

## UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

# CARACTERIZACIÓN Y CONTROL DE UN SISTEMA DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA CON ENFOQUE AL RECHAZO ACTIVO DE PERTURBACIONES

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE Ingeniero en Mecatrónica

> PRESENTA C. Daniel Bandala Álvarez

DIRECTOR DE TESIS Dr. Jesús Linares Flores

H. Cd. de Huajuapan de León, Oaxaca; enero de 2020

Tesis presentada en enero de 2020 ante los sinodales: Dr. Jorge Luis Barahona Ávalos Dr. Carlos García Rodríguez Dr. Edgardo Yescas Mendoza

Director de Tesis: Dr. Jesús Linares Flores

Dedicado con todo mi amor y esfuerzo a mi madre, quien me lo ha dado todo para alcanzar mis sueños.

# Agradecimientos

Manifiesto un especial agradecimiento a mi madre, Georgina Álvarez Pastrana, por darme la sabiduría necesaria para tomar las mejores decisiones en mi vida y las fuerzas requeridas para nunca darme por vencido en momentos de aflicción, nada de esto hubiese sido posible sin su apoyo. Gracias por tanto.

A mis abuelos maternos, Ma. Lucia Leticia Pastrana Aguilar y José Gabriel Álvarez Montez, quienes han sido un pilar fundamental en mi desarrollo y crecimiento como persona, un enorme agradecimiento por apoyarme y animarme a cumplir mis objetivos y metas.

Quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Jesús Linares Flores, por el gran conocimiento y amor a la investigación que me ha instruido. Y a los profesores que no solo cumplieron con su labor docente, y me impartieron tópicos fuera del plan de estudios. Así también, me han enseñado valiosas lecciones de vida.

A todos mis compañeros y amigos que, de alguna manera, han contribuido en la culminación de este trabajo y a los que me han ayudado a reducir mi inexperiencia e ignorancia con sus ideas extraordinarias y buenos consejos.

Finalmente, a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por haberme permitido desarrollar mis estudios de licenciatura y formarme profesionalmente.

## Resumen

Este trabajo aborda el diseño, construcción y caracterización de un sistema de levitación magnética de un grado de libertad, el cual emplea dos electroimanes para ejercer fuerzas de reluctancia en ambas direcciones sobre un disco de acero. Se muestra el diseño detallado de la etapa de realimentación del estado del sistema y el circuito de amplificación de potencia para los actuadores, así como el algoritmo de control basado en un DSP.

Posteriormente, a partir del modelo matemático que describe la dinámica del sistema, se diseña una ley de control basada en modos deslizantes con el enfoque de rechazo activo de perturbaciones, para realizar seguimiento de una trayectoria de referencia para la posición del elemento suspendido y, al mismo tiempo, la corriente del actuador inferior es regulada para ajustar el amortiguamiento y rigidez de la suspensión.

Los parámetros invariantes en el tiempo que describen la dinámica del sistema se obtienen de manera experimental. Asimismo, se estudia el comportamiento de la densidad del flujo magnético en función de las variables que describen la fuerza de reluctancia y la robustez del controlador se analiza a través de la respuesta de la posición del elemento suspendido bajo perturbaciones internas y externas.

## Abstract

The present research work adresses the design, construction and caracterization of a one degree of freedom magnetic levitation system, which uses two electromagnets in order to generate reluctance forces in both directions. The detailed design of the state feedback subsystem and the power amplification circuit for the actuators are shown, as well as the control algorithm based on a DSP.

Subsequently, from the system dynamics mathematical model, a control law with the active disturbance rejection approach, based on sliding mode, is designed to tracking of a desired reference trajectory for the suspended element and, at the same time, the current of the lower actuator is regulated to adjust the damping and rigidity of the suspension.

The time invariant parameters that describe the dynamics of the system are experimentally obtained. In the same way, the behavior of the magnetic flux density is studied regarding on the variables that describe the reluctance force and the controller robustness is analyzed by means of the position response of the suspended element under internal and external perturbations.

# Índice general

grade	cimientos	VII
Resumen Índice de figuras X		
Intro	oducción	1
1.1.	Estado del arte	. 2
	1.1.1. Clasificación de sistemas de levitación magnética	. 5
	1.1.2. Investigación y aplicaciones en la industria	. 6
1.2.	Planteamiento del problema	. 9
1.3.	Justificación	. 10
1.4.	Hipótesis	. 11
1.5.	Objetivos	. 11
	1.5.1. Objetivo general	. 11
	1.5.2. Objetivos específicos	. 11
1.6.	Metas	. 12
1.7.	Alcances y limitaciones de la tesis	. 13
1.8.	Metodología de desarrollo	. 14
1.9.	Organización del documento de tesis	. 16
Mar	co Teórico	17
2.1.	Principio de levitación magnética	. 17
	2.1.1. Producción de un campo magnético	. 18
	2.1.2. Circuitos magnéticos	. 20
	rade sum dice dice 10 1.1. 1.2. 1.3. 1.4. 1.5. 1.6. 1.7. 1.8. 1.9. 1.9. Man 2.1.	gradecimientos         sumen         dice de figuras         dice de tablas         Introducción         1.1. Estado del arte         1.1.1. Clasificación de sistemas de levitación magnética         1.1.2. Investigación y aplicaciones en la industria         1.2. Planteamiento del problema         1.3. Justificación         1.4. Hipótesis         1.5. Objetivos         1.5.1. Objetivo general         1.5.2. Objetivos específicos         1.6. Metas         1.7. Alcances y limitaciones de la tesis         1.8. Metodología de desarrollo         1.9. Organización del documento de tesis         1.9. Organización del un campo magnética         2.1. Principio de levitación magnética         2.1.2. Circuitos magnéticos

		2.1.3.	Conversión de energía electromecánica	21
		2.1.4.	Ecuación de movimiento	22
	2.2.	Sistem	na de soporte magnético	22
		2.2.1.	Elementos de lazo de control	22
		2.2.2.	Actuadores	23
		2.2.3.	Amplificador de potencia	24
		2.2.4.	Transductores	24
	2.3.	Mater	iales ferromagnéticos	24
		2.3.1.	Composición y dominios magnéticos	25
		2.3.2.	Permeabilidad magnética	25
		2.3.3.	Comportamiento magnético	25
	2.4.	Teoría	de control	27
		2.4.1.	Acciones básicas de control	28
		2.4.2.	Variables de estado	28
		2.4.3.	Controlabilidad y observabilidad	29
		2.4.4.	Planitud diferencial	29
		2.4.5.	Observadores de estado	31
		2.4.6.	Criterio de estabilidad de Lyapunov	32
		2.4.7.	Funciones de comparación	34
3.	Dise	eño y N	Iodelado del Sistema Propuesto	35
	3.1.	Especi	ificaciones de diseño	35
	3.2.	Arqui	tectura del sistema	37
	3.3.	Partic	ión de hardware y software	38
		3.3.1.	Refinamiento de hardware	39
		3.3.2.	Refinamiento de software	41
		3.3.3.	Dibujo asistido por computadora del prototipo	42
	3.4.	Diseñ	o de etapa de potencia del sistema	43
		3.4.1.	Circuito de amplificación de potencia	44
		3.4.2.	Circuito de accionamiento del conmutador	45
	3.5.	Diseñ	o de etapa de retroalimentación del sistema	45
		3.5.1.	Sensor de posición	46
		3.5.2.	Sensor de corriente	50

	3.6.	Mode	lo matemático de sistema	52
		3.6.1.	Controlabilidad del sistema	56
		3.6.2.	Parametrización diferencial	59
	3.7.	Contro	ol por rechazo activo de perturbaciones	61
		3.7.1.	Controlador basado en modos deslizantes	61
		3.7.2.	Observador de estado extendido	64
		3.7.3.	Estabilidad de sistema en lazo cerrado	68
4.	Cara	ncteriza	ición del Sistema	75
	4.1.	Identi	ficación de parámetros del sistema	75
		4.1.1.	Parámetros mecánicos	76
		4.1.2.	Parámetros eléctricos	78
	4.2.	Caract	terización de actuadores	79
		4.2.1.	Fuerza de reluctancia magnética	80
		4.2.2.	Relación de la inductancia de devanado	82
		4.2.3.	Relación de la densidad del flujo magnético	84
		4.2.4.	Distribución de la densidad del flujo magnético	89
	4.3.	Caract	terización de sensores	91
		4.3.1.	Sensor de posición	91
		4.3.2.	Sensor de corriente	92
	4.4.	Simul	ación del sistema	94
		4.4.1.	Comportamiento del actuador	94
		4.4.2.	Simulación en lazo cerrado	95
		4.4.3.	Simulación en lazo cerrado con perturbaciones	99
5.	Plata	aforma	Experimental y Resultados	103
	5.1.	Comp	onentes de la plataforma experimental	103
		5.1.1.	Elemento suspendido	104
		5.1.2.	Electroimán CL-80/38	105
		5.1.3.	Sensor de posición LVDT	105
		5.1.4.	Amplificador de potencia y sensor de corriente	107
		5.1.5.	Controlador digital de señales	108
	5.2.	Integr	ación de hardware y software	109

		5.2.1.	Sistema de levitación magnética	109
		5.2.2.	Algoritmo de programación de software	111
		5.2.3.	Adquisición de datos	113
	5.3.	Result	ados obtenidos	114
		5.3.1.	Pruebas en lazo cerrado	115
		5.3.2.	Robustez del sistema ante perturbaciones	125
	5.4.	Discus	sión	132
6.	Con	clusion	es y Trabajo Futuro	133
	6.1.	Conclu	asiones	133
	6.2.	Princij	pales aportaciones	135
	6.3.	Trabaj	os futuros	135
A.	Diag	gramas	Esquemáticos de Simulación	137
	A.1.	Simula	ación de comportamiento de actuador	138
	A.2.	Simula	ación de sistema en lazo cerrado	139
B.	Tray	ectoria	de Seguimiento	145
	B.1.	Funció	ón de referencia	145
	B.2.	Deriva	ndas temporales	146
C.	Tarjo	etas de	Circuito Impreso	147
	C.1.	Circui	to de acondicionamiento de señal de sensor de posición	148
	C.2.	Circui	to de sensor de corriente y amplificador de potencia	149
D.	Diag	gramas	Esquemáticos de Implementación	151
Bi	bliog	rafía		157

# Índice de figuras

1.1.	Línea S1 de tren levitado magnéticamente puesto en marcha en Bei-	
	jing, China [36]	4
1.2.	Bomba turbo molecular suspendida por soporte magnético activo, Hi-	
	Mag 2400 [57]	8
1.3.	Diagrama del ciclo de vida del diseño integrado [4]	15
2.1.	Modelo de núcleo magnético sencillo [9].	19
2.2.	Lazo de control de un soporte magnético simple y sus elementos [57]	23
2.3.	a) Curva de magnetización de un núcleo ferromagnético. b) Curva	
	de magnetización en términos de densidad de flujo e intensidad del	
	campo magnético [9]	26
2.4.	Curva de histéresis en un núcleo ferromagnético [9]	27
3.1.	Diagrama del sistema de levitación magnética de un grado de libertad	
	con un par de electroimanes [57]	36
3.2.	Arquitectura del sistema propuesto.	37
3.3.	Refinamiento del subsistema de hardware	40
3.4.	Refinamiento del subsistema de software	41
3.5.	Dibujo asistido por computadora del prototipo de sistema	42
3.6.	Dibujo asistido por computadora del prototipo de sistema	43
3.7.	Circuito de amplificación de potencia para electroimán	44
3.8.	Circuito de accionamiento del conmutador de potencia	45
3.9.	Diagrama de funcionamiento del transformador diferencial variable	
	lineal [55]	46
3.10.	Circuito de acondicionamiento para la señal del devanado primario	
	del sensor LVDT.	48

#### XVIII

3	.11.	Circuito de acondicionamiento para la señal de los devanados secun-	
		darios del sensor LVDT	49
3	.12.	Circuito de sensor de corriente de parte alta	50
3	.13.	Modelo promedio del sistema de levitación magnética de un grado de	
		libertad	52
3	.14.	Diagramas de los circuitos de actuadores cuando los interruptores se	
		encuentran cerrados ( $u_1 = u_2 = 1$ )	53
3	.15.	Diagramas de los circuitos de actuadores cuando los interruptores se	
		encuentran abiertos ( $u_1 = u_2 = 0$ )	54
4	.1.	Fuerza de reluctancia magnética del actuador superior.	80
4	.2.	Fuerza de reluctancia magnética del actuador inferior	81
4	.3.	Relación de la inductancia para circuito magnético del actuador supe-	
		rior	82
4	.4.	Relación de la inductancia para circuito magnético del actuador inferior.	83
4	.5.	Comportamiento de la densidad del flujo magnético del electroimán	
		superior en función de la corriente	85
4	.6.	Comportamiento de la densidad del flujo magnético del electroimán	
		superior en función de la distancia	86
4	.7.	Comportamiento de la densidad del flujo magnético del electroimán	
		inferior en función de la corriente.	87
4	.8.	Comportamiento de la densidad del flujo magnético del electroimán	
		inferior en función de la distancia.	88
4	.9.	Geometría elaborada para simulación de la distribución de la densi-	
		dad del flujo magnético del sistema.	89
4	.10.	Resultados de simulación para la distribución de la densidad del flujo	
		magnético del sistema.	90
4	.11.	Relación del voltaje de salida para el sensor de posición LVDT	91
4	.12.	Relación del voltaje de salida del sensor de corriente para actuador	
		superior.	92
4	.13.	Relación del voltaje de salida del sensor de corriente para actuador	
		inferior	93

4.14.	Resultado de simulación para la dinámica de la corriente del actuador	
	del sistema.	94
4.15.	Resultado de simulación para la posición del elemento suspendido	96
4.16.	Resultado de simulación para las corrientes de los electroimanes	97
4.17.	Resultado de simulación para las señales de control	97
4.18.	Resultado de simulación para las señales discontinuas de los contro-	
	ladores del sistema.	98
4.19.	Resultado de simulación para las variables estimadas de incertidum-	
	bre del sistema.	98
4.20.	Resultado de simulación para la posición del elemento suspendido	
	del sistema perturbado.	99
4.21.	Resultado de simulación para las corrientes de los actuadores del sis-	
	tema perturbado.	100
4.22.	Resultado de simulación para las señales de control del sistema per-	
	turbado	101
4.23.	Resultado de simulación para las señales discontinuas de los contro-	
	ladores del sistema perturbado	101
4.24.	Resultado de simulación para las variables estimadas de incertidum-	
	bre del sistema perturbado.	102
5.1.	Elemento suspendido para sistema de suspensión electromagnética.	104
5.2.	Actuador del sistema: electroimán CL-80/35	105
5.3.	Sensor de posición lineal construido para sistema de levitación mag-	
	nética	106
5.4.	Circuito implementado de acondicionamiento para señal del sensor	
	de posición lineal	106
5.5.	Circuito implementado de amplificador de potencia y sensores de co-	
	rriente para actuadores.	107
5.6.	Kit experimental de procesador digital de señales con microcontrola-	
	dor TMS320F28335	108
5.7.	Plataforma experimental del sistema	110
5.8.	Conexiones de señales analógicas y digitales para la plataforma expe-	
	rimental	111

5.9. Diagrama esquemático del algoritmo de programación para el contro-
lador digital de señales.
5.10. Interfaz DSP Oscilloscope para la adquisición de datos por comunica-
ción serial
5.11. Regulación de la posición del elemento suspendido
5.12. Corriente de los actuadores del sistema experimental
5.13. Señales de control para los actuadores del sistema experimental 116
5.14. Variable estimada $\eta$ para la incertidumbre asociada a la posición del
elemento suspendido.
5.15. Variable estimada $ ho$ para la incertidumbre asociada a la corriente del
actuador inferior
5.16. Error de regulación $\widetilde{F}_1$ para la posición del elemento suspendido del
sistema experimental, $x_1$
5.17. Error de regulación $\widetilde{F}_2$ para la corriente del actuador inferior del siste-
ma experimental, $x_4$
5.18. Índice de desempeño para la regulación de la primera salida plana, $F_1$ . 119
5.19. Índice de desempeño para la regulación de la segunda salida plana, $F_2$ . 119
5.20. Seguimiento de trayectoria para la posición del elemento suspendido. 120
5.21. Corriente de los actuadores del sistema experimental
5.22. Señales de control para los actuadores del sistema experimental 122
5.23. Variable estimada $\eta$ para la incertidumbre asociada a la posición del
elemento suspendido.
5.24. Variable estimada $ ho$ para la incertidumbre asociada a la corriente del
actuador inferior
5.25. Error de seguimiento $\widetilde{F_1}$ para la posición del elemento suspendido del
sistema experimental, $x_1$
5.26. Error de regulación $\widetilde{F}_2$ para la corriente del actuador inferior del siste-
ma experimental, $x_4$
5.27. Índice de desempeño para el seguimiento de la primera salida plana, $F_1$ .124
5.28. Índice de desempeño para la regulación de la segunda salida plana, $F_2$ . 124
5.29. Respuesta de la posición del elemento suspendido bajo perturbación
del flujo magnético

5.30.	Corriente de los actuadores del sistema experimental bajo perturba-	
	ción del flujo magnético.	126
5.31.	Señales de control para actuadores del sistema experimental bajo per-	
	turbación del flujo magnético.	126
5.32.	Respuesta de la posición del elemento suspendido bajo un cambio en	
	la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético	127
5.33.	Corriente de los actuadores del sistema experimental bajo un cambio	
	en la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético	127
5.34.	Señales de control del sistema experimental bajo un cambio en la masa	
	y el coeficiente del acoplamiento magnético.	128
5.35.	Respuesta de la posición del elemento suspendido bajo un cambio en	
	la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético	129
5.36.	Corriente de los actuadores del sistema experimental bajo un cambio	
	en la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético	129
5.37.	Señales de control del sistema experimental bajo un cambio en la masa	
	y el coeficiente del acoplamiento magnético.	130
5.38.	Respuesta de la posición del elemento suspendido ante perturbación	
	del flujo magnético.	130
5.39.	Corriente de los actuadores del sistema experimental ante perturba-	
	ción del flujo magnético.	131
5.40.	Señales de control del sistema experimental ante perturbación del flu-	
	jo magnético	131
Δ1	Diagrama esquemático para la simulación de comportamiento del ac-	
11.1.	tuador	138
Δ2	Diagrama esquemático general para la simulación de comportamien-	150
11.2.	to de los estados del sistema en lazo cerrado	130
Δ3	Diagrama esquemático del modelo dinámico para la simulación de	107
11.0.	comportamiento del sistema en lazo cerrado	140
Δ Δ	Diagrama esquemático del controlador para la simulación de compor-	110
1 1. 1.	tamiento del sistema en lazo cerrado	141
Α5	Diagrama esquemático de la travectoria de seguimiento para la simu-	
1 1.0.	lación del sistema en lazo cerrado	142
		174

A.6.	Diagrama esquemático de los estimadores para la simulación del sis-	
	tema en lazo cerrado	. 143
A.7.	Diagrama esquemático para el cálculo de las ganancias del estimador	
	para la simulación del sistema en lazo cerrado.	. 144
C.1.	Diagrama del circuito impreso del acondicionamiento de las señales	
	del sensor de posición.	. 148
C.2.	Diagrama del circuito impreso del sensor de corriente y amplificador	
	de potencia para los actuadores	. 149
D.1.	Diagrama esquemático del controlador para la implementación del	
	sistema en lazo cerrado.	. 152
D.2.	Diagrama esquemático de los estimadores para la implementación del	
	sistema en lazo cerrado.	. 153
D.3.	Diagrama esquemático de la trayectoria de seguimiento para la im-	
	plementación del sistema en lazo cerrado.	. 154
D.4.	Configuración del bloque del reloj interno del procesador digital de	
	señales	. 155
D.5.	Configuración del bloque de comunicación serial del procesador digi-	
	tal de señales.	. 155

# Índice de tablas

3.1.	Componentes y características del amplificador de potencia	44
3.2.	Requerimientos de diseño para el sensor de posición	47
3.3.	Requerimientos de diseño para el sensor de corriente	51
4.1.	Parámetros del comportamiento mecánico del sistema.	78
4.2.	Parámetros del comportamiento eléctrico del sistema	78
4.3.	Características principales del actuador del sistema	79
4.4.	Coeficiente de acoplamiento para la inductancia de los actuadores del	
	sistema	84
4.5.	Constantes de proporcionalidad de la densidad de flujo magnético del	
	electroimán superior en función de la corriente	85
4.6.	Constantes de proporcionalidad de la densidad de flujo magnético del	
	electroimán inferior en función de la corriente	87
4.7.	Ganancias del controlador y observador para la simulación del siste-	
	ma en lazo cerrado.	95
5.1.	Ganancias del controlador y observador para la implementación del	
	sistema en lazo cerrado.	114

## Capítulo 1

## Introducción

Junto con el crecimiento demográfico y el desarrollo tecnológico, llega el correspondiente incremento de demanda energética en los distintos campos de aplicación. Desde necesidades básicas, hasta como recurso básico en la producción industrial, y cuya solución ha sido todo un reto para los ingenieros, físicos y matemáticos involucrados en dicho sector. Para responder a tal demanda se requiere de una producción apropiada, la cual se ve favorecida con crecimiento y desarrollo en el ámbito tecnológico y científico. De ahí que, las estrategias energéticas, en función del tipo de producción, se encuentren sujetas a la materia prima y las características geográficas con las que se disponga, dando como resultado centrales geotérmicas, hidroeléctricas, eólicas, nucleoeléctricas, entre otras. Por otro lado, surge la constante búsqueda del uso eficiente de la potencia electromecánica, como una solución al problema energético, sobre todo en procesos industriales dado que suelen disipar una cantidad considerable de dicho recurso. En particular, los principales generadores de uso improductivo de energía son los efectos de rozamiento de contacto y transmisión de vibraciones en los mecanismos empleados en determinados sistemas electromecánicos. Especialmente, aquellos que involucran el uso de turbo maquinaria de alta potencia. A causa de ello, a inicios del siglo anterior, se origina una solución revolucionaria y bastante peculiar que emplea el uso de fuerzas compensadoras a través de campos magnéticos, al que se denominó tecnología de levitación magnética o levitador magnético. En dichos sistemas no existe contacto físico entre la parte móvil del mecanismo y la parte fija permitiendo una operación sin lubricación y sin mecanismo motriz. Además, una ventaja particular que se presenta en el uso de los sistemas de levitación magnética es la capacidad de controlar activamente la dinámica

del elemento suspendido. En consecuencia, tales propiedades permiten minimizar el uso ineficiente de la energía en procesos de producción.

Para obtener los resultados deseados, al implementar los sistemas mencionados anteriormente, es necesario regular la fuerza compensadora del cojinete mediante la manipulación del fenómeno que la produce, el campo magnético. Esto es posible utilizando devanados como electroimanes, los cuales tienen la capacidad de producir campos magnéticos de magnitud y dirección variable. Sin embargo, en los sistemas de levitación magnética se recurre a fuerzas de carácter electromagnético, cuya intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen de la fuente, por lo que se presentan características no lineales e inestables en el comportamiento global del sistema, de modo que se requiere una etapa de control y monitoreo del estado completo o parcial de este último, para manipular adecuadamente el elemento suspendido.

En el presente trabajo de investigación se aborda el diseño e implementación de un esquema de control, con el enfoque al rechazo activo de perturbaciones, para realizar seguimiento de un sistema de levitación magnética. En este capítulo introductorio se presentan de manera breve los antecedentes, el planteamiento del problema y la justificación del trabajo de tesis. Además, se plantea la hipótesis, los objetivos y metas establecidos para el trabajo de investigación. Por otro lado, se muestra la metodología implementada para el desarrollo, los alcances y limitantes de la misma, y finalmente se presenta la organización del documento de tesis.

#### 1.1. Estado del arte

La idea de manipular un cuerpo en suspensión sin ningún contacto físico, mediante el uso de fuerzas magnéticas, es un viejo anhelo del ser humano. Sin embargo, no ha sido fácil lograrlo. A principios del siglo XX, con el desarrollo de la teoría del electromagnetismo de Maxwell, se obtiene una nueva perspectiva de la interacción entre el campo eléctrico y el campo magnético, además de proporcionar una poderosa herramienta matemática para obtener la evolución temporal de este tipo de fenómenos. Así, en 1937, Kemper aplica para una patente de un sistema de levitación magnética, una posible solución para el transporte de cargas pesadas [28]. Al siguiente año, expone un experimento en el cual desplaza una carga de 210 Kg, logrando una suspensión de 15 *mm*, empleando un electroimán como actuador, sensores inductivos y capacitivos para la retroalimentación del sistema, y amplificadores de válvula para el controlador [29]. Desde luego, este experimento es el predecesor de los vehículos levitados magnéticamente (Maglev), los cuales fueron desarrollados a mediados del siglo pasado. Por otro lado, Beams y Holmes implementan en 1946 un sistema experimental, en la Universidad de Virginia, para suspender magnéticamente bolas milimétricas de acero y hacerlas girar a altas velocidades angulares, para someter a prueba la resistencia mecánica de su material [3]. Del mismo modo, la investigación en el área de la ingeniería aeroespacial ha permitido desarrollar ruedas de reacción suspendidas magnéticamente para el control de altitud de satélites orbitales [59], y estabilización giroscópica de naves espaciales.

El desarrollo científico y el crecimiento del estudio que involucra la tecnología de levitación magnética, han permitido utilizar dichos sistemas en aplicaciones industriales y de investigación, al aprovechar la propulsión del campo magnético y reduciendo o eliminando la fricción que las fuerzas de contacto producen en la superficie del elemento móvil. Asimismo, con la llegada de los conmutadores electrónicos basados en semiconductores a mediados del siglo XX y el desarrollo de la teoría moderna de control y sus distintas técnicas de análisis y diseño, ha sido posible diseñar e implementar sistemas con mayor grado de complejidad, permitiendo reducir costos y tiempos de producción en el sector industrial. Gracias a ello, ha sido posible enfocar la investigación de dicha tecnología en distintas áreas de la ingeniería, tal como en el diseño y construcción de cojinetes magnéticos para el rotor de motores y generadores eléctricos, o en el caso de la suspensión libre de vibraciones para componentes sensibles y frágiles, como por ejemplo dispositivos ópticos, que requieren una exactitud milimétrica. Por otra parte, ha sido de gran interés el desarrollo de la tecnología de levitación magnética utilizada por los vehículos levitados magnéticamente, con el objetivo de obtener un transporte con mayor velocidad y eficiencia. El desarrollo del tren Maglev se basa en el progreso de nuevas tecnologías de ingeniería eléctrica y su integración y, como una tecnología de transporte totalmente nueva, presenta ventajas significativas respecto a los sistemas de transporte convencionales, debido a que es el único transporte terrestre de alta velocidad capaz de alcanzar

hasta 500 km/h bajo un menor consumo de potencia [39]. Recientemente, una ruta de transporte público, entre el centro de Shanghai y el Aeropuerto de Pudong, que utiliza el principio de levitación magnética, ha sido puesta en operación. En la Figura 1.1 se muestra un vagón de la línea S1 del tren de suspensión magnética de Beijing, la cual fue puesta en operación a finales del 2017 y cuya extensión total es de 10.2 km compuesto de 8 estaciones [36]. El diseño y construcción de nuevas rutas de transporte utilizando vehículos suspendidos magnéticamente ha sido considerado últimamente por distintos países como una alternativa a los ineficientes métodos de transporte convencionales [33]. En Estados Unidos el sistema propuesto Maglev 2000 se encontraba basado en cuadrupolos magnéticos superconductores que permiten al vehículo suspendido desplazarse sobre superficies planas tal como rieles, con paneles de aluminio para la retroalimentación [68].



FIGURA 1.1: Línea S1 de tren levitado magnéticamente puesto en marcha en Beijing, China [36].

A grandes rasgos, las técnicas de levitación magnética pueden ser clasificadas en dos categorías, la suspensión electrodinámica (SED) y la suspensión electromagnética (SEM), categorizadas por la manera en que se interpretan las fuerzas de compensación del soporte magnético [73]. En el siguiente apartado se describe una clasificación detallada de los sistemas de levitación magnética.

#### 1.1.1. Clasificación de sistemas de levitación magnética

Actualmente, existe una numerosa variedad de arreglos para generar fuerzas de campo con el fin de soportar o suspender un cuerpo sin ningún contacto, incluso aunque este no pueda ser suspendido de manera libre o estable, al menos la levitación se logra en algunos de sus grados de libertad. A continuación, se presenta una clasificación de sistemas de levitación magnética, propuesta en [5], en donde se distinguen dos grupos principales por la manera en que las fuerzas pueden ser calculadas y representadas: la fuerza de reluctancia y la fuerza de Lorentz. Desde luego, el principio físico, la causa del efecto magnético en el movimiento de cargas eléctricas, es el mismo para ambos grupos. En el primer caso, la fuerza de reluctancia actúa de tal manera que tiende a disminuir la reluctancia del arreglo mecánico, y se deriva de la energía electromagnética almacenada en el campo magnético del sistema siendo convertida en energía mecánica [57]. Por otro lado, la segunda principal categoría, caracterizada por la fuerza de Lorentz, se basa en la fuerza inducida sobre una carga en movimiento en presencia de un campo magnético. De ahí que, en los sistemas de levitación magnética que utilizan este principio se requiere de un conductor por el cual se transporte una corriente de electrones y un campo magnético variable.

