29, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.44. Sean m y n enteros mayores o iguales que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos no degenerados, compactos, perfectos y de Hausdorff y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función. Sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: exacta, exactamente Devaney caótica o mezclante. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\prod_{i=1}^{m} f_i \in \mathcal{M}$.

(2) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{F}_n(f_i) \in \mathcal{M}$.

(3) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{SF}_n(f_i) \in \mathcal{M}$.

Capítulo 5

Sistemas Dinámicos y Criptografía

En este capítulo revisamos una aplicación de los sistemas dinámicos discretos en Criptografía. Más específicamente, mostramos una aplicación de los sistemas dinámicos caóticos en Criptografía.

5.1. Breve introducción a la Criptografía y su relación con la teoría del caos

Desde tiempos muy lejanos ha existido la necesidad de mantener en secreto ciertos mensajes (*texto plano*) que deseamos intercambiar con una única persona. A raíz de esto, se ha trabajado incansablemente en el desarrollo de métodos que dejen un mensaje ilegible (*texto cifrado*) para personas no deseadas, y es la *Criptografía* la que se encarga del estudio y análisis de todos ellos. Desde el surgimiento de esta ciencia se han desarrollado muchísimos métodos que nos permiten cifrar información, sin embargo, muchos de ellos han quedado obsoletos por su poca efectividad [35].

El primer método de cifrado apareció durante la guerra entre Atenas y Esparta. Los gobernantes de Esparta utilizaban un palo o bastón en el que se enrollaba en espiral una tira de cuero y sobre ella se escribía el mensaje en columnas paralelas al eje del palo. La tira desenrollada mostraba un texto sin sentido, pero que se podía leer volviendo a enrollar la tira sobre un palo del mismo diámetro que el primero, a este artefacto se le llamó *escítala*. Este método se siguió utilizando hasta la aparición del cifrado César, llamado así por ser el método que utilizó Julio César para enviar mensajes secretos a sus legiones. Este método se basaba en la sustitución de las letras originales de un texto plano por las de un alfabeto alterado. Este alfabeto alterado se construía desplazando el alfabeto hacia la derecha por tres espacios. Si, por ejemplo, se desea enviar el mensaje secreto "sistemas dinámicos", el texto cifrado utilizando el cifrado César es "vlvwhpdv glqdpdfrv". En el siglo XVI surgió uno de los métodos de cifrado más importantes en la historia de la Criptografía, *el tablero de Vigenère*, llamado así en honor al creador de este método, Blaise de Vigenère. Si, por ejemplo, quisiéramos enviar el mensaje secreto "transitividad topológica" utilizando este método, tendríamos que proceder de la siguiente manera:

(i) Buscamos una *palabra clave* (es un fragmento de información, generalmente representado por letras o números que especifica la manera en cómo va a ser cifrado un texto plano o cómo será descifrado un texto cifrado) que podamos recordar sin problemas, para este ejemplo usamos la palabra caos.

(ii) Escribimos el mensaje a cifrar y sobre él la palabra clave, repitiéndola tantas veces como sea necesario.

Clave	c	a	o	s	c	a	o	s	c	a	o	s	c	a	o	s	c	a	o	s	c	a	o
Texto plano	t	r	a	n	s	i	t	i	v	i	d	a	d	t	o	p	o	l	ó	g	i	c	a

(iii) Cada letra del texto plano se codifica usando el tablero de Vigenère que se muestra en la Figura 5.1. Nos colocamos en la columna correspondiente a la primera letra del texto plano y marcamos la intersección con la fila de la primera letra de la palabra clave. Así, la primera letra del texto cifrado es v. En la tabla se encuentran marcadas las primeras siete letras del texto cifrado. Una vez terminado el proceso, el texto cifrado queda como sigue: "v r o f u i h a x i r s f t c h q l c c y k c o".

La llegada de la Revolución Industrial trajo consigo la creación de máquinas de rotores que desplazaron rápidamente los métodos de cifrado en papel que se conocían. El primer método de cifrado con estas características fue creado por Leon Battista Alberti, *disco de cifras*. Con este método se sustituyen las letras del texto plano con caracteres de diferentes alfabetos con el fin de conseguir el texto cifrado. Quinientos años después aparece la segunda y más importante máquina criptográfica, *la máquina Enigma*, creada por el alemán Arthur Scherbius. Matemáticos como Marian Rejewski y Alan Turing tuvieron una fuerte participación en el mundo de la criptografía después de la creación de la máquina Enigma. Son muchos los métodos de cifrado que surgieron desde la invención de esta máquina, cada uno de ellos tratando de mejorar la seguridad de los mensajes cifrados. En este trabajo estamos especialmente interesados en uno de estos métodos.

En los últimos treinta años, ciencias como: Química, Física, Biología, Medicina y Economía han hecho uso de los sistemas dinámicos como herramienta que les ayuda a modelar un gran número de problemas. Recientemente, la Criptografía también ha adoptado esta herramienta con el fin de crear algoritmos criptográficos más eficientes. Una primera aplicación para transmitir señales usando caos fue propuesta por L. M. Pecora y T. L. Carroll [75]. Desde entonces, el número de publicaciones sobre criptografía con caos ha ido en aumento [2, 19, 20, 58]. Se ha comprobado que los sistemas caóticos cumplen con algunas de las características que en los algoritmos criptográficos se buscan [33]. Ambos son sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales o en los parámetros (recordemos la Definición 1.2.15 y la Figura 1.9), esto quiere decir que cambios muy pequeños en la entrada provocarán cambios muy grandes en la salida, ambos tienen un comportamiento aleatorio, por un lado, los algoritmos criptográficos desordenan y dispersan los datos mediante rondas de cifrado, mientras que los sistemas caóticos extienden una región pequeña de datos sobre todo el espacio fase mediante iteraciones. Por último, tanto los sistemas caóticos como los algoritmos de cifrado producen salidas complejas aun cuando

