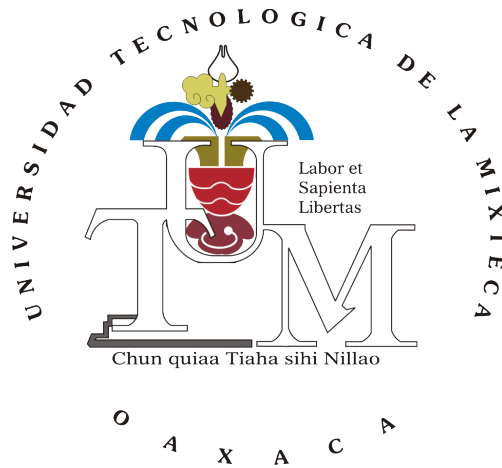


UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA



DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN REHABILITADOR DE TOBILLO”

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN ROBÓTICA

PRESENTA:
ING. ERICK DANIEL FLORES SALAZAR

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. ESTHER LUGO GONZÁLEZ

CO-DIRECTOR DE TESIS:
DR. MANUEL ARIAS MONTIEL

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO, NOVIEMBRE DE 2019

Índice

Índice	v
Índice de Figuras	VIII
Índice de Tablas	IX
1. Introducción	1
1.1. Estado del Arte	2
1.2. Planteamiento del Problema	8
1.3. Justificación	8
1.4. Hipótesis	9
1.5. Objetivos	9
1.5.1. Objetivo General	9
1.5.2. Objetivos Específicos	10
1.6. Estructura de la Tesis	10
2. Marco Teórico	11
2.1. Estructura del Tobillo	11
2.2. Movimientos del Tobillo	12
2.3. Rehabilitación	13
2.4. Robots	15
2.5. Teoría de Tornillos Infinitesimales	17
2.6. Sistemas de Control	21
2.6.1. Método Directo de Lyapunov	21
2.6.2. Integrador Backstepping	23
2.6.3. Observador de Estado Extendido	25
3. Diseño Preliminar	29
3.1. Metodología	29
3.2. Identificación de la Necesidad	31
3.2.1. Concepto del QFD	31
3.2.2. Estructura del QFD	31
3.2.3. Reconocimiento de la Necesidad	31

3.2.4.	Requerimientos del Cliente	32
3.2.5.	Estudio Comparativo del Producto con Algunos Similares de la Competencia	33
3.3.	Diseño Conceptual	34
4.	Análisis Mecánico	39
4.1.	Descripción del Robot Paralelo	39
4.2.	Cinemática Directa	39
4.2.1.	Análisis de Desplazamiento	39
4.2.2.	Análisis de Velocidad	49
4.2.3.	Análisis de Aceleración	52
4.3.	Cinemática Inversa	53
4.3.1.	Análisis Inverso de Desplazamiento	53
4.3.2.	Análisis Inverso de Velocidad	54
4.3.3.	Análisis Inverso de Aceleración	55
4.4.	Transformación de Velocidades y Aceleraciones Angulares	56
4.5.	Análisis de Singularidades	58
4.6.	Análisis de Fuerzas Estáticas	61
4.7.	Análisis de Fuerzas Dinámicas	67
5.	Diseño Estructural y Construcción	75
5.1.	Selección de Materiales	76
5.2.	Análisis de Elemento Finito	76
5.2.1.	Base Móvil	77
5.2.2.	Poste Central	77
5.2.3.	Varillas	79
5.2.4.	Soporte de Unión Universal	80
5.2.5.	Uniones Prismática, Universal y Esférica	80
5.3.	Cálculo de Actuadores	81
5.3.1.	Par de Torsión	82
5.3.2.	Selección de Motor	83
5.4.	Manufactura y Ensamble	85
5.5.	Interfaz de Usuario	93
5.6.	Sistema Electrónico	94
6.	Diseño del Control del Sistema	97
6.1.	Modelado Dinámico	97
6.2.	Control Backstepping	99
6.3.	Observador de Estado Extendido (OEE)	101
6.4.	Trayectorias Deseadas	102
6.5.	Resultados de Co-simulación	103
6.6.	Implementación del Control en el Sistema Físico	107

Conclusiones y Trabajos Futuros	111
Conclusiones	111
Trabajos Futuros	112
A. Dibujos Técnicos	113
B. Código Utilizado	125
B.1. MSC Adams TM	125
B.2. MATLAB/Simulink [®]	125
B.3. LabVIEW TM	125
B.4. Code Composer TM Studio/HALCoGen	125
C. Artículos Publicados	127
Referencias	139

Índice de Figuras

1.1.	Rehabilitadores de tobillo que cumplen con dos movimientos de rehabilitación.	3
1.2.	Rehabilitadores de tobillo que cumplen con cuatro movimientos de rehabilitación.	5
1.3.	Rehabilitadores de tobillo que cumplen con seis movimientos de rehabilitación.	6
2.1.	Elementos que componen la articulación del tobillo [42].	12
2.2.	Movimientos del tobillo [53].	12
2.3.	Tipos de rehabilitación.	15
2.4.	Ejemplos de robots paralelos [60].	16
2.5.	Estado de velocidad de un cuerpo rígido b respecto a un cuerpo rígido o sistema de referencia a	18
2.6.	Uniones principales.	19
3.1.	Metodología de diseño mecatrónico [15].	30
3.2.	Base móvil unida a poste central.	35
3.3.	Posición y orientación de los actuadores.	35
3.4.	Configuración de las cadenas cinemáticas.	36
3.5.	Modos de operación del robot.	37
3.6.	Diseño preliminar del robot paralelo.	38
4.1.	Robot paralelo 2-PUS+RR	40
4.2.	Desplazamiento de \mathbf{B}_i , para modo 1.	45
4.3.	Soluciones obtenidas de análisis directo de desplazamiento para modo 1.	46
4.4.	Soluciones obtenidas de análisis directo de desplazamiento para modo 2.	48
4.5.	Tornillos de las articulaciones.	49
4.6.	Ángulos de rotación sobre sistema de coordenadas global.	54
4.7.	Determinante de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} para modo 1.	60
4.8.	Determinante de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} para modo 2.	60
4.9.	Robot paralelo.	62
4.10.	Diagrama de cuerpo libre.	62
4.11.	Par de torsión necesario para realizar movimiento pasivo de flexión/extensión [3].	64
4.12.	Fuerzas de reacción en los apoyos ${}^0\mathbf{F}^5$, ${}^3\mathbf{F}^5$ y ${}^4\mathbf{F}^5$	67
4.13.	Desplazamiento, velocidad y aceleración de la base móvil.	73
4.14.	Fuerzas de reacción en los apoyos ${}^0\mathbf{F}^5$, ${}^3\mathbf{F}^5$ y ${}^4\mathbf{F}^5$	74

5.1. Robot rehabilitador de tobillo.	75
5.2. Relación de límite elástico, densidad y costo relativo de diferentes materiales [5].	76
5.3. Análisis de elemento finito de base móvil.	78
5.4. Análisis de elemento finito de poste central.	78
5.5. Análisis de elemento finito de varilla.	79
5.6. Análisis de elemento finito de soporte de unión universal.	80
5.7. Mesa lineal cerrada [85].	81
5.8. Uniones JW Winco [48].	81
5.9. Actuador prismático.	82
5.10. Par de torsión requerido para mover la carga de la base móvil.	83
5.11. Motor Pololu 37D 19:1 [70].	84
5.12. Vista explosionada 1.	86
5.13. Vista explosionada 2.	87
5.14. Vista explosionada 3.	88
5.15. Ensamble de base fija.	89
5.16. Ensamble de actuadores.	90
5.17. Ensamble de base móvil.	90
5.18. Prototipo ensamblado.	91
5.19. Prototipo realizando movimientos de rehabilitación, modo 1.	92
5.20. Prototipo realizando movimientos de rehabilitación, modo 2.	92
5.21. Interfaz de usuario.	93
5.22. Diagrama electrónico.	95
5.23. Componentes de Prototipo.	95
6.1. Actuador prismático.	98
6.2. Movimientos del tobillo [53].	103
6.3. Esquema de control.	104
6.4. Prototipo virtual en MSC Adams TM	104
6.5. Perturbación externa ξ_P	105
6.6. Respuesta de seguimiento de posición de los actuadores y la base móvil.	106
6.7. Dinámica del error.	107
6.8. Respuesta de seguimiento de las trayectorias deseadas de los actuadores.	108
6.9. Respuesta de seguimiento de las trayectorias deseadas de la base móvil.	108
6.10. Dinámica del error.	109
6.11. Respuesta de seguimiento de las trayectorias deseadas de la base móvil.	110
6.12. Esquema de control.	110

Índice de Tablas

1.1. Dispositivos de rehabilitación y sus principales características.	7
2.1. Intervalo de movimientos del tobillo [47].	13
2.2. Tratamiento de lesiones más comunes en el tobillo.	14
3.1. Requerimientos del cliente.	32
3.2. Comparativa de la competencia.	33
4.1. Parámetros del robot	44
4.2. Soluciones de análisis de desplazamiento, modo 1.	45
4.3. Soluciones reales de análisis de desplazamiento, modo 1.	45
4.4. Soluciones de análisis de desplazamiento, modo 2.	47
4.5. Soluciones reales de análisis de desplazamiento, modo 2.	47
5.1. Lista de Materiales.	85
6.1. Parámetros del robot y ganancias	105

Capítulo 1

Introducción

Frecuentemente los seres humanos están en riesgo de sufrir incidentes traumáticos tanto en las extremidades superiores como inferiores, lo cual, en algunas ocasiones son la causa de lesiones permanentes, afectando así las actividades cotidianas de las personas, [76]. Puede ocurrir cuando una persona participa en algún deporte o actividad física y también cuando sube o baja un escalón, [75]. El esguince de tobillo es una lesión importante, su frecuencia aproximadamente representa entre un 10% y un 30% de todas las atenciones por lesión deportiva, [107]. De acuerdo con información y datos disponibles de la Secretaria de Trabajo y Previsión Social sobre accidentes y enfermedades de trabajo, anualmente en México se presentan más de 400 mil casos de accidentes laborales, de los cuales poco más del 15% son por accidentes en el pie y tobillo. Además, existen varias enfermedades neuromusculares que requieren de tratamiento inmediato con la intención de evitar daños más severos o permanentes, [16].

Existe una gran variedad de propuestas que tienen el objetivo de resolver el problema de rehabilitar el tobillo. Algunos autores han propuesto dispositivos que cumplen con dos movimientos de rehabilitación, los cuales proponen un mecanismo simple de un grado de libertad para solo cubrir los movimientos de flexión/extensión [40, 68]. En lo que respecta a dispositivos que cumplen con cuatro movimientos de rehabilitación, se han propuesto mecanismos como los presentados en [10, 76], los cuales proponen el uso de dos actuadores y dos grados de libertad para cubrir los movimientos de abducción/aducción y flexión/extensión. También se han realizado dispositivos para rehabilitación de tobillo que cumplen con seis movimientos de rehabilitación [19, 98, 104], los cuales proponen mecanismos con más de tres actuadores y tres grados de libertad para cubrir los seis movimientos de rehabilitación.

Las propuestas de algunos dispositivos que existen actualmente solo pueden realizar cuatro o dos movimientos necesarios para la rehabilitación del tobillo, y los dispositivos que son capaces de realizar los seis movimientos de rehabilitación requieren una mayor cantidad de

actuadores, modelos matemáticos más complejos y sistemas de control más específicos, lo cual aumenta el costo de fabricación y adquisición para los usuarios.

En este trabajo se propone un mecanismo que tiene como objetivo proporcionar los movimientos de flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción necesarios para la rehabilitación de tobillo, y al mismo tiempo solo contar con dos grados de libertad (GDL) y dos actuadores.

1.1. Estado del Arte

Los dispositivos de rehabilitación buscan mejorar la recuperación del paciente después de haber sufrido algún tipo de enfermedad ó lesión en alguna parte de su cuerpo. Estos dispositivos han demostrado ser una herramienta benéfica en la recuperación del movimiento de una extremidad, ya que presentan movimientos cíclicos sin cansancio y reproducen los ejercicios enseñados por el terapeuta [41]. Estos dispositivos se pueden utilizar en las modalidades de recuperación pasiva y activa [54]. La investigación del estado del arte se realiza con base en los movimientos que pueden realizar, como se describe a continuación.

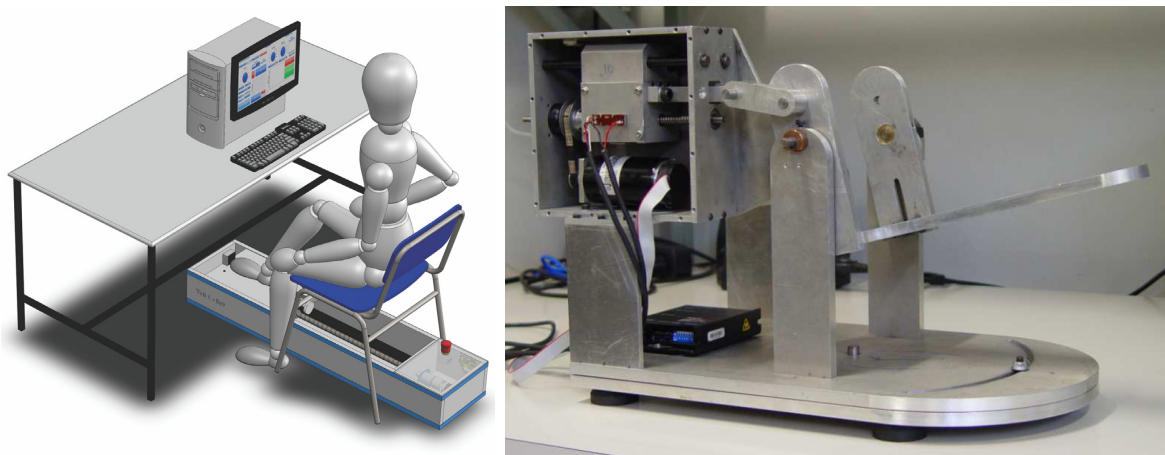
Se han propuesto dispositivos de rehabilitación de tobillo que cumplen con dos movimientos de rehabilitación, como el propuesto por Guzmán Valdivia et al. [40], quienes construyen un sistema mecatrónico de 1 GDL, Figura 1.1(a), el diseño mecánico del rehabilitador está basado en el movimiento de flexión/extensión de tobillo, por su configuración únicamente puede realizar movimientos hacia adelante y hacia atrás cuando se coloca el pie sobre la plataforma y se induce movimiento con la pierna.

Pérez Ibarra et al. [68], desarrollaron una plataforma para la rehabilitación robótica de tobillo, Figura 1.1(b). La plataforma actúa en movimientos de flexión/extensión del tobillo mediante un actuador lineal elástico vinculado a un mecanismo de rotación.

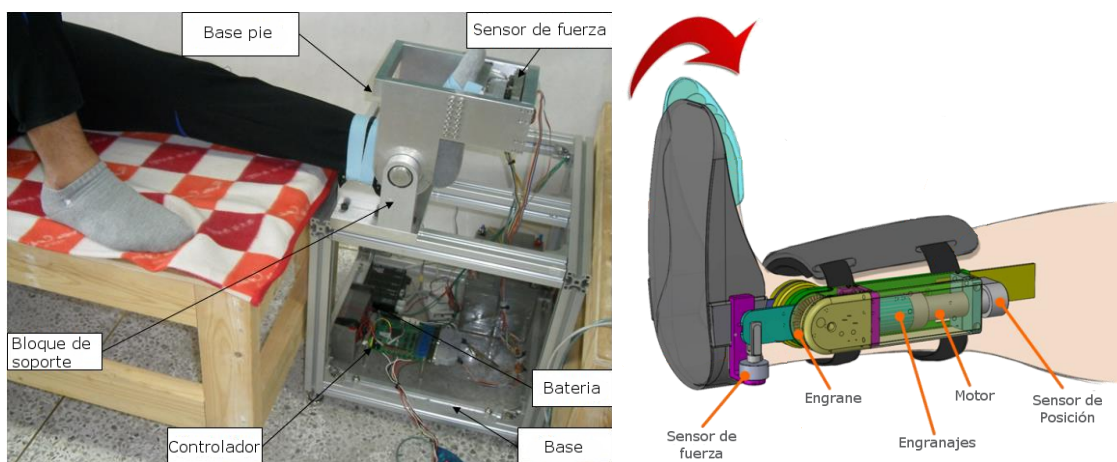
En [50], crean un mecanismo de rehabilitación para realizar el ejercicio de flexión/extensión de tobillo, Figura 1.1(c). El mecanismo desarrollado está compuesto por un cuerpo, un bloque de soporte, un sensor de fuerza/par de tres ejes, un motor eléctrico, un controlador de alta velocidad y una batería. El cuerpo soporta todas las partes del robot y el pie de personas con accidente cerebrovascular grave.

Así mismo, en [73], proponen un rehabilitador de tobillo robótico, Figura 1.1(d), que consiste en un conjunto de actuadores giratorios, un sensor de fuerza y un soporte de pie. Las correas se pueden ajustar al tamaño de pie de cada persona. Es utilizado por un paciente en el tobillo para el estiramiento pasivo controlado y activo. Utiliza un sensor de fuerza para detectar el par de torsión del tobillo durante el entrenamiento. El mecanismo puede generar

los movimientos flexión/extensión y esta diseñado para una rehabilitación temprana en cama.



(a) Sistema de rehabilitación para tobillo (b) Plataforma basada en un actuador lineal elástico para la rehabilitación de tobillo [68].



(c) Robot rehabilitador de tobillo con sensor de fuerza [50]. (d) Dispositivo robótico de rehabilitación de tobillo [73].

Figura 1.1: Rehabilitadores de tobillo que cumplen con dos movimientos de rehabilitación.