En la primera categoría, caracterizada por el uso de la fuerza de reluctancia, se encuentran los soportes basados en fuerza de reluctancia activos. Este tipo de sistemas requieren de una retroalimentación de control para lograr una suspensión estable en donde el campo magnético, el flujo magnético, o en el caso de los soportes con auto retroalimentación, la inductancia del arreglo es controlada. En cambio, los soportes de levitación basado en circuito *RLC* sintonizado consigue una levitación estable con una rigidez característica, al excitar la red *LC* cerca de su punto de resonancia de manera que esta se presente cuando el elemento suspendido se aleje de su posición nominal provocando un aumento en la corriente del circuito y retornando al elemento de vuelta a su estado nominal. Por otro lado, en una configuración estacionaria no es posible estabilizar la posición de un cuerpo en suspensión mediante imanes permanentes, para lograrlo son requeridas fuerzas giroscópicas. Y finalmente, dentro del primer grupo principal de sistemas de levitación magnética se presenta el uso de una propiedad que presentan ciertos materiales a temperaturas cercanas al cero absoluto, denominada superconductividad, donde el material permite el movimiento libre de cargas eléctricas sin resistencia, es decir, sin pérdida alguna y, por tanto, es posible producir campos magnéticos potentes totalmente eficientes.

La levitación electrodinámica se encuentra en la segunda categoría, y se logra cuando corrientes de Foucault elevadas son inducidas a través de un movimiento relativamente rápido entre el estator y el cuerpo en movimiento. Del mismo modo, otro tipo de sistemas de levitación magnética basado en la fuerza de Lorentz son los soportes de corriente alterna, generando un sistema de levitación pasivo que, a diferencia del anterior, el movimiento relativo es sustituido por un flujo magnético alternante. Luego, es posible obtener la interacción entre la corriente alterna y la corriente inducida mediante un sistema activo [57]. De manera similar a un motor de inducción, se inducen fuerzas axiales para soportar el rotor, en lugar de tangenciales para generar un movimiento angular. Por último, dentro de la segunda categoría principal, se encuentra un sistema análogo al anterior con la diferencia de que el rotor que contiene las corrientes inducidas es sustituido por un rotor magnetizado.

#### 1.1.2. Investigación y aplicaciones en la industria

Los sistemas de levitación magnética son una prometedora tecnología en aplicaciones de control de movimiento activo de alta precisión. En efecto, la evidente ventaja de la integración de soportes de levitación magnética activos en maquinaria industrial desde hace un par de décadas ha motivado el profundizar el estudio en nuevos diseños de arreglos con electroimanes para generar fuerzas de campo, así como el desarrollo de técnicas de diseño de controladores para regulación y seguimiento de posicionamiento, y ajuste de parámetros variables como rigidez y amortiguamiento del elemento suspendido. Luego, la popularidad del desarrollo de la teoría moderna de control junto con técnicas avanzadas de diseño como el método de modos deslizantes permiten una exploración más profunda en los sistemas de control no lineales tal como los soportes de levitación magnéticos [10], [37]. En 1996, se describe el diseño y simulación de un control adaptativo de auto centrado de un cojinete magnético activo considerando una carga desbalanceada desconocida en el rotor [27]. Al siguiente año, Won-Jong Kim y David Trumper presentan un experimento de un controlador multivariable óptimo aplicado a un levitador magnético planar de 6 grados de libertad como una solución al posicionamiento para fotolitografía en la manufactura de semiconductores [32]. Asimismo, en [6], [70] y [8] se presenta el diseño e implementación de esquemas de control basados en la información de la posición sin utilizar sensor para dicha variable. En [65] se expone el diseño de un controlador desacoplado para un rotor suspendido magnéticamente de alta velocidad utilizando el método de rechazo activo de perturbaciones lineal. Y en [52] se desarrolla un algoritmo mejorado de control para sistemas levitación magnética

Por otra parte, a nivel nacional, en los centros de investigación del Instituto Politécnico Nacional (IPN) se han desarrollado contribuciones en el área, como en la construcción y control de sistemas de levitación magnética de un grado de libertad mediante técnicas clásicas de control recurriendo a una linealización aproximada del sistema [21], y en el diseño de un controlador no lineal utilizando la técnica de linealización exacta por retroalimentación junto con compensadores basados en redes neuronales para la estimación de dinámicas no modeladas o perturbaciones en el sistema [14]. Asimismo, en [46] se presenta un estudio comparativo entre controladores clásicos lineales y controladores basados en técnicas no lineales como el método de linealización exacta. Desde luego, para digitalizar la ley de control diseñada se han integrado distintas plataformas dependiendo del tipo de tarjeta de procesamiento digital que se utilice. En el trabajo [62] se emplea la plataforma LabView para implementar un controlador clásico PID a un sistema de levitación magnética.

En cambio, dentro del ámbito de producción industrial, se han realizado contribuciones esenciales en la aplicación de cojinetes magnéticos desarrolladas por las compañías Société de Mécanique Magnétique (S2M) y Habermann [17]. En 1975 se obtienen soluciones teóricas y experimentales para el amortiguamiento activo de turbo sistemas auto perturbados con vibraciones [56]. En efecto, del creciente progreso de la tecnología que integran los sistemas de levitación magnética y su variada demanda en el sector industrial e ingenieril en las últimas décadas surgen los primeros esfuerzos de estandarizar el vocabulario y el rendimiento de los cojinetes magnéticos activos [1]. De esta manera, los beneficios de los sistemas de soporte magnético activo en cuanto al uso eficiente de la energía se encuentran particularmente prácticos en aplicaciones como sistemas de vacío y salas limpias, máquinas herramienta, dispositivos médicos, turbomaquinaria y soportes superconductores [57]. En la Figura 1.2 se muestra una bomba turbo molecular suspendida con un soporte magnético de la marca HiMag. Recientemente, se han enfocado esfuerzos en investigación concerniente a la aplicación de soportes magnéticos en turbinas aéreas para la generación de propulsión o energía eléctrica para toda la aeronave [11]. En [48] se desarrolla un motor de rodamiento con cojinete magnético para aplicaciones de bombas de químicos de alta pureza, y en [58] se diseña un controlador de corriente proporcional e integral para un soporte de levitación magnética.



FIGURA 1.2: Bomba turbo molecular suspendida por soporte magnético activo, HiMag 2400 [57].

Del mismo modo, en [34] se muestra un sistema novedoso y original de un soporte magnético para turbinas de viento de eje vertical. Mientras tanto, se han enfocado esfuerzos en investigación en el diseño de sistemas de control de posicionamiento de trenes Maglev basados en fusión de múltiple información. En [71] se diseña un estimador de Kalman para obtener una mayor precisión en las variables medidas por múltiples sensores de un sistema de levitación para un tren, y en [45] se diseña un controlador por retroalimentación del estado para orientar activamente un sistema de tren de levitación magnética de alta velocidad. Recientemente, en [63] se implementa un esquema de control robusto de posición adaptativo difuso neuronal para un sistema de tren Maglev, presentando mejoras significativas en la regulación de posición respecto a los controladores diseñados mediante métodos clásicos.

#### 1.2. Planteamiento del problema

La rigidez y amortiguamiento de un dispositivo de suspensión magnética dependen directamente de la ley de control diseñada para este. Sin embargo, el comportamiento no lineal inherente del sistema, la inestabilidad en lazo abierto y las auto inductancias e inductancias mutuas variantes en el tiempo hacen que el control de un sistema de levitación magnética sea un desafío [66]. Asimismo, todo sistema definido por ecuaciones diferenciales que interactúa con un entorno dinámico es susceptible a ser perturbado por este, además del ruido eléctrico introducido al sistema debido a la instrumentación de control utilizada para retroalimentar el estado de este último.

Las perturbaciones o vibraciones en un sistema de levitación magnética pueden ser eliminadas variando la rigidez de este mediante control robusto [25]. En este trabajo de investigación se desarrolla el diseño, construcción y caracterización de un sistema de levitación magnética de un grado de libertad, compuesto de dos electroimanes para ejercer fuerzas de compensación en ambas direcciones. Posteriormente, se diseña e implementa una ley de control basada en modos deslizantes con el enfoque al rechazo activo de perturbaciones, para estabilizar, realizar seguimiento y regular los estados del sistema, de manera que se minimicen o eliminen los efectos de perturbaciones endógenas y exógenas. Como se ha mencionado, el principal problema recae en las incertidumbres del modelado y el comportamiento no lineal de la planta, y una linealización aproximada del modelo para tratar a este con técnicas clásicas de control genera un deterioro en la exactitud con el comportamiento real de la planta, inclusive es probable que el sistema sea inestable ante perturbaciones externas [69]. Por otra parte, para el modelado y caracterización de la plataforma del sistema se consideran los parámetros característicos que determinan su comportamiento dinámico, y son determinados de manera experimental.

### 1.3. Justificación

Desde hace más de tres décadas los sistemas de levitación magnética se han utilizado en diversas aplicaciones en el sector industrial de manera exitosa, tales como en trenes de pasajeros de alta velocidad, rodamientos sin fricción, aislamiento de maquinaria sensible, túneles de viento por levitación y fotolitografía [35], debido principalmente al ahorro energético que implica su práctica [18]. Además, en un sistema de levitación activo es posible ajustar los parámetros de amortiguamiento y rigidez del soporte, atenuación de fuerzas en cargas rotatorias desbalanceadas, monitoreo y generación de fuerzas de excitación y posicionamiento estático independiente a la carga [57]. En consecuencia, los especialistas en el tema señalan un incremento significativo en la importancia de la tecnología de levitación magnética, en las siguientes dos décadas, en las áreas de transporte de pasajeros de alta velocidad, levitación magnética urbana, tecnología de levitación magnética en edificios y espacios públicos, y aplicaciones militares [67]. Por otro lado, como se plantea en la sección anterior, la principal dificultad presente en el diseño de un controlador de regulación o seguimiento para un sistema de levitación magnética es el comportamiento no lineal de la planta. Sin embargo, existen escasos trabajos registrados en los cuales se utilicen técnicas no lineales de control, con el enfoque al rechazo activo de perturbaciones, para regular y realizar seguimiento de una trayectoria en un sistema de levitación magnética, puesto que se suele recurrir a una linealización del sistema alrededor de un punto de equilibrio constante.

Ahora bien, en la Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM) no se encuentran trabajos previos a esta investigación en la que se diseñe e implemente una ley de control de estructura variable, con enfoque al rechazo activo de perturbaciones, a un sistema de levitación magnética de un grado de libertad. Por lo que se encuentra como una motivación el impulsar la investigación en esta área de control aplicado a sistemas de levitación magnética. Finalmente, la plataforma experimental, diseñada y construida para la evaluación de los resultados experimentales de este trabajo de investigación, puede ser utilizada a futuro con motivos pedagógicos dentro y fuera de la universidad.

## 1.4. Hipótesis

Con base en los apartados anteriores, donde se describe la problemática y la solución que se busca implementar a esta, se establece la siguiente hipótesis para el presente trabajo de investigación:

Es posible modelar, caracterizar y aproximar el comportamiento dinámico de un sistema de levitación magnética de un grado de libertad con dos actuadores, tal que es factible diseñar un controlador robusto para seguimiento, basado en modos deslizantes con el enfoque al rechazo activo de perturbaciones, para estabilizar y realizar seguimiento del sistema.

### 1.5. Objetivos

En esta sección se presenta el objetivo general establecido para el presente trabajo de investigación, y se determinan los objetivos específicos de la misma.

#### 1.5.1. Objetivo general

Diseñar e implementar una ley de control robusto con el enfoque al rechazo activo de perturbaciones a un sistema de levitación magnética de un grado de libertad.

#### **1.5.2.** Objetivos específicos

- Determinar los requerimientos de diseño estructural y funcional para la planta experimental de sistema de levitación magnética de un grado de libertad.
- Diseñar e implementar la instrumentación requerida para el sistema de control.
- Caracterizar y calibrar los sensores de retroalimentación de estado del sistema.
- Obtener el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del sistema de suspensión electromagnética.
- Obtener el comportamiento de la fuerza de reluctancia y la densidad de flujo magnético de los actuadores del sistema.

- Diseñar la ley de control por rechazo activo de perturbaciones para el sistema de levitación magnética.
- Simular el comportamiento dinámico del sistema en conjunto con la ley de control y los estimadores en una plataforma de software.
- Integrar los elementos estructurales y los componentes de la plataforma experimental.
- Diseñar y programar el algoritmo de procesador digital de señales para el microcontrolador TMS320F28335 del sistema de control.
- Implementar y evaluar la ley de control en la plataforma experimental del sistema de levitación magnética.

### 1.6. Metas

Para determinar la efectividad de las actividades de desarrollo de investigación, en virtud de los objetivos del apartado anterior, es factible establecer las siguientes metas del trabajo de investigación:

- Ecuaciones de la ley de control basada en modos deslizantes con enfoque al rechazo activo de perturbaciones para regulación del sistema.
- Parámetros característicos de la dinámica del sistema de levitación magnética de un grado de libertad.
- Gráficos de simulación del comportamiento dinámico del sistema.
- Planta experimental del sistema de suspensión electromagnética.
- Algoritmo de programación del procesador digital de señales del sistema de control.
- Margen de eficiencia e índice de desempeño del controlador diseñado para sistema de levitación magnética.
# 1.7. Alcances y limitaciones de la tesis

De acuerdo con el planteamiento del problema del presente trabajo de investigación, tomando en cuenta el objetivo de desarrollo del mismo, se plantean las delimitaciones de la tesis que acotan el alcance de las actividades y metas de la investigación. Primeramente, se delimita la caracterización y el control no lineal por rechazo activo de perturbaciones del sistema de suspensión electromagnética de únicamente un grado de libertad de manera que se simplifique el diseño y la caracterización de la planta experimental, así como el análisis y diseño del sistema de control. Del mismo modo, a disposición de las características de los actuadores del sistema, se restringe el desplazamiento lineal del elemento suspendido del sistema a una distancia máxima de 10 milímetros. Asimismo, la presente investigación analiza la caracterización de la dinámica de los electroimanes utilizados para el sistema de levitación magnética y no discute el diseño y la construcción de dichos actuadores. Por último, para los observadores lineales de estado extendido, que se diseñan para estimar las perturbaciones e incertidumbres del sistema, se agrega un único integrador para evitar una estabilidad crítica y reducir la complejidad de la sintonización en dichos estimadores, considerando que la frecuencia de muestreo del controlador digital es lo suficientemente grande para que estas señales se aproximen a su valor real. Desde luego, se realiza la conjetura de que la función real y sus derivadas son acotadas y continuamente diferenciables en todo momento.

Por otro lado, el desarrollo del trabajo de investigación queda restringido por las siguientes limitaciones de tesis en las que se consideran los recursos de carácter económico y de equipo técnico disponible para la investigación.

- La precisión y resolución del monitoreo en tiempo real del estado del sistema de levitación magnética están sujetos a la calidad y, por tanto, al precio de la instrumentación de control utilizada en la planta experimental.
- La eficiencia de los actuadores del sistema de control se encuentra restringida por las pérdidas del material y la geometría de estos.

 El presupuesto del trabajo de investigación se limita al disponible otorgado por el Instituto de Electrónica y Mecatrónica (IEM) de la institución educativa de procedencia y el autor de la presente investigación.

# 1.8. Metodología de desarrollo

Dentro de este apartado se describe la metodología de desarrollo a seguir para el diseño del sistema de control. En el presente trabajo de investigación se utiliza la metodología de desarrollo para sistemas embebidos propuesta por Arnold S. Berger en [4], la cual se compone de siete fases como se muestra en la Figura 1.3.

- Fase 1. Especificaciones de diseño: en esta primera fase se delinean los requerimientos, especificaciones y herramientas necesarias para diseñar e implementar el sistema propuesto, con el objetivo de cumplir con las tareas de caracterización y control por rechazo activo de perturbaciones del sistema de levitación magnética de un grado de libertad, así como de asegurar su correcto funcionamiento.
- Fase 2. Partición hardware y software: esta fase consiste en una vista general de cómo resolver el problema, se comienza a diferenciar la etapa del sistema que es posible implementar con hardware y la etapa que es posible implementar con software a partir de percibir al sistema como un elemento de proceso únicamente de entradas y salidas.
- Fase 3. Iteraciones para refinar la partición: en esta fase cada etapa de hardware y software de la fase anterior es percibida también como un elemento de proceso en la que se realizan iteraciones para detallar y subdividir las tareas hasta conseguir los elementos base de hardware y software con los que se habrá de trabajar. Aquí se espera identificar subsistemas que sean conocidos para su diseño.
- Fase 4. Diseño detallado del hardware y software: en esta fase se realizan las tareas de cada parte hardware y software en las que se ha dividido el sistema en las fases previas. Se realizan pruebas funcionales de la etapa hardware y

simulaciones de los controladores en la parte software del sistema. Ambas partes son independientes, por lo que se trabajan en paralelo.

Fase 5. Integración hardware y software: durante esta fase se integran las etapas de hardware y software en un solo sistema, y se detallan los aspectos finales de la planta experimental del sistema completo para realizar pruebas de funcionamiento.



FIGURA 1.3: Diagrama del ciclo de vida del diseño integrado [4].

- Fase 6. Pruebas: en esta fase se realizan todas las pruebas al sistema de levitación magnética para validar el cumplimiento de las especificaciones iniciales. La culminación de esta investigación se lleva a cabo al obtener todos los resultados. A partir de estos, se acepta o rechaza la hipótesis propuesta y se abre la discusión para plantear las conclusiones de la investigación realizada.
- Fase 7. Mantenimiento y actualización: esta fase define un seguimiento de mejora continua y mantenimiento del producto obtenido. Dado que el objetivo de esta investigación se cumple al finalizar la fase 6, se propone esta fase como línea futura de investigación.

# 1.9. Organización del documento de tesis

El presente documento de tesis es desarrollado en 6 capítulos. En el primer capítulo, como se ha mostrado, se aborda el preámbulo de la investigación. En el segundo capítulo se presenta el contenido teórico empleado en el diseño, caracterización y control de un sistema de suspensión electromagnética. Seguidamente, en el tercer capítulo se muestra el diseño de los elementos principales del sistema propuesto y el modelado del comportamiento dinámico del mismo, así como el diseño de la ley de control. Después, en el cuarto capítulo se desarrolla la caracterización del sistema y la validación en simulación por computadora de su respectivo comportamiento. Posteriormente, en el quinto capítulo se abordan los resultados obtenidos de la plataforma experimental del sistema propuesto. Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones del trabajo de investigación y los trabajos futuros propuestos.

# Capítulo 2

# Marco Teórico

En este segundo capítulo se presenta el contenido teórico requerido para desarrollar la investigación analítica y experimental del presente trabajo de investigación. Inicialmente, se describe el principio de levitación magnética detallando las causas de los fenómenos electromagnéticos involucrados en un sistema de soporte magnético. Luego, se muestran los componentes principales, a grandes rasgos, que componen un sistema de levitación magnética. Y por último, se presentan los fundamentos de la teoría de control que se utilizan en el diseño de la ley de control para el sistema de suspensión electromagnética que se propone en este trabajo.

# 2.1. Principio de levitación magnética

El principio físico fundamental en el que se basan los sistemas de levitación magnética es la conversión de la energía electromagnética almacenada en un campo magnético en energía mecánica, de manera que se generen fuerzas de campo, atractivas o repulsivas según sea el caso, para producir un empuje sobre el elemento suspendido y contrarreste su peso. Por tanto, para lograr una suspensión estable se requiere generar un campo magnético variable sobre el elemento por levitar. Asimismo, los campos magnéticos son el mecanismo fundamental para convertir la energía de una forma a otra en motores, generadores y transformadores. Existen cuatro principios básicos que describen cómo se utilizan los campos magnéticos [9]:

1. Un conductor que porta corriente produce un campo magnético a su alrededor.

- 2. Un campo magnético variable en el tiempo induce un voltaje en una bobina de alambre si pasa a través de ella.
- 3. Un conductor que porta corriente en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza inducida sobre él.
- 4. Un conductor eléctrico que se mueva en presencia de un campo magnético tendrá un voltaje inducido en él.

Es importante mencionar que, dependiendo de la manera en que se genere, la densidad y dirección del flujo del campo magnético puede variar. Por ello, es necesario considerar el fenómeno físico que produce un campo magnético controlable y obtener un análisis adecuado de un sistema de suspensión electromagnética.

#### 2.1.1. Producción de un campo magnético

La ley básica que gobierna la producción de un campo magnético por medio de una corriente es la ley de Ampere, descrita por la siguiente ecuación:

$$\oint_C H \cdot dl = \int_S J \cdot dA = I_{neta} \tag{2.1}$$

donde *H* es la intensidad del campo magnético generado por la corriente  $I_{neta}$ , y *dl* es el elemento diferencial a lo largo de la trayectoria de integración [9]. Si el núcleo es de hierro o de ciertos metales similares, denominados materiales ferromagnéticos, casi todo el campo magnético producido por la corriente permanecerá dentro del núcleo, de modo que el camino de integración especificado en la ley de Ampere es la longitud media del núcleo  $l_n$ , como se muestra en la Figura 2.1. La corriente que pasa por el camino de integración  $I_{neta}$  es entonces Ni, puesto que la bobina de alambre corta dicho camino N veces mientras pasa la corriente i. De esta manera, la ley de Ampere se expresa entonces como

$$H = \frac{Ni}{l_n} \tag{2.2}$$

La intensidad del campo magnético *H* es una medida del esfuerzo de una corriente por establecer un campo magnético. La potencia del campo magnético producido en el núcleo depende también del material de que está hecho [38]. Así, la relación entre la intensidad del campo magnético *H* y la densidad del flujo magnético resultante *B* producida dentro del material está dada por

$$B = \mu H = \frac{\mu N i}{l_n} \tag{2.3}$$

donde *H* es la intensidad del campo magnético,  $\mu$  es la permeabilidad magnética del material y B es la densidad de flujo magnético resultante.



FIGURA 2.1: Modelo de núcleo magnético sencillo [9].

La densidad de flujo magnético real producida en una sección del material está dada entonces por el producto del esfuerzo de la corriente por establecer un campo magnético y la facilidad relativa para establecer un campo magnético en un material dado [9]. Por tanto, la intensidad del campo magnético se mide en ampere-vueltas por metro, la permeabilidad en henrys por metro y la densidad de flujo resultante en webers por metro cuadrado, conocido como teslas (*T*). Luego, el flujo magnético total en cierta área está determinado por

$$\phi = \int_{A} B \cdot dA = BA = \frac{\mu N i A}{l_n}$$
(2.4)

#### 2.1.2. Circuitos magnéticos

Es posible definir un circuito magnético cuyo comportamiento está determinado por ecuaciones análogas a aquellas establecidas para un circuito eléctrico. En ocasiones, el modelo de circuito del comportamiento magnético se utiliza en el diseño de sistemas electromecánicos para simplificar el proceso de diseño. En el circuito eléctrico, el voltaje o fuerza electromotriz genera el flujo de corriente. Por analogía, la cantidad correspondiente en el circuito magnético se denomina fuerza magnetomotriz [13]. La fuerza magnetomotriz de un circuito magnético es igual al flujo efectivo de corriente aplicado al núcleo

$$\mathscr{F} = Ni \tag{2.5}$$

siendo  $\mathscr{F}$  la fuerza magnetomotriz y su unidad de medida es amperes-vuelta. En el circuito magnético, al igual que la fuente de voltaje en el circuito eléctrico, la fuerza magnetomotriz tiene una polaridad asociada a ella. La relación entre la fuerza magnetomotriz y el flujo es la siguiente

$$\mathscr{F} = \phi \mathcal{R} \tag{2.6}$$

donde  $\mathcal{R}$  es la reluctancia del circuito magnético. La reluctancia de un circuito magnético es el homólogo de la resistencia del circuito eléctrico y se mide en amperesvueltas por weber [9]. Del mismo modo, la reluctancia es un elemento pasivo que disipa energía en forma de calor.

Sin embargo, la reluctancia se puede expresar en términos de un parámetro que caracteriza cualquier devanado, la inductancia total de un circuito magnético, y esta se define como el enlace de flujo por unidad de corriente. Dicha relación se puede representar como

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{i} \tag{2.7}$$

Esta definición es válida tanto para autoinductancia e inductancia mutua producida por una corriente [38] y su unidad es el henrio (H).

#### 2.1.3. Conversión de energía electromecánica

Los sistemas de levitación magnética se pueden categorizar en dos grupos dependiendo de la naturaleza de la causa física que produce el efecto de levitación magnético. La primera categoría es referida como soportes de fuerza de Lorentz mientras que el segundo grupo se denominan soportes de fuerza de reluctancia [57]. Entonces, la ley de la fuerza de Lorentz determina la fuerza experimentada por una partícula en movimiento con carga en presencia de un campo electromagnético

$$f = q(E + v \times B) \tag{2.8}$$

donde q es la carga de la partícula, v es la velocidad de la partícula, E es la intensidad del campo eléctrico, B es la intensidad del campo magnético [13]. Este principio físico es el responsable del origen de los motores eléctricos.

En cambio, la fuerza de reluctancia se deriva del trabajo virtual obtenido de la energía almacenada en el campo magnético a lo largo de un desplazamiento del elemento suspendido y actúa de manera que tiende a disminuir la reluctancia del arreglo del sistema

$$f = \frac{\partial W}{\partial s} \tag{2.9}$$

donde *W* es la energía almacenada en el campo magnético y *s* es el desplazamiento del elemento suspendido [38]. Luego, la energía del campo magnético se encuentra definida por la siguiente relación

$$W_m = \int \mathscr{F} d\phi \tag{2.10}$$

donde *L* es la inductancia del arreglo mecánico. Por tanto, la fuerza de reluctancia total, en términos de las variables que describen un circuito magnético, resulta ser

$$f = \frac{\partial}{\partial s} \left( \int \mathscr{F} d\phi \right) \tag{2.11}$$

Este principio es aplicado en sistemas de suspensión electromagnética para generar fuerzas de carácter atractivo si el elemento suspendido no cuenta con su propio campo magnético, y repulsivo si el elemento suspendido genera un campo magnético opuesto al del elemento fijo.

#### 2.1.4. Ecuación de movimiento

El comportamiento de un sistema electromecánico se encuentra gobernado por las ecuaciones dinámicas eléctricas y mecánicas. Las fuerzas externas que actúan sobre cualquier cuerpo representan el efecto de las fuerzas gravitacionales, eléctricas, magnéticas o de contacto entre cuerpos adyacentes. Luego, la segunda ley de Newton para el movimiento traslacional plantea que la suma de todas las fuerzas que actúan en el cuerpo es igual a su masa por la aceleración de su centro de masa

$$\sum F = ma = m\frac{dv}{dt} \tag{2.12}$$

donde *m*, *a* y *v* son la masa del cuerpo, la aceleración y la velocidad del centro de masas del cuerpo, respectivamente. Esta expresión se conoce como ecuación de movimiento de traslación del centro de masa de un cuerpo rígido [22].

## 2.2. Sistema de soporte magnético

La función principal de un soporte magnético es generar fuerzas de campo sin ningún contacto controladas activamente mediante electroimanes. Un sensor mide el desplazamiento del elemento suspendido a partir de su posición de referencia, un microprocesador realiza la función de controlador y deriva una señal de control a partir de las mediciones realizadas. Y un amplificador de potencia transforma dicha señal en una corriente de control de modo que se produzcan fuerzas magnéticas de manera que el elemento suspendido permanezca en su posición nominal [57].

#### 2.2.1. Elementos de lazo de control

Un elemento suspendido, rotor o plataforma es levitado libremente a una distancia previamente establecida, en donde un sensor de posición sin contacto mide constantemente la desviación entre la posición deseada y la posición real del elemento, y alimenta con esta información a un controlador como se muestra en la Figura 2.2. La función principal es mantener la posición del rotor en su valor deseado [40]. Finalmente, el controlador envía una señal de comando de posición a un amplificador de potencia el cual transforma dicha señal en una corriente eléctrica en la bobina del electroimán del soporte y un campo magnético en el núcleo ferromagnético del mismo, y por tanto se genera una fuerza magnética deseada.



FIGURA 2.2: Lazo de control de un soporte magnético simple y sus elementos [57].

El amplificador de potencia y el electroimán son elementos interdependientes. De ello resulta que la fuerza dinámica depende ampliamente en el diseño del sistema de amplificación de potencia, así como de las características del electroimán.

#### 2.2.2. Actuadores

El elemento clave de un sistema de levitación magnética activo es el actuador. En general, los actuadores de tales sistemas se encuentran compuestos por un arreglo de un número arbitrario de electroimanes, conectados a un arreglo de amplificadores de potencia. La geometría de los electroimanes empleados depende del elemento que se ha de levitar, para generar la mayor fuerza de reluctancia posible [57].