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**l**	**m**	**n**	**o**	**p**	**q**	**r**	**s**	**t**	**u**	**v**	**w**	**x**	**y**	**z**
b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a
c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	v	x	y	z	a	b
d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c
e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d
f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e
g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f
h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g
i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h
j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q
s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r
t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s
u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	k	r	s	t
v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v
x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w
y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y

Figura 5.1: Tablero de Vigenére

las funciones o algoritmos aparentan simplicidad. L. Kocarev [56] analiza a profundidad las propiedades caóticas aplicables en los métodos de cifrado, además analiza los criterios que se deben considerar para una elección adecuada del sistema caótico a utilizar.

5.2. Método criptográfico utilizando teoría del caos

El propósito de esta sección es mostrar un ejemplo de un algoritmo criptográfico en el que se involucra una función caótica.

Son muchas las publicaciones que han surgido en torno a la relación entre estas dos áreas de investigación [2, 19, 20, 58]. Sin embargo, para este trabajo de tesis nos enfocamos en mostrar a muy grandes rasgos los pasos del método de cifrado desarrollado en [67]. Este algoritmo permite cifrar textos de cualquier dimensión con un alto nivel de seguridad y su principal característica es que se basa en la construcción de dos llaves; la primera es generada por una función caótica y la segunda se genera a partir de una función no lineal. Como mencionamos anteriormente, es muy importante elegir el sistema caótico que mejor se adapte a las condiciones del problema al que nos vamos a enfrentar. L. R. Marcial, E. L. Basurto, M. Rivera y M. Sandoval [67] trabajan con la función dada por:

$$x_{i+1} = 1 - \eta\, y_i^2, \text{ donde } \eta \text{ es una constante,}$$

$$y_{i+1} = \cos(k \cos^{-1}(x_i)), \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

Se sabe que esta función tiene un exponente de Lyapunov positivo $\lambda = 1.25$ [62]. Así, de acuerdo con el último párrafo de la Sección 1.2 del Capítulo 1, se trata de una función caótica. Justo por esta propiedad es conocida como *función caótica cruzada* y fue definida por K. Singh y K. Kaur [82] en 2011. Cuando $\eta = 2$ y $k = 6$ este sistema exhibe una gran variedad de comportamientos caóticos. Debido a los buenos resultados obtenidos en las pruebas experimentales del algoritmo de cifrado de imágenes propuesto por K. Singh y K. Kaur, resultó que L. R. Marcial, E. L. Basurto, M. Rivera y M. Sandoval [67] retoman el uso de la función caótica cruzada en su algoritmo criptográfico.

A continuación se describe, con un ejemplo particular, el algoritmo criptográfico propuesto en [67] mediante el cifrado del texto plano "The 10th International Congress on Intelligent and Information Technologies 2016". Los pasos del algoritmo que aquí se describe con más detalle, se encuentran en [67].

Paso 1. Se obtiene el número de caracteres del texto a cifrar tomando en cuenta los espacios y se iguala este número a la variable n. En este caso $n = 80$.

Paso 2. Se crea la variable m cuyo valor será el menor entero que es mayor o igual al valor de $\sqrt{n}$. Esto es $m = [\sqrt{n}\,]$. En este ejemplo $m = 9$.

Paso 3. Se crea el arreglo T_e de longitud m^2 cuyas entradas son los caracteres del texto a cifrar. De ser necesario se agrega "basura" a este arreglo para llenarlo. En este caso la longitud del texto a cifrar es 80, así que es necesario agregar texto basura para llenar el arreglo T_e. Finalmente, el arreglo T_e queda como sigue:

T	h	e		1	0	t	h		I	n	t	e	r	n	a	t	i	o	n	a	l		C	o	n
g	r	e	s	s		o	n		I	n	t	e	l	l	i	g	e	n	t		a	n	d		I
n	f	o	r	m	a	t	i	o	n		T	e	c	h	n	o	l	o	g	i	e	s		2	0
1	6	%																							

Figura 5.2: Arreglo T_e.

Paso 4. Usando el código ASCII, se convierte a decimal cada una de las entradas del arreglo T_e y se guardan estos valores en el arreglo T_d. Para este ejemplo, T_d queda como se muestra a continuación:

84	104	101	32	49	48	116	104	32	73	110	116	101	114	110
97	116	105	111	110	97	108	32	67	111	110	103	114	101	115
115	32	111	110	32	73	110	116	101	108	108	105	103	101	110
116	32	97	110	100	32	73	110	102	111	114	109	97	116	105
111	110	32	84	101	99	104	110	111	108	111	103	105	101	115
32	50	48	49	54	37									

Figura 5.3: Arreglo T_d.

Paso 5. Se guardan los datos del arreglo T_d en una matriz I de 9×9.

84	73	111	114	110	116	111	84	105
104	110	110	101	116	32	114	101	101
101	116	97	115	101	97	109	99	115
32	101	108	115	108	110	97	104	32
49	114	32	32	108	100	116	110	50
48	110	67	111	105	32	105	111	48
116	97	111	110	103	73	111	108	49
104	116	110	32	101	110	110	111	54
32	105	103	73	110	102	32	103	37

Figura 5.4: Matriz I.

Paso 6. Las entradas de la matriz I son transformadas a binarios usando 8 bits para cada dígito y los resultados se almacenan en una matriz I_b (la matriz I_b la escribimos en dos partes por cuestiones de espacio).