En lo que respecta a los dispositivos de rehabilitación de tobillo que cumplen con cuatro movimientos de rehabilitación, se encuentran los siguientes:

Blanco Ortega et al. [10], proponen un mecanismo para rehabilitación de tobillo, Figura 1.2(a), el cual, se basa en una mesa X-Y de 2 GDL, y consiste en: dos actuadores para los movimientos horizontal y vertical de la mesa X-Y, de una plataforma fija y otra móvil donde se apoya el pie del tobillo a rehabilitar. Utilizan uniones esféricas para unir la base móvil con la base fija y la mesa X-Y, la mesa X-Y consiste en dos guías lineales, las cuales proporcionan los movimientos en las direcciones de los ejes X (horizontal) y Y (vertical) generando dos movimientos: abducción/aducción y flexión/extensión con respecto a los ejes

X y Y, respectivamente.

En el mismo sentido, en [65], construyen un prototipo, Figura 1.2(b), basado en una estructura de robot paralelo de manera que proporcione los movimientos de flexión/extensión e inversión/eversión. El robot de tres GDL consiste de tres actuadores lineales, de una plataforma fija y otra móvil donde se apoyará el pie del tobillo a rehabilitar. Se utilizan uniones de revoluta entre la base fija y los actuadores. Para unir los actuadores con la base móvil se utilizan uniones esféricas.

En [54], desarrollan un robot paralelo que es impulsado por tres motores eléctricos, Figura 1.2(c), utiliza un sensor de 6 grados de libertad que se coloca directamente entre el arnés del zapato y la parte superior de la plataforma y está conectado eléctricamente al controlador. El sensor es usado para detectar la fuerza de interacción entre el pie del paciente y el robot. El mecanismo puede lograr cuatro tipos de movimientos: flexión/extensión y abducción/aducción.

También se han realizado dispositivos para rehabilitación de tobillo que cumplen con seis movimientos de rehabilitación:

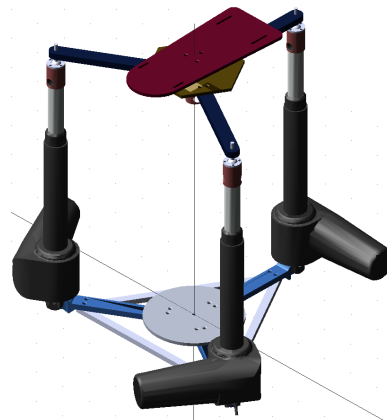
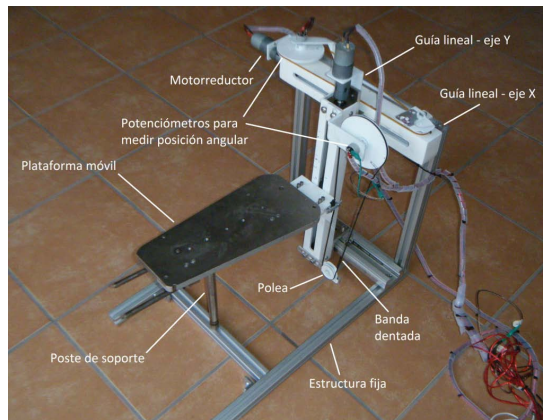
Mingming Zhang et al. [103] presentan un robot como un mecanismo paralelo, Figura 1.3(a), que consiste en una plataforma fija y una móvil, de las cuales la móvil es en realidad un manipulador en serie de 3 eslabones con 3 GDL. Por lo tanto, este robot se acciona utilizando cuatro actuadores neumáticos en paralelo.

Así mismo, Chunbao Wang et al. [19] desarrollan un mecanismo serie para simplificar el diseño y realizar entrenamiento activo y pasivo, Figura 1.3(b). Donde el motor III hace que el pedal gire por medio de un engranaje para realizar inversión/inversión; el motor II acciona la plataforma II a través del engranaje de media espiral para realizar flexión/extensión; el motor I acciona la plataforma I a través del engranaje para realizar abducción/aducción.

En [20], adaptan un robot paralelo que era utilizado para automatizar la exploración por ultrasonido del abdomen, y lo utilizan para ejercitar el tobillo de pacientes con parálisis cerebral. El dispositivo es una plataforma de seis GDL que es impulsada por motores eléctricos, la cual puede realizar seis movimientos de rehabilitación, Figura 1.3(d).

Debido al reciente interés para desarrollar sistemas de rehabilitación, algunos rehabilitadores para tobillo se encuentran en su etapa de desarrollo. Jiajun Wei et al. [98], solo presentan el diseño en CAD, el cual lo dividen en plataformas, tres eslabones y base. Cada eslabón funciona con dos motores, uno para el mecanismo de transmisión central y otro para el mecanismo de transmisión de la base. Las configuraciones básicas de los tres eslabones son las mismas, pero el tamaño es diferente entre el eslabón-2, 3 y el eslabón-1, Figura 1.3(c).

En la Tabla 1.1 se muestra una recopilación de diferentes dispositivos rehabilitadores de tobillo y sus principales características, obtenidos de [2] y otros autores como se indica.

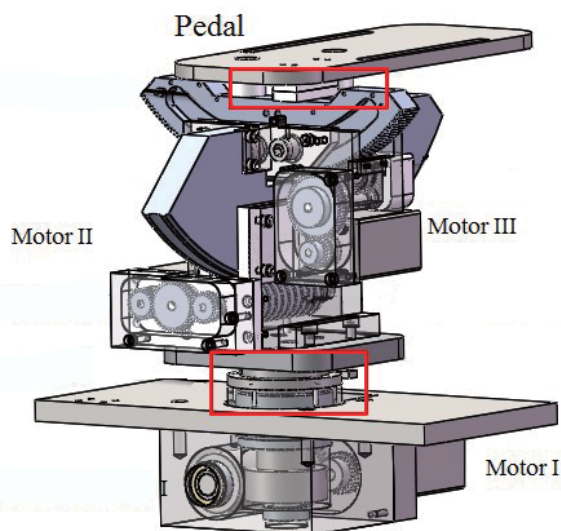
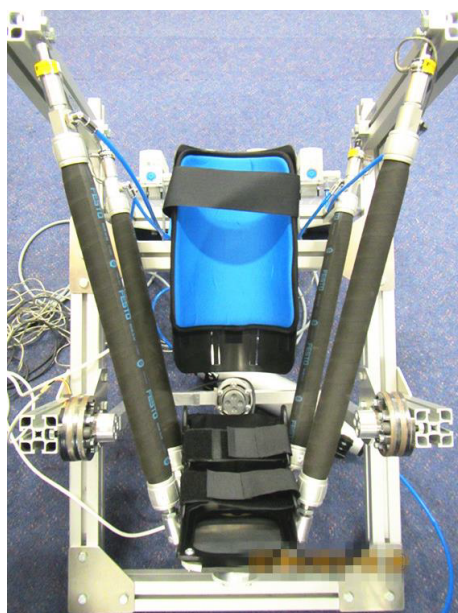


(a) Prototipo físico del mecanismo de rehabilitación de tobillo basado en una mesa XY [10]. (b) Prototipo virtual del rehabilitador de tobillo [65].

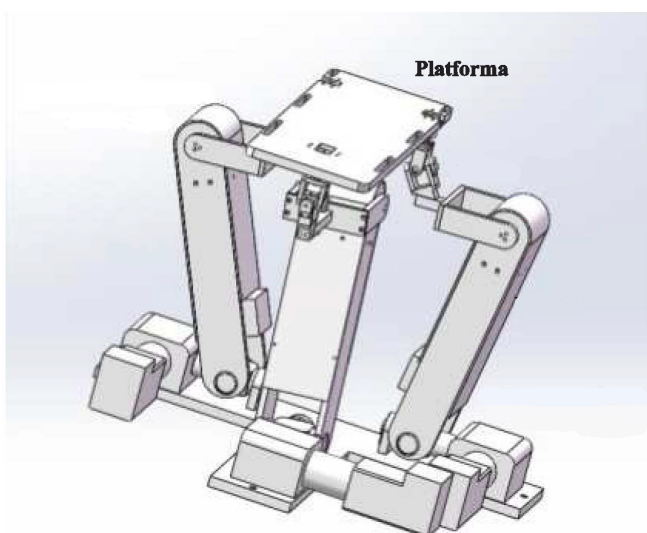


(c) Robot paralelo de rehabilitación [54].

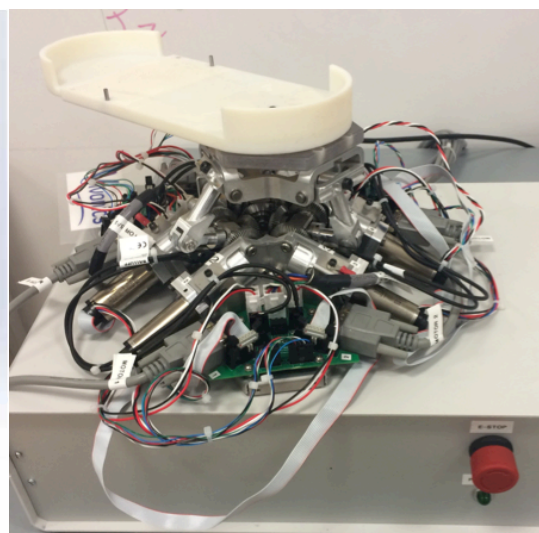
Figura 1.2: Rehabilitadores de tobillo que cumplen con cuatro movimientos de rehabilitación.



(a) Robot de rehabilitación de tobillo (b) Modelo 3D de robot rehabilitador de tobillo [19]. con 3 GDL [103].



(c) Modelo 3D del mecanismo [98].



(d) Robot de rehabilitación de tobillo con 6 GDL [20].

Figura 1.3: Rehabilitadores de tobillo que cumplen con seis movimientos de rehabilitación.

Tabla 1.1: Dispositivos de rehabilitación y sus principales características.

Autor	Movimientos	GDL	Etapa	No. actuadores	Actuación
Cordo [21]	flexión/extensión	1	Prototipo	1	Neumática
Bucca [13]	flexión/extensión	1	Prototipo	1	Eléctrica
Lin [52]	flexión/extensión	1	Prototipo	1	Eléctrica
Homma [43]	flexión/extensión	1	Prototipo	1	Eléctrica
Selles [80]	flexión/extensión	1	Prototipo	1	Eléctrica
OrthoPro [66]	flexión/extensión	2	Comercial	2	Eléctrica
Kinetec [51]	flexión/extensión	2	Comercial	2	Eléctrica
Fisitek [18]	flexión/extensión	2	Comercial	2	Eléctrica
Biodex [9]	flexión/extensión	1	Comercial	1	Eléctrica
JACE [89]	flexión/extensión	1	Comercial	1	Eléctrica
Zhou [106]	flexión/extensión	9	Prototipo	9	Eléctrica
Wu [100]	flexión/extensión	1	Prototipo	1	Eléctrica
Saglia [77]	flex/ext, inv/eve	2	Prototipo	3	Eléctrica
Sung [87]	flex/ext, inv/eve	2	Prototipo	2	Eléctrica
Satici [79]	flex/ext, inv/eve	2	Propuesta	3	Eléctrica
Yoon [101]	flex/ext, inv/eve	4	Prototipo	4	Neumática
Valles [94]	flex/ext, inv/eve	3	Prototipo	3	Eléctrica
Dai [22]	flex/ext, inv/eve	3-4	Propuesta	3-4	-
Alcocer [76]	flex/ext, inv/eve	2	Prototipo	2	Eléctrica
Ding [24]	flex/ext, inv/eve	2	Prototipo	2	Eléctrica
Wang [96]	flex/ext, inv/eve, abd/adu	3	Propuesta	4	Eléctrica
Malosio [57]	flex/ext, inv/eve, abd/adu	3	Prototipo	3	Eléctrica
Jamwal [46]	flex/ext, inv/eve, abd/adu	3	Prototipo	4	Neumática
Tsoi [91]	flex/ext, inv/eve, abd/adu	3	Propuesta	4	Eléctrica
Syrseoudis [88]	flex/ext, inv/eve, abd/adu	3	Propuesta	3	Eléctrica
Girone [37]	flex/ext, inv/eve, abd/adu	6	Prototipo	6	Neumática
Rakhodaei [72]	flex/ext, inv/eve, abd/adu	9	Propuesta	9	-

1.2. Planteamiento del Problema

Como resultado de la revisión del estado del arte, se puede concluir que existe una gran variedad de propuestas que tienen el objetivo de resolver el problema de rehabilitar el tobillo, sin embargo, presentan algunas desventajas, tales como:

- ✓ Algunos dispositivos no cubren el intervalo máximo permisible de la articulación del tobillo. Cubrir esta necesidad es obligatorio, ya que durante el proceso de rehabilitación es necesario movilizar en toda la amplitud que permita esta articulación hasta recuperar la movilidad completa sin limitaciones [67].
- ✓ Algunos otros dispositivos no fueron diseñados para cubrir la totalidad de los movimientos de la articulación del tobillo, con el fin de reducir la complejidad del diseño o el costo de producción. Diseñar un dispositivo con esta característica es indispensable, ya que, al realizar actividades tan simples como la marcha en superficies tanto regulares como irregulares, se utilizan la totalidad de dichos movimientos [14].
- ✓ Por otro lado, se presentan dispositivos que pueden realizar la totalidad de dichos movimientos, pero lo hacen considerando un número mayor de grados de libertad en el dispositivo de los que tiene la articulación del tobillo. Estos dispositivos presentan desventajas debido a que su diseño mecánico y su implementación muchas veces son percibidos como innecesarios, además, un mayor número grados de libertad requiere de un mayor número de actuadores, esto se traduce en un elevado coste de diseño y de producción [58].
- ✓ Así mismo, se encuentran dispositivos que pueden realizar la totalidad de los movimientos del tobillo, pero lo hacen considerando un número mayor de actuadores que los grados de libertad del dispositivo, esto tiene algunas ventajas, ya que es un medio eficaz para la eliminación de singularidades de un manipulador paralelo, mejorando así su rigidez, pero también presenta algunas desventajas, debido a que su diseño mecánico es más complejo y presenta dificultades para obtener su dinámica y controlar el dispositivo [17].

1.3. Justificación

Es necesario realizar ejercicios de rehabilitación de tobillo tras haber sufrido esguinces, fracturas o cualquier condición que implique la inmovilización prolongada del tobillo. El objetivo de la rehabilitación de tobillo es disminuir la inflamación, recuperar la movilidad completa y fortalecer la musculatura del tobillo y para esto se pueden considerar dos etapas de recuperación dependiendo del nivel de actividad del paciente: pasiva y activa [92]. La pasiva

comprende el conjunto de técnicas que aplica el terapeuta sobre las estructuras afectadas, sin que el paciente realice ningún movimiento voluntario de la zona que hay que tratar. Cuando el paciente realiza movimiento de forma voluntaria y se moviliza el segmento afectado, se le llama recuperación activa.

En la rehabilitación pasiva del tobillo, los terapeutas necesitan tratar al paciente uno a uno. El efecto del entrenamiento depende en gran medida de la competencia del terapeuta. Y el proceso de rehabilitación es un período largo y repetitivo, lo que causa una pesada carga tanto para los pacientes como para los terapeutas [99].

Con base en esta problemática y en los requerimientos de rehabilitación, además de la información recopilada en el estado del arte, es necesario tener un dispositivo que cumpla con todos los movimientos y las necesidades de fuerza aplicada para tener una rehabilitación óptima. Para esto, se han desarrollado numerosos dispositivos que se encuentran actualmente en el mercado o en fase de investigación, pero algunos no se diseñaron para generar la totalidad de los movimientos del tobillo o tienen un diseño complicado y algunos son de difícil adquisición, lo que motiva a diseñar un mecanismo que utilice una mínima cantidad de actuadores sin ganar GDL y cumpliendo los movimientos de flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción en todo su intervalo, que sea de fabricación nacional y sea de fácil acceso para los usuarios que lo requieran, además de tener un mantenimiento sencillo. Este prototipo se desarrollará con el objetivo de apoyar al terapeuta en la rehabilitación pasiva de los pacientes.

1.4. Hipótesis

Es posible diseñar y construir un mecanismo que pueda realizar los movimientos de flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción en todo su intervalo, utilizando sólo dos actuadores y sensores, para representar sencillez en su diseño y por lo tanto en su proceso de fabricación.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Diseñar y construir un prototipo rehabilitador de tobillo, que proporcione los movimientos de flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción en todo el intervalo máximo permisible de cada movimiento.

1.5.2. Objetivos Específicos

- ✓ Proponer una arquitectura para el rehabilitador de tobillo que proporcione los movimientos básicos del tobillo.
- ✓ Simular el prototipo virtual en el software MSC Adams para comprobar el correcto funcionamiento de la arquitectura.
- ✓ Construir un prototipo físico para realizar pruebas que cubran las necesidades del usuario.
- ✓ Realizar la instrumentación e implementación de un control básico para validar los movimientos del rehabilitador.

1.6. Estructura de la Tesis

La tesis se ha organizado en una serie de Capítulos como se menciona a continuación:

En el primer Capítulo se presentan la introducción y los antecedentes del trabajo, se establece el planteamiento y la justificación del problema y por último se especifican los objetivos a cumplir con la finalidad de resolver la hipótesis planteada. En el segundo Capítulo se presentan algunos conceptos básicos sobre el tobillo y su rehabilitación, así como algunos conceptos de ingeniería necesarios para el desarrollo de esta tesis. En el tercer Capítulo se obtienen los requerimientos del cliente y se propone un diseño conceptual del rehabilitador de tobillo basado en un robot paralelo. En el cuarto Capítulo se realizan los análisis cinemático, de fuerzas estáticas y dinámicas del robot propuesto en el tercer Capítulo. En el quinto Capítulo se obtienen los materiales y las dimensiones de los elementos que conforman el robot, se define la potencia requerida de los actuadores y por último se muestran los materiales necesarios para la manufactura y ensamble del robot. En el sexto Capítulo se propone un esquema de control y se presentan la validación de la cinemática y los resultados experimentales de dicho esquema. Por último, se exponen las conclusiones y trabajos futuros.