#### 2.2.3. Amplificador de potencia

El amplificador de potencia tiene como función elevar la potencia de la señal de control para manipular el campo magnético producido por el actuador. Para ello, es factible utilizar convertidores de corriente directa. Los convertidores de corriente directa son circuitos electrónicos de potencia que convierten una tensión en otro nivel de tensión continua y, normalmente, proporcionan una salida regulada [20]. Entre los convertidores CD-CD más utilizados se encuentran el convertidor conmutado básico, el convertidor tipo reductor, el convertidor tipo elevador, el convertidor reductor-elevador y el convertidor tipo Sepic.

#### 2.2.4. Transductores

Una parte importante en el desempeño de un sistema de levitación magnética depende en las características del sensor de desplazamiento utilizado. Para medir la posición de un elemento movible es necesario utilizar un sensor funcionalmente libre de contacto. Cuando se selecciona el sensor de desplazamiento, dependiendo de la aplicación del soporte magnético, el rango de medición, linealidad, sensibilidad, resolución, rango de temperatura, inmunidad al ruido, factores ambientales como polvo o humedad, factores mecánicos como vibraciones, factores eléctricos y frecuencia son parámetros que se deben considerar [57]. Los sensores comunes utilizados en sistemas de soporte magnético son inductivos, de corrientes de Eddy, capacitivos, magnéticos y ópticos.

## 2.3. Materiales ferromagnéticos

En el contexto de dispositivos de conversión de energía electromecánica, la importancia de los materiales ferromagnéticos se debe a dos motivos: mediante su uso es posible obtener una gran densidad de flujo magnético con relativamente bajos niveles de fuerza magnetomotriz; y las fuerzas magnéticas y la densidad de energía aumentan proporcionalmente con la densidad de flujo magnético. Por otra parte, los materiales ferromagnéticos pueden ser utilizados para restringir y dirigir los campos magnéticos por un camino bien definido [13].

#### 2.3.1. Composición y dominios magnéticos

Los materiales ferromagnéticos se encuentran compuestos por hierro y aleaciones de hierro con cobalto, tungsteno, níquel, aluminio, y otros metales, y es el material magnético más abundante. Además, los materiales ferromagnéticos se encuentran compuestos por un gran número de dominios magnéticos, regiones en las que el momento magnético de todos los átomos son paralelos de manera que se alinean y, en consecuencia, surge una red de momento magnético para dicho dominio. En un material desmagnetizado, los momentos magnéticos de su dominio están orientados aleatoriamente, y la red de flujo magnético resultante dentro del material es cero [13].

#### 2.3.2. Permeabilidad magnética

La permeabilidad magnética de un material es la capacidad de establecer un flujo magnético en dicho medio. Así, la permeabilidad del espacio libre es

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m \tag{2.13}$$

y la permeabilidad de cualquier material comparada con la del espacio libre se denomina permeabilidad relativa, definida como

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{2.14}$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad del material. Los materiales con permeabilidad relativa mayor a la unidad se denominan materiales ferromagnéticos, los materiales con permeabilidad relativa cercana a uno se nombran paramagnéticos y los materiales con permeabilidad relativa inferior a la unidad se denominan diamagnéticos [38].

#### 2.3.3. Comportamiento magnético

La permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos es hasta 6,000 veces la permeabilidad del espacio libre. Debido a que la permeabilidad del hierro es mucho mayor que la del aire, la mayor parte del flujo en un núcleo de hierro permanece dentro del núcleo en lugar de viajar a través del aire circundante, cuya permeabilidad es mucho más baja.



FIGURA 2.3: a) Curva de magnetización de un núcleo ferromagnético.b) Curva de magnetización en términos de densidad de flujo e intensidad del campo magnético [9].

Cuando se gráfica el flujo producido en el núcleo contra la fuerza magnetomotriz que lo produce, se obtiene una gráfica como la de la Figura 2.3, la cual se denomina curva de saturación o curva de magnetización. Al comienzo, un pequeño incremento de la fuerza magnetomotriz produce un gran aumento del flujo resultante. Después de cierto punto, aunque se incremente mucho la fuerza magnetomotriz, los aumentos de flujo serán cada vez más pequeños. Finalmente, el incremento de la fuerza magnetomotriz casi no produce cambios en el flujo. La región del gráfico en la cual la curva se aplana se llama región de saturación, y se dice que el núcleo está saturado. La región en la cual el flujo en el núcleo cambia con rapidez se llama región no saturada de la curva.

Por otro lado, cuando la corriente de excitación es sinusoidal el núcleo ferromagnético está sujeto a cambios oscilantes de fuerza magnetomotriz y la cantidad de flujo presente en el núcleo no depende solamente de la cantidad de corriente aplicada a los devanados del núcleo, sino también de la historia previa del flujo presente en el núcleo, como se muestra en la Figura 2.4. Esta dependencia de la historia previa del flujo y el seguir una trayectoria diferente en la curva se denomina histéresis [9]. Cuando se incrementa la corriente por primera vez, el flujo en el núcleo sigue la trayectoria *ab*, entonces la corriente decrece y el flujo en el núcleo sigue la trayectoria *bcd* y, más adelante, cuando la corriente se incrementa de nuevo, el flujo sigue la trayectoria *deb*. La trayectoria *bcdeb*, que representa la variación de la corriente aplicada, se denomina curva o lazo de histéresis.



FIGURA 2.4: Curva de histéresis en un núcleo ferromagnético [9].

En realidad, si primero se aplica al núcleo una fuerza magnetomotriz intensa y luego se deja de aplicar, la trayectoria del flujo en el núcleo será *abc*. Cuando se suspende la fuerza magnetomotriz, el flujo no llega a cero ya que permanece cierto flujo en el núcleo, denominado flujo residual. Para que el flujo llegue a cero, se debe aplicar al núcleo, en dirección opuesta, cierta fuerza magnetomotriz llamada fuerza magnetomotriz coercitiva.

# 2.4. Teoría de control

Las técnicas de control que se utilizan habitualmente se basan en la teoría de control clásico, la teoría de control moderno y la teoría de control robusto [51]. En este apartado se presentan los fundamentos teóricos, conceptos y criterios empleados en el trabajo de investigación concernientes a la teoría de control.

#### 2.4.1. Acciones básicas de control

Las acciones básicas de control se componen de tres elementos que operan con el error de referencia del sistema, de manera que influyan en una característica de la respuesta de tal sistema. A continuación, se describen los efectos de las acciones de control proporcional, integral y derivativa en el comportamiento del sistema [2].

- Control proporcional: la acción de control proporcional es un factor escalar que opera sobre el error actual de referencia del sistema, por lo que modifica la estabilidad relativa del sistema.
- Control integral: la acción de control integral en el controlador elimina o reduce el error en estado estacionario del sistema. En el control integral de una planta, la señal de control, que es la señal de salida a partir del controlador, es en todo momento el área bajo la curva de la señal de error hasta tal momento.
- Control derivativo: cuando una acción de control derivativo se agrega a un controlador proporcional, aporta un modo de obtener un controlador con alta sensibilidad. Una ventaja de usar una acción de control de este tipo es que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Por tanto, el control derivativo prevé el error, inicia una acción correctiva oportuna y tiende a aumentar la estabilidad del sistema. Sin embargo, tiene como desventaja amplificar el ruido eléctrico de las señales.

#### 2.4.2. Variables de estado

Una variable de estado es una magnitud física macroscópica que caracteriza el estado de un sistema en equilibrio. Entonces, dado un sistema físico en equilibrio, puede escogerse un número finito de variables de estado, tal que sus valores determinan unívocamente el estado del sistema. Este conjunto de variables forman un vector de dimensión finita, generando una geometría diferencial [51]. De esta manera, se define estado de un sistema como la mínima cantidad de información necesaria en un instante para que, conociendo la entrada a partir de ese instante, se pueda determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior [12].

#### 2.4.3. Controlabilidad y observabilidad

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo inicial si se puede transferir desde cualquier estado inicial a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito [51]. Por otra parte, un sistema es observable en el tiempo inicial si, con el sistema en el estado inicial, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida y la entrada de control durante un intervalo de tiempo finito.

#### 2.4.4. Planitud diferencial

La planitud diferencial es una idea natural asociada con los sistemas de ecuaciones diferenciales indeterminados, el cual representa la posibilidad de parametrizar completamente cada variable del sistema en términos de un conjunto finito privilegiado de variables internas y sus derivadas sucesivas. Este concepto fue introducido por el Prof. M. Fliess y sus colegas en 1992. En esencia, las condiciones para la planitud diferencial de un sistema de una sola entrada y una única salida son resumidas por la propiedad de controlabilidad de este último. Considérese ahora un sistema no lineal de una entrada en la forma general

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}$$
(2.15)

donde  $f = (f_1, ..., f_n)^T$  es una función suave del vector de estado  $x = (x_1, ..., x_n)^T$ , la entrada de control es u y el rango de la matriz jacobiana de f(x) con respecto de x es máximo. Luego, generalmente,  $\phi_s$  es una función diferencial de x si

$$\phi_s = \phi_s(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^\beta) \tag{2.16}$$

donde  $\beta$  es un entero finito. Y si *x* obedece a un conjunto de ecuaciones diferenciales controladas entonces, necesariamente, la diferenciación respecto del tiempo de orden superior del estado debido a la definición de una ecuación diferencial implica considerar las derivadas de la componente de control *u*. En otras palabras, una función diferencial del estado *x* es una función del estado y de un número finito de las

derivadas temporales de la entrada

$$\phi_s = \phi_s(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, ..., u^{\beta-1})$$
(2.17)

entonces, un sistema de la forma (2.15) se dice que es diferencialmente plano si existe una función diferencial del estado x, denotada por y, dada como

$$y = h(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, ..., u^{\alpha})$$
 (2.18)

tal que el sistema inverso,  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , con *y* como entrada y *u* como salida, no tiene ninguna dinámica. Además, un sistema es plano si existe cierta salida artificial, tal que esta salida parametriza diferencialmente todas las variables del sistema. Esto significa que las variables de estado, las entradas de control y las variables de salida originales en el sistema pueden ser expresadas como una función diferencial de la salida plana *y*, esto es

$$x = A(y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., y^{(\gamma)}), \quad u = B(y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., y^{(\gamma+1)})$$
(2.19)

en donde  $\gamma$  es un entero finito. Cabe mencionar que la razón de la presencia de una derivada de más alto orden de *y* en la expresión de la entrada se debe a la dinámica del sistema y al hecho de que

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A}{\partial \dot{y}}\ddot{y} + \dots + \frac{\partial A}{\partial y^{(\alpha)}}y^{\alpha+1}$$
(2.20)

Claramente, una función escalar suave h(x) califica como salida plana del sistema (2.15) si y solo si la enésima derivada de h(x), a lo largo de las trayectorias del sistema, exhibe explícitamente la influencia de la entrada de control u, es decir que h(x)sea una salida de grado relativo n. Por tanto, resulta que una condición necesaria y suficiente para la existencia de la salida plana es que la matriz  $[g, ad_fg, ..., ad_f^{n-1}g]$  sea de rango n y que el subconjunto  $\{g, ad_fg, ..., ad_f^{n-2}g\}$  sea involutivo, en donde  $ad_fg$ es el corchete o producto de Lie de los campos vectoriales f y g. En consecuencia, se tiene que la salida plana h(x) satisface

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x}[g, ad_f g, ..., ad_f^{n-2}g, ad_f^{n-1}g] = [0, 0, ..., 0, a(x)]$$
(2.21)

para alguna función escalar a(x) diferente de cero. Por otro lado, no existe una metodología general para evaluar la planitud diferencial en un sistema no lineal multivariable, especialmente en aquellos casos en los que es necesaria una extensión de la dinámica del sistema para hacerlo linealizable por medio de una retroalimentación del estado estática y un cambio de coordenadas [60].

#### 2.4.5. Observadores de estado

Un sistema de control requiere que las variables de estado se encuentren disponibles para su realimentación en todo momento. Sin embargo, en la práctica no todas las variables de estado están accesibles para poder realimentarse [51]. Para aquellas variables de estado que no son medidas directamente se utilizan sus valores estimados, obtenidos a partir de un observador de estado [72]. Si bien, el diseño de estos observadores ha sido un problema importante en el control de sistemas no lineales y, debido a esto, el enfoque basado en el observador de Luenberger es el más utilizado.

Cuando el observador de estado capta todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles por medición directa, se denomina observador de estado de orden completo. Un observador que estima menos variables de estado que las variables de estado del sistema se denomina observador de estado de orden reducido [51]. En 1995, Jinqing Han propone el observador de estado extendido, el cual estima tanto las variables de estado del sistema como las incertidumbres [19]. Este último es el elemento principal en el control por rechazo activo de perturbaciones (ADRC, por sus siglas en ingles), ya que en lugar de calcular la función f(x) se estima y se compensa en la variable de control en tiempo real. Gracias a esto, un controlador por ADRC resulta sencillo de utilizar y sintonizar, debido a que contiene únicamente dos parámetros de sintonización: el ancho de banda del sistema en lazo cerrado y el ancho de banda del observador [72]. En particular, para un sistema no lineal de orden *n* con una entrada y una salida, descrito por la ecuación (2.15), el

observador de estado extendido es de la forma

$$\begin{split} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \lambda_1 \alpha_1 (y - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + \lambda_2 \alpha_2 (y - \hat{x}_1), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n &= \hat{x}_{n+1} + \lambda_n \alpha_n (y - \hat{x}_1) + u \\ \dot{\hat{x}}_{n+1} &= \lambda_{n+1} \alpha_{n+1} (y - \hat{x}_1) \end{split}$$

siendo *y* la salida del sistema y  $\lambda_i$ , para i = 1, 2, ..., n + 1, son ganancias regulables constantes [16]. De esta manera, la idea principal del observador de estado extendido es que para unas funciones  $\alpha_i$  elegidas apropiadamente el estado del observador  $\hat{x}_i$ , para i = 1, 2, ..., n, y  $\hat{x}_{n+1}$  pueden ser, mediante la regulación de  $\lambda_i$ , consideradas como las aproximaciones de los estados correspondientes  $x_i$ , para i = 1, 2, ..., n, y la perturbación total del sistema, respectivamente.

#### 2.4.6. Criterio de estabilidad de Lyapunov

El enfoque más general y práctico en el estudio de la estabilidad de sistemas de control no lineales es la teoría introducida a finales del siglo XIX por el matemático ruso Alexandr Mikhailovich Lyapunov. En esta presenta dos métodos para el análisis de la estabilidad: el método por linealización y el método directo. El método por linealización extrae conclusiones acerca de la estabilidad local de un sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio a partir de las propiedades de estabilidad de su aproximación lineal. El método directo no se encuentra restringido a un movimiento local y determina las propiedades de estabilidad de un sistema no lineal al construir una función escalar que asocie la energía almacenada en el sistema y examinar la tasa de cambio respecto del tiempo de esta función [61]. Ahora, supóngase que  $\overline{x} \in D$  es un punto de equilibrio del sistema (2.15) y, sin pérdida de generalidad, se asume que f(x) satisface f(0) = 0 en el estudio del punto de equilibrio en el origen  $\overline{x} = 0$ . No obstante, es importante primero definir formalmente tres tipos de estabilidad.

El punto de equilibrio x = 0 es estable si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe una función  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que  $||x(0)|| < \delta$ , entonces  $||x(t)|| < \epsilon$  para todo  $t \ge 0$ . En otro caso, el punto de equilibrio es inestable. Además, se dice que el punto de equilibrio x = 0 es asintóticamente estable si es estable y además la función  $\delta$  puede ser elegida tal que  $||x(0)|| < \delta$ , entonces  $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ .

Como se ha comentado, la idea básica en el análisis de estabilidad mediante el criterio de Lyapunov se basa en describir la energía asociada al sistema con una función candidata, para posteriormente explorar el comportamiento de la primera derivada respecto del tiempo de esta función, la cual debe ser monótonamente decreciente para asegurar la estabilidad del sistema. En concreto, sea  $\overline{x} = 0$  un punto de equilibrio del sistema (2.15) y  $D \subset R^n$  es un dominio que contiene a x = 0. Ahora, sea  $V : D \to R$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \quad en \quad D - \{0\}$$
(2.22)

$$\dot{V}(x) \le 0 \quad en \quad D \tag{2.23}$$

entonces, el punto de equilibrio x = 0 es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad en \quad D - \{0\}$$
 (2.24)

entonces x = 0 es asintóticamente estable. Y, en efecto, una función diferenciable que satisface las condiciones (2.22) y (2.23) se denomina función de Lyapunov. Así que la superficie V(x) = c, para algún c > 0, se llama superficie de Lyapunov o superficie de nivel. Entonces, la condición  $\dot{V}(x) \le 0$  implica que cuando una trayectoria del sistema en el espacio de estados cruza una superficie de Lyapunov V(x) = c, esta se mueve dentro del conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \le c\}$  y nunca puede volver a salir. Cuando  $\dot{V}(x) < 0$  la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a una superficie de Lyapunov interna con un *c* más pequeño. A medida que *c* decrementa, la superficie de Lyapunov V(x) = c se encoge hacia el origen, mostrando que la trayectoria se aproxima al origen a medida que el tiempo avanza [30]. En cambio, si solo se sabe que  $\dot{V}(x) \le 0$ , no se puede asegurar que la trayectoria del sistema se aproxime al origen, pero se puede concluir que el origen es estable debido a que la trayectoria

se puede contener dentro de cualquier esfera  $B_{\epsilon}$  al requerir que el estado inicial x(0) se encuentre dentro de una superficie de Lyapunov contenida en tal esfera.

#### 2.4.7. Funciones de comparación

En teoría de control, para el estudio de la estabilidad de sistemas no lineales, se suelen utilizar algunas funciones especiales de comparación. Las funciones  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_{\infty}$  y  $\mathcal{KL}$  pertenecen a esta familia, las cuales son fundamentales en el análisis de estabilidad con el enfoque de entrada al estado [30]. A continuación, se definen formalmente cada una de estas.

Una función continua  $\alpha : [0, a] \rightarrow [0, \infty)$  es de clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Del mismo modo, una función continua  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es de clase  $\mathcal{K}_{\infty}$  si es estrictamente creciente,  $\alpha(0) = 0$  y lím<sub> $r \rightarrow \infty$ </sub>  $\alpha(r) = \infty$ . Y una función continua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es de clase  $\mathcal{KL}$  si, por cada *s* fijo, la función  $\beta(r, s)$ pertenece a una función clase  $\mathcal{K}$ , por cada *r* fijo, la función  $\beta(r, s)$  es decreciente con respecto a *s* y lím<sub> $s \rightarrow \infty$ </sub>  $\beta(r, s) = 0$ .

# Capítulo 3

# Diseño y Modelado del Sistema Propuesto

En el presente capítulo se muestra el diseño detallado del sistema de suspensión electromagnética de un grado de libertad propuesto para el trabajo de investigación, así como el modelado matemático de su correspondiente comportamiento dinámico. Posteriormente, se presenta el diseño de una ley de control basada en el enfoque al rechazo activo de perturbaciones para estabilizar y realizar seguimiento del sistema.

# 3.1. Especificaciones de diseño

El sistema de levitación magnética de un grado de libertad, que se aborda en el presente trabajo de investigación, se compone de dos electroimanes como actuadores y un disco de acero como elemento suspendido. Cada uno de estos produce fuerzas de carácter atractivo cuya intensidad depende de la corriente eléctrica que fluye en sus devanados, como se muestra en la Figura 3.1. Como resultado de utilizar dos electroimanes, para controlar el único grado de libertad del sistema, es posible generar fuerzas atractivas de compensación en ambas direcciones. Este sistema representa la simplificación a un grado de libertad del problema de control de una chumacera magnética [40]. De la misma manera, se propone un controlador basado en modos deslizantes con el enfoque al rechazo activo de perturbaciones, que opere sobre la dinámica de los actuadores para obtener las corrientes necesarias que permitan producir las fuerzas de reluctancia atractivas, que se requieren para levitar y posicionar el elemento suspendido a lo largo de una trayectoria de referencia. Por consiguiente, los actuadores utilizados para la plataforma experimental del sistema deben tener la capacidad de potencia suficiente para sostener el peso del elemento suspendido a una distancia mayor a la separación máxima de operación de dicho elemento. Asimismo, la posición del origen se encuentra a la distancia media entre las caras de sujeción de los electroimanes.



FIGURA 3.1: Diagrama del sistema de levitación magnética de un grado de libertad con un par de electroimanes [57].

Entonces, los requerimientos del sistema de levitación magnética, propuesto en el presente trabajo de investigación, son los siguientes:

- La geometría y material de los actuadores del sistema deben permitir generar un acoplamiento magnético con el elemento suspendido por uno de los bordes transversales al devanado del electroimán.
- El circuito de amplificación de potencia y los sensores de corriente deben soportar una corriente mayor a la corriente nominal de los actuadores.
- El sensor de posición del elemento suspendido debe tener una resolución micrométrica para estabilizar el sistema de manera óptima.
- Los transductores diseñados deben proporcionar un voltaje menor al nivel lógico del procesador.

- La estructura del sistema debe restringir el movimiento del elemento suspendido a un grado de libertad.
- El procesador digital de las señales de control debe ser lo suficientemente rápido para estimar las perturbaciones e incertidumbres del sistema y compensarlas en la variable de control.

# 3.2. Arquitectura del sistema

Un sistema de levitación magnética de un grado de libertad requiere, como se ha mencionado, de los elementos básicos de un lazo de control. Así que, la arquitectura del sistema propuesto es el descrito en la Figura 3.2. La etapa de realimentación del sistema, la cual se compone de un sensor de posición y dos de corriente, obtiene la información en tiempo real del estado del sistema y es transferida e interpretada por una tarjeta de procesamiento digital, donde es utilizada para implementar la ley de control diseñada para el sistema. Esto incluye la estimación de las incertidumbres estructuradas y no estructuradas en el modelado matemático de su comportamiento.



FIGURA 3.2: Arquitectura del sistema propuesto.

Luego, las señales de control, generadas por la etapa del procesamiento digital de señales, son introducidas en el circuito de amplificación de potencia de cada actuador para regular la corriente que fluye en sus devanados. De este modo, es posible controlar las fuerzas atractivas de los electroimanes para levitar el elemento suspendido sobre una posición deseada.

## 3.3. Partición de hardware y software

En esta sección se describe la partición de los subsistemas hardware y software del sistema propuesto, con base en las especificaciones y requerimientos de diseño, de acuerdo con la arquitectura descrita anteriormente. De esta manera, los componentes hardware del sistema son: los actuadores, el elemento suspendido, la etapa de electrónica de potencia, la etapa de realimentación del sistema con los transductores de estado y la tarjeta de procesamiento digital de señales. Por otra parte, los componentes del subsistema software lo comprenden: el algoritmo de la adquisición de datos y de la conversión de las señales de tipo analógico a digital, el cálculo de la estimación de las incertidumbres asociadas a las salidas del sistema y el cálculo de las señales de control para el convertidor de potencia de los actuadores.

En relación con las funciones y características que deben cumplir los elementos de hardware del sistema, se han seleccionado los dispositivos accesibles en el mercado que se adecúan para la aplicación del sistema propuesto. Así, los componentes hardware son los siguientes.

- Un par de electroimanes CL-80/38.
- Disco de acero de 28 mm de diámetro.
- Cojinete lineal LM6UU.
- Eje de aluminio de 6 *mm* de diámetro y 40 *mm* de largo.
- Sensor de posición LVDT.
- Sensores de corriente de parte alta.

- Circuitos de amplificación de potencia para actuadores.
- Kit experimental para procesamiento digital de señales TMS320F28335.
- Fuente de suministro de potencia de corriente directa.
- Elementos estructurales del sistema experimental.

En cuanto a la partición de la etapa software de la plataforma experimental se tienen como elementos los algoritmos requeridos que rigen el comportamiento del procesamiento digital de las señales de control. En concreto, los elementos de la etapa de software del sistema son las siguientes

- Algoritmo del controlador del convertidor analógico a digital.
- Algoritmo del filtro digital pasa bajas de primer orden para señales.
- Modelo de observadores lineales de estado extendido.
- Controlador por rechazo activo de perturbaciones.

Una vez definidos los elementos que integran los subsistemas de hardware y software del sistema, se realiza el refinamiento de la partición de cada etapa. En los siguientes apartados se describe el desarrollo de dicha fase de diseño.

#### 3.3.1. Refinamiento de hardware

Para el refinamiento de la etapa hardware del sistema se han separado las funciones de cada parte que lo constituye, para reducir las tareas que realiza cada una, simplificando y optimizando la etapa de diseño e implementación. En la Figura 3.3 se muestra el diagrama de refinamiento del subsistema hardware, donde se percibe la relación entre cada elemento. A continuación, se describe el funcionamiento y consideraciones del diseño de cada componente del subsistema hardware.

La estructura de la plataforma experimental se basa en un anaquel de tres niveles soportado por cuatro perfiles estructurales de aluminio, con superficie transversal cuadrada de 30 *mm* por lado. Estos perfiles de soporte tienen una longitud de 350 *mm* y son utilizados perfiles con conexión transversal de 14 *mm* de longitud para sujetar los niveles del estante, integrados por tres placas de aluminio de 6 *mm* de espesor. En la parte inferior es colocado el sensor de posición LVDT de manera vertical. A un lado de este, se ubican las placas de circuito impreso para el acondicionamiento de la señal del sensor de posición y el circuito convertidor de potencia junto con los sensores de corriente para los actuadores. Asimismo, en el estante superior se posicionan los electroimanes y el disco como elemento suspendido, de manera concéntrica, y se sujeta a este la conexión del sensor de posición. Por último, en una base inferior lateral son colocadas las terminales de conexión para el controlador digital.



FIGURA 3.3: Refinamiento del subsistema de hardware.

La etapa de potencia del sistema consiste en un circuito de acondicionamiento para aumentar el voltaje de las señales de modulación por ancho de pulso provenientes del procesador digital de señales y accionar el circuito de amplificación de potencia de los actuadores del sistema. En efecto, aprovechando la resistencia e inductancia interna del actuador, este convertidor de potencia es un circuito reductor de corriente constituido con un conmutador de potencia, que opera como interruptor, y un diodo que permita la descarga del efecto inductivo de la carga, el devanado del electroimán. De este modo, la corriente regulada, en proporción a la variable de control, es introducida a los actuadores del sistema. La etapa de monitoreo del estado del sistema se comprende de un sensor de posición basado en un transformador diferencial variable lineal y dos sensores de corriente de parte alta. Cada uno de estos tiene su correspondiente circuito de acondicionamiento de señales para otorgar una salida de voltaje analógico menor a 3 *V*, de manera que sea adaptable con el convertidor analógico a digital del procesador digital de señales, sin que se pierda información o se comprometa el estado de los puertos del dispositivo.

#### 3.3.2. Refinamiento de software

El refinamiento del subsistema de software se basa en describir los algoritmos por implementar en el dispositivo de procesamiento digital para las señales de control del sistema de levitación magnética. En la Figura 3.4 se muestra el diagrama a bloques del refinamiento del subsistema software, el cual es implementado en el kit experimental TMDSDOCK con microcontrolador TMS320F28335 de la compañía Texas Instruments. A continuación, se describe el funcionamiento y consideraciones del diseño de cada elemento del subsistema software.



FIGURA 3.4: Refinamiento del subsistema de software.

La información de las señales analógicas de la etapa de realimentación del estado del sistema: la posición del elemento suspendido y las corrientes de los actuadores; es introducida al subsistema software mediante los convertidores analógico a digital del microcontrolador. Estas señales son acondicionadas mediante un filtro pasa bajas de primer orden con una frecuencia de corte suficientemente pequeña para eliminar el ruido de alta frecuencia en las señales analógicas, pero sin influir en la dinámica dominante del sistema. Posteriormente, la información es interpretada y transmitida a los modelos del controlador basado en modos deslizantes y los observadores de estado extendido para la estimación de incertidumbres. De estos últimos dos resulta la ley de control, con el enfoque al rechazo activo de perturbaciones, para realizar seguimiento de la posición del elemento suspendido sobre una trayectoria deseada y regular la corriente del actuador inferior. Y finalmente, estas señales de control son transformadas a señales de control por modulación de ancho de pulso para el conmutador de potencia del driver de los actuadores.

#### 3.3.3. Dibujo asistido por computadora del prototipo

Un dibujo asistido por computadora del sistema de levitación magnética, propuesto para el presente trabajo de investigación, se muestra en la Figura 3.5, el cual ha sido elaborado en la plataforma de desarrollo Solidworks, de la compañía Dassault Systèmes. En este se aprecia el diseño estructural y la disposición de los elementos de la plataforma experimental del sistema de suspensión electromagnética de un grado de libertad. Como se describe en el apartado anterior, la fuente de alimentación se posiciona en el costado izquierdo de la estructura del sistema. Ambos son montados sobre una base de tablero de fibra de densidad media de color negro.



FIGURA 3.5: Dibujo asistido por computadora del prototipo de sistema.