01010100	01001001	01101111	01110010	01101110	01110100
01101000	01101110	01101110	01100101	01110100	01100001
01100101	01110100	01100001	01110011	01100101	01100001
00100000	01100101	01101100	01110011	01101100	01101110
00110001	01110010	00100000	00100000	01101100	01100100
00110000	01101110	01000011	01101111	01101001	00100000
01110100	01100001	01101111	01101110	01100111	01001001
01101000	01110100	01101110	00100000	01100101	01101110
00100000	01101001	01100111	01001001	01101110	01100110

01101111	01010100	01101001
01110010	01100101	01100101
01101101	01100011	01110011
01100001	01101000	00100000
01110100	01101110	0110010
01101001	01101111	0110000
01101111	01101100	00110001
01101110	01101111	00110110
00100000	01100111	00100101

Figura 5.5: Matriz I_b.

Paso 7. La información en el ADN se almacena como un código compuesto por cuatro bases químicas: adenina (A), guanina (G), citosina (C) y tiamina (T). Para este algoritmo, L. R. Marcial, E. L. Basurto, M. Rivera y M. Sandoval [67] codifican la Adenina, Tiamina, Guanina y Citosina con 00, 11, 10 y 01, respectivamente. Así, una secuencia binaria la podemos expresar como una secuencia de ADN y viceversa. Por ejemplo, la secuencia binaria 00100101 queda, como secuencia de ADN representada por AGCC.

Este paso del algoritmo consiste en escribir los números binarios de las entradas de la matriz I_b como secuencias de ADN. Estas secuencias se almacenan en la matriz L.

CCCA	CAGC	CGTT	CTAG	CGTG	CTCA	CGTT	CCCA	CGGC
CGGA	CGTG	CGTG	CGCC	CTCA	AGAA	CTAG	CGCC	CGCC
CGCC	CTCA	CGAC	CTAT	CGCC	CGAC	CGTC	CGAT	CTAT
AGAA	CGCC	CGTA	CTAT	CGTA	CGTG	CGAC	CGGA	AGAA
ATAC	CTAG	AGAA	AGAA	CGTA	CGCA	CTCA	CGTG	ATAG
ATAA	CGTG	CAAT	CGTT	CGGC	AGAA	CGGC	CGTT	ATAA
CTCA	CGAC	CGTT	CGTG	CGCT	CAGC	CGTT	CGTA	ATAC
CGGA	CTCA	CGTG	AGAA	CGCC	CGTG	CGTG	CGTT	ATCG
AGAA	CGGC	CGCT	CAGC	CGTG	CGCG	AGAA	CGCT	AGCC

Figura 5.6: Matriz L.

Paso 8. Este paso del algoritmo es uno de los dos más importantes, pues es cuando se crea la primera llave o palabra clave. Primero se generan dos valores importantes, k_1 y k_2, de la siguiente manera:

$$k_1 = \frac{1}{126} \text{ mód } \left(\sum_{i=1}^{[\frac{m}{2}]} \sum_{j=1}^{m} I_{i,j}, 256 \right),$$

$$k_2 = \frac{1}{126} \text{ mód } \left(\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m} \sum_{j=1}^{m} I_{i,j}, 256 \right).$$

Donde $\text{mód}(a,b)$ devuelve el resto después de la división de a por b.

A continuación, se generan de forma aleatoria los valores iniciales x_1 y y_1 sobre el intervalo real $[0,1]$. Luego, se calculan x_0 y y_0 como se indica: $x_0 = x_1 + k_1$. Si $x_0 > 1$, entonces $x_0 = \text{mod}(x_0, 1)$. En otro caso, x_0 conserva su valor inicial. Para calcular y_0 se sigue la misma regla pero ahora usando el valor y_1 y k_2. Lo siguiente es generar el vector columna $X = (x_1, \ldots, x_9)$ y el vector fila $Y = (y_1, \ldots, y_{81})$ utilizando la función caótica cruzada con los parámetros $\eta = 2$ y $k = 6$. Luego, se multiplica el vector columna X por el vector fila Y, para obtener la matriz M de dimensión 9×81. Los valores de la matriz M se pasan a binario utilizando la siguiente función:

$$M_b(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } M(i,j) < 0; \\ 1, & \text{si } M(i,j) \geq 0. \end{cases}$$

Finalmente, se codifica la matriz M_b a cadenas de ADN para así obtener la matriz K.

GAGC	CAGG	TCCA	GATT	ATTG	TTTA	TAGT	TGGC	AACC
CTCG	GTCC	AGGT	CTAA	TAAC	AAAT	ATCA	ACCG	TTGG
CTCG	GTCC	AGGT	CTAA	TAAC	AAAT	ATCA	ACCG	TTGG
GAGC	CAGG	TCCA	GATT	ATTG	TTTA	TAGT	TGGC	AACC
CTCG	GTCC	AGGT	CTAA	TAAC	AAAT	ATCA	ACCG	TTGG
CTCG	GTCC	AGGT	CTAA	TAAC	AAAT	ATCA	ACCG	TTGG
GAGC	CAGG	TCCA	GATT	ATTG	TTTA	TAGT	TGGC	AACC
GAGC	CAGG	TCCA	GATT	ATTG	TTTA	TAGT	TGGC	AACC
GAGC	CAGG	TCCA	GATT	ATTG	TTTA	TAGT	TGGC	AACC

Figura 5.7: Matriz K.

Paso 9. Se realiza la suma de las matrices L y K utilizando la regla de adición para el ADN que se muestra en la Figura 5.8.