Se incluyen al final de la tesis tres Anexos: el Anexo A incluye los dibujos técnicos de los elementos personalizados del robot de rehabilitación de tobillo, en el Anexo B se encuentran los enlaces del código utilizado para las simulaciones y pruebas del prototipo, y en el Anexo C se incluyen los artículos derivados de la tesis.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo, se presentan algunos conceptos básicos sobre el tobillo y su rehabilitación, así como los fundamentos empleados para el diseño y el análisis de un rehabilitador de tobillo.

2.1. Estructura del Tobillo

El tobillo es una estructura formada por múltiples articulaciones, Figura 2.1, es la clave de la marcha del cuerpo humano y la micro-regulación del equilibrio, por otro lado también tiene que aportar movilidad para adaptarse a las irregularidades del terreno, además de ser una de las partes más complejas del sistema esquelético. Por estas razones, es una estructura que cuenta con muchos ligamentos que son susceptibles de dañarse y de sufrir patologías [29].

Los problemas más comunes del tobillo son los esguinces y las fracturas. Un esguince es una lesión en los ligamentos, implica un desgarro o ruptura, de mayor o menor grado, de uno o varios ligamentos del tobillo. Se pueden romper los ligamentos tanto de la parte externa como de la parte interna, pero el más frecuente y el que ocurre en casi todos los casos es concretamente en los ligamentos laterales externos. Los esguinces pueden tardar algunas semanas o hasta varios meses en sanar completamente. También pueden ocurrir lesiones en otras partes del tobillo como los tendones, que unen los músculos al hueso, y los cartílagos, que amortiguan los roces e impactos de las articulaciones [59].

La actividad física, como rehabilitación, ha demostrado acelerar el proceso de curación, se ha observado que la inmovilización de las articulaciones que han sido sometidas a cirugía era dañina; al mismo tiempo se supuso que si el movimiento intermitente era benéfico tanto para las articulaciones dañadas como para las saludables, entonces el movimiento continuo sería mucho más efectivo para usarse como rehabilitación [78].

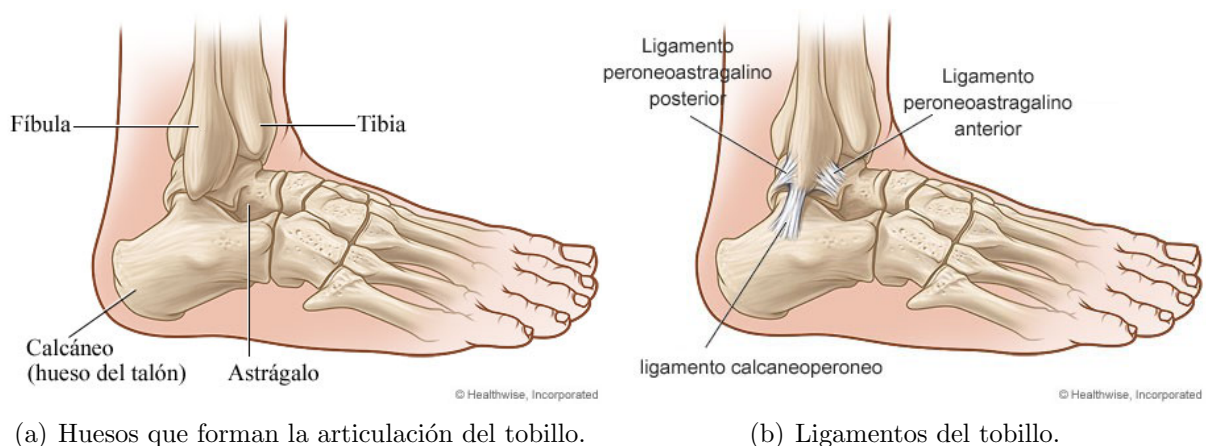


Figura 2.1: Elementos que componen la articulación del tobillo [42].

2.2. Movimientos del Tobillo

Los movimientos que la articulación del tobillo realiza para cumplir con sus funciones se pueden apreciar en la Figura 2.2.

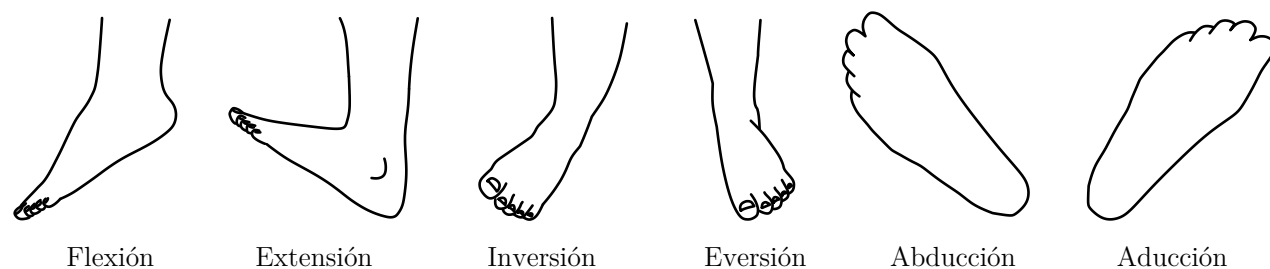


Figura 2.2: Movimientos del tobillo [53].

En posición de pie normal, el pie adopta un ángulo recto con la pierna: la posición neutra de la articulación. Durante la extensión, el pie es atraído hacia arriba en dirección a la pierna; la flexión es un movimiento en dirección opuesta respecto a la posición neutra. La eversión es el giro alrededor del eje del pie, de tal manera que la planta se orienta hacia fuera. La inversión, es el movimiento contrario, en el que la planta se orienta hacia dentro. Abducción es el giro del pie sobre el eje longitudinal de la pierna hacia afuera y aducción es el movimiento contrario, en donde el pie se orienta hacia adentro.

En la tabla 2.1 se muestran los intervalos máximos para cada movimiento [47].

Tabla 2.1: Intervalo de movimientos del tobillo [47].

Tipo de movimiento	Movimiento máximo permisible
Flexión	37.6° a 45.8°
Extensión	20.3° a 29.8°
Inversión	14.5° a 22.0°
Eversión	10.0° a 17.0°
Abducción	15.4° a 25.9°
Aducción	22.0° a 36.0°

2.3. Rehabilitación

La rehabilitación es el proceso que permite recuperar la funcionalidad de alguna parte del cuerpo después de que haya sufrido algún accidente o una enfermedad. Es posible que después de un incidente traumático se necesite recuperar nuevamente las habilidades físicas perdidas. El objetivo de la rehabilitación de tobillo es disminuir la inflamación, recuperar la movilidad completa sin limitaciones, fortalecer la musculatura del tobillo y recuperar nuevamente las habilidades físicas perdidas. La actividad física, como rehabilitación, ha demostrado acelerar el proceso de recuperación [71].

En la Tabla 2.2, se muestran las lesiones más comunes en el tobillo, así como su clasificación, sus fases de recuperación y las fases de rehabilitación.

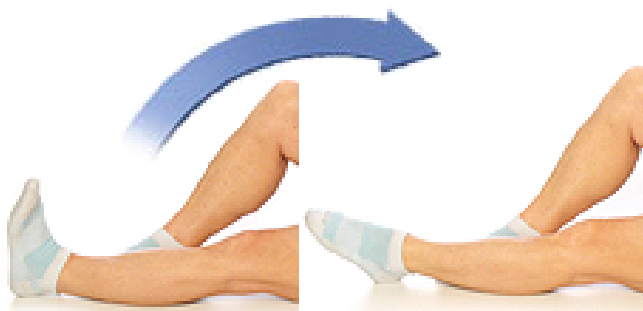
Se pueden considerar cuatro etapas de recuperación dependiendo del nivel de actividad del paciente: activa, pasiva, resistiva y asistida [11, 86]. La recuperación pasiva comprende el conjunto de técnicas que aplica el terapeuta sobre las estructuras afectadas, Figura 2.3(a), sin que el paciente realice ningún movimiento voluntario de la zona que hay que tratar. Cuando el paciente realiza movimiento de forma voluntaria y entra en juego la movilización del segmento afectado, se le llama recuperación activa, Figura 2.3(b). En la resistiva se utilizan sistemas mecánicos donde se presenta una fuerza opuesta al movimiento del paciente, que puede incrementarse gradualmente para mejorar la resistencia muscular, Figura 2.3(c). La recuperación asistida es una mezcla de las dos anteriores, la cual combina el esfuerzo del paciente y del terapeuta o algún dispositivo como son los rehabilitadores robóticos, Figura 2.3(d).

Tabla 2.2: Tratamiento de lesiones más comunes en el tobillo.

Tratamiento de:		
Lesiones	Fracturas	Esguinces
Clasificación	<p>Tipo A: Rotura por debajo de la sindesmosis, existe estabilidad en la horquilla, el tratamiento con escayola suele ser suficiente.</p> <p>Tipo B: La rotura es en la sindesmosis, ya no está garantizada la estabilidad, en la mayoría de los casos se suele efectuar tratamiento quirúrgico.</p> <p>Tipo C: Rotura por encima de la sindesmosis, en la mayoría de los casos se requiere tratamiento quirúrgico [28].</p>	<p>Grado I : Se trata de un estiramiento de los ligamentos del tobillo.</p> <p>Grado II: Existe una rotura parcial de los ligamentos del tobillo.</p> <p>Grado III: Rotura total de los ligamentos del tobillo. Se requiere tratamiento quirúrgico a personas que no han mejorado inicialmente tras el tratamiento conservador [8].</p>
Recuperación		
Fase 1	Se aplica una bota de yeso durante seis u ocho semanas con el pie a 90° [28]	Durante la primera semana, después del esguince, consiste en el control de la inflamación y limitación del dolor. La utilización del frío, los emplastos de arcilla roja y vinagre y la toma de árnica ayudan a controlar la inflamación [30].
Fase 2	Se retira el yeso y si tras un estudio radiológico la reducción ha tenido el resultado esperado se podrá comenzar la rehabilitación [28].	Pasado una semana con el tobillo vendado desde el primer día y con el conveniente reposo, se puede empezar a realizar sesiones de rehabilitación [25].
Rehabilitación		
Fase 1 (Rehabilitación Pasiva)	Para mejorar el tiempo de recuperación de una fractura de tobillo, se recomienda empezar a realizar ejercicios para movilización durante dos o tres semanas. Ejercicios de flexión/extensión del tobillo [8], ejercicios circulares, procurando llevar el pie a todas las posiciones extremas [90].	A partir de cuatro a siete días según grado el esguince, una vez se ha conseguido bajar la inflamación producida por la lesión de los ligamentos se iniciará la fase de recuperación de la movilidad y la propiocepción. En esta fase se recomienda inicialmente realizar ejercicios para facilitar la movilidad en flexión/extensión, las rotaciones y eversion/inversión del tobillo [7, 26].
Fase 2 (Rehabilitación Activa)	Después de cuatro o seis semanas, según el tipo de fractura y la estabilidad ósea conseguida, se permite el inicio de carga de forma parcial con muletas y progresivamente se va incrementando el peso [8].	La siguiente fase tiene como objetivo recuperar la fuerza muscular que se ha perdido durante este tiempo. Se recomiendan actividades deportivas sin impacto ni rotaciones, como la bicicleta estática y la elíptica, que mejoraran la musculatura de la pierna [7].
Fase 3 (Rehabilitación Resistiva)	Después de seis a diez semanas los pacientes deberían estar caminando sin nada de forma parcial. Se recomienda realizar los ejercicios de movilidad, resistencia, bicicleta estática, andar, subir y bajar escaleras [7].	Una vez realizado las anteriores fases de recuperación del esguince de tobillo sin dolor, se puede valorar el retorno al deporte o actividades normales. Se seguirán realizando las fases 1 y 2 para seguir potenciando la propiocepción y la potencia muscular [8].



(a) Rehabilitación Pasiva [27].



(b) Rehabilitación Activa [42].



(c) Rehabilitación Resistiva [42].



(d) Rehabilitación Asistida [18].

Figura 2.3: Tipos de rehabilitación.

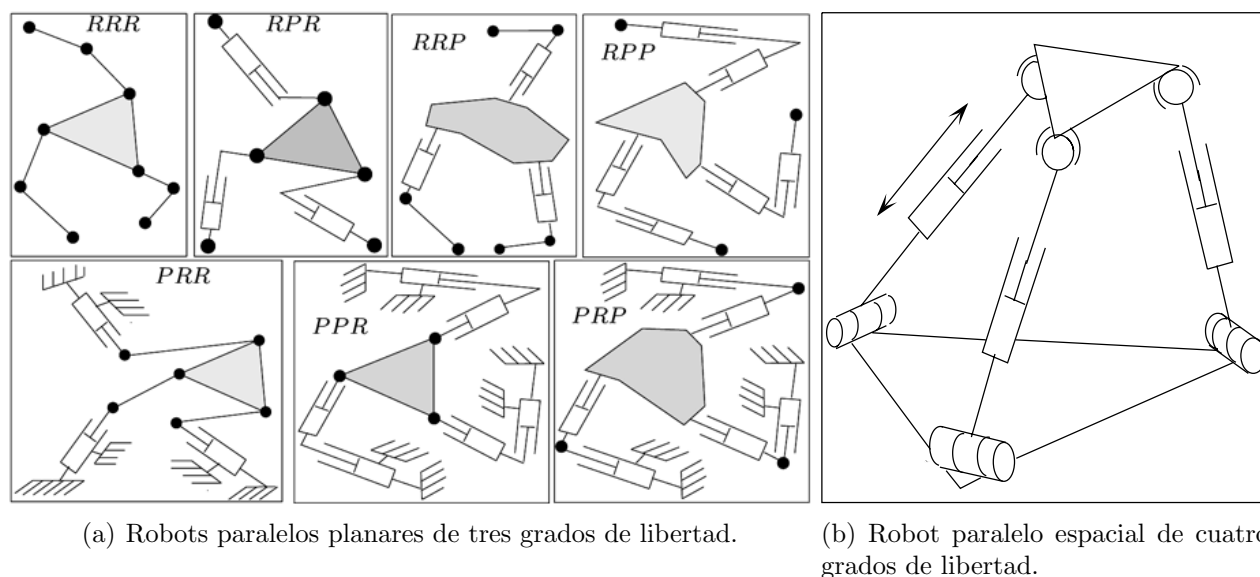
Los robots rehabilitadores han demostrado ser una herramienta benéfica en la recuperación del movimiento de una extremidad, ya que presentan movimientos cíclicos sin cansancio y reproducen los ejercicios enseñados por el terapeuta [41].

2.4. Robots

Los robots pueden ser clasificados acorde a varios criterios, tales como sus grados de libertad, estructura de su cinemática, manejo de tecnología, geometría de su espacio de trabajo, configuración de su estructura y/o características de su movimiento [44].

Teniendo en cuenta su estructura, los robots se pueden clasificar en: robots tipo serie y robots paralelos. Los robots tipo serie están formados por una cadena cinemática abierta, con una estructura similar al brazo humano (antropomórficos). En cambio, los robots paralelos están formados por dos bases, una fija y otra móvil, unidas por varias cadenas cinemáticas en paralelo y por ello, formando cadenas cinemáticas cerradas.

Los robots tipo paralelo, según los movimientos que puede realizar se pueden clasificar en dos grupos: robots planares y espaciales [60]. En los primeros, el movimiento se reduce a un plano de dos dimensiones, pudiendo tener dos o tres grados de libertad, correspondientes a un movimiento de traslación en el plano y a uno de rotación sobre un eje perpendicular a él. En el segundo caso el movimiento se realiza en un espacio tridimensional, pudiendo tener hasta seis grados de libertad correspondientes a tres traslaciones y tres rotaciones [95]. En la Figura 2.4 se muestran ejemplos de robots paralelos planares y espaciales.



(a) Robots paralelos planares de tres grados de libertad.

(b) Robot paralelo espacial de cuatro grados de libertad.

Figura 2.4: Ejemplos de robots paralelos [60].

Algunas aplicaciones de este tipo de robot son: orientación de antenas, telescopios y paneles solares, aislamiento y producción de vibraciones, en cirugía para posicionamiento de microscopios e incluso de pacientes, simuladores de vuelo para aviones y helicópteros así como simuladores de conducción de vehículos, carretillas elevadoras, etc. En la industria para ensamblaje de componentes, para posicionamiento de piezas y utillajes y como máquina herramienta para precisiones medias, del orden de 0.05 milímetros [102].

Este tipo de mecanismos, a diferencia de los robots tipo serie, poseen diversas ventajas, tales como alcanzar velocidades y aceleraciones mucho más grandes, manejan cargas superiores, poseen alta rigidez dado que el peso es repartido entre las diferentes cadenas cinemáticas, y con ellos se logra una mayor precisión [95].

Sin embargo, también presentan características que pueden considerarse como desventajas. En la construcción de los modelos cinemáticos de robots paralelos no existe, como ocurre en los robots serie, una metodología como la de Denavit-Hartenberg que permite la obtención del modelo cinemático directo de una manera sistemática e independiente de su configuración

física [4]. En los robots paralelos ocurre lo contrario, el modelo cinemático inverso es fácilmente planteado por consideraciones geométricas, mientras que la obtención del directo es más complejo y en numerosos casos no tiene una solución analítica única. Puesto que en general se compone de varias cadenas cinemáticas cerradas y el tratamiento e inclusión de pares cinemáticos pasivos es inevitable. Por tal motivo, se utiliza la teoría de tornillos infinitesimales a fin de lograr con éxito el análisis cinemático de estos sistemas [36].

2.5. Teoría de Tornillos Infinitesimales

La teoría de tornillos infinitesimales, con más de un siglo de antigüedad, ha permitido simplificar considerablemente la cinemática de los robots paralelos en sus diversos tópicos como el análisis cinemático y dinámico, así como la síntesis tanto de tipo como de forma de los mecanismos [36]. También ha permitido el análisis de orden superior como son el de aceleración, pulso e hiperpulso de cadenas seriales y cadenas cerradas [31].