Asimismo, en la Figura 3.6 se presenta un acercamiento de los principales elementos hardware del sistema de levitación magnética: los actuadores, el disco de acero con el rodamiento lineal y el elemento de conexión del sensor de posición. El cojinete lineal del elemento suspendido y el eje de guía son incluidos para absorber el momento angular que se genera debido al peso de la conexión del sensor y restringir el movimiento a un grado de libertad de tal elemento.



FIGURA 3.6: Dibujo asistido por computadora del prototipo de sistema.

Por otro lado, el disco de acero se sujeta a la parte superior del cojinete para impedir que el desplazamiento del centro de masa del elemento suspendido sea mayor a 20 *mm* de la cara de absorción del electroimán superior. Esto último se debe al comportamiento del flujo magnético de los actuadores respecto a la distancia.

# 3.4. Diseño de etapa de potencia del sistema

En el presente apartado se aborda el diseño de los circuitos eléctricos requeridos para la etapa de potencia del sistema. En concreto, para controlar la corriente suministrada a los actuadores se utiliza un convertidor por conmutación, de modo que se minimicen las pérdidas ocasionadas al integrar dicha etapa. Dado que la salida de control por modulación de ancho de pulso, del dispositivo de procesamiento digital de señales del sistema, es de baja potencia es necesario un circuito de accionamiento para el conmutador.

#### 3.4.1. Circuito de amplificación de potencia

El circuito de amplificación de potencia para los actuadores del sistema consiste en un convertidor reductor de corriente por conmutación, el cual es controlado mediante modulación por ancho de pulso, y se agrega un diodo en antiparalelo que permita la descarga del inductor del electroimán [23]. En la Figura 3.7 se muestra el circuito de amplificación de potencia que se utiliza para los actuadores.



FIGURA 3.7: Circuito de amplificación de potencia para electroimán.

En la siguiente tabla se presentan los componentes seleccionados, y sus principales características, utilizados para la implementación del circuito de amplificación de potencia de los electroimanes.

Elemento	Componente	Características	
Transistor	IRF530	Transistor tipo MOSFET de rápida conmutación de 14 A a 100 V con empaquetado TO-220AB.	
Diodo	1N4004	Rectificador de 1 A con corriente de fuga inversa baja y baja caída de voltaje.	

TABLA 3.1: Componentes y características del amplificador de potencia.

#### 3.4.2. Circuito de accionamiento del conmutador

Para el accionamiento del conmutador de potencia, del circuito de amplificación del actuador, se requiere de un circuito de aislamiento entre la etapa de control y la etapa de potencia del sistema, así como un driver para accionar el transistor del amplificador de potencia. Por ello, se utiliza el circuito integrado PC923 de la compañía SHARP, el cual cuenta con un circuito de accionamiento directo incorporado para unidad MOS-FET o IGBT, aislado de la etapa de control mediante un opto-acoplador. En la Figura 3.8 se muestra el circuito diseñado para el accionamiento del conmutador de potencia.



FIGURA 3.8: Circuito de accionamiento del conmutador de potencia.

# 3.5. Diseño de etapa de retroalimentación del sistema

El diseño de la etapa de realimentación y monitoreo del sistema de levitación electromagnética propuesto se desarrolla en esta sección. Para obtener la información acerca de las variables de estado del sistema de un grado de libertad se utiliza un sensor de posición y dos sensores de corriente. A continuación, se presenta el diseño detallado de cada transductor.

#### 3.5.1. Sensor de posición

Para monitorear la posición del elemento suspendido del sistema se utiliza un sensor de posición basado en un transformador diferencial variable lineal (LVDT, por sus siglas en ingles). Cabe mencionar que su implementación es bastante extensa debido a sus benéficas propiedades de ser un sensor sin contacto, con una resolución virtual infinita y de alta precisión [49]. Dicha resolución y precisión están determinadas principalmente por la electrónica de acondicionamiento. Este tipo de transformador eléctrico está constituido por un núcleo ferromagnético móvil y tres devanados: uno primario y dos secundarios.



FIGURA 3.9: Diagrama de funcionamiento del transformador diferencial variable lineal [55].

El principio de funcionamiento del transformador diferencial variable lineal se muestra en la Figura 3.9. En efecto, el elemento suspendido del sistema se encuentra unido al núcleo ferromagnético móvil del transformador. La posición del núcleo modifica el acoplamiento magnético entre el embobinado primario y los secundarios en proporción del elemento móvil. Cuando un voltaje de corriente alterna es aplicado al embobinado primario, el transductor genera una salida eléctrica proporcional al desplazamiento del núcleo móvil. En particular, cuando el núcleo se encuentra completamente en un extremo de la estructura, el voltaje de un embobinado secundario es máximo mientras que el otro devanado se mantiene en el mínimo voltaje inducido. Entonces, cuando el núcleo se encuentra posicionado a mitad de la estructura, ambos devanados secundarios poseen el mismo voltaje. Luego, considerando que el voltaje de alimentación del devanado primario es de la forma

$$E_s(t) = A_p \cos(2\pi f_0 t)$$

en los devanados secundarios del transformador se induce un voltaje de la misma forma, pero con distinta amplitud y fase

$$E_x(t) = A_x cos(2\pi f_0 t) + \psi_x$$
$$E_y(t) = A_y cos(2\pi f_0 t) + \psi_y$$

De esta manera, la posición del núcleo del transformador pude ser extraída de una lectura diferencial de las señales de los devanados secundarios. Las amplitudes de las señales de los devanados secundarios dependen en la sensibilidad y la posición del núcleo del transformador diferencial variable lineal [43]. Una consideración importante en el sistema es la linealidad de este. De modo que, se busca que la relación entre la posición del núcleo y el voltaje de salida del acondicionador de señal sea lineal, por ello las características físicas de los devanados deben ser idénticas. En la Tabla 3.2 se presentan los requerimientos característicos para el sensor de posición.

Desplazamiento total de núcleo	40 mm
Frecuencia de señal	1.5 kHz
Voltaje en devanado primario	4 Vrms
Voltaje de salida	0 - 2.5 V <sub>DC</sub>

TABLA 3.2: Requerimientos de diseño para el sensor de posición.

La estructura sobre la cual se montan los devanados se compone de un cilindro hueco de 162 mm de longitud axial, en el cual se desplaza el núcleo del sensor. Después, considerando que el núcleo ferromagnético móvil del transformador debe acoplar al menos dos de los tres devanados montados sobre el sensor, se ha seleccionado una longitud de 50 mm para tal núcleo. Asimismo, el orificio sobre el cual se desplaza el núcleo móvil es de 6 *mm* de diámetro, para evitar agregar un peso significativo a causa del sensor. Sobre la estructura descrita anteriormente, construida con polímero de ácido láctico, se montan los devanados de cobre de 700 vueltas cada uno y misma longitud. Por otro lado, a pesar de que la lectura del sensor puede ser precisa incluso en instalaciones críticas o con influencia de ruido en la señal, este sensor ha demostrado ser altamente sensible ante variaciones externas de un campo magnético [42]. La influencia de tales fenómenos puede conducir a errores en la lectura de posición y, por tanto, se añade un blindaje de aluminio sobre los devanados para reducir el ruido eléctrico en las señales del dispositivo producido por la interferencia magnética generada por los actuadores del sistema.



FIGURA 3.10: Circuito de acondicionamiento para la señal del devanado primario del sensor LVDT.

Luego, para el acondicionamiento de las señales del transductor, se requiere diseñar un circuito que suministre una corriente alterna al devanado primario. Para ello, se implementa un circuito oscilador eléctrico que genere una onda sinusoidal a una frecuencia de 1.5 *kHz*. Para generar dicha señal se emplea un amplificador operacional con un arreglo resistivo capacitivo, como se muestra en la Figura 3.10. Seguido al oscilador se coloca un potenciómetro para ajustar el voltaje efectivo que alimenta el devanado primario. Este es ajustado a un voltaje nominal de 4 *Vrms*. De la misma manera, se añade un amplificador complementario con dos transistores: NPN y PNP; para aumentar la capacidad de corriente de salida del circuito, dado que se
alimentan bobinas de unos pocos ohmios. Y, a fin de mejorar el desempeño del sensor, se agregan dos condensadores eléctricos para causar resonancia en el devanado primario y este se comporte como una carga puramente resistiva. Por otro lado, se sabe que las dos bobinas secundarias proporcionan un voltaje inducido que también es de forma sinusoidal. En primer lugar, se debe convertir dicha onda sinusoidal a una tensión constante a la altura de su amplitud. Para realizar esto, se emplea una pequeña modificación del rectificador de precisión que permite mantener el máximo de una señal, al cual se le ha remplazado la resistencia a la salida por un capacitor.



FIGURA 3.11: Circuito de acondicionamiento para la señal de los devanados secundarios del sensor LVDT.

Una vez se han rectificado las señales de las dos bobinas secundarias se restan con un amplificador operacional, como se muestra en la Figura 3.11, y posteriormente se añade un circuito restador que permita ajustar el cero del dispositivo de manera manual, ya que los devanados no están precisamente calibrados o no tienen exactamente el mismo número de vueltas y longitud, de modo que el cero no coincide con la posición central del núcleo. Entonces, la amplitud y offset del voltaje de salida del transductor de corriente directa pueden ser ajustados para establecer una comunicación de manera óptima con el controlador digital de señales.

### 3.5.2. Sensor de corriente

Del mismo modo, para monitorear las corrientes que fluyen a través de los devanados de los actuadores se utiliza un método directo de detección. Este consiste en un sensor de corriente de parte alta mediante una resistencia de prueba conectada en serie de baja impedancia, pero suficiente para generar una pequeña caída de tensión entre sus terminales. Así, este voltaje diferencial puede ser amplificado mediante un circuito restador, como se muestra en la Figura 3.12, con una ganancia suficiente para comunicarse de manera apropiada con el controlador digital de señales del sistema.



FIGURA 3.12: Circuito de sensor de corriente de parte alta.

El circuito del sensor de corriente de parte alta permite al sistema identificar un corto circuito y no genera una perturbación de tierra en la carga [24]. Asimismo, se debe utilizar el amplificador operacional en su región de operación lineal, por lo que

se requiere un componente que opere en todo el rango de voltaje de alimentación para obtener un amplio rango de operación lineal en el transductor. En la Tabla 3.3 se muestran los principales requerimientos deseados en el diseño del circuito para el monitoreo de las corrientes de los actuadores.

Entrada	I <sub>min</sub>	10 mA
	I <sub>max</sub>	1 A
Salida	V <sub>min</sub>	10 <i>mV</i>
	V <sub>max</sub>	2.5 V
Alimentación	V <sub>ee</sub>	0 V
	V <sub>cc</sub>	12 V

TABLA 3.3: Requerimientos de diseño para el sensor de corriente.

Por otra parte, se ha seleccionado el amplificador operacional de entradas y salidas de riel a riel OPA2192, de la compañía Texas Instruments, el cual permite operar en su región lineal en todo el rango de voltaje de alimentación. Luego, la resistencia de prueba se establece a partir de la caída de voltaje máximo y la corriente máxima que fluye a través de tal elemento

$$R_{shunt} = \frac{V_{imax}}{I_{max}} = \frac{100mV}{1A} = 100m\Omega$$

y la ganancia del amplificador diferencial se determina en base al rango de oscilación máxima de salida

$$Gan = \frac{V_{max} - V_{min}}{(I_{max} - I_{min})R_{shunt}} = \frac{(2.5V - 0.01V)}{(1A - 0.01A)100m\Omega} = 25.1515$$

entonces, estableciendo los resistores como  $R_a = R_b = 1k\Omega$ , se tiene que

$$R_c = R_d = R_a(Gan) = 1k\Omega(25.1515) = 25.15k\Omega$$

y se calcula el voltaje en modo común del amplificador, para verificar que no supere el límite del rango de voltaje, y se asegure la operación lineal del sensor

$$V_{cm} = V_{cc}(\frac{R_c}{R_b + R_c}) = 12V(\frac{25.15k\Omega}{1k\Omega + 25.15k\Omega}) = 11.54V$$

## 3.6. Modelo matemático de sistema

El sistema de levitación magnética de un grado de libertad se modela considerando parámetros concentrados e invariantes en el tiempo. En la Figura 3.13 se muestra la representación esquemática del cual se basa el modelado matemático del sistema.



FIGURA 3.13: Modelo promedio del sistema de levitación magnética de un grado de libertad.

La auto-inductancia de los electroimanes se encuentra dado por la capacidad del enlace de flujo magnético por unidad de corriente,

$$L = \frac{N\phi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l_a + \frac{l_e}{\mu_r}}$$
(3.1)

y se tiene que la permeabilidad relativa del núcleo de los electroimanes es significativamente mayor que la del aire, entonces el efecto del hueco de aire entre la cara del electroimán y el elemento suspendido rige el comportamiento del circuito magnético. Luego, para el caso en el que el flujo magnético es proporcional a la fuerza magnetomotriz y tomando en consideración que los campos magnéticos de los actuadores están desacoplados, la energía del campo puede ser expresada en términos de la auto-inductancia de cada electroimán [38]. Así, la energía almacenada en el volumen donde se desplaza el elemento suspendido, considerando el sistema de referencia del diagrama en la Figura 3.13, es la siguiente

$$W_m = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{2(h-y)}i_1^2 + \frac{\mu_0 N_2^2 A}{2(h+y)}i_2^2$$
(3.2)

donde  $i_1$  e  $i_2$  son las corrientes del actuador superior e inferior, respectivamente. Por tanto, despreciando los efectos de borde del campo magnético y definiendo a  $k_1$  y  $k_2$  como los coeficientes de acoplamiento, la fuerza de reluctancia total inducida en el elemento suspendido del sistema es

$$f_m = \frac{\partial W_m}{\partial y} = \frac{k_1}{(h-y)^2} i_1^2 - \frac{k_2}{(h+y)^2} i_2^2$$
(3.3)

y de la segunda ley de Newton para el movimiento lineal del elemento suspendido, en el dominio |y| < h, se obtiene la siguiente dinámica mecánica del sistema

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k_1}{(h-y)^2}i_1^2 - \frac{k_2}{(h+y)^2}i_2^2 - mg - b\frac{dy}{dt} + f_p$$
(3.4)

donde *m* es la masa del elemento suspendido, *h* es la longitud del hueco de aire cuando y = 0, *b* es el coeficiente de fricción viscosa generado entre el rodamiento lineal y el eje, *g* es la gravedad terrestre y  $f_p$  es una fuerza de perturbación desconocida pero acotada. Por otro lado, se realiza el análisis del comportamiento del circuito de ambos electroimanes, en los estados de saturación y corte del transistor y diodo.



FIGURA 3.14: Diagramas de los circuitos de actuadores cuando los interruptores se encuentran cerrados ( $u_1 = u_2 = 1$ ).

Entonces, aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en el circuito de cada electroimán cuando el interruptor de potencia se encuentra en estado de conducción, como se muestra en la Figura 3.14, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = V_s - R_1 i_1 \tag{3.5}$$

$$L_2 \frac{di_1}{dt} = V_s - R_2 i_2 \tag{3.6}$$

donde  $L_1$  y  $L_2$  son las inductancias nominales del electroimán superior e inferior, respectivamente;  $R_1$  y  $R_2$  son las impedancias nominales del electroimán superior e inferior, respectivamente; y  $V_s$  es el voltaje de alimentación del sistema. Por otro lado, considerando la dinámica de los circuitos eléctricos más rápida que la dinámica de los carcuitos eléctricos más rápida que la dinámica de los circuitos eléctricos más rápida que la dinámica de los circuitos eléctricos más rápida que la dinámica de los circuitos eléctricos más rápida que la dinámica de los circuitos eléctricos más rápida que la dinámica de los circuitos eléctricos más rápida que la dinámica describir el comportamiento de los actuadores [40], sin tomar en cuenta la relación de la inductancia dependiente de la posición descrita en la ecuación (3.1).



(A) Circuito de electroimán superior. (B) Circuito de electroimán inferior.

FIGURA 3.15: Diagramas de los circuitos de actuadores cuando los interruptores se encuentran abiertos ( $u_1 = u_2 = 0$ ).

De la misma manera, cuando el interruptor se encuentra en estado de corte, el diodo se polariza directamente y comienza a conducir, como se aprecia en la Figura 3.15, generando el siguiente par de ecuaciones

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 \tag{3.7}$$

$$L_2 \frac{di_1}{dt} = -R_2 i_2 \tag{3.8}$$

y se observa que la diferencia del comportamiento de los electroimanes, entre los estados de conmutación del interruptor de potencia, se presenta debido el término del voltaje de alimentación del sistema. Por tanto, el comportamiento promedio de los actuadores o la etapa eléctrica del sistema es descrito por las siguientes ecuaciones

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = V_s u_1 - R_1 i_1 \tag{3.9}$$

$$L_2 \frac{di_1}{dt} = V_s u_2 - R_2 i_2 \tag{3.10}$$

Luego, para llevar el sistema a su forma no lineal afín se definen las variables de estado de la siguiente manera

$$x_1 = y x_2 = \frac{dy}{dt}$$
$$x_3 = i_1 x_4 = i_2$$

entonces, el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del sistema de suspensión electromagnética de un grado de libertad, representado en variables de estado, es el siguiente

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.11}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k_1}{m(h-x_1)^2} x_3^2 - \frac{k_2}{m(h+x_1)^2} x_4^2 - g - \frac{b}{m} x_2 + \frac{1}{m} f_p$$
(3.12)

$$\dot{x}_3 = \frac{Vs}{L_1} u_1 - \frac{R_1}{L_1} x_3 \tag{3.13}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{Vs}{L_2}u_2 - \frac{R_2}{L_2}x_4 \tag{3.14}$$

Es posible observar que el modelo obtenido es un sistema no lineal autónomo de cuarto orden con dos entradas de control desacopladas, por lo que es factible apreciar al sistema de dos entradas como dos subsistemas de una entrada. Posteriormente, se obtienen los puntos de equilibrio  $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{u}_1, \overline{u}_2\}$  asociados al estado y las entradas de control del sistema en estado estacionario. Esto implica igualar las ecuaciones que describen la dinámica de las variables de estado a cero, y expresar

estas últimas en términos de la variable que se requiere estabilizar y regular: la posición del elemento suspendido; y se han obtenido las siguientes expresiones

$$\overline{x}_1 = y_d \tag{3.15}$$

$$\overline{x}_2 = 0 \tag{3.16}$$

$$\overline{x}_{3} = \sqrt{\frac{k_{2}(h - y_{d})^{2}}{k_{1}(h + y_{d})^{2}}}i_{2d}^{2} + \frac{(h - y_{d})^{2}(mg - f_{p})}{k_{1}}$$
(3.17)

$$\overline{x}_4 = i_{2d}(y_d, \overline{x}_3) \tag{3.18}$$

$$\overline{u}_1 = \frac{R_1}{V_s} \sqrt{\frac{k_2(h - y_d)^2}{k_1(h + y_d)^2}} i_{2d}^2 + \frac{(h - y_d)^2(mg - f_p)}{k_1}$$
(3.19)

$$\overline{u}_2 = \frac{R_1}{V_s} i_{2d} \tag{3.20}$$

Como se ha demostrado en [40], las entradas de control se deben acoplar mediante una selección particular de las salidas del sistema, de modo que se controle la posición del elemento suspendido de manera activa a través de ambas entradas de control. Es decir, las dos salidas del sistema deben ser dependientes una respecto de la otra. Hacer esto requiere de un análisis más riguroso y con una mayor complejidad para el diseño del controlador del sistema, por lo que se busca evitar este acoplamiento al momento de realizar la parametrización diferencial de las variables de estado y las funciones de control.

### 3.6.1. Controlabilidad del sistema

En primer lugar se debe demostrar que el sistema es diferencialmente plano, por lo que se tiene el siguiente modelo matemático del sistema de levitación magnética representado en su forma no lineal matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g_1 u_1 + g_2 u_2 \tag{3.21}$$

donde x es el vector de estado,  $f(\mathbf{x})$  es el vector de funciones que describen el comportamiento natural del sistema y  $g_1$ ,  $g_2$  son los vectores de control

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$
(3.22)

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{k_1}{m(h-x_1)^2} x_3^2 - \frac{k_2}{m(h+x_1)^2} x_4^2 - g - \frac{b}{m} x_2 + \frac{1}{m} f_p \\ -\frac{R_1}{L_1} x_3 \\ -\frac{R_2}{L_2} x_4 \end{pmatrix}$$
(3.23)

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\\frac{Vs}{L_1}\\0 \end{pmatrix}$$
(3.24)

$$g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Vs}{L_2} \end{pmatrix}$$
(3.25)

Después, considerando las dos entradas de control, se emplean las columnas linealmente independientes de la matriz de controlabilidad de Kalman del sistema para construir una matriz  $\varsigma$  de rango completo [54], a partir de la siguiente ecuación

$$\varsigma = [g_1 \ ad_f g_1 \ ad_f^2 g_1 \ g_2] \tag{3.26}$$

donde el corchete o producto de Lie se define de la siguiente manera

$$ad_f^n g_1 = [f, ad_f^{n-1}g_1] = \nabla ad_f^{n-1}g_1 \cdot f - \nabla f \cdot ad_f^{n-1}g_1$$

entonces

$$ad_{f}g_{1} = [f,g_{1}] = \begin{pmatrix} 0\\ -\frac{2k_{1}V_{s}x_{3}}{mL_{1}(h-x_{1})^{2}}\\ \frac{R_{1}V_{s}}{L_{1}^{2}}\\ 0 \end{pmatrix}$$
(3.27)
$$ad_{f}^{2}g_{1} = \begin{pmatrix} \frac{2R_{1}k_{1}V_{s}(1-x_{3})}{mL_{1}^{2}(h-x_{1})^{2}} - \frac{2k_{1}bV_{s}x_{3}}{m^{2}L_{1}(h-x_{1})^{2}} - \frac{4k_{1}V_{s}x_{2}x_{3}}{mL_{1}(h-x_{1})^{3}}\\ -\frac{R_{1}^{2}V_{s}}{L_{1}^{3}}\\ 0 \end{pmatrix}$$
(3.28)

Luego, el determinante de la matriz de controlabilidad del sistema, en relación a las dos entradas de control, es el siguiente

$$det(\varsigma) = \frac{4k_1^2 V_s^4 x_3^2}{m^2 L_1^3 L_2 (h - x_1)^4}$$
(3.29)

donde se observa que si  $x_1 \neq h$  y  $x_3 \neq 0$  entonces  $det(\varsigma) \neq 0$ , causando que el sistema sea de estado completamente controlable a partir de ambas entradas de control. En consecuencia, el sistema de levitación magnética es diferencialmente plano. Por otra parte, al apreciar el sistema de levitación magnética como un sistema de una entrada y una salida, donde únicamente se considera la entrada de control  $u_1$ , es posible demostrar con facilidad la existencia de la primer salida diferencialmente plana del sistema. Para ello, se considera el siguiente subconjunto de la matriz de controlabilidad

$$D = \{g_1 \quad ad_f g_1\}$$

y se obtiene el producto de Lie de un par de elementos de tal subconjunto

$$[g_1, ad_f g_1] = \begin{pmatrix} 0\\ -\frac{2k_1 V_s^2}{mL_1^2(h-x_1)^2}\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$
(3.30)

de esta manera, se tiene que el subconjunto

$$D_{+1} = \{g_1 \quad ad_fg_1 \quad ad_{g_1}ad_fg_1\}$$

permanece invariante en su rango y, por tanto, el conjunto *D* es involutivo y el sistema es linealizable de entrada a estado [7]. Más adelante, se muestra que las salidas planas del sistema se encuentran definidas, y la suma de los grados relativos de dichas salidas es igual al orden del sistema.

### 3.6.2. Parametrización diferencial

Se ha demostrado que el sistema es diferencialmente plano y linealizable de manera exacta y cuenta con dos entradas de control, por lo que el sistema tiene definidas dos salidas diferencialmente planas [60]. La primera salida diferencialmente plana del sistema de levitación magnética de un grado de libertad es tal que cumple la siguiente condición

$$\nabla F_1 \cdot (g_1 \quad ad_f g_1) = (0 \quad 0)$$

de donde se obtiene el siguiente par de ecuaciones

$$\frac{Vs}{L_1}\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \tag{3.31}$$

$$-\frac{2k_1V_sx_3}{mL_1(h-x_1)^2}\frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{R_1V_s}{L_1^2}\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$
(3.32)

Por otra parte, el elemento no nulo del último vector columna de la matriz de controlabilidad sugiere una relación directa entre la entrada de control  $u_2$  y la variable de estado  $x_4$ , dado que esta última presenta un comportamiento independiente a la primera entrada de control [12]. Así, y basándose en la parametrización diferencial en [40], se observa que una posible elección de las salidas diferencialmente planas del sistema son la posición vertical del elemento suspendido y la corriente en el electroimán inferior

$$y_1 = F_1 = x_1$$
  $y_2 = F_2 = x_4$ 

Luego, obteniendo las derivadas temporales sucesivas de ambas salidas planas, y tomando en cuenta las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, se obtiene la siguiente parametrización diferencial

$$x_1 = F_1 \tag{3.33}$$

$$x_2 = \dot{F}_1 \tag{3.34}$$

$$x_{3} = \sqrt{\frac{m(h-F_{1})^{2}}{k_{1}}} \ddot{F}_{1} + \frac{b(h-F_{1})^{2}}{k_{1}} \dot{F}_{1} + \frac{k_{2}(h-F_{1})^{2}}{k_{1}(h+F_{1})^{2}} F_{2}^{2} + \frac{(h-F_{1})^{2}(mg-f_{p})}{k_{1}} \quad (3.35)$$

$$x_4 = F_2$$
 (3.36)

$$u_1 = \frac{mL_1(h - F_1)^2}{2\alpha k_1 V_s} F_1 + \varphi_1 \tag{3.37}$$

$$u_2 = \frac{L_2}{V_s} \dot{F_2} + \varphi_2 \tag{3.38}$$

con

$$\alpha = \sqrt{\frac{m(h-F_1)^2}{k_1}}\vec{F_1} + \frac{b(h-F_1)^2}{k_1}\vec{F_1} + \frac{k_2(h-F_1)^2}{k_1(h+F_1)^2}F_2^2 + \frac{(h-F_1)^2(mg-f_p)}{k_1}$$

$$\begin{split} \varphi_{1} &= \frac{bL_{1}(h-F_{1})^{2}}{2\alpha k_{1}V_{s}} \vec{F}_{1} - \frac{mL_{1}(h-F_{1})}{\alpha k_{1}V_{s}} \vec{F}_{1} \vec{F}_{1} - \frac{mgL_{1}(h-F_{1})}{\alpha k_{1}V_{s}} \vec{F}_{1} - \frac{2k_{2}h(h-F_{1})}{\alpha k_{1}V_{s}(h+F_{1})^{3}} F_{2}^{2} \vec{F}_{1} \\ &+ \frac{k_{2}L_{1}(h-F_{1})^{2}}{\alpha k_{1}V_{s}(h+F_{1})^{2}} F_{2} \vec{F}_{2} - \frac{bL_{1}(h-F_{1})}{\alpha k_{1}V_{s}} \vec{F}_{1}^{2} + \frac{L_{1}(h-F_{1})}{\alpha k_{1}V_{s}} f_{p} \vec{F}_{1} - \frac{L_{1}(h-F_{1})}{2\alpha k_{1}V_{s}} \vec{f}_{p} \\ &+ \frac{R_{1}}{V_{s}} \sqrt{\frac{m(h-F_{1})^{2}}{k_{1}}} \vec{F}_{1} + \frac{b(h-F_{1})^{2}}{k_{1}} \vec{F}_{1} + \frac{k_{2}(h-F_{1})^{2}}{k_{1}(h+F_{1})^{2}} F_{2}^{2} + \frac{(h-F_{1})^{2}(mg-f_{p})}{k_{1}} \\ &\varphi_{2} = \frac{R_{2}}{L_{2}} F_{2} \end{split}$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  engloban las perturbaciones endógenas y exógenas del sistema y, en general, cualquier comportamiento dinámico que no aparezca explícitamente en las ecuaciones del modelo tal como los efectos de borde del campo magnético, los efectos de la temperatura en los componentes de los circuitos del sistema, la inductancia

mutua entre los electroimanes y el fenómeno de histéresis en el núcleo ferromagnético de los actuadores. Del mismo modo, se observa que la salida plana asociada a la posición lineal del elemento suspendido es de grado relativo tres ( $r_1 = 3$ ), debido a que se requiere derivar tres veces dicha salida para obtener una relación directa con la entrada de control  $u_1$ . Mientras que la salida plana asociada a la corriente del electroimán inferior es de grado relativo uno ( $r_2 = 1$ ), debido que se requiere derivar una vez tal salida para obtener una relación directa con la entrada de control  $u_2$ .

## 3.7. Control por rechazo activo de perturbaciones

El esquema de control por rechazo activo de perturbaciones requiere del diseño de una señal de control como diferenciador de seguimiento que minimice el error de realimentación del estado del sistema, y el diseño de un observador de estado extendido para estimar la compensación de las incertidumbres y perturbaciones endógenas y exógenas del sistema que se ha modelado [26]. A continuación, se desarrolla el diseño de la ley de control para el sistema de levitación magnética del presente trabajo de investigación.