+	A	C	G	T
A	A	C	G	T
C	C	G	T	A
G	G	T	A	C
T	T	A	C	G

Figura 5.8: Regla de adición para el ADN.

Si por ejemplo queremos sumar las secuencias en la posición $(1,1)$ de las matrices L y K. De acuerdo a la regla de adición, C+G=T, C+A=C, C+G=T y A+C=C. Así, la entrada $(1,1)$ de la nueva matriz es TCTC. Se repite este proceso con cada una de las entradas de las matrices L y K y se obtiene la matriz $NADN$.

TCTC	GAAT	ATAT	TTTC	CCGA	AGAA	AGCG	ATTC	CGTG
GCTG	TCAT	CACC	GCCC	ATCC	AGAT	CGCG	CTGT	ACTT
GCGT	TGGC	CAGA	GGAT	AGCG	CGAA	CCAC	CTCC	AGGC
GGGC	GGTT	ATAA	TTTG	CCGG	ACGG	AGGA	AAAC	AGCC
CGCT	TGCT	AAGT	CCAA	AGTC	CGCT	CGGA	CTAA	TGGA
CGCG	TCAT	CGGG	GCTT	AGGG	AGAT	CCTC	CTAC	TGGG
TTTC	GGGT	ATAT	TGGC	CCAC	ATCC	AGCG	AACC	ATCG
TGAC	GTTG	ATAG	GGTT	CCAT	ACGG	AGCC	AACA	ATGT
GGGC	GGAT	ATGT	TACA	CCGA	ACAG	TGGT	AATA	AGGG

Figura 5.9: Matriz $NADN$.

Paso 10. Las entradas de la matriz $NADN$ se convierten a binarios utilizando la codificación mencionada en el paso 7 para obtener una matriz I_b^2.

11011101	10000011	00110011	11111101	01011000	00100000
10011110	11010011	01000101	10010101	00110101	00100011
10011011	11101001	01001000	10100011	00100110	01100000
10101001	10101111	00110000	11111110	01011010	00011010
01100111	11100111	00001011	01010000	00101101	01100111
01100110	11010011	01101010	10011111	00101010	00100011
11111101	10101011	00110011	11101001	01010001	00110101
11100001	10111110	00110010	10101111	01010011	00011010
10101001	10100011	00111011	11000100	01011000	00010010

00100110	00111101	01101110
01100110	01111011	00011111
01010001	01110101	00101001
00101000	00000001	00100101
01101000	01110000	11101000
01011101	01110001	11101010
00100110	00000101	00110110
00100101	00000100	00111011
11101011	00001100	00101010

Figura 5.10: Matriz I_b^2.

Paso 11. Cada una de las entradas de la matriz I_b^2 pasan de binario a decimal para obtener la última matriz, C_p, antes de obtener el mensaje cifrado.

221	131	51	253	88	32	38	61	110
158	211	69	149	53	35	102	123	31
155	233	72	163	38	96	81	117	41
169	175	48	254	90	26	40	1	37
103	231	11	80	45	103	104	112	232
102	211	106	159	42	35	93	113	234
253	171	51	233	81	53	38	5	54
225	190	50	175	83	26	37	4	59
169	163	59	196	88	18	235	12	42

Figura 5.11: Matriz C_p.

Paso 12. En este paso del algoritmo se genera la segunda llave seleccionando una función no lineal $f(x)$. Para este ejemplo se usa la función $f(x) = a\,x^3 + b\cos(x)$. Una vez seleccionada la función, se generan de forma aleatoria las constantes a y b dentro del intervalo $[0, 1]$. Estas contantes serán la segunda palabra clave del algoritmo. Para este ejemplo $a = 7.638979442864783\text{e} - 001$ y $b = 7.593273831310963\text{e} - 001$.

Paso 13. Finalmente, se genera el arreglo C con el texto cifrado, como se indica a continuación: para cada $i \in \{1, \ldots, 9\}$ y toda $j \in \{1, \ldots, 81\}$, se busca alguna raíz $c_{i,j}$ de la función no lineal $f(x) - C_{p_{i,j}}$, donde C_p es la matriz obtenida en el paso 11. En este algoritmo de cifrado se utiliza el método de Newton para hallar las raíces $c_{i,j}$.

Paso 14. Para cada $i \in \{1, \ldots, m \times m\}$, el valor c_i se pasa a una cadena hexadecimal c_i^p. Con estos valores, se construye el arreglo C con el texto cifrado.

La tabla de la Figura 5.12 muestra el texto cifrado que arroja el algoritmo criptográfico que acabamos de presentar. La interpretación es como sigue: el texto se empieza a leer comenzando en la posición $(1, 1)$ y nos desplazamos hacia la derecha sobre esa misma fila. Ahora nos encontramos sobre la posición $(1, 4)$. Sobre esa misma columna, nos movemos a la fila 2 y continuamos moviéndonos hacia la izquierda hasta llegar a la posición $(2, 1)$. Desde la posición $(3, 1)$ aplicamos el mismo procedimiento y continuamos así con el resto de la tabla para finalmente, obtener el texto cifrado.