A continuación se presentan algunos fundamentos teóricos necesarios para abordar los análisis desarrollados en este trabajo. La información que se presenta está basada en el libro *Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory* [32].

Un tornillo infinitesimal, $\$$, representado mediante coordenadas de Plücker, es un vector $\$ \in \mathbb{R}^6$ que está compuesto por una parte primaria $\mathbf{P}(\$) = \hat{\mathbf{s}}$, y una parte dual $\mathbf{D}(\$) = \mathbf{s}_O$, dado por

$$\$ = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \mathbf{s}_O \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde $\hat{\mathbf{s}}$ es un vector unitario a lo largo del eje instantáneo del tornillo, mientras que \mathbf{s}_O es el momento producido por el vector $\hat{\mathbf{s}}$ de acuerdo a un vector $\mathbf{r}_{O/P}$, el cual inicia en un punto P del eje instantáneo de tornillo y termina en el punto de referencia O . El par momento se determina como

$$\mathbf{s}_O = h\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{r}_{O/P} \quad (2.2)$$

donde h es el paso del tornillo.

El estado de velocidad de un cuerpo rígido, respecto a un sistema de referencia, conduce a la determinación de la velocidad de cualquier punto fijo a este. Un estado de velocidad de un cuerpo rígido b respecto a un cuerpo o sistema de referencia a (Figura 2.5) se representa formalmente como

$${}^a\mathbf{V}_O^b = \begin{bmatrix} {}^a\boldsymbol{\omega}^b \\ {}^a\mathbf{v}_O^b \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde ${}^a\boldsymbol{\omega}^b \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular del cuerpo rígido b , como se observa desde el cuerpo rígido a . Por otro lado, ${}^a\boldsymbol{v}_O^b \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad de un punto arbitrario O , fijo al cuerpo rígido b como se observa desde el cuerpo rígido a .

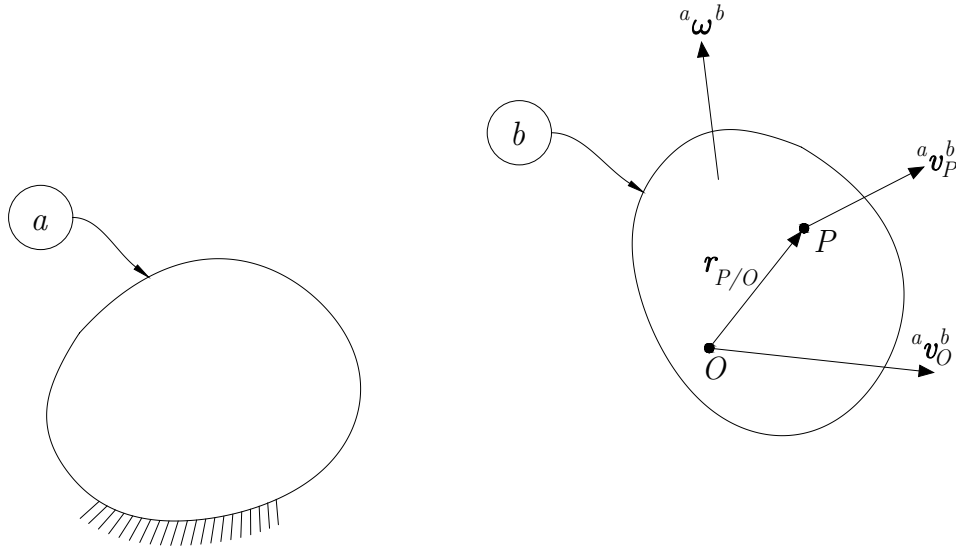


Figura 2.5: Estado de velocidad de un cuerpo rígido b respecto a un cuerpo rígido o sistema de referencia a .

Este estado de velocidad puede expresarse como un tornillo infinitesimal asociado al movimiento como

$${}^a\mathbf{V}_O^b = {}_a\omega_b {}^a\mathcal{S}^b \quad (2.4)$$

donde ${}_a\omega_b$ representa la magnitud de velocidad de un cuerpo b con respecto a un cuerpo de referencia a .

Por otro lado, el estado de aceleración reducida también puede expresarse como un tornillo infinitesimal asociado al movimiento como

$${}^a\mathbf{A}_O^b = {}_a\alpha_b {}^a\mathcal{S}^b \quad (2.5)$$

donde ${}_a\alpha_b = {}_a\dot{\omega}_b$ representa la magnitud de aceleración de un cuerpo b con respecto a un cuerpo de referencia a .

Para el análisis de velocidad y de orden superior de cadenas cinemáticas que se conforman de una secuencia de eslabones conectados entre sí mediante uniones que permiten el movimiento relativo de cada dos eslabones consecutivos, donde la mayoría de estas uniones de orden superior pueden modelarse como un conjunto de uniones principales (unión prismática

y revoluta, Figura 2.6). Una unión revoluta puede modelarse como un tornillo como

$${}^a\mathcal{S}^b = \begin{bmatrix} {}^a\hat{\mathcal{S}}^b \\ {}^a\hat{\mathcal{S}}^b \times \mathbf{r}_{O/P} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

mientras que una unión prismática puede modelarse como

$${}^a\mathcal{S}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^a\hat{\mathcal{S}}^b \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde ${}^a\hat{\mathcal{S}}^b$ es un vector unitario a lo largo de la dirección de la velocidad angular ${}^a\boldsymbol{\omega}^b$.

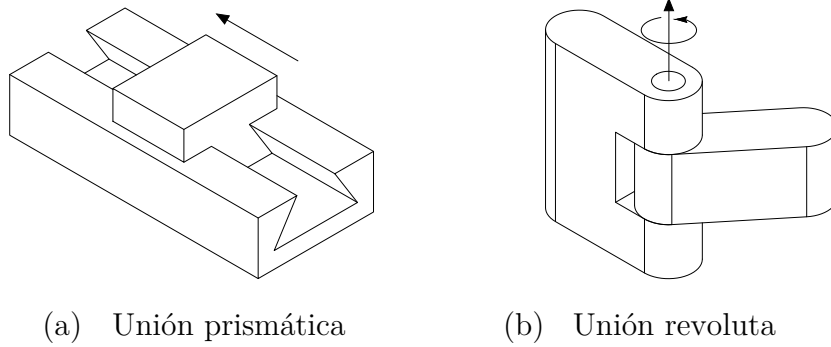


Figura 2.6: Uniones principales.

Para el caso de robots paralelos, el estado de velocidad de la plataforma móvil puede representarse a través de cada una de su i -ésima cadena cinemática y n -ésima unión como

$$\mathbf{V}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_O \end{bmatrix} = {}_0\omega_1^i \mathcal{S}_i^1 + {}_1\omega_2^i \mathcal{S}_i^2 + \dots + {}_{n-1}\omega_n^i \mathcal{S}_i^{n-1} \mathcal{S}_i^n \quad (2.8)$$

Así mismo, el estado de aceleración reducida de la plataforma móvil puede representarse a través de cada una de su i -ésima cadena cinemática y n -ésima unión como

$$\mathbf{A}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{a}_O - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O \end{bmatrix} = {}_0\alpha_1^i \mathcal{S}_i^1 + {}_1\alpha_2^i \mathcal{S}_i^2 + \dots + {}_{n-1}\alpha_n^i \mathcal{S}_i^{n-1} \mathcal{S}_i^n + \mathcal{S}_{L_i} \quad (2.9)$$

donde $\$_{L_i}$ es el tornillo de Lie de aceleración, el cual está dado por

$$\begin{aligned}
\$_{L_i} = & \begin{bmatrix} 0\omega_1^{i0}\$1 & 1\omega_2^{i1}\$2 + 2\omega_3^{i2}\$3 + \dots + n-2\omega_{n-1}^{i n-2}\$i^{n-1} + n-1\omega_n^{i n-1}\$i^n \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 1\omega_2^{i1}\$2 & 2\omega_3^{i2}\$3 + \dots + n-2\omega_{n-1}^{i n-2}\$i^{n-1} + n-1\omega_n^{i n-1}\$i^n \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 2\omega_3^{i2}\$3 & n-2\omega_{n-1}^{i n-2}\$i^{n-1} + n-1\omega_n^{i n-1}\$i^n \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} n-2\omega_{n-1}^{i n-2}\$i^{n-1} & n-1\omega_n^{i n-1}\$i^n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $[* \ *]$ denota el producto de Lie.

El álgebra de Lie, $e(3)$, puede considerarse como el álgebra de los elementos infinitesimales del grupo Euclídeo, $E(3)$, y es isomórfica al álgebra de tornillos, en la que se satisfacen las siguientes operaciones:

Sean $\$1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 \\ \mathbf{s}_{O_1} \end{bmatrix}$, $\$2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_2 \\ \mathbf{s}_{O_2} \end{bmatrix}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

Adición

$$\$1 + \$2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2 \\ \mathbf{s}_{O_1} + \mathbf{s}_{O_2} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Multiplicación por un escalar

$$\lambda \$1 = \begin{bmatrix} \lambda \hat{\mathbf{s}}_1 \\ \lambda \mathbf{s}_{O_1} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Producto de Lie

$$[\$1 \ \$2] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 \times \hat{\mathbf{s}}_2 \\ \hat{\mathbf{s}}_1 \times \mathbf{s}_{O_2} - \hat{\mathbf{s}}_2 \times \mathbf{s}_{O_1} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

De esta manera, el álgebra de Lie, $e(3)$, es un álgebra no conmutativa, no asociativa que satisface la identidad de Jacobi. Más aún, es posible definir una forma simétrica bilineal o producto interno.

La forma de Klein

$$\{ \$1 \ \$2 \} = \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \mathbf{s}_{O_2} + \hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \mathbf{s}_{O_1} \tag{2.14}$$

donde (\times) denota al producto cruz y (\cdot) denota al producto interno del álgebra vectorial convencional de tres dimensiones.

Las propiedades de los tornillos permiten simplificar considerablemente el análisis de velocidad de los robots paralelos, recurriendo a la teoría del tornillo recíproco, estas propiedades

permiten evitar el cálculo de las velocidades pasivas en esta clase de robots. Dos tornillos, $\$_1$ y $\$_2$, son recíprocos si la forma de Klein entre ellos es igual a cero. A continuación se muestran algunos casos de tornillos recíprocos.

- (I) Los tornillos $\$_1$ y $\$_2$ representan uniones revolutorias cuyas partes primarias se interceptan en un punto en común O . Si O es elegido como un polo de referencia, las partes duales de los tornillos desaparece. Bajo estas condiciones se tiene que $\{ \$_1 \ \$_2 \} = \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \mathbf{0} + \hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \mathbf{0} = 0$.
- (II) Los tornillos $\$_1$ y $\$_2$ representan uniones prismáticas. Bajo estas condiciones se tiene que $\{ \$_1 \ \$_2 \} = \mathbf{0} \cdot \hat{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{0} \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 = 0$.
- (III) El tornillo $\$_1$ representa una unión revolutoria y el tornillo $\$_2$ representa una unión prismática, donde la parte primaria del tornillo $\$_1$ es perpendicular a la parte dual del tornillo $\$_2$. Bajo estas condiciones se tiene que $\{ \$_1 \ \$_2 \} = \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{s}_{O_1} = 0$.

2.6. Sistemas de Control

Los robots son capaces de realizar correctamente una variedad de actividades, sin embargo, la ejecución de la tarea encomendada al robot requiere alto desempeño y exactitud en sus movimientos, para esto, es necesario el diseño de un algoritmo de control [74].

El método de Lyapunov, originalmente utilizado como herramienta de análisis de sistemas lineales y no lineales, es además una herramienta útil en el diseño de controladores por retroalimentación [81]. Existen muchos métodos basados en la idea de diseñar el control de forma que, la derivada de una función de Lyapunov tenga ciertas propiedades que garanticen la estabilidad del error de seguimiento del sistema en lazo cerrado, con respecto a un punto o un conjunto de puntos de equilibrio, entre ellos está el método llamado Backstepping [81].

2.6.1. Método Directo de Lyapunov

Backstepping es un método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov, a continuación se realizará una breve revisión de los conceptos fundamentales de esta teoría. La información que se presenta es obtenida del libro *Nonlinear Systems* [49].

En las siguientes definiciones, D representa un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 1 Una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ser definida positiva en D si esta satisface las siguientes condiciones

- (I) $V(0) = 0$
- (II) $V(x) > 0, \forall x \in D / \{0\}$

Definición 2 Una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ser semi definida positiva en D si esta satisface las siguientes condiciones

- (I) $V(0) = 0$
- (II) $V(x) \geq 0, \forall x \in D/\{0\}$

Definición 3 Una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ser definida negativa en D si esta satisface las siguientes condiciones

- (I) $V(0) = 0$
- (II) $V(x) < 0, \forall x \in D/\{0\}$

Definición 4 Una función $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ser semi definida negativa en D si esta satisface las siguientes condiciones

- (I) $V(0) = 0$
- (II) $V(x) \leq 0, \forall x \in D/\{0\}$

Teorema 1 (Estabilidad local): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, $D \subset \mathbb{R}$ sea un dominio que contenga $x = 0$ y $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

- (I) $V(0) = 0$
- (II) $V(x) > 0, \forall x \in D/\{0\}$
- (III) $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D$

entonces el punto de equilibrio es estable.

Teorema 2 (Estabilidad asintótica local): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, $D \subset \mathbb{R}$ sea un dominio que contenga $x = 0$ y $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

- (I) $V(0) = 0$
- (II) $V(x) > 0, \forall x \in D/\{0\}$
- (III) $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D/\{0\}$

entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Teorema 3 (Estabilidad global): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ y $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

- (I) $V(0) = 0$
- (II) $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
- (III) $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$

$$(IV) \quad \dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$$

entonces el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable.

Teorema 3 (LaSalle): Sea Ω un conjunto positivamente invariante de $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0$. Sea $E = \{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\}$, y sea M el conjunto más grande contenido en E . Entonces, cada solución acotada $x(t)$ que inicia en Ω converge a M cuando $t \rightarrow \infty$.

2.6.2. Integrador Backstepping

El método de integrador Backstepping surgió en 1990 como una versión robusta de linealización por realimentación para sistemas no lineales con incertidumbres. Este controlador muestra un mejor desempeño que el control robusto típico, presenta una muy buena respuesta en el seguimiento de la trayectoria con errores en el modelo, confirmando así su buen desempeño cuando el modelo no es conocido con exactitud o cuando existen dinámicas no modeladas [61], por tal motivo, resulta atractivo el uso de este esquema de control en robots paralelos ya que, la principal desventaja de este tipo de robots radica en que su configuración en lazo cerrado restringe el movimiento del sistema, lo cual dificulta la obtención sistemática de las ecuaciones que definen su comportamiento dinámico [23].

Para comprender el controlador Backstepping se analizará el caso especial del integrador Backstepping. El desarrollo de esta técnica está basado en el libro *Nonlinear Systems* [49].

Considere el sistema

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \quad (2.15)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (2.16)$$

donde x_1, x_2 son los estados del sistema y u es la entrada de control.

Paso 1. Tomando la primera ecuación (2.15), definiendo $z_1 = x_1$ y derivando la dinámica de la nueva coordenada, se tiene

$$\dot{z}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \quad (2.17)$$

donde x_2 es una variable de control. Definiendo un controlador virtual γ (2.17), y dada z_2 una variable de error que representa la diferencia entre el control actual y el control virtual de (2.17), se tiene

$$z_2 = x_2 - \gamma \quad (2.18)$$

Así, en términos de la nueva variable de estado, (2.17) se puede reescribir como

$$\dot{z}_1 = x_1^2 - x_1^3 + z_2 + \gamma \quad (2.19)$$

En este paso, el objetivo es diseñar un controlador virtual γ , de tal manera que haga que $z_1 \rightarrow 0$. Por lo tanto, considerese la siguiente función de Lyapunov

$$V(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2 \quad (2.20)$$

derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_1) = z_1\dot{z}_1 = z_1(x_1^2 - x_1^3 + z_2 + \gamma) \quad (2.21)$$

ahora se puede seleccionar un control virtual apropiado γ , la cual hace que el sistema de primer orden sea estabilizable

$$\gamma = -k_1z_1 + x_1^3 - x_1^2 \quad (2.22)$$

donde $k_1 > 0$. Por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo de $V(z_1)$ se convierte en

$$\dot{V}(z_1) = -k_1z_1^2 + z_1z_2 \quad (2.23)$$

de esta forma, si $z_2 = 0$, entonces $\dot{V}(z_1) = -k_1z_1^2$, con lo cual se garantiza que $\dot{V}(z_1)$ converge a cero asintóticamente.

Paso 2. Se deriva la dinámica del error para $z_2 = x_2 - \gamma$ (ecuación (2.18))

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\gamma} = u - \dot{\gamma} = u + k_1\dot{z}_1 - 3x_1^2\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_1 \quad (2.24)$$

en esta ecuación la entrada de control actual u finalmente aparece, el objetivo es diseñar la entrada de control actual tal que z_1 y z_2 convergan a cero. Escogiendo una función de Lyapunov $V(z_2)$ como

$$V(z_2) = V(z_1) + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (2.25)$$

su derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{V}(z_2) = \dot{V}(z_1) + z_2\dot{z}_2 = -k_1z_1^2 + z_1z_2 + z_2(u + k_1\dot{z}_1 - 3x_1^2\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_1) \quad (2.26)$$

finalmente se diseña una ley de control u que haga que $\dot{V}(z_2)$, como sigue

$$u = -z_1 - k_2 z_2 - k_1 \dot{z}_1 + 3x_1^2 \dot{x}_1 - 2x_1 \dot{x}_1 \quad (2.27)$$

donde $k_2 > 0$. De esta forma, la derivada de la segunda función de Lyapunov queda como

$$\dot{V}(z_2) = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \quad (2.28)$$

de esta forma, por el teorema de Lasalle se garantiza la acotación uniforme global de z_1 y z_2 , lo que implica que $z_1, z_2 \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$.