### 3.7.1. Controlador basado en modos deslizantes

Se propone un controlador por planitud diferencial basado en la técnica de modos deslizantes como primera fase del diseño de la ley de control. De esta manera, a partir de la parametrización diferencial del sistema, se diseña un controlador auxiliar sobre la derivada de más alto orden de cada salida plana de la siguiente forma

$$\frac{mL_1(h-F_1)^2}{2\alpha k_1 V_s} \vec{F_1} + \varphi_1 = \frac{mL_1(h-F_1)^2}{2\alpha k_1 V_s} v_1 + \hat{\varphi}_1$$
(3.39)

$$\frac{L_2}{V_s}\dot{F}_2 + \varphi_2 = \frac{L_2}{V_s}v_2 + \hat{\varphi}_2$$
(3.40)

en donde los términos  $\hat{\varphi}_1$  y  $\hat{\varphi}_2$  son las funciones estimadas correspondientes a las incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Estas variables se estiman mediante observadores para aumentar la robustez del controlador al introducir un

término aditivo en las entradas de control que se adapte ante cambios en el sistema. En realidad, estas son las señales que requiere introducir la ley de control en el sistema para rechazar los términos no lineales, incertidumbres y perturbaciones de manera que este último presente una dinámica lineal en lazo cerrado. Más abajo, se diseñan las superficies de deslizamiento para cada salida diferencialmente plana, las cuales deben cumplir con la condición de ser una función diferenciable de grado relativo uno y ser de fase mínima, por lo que se definen de la siguiente manera

$$S_i(x,t) = \left(\frac{d}{dt} + C_i\right)^{r_i - 1} \widetilde{F}_i \tag{3.41}$$

para i = 1, 2, donde  $r_i$  es el grado relativo de cada salida y  $\tilde{F}_i$  es el error de seguimiento y regulación asociado a cada salida plana. Entonces, las superficies de deslizamiento para el sistema de levitación magnética son

$$S_1 = \left(\frac{d}{dt} + C_1\right)^2 (F_1 - F_1^*) = \ddot{F}_1 - \ddot{F}_1^* + 2C_1(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) + C_1^2(F_1 - F_1^*)$$
(3.42)

$$S_2 = \left(\frac{d}{dt} + C_2\right)^0 (F_2 - F_2^*) = F_2 - F_2^*$$
(3.43)

con  $C_1 > 0$  y donde  $F_1^*$ ,  $F_2^*$  son los valores deseados para la primera y segunda salida plana, respectivamente. En consecuencia, se ha remplazado el problema de control de tercer orden por un problema de seguimiento de primer orden. Ahora, se construye la dinámica equivalente de Filippov del sistema en régimen deslizante, determinada por  $\dot{S}_i = 0$ , para encontrar el controlador equivalente que garantice que las trayectorias del sistema en el espacio de estados sean tangentes a las superficies de deslizamiento [61]. En síntesis, se despeja la derivada de mayor orden de la primera salida plana de la ecuación (3.42) y, considerando a  $\dot{S}_1 = S_1 = 0$ , se deriva su respectiva superficie de deslizamiento respecto del tiempo

$$\ddot{F}_{1} - \ddot{F}_{1}^{*} = -2C_{1}(\dot{F}_{1} - \dot{F}_{1}^{*}) - C_{1}^{2}(F_{1} - F_{1}^{*})$$
$$\dot{S}_{1} = \ddot{F}_{1} - \ddot{F}_{1}^{*} + 2C_{1}(\ddot{F}_{1} - \ddot{F}_{1}^{*}) + C_{1}^{2}(\dot{F}_{1} - \dot{F}_{1}^{*})$$
(3.44)

entonces, utilizando la ecuación (3.39) y definiendo a  $\Delta \varphi_1 = \varphi_1 - \widehat{\varphi}_1$ , se tiene que

$$v_{1eq} - \frac{2\alpha k_1 V_s}{mL_1(h - F_1)^2} \Delta \varphi_1 - \ddot{F}_1^* + 2C_1(-2C_1(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) - C_1^2(F_1 - F_1^*)) + C_1^2(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) = 0$$

$$v_{1eq} = \ddot{F}_1^* + 3C_1^2(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) + 2C_1^3(F_1 - F_1^*) + \frac{2\alpha\kappa_1 v_s}{mL_1(h - F_1)^2}\Delta\varphi_1$$
(3.45)

De la misma manera, se obtiene el controlador equivalente asociado a la superficie de deslizamiento  $S_2$ , considerando a  $\dot{S}_2 = S_2 = 0$ , y se tiene que

$$\dot{S}_2 = \dot{F}_2 \tag{3.46}$$

donde empleando la ecuación (3.40) y definiendo a  $\Delta \varphi_2 = \varphi_2 - \hat{\varphi}_2$ , la expresión se reescribe como

$$v_{2eq} - \frac{V_s}{L_2} \Delta \varphi_2 = 0$$

$$v_{2eq} = \frac{V_s}{L_2} \Delta \varphi_2$$
(3.47)

Así, las funciones del controlador interno equivalente de cada salida del sistema quedan acotadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |v_{1eq}| &\leq |\ddot{F}_1^*| + 3C_1^2 |\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*| + 2C_1^3 |F_1 - F_1^*| + \frac{2\alpha k_1 V_s}{mL_1(h - F_1)^2} |\Delta \varphi_1| \\ |v_{2eq}| &\leq \frac{V_s}{L_2} |\Delta \varphi_2| \end{aligned}$$

y por tanto, la ley de control auxiliar basada en modos deslizantes, para el sistema de suspensión electromagnética de un grado de libertad, es la siguiente

$$u_1 = \frac{mL_1(h - F_1)^2}{2\alpha k_1 V_s} v_1 + \hat{\varphi}_1$$
(3.48)

$$u_2 = \frac{L_2}{V_s} v_2 + \widehat{\varphi}_2 \tag{3.49}$$

donde se ha agregado un término de discontinuidad en los controladores internos debido a la presencia de incertidumbre en el modelo

$$v_1 = -\Lambda_1 | v_{1eq} | sgn(S_1)$$
(3.50)

$$v_2 = -\Lambda_2 |v_{2eq}| sgn(S_2) \tag{3.51}$$

con  $\Lambda_1 > 1$  y  $\Lambda_2 > 1$ . Por otra parte, el control por rechazo activo de perturbaciones, para el sistema de levitación magnética de un grado de libertad, requiere de observadores tipo Luenberger para la estimación de las señales  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , presentes en las funciones de control del sistema. En el siguiente apartado se presenta el diseño de tales estimadores lineales.

### 3.7.2. Observador de estado extendido

En el diseño de un observador de estado extendido lineal se realiza una copia del modelo matemático del sistema, al cual se le agrega un término de corrección, y se extiende la dinámica del estado asociado a la función que se desea estimar a partir de la entrada de control y la salida del sistema, como se describe detalladamente en [72]. Además, se ha demostrado que el sistema es linealizable de entrada a estado, por lo que existe una transformación de cambio de coordenadas para llevar el sistema a la forma normal de Brunovsky. Por tal motivo, se definen las siguientes variables

$$z_1 = F_1 \qquad z_2 = \dot{F}_1$$
$$z_3 = \ddot{F}_1 \qquad z_4 = F_2$$

de esta manera, se obtiene la siguiente representación del sistema en su forma canónica controlable

$$\dot{z}_1 = z_2$$
 (3.52)

$$\dot{z}_2 = z_3$$
 (3.53)

$$\dot{z}_3 = \frac{2\alpha k_1 V_s}{mL_1 (h - F_1)^2} u_1 - \frac{2\alpha k_1 V_s}{mL_1 (h - F_1)^2} \varphi_1$$
(3.54)

$$\dot{z}_4 = \frac{V_s}{L_2} u_2 - \frac{V_s}{L_2} \varphi_2 \tag{3.55}$$

y a partir de las ecuaciones 3.52, 3.53 y 3.54 se propone un observador de estado extendido con un integrador, para estimar la función que engloba las perturbaciones exógenas y endógenas asociadas a la salida plana  $F_1$ , por lo que se realiza el siguiente cambio de variable

$$\eta = -\frac{2\alpha k_1 V_s}{mL_1(h - F_1)^2}\widehat{\varphi}_1 \tag{3.56}$$

entonces, realizando la copia del modelo mediante las expresiones mencionadas, se tiene que las ecuaciones del observador lineal de estado extendido son

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + \lambda_3 (F_1 - \hat{z}_1)$$
 (3.57)

$$\hat{z}_2 = \hat{z}_3 + \lambda_2 (F_1 - \hat{z}_1)$$
 (3.58)

$$\dot{\widehat{z}}_3 = \frac{2\alpha k_1 V_s}{mL_1(h - F_1)^2} u_1 + \eta + \lambda_1(F_1 - \widehat{z}_1)$$
(3.59)

$$\dot{\eta} = \lambda_0 (F_1 - \hat{z}_1) \tag{3.60}$$

siendo  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{z}_2$  y  $\hat{z}_3$  las variables estimadas para la posición, velocidad y aceleración del elemento suspendido, respectivamente;  $\eta$  es el estado asociado a la dinámica que se extiende con el estimador y { $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ } son las ganancias del observador. Luego, la dinámica del error de estimación es

$$e_{1} = F_{1} - \hat{z}_{1}$$

$$\stackrel{(4)}{e}_{1} + \lambda_{3} \ddot{e}_{1} + \lambda_{2} \ddot{e}_{1} + \lambda_{1} \dot{e}_{1} + \lambda_{0} e_{1} = \dot{\eta} (F_{1}, \dot{F}_{1}, \ddot{F}_{1}, \varphi_{1})$$
(3.61)

en donde se ha considerado que la perturbación  $\eta(F_1, \dot{F}_1, \varphi_1)$  y sus derivadas son uniformemente acotadas. Esto implica que la tasa de cambio de dicha señal tiende a cero, en sentido práctico, a medida que la frecuencia de muestreo del sistema digital tiende a infinito. Y para sintonizar las ganancias del observador se iguala el polinomio característico de la dinámica del error de estimación del observador con un polinomio Hurwitz de cuarto orden, de tal forma que se asegure que los polos de dicha dinámica se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo

$$P_{H_1}(s) = (s^2 + 2\zeta \omega_n + \omega_n^2)^2$$
(3.62)

con 0 <  $\zeta$  < 1 y  $\omega$  > 0. Entonces, las ganancias del observador se encuentran definidas de la siguiente manera

$$\lambda_0 = \omega_n^4$$
$$\lambda_1 = 4\zeta \omega_n^3$$
$$\lambda_2 = 4\zeta^2 \omega_n^2 + 2\omega_n^2$$
$$\lambda_3 = 4\zeta \omega_n$$

Seguidamente, basándose en la ecuación 3.55, se propone un observador de estado extendido con un integrador, para estimar la función que engloba las perturbaciones exógenas y endógenas asociadas a la salida plana  $F_2$ , en donde se lleva a cabo el siguiente cambio de variable

$$\rho = -\frac{V_s}{L_2}\widehat{\varphi}_2 \tag{3.63}$$

entonces, realizando la copia del modelo mediante la expresión mencionada, se tiene que las ecuaciones del observador lineal de estado extendido son

$$\dot{\hat{z}}_4 = \frac{V_s}{L_2}u_2 + \rho + \mu_1(F_2 - \hat{z}_4)$$
(3.64)

$$\dot{\rho} = \mu_0 (F_2 - \hat{z}_4) \tag{3.65}$$

siendo  $\hat{z}_4$  la variable estimada para la corriente del actuador inferior,  $\rho$  es el estado asociado a la dinámica que se extiende con el estimador y { $\mu_0$ ,  $\mu_1$ } son las ganancias del observador. Luego, la dinámica del error de observación es

$$e_2 = F_2 - \tilde{z}_4$$
  
 $\ddot{e}_2 + \mu_1 \dot{e}_2 + \mu_0 e_2 = \dot{\rho}(\varphi_2)$  (3.66)

en donde se ha considerado que la perturbación  $\rho(\varphi_2)$  y sus derivadas son uniformemente acotadas, lo que implica que la tasa de cambio de dicha señal tiende a cero, en sentido práctico, a medida que la frecuencia de muestreo del sistema digital tiende a infinito. Y para sintonizar las ganancias del observador se iguala el polinomio característico de la dinámica del error de estimación del observador con un polinomio Hurwitz de segundo orden, de tal forma que se asegure que los polos de dicha dinámica se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo

$$P_{H_2}(s) = s^2 + 2\zeta \omega_n + \omega_n^2$$
(3.67)

con 0 <  $\zeta$  < 1 y  $\omega$  > 0. Entonces, las ganancias del observador se encuentran definidas de la siguiente manera

$$\mu_0 = \omega_n^2$$
$$\mu_1 = 2\zeta\omega_n$$

por tanto, la ley de control con enfoque al rechazo activo de perturbaciones, en términos de las variables de los estimadores, resulta ser

$$u_1 = \frac{mL_1(h - F_1)^2}{2\alpha k_1 V_s} (v_1 - \eta)$$
(3.68)

$$u_2 = \frac{L_2}{V_s} (v_2 - \rho) \tag{3.69}$$

Nótese que para obtener la ganancia del controlador  $u_1$  es posible emplear tanto el valor real de la corriente del actuador superior como el que proporciona su parametrización diferencial. Sin embargo, es conveniente utilizar el valor otorgado por el transductor de corriente, puesto que es una variable accesible para su medición y no contiene términos significativos de perturbaciones no estructuradas. En definitiva, se han obtenido los elementos de la ley de control con enfoque al rechazo activo de perturbaciones para el sistema de levitación magnética propuesto en el presente trabajo de investigación, por lo que se encuentra de interés indagar acerca de la estabilidad del sistema en sentido matemático.

### 3.7.3. Estabilidad de sistema en lazo cerrado

La estabilidad del sistema de suspensión magnética, propuesto en el presente trabajo de investigación, depende directamente de la convergencia asintótica de los estimadores a una vecindad cercana a la función real, por lo que se realiza un análisis de la estabilidad de las ecuaciones que conforman los observadores lineales de estado extendido que se han diseñado para estimar las perturbaciones e incertidumbres asociadas a la posición del elemento suspendido y la corriente del electroimán inferior. Este estudio se basa en el criterio de estabilidad entrada al estado, desarrollado a detalle en [41], en donde se analiza la evolución en el tiempo de la solución de la ecuación de estado, con lo que es factible comprobar que las funciones estimadas convergen a su valor real o, por lo menos, a un vecindario cercano a este punto. Ahora, se sabe que dado un sistema lineal invariante en el tiempo de la forma

$$\mathbf{\dot{y}} = A\mathbf{y} + Bu$$
 ,  $\mathbf{y} \in R^n$ 

las trayectorias del sistema en el espacio de estado, con la condición inicial  $\mathbf{y}(t_0)$  y la entrada de control no trivial u(t), son dadas por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(t_0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

denominada como la solución de la ecuación de estado. En este sentido, se considera a la dinámica del error de estimación del primer observador, determinada por la ecuación (3.61), como un sistema lineal en donde la entrada es la variación respecto del tiempo de la señal que se aproxima mediante el estimador. Así, realizando el siguiente cambio de variable

$$\widetilde{x}_1 = e_1 \qquad \qquad \widetilde{x}_2 = \dot{e}_1 \qquad \qquad u_x = \dot{\eta}(F_1, F_1, F_1, \varphi_1)$$
  
$$\widetilde{x}_3 = \ddot{e}_1 \qquad \qquad \widetilde{x}_4 = \ddot{e}_1$$

se obtiene el siguiente sistema lineal de cuarto orden

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \tag{3.70}$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 \tag{3.71}$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_4 \tag{3.72}$$

$$\dot{\widetilde{x}}_4 = -\lambda_0 \widetilde{x}_1 - \lambda_1 \widetilde{x}_2 - \lambda_2 \widetilde{x}_3 - \lambda_3 \widetilde{x}_4 + u_x$$
(3.73)

a lo que la representación de este sistema en su forma lineal matricial es

$$\dot{\widetilde{\mathbf{x}}} = A_x \widetilde{\mathbf{x}} + B_x u_x \tag{3.74}$$

con  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T$ ,  $A_x \in R^{4x4}$  y  $B_x \in R^4$ . Como se ha establecido anteriormente, el origen del espacio del error de estimación de este observador es asintóticamente estable debido a que todos los eigen valores de la matriz  $A_x$  tienen parte real negativa y, por tanto, se tiene que  $||e^{A_x t}||$  es acotada para todo  $t \ge 0$  y satisface la siguiente condición

$$\|e^{A_x t}\| \le K_x e^{\lambda_x t} \quad , \quad \lambda_x < 0 \tag{3.75}$$

donde  $\lambda_x$  es el ínfimo eigen valor de la dinámica del error de observación. De ahí se tiene que la trayectoria del sistema (3.74) cumple

$$\|\widetilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq K_{x}e^{\lambda_{x}t}\|\widetilde{\mathbf{x}}(0)\| + \int_{0}^{t}K_{x}e^{\lambda_{x}(t-\tau)}\|B_{x}\|\|u_{x}(\tau)\|d\tau$$

$$\|\widetilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq K_{x}e^{\lambda_{x}t}\|\widetilde{\mathbf{x}}(0)\| + \frac{K_{x}\|B_{x}\|}{\lambda_{x}}sup_{t_{0}<\tau< t}|u_{x}(\tau)|$$
(3.76)

por lo tanto, se sigue que ante una entrada acotada da como lugar a estados acotados y que si lím<sub>t→∞</sub>  $u_x(t) = \delta(t)$ , entonces lím<sub>t→∞</sub>  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \delta(t)$ . De ello resulta que el observador lineal de estado extendido asociado a la posición del elemento suspendido es estable de entrada a estado, debido a que existe una función  $\beta_x$  de clase  $\mathcal{KL}$  y una función  $\gamma_x$  de clase  $\mathcal{K}$  tal que, para cualquier estado inicial  $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$  y cualquier entrada  $u_x(t)$ , la solución  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  satisface la siguiente condición

$$\|\widetilde{\mathbf{x}}(t)\| \le \max\{\beta_x(\|\widetilde{\mathbf{x}}(t_0)\|, t-t_0), \gamma_x(\sup_{t_0 < \tau < t} |u_x(\tau)|)\}$$
(3.77)

Después, se considera a la dinámica del error de estimación del segundo observador, determinada por la ecuación (3.66), como un sistema lineal en donde la entrada es la variación respecto del tiempo de la señal que se aproxima mediante el estimador. En efecto, realizando el siguiente cambio de variable

$$\widetilde{w}_1 = e_2$$
  $\widetilde{w}_2 = \dot{e}_2$   $u_w = \dot{\rho}(\varphi_2)$ 

se obtiene el siguiente sistema lineal de segundo orden

$$\dot{\widetilde{w}}_1 = \widetilde{w}_2 \tag{3.78}$$

$$\dot{\tilde{w}}_2 = -\mu_0 \tilde{w}_1 - \mu_1 \tilde{w}_2 + u_w \tag{3.79}$$

a lo que la representación de este sistema en su forma lineal matricial es

$$\hat{\mathbf{\tilde{w}}} = A_w \tilde{\mathbf{w}} + B_w u_w \tag{3.80}$$

con  $\widetilde{\mathbf{w}} = [\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3, \widetilde{w}_4]^T$ ,  $A_w \in R^{2x2}$  y  $B_w \in R^2$ . Como se ha determinado anteriormente, el origen del espacio del error de estimación de este observador es asintóticamente estable debido a que todos los eigen valores de la matriz  $A_w$  tienen parte real negativa y, por tanto, se tiene que  $||e^{A_w t}||$  es acotada para todo  $t \ge 0$ , y satisface la siguiente condición

$$\|e^{A_w t}\| \le K_w e^{\lambda_w t} \quad , \quad \lambda_x < 0 \tag{3.81}$$

donde  $\lambda_w$  es el ínfimo eigen valor de la dinámica del error de observación. De ahí se tiene que la trayectoria del sistema (3.80) cumple

$$\|\widetilde{\mathbf{w}}(t)\| \leq K_{w}e^{\lambda_{w}t}\|\widetilde{\mathbf{w}}(0)\| + \int_{0}^{t}K_{w}e^{\lambda_{w}(t-\tau)}\|B_{w}\||u_{w}(\tau)|d\tau$$

$$\|\widetilde{\mathbf{w}}(t)\| \leq K_{w}e^{\lambda_{w}t}\|\widetilde{\mathbf{w}}(0)\| + \frac{K_{w}\|B_{w}\|}{\lambda_{w}}sup_{t_{0}<\tau< t}|u_{w}(\tau)|$$
(3.82)

por lo tanto, se sigue que ante una entrada acotada da como lugar a estados acotados y que si lím<sub>t→∞</sub>  $u_w(t) = \delta(t)$ , entonces lím<sub>t→∞</sub>  $\tilde{\mathbf{w}}(t) = \delta(t)$ . A causa de ello, el observador lineal de estado extendido asociado a la corriente del electroimán inferior es estable de entrada a estado, debido a que existe una función  $\beta_w$  de clase  $\mathcal{KL}$  y una función  $\gamma_w$  de clase  $\mathcal{K}$  tal que, para cualquier estado inicial  $\tilde{\mathbf{w}}(t_0)$  y cualquier entrada

 $u_w(t)$ , la solución  $\widetilde{\mathbf{w}}(t)$  satisface la siguiente condición

$$\|\widetilde{\mathbf{w}}(t)\| \le \max\{\beta_w(\|\widetilde{\mathbf{w}}(t_0)\|, t-t_0), \gamma_w(\sup_{t_0 < \tau < t} |u_w(\tau)|)\}$$
(3.83)

Así que, a partir de las condiciones de acotamiento que se han obtenido, es posible determinar la desviación máxima entre la función estimada proporcionada por cada observador respecto al valor real al que se aproxima, dado que se han utilizado observadores lineales para estimar señales no lineales y, consecuentemente, el error de estimación no converge a cero. En específico, la diferencia entre el valor estimado y real para las perturbaciones e incertidumbres asociadas con la posición del elemento suspendido, considerado que  $||B_x|| = 1$ , cumple una cota de la forma

$$|\varphi_1 - \widehat{\varphi}_1| \le \frac{K'_x}{\lambda_x} sup_{t_0 < \tau < t} |u_x(\tau)|$$
(3.84)

mientras que la discrepancia entre el valor estimado y real para las perturbaciones e incertidumbres asociadas con la corriente del actuador inferior, considerado que  $||B_w|| = 1$ , satisface una cota de la siguiente forma

$$|\varphi_2 - \widehat{\varphi}_2| \le \frac{K'_w}{\lambda_w} sup_{t_0 < \tau < t} |u_w(\tau)|$$
(3.85)

Posteriormente, la estabilidad del controlador se aborda a partir de la condición única y suficiente que se requiere para que exista el régimen deslizante [30]. Así, se parte de las siguientes variedades diferenciales que se han diseñado como superficies de deslizamiento, las cuales representan la dinámica de las salidas diferencialmente planas del sistema en lazo cerrado

$$S_1 = \vec{F}_1 - \vec{F}_1^* + 2C_1(\vec{F}_1 - \vec{F}_1^*) + C_1^2(F_1 - F_1^*)$$
$$S_2 = F_2 - F_2^*$$

y sus correspondientes funciones de tasa de cambio respecto del tiempo son

$$\dot{S}_1 = \ddot{F}_1 - \ddot{F}_1^* + 2C_1(\ddot{F}_1 - \ddot{F}_1^*) + C_1^2(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*)$$

$$\dot{S}_2 = \dot{F}_2$$

entonces, se demuestra que la trayectoria del sistema en el espacio de estados alcanza la variedad de deslizamiento en un tiempo finito basándose en el criterio de estabilidad de Lyapunov, explicado detalladamente en [64] y [61]. Para ello, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov que representa la energía asociada a las superficies de deslizamiento

$$V(S_1, S_2) = \frac{1}{2}S_1^2 + \frac{1}{2}S_2^2$$
(3.86)

la cual es definida positiva, puesto que

$$V(0,0) = 0$$

$$V(S_1, S_2) > 0$$
 para  $\forall (S_1, S_2) \neq (0, 0)$ 

seguidamente, se obtiene su primera derivada respecto del tiempo

$$\dot{V}(S_1, S_2) = S_1 \dot{S}_1 + S_2 \dot{S}_2 \tag{3.87}$$

y utilizando las ecuaciones (3.44) y (3.46), se tiene que

$$\dot{V}(S_1, S_2) = S_1(v_1 + 2C_1S_1 - \ddot{F}_1^* - 3C_1^2(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) - 2C_1^3(F_1 - F_1^*) - \frac{2\alpha k_1 V_s}{mL_1(h - F_1)^2} \Delta \varphi_1) + S_2(v_2 - \frac{V_s}{L_2} \Delta \varphi_2)$$

por lo que, sustituyendo los términos respecto a los controladores internos auxiliares de cada salida, la función se transcribe como sigue

$$\dot{V}(S_1, S_2) = S_1(-\Lambda_1 | v_{1eq} | sgn(S_1) - v_{1eq} + 2C_1S_1) + S_2(-\Lambda_2 | v_{2eq} | sgn(S_2) - v_{2eq})$$

donde la amplitud del controlador auxiliar  $v_{1eq} = v_{1eq}(F_1, \dot{F}_1, \ddot{F}_1^*)$ , asociado a la posición del elemento suspendido, satisface

$$\Lambda_1 |v_{1eq}| \ge v_{1eq} - 2C_1 S_1 = \mathbf{\ddot{F}_1^*} - 2C_1 (\mathbf{\ddot{F}_1} - \mathbf{\ddot{F}_1^*}) - C_1^2 (\mathbf{\dot{F}_1} - \mathbf{\dot{F}_1^*}) + \frac{2\alpha k_1 V_s}{mL_1 (h - F_1)^2} \Delta \varphi_1$$

utilizando una ganancia  $C_1$  suficientemente grande. Entonces, se inspecciona el comportamiento de la tasa de cambio de cada superficie de deslizamiento para los casos en que la superficie en cuestión sea definida positiva o negativa, obteniendo las siguientes expresiones

$$\dot{S}_{1} = \begin{cases} -\Lambda_{1}|v_{1eq}| - v_{1eq} + 2C_{1}|S_{1}| < 0 & para \quad S_{1} > 0 \\ \Lambda_{1}|v_{1eq}| - v_{1eq} - 2C_{1}|S_{1}| > 0 & para \quad S_{1} < 0 \end{cases}$$
(3.88)

$$\dot{S}_{2} = \begin{cases} -\Lambda_{2}|v_{2eq}| - v_{2eq} < 0 & para \quad S_{2} > 0 \\ \Lambda_{2}|v_{2eq}| - v_{2eq} < 0 & para \quad S_{2} < 0 \end{cases}$$
(3.89)

de modo que el producto entre cada superficie de deslizamiento con su respectiva función de tasa de cambio respecto del tiempo es menor a cero en todo momento que los términos  $\Lambda_1 |v_{1eq}| \ge \Lambda_2 |v_{2eq}|$  sean los elementos de mayor contribución en cada función y, por consiguiente, se cumple la condición única y suficiente para demostrar la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado. Luego, recordando que

$$sgn(S)S = |S|$$

se tiene que la ecuación (3.87) se puede simplificar a

$$\dot{V}(S_1, S_2) = -\Lambda_1 |v_{1eq}S_1| - v_{1eq}S_1 + 2C_1S_1^2 - \Lambda_2 |v_{2eq}S_2| - v_{2eq}S_2$$
(3.90)

por tanto, se observa que la primer derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es definida negativa seleccionando unas ganancias  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  apropiadas. En consecuencia, se puede obtener una expresión matemática para la condición de deslizamiento del sistema

$$\dot{V}(S_1, S_2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S_1^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S_2^2 = -\eta_1 |S_1| - \eta_2 |S_2| \le 0 \quad para \quad \forall (\Lambda_1, \Lambda_2) \ge (1, 1)$$

donde  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son funciones estrictamente positivas, asegurando que las superficies de deslizamiento  $S_1$  y  $S_2$ , relacionadas con el error de seguimiento de la primer salida diferencialmente plana y el error de regulación de la segunda salida, respectivamente, converjan a cero asintóticamente. En concreto, se garantiza gráficamente que las

trayectorias del sistema convergen a la variedad de deslizamiento en un tiempo finito. De esta manera, se ha demostrado que seleccionando unas ganancias para el controlador y el observador lo suficientemente grandes se garantiza la estabilidad asintótica del sistema, asegurando que las variables del controlador y el observador que se han diseñado carezcan de un tiempo de escape finito. En consecuencia, el sistema de control de suspensión electromagnética de un grado de libertad es asintóticamente estable en lazo cerrado.

## Capítulo 4

# Caracterización del Sistema

La caracterización de los parámetros del sistema y la simulación por computadora de su comportamiento se aborda en el presente capítulo. En concreto, se identifican los parámetros característicos del modelo matemático que describe la dinámica del sistema y se determina el comportamiento de los actuadores, así como los transductores de la etapa de monitoreo. Asimismo, se muestran los resultados obtenidos mediante simulación de la respuesta del sistema en lazo cerrado.