Existen diferentes formas de probar la fortaleza de un sistema criptográfico. Sin embargo, para probar la fortaleza de este algoritmo de cifrado en particular, L. R. Marcial, E. L. Basurto, M. Rivera y M. Sandoval [67] utilizan el *ataque por fuerza bruta*, que consiste en probar todas las palabras clave o llaves posibles hasta encontrar la clave con la cual se obtenga un texto claro significativo. Un ataque por fuerza bruta sólo es factible cuando el espacio de claves es pequeño. De modo que, para evitarlo, el número de claves debe ser tan grande como sea posible. Lo cual ocurre en este método de cifrado, ya que el total de posibles claves es de 3.4028×10^{38} y se sabe que para que un sistema pueda resistir el ataque por fuerza bruta, requiere de un espacio de claves posibles superior a

401a6d303b77b38f	40179ecda782ef8e	40177841d2962af6	40182836cc1ed798
40147dbfaaf0c981	40146cdd2d199c2b	401ba7149539747c	401a95febcf0d786
40182836cc1ed698	401630f5884fd08a	401a0501c5ea7f4c	401ae6335d64bd7a
401870bb03277bd2	401ad2523455744b	401a0501c5ea7f4d	40184091bcaeacd3
40191f36f44d7ef5	4017de01cf6a6d59	40104672751f056e	4011f633ff5abedb
401236bb5cb5ef59	400fea5291610c10	4003cf1eeaee4b97	4014afc6f0595b09
40104672751f0acc	40102bb58d026495	401110e9c8ccec37	401ba7149539747e
401729b0e23f2caa	4017de01cf6c649d	401bb074bef5f47e	4012dab1fec3491e
4017ab8bf2451582	401ae6335d65643a	401870bb03277e89	4019627e794f1955
4013745c2b909c74	40107ae8bc0c3cc9	400d966499343aa9	4013995a5c45abf0
400f40ed7d8632bc	400e8feb2ed2e8c9	4012ee6e7f0fee9d	4013156fb5e5638a
4013745c2b909c73	400bfd084b717326	400ccf8fa5828904	4014053e2faf2c66
400a2c850e84dd64	40147dbfaaf0cbb2	400ccf8fa5873228	40107ae8bc0c35fa
400a2c850ea76eec	40073e9bc8110182	400d966499343877	40146cdd2d197dfc
4012ee6e7f0fdb6d	400e1538b7c2c99d	40148e872d073835	4013cfdc1a3f7818
400d96649934387e	400d55503bd38da2	401af9f7de35e7df	401140b086812c78
4015bb4c74527537	40155fc5b998242f	3fec0a9df4a76336	40151128dfa70a65
4015210f82ab020b	3ffe6999dfed1963	3ffc1ae17f876d80	4004614646a369c2
4014f114bd52a05d	400bb3ef591b1c04	400e53109ebf5cef	400d55503bbf82e5
401adc46643bdabc	401af0192c872d9b	401094a79cf91721	401110e9c8cceb79
400e8feb2ed2e9ed			

Figura 5.12: Arreglo C.

$2^{100} = 1.2677 \times 10^{30}$. Ahora bien, la sensibilidad a las condiciones iniciales de la función caótica cruzada le dan al sistema criptográfico sensibilidad a variaciones pequeñas en las llaves o palabras clave, brindando así, una gran resistencia ante ataques exhaustivos. Si, por ejemplo, se realiza la ejecución de la implementación computacional con los valores iniciales $x_0 = 0.3$ y $y_0 = 0.6$ dejando fijos los valores iniciales de la segunda llave, se descifra de forma correcta el texto plano utilizado en este ejemplo. Pero al alterar tan solo un poco los valores iniciales a $x_0 = 0.30001$ y $y_0 = 0.5999$, se obtiene un mensaje descifrado que no corresponde al texto original. También, si se dejan fijos los valores iniciales de la función caótica y se usan los valores iniciales $a = 0.3$ y $b = 0.6$ en la segunda llave, se obtiene el mensaje original, sin embargo, modificando ligeramente los valores iniciales a y b como 0.30001 y 0.59999 se obtiene un mensaje descifrado que tampoco corresponde al mensaje original. El algoritmo de descifrado ya no lo revisamos en este trabajo de tesis, sin embargo, se puede revisar en [67].

No nos queda ninguna duda de que el uso de sistemas caóticos en métodos de cifrado mejora la fortaleza en los algoritmos criptográficos. Pese a que el algoritmo criptográfico que presentamos en este capítulo no es trabajo nuestro, nos ha servido para conocer las bases de la criptografía caótica y ha despertado nuestro deseo de querer contribuir en el área de la criptografía con ayuda de los sistemas dinámicos y en un futuro no muy lejano, de la teoría de hiperespacios.

Conclusiones

Sean m y n enteros mayores o iguales que dos, $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ una función y $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes funciones: exacta, débilmente mezclante, mezclante, transitiva, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, minimal inversa, exactamente Devaney caótica, un F-sistema, totalmente minimal, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}. En este trabajo de investigación estudiamos la transitividad topológica en productos, productos simétricos y productos simétricos suspensión. Por ello, considerando los grupos de condiciones (C1) y (C2):

(C1) (1) $\left(\mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m X_i\right), \mathcal{F}_n\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right) \in \mathcal{M}$;

(2) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $(\mathcal{F}_n(X_i), \mathcal{F}_n(f_i)) \in \mathcal{M}$;

(3) $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i) \in \mathcal{M}$;

(4) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $(X_i, f_i) \in \mathcal{M}$;

(C2) (1) $(X, f) \in \mathcal{M}$;

(2) $(\mathcal{F}_n(X), \mathcal{F}_n(f)) \in \mathcal{M}$;

(3) $(\mathcal{SF}_n(X), \mathcal{SF}_n(f)) \in \mathcal{M}$;

para cubrir el estudio de la transitividad topológica en productos y productos simétricos, buscamos relaciones entre las condiciones del grupo (C1), y el estudio de la transitividad topológica en productos simétricos suspensión lo cubrimos analizando relaciones entre las condiciones del grupo (C2).