2.6.3. Observador de Estado Extendido

El objetivo del enfoque de control antes mencionado es rechazar perturbaciones a través de la retroalimentación, que se basa en el error de seguimiento entre las salidas medidas y sus puntos de ajuste o trayectorias deseadas. Como consecuencia, estos controladores no pueden reaccionar con la suficiente rapidez en presencia de fuertes perturbaciones. Para superar esta limitación, se utiliza el control de rechazo activo de perturbaciones (Active disturbance rejection control, ADRC por sus siglas en inglés). El ADRC se basa fundamentalmente en la posibilidad de realizar estimaciones en línea de los efectos adversos denominados “perturbación total” causados por el acoplamiento entre la dinámica desconocida del sistema (endógena) y perturbaciones externas (exógena) [39]. La característica más destacada del ADRC radica en su naturaleza de estimación/cancelación, en la que la perturbación se considera como un estado extendido y se estima en tiempo real, a través de un observador de estado extendido (ESO, por sus siglas en inglés) [83]. Este enfoque de control se ha implementado satisfactoriamente en diferentes aplicaciones [105], además, es capaz de tratar diversas incertidumbres y perturbaciones de forma eficiente desde el punto de vista energético y de implementación [64], por tal motivo, resulta atractivo el uso de este esquema de control en sistemas que presentan incertidumbres.

Para comprender el observador de estado extendido basado en ADRC se analizará un ejemplo sencillo que servirá como base para una generalización deseada. El desarrollo de este ejemplo está basado en el libro *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems* [83].

Considere el sistema perturbado

$$y^{(n)} = \psi(t, y) u + \phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.29)$$

en donde n es el orden del sistema, u es la entrada de control, y es la salida plana, $\psi(t, y)$ es

la ganancia de entrada y $\phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ es una función desconocida.

En relación al sistema controlado (2.29), se hacen las siguientes suposiciones

- (I) La función de deriva ϕ es completamente desconocida mientras que la ganancia de entrada, ψ , es perfectamente conocida y se supone es uniformemente acotada lejos de cero.
- (II) Sea m un entero dado. Como función del tiempo, la derivada de orden m de $\xi(t) = \phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ es uniformemente absolutamente acotada (en casi todas partes cuando sea necesario).

Haciendo: $y_1 = y, y_2 = \dot{y}, \dots, y_n = y^{(n-1)}$, se obtiene el siguiente modelo en variables de estado del sistema (2.29)

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_j &= y_{j+1} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{y}_n &= \psi(t, y) u + \xi(t)\end{aligned}\tag{2.30}$$

Ahora se propone el siguiente observador, para las variables de fase $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ asociadas con la salida plana y , caracterizado por los estados $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ y complementado con inyecciones de integrales iteradas del error de estimación de salida, caracterizadas por las variables z_1

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= \hat{y}_2 + \lambda_{n+m-1} (y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{\hat{y}}_2 &= \hat{y}_3 + \lambda_{n+m-2} (y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{\hat{y}}_j &= \hat{y}_{j+1} + \lambda_{n+m-j} (y_1 - \hat{y}_1) \quad \forall j = 3, 4, \dots, n-1 \\ \dot{\hat{y}}_n &= \psi(t, y) u + z_1 + \lambda_m (y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_{m-1} (y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \lambda_{m-2} (y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} + \lambda_{m-i} (y_1 - \hat{y}_1) \quad \forall i = 3, 4, \dots, m-1 \\ \dot{z}_m &= \lambda_0 (y_1 - \hat{y}_1)\end{aligned}\tag{2.31}$$

Defínase el error de estimación de salida como $e_y = e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = y - \hat{y}_1$, con $e_2 = y_2 - \hat{y}_2$,

hasta $e_n = y_n - \hat{y}_n$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= \hat{e}_2 + \lambda_{n+m-1}e_1 & (2.32) \\
\dot{e}_2 &= \hat{y}_3 + \lambda_{n+m-2}e_1 \\
\dot{e}_j &= \hat{y}_{j+1} + \lambda_{n+m-j}e_1 \quad \forall j = 3, 4, \dots, n-1 \\
\dot{e}_n &= \xi(t) + z_1 + \lambda_m e_1 \\
\dot{z}_1 &= z_2 + \lambda_{m-1}e_1 \\
\dot{z}_2 &= z_3 + \lambda_{m-2}e_1 \\
\dot{z}_i &= z_{i+1} + \lambda_{m-i}e_1 \quad \forall i = 3, 4, \dots, m-1 \\
\dot{z}_m &= \lambda_0 e_1
\end{aligned}$$

El error de estimación, $e_y = e_1$, satisface, después de eliminar todas las variables z , la siguiente ecuación diferencial lineal perturbada de orden $n+m$,

$$e_y^{(n+m)} + \lambda_{n+m-1}e_y^{(n+m-1)} + \lambda_{n+m-2}e_y^{(n+m-2)} + \dots + \lambda_1 \dot{e}_y + \lambda_0 e_y = \xi^{(m)}(t) \quad (2.33)$$

Seleccionando los coeficientes $\lambda_j, \forall j = 0, 1, 2, \dots, n+m-1$, del polinomio característico en la variable compleja s

$$p_o(s) = s^{n+m} + \lambda_{n+m-1}s^{n+m-1} + \lambda_{n+m-2}s^{n+m-2} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0 \quad (2.34)$$

de tal forma que, para un número real suficientemente grande $N > 0$, el polinomio $p_o(s)$ exhibe todas sus raíces a la izquierda de la línea $\{s \in \mathbb{C}\}$, en el plano complejo \mathbb{C} . Entonces, las trayectorias del error de estimación, $e_y(t)$, y de sus derivadas temporales, $e^{(j)}(t)$, $\forall j = 1, 2, \dots, n+m-1$, convergen globalmente hacia una esfera, $S(0, \rho)$ centrada en el origen del espacio de fase $\{e_y, \dot{e}_y, \dots, e_y^{(n+m+1)}\}$, de radio ρ tan pequeño como sea necesario, donde permanecen definitivamente acotadas. A mayores valores de N , más pequeño el radio de la esfera $S(0, \rho)$. En forma similar, la variable z_1 y sus derivadas temporales, \dot{z}_j , $\forall j = 1, 2, \dots, m$, siguen arbitrariamente de cerca la función desconocida del tiempo, $\xi(t)$, y sus derivadas temporales $\xi^{(j)}(t)$, $\forall j = 1, 2, \dots, m$.

Capítulo 3

Diseño Preliminar

3.1. Metodología

Para cumplir los objetivos de esta investigación se seguirá la metodología de diseño mecatrónico [15], la cual consta de las siguientes fases, Figura 3.1:

- ✓ **Identificar la necesidad.** Se realizarán entrevistas a fisioterapeutas, una investigación para determinar las necesidades de los usuarios de rehabilitadores de tobillo y se empleará la investigación del estado del arte, para determinar los requerimientos aplicando metodologías como el despliegue de la función de calidad (Quality function deployment, QFD por sus siglas en inglés) o las especificaciones del diseño del producto (Product design specification, PDS por sus siglas en inglés).
- ✓ **Diseño conceptual y especificaciones funcionales.** Definidos los intervalos y tipos de movimientos del mecanismo, se especifican sus condiciones de funcionamiento, distancias entre puntos de posicionamiento, velocidad y aceleración en los movimientos, cargas a transferir, aproximación a la estructura definitiva y análisis de materiales para los elementos del mecanismo.
- ✓ **Modelo matemático.** Obteniendo el diseño conceptual se requiere dibujar un diagrama esquemático del sistema, definir las variables y utilizar leyes físicas para describir el comportamiento del sistema.
- ✓ **Modelo y diseño estructural con sistema CAD y CAE.** Esto implica definir la estructura básica del brazo robot, seleccionar los materiales de sus elementos, definir la sección de los elementos y el mecanismo en las articulaciones, analizar las cargas estáticas/dinámicas, los momentos e inercias en un modelo virtual mediante el sistema CAD y análisis con sistema CAE.

- ✓ **Selección de actuadores y sensores.** Conocido el modelo de la dinámica del robot, se pueden calcular pares de torsión y fuerzas en las articulaciones. Con esta información se seleccionan los actuadores y sensores de catálogos comerciales.
- ✓ **Ampliación del modelo matemático.** Con los actuadores y sensores seleccionados se puede acoplar la dinámica de estos al modelo matemático del sistema.
- ✓ **Diseño de estrategia de control.** Con el modelo matemático resultante se diseña una estrategia de control.
- ✓ **Optimización del diseño.** Se realizan las pruebas necesarias y se ajustan los parámetros y variables del robot para maximizarlos o minimizarlos.
- ✓ **Simulación virtual.** Se realizan simulaciones virtuales para calcular el comportamiento del modelo a medida que las condiciones evolucionan con el tiempo o a medida que se producen eventos y para diagnosticar problemas en el diseño.
- ✓ **Simulación real.** La simulación en tiempo real significa el empleo de dispositivos en lazo cerrado como un subsistema que ejecuta la acción en tiempo real por medio de una tarjeta que reemplaza parte del modelo físico del robot en interface con los motores y sensores.
- ✓ **Optimización del funcionamiento.** Con base en la simulación anterior se optimizan los parámetros del robot y de sus componentes.

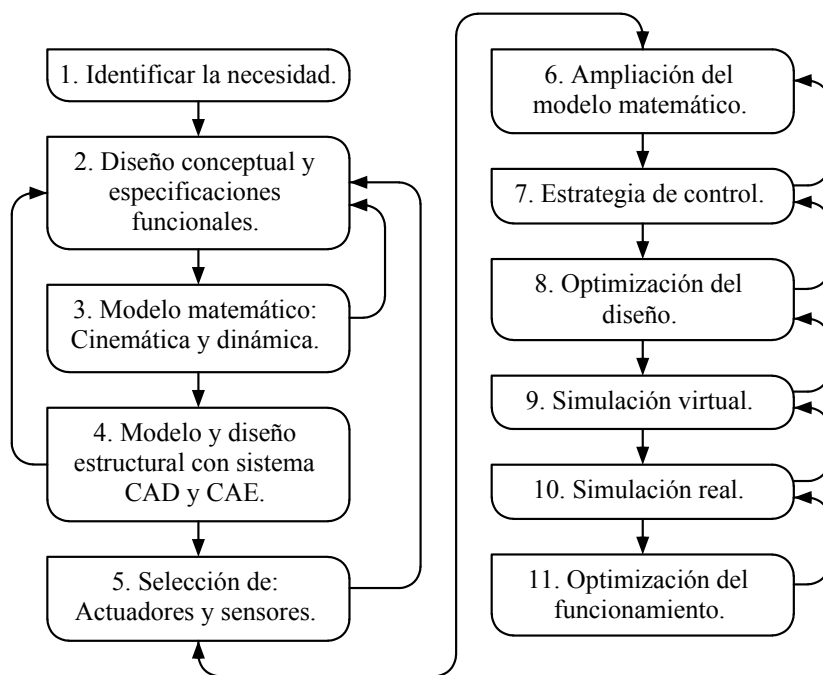


Figura 3.1: Metodología de diseño mecatrónico [15].

Con base en la Tabla 2.2 y la revisión del estado del arte, se obtuvieron los requerimientos para la rehabilitación de tobillo y se proponen los seis movimientos de rehabilitación (flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción), el intervalo de movimientos de estos (Tabla 2.1), el par de torsión máximo para realizar los seis movimientos, la velocidad máxima de cada movimiento y cumplir con la rehabilitación pasiva y activa.

Para la fase 1 de identificar la necesidad, se propone cumplir con los requerimientos de los seis movimientos de rehabilitación, el intervalo de estos movimientos, la velocidad máxima de los mismos, el par de torsión máximo necesario para realizar cada movimiento y realizar rehabilitación pasiva del tobillo.

3.2. Identificación de la Necesidad

3.2.1. Concepto del QFD

El QFD es una metodología que convierte las exigencias del cliente a características de calidad. QFD traduce lo que el cliente quiere en lo que la organización produce. Le permite a una organización priorizar las necesidades de los clientes, encontrar respuestas a esas necesidades, y mejorar procesos hasta una efectividad máxima [93].

3.2.2. Estructura del QFD

La estructura del QFD más común está compuesta por los siguientes puntos [6]:

- ✓ Requerimientos y expectativas del cliente. Esta etapa reúne las necesidades del cliente relacionados con el producto.
- ✓ Determinación de los requerimientos del cliente. Se establece con las expectativas del cliente sobre algunas especificaciones de desempeño.
- ✓ Importancia relativa y ponderación de los requerimientos del cliente.
- ✓ Estudio comparativo del producto con algunos similares de la competencia.
- ✓ Traducción de los requerimientos en términos mensurables de ingeniería.

3.2.3. Reconocimiento de la Necesidad

De acuerdo con información y datos disponibles de la Secretaria de Trabajo y Previsión Social sobre accidentes y enfermedades de trabajo, anualmente en México se presentan más de 400 mil casos de accidentes laborales, de los cuales poco más del 15% son por accidentes en el pie y tobillo. Además, existen varias enfermedades neuromusculares que requieren de

tratamiento inmediato con la intención de evitar daños más severos o permanentes [16]. Actualmente la mayoría de terapias físicas son fisioterapeuta-paciente, sin embargo, se presentan algunos problemas en la rehabilitación; para el caso del paciente, las terapias son costosas y el tiempo de recuperación es largo, y para el especialista presenta problemas de eficiencia, ya que, al realizar terapias repetitivas y diferentes durante un periodo de tiempo prolongado, no se realizan de manera óptima a cada paciente (debido al desgaste físico). Además, no cuenta con medidas fiables del deterioro del miembro a rehabilitar ni con medidas para evaluar el progreso de la rehabilitación implementada.

3.2.4. Requerimientos del Cliente

En la Tabla 3.1 se muestran los requerimientos del cliente manifestados por el fisioterapeuta Rubén López Ramírez del DIF Municipal de Huajuapán de León. En cada uno de los requerimientos se pidió calificar la importancia que tienen en el diseño del rehabilitador de tobillo, para establecerla el encuestado calificó del 1 al 10 la importancia de cada punto, donde 1 significa importancia nula y 10 importancia muy alta.

Tabla 3.1: Requerimientos del cliente.

Requerimiento	Descripción	Importancia Relativa
Movimientos de flexión/extensión	El dispositivo deberá proporcionar los movimientos fisiológicos del tobillo.	10
Movimientos de inversión/eversión		7
Movimientos de abducción/aducción		7
Intervalo de movimientos	El dispositivo deberá proporcionar el intervalo máximo de 37.6° a 45.8° para el movimiento de flexión, para extensión deberá proporcionar el intervalo máximo de movimiento de 20.3° a 29.8° . En el caso de inversión se requiere el intervalo de 14.5° a 22.0° y 10.0° a 17.0° para el movimiento de eversión. Para abducción se define un máximo de 15.4° a 25.9° y 22.0° a 36.0° para aducción [53].	10
Velocidad máxima	El dispositivo deberá realizar los movimientos de flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción a una velocidad máxima de 20 a 30 rep/min.	10
Par de torsión máximo	Tomando una postura conservadora, se define que el par de torsión máximo requerido para la rehabilitación del tobillo es de 30Nm a 65Nm [3, 97].	10
Rehabilitación pasiva	El dispositivo se encarga de realizar los movimientos, mientras que el paciente no realiza ningún movimiento voluntario.	10
Rehabilitación activa	El paciente realiza el movimiento de forma voluntaria, mientras que el dispositivo ejerce una fuerza contraria al movimiento del paciente.	8
Interfaz de usuario	El dispositivo deberá tener la capacidad de ser operado fácilmente por el especialista a través de una interfaz de usuario.	9
Seguridad	El sistema debe garantizar la seguridad del usuario ya que será empleado en el sector salud; por ello, se deben contemplar restricciones físicas.	10
Materiales	Los materiales empleados deben ser adecuados para el uso en la industria médica.	7
Portabilidad	Las dimensiones y materiales del sistema deben garantizar la portabilidad.	10

De acuerdo a la Tabla 3.1 se consideran los requerimientos obligatorios a los calificados con importancia de 9 a 10 y los restantes se les considera como deseables.

3.2.5. Estudio Comparativo del Producto con Algunos Similares de la Competencia

Para establecer estas especificaciones y así satisfacer las necesidades del cliente, se realizó una tabla comparativa de los dispositivos que ofrecen rehabilitación de tobillo.

Tabla 3.2: Comparativa de la competencia.

Requerimiento	Guzmán Valdivia [40]	Blanco Ortega [10]	Mingming Zhang [103]	Isidro Godoy [65]	Pérez Ibarra [68]	Diseño Propuesto
Movimientos de flexión/ extensión	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Movimientos de inversión/ eversión	✗	✗	✓	✓	✗	✓
Movimientos de abducción/ aducción	✗	✓	✓	✗	✗	✓
Intervalo de movimientos	45°/25°	29.8°/45.8° 25.9°/36°	-	✓	-	45.8°/29.8°. 22.0°/17.0° 25.9°/36.0°
Par de torsión máximo	-	-	-	-	-	65Nm
Velocidad máxima	-	-	-	-	-	30rep/min
Rehabilitación pasiva	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Rehabilitación activa	✓	✗	✓	✗	✓	✗
Interfaz de usuario	✓	-	-	✓	-	✓

✓ Permitido, ✗ No permitido, - No especificado

En la Tabla 3.2, se muestran los requerimientos para la rehabilitación del tobillo, y se realiza una comparación con algunos de los dispositivos que se presentan en el estado del arte.

Como se observa en la Tabla 3.2, aun es necesario cumplir o perfeccionar los movimientos de inversión/eversión y de abducción/aducción requeridos por el rehabilitador. Otras áreas de oportunidad son desarrollar el par máximo y velocidad máxima durante la rehabilitación, así como desarrollar e implementar la rehabilitación pasiva.