## 4.1. Identificación de parámetros del sistema

Todo modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema físico, por lo menos en el campo de la ingeniería, es una mera aproximación al comportamiento real de la planta. Sin embargo, este comportamiento puede ser representado por los parámetros y términos que tienen una mayor contribución en el comportamiento dinámico total del sistema. Así, identificando y determinando cada uno de estos parámetros, es posible obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen con precisión un sistema físico real. Entonces, para el sistema electromecánico de levitación magnética propuesto en el presente trabajo de investigación, se obtienen los parámetros mecánicos y eléctricos del modelo matemático obtenido en el capítulo anterior. A continuación, se desarrolla la identificación de esto últimos y se explica detalladamente el cálculo de la aproximación de tales coeficientes. Así también, se describen los subsistemas experimentales implementados para la adquisición de la información empleada en la caracterización de estos parámetros.

#### 4.1.1. Parámetros mecánicos

La dinámica mecánica del sistema de levitación magnética se encuentra descrita por los parámetros que, como se ha mencionado, surgen del comportamiento descrito al aplicar la segunda ley de Newton al elemento suspendido del sistema, considerando los términos que realizan una mayor contribución a la respuesta del sistema. En concreto, tales parámetros son la masa del elemento suspendido, la distancia del hueco de aire cuando este elemento se encuentra en el origen, el coeficiente de fricción viscosa y los coeficientes de acoplamiento de las fuerzas magnéticas.

La masa de los componentes que integran el elemento suspendido del sistema y la separación del hueco de aire en el origen pueden ser obtenidos de manera experimental directamente. En cambio, para el coeficiente de fricción viscosa se requiere conocer el ángulo de fricción entre el contacto del rodamiento lineal del elemento suspendido y el eje de guía, así como la aceleración máxima generada en relación con dicho ángulo [53]. De tal modo que el coeficiente asociado a este factor de disipación se puede obtener de la siguiente manera

$$b = tan\theta - \frac{a}{gcos\theta} \tag{4.1}$$

donde *g* es la aceleración de la gravedad y el ángulo de fricción  $\theta$  se obtiene inclinando la línea de contacto desde la posición vertical de los elementos en cuestión, hasta obtener un movimiento inminente. Cabe mencionar que, para simplificar el cálculo, se ha considerado que el rodamiento lineal se desplaza con una aceleración constante en todas las pruebas. Por otra parte, la aceleración se calcula a partir de la cinemática del movimiento relativo de tales elementos [44], mediante la siguiente expresión

$$a = \frac{2}{t^2}(d - d_0 - v_0 t) \tag{4.2}$$

entonces, considerando condiciones iniciales nulas, se puede obtener la aceleración máxima del movimiento relativo de los elementos que forman el contacto de deslizamiento, en términos de la distancia recorrida y el tiempo transcurrido. De este modo, realizando pruebas experimentales con un soporte fijo y utilizando aceite sintético para lubricar la superficie de contacto, se ha obtenido que el ángulo de fricción es  $\theta = 4.71^{\circ}$ , en donde la distancia que se desplaza el rodamiento lineal durante la prueba es de d = 85 mm en un tiempo de t = 1 s y se toma una aceleración gravitatoria de  $g = 9,8066 m/s^2$ . Por tanto, una aproximación del coeficiente de fricción viscosa del contacto entre los balines del cojinete lineal del elemento suspendido y el eje de guía es la siguiente

$$b = tan\theta - \frac{2d}{gt^2 cos\theta} = 0.0651 \ kg/s \tag{4.3}$$

Luego, los coeficientes de acoplamiento de las fuerzas magnéticas se calculan a partir de los gráficos presentados más adelante, en la sección de caracterización de los electroimanes. En realidad, se aproxima la relación de la curva entre la fuerza de reluctancia magnética de cada actuador, en función de la corriente consumida, mediante un polinomio de segundo orden de la forma

$$P_{f_j}(i_j) = a_2 i_j^2 + a_1 i_j + a_0$$

para j = 1, 2. Y, tomando en cuenta únicamente el coeficiente que multiplica el término de la corriente al cuadrado, se obtiene el coeficiente de acoplamiento de la fuerza de cada electroimán a partir de

$$k_j = a_2 d_p^2$$

donde  $d_p$  es la distancia de prueba a la cual se realizan las mediciones de la fuerza atractiva ejercida sobre el disco de acero y el rodamiento lineal. Entonces, utilizando la ecuación (4.7) y  $d_p = 0.025 m$ , se obtiene el coeficiente de acoplamiento de la fuerza magnética del actuador superior a partir de

$$k_1 = 0.2550d_p^2 = 1.6x10^{-4}Nm^2/A^2$$
(4.4)

mientras que, basándose en la ecuación (4.8), el coeficiente de acoplamiento de la fuerza magnética del actuador inferior es

$$k_1 = 0.2529d_p^2 = 1.6x10^{-4} Nm^2 / A^2$$
(4.5)

De esta manera, se identifican los parámetros, presentados en la Tabla 4.1, que describen el comportamiento mecánico del sistema de suspensión electromagnética propuesto en el presente trabajo de investigación.

m	Masa de elemento suspendido	25 g
h	Separación en el origen	15 mm
b	Coeficiente de fricción viscosa	0.0651 kg/s
$k_1$	Coeficiente de acoplamiento de fuerza del electroimán superior.	$1.6 \ x 10^{-4} \ Nm^2 / A^2$
<i>k</i> <sub>2</sub>	Coeficiente de acoplamiento de fuerza del electroimán superior	$1.6 \ x 10^{-4} \ Nm^2 / A^2$

TABLA 4.1: Parámetros del comportamiento mecánico del sistema.

### 4.1.2. Parámetros eléctricos

La dinámica eléctrica del sistema de levitación magnética se encuentra descrita por los parámetros que, como se ha mencionado, surgen del comportamiento descrito al aplicar las leyes de voltajes de Kirchhoff al esquema eléctrico simplificado de los electroimanes, considerando los términos que realizan una mayor contribución a la respuesta del sistema. En particular, tales parámetros son la impedancia eléctrica e inductancia nominales del devanado de los actuadores. Cabe mencionar que se han despreciado los efectos de borde y la saturación del núcleo ferromagnético del electroimán, y además se ha considerado una dinámica eléctrica más rápida que la parte mecánica del sistema. Por otro lado, estos coeficientes son obtenidos de manera experimental directamente y se obtiene la Tabla 4.2, mostrada a continuación.

$R_1$	Resistencia nominal de devanado de actuador superior	12.8 Ω
$L_1$	Inductancia nominal de devanado de actuador superior	23.81 mH
$R_2$	Resistencia nominal de devanado de actuador inferior	12.8 Ω
L <sub>2</sub>	Inductancia nominal de devanado de actuador inferior	23.12 <i>mH</i>

TABLA 4.2: Parámetros del comportamiento eléctrico del sistema.

### 4.2. Caracterización de actuadores

Los actuadores del sistema consisten en un par de solenoides con encapsulado de aluminio y cuyas características se presentan en la Tabla 4.3. Específicamente, con el objetivo de comprobar las suposiciones planteadas en el momento del modelado matemático de las fuerzas atractivas de los electroimanes, se identifican y caracterizan las fuerzas de reluctancia magnética en relación con la corriente consumida, así como las variaciones de la inductancia y la densidad de flujo magnético generado en función de las variables que se han utilizado para modelar la fuerza de reluctancia de cada actuador.

Modelo	CL-P 80/38
Voltaje de alimentación	12 V
Consumo energético	14 W
Fuerza de sujeción	1000 N
Diámetro	80 <i>mm</i>
Altura	38 <i>mm</i>
Diámetro de plato de atracción	34 <i>mm</i>
Longitud de conexión	250 mm
Tamaño de rosca	M8

TABLA 4.3: Características principales del actuador del sistema.

Es evidente que se debe analizar el comportamiento de la densidad de flujo magnético de los electroimanes en función de la distancia de separación y la corriente que fluye a través de sus devanados, y validar el comportamiento del sistema con su modelo matemático. En los siguientes apartados se presentan los resultados obtenidos, utilizando el sensor de flujo magnético de precisión modelo GM 1-ST de la compañía AlphaLab Inc, con relación a la intensidad de la densidad del flujo magnético generado por los electroimanes. Por otro lado, se realiza un análisis de la distribución de la densidad de este flujo producido por los actuadores del sistema y los efectos de borde que se generan por la distorsión del campo magnético.

### 4.2.1. Fuerza de reluctancia magnética

Se realiza un estudio de las fuerzas de compensación ejercidas por los actuadores del sistema sobre el elemento suspendido, el cual constituye un disco de acero sobre un rodamiento lineal. Para ello, se acondiciona un subsistema experimental descrito en [15], donde cada electroimán es colocado sobre una báscula electrónica, en este caso a una distancia de prueba de 25 *mm*, de manera que el campo magnético generado alcance el disco de acero, que reposa sobre la plataforma de la báscula.



FIGURA 4.1: Fuerza de reluctancia magnética del actuador superior.

Posteriormente, se alimenta el devanado del actuador, en donde se le proporciona una potencia regulada aumentando en pasos equidistantes su corriente, para generar un campo magnético proporcional a esta y se ejerzan fuerzas atractivas sobre el disco de acero tal que su peso total, medido por la báscula, se vea disminuido. De esta forma, considerando la ecuación (3.4), se tiene que la fuerza de reluctancia magnética en estado estacionario efectuada sobre el elemento suspendido debe ser equivalente al peso que se encuentra soportando

$$f_m = (m_{elemento} - m_{medida})g \tag{4.6}$$

entonces, se obtiene la información de la fuerza de cada actuador en función de la corriente que consume su devanado interno y se aproxima esta relación, utilizando la

técnica de mínimos cuadrados, mediante un polinomio de segundo orden. Tal como se ha descrito en la sección anterior y de acuerdo a las conjeturas planteadas para el cálculo de la fuerza en el modelo matemático del sistema, se encuentra un relación de la fuerza de reluctancia predominantemente cuadrática respecto a la corriente consumida por el electroimán, como se muestra en la Figura 4.1, por lo que respecta al actuador superior. Así, el polinomio que describe la curva del gráfico mencionado es el siguiente

$$P_{f_1}(i_1) = 0.2550i_1^2 - 0.0589i_1 + 0.004 \tag{4.7}$$

Posteriormente, en la información de la Figura 4.2 se presenta la curva obtenida para la fuerza de reluctancia magnética del actuador inferior, en donde es fácil apreciar una relación predominantemente cuadrática.



FIGURA 4.2: Fuerza de reluctancia magnética del actuador inferior.

Igualmente, se obtiene el polinomio de segundo orden que describe la aproximación concerniente a la variación de la fuerza ejercida, por el solenoide inferior, sobre el disco de acero

$$P_{f_2}(i_2) = 0.2529i_2^2 - 0.0599i_2 + 0.0042 \tag{4.8}$$

En consecuencia, tomando en cuenta la distancia de prueba del hueco de aire junto con las ecuaciones (4.7) y (4.8), es posible obtener una aproximación de los coeficientes de acoplamiento de la fuerza de reluctancia de cada actuador.

### 4.2.2. Relación de la inductancia de devanado

Ahora bien, se estudia la variación del efecto inductivo del devanado de los actuadores del sistema, en función de la separación del disco de acero con la cara de absorción del electroimán. Recordando la relación de la aproximación que describe el comportamiento de la autoinductancia de cada electroimán, se tiene que esta puede ser descrita mediante la siguiente expresión

$$L_i(x) = L_i(0) + \frac{M_i}{x}$$
(4.9)

para i = 1, 2, donde  $L_i(0)$  es el valor nominal de la inductancia del devanado, x es la distancia entre el elemento suspendido y la cara de sujeción del núcleo ferromagnético y  $M_i$  es la constante de proporcionalidad de la variación del efecto inductivo de cada electroimán.



FIGURA 4.3: Relación de la inductancia para circuito magnético del actuador superior.

Respecto al primer actuador, en la Figura 4.3 se presenta la relación de la inductancia de la bobina del electroimán superior. Con certeza, se aprecia la relación inversamente lineal de la inductancia del arreglo a medida que la separación del disco de acero aumenta, comprobando la exactitud de la aproximación respecto a la autoinductancia de los actuadores del sistema. Desde luego, en el subsistema experimental acondicionado para obtener esta relación no se consideran los efectos de distorsión de la inductancia generados por el rodamiento lineal, el eje de guía y el elemento de conexión del sensor de posición. Además, es importante resaltar que la caracterización de la inductancia variable de los solenoides proporciona información referente al coeficiente de acoplamiento de la fuerza que ejercen los electroimanes sobre el elemento suspendido, pues bien la variación respecto de la posición del término que acompaña la inductancia nominal constante representa, en sentido matemático, la fuerza de reluctancia de un sistema de suspensión electromagnética.



FIGURA 4.4: Relación de la inductancia para circuito magnético del actuador inferior.

Asimismo, en la Figura 4.4 se muestra la relación de la inductancia de la bobina del electroimán inferior del sistema, la cual presenta las mismas características de variación en su efecto inductivo que el primer actuador. Entonces, utilizando los datos obtenidos se obtienen dos conjuntos de ecuaciones no lineales y son resueltos, mediante una aproximación numérica, para obtener los términos constantes en la ecuación (4.9). Y, en definitiva, se han estudiado los parámetros de mayor importancia concernientes a la parametrización de la fuerza de reluctancia magnética y el efecto inductivo de los actuadores del sistema de levitación magnética que se aborda en el presente trabajo de investigación. Más adelante, en la Tabla 4.4 se muestran las constantes de proporcionalidad calculadas a partir de los gráficos presentados para el actuador superior e inferior del sistema.

Actuador	Coeficiente de acoplamiento
	experimental
Electroimán superior	$2.1 e^{-8}$
Electroimán inferior	$1.05 e^{-8}$

TABLA 4.4: Coeficiente de acoplamiento para la inductancia de los actuadores del sistema.

Ahora, un aspecto importante en el proceso de caracterización de las bobinas de tales actuadores es la información referente al flujo de campo magnético, en una región homogénea, en función de la corriente aplicada al mismo y la distancia de separación respecto a la cara de sujeción del devanado [50]. Precisamente, se encuentra el comportamiento definido por la teoría de materiales ferromagnéticos, donde es de interés encontrar la capacidad de los electroimanes seleccionados de generar un campo magnético cuyo flujo prevalezca en el espacio próximo a la cara de absorción de estos últimos.

### 4.2.3. Relación de la densidad del flujo magnético

El comportamiento de la densidad del flujo magnético producido por los actuadores del sistema se ha obtenido al posicionar el disco de acero sobre la distancia de prueba, el cual es sujetado mediante un soporte fijo, y se realiza la lectura concerniente a la densidad de flujo magnético en el centroide del elemento suspendido. Así, la información de las curvas presentadas en los siguientes gráficos se ha obtenido por medio del sensor de densidad de flujo magnético mencionado anteriormente, al variar la posición del disco de acero y la corriente que alimenta al solenoide. De este modo, la relación de la variación de la densidad de flujo magnético respecto a la corriente del actuador superior se muestra en la Figura 4.5. En efecto, se obtiene el comportamiento de la densidad de flujo magnético en función de la corriente que consumen los devanados en los actuadores a distintas distancias de la cara de sujeción del electroimán, desde 5 *mm* hasta 30 *mm*. Desde luego, es posible apreciar la
relación lineal entre la fuerza magnetomotriz que es aplicada al núcleo ferromagnético, a través de la corriente que fluye en las espiras de la bobina, y el flujo magnético generado por el electroimán superior, con lo que se verifica la ecuación (3.2). Y a partir de esta información se obtienen las constantes de proporcionalidad, mostrados en la Tabla 4.5, en relación con cada curva obtenida.



FIGURA 4.5: Comportamiento de la densidad del flujo magnético del electroimán superior en función de la corriente.

De esta manera, se tiene que la expresión matemática (3.2), que describe la energía de campo magnético almacenado en el espacio de trabajo del elemento suspendido, es adecuada en relación a la corriente dentro del rango de operación del sistema.

Distancia	Constante de proporcionalidad		
	experimental		
5 mm	0.8553		
10 mm	0.5716		
15 mm	0.3536		
20 mm	0.2610		
25 mm	0.2068		
30 mm	0.1858		

TABLA 4.5: Constantes de proporcionalidad de la densidad de flujo magnético del electroimán superior en función de la corriente.

Luego, se obtienen la información del comportamiento de la variación de densidad del flujo magnético respecto a la separación de la cara de sujeción, presentada en la Figura 4.6, a distintos puntos de operación en relación con la potencia consumida por el actuador. Como es de esperarse, la densidad de flujo magnético de los actuadores del sistema presenta el comportamiento característico de los campos vectoriales centrales que se distribuyen en un espacio euclídeo tridimensional, el cual determina que la intensidad de estos campos decae proporcionalmente al inverso de la distancia al cuadrado a la que es medido desde el punto de origen de la fuente, tal como el campo eléctrico, el campo gravitatorio o cualquier campo que sea descrito mediante la ecuación de onda.



FIGURA 4.6: Comportamiento de la densidad del flujo magnético del electroimán superior en función de la distancia.

Por otra parte, en la Figura 4.7 se muestra la relación de la variación de la densidad de flujo magnético en función de la corriente del actuador inferior. Y en la Tabla 4.6 se muestran las constantes de proporcionalidad entre dicha relación. De igual manera, se obtiene un comportamiento similar al actuador superior. Es importante mencionar que el factor de proporción entre cada curva presenta un comportamiento no lineal. Ciertamente, el experimento implementado para obtener la información del sensor de densidad de flujo magnético de precisión únicamente considera el disco de acero como elemento suspendido, despreciando el efecto de incluir el eje, el cojinete lineal y el elemento de conexión del sensor de posición al campo magnético generado por el actuador. Sin embargo, se espera que este sea despreciable en comparación al efecto del disco de acero inmerso en dicho campo magnético, debido a que el material del eje de guía y el rodamiento es de una aleación de aluminio, en consecuencia presentan una permeabilidad relativa cercana a la unidad.



FIGURA 4.7: Comportamiento de la densidad del flujo magnético del electroimán inferior en función de la corriente.

En cambio, el elemento de conexión del sensor es fabricado mediante manufactura aditiva de poliácido láctico de baja densidad, un material que presenta una permeabilidad relativa menor a la del aluminio.

Distancia	Constante de proporcionalidad experimental	
5 mm	0.9111	
10 mm	0.5638	
15 mm	0.3943	
20 mm	0.2862	
25 mm	0.2337	
30 mm	0.1702	

TABLA 4.6: Constantes de proporcionalidad de la densidad de flujo magnético del electroimán inferior en función de la corriente.

No obstante, debido a la parte del elemento de conexión del transductor de posición que se encuentra inmerso en el campo magnético es posible despreciar su efecto en este último. En realidad, todos estos factores incluyen cierta incertidumbre considerable en la identificación y caracterización de los parámetros que describen el comportamiento de las fuerzas de reluctancia del sistema. De ello resulta que la elección del diseño de un controlador con enfoque al rechazo activo de perturbaciones para el sistema de levitación magnética se presente como una solución efectiva al problema en cuestión. Del mismo modo, una característica del sistema determinada a partir de los gráficos presentados en el presente apartado es la distancia máxima a la que los electroimanes realizan alguna acción sobre el elemento suspendido. Por lo que es factible, en base al peso del elemento suspendido, acotar el dominio de operación del sistema.



FIGURA 4.8: Comportamiento de la densidad del flujo magnético del electroimán inferior en función de la distancia.

Pues bien, se ha obtenido la relación de la densidad del flujo magnético de los actuadores del sistema en función de las variables que describen el comportamiento de la fuerza de reluctancia atractiva generada por estos, y se han determinado las características principales en la variación del la energía almacenada en el campo magnético. En el siguiente apartado se desarrolla un estudio de la distribución de la densidad de flujo magnético generado por la bobina de cada actuador individual.

#### 4.2.4. Distribución de la densidad del flujo magnético

La descripción matemática de las fuerzas de reluctancia presentes en el modelo matemático, del comportamiento del sistema de levitación magnética, supone un flujo homogéneo en todo el espacio de trabajo del elemento suspendido del sistema. Sin embargo, el comportamiento real de un campo magnético presenta efectos de borde cuando existe un cambio de material en su flujo. De ahí que, la fuerza de reluctancia magnética generada por un solenoide con núcleo ferromagnético resulte ser complicada de calcular analíticamente de manera exacta.



FIGURA 4.9: Geometría elaborada para simulación de la distribución de la densidad del flujo magnético del sistema.

Para ello, se emplea la técnica de solución numérica de elemento finito con la que se predice, con base en la respuesta de la densidad de flujo del actuador, la distribución de su campo magnético generado [31]. En concreto, el análisis se basa en

la herramienta computacional de desarrollo ANSYS Mechanical CFD Maxwell 3D, de la corporación ANSYS, teniendo como geometría para simulación la mostrada en la Figura 4.9. Esta representa un arreglo promedio del elemento suspendido y el núcleo de un electroimán del sistema, incluyendo el eje de guía.



FIGURA 4.10: Resultados de simulación para la distribución de la densidad del flujo magnético del sistema.

El devanado del actuador se ha modelado como un decágono que permita simular el flujo de una corriente tangencial, seccionada en diez puntos distribuidos equitativamente, a lo largo de la circunferencia externa del solido que representa el núcleo ferromagnético. Efectivamente, se simula el circuito magnético conformado por el núcleo del actuador y el elemento suspendido. En la Figura 4.10 se presenta la distribución para la densidad del flujo magnético que se genera en este arreglo, donde se aprecia la distorsión del campo en el espacio circundante al disco de acero.

## 4.3. Caracterización de sensores

Los elementos de realimentación del estado del sistema se caracterizan obteniendo la variación de la respuesta de su voltaje de salida en lo que se refiere a su rango de medición, y se ajusta un polinomio que describe la variable medida. Por consiguiente, se ha obtenido el gráfico de la respuesta del voltaje de salida del sensor de posición del elemento suspendido y los sensores de corriente de los actuadores del sistema. En los siguientes apartados se muestra el desarrollo de la caracterización de los transductores diseñados para el sistema propuesto.

#### 4.3.1. Sensor de posición

El sensor de posición basado en un transformador diferencial variable lineal diseñado para el sistema de levitación magnética presenta la respuesta de voltaje de salida mostrado en la Figura 4.11, en donde es posible observar que el transductor presenta una respuesta lineal en un rango de distancia de 20 *mm* a 52 *mm*.



FIGURA 4.11: Relación del voltaje de salida para el sensor de posición LVDT.

De este modo, se tiene que el sensor de posición diseñado proporciona una diferencia de voltaje de aproximadamente 2 *V*, obteniendo como desplazamiento efectivo 30 *mm* del núcleo ferromagnético del sensor. Luego, utilizando la técnica de regresión lineal por mínimos cuadrados, se obtiene un polinomio de quinto orden que describe toda la curva obtenida del sensor de posición del elemento suspendido del sistema

$$P(v_p) = 8.1367v_p^5 - 57.1549v_p^4 + 148.6812v_p^3 - 174.8645v_p^2 + 105.3599v_p - 0.8061v_p^2 + 0.8061v_p^2 +$$

donde  $v_p$  es el voltaje de salida. Y la expresión que describe la región lineal de la respuesta del voltaje del transductor es la siguiente

$$P_l(v_p) = 15.7279v_p + 14.1861 \tag{4.10}$$

Cabe mencionar que en el momento de la integración del sistema se debe encontrar la función del voltaje de salida del transductor en términos de los valores del convertidor analógico digital del controlador digital de señales.

#### 4.3.2. Sensor de corriente

Por otro lado, en la Figura 4.12 se muestra el comportamiento del voltaje de salida del sensor de corriente de parte alta diseñado para la bobina del actuador superior.



FIGURA 4.12: Relación del voltaje de salida del sensor de corriente para actuador superior.

El transductor presenta una región de comportamiento lineal para una corriente mayor a 200 mA pero, no obstante, se considera un polinomio de primer orden para aproximar la corriente consumida por el electroimán superior en función del voltaje de salida del sensor diseñado, despreciando los efectos no lineales del mismo. Así, el polinomio obtenido mediante regresión lineal es el siguiente

$$i_1(v_{c_1}) = 343.7664v_{c_1} - 141.2880 \tag{4.11}$$

donde  $v_{c_1}$  es el voltaje de salida del transductor. Mientras que, el comportamiento de la relación del voltaje de salida del sensor de corriente de parte alta diseñado para medir el consumo en el devanado del actuador inferior se presenta en la Figura 4.13, y ciertamente se aprecia el mismo efecto no lineal que muestra el primer sensor.



FIGURA 4.13: Relación del voltaje de salida del sensor de corriente para actuador inferior.

De la misma forma, se obtiene un polinomio de primer orden para aproximar la corriente consumida por el electroimán inferior en función del voltaje de salida del sensor diseñado

$$i_2(v_{c_2}) = 386.4567v_{c_2} - 94.9125 \tag{4.12}$$

donde  $v_{c_2}$  es el voltaje de salida del transductor de corriente del actuador inferior.

## 4.4. Simulación del sistema

Con el fin de predecir y estudiar la respuesta de la planta se realiza una simulación del comportamiento del sistema en una plataforma de software. Se analiza el efecto de utilizar una frecuencia de conmutación finita en el circuito de los actuadores y, de la misma manera, se obtiene la respuesta de los estados del sistema en lazo cerrado y se le es perturbado para comprobar la robustez del controlador. En el Apéndice A se presentan los diagramas esquemáticos elaborados en la plataforma de simulación Simulink de MATLAB, para los resultados por solución numérica del comportamiento dinámico del sistema de levitación magnética.

#### 4.4.1. Comportamiento del actuador

El comportamiento dinámico de los actuadores del sistema se encuentra descrito por un circuito *RL*, por lo que si se le es aplicado una señal de voltaje de forma cuadrada entre sus terminales eléctricas, el efecto inductivo del arreglo producirá una corriente triangular en la red.



FIGURA 4.14: Resultado de simulación para la dinámica de la corriente del actuador del sistema.

Asimismo, para la simulación del comportamiento del actuador se consideran los parámetros parásitos de los semiconductores de potencia utilizados para el circuito de amplificación de los electroimanes, como la resistencia que presentan en estado de conducción, los efectos capacitivos con cambios de voltajes entre sus terminales y los retardos en la transición de estados. La etapa de amplificación de potencia, como se ha mencionado, se basa en un amplificador por conmutación y efectivamente, el circuito es controlado utilizando la técnica de modulación por ancho de pulsos, así que el voltaje en las terminales del actuador del sistema es una señal de forma cuadrada. En consecuencia, el devanado presenta un proceso de carga y descarga, generando una corriente triangular en el circuito donde el rizo de esta corriente depende directamente de la frecuencia de conmutación empleada para el amplificador. En la Figura 4.14 se muestra el rizo de corriente en estado estacionario del actuador generado al utilizar una frecuencia de conmutación de 2.3 *kHz*. Esta es seleccionada considerando el rizo de corriente máximo deseado y le interferencia magnética permisible generada por los actuadores del sistema.

#### 4.4.2. Simulación en lazo cerrado

Respecto a los resultados obtenidos mediante simulación numérica de la respuesta de los estados del sistema de suspensión electromagnética en lazo cerrado se obtienen los siguientes gráficos. En la Tabla 4.7 se muestran los valores numéricos utilizados para las ganancias del controlador y el modelo del observador para el control por rechazo activo de perturbaciones del sistema durante la simulación.

	$C_1$	40
Ganancias de controlador		10
		2
Capancias de observador	ζ	0.707
Ganalicias de obseivadoi	$\omega_n$	1200  rad/s

TABLA 4.7: Ganancias del controlador y observador para la simulación del sistema en lazo cerrado.

Se realiza una simulación para estabilizar y realizar seguimiento del sistema a lo largo de una trayectoria suave entre dos estados deseados para la posición del disco de acero, descrita en el Apéndice B, de acuerdo al sistema de referencia establecido. Y la corriente del electroimán inferior se regula a un estado constante de 400 mA.

La simulación tiene un tiempo de duración de 6 segundos. En la Figura 4.15 se presenta el resultado por solución numérica para la posición del elemento suspendido del sistema, donde se aprecia que, efectivamente, esta converge exponencialmente hacia la trayectoria en un tiempo de 180 *ms*, aproximadamente. Luego, las corrientes consumidas por los actuadores se muestra en la Figura 4.16. Como se ha demostrado, la corriente en el devanado del actuador inferior es una variable que puede ser controlada de forma independiente, de modo que se produzca una fuerza atractiva de compensación opuesta a la del actuador superior. De esta manera, la rigidez y amortiguamiento del sistema de suspensión electromagnética de un grado de libertad pueden ser reguladas de acuerdo a la aplicación del soporte.



FIGURA 4.15: Resultado de simulación para la posición del elemento suspendido.