Referente al grupo de condiciones (C1), considerando espacios topológicos y funciones (no necesariamente continuas), encontramos que para las funciones: exacta, exactamente Devaney caótica y mezclante, las condiciones (1), (2), (3) y (4) son equivalentes, Teoremas 3.3.11, 3.3.12 y 3.3.13, respectivamente. Sin embargo, si $\mathcal{M}$ es una de las siguientes funciones: débilmente mezclante, transitiva, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, Touhey, minimal inversa, un F-sistema, suavemente mezclante, dispersora o TT_{++}, sólo pudimos demostrar que se cumple: (1) implica (2), (3) implica (4) y (1) implica (4), Teoremas 3.3.15, 3.2.4

y 3.3.18, respectivamente. Para el caso de las funciones minimales y totalmente minimales, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, es necesaria la continuidad de la función f_i para que se cumpla lo siguiente: (1) implica (2), (3) implica (4) y (1) implica (4), Teoremas 3.2.6, 3.3.16, 3.3.17 y 3.3.20 y Corolario 3.2.7. Para este último grupo de funciones, las equivalencias de las cuatro condiciones del grupo (C1) se da bajo la hipótesis de que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i sea +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, Teorema 3.2.10, Proposición 3.2.11 y Corolario 3.2.12. Éstos y otros resultados forman parte de un artículo de investigación recientemente publicado [78].

Referente al grupo de condiciones (C2), pudimos verificar que las proposiciones (1) y (2) son equivalentes cuando alguno de los espacios: tiene una base numerable, es T_1, de Hausdorff, pseudo-regular o +invariante sobre subcojunto abiertos, Teoremas 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 y 2.3.10, respectivamente. Este conjunto de resultados fueron incluidos en un artículo aceptado para su publicación en la revista Mathematica Pannonica [13]. Además, para las clases de funciones de la Definición 1.2.8, generalizamos [17, Teoremas 4.7, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.17 y 4.18] a espacios topológicos no degenerados, compactos, perfectos y de Hausdorff y funciones no necesariamente continuas, Teoremas 4.3.24, 4.3.25, 4.3.26 y 4.3.28. Por otro lado, las funciones de la Definición 1.3.2 las estudiamos por primera vez en los productos simétricos suspensión, Teoremas 4.3.29, 4.3.30, 4.3.33, 4.3.36, 4.3.37, 4.3.38, 4.3.39, 4.3.40, 4.3.41, 4.3.42 y 4.3.43.

Los Teoremas 4.3.24, 4.3.25, 4.3.26, 4.3.28, 4.3.29, 4.3.30, 4.3.33, 4.3.36, 4.3.37, 4.3.38, 4.3.39, 4.3.40, 4.3.41, 4.3.42 y 4.3.43 forman parte de un artículo en el que seguimos trabajando para pronto someterlo a revisión para su posible publicación.

Con la elaboración de este trabajo de investigación esperamos, principalmente, que despierte en alguien la curiosidad de seguir engrandeciendo el estudio de la transitividad topológica en productos, productos simétricos y productos simétricos suspensión.

Bibliografía

[1] Acosta, G., Illanes, A. y Méndez-Lango, H. (2009). The transitivity of induced maps. *Topology Appl.,* ***156*** (5), 1013-1033.

[2] Akhavan, A., Samsudin, A. y Akhshani, A. (2011). A symmetric image encryption scheme based on combination of nonlinear chaotic maps. *J. Franklin Inst.*, ***348*** (8), 1797-1813.

[3] Akin, E. y Carlson, J. D. (2012). Conceptions of topological transitivity. *Topology Appl.*, ***159*** (12), 2815-2830.

[4] Akin, E., Auslander, J. y Nagar, A. (2017). Dynamics of induced systems. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, ***37*** (7), 2034-2059.

[5] Alsedà, L. I., Del Río, M. A. y Rodríguez, J. A. (2003). A Survey on The Relation Between Transitivity and Dense Periodicity for Graph Maps. *J. Differ. Equ. Appl.*, ***9*** (3/4), 281-288.

[6] Anaya, J. G., Capulín, F., Maya, D. y Orozco-Zitli, F. (2016). Induced mappings on symmetric products of continua. *Topology Appl.*, ***214***, 100-108.

[7] Banks, J. (1997). Regular periodic decompositions for topologically transitive maps. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, ***17*** (3), 505-529.

[8] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G. y Stace, P. (1992). On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Month.*, ***99*** (4), 332-334.

[9] Barragán, F. (2010). On the n-fold symmetric product suspensions of a continuum. *Topology Appl.*, ***157*** (3), 597-604.

[10] Barragán, F. (2011). Induced maps on n-fold symmetric product suspensions. *Topology Appl.*, ***158*** (10), 1192-1205.

[11] Barragán, F. (2014). Aposyndetic properties of the n-fold symmetric product suspension of a continuum. *Glasnik Mat.*, ***49*** (69), 179-193.

[12] Barragán, F., Rojas, A. y Macías, S. (2017). Funciones Especiales Entre Continuos II. En J. Angoa, R. Escobedo y M. Ibarra. (Ed.), *Topología y sus aplicaciones 5* (pp. 3-23). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección de Fomento Editorial.

[13] Barragán, F., Macías, S. y Rojas, A. (2020). Conceptions of topological transitivity on symmetric products. *Math. Pannon.* Aceptado.

[14] Barragán, F. y Rojas, A. (2019). Nociones relacionadas con la transitividad topológica. En J. Angoa, R. Escobedo, M. Ibarra y A. Contreras (Ed.), *Topología y sus aplicaciones 7* (pp. 125-142). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección General de Publicaciones.