Como resultado del uso de la metodología del QFD, se reduce el tiempo de desarrollo del prototipo porque se centra en requerimientos específicos del cliente, se obtiene una dirección en

busca de la mejora en cuanto a diseño y satisfacción hacia el cliente. Esto abre paso a continuar con la construcción del modelo funcional, analizando cada requerimiento y generando nuevos conceptos.

3.3. Diseño Conceptual

En este trabajo de investigación el problema se enfoca en el diseño de un robot rehabilitador de tobillo, que genere movimientos de: flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción. La particularidad que presenta el diseño es que realice los movimientos antes mencionados en todo su intervalo, utilizando el mínimo de actuadores. Como primera etapa se deberá diseñar un prototipo cuyas características están señaladas en la sección anterior.

Para generar en su totalidad los movimientos de rehabilitación se requiere una base móvil que, al igual que la articulación del tobillo, rote en el espacio, por lo tanto, se propone utilizar un robot paralelo esférico, ya que este tipo de manipuladores poseen diversas ventajas, tales como, la capacidad de rotar en el espacio y a diferencia de los robots seriales pueden alcanzar velocidades y aceleraciones mucho más grandes, manejan cargas superiores, poseen alta rigidez dado que el peso es repartido entre las diferentes cadenas cinemáticas, y con ello se logra una mayor precisión [95].

Con base en los criterios de movimiento se propone utilizar una base fija conectada a una base móvil a través de un poste central (Figura 3.2), con esta configuración se realizan las tres rotaciones del tobillo. Para lograr el movimiento angular en el espacio de la base móvil es necesario manipular los puntos B_1 y B_2 fijos a este cuerpo, por ello se propone que el robot contenga dos cadenas cinemáticas que muevan dichos puntos.

Con el objetivo de que las dimensiones del robot sean mínimas, se propone que las cadenas cinemáticas tengan un actuador prismático en posición horizontal unido a la base fija (Figura 3.3), adoptando esta configuración se obtiene un mayor espacio de trabajo.

Para conocer la configuración de conexión entre la base móvil y los actuadores prismáticos, se recurre a la ecuación de Grübler:

$$M = 6(N - J - 1) + \sum_{i=1}^J (f_i) - f_p \quad (3.1)$$

donde M es la movilidad del robot, N es el número de eslabones incluyendo la base fija, J es el número de pares cinemáticos, f_i son los grados de libertad del i -ésimo par y f_p son los grados de libertad en las uniones pasivas.

Como el robot cuenta con 2 actuadores, se requiere que la movilidad del robot sea 2,

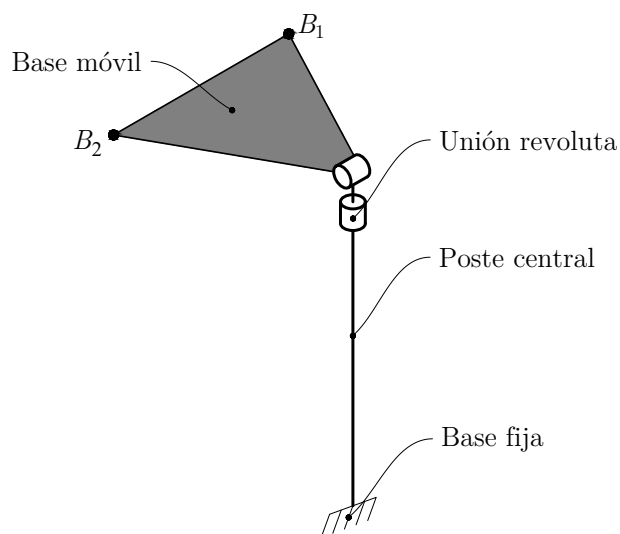


Figura 3.2: Base móvil unida a poste central.

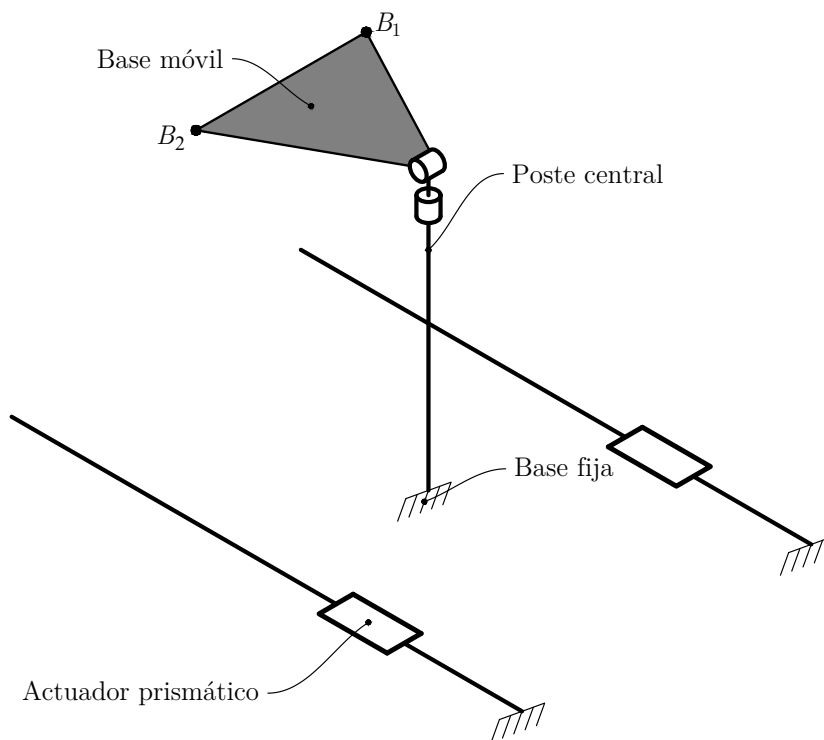


Figura 3.3: Posición y orientación de los actuadores.

$M = 2$, para tener un robot actuado, de otra manera, si $M > 2$ se tendría un robot subactuado. Al considerar que dos varillas unen a los actuadores con la base móvil se obtiene el número de eslabones del robot: $N = 6$. Para conectar la base móvil y el poste central se requiere de una unión, para conectar los actuadores con la base móvil se requiere de dos uniones por cada

actuador, por último los dos actuadores prismáticos conforman dos uniones más, esto da un total de siete uniones, por lo tanto, $J = 7$. Sustituyendo en la ecuación de Grübler con $f_p = 0$ y despejando $\sum_{i=1}^J (f_i)$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^7 (f_i) = 2 - 6(6 - 7 - 1) = 14 \quad (3.2)$$

Como el poste central contiene una unión con 2 GDL y cada actuador contiene 1 GDL se tiene que

$$\sum_{i=1}^4 (f_i) = 2 - 6(6 - 7 - 1) - 2 - 2 = 10 \quad (3.3)$$

si se consideran dos cadenas cinemáticas iguales, entre las dos articulaciones de cada cadena deben existir 5 GDL, para esto se propone que sea una unión universal y una esférica, con 2 y 3 GDL, respectivamente, en la Figura 3.4 se muestra la configuración de estas cadenas.

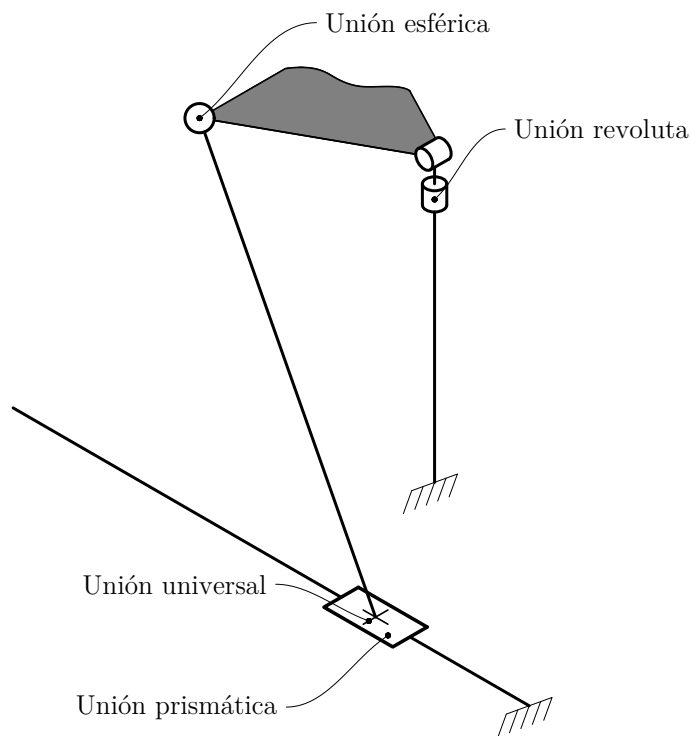


Figura 3.4: Configuración de las cadenas cinemáticas.

Para que el robot pueda realizar todos los movimientos de rehabilitación se descompone la unión entre el poste central y la base móvil en dos uniones revolutas, con esto se cambia la orientación de una revoluta para que la base móvil realice tres rotaciones en el espacio. Cada una de las orientaciones del robot define un modo de operación, para el primer modo (Figura

3.5(a)) el robot genera los movimientos de flexión/extensión y abducción/aducción del tobillo. Para el segundo modo (Figura 3.5(b)) el robot realiza los movimientos de inversión/eversión y abducción/aducción. Por lo tanto todos los movimientos de rehabilitación para la articulación del tobillo se pueden llevar a cabo.

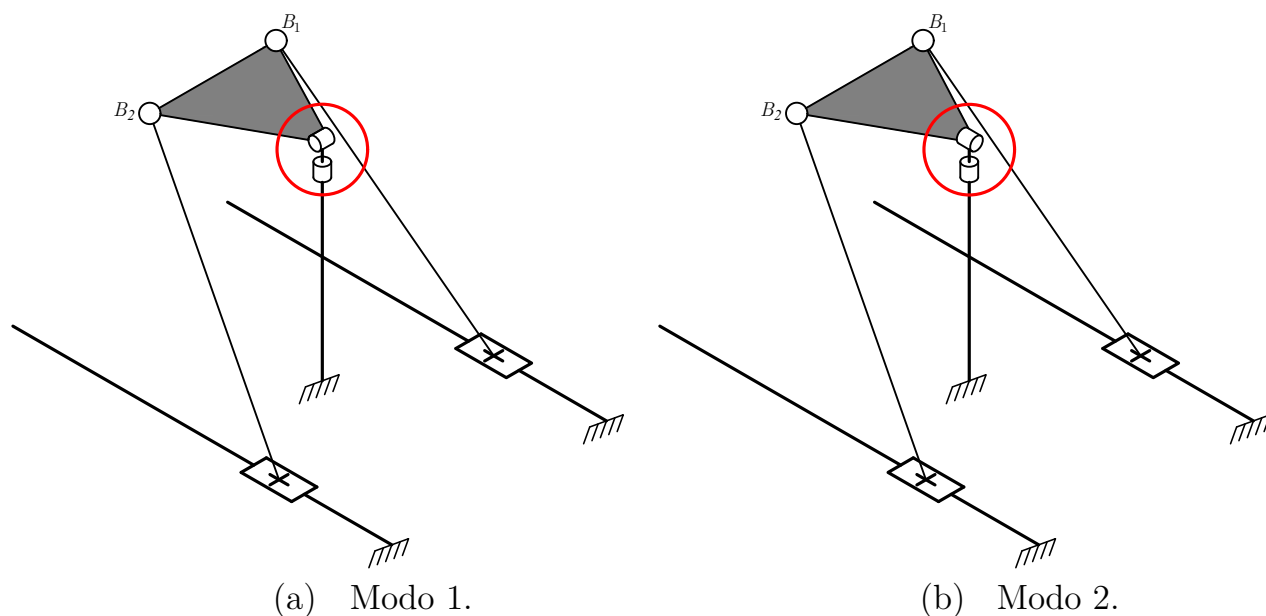
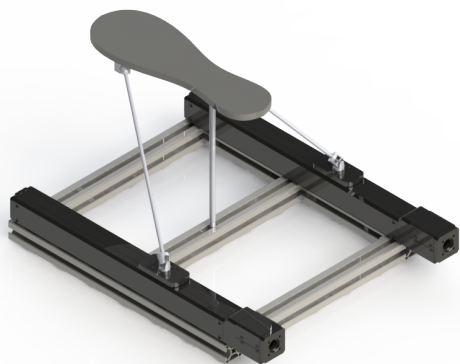
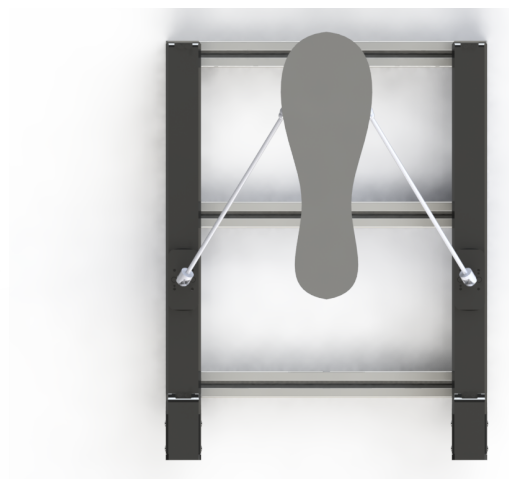


Figura 3.5: Modos de operación del robot.

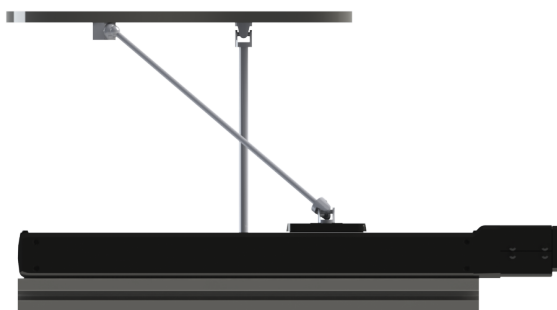
El robot paralelo propuesto para rehabilitación de tobillo, Figura 3.6, tiene dos GDL, y consiste de: dos actuadores prismáticos (correderas lineales) una base fija y otra móvil donde se apoyará el pie del tobillo a rehabilitar, la base móvil, mediante los dos modos de operación proporcionarán los movimientos de flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción del tobillo. Ambas bases están conectadas por medio de dos cadenas cinemáticas \underline{PUS} más una cadena RR .



(a) Vista Isométrica.



(b) Vista Superior.



(c) Vista Izquierda.



(d) Vista Frontal.

Figura 3.6: Diseño preliminar del robot paralelo.

Capítulo 4

Análisis Mecánico

4.1. Descripción del Robot Paralelo

El robot en estudio consiste en una base móvil y una base fija conectadas por medio de dos cadenas cinemáticas \underline{PUS} más una cadena RR (Figura 4.1). La disposición de las cadenas cinemáticas es tal que los ejes de las juntas prismáticas son paralelas al eje Z del sistema de coordenadas global. Los centros de las uniones universales se designan como A_i y las ubicaciones de las uniones esféricas y la base móvil se indican con $B_i, \forall i = 1, 2$. Para simplificar los análisis, las coordenadas de la base móvil, B_1, B_2 y B_3 son coplanares. El sistema de coordenadas global es O_{XYZ} y el sistema de referencia móvil es P_{xyz} , donde el punto O y el punto P se encuentran en el punto de intersección de las uniones revoluta del poste central. Además, el eje Y es colineal al eje longitudinal del poste central.

4.2. Cinemática Directa

El problema de la cinemática directa es determinar la posición de las coordenadas B_i de la base móvil, dados los valores para las variables q_i de las juntas prismáticas.

4.2.1. Análisis de Desplazamiento

Es bien conocido que la posición y orientación de cualquier cuerpo rígido puede especificarse conociendo las coordenadas de tres puntos que le pertenecen. La posición de la base móvil, con respecto al marco de referencia fijo O_{XYZ} , puede determinarse calculando las coordenadas de los puntos B_i . Luego se escriben las ecuaciones que incluyen estas variables usando expresiones de restricciones mecánicas. Las longitudes de las extremidades del robot están res-

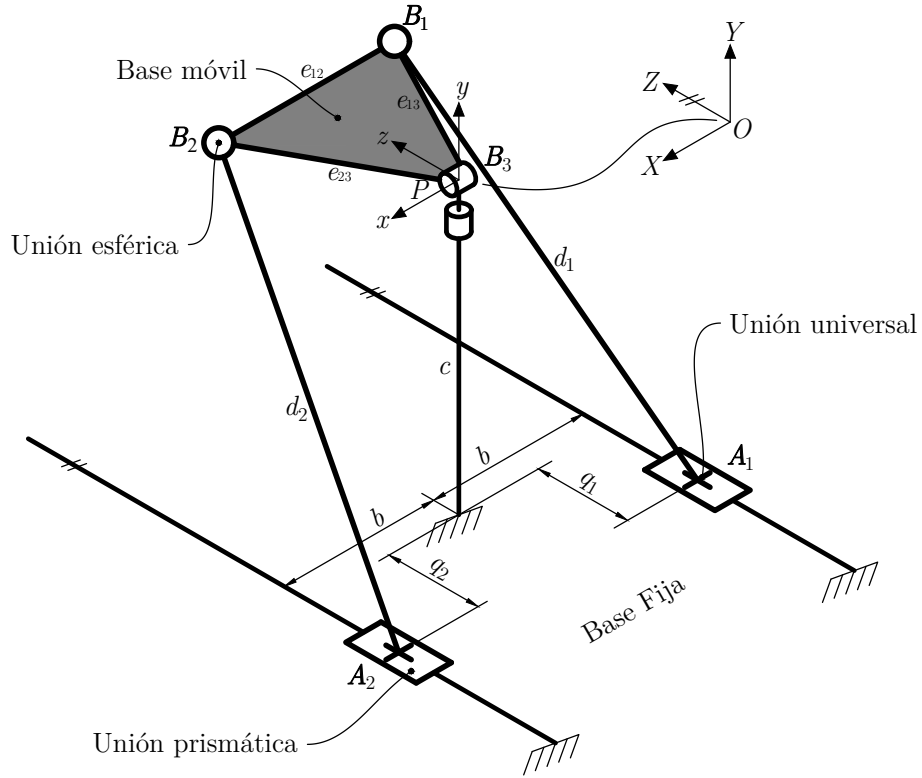


Figura 4.1: Robot paralelo 2-PUS+RR

tringidas a

$$(\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i) \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i) = d_i^2, \quad \forall i = 1, 2 \quad (4.1)$$

las tres ecuaciones de cierre de compatibilidad para la distancia e_{ij} pueden expresarse como

$$(\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j) \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j) = e_{ij}^2, \quad \forall j = 2, 3; \quad i \neq j. \quad (4.2)$$

donde (\cdot) indica al producto interno usual del álgebra vectorial y \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i y \mathbf{B}_3 están dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -b & -c & q_1 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} b & -c & q_2 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.3)$$

El robot paralelo tiene dos modos; en el primer modo la unión revoluta que une al poste

central con la base móvil tiene la dirección del vector $B_2 - B_1$ (Figura 3.5(a)), debido a esto se tiene que $Y_2 = Y_1$. Para el segundo modo dicha revoluta tiene la dirección del vector $B_1 + B_2$ (Figura 3.5(b)), debido a esto se tiene que $Y_2 = -Y_1$.