Por el contrario, la corriente del actuador superior es controlada de manera indirecta ya que esta rige la estabilidad del elemento suspendido, puesto que el sistema es de estado completamente controlable a partir de la entrada de control asociada al actuador en cuestión, por lo que no puede tomar un valor arbitrario deseado. Es decir, el consumo del electroimán superior se encuentra determinado por la posición del elemento levitado. Del mismo modo, en la Figura 4.17 se presenta la respuesta de las señales de control para los circuitos de amplificación de los actuadores.



FIGURA 4.16: Resultado de simulación para las corrientes de los electroimanes.

Ciertamente, la señales del controlador representan un valor porcentual de la fuerza magnética requerida para posicionar la masa del disco de acero, el cojinete lineal y el sensor de distancia en el estado deseado.



FIGURA 4.17: Resultado de simulación para las señales de control.



FIGURA 4.18: Resultado de simulación para las señales discontinuas de los controladores del sistema.

Por lo que respecta a la parte discontinua de la señal del controlador, en la Figura 4.18 se presentan los resultados obtenidos concerniente a esta variable.



FIGURA 4.19: Resultado de simulación para las variables estimadas de incertidumbre del sistema.

Después, en la Figura 4.19 se muestra las variables estimadas asociadas a las perturbaciones e incertidumbres en el modelado de cada salida plana del sistema. Es importante mencionar que estas comprenden la parte continua de la señal del controlador y, evidentemente, realizan una mayor contribución en la ley de control total.

#### 4.4.3. Simulación en lazo cerrado con perturbaciones

Para terminar, se realiza una simulación del comportamiento del sistema en lazo cerrado para estabilizar el elemento suspendido a su estado nominal y posteriormente introducir una perturbación mediante una carga puntual, una carga oscilante y un cambio en el coeficiente de acoplamiento del actuador superior. La simulación se ejecuta con un tiempo de duración de 15 segundos. En la Figura 4.20 se muestra el resultado obtenido para la primera salida diferencialmente plana del sistema, donde se aprecian los efectos transitorios de las perturbaciones.



FIGURA 4.20: Resultado de simulación para la posición del elemento suspendido del sistema perturbado.

Luego, en el segundo 6 se perturba el elemento suspendido del sistema con una carga de  $400 \ mN$  en dirección negativa, asimismo la posición de este último se recupera y alcanza el valor nominal en alrededor de  $150 \ ms$ . En efecto, se tiene que la ley de control diseñada para el sistema presenta robustez ante perturbaciones puntuales sobre el elemento suspendido. Seguidamente, en el segundo 9 de la simulación se sustituye la carga puntual por una de carácter sinusoidal, de manera súbita, con una amplitud de 50 *mN* y una frecuencia de  $1.2\pi rad/s$ , y se observa que la posición del disco de acero presenta un ligero efecto transitorio hasta que se establece nuevamente oscilando sobre la posición de referencia por 80  $\mu m$ , aproximadamente. Por tanto, el controlador del sistema es capaz de rechazar perturbaciones variables en el tiempo y minimizar sus efectos en la primera salida plana.



FIGURA 4.21: Resultado de simulación para las corrientes de los actuadores del sistema perturbado.

De igual forma, en el segundo 12 se disminuye súbitamente el valor del coeficiente de acoplamiento de la fuerza magnética de  $1.6 x 10^{-4}$  a  $4 x 10^{-5} Nm^2 / A^2$ , y se observa que la posición del disco de acero se estabiliza y regresa al valor de referencia en aproximadamente 1.5 s. En la Figura 4.21 se muestran las corrientes consumidas por los devanados de los actuadores y el electroimán superior es el actuador encargado de eliminar las perturbaciones e incertidumbres que afectan al elemento suspendido. Mientras que, el electroimán inferior ejerce una fuerza magnetomotriz coercitiva que le permite al sistema alcanzar una mayor frecuencia natural en lazo cerrado. De la misma manera, se presentan las señales del controlador de los actuadores en la Figura 4.22, en donde se aprecia, al igual que la primera simulación implementada, la similitud de las señales con las corrientes de los actuadores. Además, con esto último se puede comprobar la suposición realizada respecto a la diferencia entre la frecuencia natural de la etapa eléctrica del sistema y la etapa mecánica.



FIGURA 4.22: Resultado de simulación para las señales de control del sistema perturbado.

Luego, se presentan las señales de la parte discontinua de los controladores, para el electroimán superior e inferior, en la Figura 4.23. Y, finalmente, en la Figura 4.24 se muestran las variables de incertidumbre estimadas asociadas a las salidas diferencialmente planas del sistema perturbado.



FIGURA 4.23: Resultado de simulación para las señales discontinuas de los controladores del sistema perturbado.



FIGURA 4.24: Resultado de simulación para las variables estimadas de incertidumbre del sistema perturbado.

Después de todo, una vez comprobada la evolución temporal de la dinámica del sistema mediante solución numérica, se ha obtenido una estimación de la estabilidad y comportamiento de las variables de estado del sistema físico. Entonces, es factible continuar con la integración de los elementos de la plataforma experimental y el diseño del algoritmo de programación para el procesamiento digital de las señales de control.

## Capítulo 5

# Plataforma Experimental y Resultados

En este capítulo se presenta la integración de la plataforma experimental, el diseño del algoritmo de programación para el subsistema de software y adquisición de datos, y se describen los resultados obtenidos para el control por rechazo activo de perturbaciones del sistema de levitación magnética propuesto en el presente trabajo de investigación. De la misma manera, se plantea la discusión acerca del análisis de los resultados de la estabilización e índices de desempeño del controlador.

## 5.1. Componentes de la plataforma experimental

Se realiza una descripción detallada del proceso de implementación de los elementos diseñados de hardware del sistema de suspensión electromagnética propuesto, así como los elementos adquiridos para la integración de este último. En un principio, se especifican los detalles principales en la elaboración y ensamble del elemento suspendido. Asimismo, se describen las principales características de los actuadores y las condiciones físicas, de su correspondiente fuerza atractiva de reluctancia, que deben ser consideradas en el proceso de integración. Luego, se detalla la elaboración de los sensores de retroalimentación del sistema, el sensor de posición y los transductores de corriente. Finalmente, se presentan las características principales del controlador digital de señales utilizado para implementar el subsistema de software de la plataforma experimental.

#### 5.1.1. Elemento suspendido

Como elemento suspendido para el sistema de levitación magnética del presente trabajo de investigación, se emplea un disco de acero montado sobre la parte superior de un rodamiento lineal. Este es posicionado de forma que se encuentre totalmente inmerso en el campo magnético generado, como se observa en la Figura 5.1. En realidad, se dispone de un elemento en forma de anillo que restringe la posición inferior del elemento suspendido, ya que cuando el rodamiento lineal realiza contacto con alguno de los dos actuadores el sistema se encuentra en un estado no controlable. Mientras que, el eje de guía es posicionado de manera concéntrica respecto a los núcleos ferromagnéticos de ambos electroimanes.



FIGURA 5.1: Elemento suspendido para sistema de suspensión electromagnética.

Es importante considerar el efecto de las ruedas milimétricas de acero incorporadas en el interior del cojinete lineal ya que, al ser de un material paramagnético, influyen en la reluctancia del arreglo y al momento de accionar algún actuador estas tienden a adherirse entre ellas. Por tanto, es preciso lubricar el contacto entre estos elementos y el eje de guía con aceite sintético de baja viscosidad. Por otro lado, el disco de acero cuenta con un orificio en uno de sus extremos, donde es conectado el núcleo ferromagnético del sensor de posición.

#### 5.1.2. Electroimán CL-80/38

El actuador utilizado en el sistema de levitación magnética, como se ha mencionado, es el electroimán CL-80/38 que se muestra en la Figura 5.2, el cual es alimentado con 12 V. En particular, el actuador comprende un devanado de alambre de cobre sobre un núcleo ferromagnético cilíndrico y, a causa del encapsulado de aluminio que protege tal embobinado, el electroimán cuenta con una única cara de sujeción.



FIGURA 5.2: Actuador del sistema: electroimán CL-80/35.

Debido a la geometría de dicho núcleo ferromagnético del embobinado, un circuito magnético cerrado es imposible de lograr utilizando este electroimán. Es evidente que esta propiedad afecta de manera significativa la fuerza de reluctancia magnética generada por el actuador del sistema al limitar la región en la que se almacena la energía magnética proporcionada por los electroimanes y, en consecuencia, disminuye el espacio de trabajo del elemento suspendido. Cabe mencionar que, de acuerdo a los resultados obtenidos para la distribución de la densidad del flujo magnético en el capítulo anterior, los efectos de borde producidos por las perforaciones del disco de acero originan un momento de torsión sobre el eje de desplazamiento.

#### 5.1.3. Sensor de posición LVDT

Respecto al sensor de posición lineal basado en un transformador diferencial variable, la estructura interna y externa de este es elaborada mediante manufactura aditiva con filamento de poliácido láctico, y se ha teñido de color negro como se aprecia en la Figura 5.3, junto con sus cuatro terminales eléctricas. Además, se ha agregado una parte circular de soporte en uno de sus extremos para ser fijado, posteriormente, a la placa inferior de la estructura del sistema.



FIGURA 5.3: Sensor de posición lineal construido para sistema de levitación magnética.

El circuito de acondicionamiento de las señales de los devanados del sensor de posición para el elemento suspendido del sistema es el mostrado en la Figura 5.4, el cual se ha implementado en una tablilla fenólica de una cara.



FIGURA 5.4: Circuito implementado de acondicionamiento para señal del sensor de posición lineal.

Sin embargo, como se ha comentado en el apartado anterior, debido al momento de torsión generado por las distorsiones de la densidad de flujo magnético del actuador se agrega aceite sintético de baja viscosidad al núcleo ferromagnético móvil que acopla los devanados del transductor de posición, de modo que sea mínima la fuerza de rozamiento entre este último y la pared interna del hueco de desplazamiento en la estructura del sensor. En cambio, la geometría estructural de la plataforma experimental del sistema es tal que un embobinado secundario se encuentra lo suficientemente cerca de los electroimanes para ser perturbado por estos mediante interferencia magnética, por ello es colocada una jaula de Faraday de malla metálica en la parte externa de la estructura del sensor de posición.

## 5.1.4. Amplificador de potencia y sensor de corriente

El circuito implementado del amplificador de potencia de los actuadores y el sensor de corriente de sus respectivos devanados se presenta en la Figura 5.5. Del mismo modo, el circuito es elaborado en una tarjeta fenólica de una cara.



FIGURA 5.5: Circuito implementado de amplificador de potencia y sensores de corriente para actuadores.

Más adelante, en el Apéndice C se presentan los diagramas de los circuitos impresos elaborados en la plataforma de desarrollo Eagle CAD, de la compañía Autodesk. Cabe mencionar que se han empleado resistores cerámicos de alta potencia como impedancias de prueba para los sensores de corriente y un disipador de calor para los interruptores de conmutación, de manera que se almacene el menor calor posible en el volumen circundante a las tarjetas de circuito y, adicionalmente, se agregan cuatro tornillos en cada esquina de ambos circuitos como soporte y se evite algún contacto entre las conexiones de estos y la placa inferior de aluminio.

#### 5.1.5. Controlador digital de señales

Una característica que definen el desempeño de un sistema de control es la capacidad de procesamiento digital de señales con la que cuenta el subsistema de software. En el presente trabajo de investigación se emplea el kit experimental de desarrollo para procesamiento digital de señales mostrado en la Figura 5.6, el cual se basa en el microcontrolador TMS320F28335 Delfino que pertenece a la familia C200, de la compañía Texas Instruments.



FIGURA 5.6: Kit experimental de procesador digital de señales con microcontrolador TMS320F28335.

El controlador digital mencionado se encuentra optimizado para procesamiento, detección y actuación con el fin de mejorar el rendimiento en lazo cerrado de aplicaciones de control en tiempo real, y cuenta con la particularidad de incorporar una unidad dedicada a procesamiento en punto flotante. De igual manera, los registros del dispositivo son modificados utilizando la plataforma de desarrollo Code Composer Studio, perteneciente a la misma empresa. A continuación, se exhiben las características principales del dispositivo.

- Microcontrolador con unidad de procesamiento de 32 bits.
- Tecnología CMOS con tiempo de ciclo de hasta 150 MHz.
- Arquitectura de bus Harvard.
- 16 canales de conversión analógico a digital con resolución de 12 bits.
- Hasta 18 salidas de modulación por ancho de pulso.

Ciertamente, se han discutido los detalles importantes que se han considerado para la implementación de los elementos diseñados que incorporan el sistema embebido. Así, en la siguiente sección se aborda la integración de la etapa de hardware y el subsistema software de los componentes recién descritos.

## 5.2. Integración de hardware y software

La fase de integración del ciclo de desarrollo del sistema propuesto en el presente trabajo de investigación incorpora herramientas y métodos especiales para gestionar la complejidad de dicha integración. Este es un proceso en el que se encuentran y depuran las fallas e imperfecciones de la plataforma experimental. En concreto, se presenta a detalle la plataforma experimental del sistema de suspensión electromagnética propuesto y elaborado para el desarrollo del presente trabajo de investigación, así como el algoritmo de programación del subsistema de software, y se describe la manera en que se adquiere la información del sistema para su posterior análisis.

#### 5.2.1. Sistema de levitación magnética

El sistema físico de levitación magnética de un grado de libertad mediante dos electroimanes que se ha diseñado e implementado se presenta en la Figura 5.7, donde se observan sus elementos de retroalimentación de control y la etapa de potencia eléctrica. Por lo que respecta a la estructura del sistema, se han realizado las perforaciones necesarias en las placas y perfiles estructurales de aluminio de manera que los cables de conexión de los actuadores no queden expuestos. De igual manera, la base de la misma ha sido construida con una placa de madera de densidad media, la cual se ha pintado con pintura acrílica en aerosol de color negro mate. Este es el mismo caso para las tapas laterales y trasera del estante inferior.



FIGURA 5.7: Plataforma experimental del sistema.

Por otra parte, se emplean escuadras elaboradas con base en manufactura aditiva con polímero de ácido poliláctico, para ensamblar y sujetar los perfiles de la estructura del sistema utilizando tornillos sin cabeza para llave hexagonal. Mientras que, para obtener una plataforma experimental compatible con cualquier controlador digital de señales, se han incorporado seis terminales eléctricas en una tapa lateral del estante inferior de la estructura, como se muestra en la Figura 5.8, mediante conectores hembra de tipo banana para la conexión de las señales analógicas de monitoreo del estado del sistema y las señales digitales de la ley de control implementada, y su respectiva referencia eléctrica. Además, se ha agregado un interruptor a un lado de estos para activar la fuente de alimentación de los actuadores.



FIGURA 5.8: Conexiones de señales analógicas y digitales para la plataforma experimental.

Cabe mencionar que, a diferencia de los sensores de corriente en los devanados, se ha utilizado una fuente de voltaje independiente como alimentación del transductor de posición. De tal manera que se evite cualquier interferencia eléctrica en las señales analógicas de información de los estados, producida por el generador de la señal del devanado primario, la interferencia electromagnética de los electroimanes y las componentes de alta frecuencia de las señales del controlador.

#### 5.2.2. Algoritmo de programación de software

El conjunto de ecuaciones que conforman la ley de control del sistema requiere de operadores matemáticos complejos, como es el caso en la integración de las ecuaciones dinámicas, y cuya ejecución digital requiere de una discretización de estos modelos. No obstante, el subsistema de control puede ser implementado utilizando la plataforma de desarrollo para sistemas de potencia PSIM, de la compañía Powersim, por medio de la herramienta Code Generator. Entonces, se genera un proyecto con el código en lenguaje C, que permite modificar los registros del microcontrolador, a partir del diagrama esquemático del modelo de las ecuaciones de la ley control. De esta manera, se habilitan y configuran los puertos de entrada para la conversión analógico a digital de las señales de retroalimentación del estado del sistema, así como los puertos digitales de salida para las señales de control por modulación de ancho de pulso.



FIGURA 5.9: Diagrama esquemático del algoritmo de programación para el controlador digital de señales.

Asimismo, se ha empleado una frecuencia de 10 *kHz* para el muestreo de la lectura de los transductores y una frecuencia de 2.3 *kHz* para las señales de control. Por lo que respecta a las frecuencias de corte del filtro pasa bajas de las señales analógicas, se han seleccionado 10 *Hz* para el sensor de posición y 30 *Hz* para los sensores de corriente, basándose en la frecuencia natural de su comportamiento dinámico. Vale decir que, se han establecido relaciones de carácter lineal para efectuar la conversión del voltaje medido de los transductores a la variable medida correspondiente. En el Apéndice D se presentan los diagramas esquemáticos y las especificaciones establecidas en los módulos de configuración, realizados en la plataforma de simulación mencionada, utilizados para implementar el controlador por rechazo activo de perturbaciones del sistema de levitación magnética del presente trabajo de investigación. Por otra parte, es importante tomar en cuenta los límites de las variables estimadas y las amplitudes de las superficies de deslizamiento, con base en los resultados de simulación obtenidos en el capítulo anterior, de tal forma que se evite la saturación del controlador y el desbordamiento de las variables estimadas.

#### 5.2.3. Adquisición de datos

La adquisición de información de los procesos internos del sistema se realiza mediante la interfaz de comunicación serial del controlador digital de señales. Para ello, se configuran los puertos utilizados como receptor y transmisor mediante el módulo de configuración de la misma interfaz, en donde se establece una velocidad de transmisión de 115200 bits por segundo y una frecuencia de muestreo de 200 *Hz* para cada señal de dicha comunicación.



FIGURA 5.10: Interfaz DSP Oscilloscope para la adquisición de datos por comunicación serial.

De hecho, la visualización de la lectura de información se apoya en la herramienta DSP Oscilloscope de la plataforma de simulación mencionada anteriormente, cuya interfaz se muestra en la Figura 5.10, que permite visualizar y modificar las variables internas del sistema en tiempo real, tal como los valores deseados para las salidas diferencialmente planas y una bandera de inicialización. Desde luego, esta última característica permite ahorrar tiempo en la sintonización de los estimadores y el controlador.

## 5.3. Resultados obtenidos

En el presente apartado se reportan los resultados experimentales obtenidos para el control por rechazo activo de perturbaciones del sistema de suspensión electromagnética, de un grado de libertado que se aborda en el presente trabajo de investigación. A continuación, en la Tabla 5.1 se muestran las ganancias del controlador por modos deslizantes y de los estimadores de estado extendido, con las cuales se ha obtenido la mejor respuesta del sistema.

	$C_1$	56
Ganancias de controlador	$\Lambda_1$	2
	$\Lambda_2$	2
	ζ	1
Ganancias de observador	$\omega_n$	400 rad/s

TABLA 5.1: Ganancias del controlador y observador para la implementación del sistema en lazo cerrado.

Por lo que respecta a los límites establecidos para el controlador equivalente de cada electroimán, se utiliza un valor no nulo pero menor a la unidad debido a la presencia de perturbaciones de alta frecuencia en las señales de los transductores, por lo que se definen de la siguiente manera

$$v_{1eq} = \ddot{F}_1^* + 3C_1^2(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) + 2C_1^3(F_1 - F_1^*) + \frac{1}{2}$$
 $v_{2eq} = \frac{1}{2}$ 

Ahora bien, se realizan pruebas en lazo cerrado del sistema para estabilizar sus salidas a distintos valores deseados de manera que sea posible un análisis determinante de las características y prestaciones del controlador diseñado. Posteriormente, se obtienen resultados para la respuesta del sistema ante perturbaciones sobre el elemento suspendido y el flujo magnético.

#### 5.3.1. Pruebas en lazo cerrado

Se implementa una prueba del sistema en lazo cerrado donde se regula la posición del elemento suspendido y la corriente del actuador inferior a tres estados constantes. Y, efectivamente, se estabiliza y regula el disco de acero en la posición de 10 *mm*, de la cual se inician las pruebas que se presentan más adelante. En la Figura 5.11 se muestran los resultados obtenidos concernientes a la posición de la pieza suspendida, en donde se observa que esta tiene un tiempo de establecimiento de poco mayor a un segundo, realizando un desplazamiento de medio milímetro.



FIGURA 5.11: Regulación de la posición del elemento suspendido.

El sistema de control elaborado presenta una alta sensibilidad ante cambios rápidos, por lo que se ha utilizado el actuador inferior de manera que permita a la primera salida diferencialmente plana establecerse en un menor tiempo sin que se induzca inestabilidad en el sistema. Por consiguiente, se aumenta la corriente del electroimán inferior al mismo tiempo que se le exige al elemento suspendido una posición más cercana al actuador superior, mientras que la corriente del actuador superior realiza el esfuerzo de posicionar al elemento suspendido sobre el valor de



referencia, como se muestra en la Figura 5.12. Por otro lado, en la Figura 5.13 se muestran los resultados obtenidos para la variable de control de ambos actuadores.

FIGURA 5.12: Corriente de los actuadores del sistema experimental.

Como se ha comentado, la etapa eléctrica del sistema presenta una dinámica con una frecuencia natural mayor a la del comportamiento mecánico. De ello resulta que las corrientes de los electroimanes sean similares a las señales de la ley de control.



FIGURA 5.13: Señales de control para los actuadores del sistema experimental.



FIGURA 5.14: Variable estimada  $\eta$  para la incertidumbre asociada a la posición del elemento suspendido.

Asimismo, el comportamiento de las señales de control es determinado por las variables estimadas para las perturbaciones e incertidumbres asociadas a la primera y segunda salida plana del sistema, como se muestra en la Figura 5.14 y 5.15, respectivamente. Estas últimas definen la parte continua de los controladores.



FIGURA 5.15: Variable estimada  $\rho$  para la incertidumbre asociada a la corriente del actuador inferior.



FIGURA 5.16: Error de regulación  $\tilde{F}_1$  para la posición del elemento suspendido del sistema experimental,  $x_1$ .

En la Figura 5.16 se presenta el error de regulación de la posición del disco de acero, en donde es apreciable su convergencia exponencial al origen y, de la misma manera, en la Figura 5.17 se muestra el error de regulación para la corriente en el devanado del actuador inferior y su rápida convergencia al origen.



FIGURA 5.17: Error de regulación  $\tilde{F}_2$  para la corriente del actuador inferior del sistema experimental,  $x_4$ .



FIGURA 5.18: Índice de desempeño para la regulación de la primera salida plana,  $F_1$ .

El índice de desempeño del controlador  $u_1$  para la regulación del elemento suspendido, basado en la integral del error cuadrático, se presenta en la Figura 5.18. Y de la misma forma, en la Figura 5.19 se expone el índice de desempeño del controlador  $u_2$  para la regulación de la corriente del actuador inferior.



FIGURA 5.19: Índice de desempeño para la regulación de la segunda salida plana,  $F_2$ .

Luego, se realiza una prueba experimental en la que se establece una trayectoria suave de seguimiento para la posición del elemento suspendido del sistema, y una referencia fija para la corriente del actuador inferior a fin de ajustar el amortiguamiento para el desplazamiento del rodamiento lineal. Ciertamente, la trayectoria se ha diseñado para realizar una transición entre el estado inicial de 10 *mm* y el estado final de 12 *mm*, en un tiempo de 40 segundos. En la Figura 5.20 se presentan los resultados obtenidos para la posición del disco de acero.



FIGURA 5.20: Seguimiento de trayectoria para la posición del elemento suspendido.

Por otra parte, se utiliza la corriente mínima para el actuador inferior con la cual se logra el seguimiento de manera eficiente de la pieza suspendida a lo largo de la trayectoria de seguimiento. Los resultados obtenidos concernientes a las corrientes que han consumido los actuadores durante la prueba se muestran en la Figura 5.21. En esta última, es posible apreciar los cambios de la corriente en el devanado del actuador superior generados para estabilizar y controlar la posición del elemento suspendido. Del mismo modo, en la Figura 5.22 se exponen las señales de la ley de control para cada electroimán, en donde se observa que la contribución de los estimadores en la variable de control total es mayor que la contribución ejercida por el controlador discontinuo, lo cual coincide con los resultados por solución numérica que se han obtenido en el capítulo anterior. De hecho, el aumentar las ganancias del


controlador discontinuo acentúa las oscilaciones del sistema en estado estacionario lo suficiente para inducir una dinámica inestable en este.

FIGURA 5.21: Corriente de los actuadores del sistema experimental.

Al igual que en el caso anterior, las corrientes que consumen los actuadores durante la prueba de seguimiento de trayectoria tienen un comportamiento similar a las señales de control.



FIGURA 5.22: Señales de control para los actuadores del sistema experimental.



FIGURA 5.23: Variable estimada  $\eta$  para la incertidumbre asociada a la posición del elemento suspendido.

Adicionalmente, el comportamiento de las señales de control es determinado por las variables estimadas para las perturbaciones e incertidumbres asociadas a la primera y segunda salida plana del sistema, como se muestra en la Figura 5.23 y 5.24, respectivamente. Estas últimas componen la parte continua de los controladores.



FIGURA 5.24: Variable estimada  $\rho$  para la incertidumbre asociada a la corriente del actuador inferior.



FIGURA 5.25: Error de seguimiento  $\tilde{F}_1$  para la posición del elemento suspendido del sistema experimental,  $x_1$ .

En la Figura 5.25 se presenta el error de seguimiento de la posición del disco de acero, en donde se aprecia que este siempre es menor a 200  $\mu m$  en amplitud a lo largo de toda la trayectoria y, del mismo modo, en la Figura 5.26 se muestra el error de regulación para la corriente en el devanado del actuador inferior.



FIGURA 5.26: Error de regulación  $\tilde{F}_2$  para la corriente del actuador inferior del sistema experimental,  $x_4$ .



FIGURA 5.27: Índice de desempeño para el seguimiento de la primera salida plana,  $F_1$ .

El índice de desempeño del controlador  $u_1$  para el seguimiento del elemento suspendido, basado en la integral del error cuadrático, se presenta en la Figura 5.27. Y de la misma forma, en la Figura 5.28 se exhibe el índice de desempeño del controlador  $u_2$  para la regulación de la corriente del actuador inferior.



FIGURA 5.28: Índice de desempeño para la regulación de la segunda salida plana,  $F_2$ .

#### 5.3.2. Robustez del sistema ante perturbaciones

Seguidamente, se estudia la robustez del controlador implementado mediante cuatro pruebas experimentales, en cuyas se estabiliza la posición del elemento suspendido a 11.5 *mm* y la corriente del actuador inferior es regulada a 300 *mA*, con el objetivo de amortiguar la alta sensibilidad del sistema ante cambios abruptos en la ley de control. A continuación, se exponen los resultados obtenidos cuando se acerca un imán artificial permanente al volumen de trabajo del sistema, de manera que se perturbe el flujo magnético generado por los electroimanes. De esta manera, en la Figura 5.29 se presentan los resultados obtenidos del efecto transitorio en la posición del disco de acero y, efectivamente, esta se restablece a su valor deseado.



FIGURA 5.29: Respuesta de la posición del elemento suspendido bajo perturbación del flujo magnético.

Las corrientes de los devanados se comportan de acuerdo con la parametrización diferencial realizada para el diseño del controlador, en donde el actuador superior controla la posición del elemento suspendido y rechaza activamente las perturbaciones e incertidumbres paramétricas del sistema mecánico, como se muestran en la Figura 5.30. En cambio, la corriente del actuador inferior contribuye en el acoplamiento magnético efectuado por los electroimanes y el disco de acero junto con el cojinete lineal, de modo que infiere en la velocidad de excitación descendente al contribuir con una fuerza magnetomotriz coercitiva. Por consiguiente, se tiene una



mayor flexibilidad para sintonizar las ganancias del controlador discontinuo del actuador superior para obtener una respuesta más rápida del sistema en lazo cerrado.

FIGURA 5.30: Corriente de los actuadores del sistema experimental bajo perturbación del flujo magnético.

En la Figura 5.31 se muestran los resultados obtenidos para las variables de control, en donde es apenas distinguible el efecto de la etapa discontinua de la señal.



FIGURA 5.31: Señales de control para actuadores del sistema experimental bajo perturbación del flujo magnético.



Después, se realiza una prueba experimental en la que se influye directamente sobre la masa del elemento suspendido y el coeficiente de acoplamiento magnético.

FIGURA 5.32: Respuesta de la posición del elemento suspendido bajo un cambio en la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético.

Para esta prueba, se introduce una pieza de acero plana en el volumen de trabajo del sistema de manera que se adhiera a un costado del cojinete lineal.



FIGURA 5.33: Corriente de los actuadores del sistema experimental bajo un cambio en la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético.

La posición del elemento suspendido es perturbada generando un efecto transitorio, como se presenta en la Figura 5.32, y se restablece en aproximadamente medio segundo. De igual manera, el comportamiento de las variables de control define la dinámica de las corrientes en los electroimanes, como se muestra en la Figura 5.33, en comparación con los resultado obtenidos para las señales de control que se exponen en la Figura 5.34. Con certeza, se aprecia la rápida respuesta de la variable de control del actuador superior, para regresar la posición del elemento suspendido sobre su valor de referencia.



FIGURA 5.34: Señales de control del sistema experimental bajo un cambio en la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético.