[15] Barragán, F., Macías, S. y Tenorio, J. (2015). More on induced maps on n-fold symmetric product suspensions. *Glasnik Mat.*, ***50*** (70), 489-512.

[16] Barragán, F. y Tenorio, J. (2012). Continuos y el producto simétrico suspensión. *Rev. Integr. Temas Mat.*, ***30*** (2), 91-106.

[17] Barragán, F., Santiago-Santos, A. y Tenorio, J. (2016). Dynamic properties for the induced maps on n-fold symmetric product suspensions. *Glasnik Mat.*, ***51*** (71), 453-474.

[18] Bauer, W. y Sigmund, K. (1975). Topological Dynamics of Transformations Induced on the Space of Probability Measures. *Monatsh. Math.*, ***79***, 81-92.

[19] Behnia, S., Akhshani, A., Mahmodi, H. y Akhavan, A. (2008). A novel algorithm for image encryption based on mixture of chaotic maps. *Chaos Soliton. Frac.*, ***35*** (2), 408-419.

[20] Behnia, S., Akhshani, A. y Mahmodi, H. (2008). Chaotic Cryptographic Scheme Based on Composition Maps. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, ***18*** (1), 251-261.

[21] Bilokopytov, E. y Kolyada, S. F. (2014). Transitive Maps on Topological Spaces. *Ukr. Math. J.*, ***65*** (9), 1293-1318.

[22] Birkhoff, G. D. (1912). Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques. *B. Soc. Math. Fr.*, ***40***, 305-323.

[23] Birkhoff, G. D. (1927). *Dynamical Systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 9. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

[24] Blanchard, F., Host, B. y Maass, A. (2000). Topological complexity. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, ***20*** (3), 641-662.

[25] Borsuk, K. (1949). On the third symmetric potency of the circumference. *Fund. Math.*, ***36*** (1), 236-244.

[26] Borsuk, K. y Ulam, S. (1931). On symmetric products of topological spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, ***37*** (12), 875-882.

[27] Bott, R. (1952). On the third symmetric potency of S^1. *Fund. Math.*, ***39*** (1), 264-268.

[28] Camargo, J., García, C. y Ramírez, A. (2014), Transitivity of the Induced Map $C_n(f)$. *Rev. Colombiana de Mat.*, ***48*** (2), 235-245.

[29] Castañeda, E. (2002). *Embedding symmetric products in Euclidean spaces*, Continuum Theory (Denton, TX, 1999), 67-79, Lectures Notes in Pure and Appl. Math., 230, New York: Marcel Dekker.

[30] Castañeda, E. (1998). A unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent. *Topology Proc.*, ***23***, 61-67.

[31] Charatonik, J. J. (1964). Confluent mappings and unicoherence of continua. *Fund. Math.*, ***56*** (2), 213-220.

[32] Charatonik, J. J. e Illanes, A. (2006). Local connectedness in hyperspaces. *Rocky Mountain J. Math.*, ***36*** (3), 811-856.

[33] Dachselt, F. y Schwarz, W. (2001). Chaos and cryptography. *IEEE Trans. Circuits Syst. I. Fundam. Theory Appl.*, ***48*** (12), 1498-1509.

[34] Değirmenci, N. y Koçak, Ş. (2010). Chaos in product maps. *Turk. J. Math.*, ***34*** (4), 593-600.

[35] Delfs, H. y Knebl, H. (2007). *Introduction to Cryptography: Principles and Applications*, Second Edition, Berlin, Heidelberg: Springer.

[36] Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Redwood City: Addison-Wesley.

[37] Dugundji J. (1966). *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, Inc.

[38] Flores, S. (2017). *Un acercamiento a la dinámica colectiva* (Tesis de Licenciatura). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México. `http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/13150.pdf`

[39] Fréchet, M. (1910). Les dimensions d'un ensemble abstrait. *Math. Ann.*, ***68***, 145-168.

[40] Furstenberg, H. (1967). Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation. *Math. Syst. Theory*, ***1*** (1), 1-50.

[41] Gómez-Rueda, J., Illanes, A. y Méndez, H. (2012). Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products. *Chaos Soliton. Fract.*, ***45*** (9/10), 1180-1187.

[42] Good, C. y Macías, S. (2016). Symmetric products of generalized metric spaces. *Topology Appl.*, ***206***, 93-114.

[43] Good, C. y Macías, S. (2018). What is topological about topological dynamics? *Discrete Contin. Cyn. Syst.*, ***38*** (3), 1007-1031.

[44] Gottschalk, W. y Hedlund, G. (1955). *Topological Dynamics*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 36. Providence: American Mathematical Society.

[45] Harańczyk, G., Kwietniak, D. y Oprocha, P. (2011). A note on transitivity, sensitivity and chaos for graph maps. *J. Differ. Equ. Appl.*, ***17*** (10), 1549-1553.

[46] Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig: Veit. Reimpreso por Chelsea Publishing Company en 1949.

[47] Higuera, G. e Illanes, A. (2011). Induced mappings on symmetric products. *Topology Proc.*, ***37***, 367-401.

[48] Hou, B., Liao, G. y Liu, H. (2008). Sensitivity for set-valued maps induced by M-systems. *Chaos Soliton. Fract.*, ***38*** (4), 1075-1080.

[49] Hosokawa, H. (1989). Induced mappings between hyperspaces. *Bull. Tokyo Gakugei Univ.*, ***41***, 1-6.

[50] Illanes, A. (2013). Models of hyperspaces. *Topology Proc.*, ***41***, 39-64.

[51] Illanes, A. y Nadler Jr., S. B. (1999). Hyperspaces: fundamentals and recent advances, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216. New York, United States of America: Marcel Dekker Inc.