Modo 1. Desarrollando las ecuaciones dadas en (4.1) y (4.2), con $Y_2 = Y_1$, se tiene

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + 2bX_1 + 2cY_1 - 2q_1Z_1 + b^2 + c^2 + q_1^2 = d_1^2 \quad (4.4)$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 - 2bX_2 + 2cY_1 - 2q_2Z_2 + b^2 + c^2 + q_2^2 = d_2^2 \quad (4.5)$$

$$X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + Z_2^2 = e_{12}^2 \quad (4.6)$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = e_{13}^2 \quad (4.7)$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 = e_{23}^2 \quad (4.8)$$

con el fin de reducir el número de ecuaciones polinomiales, se sustituye (4.7) y (4.8) en (4.4) y (4.5) y se producen dos ecuaciones lineales

$$e_{13}^2 + 2bX_1 + 2cY_1 - 2q_1Z_1 + b^2 + c^2 + q_1^2 = d_1^2 \quad (4.9)$$

$$e_{23}^2 - 2bX_2 + 2cY_1 - 2q_2Z_2 + b^2 + c^2 + q_2^2 = d_2^2 \quad (4.10)$$

despejando Z_1 y Z_2 de (4.9) y (4.10) se tiene

$$Z_1 = \frac{b^2 + 2bX_1 + c^2 + 2cY_1 - d_1^2 + e_{13}^2 + q_1^2}{2q_1} \quad (4.11)$$

$$Z_2 = \frac{b^2 - 2bX_2 + c^2 + 2cY_1 - d_2^2 + e_{23}^2 + q_2^2}{2q_2} \quad (4.12)$$

para reducir el número de variables se sustituye (4.11) y (4.12) en (4.6), (4.7) y (4.8), esto produce la eliminación de las variables Z_1 y Z_2 .

$$X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + P = e_{12}^2 \quad (4.13)$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + P' = e_{13}^2 \quad (4.14)$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + P'' = e_{23}^2 \quad (4.15)$$

donde P es un polinomio de segundo grado que depende de X_1 , X_2 y Y_1 , por otro lado P' y P'' son polinomios de segundo grado que dependen de X_1 , Y_1 y X_2 , Y_1 , respectivamente.

Solución analítica. Para resolver el sistema de ecuaciones en forma semi-cerrada se utiliza recursivamente el método de eliminación dialítica de Sylvester. El método de eliminación fue introducido entre 1839 y 1848 por los matemáticos Sylvester, Hesse y Cayley. El méto-

do de eliminación dialítica de Sylvester consiste en reducir cualquier sistema de ecuaciones polinomiales en un solo polinomio con una incógnita. El método se conforma de seis pasos [55]:

1. Reescribir cada una de las ecuaciones en forma de polinomio con una incógnita.
2. Considerar las variables de los polinomios como un nuevo sistema de ecuaciones lineales.
3. Generar nuevas ecuaciones linealmente independientes como el número de incógnitas lineales.
4. Igualar el determinante de la matriz de coeficientes a cero para obtener un polinomio en función de la variable eliminada.
5. Encontrar las raíces del polinomio.
6. Sustituir cada una de las raíces dentro del sistema de ecuaciones originales y repetir el proceso.

Eliminación de X_1 . Para esto se reescriben las ecuaciones (4.13) y (4.14) de la siguiente forma

$$P_1X_1^2 + P_2X_1 + P_3 = 0 \quad (4.16)$$

$$P_4X_1^2 + P_5X_1 + P_6 = 0 \quad (4.17)$$

donde P_j , $j = 1, 2, 3$, son polinomios de segundo grado que dependen de X_2 y Y_1 , mientras que P_j , $j = 4, 5, 6$, son polinomios de segundo grado que dependen de Y_1 . Para generar dos ecuaciones adicionales, se multiplica (4.16) y (4.17) por X_1 y se obtiene

$$P_1X_1^3 + P_2X_1^2 + P_3X_1 = 0 \quad (4.18)$$

$$P_4X_1^3 + P_5X_1^2 + P_6X_1 = 0 \quad (4.19)$$

Se pueden considerar las ecuaciones (4.16), (4.17), (4.18) y (4.19) como cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas: X_1^3 , X_1^2 , X_1 y 1. Pasando estas ecuaciones a forma matricial se tiene

$$M_1 \begin{bmatrix} X_1^3 \\ X_1^2 \\ X_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

donde

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 & 0 \\ 0 & P_4 & P_5 & P_6 \\ P_4 & P_5 & P_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

La ecuación (4.20) tiene una solución sí y sólo si $\det(M_1) = 0$ [35], expandiendo $\det(M_1)$ se obtiene

$$P_7X_2^4 + P_8X_2^3 + P_9X_2^2 + P_{10}X_2 + P_{11} = 0 \quad (4.22)$$

donde P_j , $j = 7, 8, \dots, 11$ son polinomios de cuarto grado que dependen de Y_1 .

Eliminación de X_2 . Para esto se reescribe la ecuación (4.15) de la siguiente forma

$$P_{12}X_2^2 + P_{13}X_2 + P_{14} = 0 \quad (4.23)$$

donde P_j , $j = 12, 13, 14$ son polinomios de segundo grado que dependen de Y_1 . Con el fin de evitar soluciones espurias, la derivación de un mínimo de ecuaciones lineales es recomendable [35], para esto, el término X_2^4 es eliminado de la ecuación (4.22) multiplicando por esta ecuación por el término P_{12} y la ecuación (4.23) se multiplica por $P_7X_2^2$, restando ambas ecuaciones la ecuación (4.22) queda de la siguiente forma

$$(P_{13}P_7 - P_{12}P_8)X_2^3 + (P_{14}P_7 - P_{12}P_9)X_2^2 - (P_{12}P_{10})X_2 - (P_{12}P_{11}) = 0 \quad (4.24)$$

la tercera ecuación se obtiene multiplicando (4.23) por X_2

$$P_{12}X_2^3 + P_{13}X_2^2 + P_{14}X_2 = 0 \quad (4.25)$$

la búsqueda de la cuarta ecuación es más elusiva [35, 55], para esto se multiplica $P_{12}X_2 + P_{13}$ por la ecuación (4.22) y $P_7X_2^3 + P_8X_2^2$ por (4.23), restando ambas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} & (P_{12}P_9 - P_7P_{14})X_2^3 + (P_{12}P_{10} + P_{13}P_9 - P_9P_{14})X_2^2 \\ & + (P_{12}P_{11} + P_{13}P_{10})X_2 + (P_{13}P_{11}) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Se pueden considerar las ecuaciones (4.23), (4.24), (4.25) y (4.26) como cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas: X_2^3 , X_2^2 , X_2 y 1. Pasando estas ecuaciones a forma matricial se tiene

$$M_2 \begin{bmatrix} X_2^3 \\ X_2^2 \\ X_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

donde

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ (P_{13}P_7 - P_{12}P_8) & (P_{14}P_7 - P_{12}P_9) & -(P_{12}P_{10}) & -(P_{12}P_{11}) \\ P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 \\ (P_{12}P_9 - P_7P_{14}) & (P_{12}P_{10} + P_{13}P_9 - P_9P_{14}) & (P_{12}P_{11} + P_{13}P_{10}) & (P_{13}P_{11}) \end{bmatrix}$$

La ecuación (4.27) tiene una solución sí y sólo si $\det(M_2) = 0$ [35], expandiendo $\det(M_2)$ se obtiene

$$P_{15}Y_1^8 + P_{16}Y_1^7 + P_{17}Y_1^6 + P_{18}Y_1^5 + P_{19}Y_1^4 + P_{20}Y_1^3 + P_{21}Y_1^2 + P_{22}Y_1 + P_{23} = 0 \quad (4.28)$$

donde de P_j , $j = 15, 16, \dots, 23$, son coeficientes constantes que se calculan de acuerdo con los parámetros geométricos del robot, encontrando las raíces del polinomio (4.28) se obtienen las soluciones para Y_1 , para encontrar X_1 y X_2 se sustituyen las soluciones de Y_1 en las ecuaciones (4.17) y (4.23), y se obtienen dos soluciones por cada solución de Y_1 , para los valores de Z_1 y Z_2 se sustituyen las soluciones de X_1 , Y_1 y X_2 en las ecuaciones lineales (4.11) y (4.12).

Sustituyendo los parámetros del robot mostrados en la Tabla 4.1 con $q_1 = -67.0407\text{mm}$ y $q_2 = -67.0407\text{mm}$ se tienen las soluciones mostradas en la Tabla 4.2, de las cuales se descartan las soluciones complejas y se seleccionan las reales, en la Tabla 4.3 se muestran las soluciones reales tomadas de la Tabla 4.2 y en la Figura 4.3 se muestra la interpretación física a cada una de estas soluciones, de las cuales la solución 1 es de interés. Para validar las ecuaciones se realiza una simulación en el software MSC Adams, los resultados se muestran en la Figura 4.2, donde $q_1 = 50 \sin(t)$ y $q_2 = 30 \sin(t)$.

Tabla 4.1: Parámetros del robot

Parámetro	Valor (mm)
b	85
c	135
d_1	207.5
d_2	207.5
e_{12}	100
e_{13}	100
e_{23}	100

Tabla 4.2: Soluciones de análisis de desplazamiento, modo 1.

Sol.	X_1	X_2	Y_1	Z_1	Z_2
1	-64.2096+31.7733i	64.2096+31.7733i	77.1027	-50.6431-40.2850i	-50.6431+40.2850i
2	-64.2096+31.7733i	64.2096+31.7733i	77.1027	-50.6431-40.2850i	-50.6431+40.2850i
3	-50.0000	50.0000	68.9978	-52.3384	-52.3384
4	50.0000	-50.0000	21.6808	-83.8448	-83.8448
5	-50.0000	50.0000	0.0000	86.6025	86.6025
6	50.0000	-50.0000	-53.6978	67.9452	67.9452
7	86.7791+55.9410i	-86.7791+55.9410i	-77.1027	68.4440-70.9269i	68.4440+70.9269i
8	86.7791+55.9410i	-86.7791+55.9410i	-77.1027	68.4440-70.9269i	68.4440+70.9269i

Tabla 4.3: Soluciones reales de análisis de desplazamiento, modo 1.

Sol.	B_1	B_2	ψ_x°	ψ_y°	ψ_z°
1	(-50, 0, 86.6025)	(50, 0, 86.6025)	0	0	0
2	(50, -53.6978, 67.9452)	(-50, -53.6978, 67.9452)	141.6802	180	0
3	(-50, 68.9978, -52.3384)	(50, 68.9978, -52.3384)	232.8178	0	0
4	(50, 21.6808, -83.8448)	(-50, 21.6808, -83.8448)	-14.4981	180	0

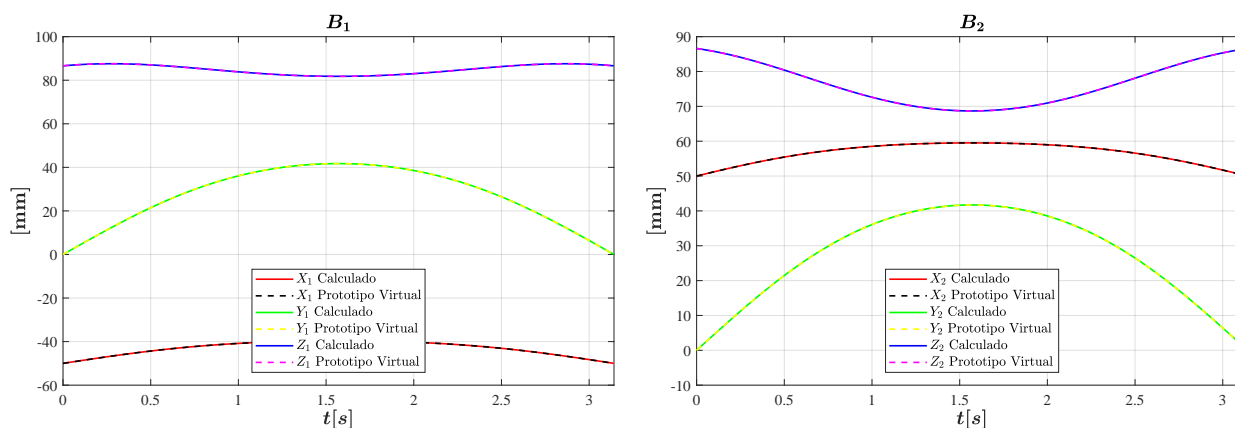


Figura 4.2: Desplazamiento de B_i , para modo 1.

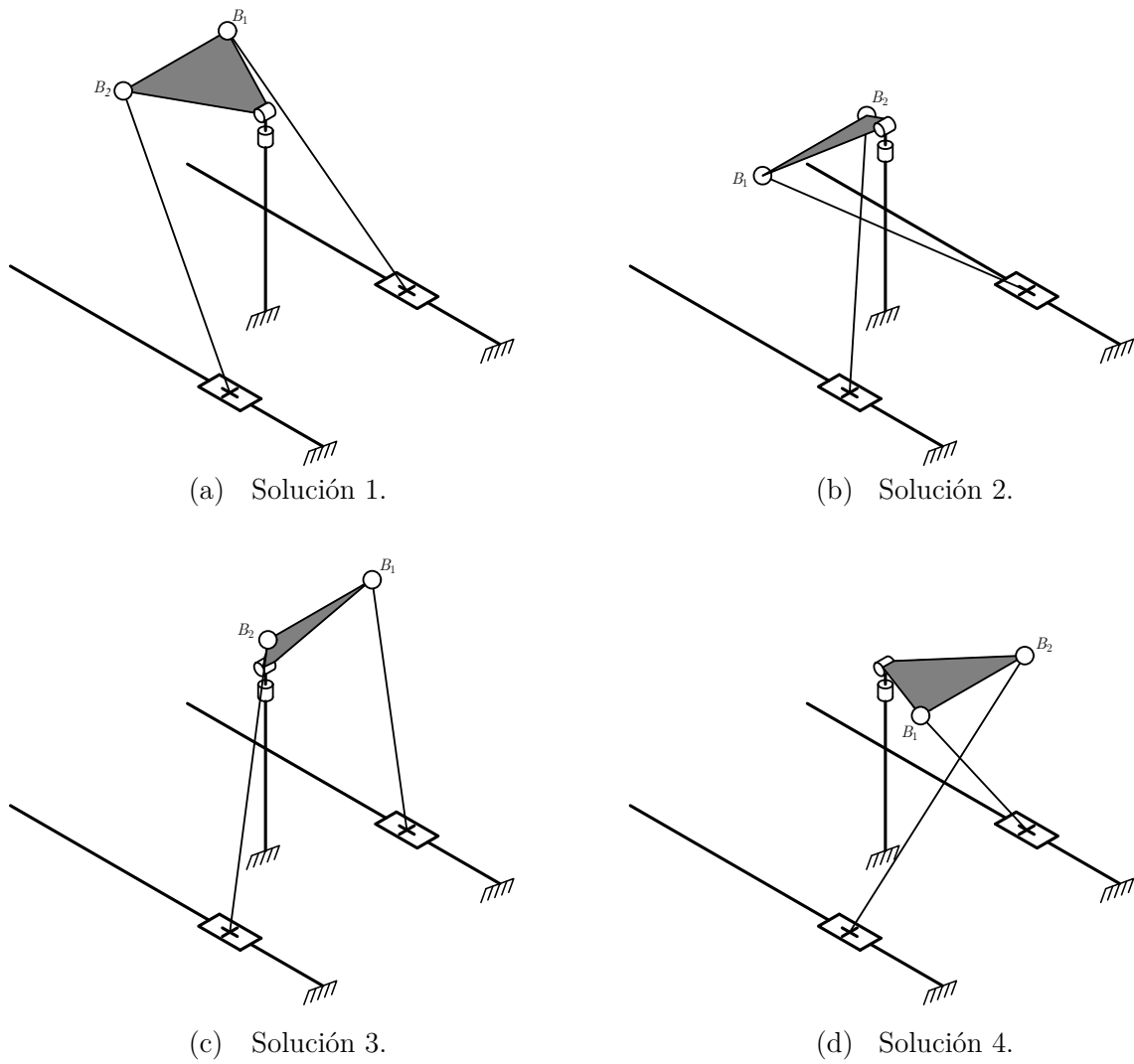


Figura 4.3: Soluciones obtenidas de análisis directo de desplazamiento para modo 1.