En seguida, se repite una prueba similar, pero en esta ocasión se utiliza una pieza de acero de mayor tamaño. En la Figura 5.35 se muestra la respuesta de la posición del elemento suspendido, ante el efecto del aumento de la masa y la distorsión del flujo magnético al modificar el acoplamiento de la fuerza de reluctancia, y presenta un tiempo de establecimiento de aproximadamente 3 segundos. A diferencia que en el caso anterior, la posición del disco de acero se desvía en sentido positivo, por lo que la corriente en el actuador superior es obligada a disminuir, como se demuestra en la Figura 5.36. Así, de acuerdo con los resultados obtenidos, es posible determinar que la pieza adherida al cojinete lineal, en este caso, aumenta el acoplamiento



magnético del arreglo mecánico, de modo que la fuerza atractiva del electroimán superior se intensifica en una proporción mayor al peso agregado por tal elemento.

FIGURA 5.35: Respuesta de la posición del elemento suspendido bajo un cambio en la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético.

Respecto a la respuesta de las señales de control que regulan la corriente en los devanados de los actuadores, esta se expone en la Figura 5.37.



FIGURA 5.36: Corriente de los actuadores del sistema experimental bajo un cambio en la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético.



FIGURA 5.37: Señales de control del sistema experimental bajo un cambio en la masa y el coeficiente del acoplamiento magnético.

Para terminar, se lleva a cabo una prueba experimental en la que se introduce una pieza cilíndrica en el espacio de trabajo del sistema, con la diferencia de que ahora se evita el contacto entre dicha pieza y el elemento suspendido. Así, en la Figura 5.38 se presenta la respuesta de la posición del disco de acero para esta prueba.



FIGURA 5.38: Respuesta de la posición del elemento suspendido ante perturbación del flujo magnético.



FIGURA 5.39: Corriente de los actuadores del sistema experimental ante perturbación del flujo magnético.

En efecto, la corriente del actuador superior responde al mismo tiempo que la primera salida del sistema se aleja de su valor de referencia, como se muestra en la Figura 5.39, de modo que la posición del elemento suspendido se restablece en 2 segundos, aproximadamente.



FIGURA 5.40: Señales de control del sistema experimental ante perturbación del flujo magnético.

Por su parte, la respuesta de las señales de control para esta prueba se exhiben en la Figura 5.40. Por tanto, la ley del control diseñada para el actuador superior rechaza activamente, de manera eficiente, tanto las perturbaciones externas del sistema como el efecto de incertidumbres paramétricas en el modelado matemático que representa su comportamiento dinámico.

#### 5.4. Discusión

En las distintas pruebas que se han realizado en la plataforma experimental del sistema de suspensión electromagnética, se han controlado sus correspondientes salidas a lo largo de una trayectoria de referencia sobre el espacio de estados, determinando las limitantes físicas del arreglo experimental y los puntos de operación en los cuales el sistema trabaja de modo óptimo. De esta manera, es posible estudiar las prestaciones de los actuadores y las características internas del sistema construido, junto con la ley de control diseñada para el mismo. Es importante tomar en cuenta que, para su comportamiento dinámico, se ha considerado un modelo matemático basado en parámetros invariantes, lo cual es una mera aproximación al comportamiento real del sistema de levitación magnética. Sin embargo, el controlador diseñado con enfoque al rechazo activo de perturbaciones, basado en un controlador discontinuo mediante la técnica de modos deslizantes, ha permitido compensar las incertidumbres en el modelo matemático para estabilizar el sistema a cualquier estado deseado, dentro del volumen de trabajo permisible por sus propiedades físicas.

Desde luego, ciertas características de diseño presentes en el sistema experimental, que le impiden operar de manera ideal, y la existencia de efectos dinámicos que no se han considerado matemáticamente en el modelo, generan una estabilidad crítica en el sistema cuando se presentan componentes de alta frecuencia en la variable de control del actuador superior. Por lo tanto, para alcanzar una mayor frecuencia natural del sistema en lazo cerrado, y se conserve la estabilidad, se utiliza el flujo magnético generado por el actuador inferior, a fin de acelerar el proceso de desmagnetización del elemento suspendido. Así, es factible ajustar el amortiguamiento y rigidez de la suspensión de este último.

### Capítulo 6

# **Conclusiones y Trabajo Futuro**

En el presente y último capítulo se establecen las conclusiones generales del trabajo desarrollado referente a la caracterización y control de un sistema de suspensión electromagnética de un grado de libertad, se mencionan las aportaciones relevantes realizadas por la misma y se presentan las propuestas de trabajos futuros para continuar con esta línea de investigación.

#### 6.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha diseñado e implementado un sistema de levitación magnética de un grado de libertad, donde se han utilizado dos electroimanes para ejercer fuerzas atractivas de reluctancia en ambas direcciones sobre un disco de acero. Al mismo tiempo, se ha descrito detalladamente el diseño de los elementos estructurales de la plataforma experimental, así como la etapa de retroalimentación del sistema y el circuito de amplificación de potencia para los actuadores. Posteriormente, se ha diseñado una ley de control con enfoque al rechazo activo de perturbaciones basado en modos deslizantes y planitud diferencial para realizar seguimiento de la posición del elemento suspendido y regulación de la corriente del actuador inferior, a partir del modelo matemático que se ha obtenido para describir su dinámica. De la misma manera, se ha caracterizado el comportamiento de los subsistemas implementados que conforman el arreglo experimental y se ha demostrado su operación lineal. Igualmente, los parámetros presentes en el modelo matemático que describe la dinámica del sistema se han obtenido de manera experimental y, en particular, se ha estudiado el comportamiento de la fuerza atractiva de cada actuador y el comportamiento de la densidad de flujo generada por estos. De este modo, se han obtenido resultados satisfactorios para la estabilización, seguimiento y regulación de las salidas diferencialmente planas del sistema. Con esto, queda comprobada la validez de la hipótesis planteada para el presente trabajo de investigación y, evidentemente, se han alcanzado los objetivos definidos para la misma. No obstante, cabe mencionar los siguientes aspectos importantes que se han observado en la elaboración, integración e implementación del sistema propuesto.

Respecto al desempeño del controlador diseñado, este ha presentado robustez ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas, en donde el controlador basado en modos deslizantes proporciona una acción correctiva proporcionalderivativa y la contribución del estimador de estado extendido proporciona una acción correctiva integral. Además, se ha obtenido que en un controlador por modos deslizantes basado en planitud diferencial exhibe una señal en la que predominan las componentes de carácter continuo, por lo que se resuelve naturalmente un problema común en lo que se refiere a la actividad de alta frecuencia en este tipo de controladores. Este último criterio se ha ratificado por simulación y experimentalmente. En específico, cuando la amplitud de la señal discontinua se hace lo suficientemente grande, el elemento suspendido oscila indefinidamente y en el peor de los casos es sujetado por la cara de atracción del actuador superior y, en consecuencia, la controlabilidad del sistema desaparece. Sin embargo, el esquema de control diseñado presenta un eficiente desempeño para estabilizar el sistema y resulta sencillo de implementar, en cuyas ecuaciones de control se requiere un menor número de coeficientes característicos que los utilizados para describir su dinámica.

Por otro lado, se ha utilizado una fuerza magnetomotriz coercitiva generada por el actuador inferior, para acelerar el proceso de desmagnetización del elemento suspendido y aumentar la velocidad de respuesta del sistema en lazo cerrado. En cambio, el efecto del acoplamiento magnético mutuo de las fuerzas atractivas de los electroimanes tiene una contribución considerable en el sistema cuando el disco de acero y el cojinete lineal se encuentran a una distancia menor a 400 *mum* de cualquier cara de absorción. Por su parte, se ha determinado que la polarización en el devanado de los actuadores debe ser tal que los flujos magnéticos que generan sean cancelados con el fin generar fuerzas magnetomotrices en una dirección opuesta sobre el elemento suspendido. Asimismo, las inevitables pérdidas de potencia por resistencia eléctrica en el conductor de los actuadores no permiten establecer una operación nominal eficiente del sistema por un tiempo mayor a 15 minutos, debido al incremento de temperatura de los devanados de estos. Por ello, es recomendado realizar las pruebas del sistema cuando estos se encuentren a una temperatura ambiente.

#### 6.2. Principales aportaciones

Las contribuciones de mayor relevancia realizadas en el desarrollo del presente trabajo de investigación se basan en la metodología propuesta para el diseño y construcción de los elementos de una plataforma experimental de un sistema de suspensión electromagnética, tal como el sensor de posición lineal implementado a partir de un transformador diferencial variable y los sensores de corriente de parte alta para el consumo de potencia del devanado de los actuadores. Del mismo modo, se ha presentado el diseño de un controlador basado en modos deslizantes y planitud diferencial, con enfoque al rechazo activo de perturbaciones, en donde dicha parametrización ha permitido controlar pasivamente el amortiguamiento del elemento suspendido mediante la regulación de la fuerza atractiva del actuador inferior. De esta manera, se obtiene que la trayectoria del sistema presenta características híbridas, debido a que contiene un comportamiento con elementos de naturaleza continua y discontinua en el espacio de estados, resultando en un sistema de especial interés en sentido matemático. Por otra parte, se ha demostrado la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado mediante el criterio de estabilidad de Lyapunov y el análisis de estabilidad entrada a estado.

#### 6.3. Trabajos futuros

El sistema de suspensión electromagnética de un grado de libertad diseñado e implementado puede ser utilizado en trabajos de investigación posteriores y, como se ha planteado, se busca impulsar la línea de investigación de control de estructura variable en sistemas no lineales, tal como el levitador magnético. Desde luego, existen bastantes mejoras que se pueden efectuar en la plataforma experimental. En específico, se proponen los siguientes trabajos futuros.

- Diseñar e implementar un esquema de control considerando técnicas sensorless para la variable de posición.
- Ampliar el movimiento del elemento suspendido del sistema a dos grados de libertad.
- Proponer unas salidas diferencialmente planas distintas que permitan implementar un controlador colaborativo.
- Analizar y modelar el comportamiento del efecto de histéresis en los actuadores del sistema.
- Estudiar el comportamiento de los actuadores del sistema respecto a las variaciones de temperatura de su núcleo ferromagnético.
- Modelar y estudiar el acoplamiento magnético mutuo entre los actuadores.

Apéndice A

# Diagramas Esquemáticos de Simulación

## A.1. Simulación de comportamiento de actuador



FIGURA A.1: Diagrama esquemático para la simulación de comportamiento del actuador.

### A.2. Simulación de sistema en lazo cerrado



FIGURA A.2: Diagrama esquemático general para la simulación de comportamiento de los estados del sistema en lazo cerrado.



FIGURA A.3: Diagrama esquemático del modelo dinámico para la simulación de comportamiento del sistema en lazo cerrado.



FIGURA A.4: Diagrama esquemático del controlador para la simulación de comportamiento del sistema en lazo cerrado.



FIGURA A.5: Diagrama esquemático de la trayectoria de seguimiento para la simulación del sistema en lazo cerrado.



FIGURA A.6: Diagrama esquemático de los estimadores para la simulación del sistema en lazo cerrado.



FIGURA A.7: Diagrama esquemático para el cálculo de las ganancias del estimador para la simulación del sistema en lazo cerrado.

## **Apéndice B**

## Trayectoria de Seguimiento

#### B.1. Función de referencia

La trayectoria de referencia para la primer salida diferencialmente plana del sistema, referente a la posición del elemento suspendido, es una función definida por partes de la siguiente manera

$$F_{1}^{*}(t) = \begin{cases} F_{ini}^{*} & para & t \leq t_{ini} \\ F_{ini}^{*} + (F_{fin}^{*} - F_{ini}^{*})P_{B}(t, t_{ini}, t_{fin}) & para & t_{ini} < t < t_{fin} \\ F_{fin}^{*} & para & t \geq t_{fin} \end{cases}$$
(B.1)

donde  $F_{ini}^*$  y  $F_{fin}^*$  son los valores deseados inicial y final, respectivamente, entre la transición de la curva de seguimiento para la posición del disco de acero. Y la función suave  $P_B(t, t_{ini}, t_{fin})$  es un polinomio Bezier de décimo orden, utilizado en [47], definido por la siguiente expresión

$$P_B(t, t_{ini}, t_{fin}) = 252(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^5 - 1050(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^6 + 1800(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^7 - 1575(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^8 + 700(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^9 - 126(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{10}$$
(B.2)

Por otra parte, la superficie de deslizamiento diseñada para el seguimiento de la primera salida plana y su correspondiente controlador equivalente requieren de hasta la tercer derivada temporal de la trayectoria de referencia. A continuación, se presentan tales funciones.

#### **B.2.** Derivadas temporales

En la función de referencia el único termino dependiente del tiempo es el polinomio Bezier, por lo que es necesario conocer solo la variación temporal de este. Así, la primera derivada respecto del tiempo de dicho polinomio se encuentra descrito por la siguiente expresión

$$\dot{P}_{B}(t, t_{ini}, t_{fin}) = \frac{1}{t_{fin} - t_{ini}} [1260(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{4} - 6300(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{5} + 12600(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{6} - 12600(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{7} + 6300(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{8} - 1260(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{9}]$$
(B.3)

la segunda derivada temporal es

$$\ddot{P}_{B}(t, t_{ini}, t_{fin}) = \frac{1}{(t_{fin} - t_{ini})^{2}} [5040(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{3} - 31500(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{4} + 75600(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{5} - 88200(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{6} + 50400(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{7} - 11340(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{8}]$$
(B.4)

y la tercera derivada respecto del tiempo está dada por

$$\ddot{P}_{B}(t, t_{ini}, t_{fin}) = \frac{1}{(t_{fin} - t_{ini})^{3}} [15120(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{2} - 126000(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{3} + 378000(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{4} - 529200(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{5} + 352800(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{6} - 90720(\frac{t - t_{ini}}{t_{fin} - t_{ini}})^{7}]$$
(B.5)

Apéndice C

# Tarjetas de Circuito Impreso

# C.1. Circuito de acondicionamiento de señal de sensor de posición



FIGURA C.1: Diagrama del circuito impreso del acondicionamiento de las señales del sensor de posición.

# C.2. Circuito de sensor de corriente y amplificador de potencia



Size: 93 x 93 mm

FIGURA C.2: Diagrama del circuito impreso del sensor de corriente y amplificador de potencia para los actuadores.

Apéndice D

# Diagramas Esquemáticos de Implementación



FIGURA D.1: Diagrama esquemático del controlador para la implementación del sistema en lazo cerrado.



FIGURA D.2: Diagrama esquemático de los estimadores para la implementación del sistema en lazo cerrado.



FIGURA D.3: Diagrama esquemático de la trayectoria de seguimiento para la implementación del sistema en lazo cerrado.

DSP C	lock : TI_DSPSPD1	×
Parameters Color		
DSP speed specification (F28335) Help		Help
		Display
Name	TI_DSPSPD1	
External Clock (MHz)	30	
DSP Speed (MHz)	150	

FIGURA D.4: Configuración del bloque del reloj interno del procesador digital de señales.

SCI Configuration : PSM_F28335_COMMCFG1		
Parameters Color		
SCI configuration (F28335)	Help	
	Display	
Name	PSM_F28335_COMMCFG1	
SCI Port	SCIA (GPIO28, 29) 🔻 🗆 🖬	
Speed (bps)	115200 🖵 🗖	
Parity Check	None 🔽 🗖	
Output Buffer Size	4800 🗆 🗖	

FIGURA D.5: Configuración del bloque de comunicación serial del procesador digital de señales.
## Bibliografía

- [1] ISO Standard 14839-1. *Mechanical vibration Vibrations of rotating machinery equipped with active magnetic bearings Part 1: Vocabulary*. Mayo de 2002.
- [2] K. J. Astrom y T. Hagglund. PID Controllers: Theory, Design and Tuning. Segunda Edición. Instrument Society of America, 1995.
- [3] J.W. Beams, J.L. Young y J.W. Moore. «The production of high centrifugal fields».
  En: J. Applied Physics (1946), 886 890.
- [4] A. S. Berger. *Embedded Systems Design: An Introduction to Processes, Tools, and Techniques.* USA: CMP Books, 2002.
- [5] H. Bleuler. «A survey of magnetic levitation and magnetic bearing types». En: *JSME Internat. Journal Series III* 35.3 (sep. de 1992).
- [6] A. A. Bobtsov y col. «A State Observer for Sensorless Control of Magnetic Levitation Systems». En: Automatica 97 (2018), págs. 263 -270.
- [7] D. G. Buitrago y V. D. Correa R. «Control Local de un Sistema No Lineal: El Péndulo con Rueda de Reacción». En: *Scientia et Technica Año XIII* 13.34 (2007), págs. 55 -60.
- [8] A. Cervera y col. «Modelling and Control of Magnetic Actuation Systems Based on Sensorless Displacement Information». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (2018).
- [9] S. J. Chapman. *Máquinas Eléctricas*. Quinta Edición. Nueva York, N.Y.: Mc Graw Hill, 2012.
- [10] D. Cho, Y. Kato y D. Spilman. «Sliding Mode and Classical Control of Magnetic Levitation Systems». En: *IEEE Control Systems* 0272 (feb. de 1993), págs. 42 -48.

- [11] D. A. Christopher y R. Beach. «Flywheel Technology Development Program for Aerospace Applications». En: *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine* 13.6 (1998), págs. 9 -14.
- [12] S. Domínguez y col. Robótica Automática: Control en el Espacio de Estados. Segunda Edición. Madrid, España: Pearson, Prentice-Hall, 2006.
- [13] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley Jr. y S. D. Umans. *Electric Machinery*. Sexta Edición. McGraw-Hill, 2002.
- [14] P. Cruz Francisco. «Control de un sistema de levitación magnética con compensación de redes neuronales». Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias. México, D.F.: Instituto Politécnico Nacional (IPN), oct. de 2009.
- [15] S. I. Tamayo García. «Construcción y Control por Variables de Estado de una Plataforma Didáctica de Levitación Magnética». Proyecto previo a la obtención del título de Ingeniero en Electrónica y Control. Quito, Ecuador: Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, mar. de 2014.
- [16] B.-Z Guo y Z. Zhao. «On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty». En: *Systems and Control Letters* 60.6 (2011), págs. 420-430.
- [17] H. Habermann y G. Liard. «Le palier magnétique active: un principe révolutionaire». En: *SKF Rev. Roulements* 192 (1977).
- [18] H. Habermann y G. L. Liard. «Control: Practical magnetic bearings: Electronically controlled electromagnets support spinning 1100-kg shafts to micrometer accuracy.» En: *IEEE Spectrum* 16.9 (1979), 26 – 30.
- [19] J. Q. Han. «A Class of Extended State Observers for Uncertain Systems». En: Control and Decision 10.1 (1995), págs. 85 -88.
- [20] D. W. Hart. *Electrónica de Potencia*. Primera Edición. Prentice-Hall, 2001.
- [21] P. J. Campos Hernández. «Construcción y Control de un Levitador Magnético». Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias. Tijuana, B.C., México: Instituto Politécnico Nacional (IPN), ago. de 2008.

- [22] R. C. Hibbeler. *Ingeniería Mecánica: Dinámica*. Doceava Edición. Prentice-Hall, 2010.
- [23] W. G. Hurley, M. Hynes y W. H. Wölfle. «PWM Control of a Magnetic Suspension System». En: *IEEE Transactions on Education* 47.2 (mayo de 2004), págs. 165-173.
- [24] Texas Instruments. *High-side current-sensing circuit design*. http://www.ti.com/ lit/an/sboa310a/sboa310a.pdf?fbclid=IwAR1X0dnvuHP6qu4L feVdHalQUre js4v-QsLcTIkNZunP5wCsOi57V57-j98. Consultado en: 23 - 06 - 2019. Dic. de 2018.
- [25] A. Javed y col. «Lateral Vibration Suppression by Varying Stiffness Control in a Vertically Active Magnetic Suspension System». En: Actuators 7.2 (2018).
- [26] C. Jin y col. «Design of magnetic bearing control system based on active disturbance rejection theory». En: *Journal of Vibration and Acoustics* (jul. de 2018).
- [27] L. Kai-Yew, V. T. Coppola y D. S. Bernstein. «Adaptive autocentering control for an active magnetic bearing supporting a rotor with unknown mass imbalance». En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4.5 (1996), 587 – 597.
- [28] H. Kemper. «Overhead suspension railway with wheel-less vehicles employing magnetic suspension from iron rails». Patent 643316 and 644302 (Germany). 1937.
- [29] H. Kemper. «Schwebende Aufhangung durch elektromagnetische Kraft; eine Möglichkeit für eine grunds atzlich neue Fortbewegungsart». En: *Elektrotechn*. Z. 59 (1938), 391 – 395.
- [30] H. K. Khalil. Nonlinear Systems. Tercera Edición. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, 1996.
- [31] M. R. Khan y col. «Predicting the Effect of Field Shaper in Electromagnetic Welding Using FEM». En: Arabian Journal for Science and Engineering (jul. de 2018).
- [32] W. J. Kim y D. L. Trumper. «Active Multivariable Optimal Control of a Planar Magnetic Levitator». En: *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications* (oct. de 1997), págs. 97 -102.

[33]	R. Koehler. «Transrapid - development and application status». En: (sep. de
	2005), págs. 23 -28.

- [34] J. Kumbernuss y col. «A novel magnetic levitated bearing system for Vertical Axis Wind Turbines (VAWT)». En: *Applied Energy* 90.1 (2012), 148 153.
- [35] F. J. Lin, L. T. Teng y P. H. Shieh. «Adaptative Backstepping Control System for Magnetic Levitation Apparatus Recurrent Neural Network». En: (nov. de 2007), págs. 671 -676.
- [36] G. Lin y X. Sheng. «Application and Further Development of MAGLEV Transportation in China». En: *Transportation Systems and Technology* (2018), págs. 36 -43.
- [37] J. D. Lindlau y C. R. Knospe. «Feedback linearization of an active magnetic bearing with voltage control». En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 10.1 (2002), 21 – 31.
- [38] J. F. Lindsay y M. H. Rashid. *Electromechanics and Electrical Machinery*. Primera Edición. Englewoods Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1986.
- [39] Y. Luguang. «Development and Application of the Maglev Transportation System». En: *IEEE Transactions On Applied Superconductivity* 18.2 (jun. de 2008), págs. 92 -99.
- [40] J. Lévine. *Analisis and Control of Nonlinear Systems. A Flatness-based Approach*. Primera Edición. Springer, 2009.
- [41] H. J. Marquez. Nonlinear Control Systems: Analysis and Design. Primera Edición. John Wiley y Sons, Inc., oct. de 2002.
- [42] M. Martino y col. «Design of a Linear Variable Differential Transformer with High Rejection to External Interfering Magnetic Field». En: *IEEE Transactions* on Magnetics 46.2 (2010), págs. 674 -677.
- [43] A. Masi y col. «LVDT Conditioning on the LHC Collimators». En: *IEEE Transactions on Nuclear Science* 55.1 (2008), págs. 67 -75.
- [44] D. F. Mazurek, E. R. Johnston y F. P. Beer. *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica*. Onceava Edición. McGraw-Hill, 2017.

- [45] Z. Mingda y col. «Research on the Active Guidance Control System in High Speed Maglev Train». En: *IEEE Access* 7 (2019), págs. 741 -752.
- [46] J. C. Milena Moreno. «Control Lineal y No Lineal de un Levitador Magnético. Estudio Comparativo». Proyecto Fin de Carrera. Barcelona, España: Universitat Politécnica de Catalunya, 2010.
- [47] A. Hernández Méndez. «Control Descentralizado Adaptable Para Convertidores Elevadores Alimentados Por Paneles Fotovoltaicos e Interconectados en una Micro-Red de CD». Para obtener el grado de Doctor en Ingeniería Electrónica, Opción Sistemas Inteligentes Aplicados. H. Cd. de Huajuapan de León, Oaxaca, México: Universidad Tecnológica de la Mixteca, abr. de 2018.
- [48] M. Neff, N. Barletta y R. Schöb. «Bearingless Centrifugal Pump for Highly Pure Chemicals». En: (ago. de 2002).
- [49] D. S. Nyce. *Linear Position Sensors: Theory and Application*. Vol. 1. John Wiley y Sons, Inc., 2004.
- [50] J. I. Torres O., B. Cruz Muñoz y W. Marin Ramirez. «Caracterización y Calibración Automática de Bobinas de Heltmoltz en DC». En: *Scientia et Technica Año* XIII 13.34 (mayo de 2007), págs. 535 -539.
- [51] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Quinta Edición. Pearson-Prentice Hall, 2010.
- [52] J. Pan, W. Li y H. Zhang. «Control Algorithms of Magnetic Suspension Systems Based on the Improved Double Exponential Reaching Law of Sliding Mode Control». En: *International Journal of Control, Automation and Systems* 16 (2018), págs. 1 -10.
- [53] W. Perez y J. F. Arroya S. Acevedo. «Determinación Experimental del Coeficiente de Fricción Empleando Sensores Movimiento». En: *Scientia et Technica Año XVI* 16.44 (abr. de 2010), págs. 357 -362.
- [54] E. O. Guerrero Ramírez. «Implementación EN FPGA de un Controlador Robusto de Velocidad del Motor de CD Accionado Mediante Convertidores en Paralelo: con Enfoque al Rechazo Activo de Perturbaciones». Para obtener el

grado de Doctor en Ingeniería Electrónica, Opción Sistemas Inteligentes Aplicados. Huajuapan de León, Oaxaca: Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM), ene. de 2018.

- [55] K. V. Santhosh y P. Mohanty. «Smart Calibration Technique for Auto-ranging of LVDT Using Support Vector Machine». En: *Lecture Notes in Electrical Engineering* (2018), págs. 549 -560.
- [56] G. Schweitzer. «Stabilization of self-excited rotor vibrations by an active damper». En: Lyngby. IUTAM Symp. on Dynamics of Rotors. Springer-Verlag, Berlin: F.I. Niordson, ago. de 1974.
- [57] G. Schweitzer y E. H. Maslen. *Magnetic Bearings: Theory, Design, and Application* to Rotating Machinery. Vol. 1. 1. Springer, 2009.
- [58] H. Silu, C. Hu y H. Lingduo. «Current Loop Analysis of Magnetic Suspension Controller for Magnetic Suspension Bearing». En: *IEEE Information Technology*, *Networking*, *Electronic and Automation Control Conference* (2016), págs. 290 -292.
- [59] R. Sindlinger. «Magnetic bearing momentum wheels with vernier gimballing capability for 3-axis active attitude control and energy storage». En: (mayo de 1976).
- [60] H. Sira-Ramírez y S. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, abr. de 2004.
- [61] J.-J. E. Slotine y W. Li. Applied Non-linear Control. Prentice-Hall, 1991.
- [62] J. A. Guijarro Solórzano y J. T. Vivar Martínez. «Diseño e Implementación de un Levitador Electro-magnético Basado en un Control PID utilizando Lab-View». Tesis para la obtener el título de Ingeniero Electrónico. Guayaquil, Ecuador: Universidad Politécnica Salesiana, mayo de 2015.
- [63] Y. Sun y col. «Adaptive Neural-Fuzzy Robust Position Control Scheme for Maglev Train Systems with Experimental Verification». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* (2019).
- [64] I. Thor y A. Bjarne. «Sliding control of MIMO nonlinear systems». En: *Modeling, Identification and Control* 12.3 (1991), págs. 129 -138.

- [65] C. Wang, S. Zheng y J. Xie. «Decoupling Control for High-Speed Magnetically Suspended Rotor System Using Linear Active Disturbance Rejection Method». En: *Chinese Control Conference* 37 (jul. de 2018), págs. 3885 -3892.
- [66] W. Wei, W. Xue y D. Li. «On Disturbance Rejection in Magnetic Levitation». En: Control Engineering Practice 82 (2019), págs. 24 -35.
- [67] M. Wenk y col. «Practical Investigation of Future Perspectives and Limitations of Maglev Technologies: Result of an International Survey Among Transport Experts and Specialists Maglev». En: *Transportation Systems and Technology* 4.3 (nov. de 2018), págs. 85 -104.
- [68] A. L. Wolek. «Maglev Freight One Possible Path Forward in the U.S.A.» En: *Transportation Systems and Technology* (nov. de 2018), págs. 117 -133.
- [69] L. Xiao. «Research of Maglev Train Suspension Algorithm Based on Active Disturbance Rejection Control». En: *Proceedings of the IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)* (2016), págs. 1296 -1300.
- [70] B. Yi y col. «An Adaptive Observer for Sensorless Control of the Levitated Ball Using Signal Injection». En: 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (dic. de 2018), págs. 6882 -6887.
- [71] J. Yibo y col. «Research on Maglev Train Positioning System Based on Multiinformation Fusion». En: IEEE Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC 2018) 2 (2018), págs. 913 -917.
- [72] D. Yoo, S. S.-T. Yau y Z. Gao. «Optimal Fast Tracking Observer Bandwidth of the Linear Extended State Observer». En: *International Journal of Control* 80.1 (2007), págs. 102 -111.
- [73] J. L. Barahona Ávalos, J. Linares Flores y E. Osvaldo Guerrero. «Control PI Generalizado de un Sistema de Levitación Magnética». En: VI Semana Nacional de Ingeniería Electrónica (oct. de 2010), págs. 8 -17.