[52] Illanes, A., Macías, S. y Nadler Jr., S. B. (1999). Symmetric products and Q-manifolds. *Contemp. Math.*, ***246***, 137-141.

[53] Illanes, A., Naranjo-Murillo, J., Vega, J. y Velázquez-Inzunza, Y. (2018). Induced mappings on symmetric products, some answers. *Topology Appl.*, ***243***, 52-64.

[54] King, J. y Méndez, H. (2014). *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México: Prensa de Ciencias.

[55] Kolyada, S. y Snoha, L. (2009). Minimal dynamical systems. *Scholarpedia*, ***4*** (11), 5803.

[56] Kocarev, L. (2001). Chaos-based cryptography: a brief overview. *IEEE Circ. Syst. Mag.*, ***1*** (3), 6-21.

[57] Kuratowski, K. (1968). *Topology*, Vol. 2, New York and London: Academic Press.

[58] Kotulski, Z. y Szczepański, J. (1999). Application of discrete chaotic dynamical systems in cryptography-DCC method. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, *09* (06), 1121-1135.

[59] Kwietniak, D. (2005). Exact Devaney Chaos and Entropy. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, ***6*** (1), 169-179.

[60] Li, T. Y. y Yorke, J. A. (1975). Period Three Implies Chaos. *Amer. Math. Month.*, ***82*** (10), 985-992.

[61] Li, R. y Zhou, X. (2013). A note on chaos in product maps. *Turk. J. Math.*, ***37*** (4), 665-675.

[62] Ling, W., Qun, Y., Yaoqiang, X., Yongxing, Z. y Bo, Z. (2008). An Image Encryption Scheme Based on Cross Chaotic Map. *Congress on Image and Signal Processing*, 22-26.

[63] Mai, J. H. y Sun, W. H. (2010). Transitivities of maps of general topological spaces. *Topology Appl.*, ***157*** (5), 946-953.

[64] Macías, S. (2004). On the n-fold hyperspace suspension of continua. *Topology Appl.*, ***138*** (1/3), 125-138.

[65] Macías, S. (2018). *Topics on Continua, 2nd edition.* Springer-Cham.

[66] Mangang, K. B. (2017). Li-Yorke chaos in product dynamical systems. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, ***12*** (1), 81-88.

[67] Marcial, L. R., Basurto, E. L., Rivera, M. y Sandoval, M. (2016). Método criptográfico simétrico utilizando teoría del caos, operaciones sobre ADN y raíces de funciones no lineales. *Res. Comput. Sci.*, ***128***, 21-34.

[68] Molski, R. (1957). On symmetric products. *Fund. Math.*, ***44*** (2), 165-170.

[69] Moore, R. L. (1924). Concerning Upper Semi-Continuous Collections of Continua. *Trans. Amer. Soc.*, ***27*** (4), 416-428.

[70] Munkres, J. R. (2000). *Topology*, Second Edition, Upper Saddle River, New Jersey, United States of America: Prentice Hall.

[71] Nadler Jr., S. B. (1979). A fixed point theorem for hyperspace suspensions. *Houston J. Math.*, ***5*** (1), 125-132.

[72] Nadler Jr., S. B. (1978). *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49. New York: Marcel Dekker. Reimpreso en: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.

[73] Niu, Y. (2011). The average-shadowing property and strong ergodicity. *J. Math. Anal. Appl.*, ***376*** (2), 528-534.

[74] Olano-Diaz, W.C. y Sánchez-Martínez, J. (2019). Hiperespacios de continuos: historia, avances y nuevos retos. *Pesquimat*, ***22*** (1), 69-78.

[75] Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, ***64*** (8), 821-824.

[76] Poincaré, H. (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Math.*, ***13***, 1-270.

[77] Revilla, A. (2018). *Nociones relacionadas con la transitividad topológica* (Tesis de Licenciatura). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México. `http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/13710.pdf`

[78] Rojas, A., Barragán, F. y Macías, S. (2020). Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products. *Turk. J. Math.*, ***44*** (2), 491-523.

[79] Rojas, A. (2015). *Funciones Libremente Descomponibles* (Tesis de Licenciatura). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México. `http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/12882.pdf`

[80] Rojas, A. (2017). *Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados* (Tesis de Maestría). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México. `http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/13228.pdf`

[81] Se-Ra, Y. y Yon-Mi, K. (2000). Chaos and Lyapunov Exponent. *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math.*, ***7*** (13), 87-100.

[82] Singh, K. y Komalpreet, K. (2011). Image Encryption using Chaotic Maps and DNA Addition Operation and Noise Effects on it. *Int. J. Comput. Appl.*, ***23*** (6), 17-24.

[83] Touhey, P. (1997). Yet Another Definition of Chaos. *Amer. Math. Month.*, ***104*** (5), 411-414.

[84] Vietoris, L. (1922). Bereiche zweiter Ordnung. *Monatsh. Math.*, ***32*** (1), 258-280.

[85] Weyl, H. (1913). *Die Idee der Riemannachen Flache*, Leipzig: Teubner; tercera edición totalmente revisada, Stuttgart: Teubner, 1955; nueva edición por R. Remmert, Leipzig/Stuttgart: Teubner, 1997.

[86] Wu, X., Wang, J. y Chen, G. (2015). $\mathcal{F}$-sensitivity and multi-sensitivity of hyperspatial dynamical systems. *J. Math. Anal. Appl.*, ***429*** (1), 16-26.

[87] Wu, X. y Zhu, P. (2012). Devaney chaos and Li-Yorke sensitivity for product systems. *Stud. Sci. Math. Hung.*, ***49*** (4), 538-548.

Índice alfabético