Modo 2. Desarrollando las ecuaciones dadas en (4.1) y (4.2), con $Y_2 = -Y_1$, se tiene

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + 2bX_1 + 2cY_1 - 2q_1Z_1 + b^2 + c^2 + q_1^2 = d_1^2 \quad (4.29)$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 - 2bX_2 - 2cY_1 - 2q_2Z_2 + b^2 + c^2 + q_2^2 = d_2^2 \quad (4.30)$$

$$X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + 4Y_1^2 + Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + Z_2^2 = e_{12}^2 \quad (4.31)$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = e_{13}^2 \quad (4.32)$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 = e_{23}^2 \quad (4.33)$$

Para encontrar una solución en forma semi-cerrada a este sistema de ecuaciones polinomiales, se sigue el mismo procedimiento que se mostró para el Modo 1. Sustituyendo los parámetros del robot mostrados en la Tabla 4.1 con $q_1 = -67.0407\text{mm}$ y $q_2 = -67.0407\text{mm}$ se tienen las soluciones mostradas en la Tabla 4.4, de las cuales se descartan las soluciones complejas y se seleccionan las reales, en la Tabla 4.5 se muestran las soluciones reales tomadas de la Tabla 4.4 y en la Figura 4.4 se muestra la interpretación física a cada una de estas soluciones, de las cuales solo la solución 3 es de interés.

Tabla 4.4: Soluciones de análisis de desplazamiento, modo 2.

Sol.	X_1	X_2	Y_1	Z_1	Z_2
1	-82.2972	-85.7189	49.5016	27.8703	14.2078
2	-79.2025	-91.1588	37.4519	48.2112	-16.9539
3	101.4898-60.1979i	-101.4899-60.1979i	0.0000+66.6686i	-105.4693-57.9265i	-105.4694+57.9266i
4	101.4898+60.1979i	-101.4899+60.1979i	0.0000-66.6686i	-105.4693+57.9265i	-105.4694-57.9266i
5	-50.0000-1.5857e-07i	50.0000-1.5857e-07i	0.0000+1.4531e-07i	86.6025-9.1552e-08i	86.6025+9.1552e-08i
6	-50.0000+1.5857e-07i	50.0000+1.5857e-07i	0.0000-1.4531e-07i	86.6025+9.1552e-08i	86.6025-9.1552e-08i
7	91.1588	79.2025	-37.4519	-16.9539	48.2112
8	85.7189	82.2972	-49.5016	14.2078	27.8703

Tabla 4.5: Soluciones reales de análisis de desplazamiento, modo 2.

Sol.	B_1	B_2	ψ_x°	ψ_y°	ψ_z°
1	(-82.2972, 49.5016, 27.8703)	(-85.7189, -49.5016, 14.2078)	0	-75.9400	-98.0967
2	(-79.2025, 37.4519, 48.2112)	(-91.1588, -37.4519, -16.9539)	0	-79.6032	-131.4929
3	(-50, 0, 86.6025)	(50, 0, 86.6025)	0	0	0
4	(-50, 0, 86.6025)	(50, 0, 86.6025)	0	0	0
5	(91.1588, -37.4519, -16.9539)	(79.2025, 37.4519, 48.2112)	0	79.6032	131.4929
6	(85.7189, -49.5016, 14.2078)	(82.2972, 49.5016, 27.8703)	0	75.9400	98.0967

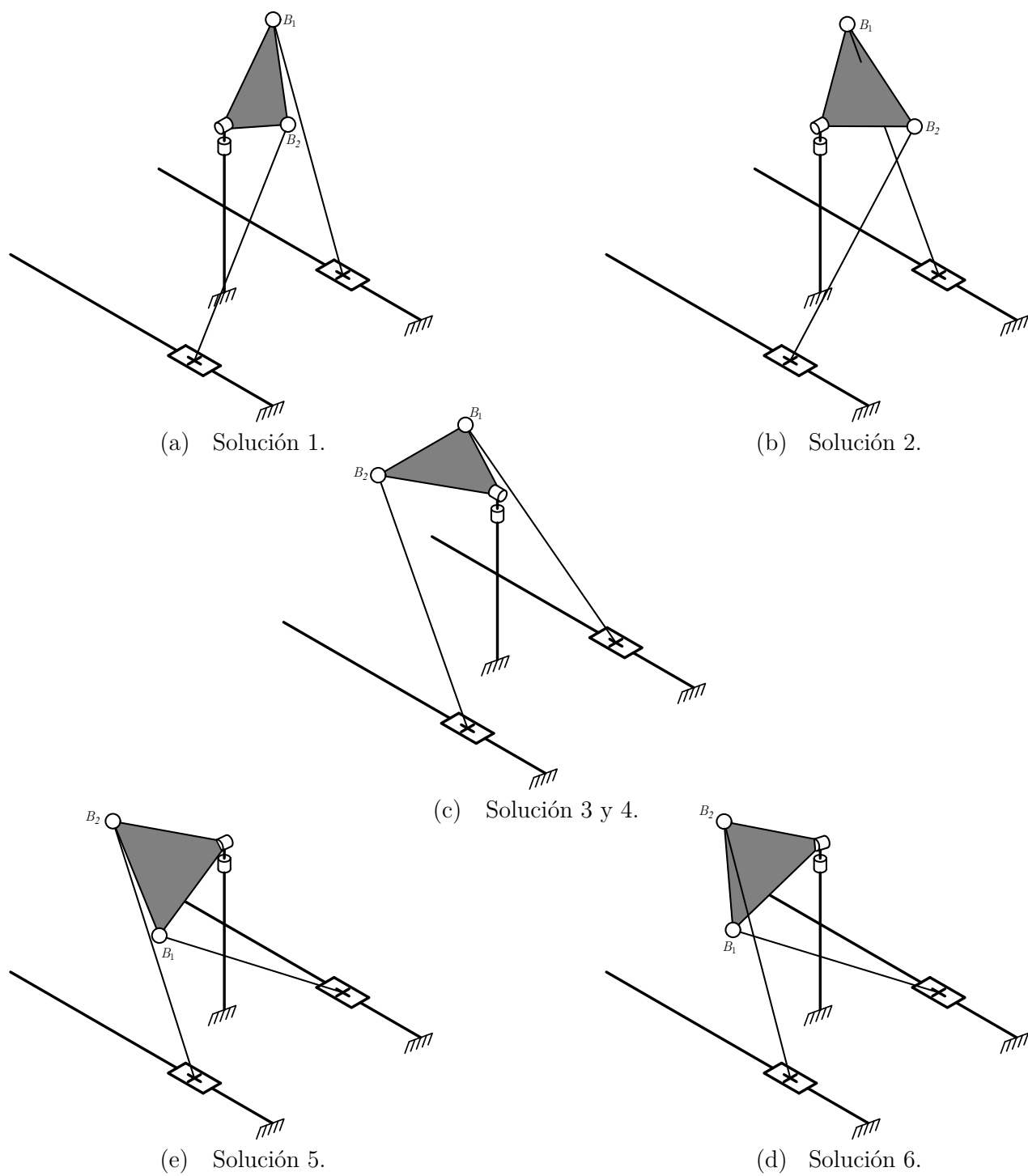


Figura 4.4: Soluciones obtenidas de análisis directo de desplazamiento para modo 2.

4.2.2. Análisis de Velocidad

El análisis de velocidad del robot se resuelve mediante la teoría de tornillos. Para una explicación detallada de esta metodología consultar [32]. Los tornillos se modelan como se muestra en la Figura 4.5 y se refieren al marco O_{XYZ} . Se entiende que el tornillo ${}^a\mathcal{S}_i^b$ modela el movimiento del cuerpo b con respecto a un cuerpo a , ambos pertenecientes a la i -ésima cadena. La unión universal se descompone en dos uniones de revoluta, $\{{}^1\mathcal{S}_i^2, {}^2\mathcal{S}_i^3\}$, cuyos ejes son perpendiculares entre sí, por otro lado, la unión esférica se descompone en tres uniones de revoluta, $\{{}^3\mathcal{S}_i^4, {}^4\mathcal{S}_i^5, {}^5\mathcal{S}_i^6\}$, cuyos ejes son perpendiculares entre sí. La dirección del tornillo ${}^2\mathcal{S}_i^3$ es paralelo a ${}^4\mathcal{S}_i^5$ y el tornillo ${}^3\mathcal{S}_i^4$ es colineal con el vector $(\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i)$, $\forall i = 1, 2$.

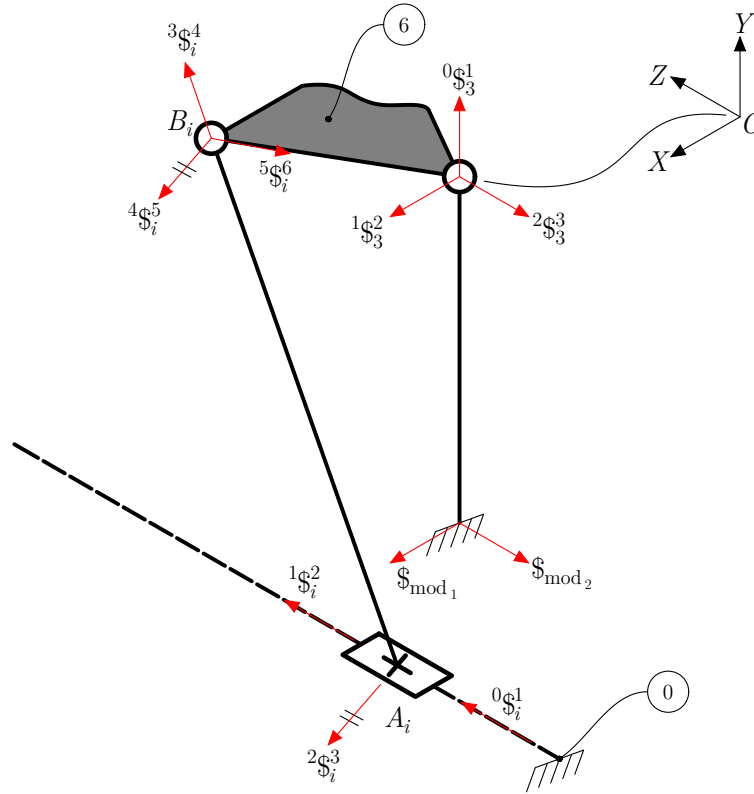


Figura 4.5: Tornillos de las articulaciones.

Los tornillos asociados a todas las uniones son calculados como sigue

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathcal{S}_i^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix}; & {}^1\mathcal{S}_i^2 &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \\ -\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_i \end{bmatrix}; & {}^2\mathcal{S}_i^3 &= \begin{bmatrix} {}^2\hat{\mathbf{s}}_i^3 \\ -{}^2\hat{\mathbf{s}}_i^3 \times \mathbf{A}_i \end{bmatrix}; \\
 {}^3\mathcal{S}_i^4 &= \begin{bmatrix} {}^3\hat{\mathbf{s}}_i^4 \\ -{}^3\hat{\mathbf{s}}_i^4 \times \mathbf{B}_i \end{bmatrix}; & {}^4\mathcal{S}_i^5 &= \begin{bmatrix} {}^2\hat{\mathbf{s}}_i^3 \\ -{}^2\hat{\mathbf{s}}_i^3 \times \mathbf{B}_i \end{bmatrix}; & {}^5\mathcal{S}_i^6 &= \begin{bmatrix} {}^5\hat{\mathbf{s}}_i^6 \\ -{}^5\hat{\mathbf{s}}_i^6 \times \mathbf{B}_i \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$${}^0\mathbb{S}_3^1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad {}^1\mathbb{S}_3^2 = \begin{bmatrix} {}^1\hat{\mathbf{s}}_3^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad {}^2\mathbb{S}_3^3 = \begin{bmatrix} {}^2\hat{\mathbf{s}}_3^3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{S}_{\text{mod}_1} = \begin{bmatrix} {}^1\hat{\mathbf{s}}_3^2 \\ {}^1\hat{\mathbf{s}}_3^2 \times c\hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix}; \quad \mathbb{S}_{\text{mod}_2} = \begin{bmatrix} {}^2\hat{\mathbf{s}}_3^3 \\ {}^2\hat{\mathbf{s}}_3^3 \times c\hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix};$$

donde

$${}^3\hat{\mathbf{s}}_i^4 = \frac{\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i}{d_i}; \quad {}^2\hat{\mathbf{s}}_i^3 = \frac{{}^3\hat{\mathbf{s}}_i^4 \times \hat{\mathbf{k}}}{\|{}^3\hat{\mathbf{s}}_i^4 \times \hat{\mathbf{k}}\|}; \quad {}^5\hat{\mathbf{s}}_i^6 = \frac{{}^3\hat{\mathbf{s}}_i^4 \times {}^2\hat{\mathbf{s}}_i^3}{\|{}^3\hat{\mathbf{s}}_i^4 \times {}^2\hat{\mathbf{s}}_i^3\|};$$

$${}^1\hat{\mathbf{s}}_3^2 = \frac{\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1}{e_{12}}; \quad {}^2\hat{\mathbf{s}}_3^3 = \frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{\|\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\|};$$

El estado de velocidad de la base móvil con respecto al marco de referencia fijo, \mathbf{V}_O , puede expresarse como un tornillo [32] a través de cualquier cadena cinemática del robot como sigue

$$\mathbf{V}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_O \end{bmatrix} = {}_0\omega_1^k {}^0\mathbb{S}_k^1 + {}_1\omega_2^k {}^1\mathbb{S}_k^2 + \dots + {}_5\omega_6^k {}^5\mathbb{S}_k^6 \quad (4.34)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es el vector de velocidad angular de la base móvil como se observa desde la base fija. Además, \mathbf{v}_O es el vector de velocidad lineal de la base móvil. La expresión (4.34) puede expresarse como sigue

$$\mathbf{V}_O = \mathbf{J}_k \boldsymbol{\Omega}_k \quad (4.35)$$

donde

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} {}^0\mathbb{S}_k^1 & {}^1\mathbb{S}_k^2 & {}^2\mathbb{S}_k^3 & {}^3\mathbb{S}_k^4 & {}^4\mathbb{S}_k^5 & {}^5\mathbb{S}_k^6 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_k = \begin{bmatrix} {}_0\omega_1^k & {}_1\omega_2^k & {}_2\omega_3^k & {}_3\omega_4^k & {}_4\omega_5^k & {}_5\omega_6^k \end{bmatrix}^T \quad (4.37)$$

y ${}_a\omega_b^k$ representa la magnitud de la velocidad lineal y angular de un cuerpo b con respecto a un cuerpo a , ambos pertenecientes a la k -ésima cadena, $\forall k = 1, 2, 3$. Además, la magnitud de velocidad ${}_0\omega_1^i$ está relacionada con el i -ésimo par prismático, es decir, ${}_0\omega_1^i = \dot{q}_i$.

Con referencia a la Figura 4.5, se puede demostrar que el tornillo ${}^3\mathbb{S}_i^4$ es recíproco a todos los tornillos asociados con articulaciones giratorias en la cadena i , excepto a ${}^0\mathbb{S}_i^1$ y el tornillo \mathbb{S}_{mod} es recíproco a todos los tornillos de la cadena 3. Luego, aplicando la forma de Klein en

ambos lados de la ecuación (4.34), se tiene:

$$\{\mathbf{V}_O \quad {}^3\mathcal{S}_1^4\} = \dot{q}_1 \{{}^0\mathcal{S}_1^1 \quad {}^3\mathcal{S}_1^4\} \quad (4.38)$$

$$\{\mathbf{V}_O \quad {}^3\mathcal{S}_2^4\} = \dot{q}_2 \{{}^0\mathcal{S}_2^1 \quad {}^3\mathcal{S}_2^4\} \quad (4.39)$$

$$\{\mathbf{V}_O \quad \mathcal{S}_{\text{mod}}\} = 0 \quad (4.40)$$

donde $\{* \quad *\}$ denota la forma de Klein.

Para completar las ecuaciones necesarias para resolver el análisis de la velocidad, se considera que, de acuerdo con la movilidad limitada del manipulador paralelo, se pueden escribir tres expresiones como sigue [33]

$$\{\mathbf{V}_O \quad \mathcal{S}_1^r\} = 0 \quad (4.41)$$

$$\{\mathbf{V}_O \quad \mathcal{S}_2^r\} = 0 \quad (4.42)$$

$$\{\mathbf{V}_O \quad \mathcal{S}_3^r\} = 0 \quad (4.43)$$

donde

$$\mathcal{S}_1^r = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_2^r = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_3^r = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

mientras que $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son vectores unitarios en dirección de los ejes X , Y y Z , respectivamente, del sistema de referencia fijo y $\mathbf{0}$ es el vector cero.

Pasando a forma matricial el sistema de ecuaciones conformado por las expresiones (4.38)-(4.43), la ecuación de entrada-salida de velocidad resulta en

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_O = \mathbf{B}\dot{\mathbf{Q}} \quad (4.44)$$

la matriz \mathbf{A} está dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^T \Delta$$

donde $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^3\mathcal{S}_1^4 & {}^3\mathcal{S}_2^4 & \mathcal{S}_{\text{mod}} & \mathcal{S}_1^r & \mathcal{S}_2^r & \mathcal{S}_3^r \end{bmatrix}$ es la matriz Jacobiano global del robot, mientras que Δ es un operador de polaridad de 6×6 , el cual está definido como

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de 3×3 y $\mathbf{0}$ es un matriz de ceros de 3×3 .

Por otro lado \mathbf{B} es una matriz diagonal que está dada por

$$\mathbf{B} = \text{diag} \left[\left\{ {}^0\mathcal{S}_1^1 \quad {}^3\mathcal{S}_1^4 \right\} \quad \left\{ {}^0\mathcal{S}_2^1 \quad {}^3\mathcal{S}_2^4 \right\} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right]$$

finalmente $\dot{\mathbf{Q}}$ se denomina matriz de control de primer orden del robot, la cual está dada por

$$\dot{\mathbf{Q}} = \left[\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

4.2.3. Análisis de Aceleración

El estado reducido de aceleración de la base móvil con respecto al marco de referencia fijo, \mathbf{A}_O , puede expresarse como un tornillo [34] a través de cualquier cadena cinemática del robot como sigue

$$\mathbf{A}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{a}_O - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O \end{bmatrix} = {}_0\alpha_1^{k0}\mathcal{S}_k^1 + {}_1\alpha_2^{k1}\mathcal{S}_k^2 + \dots + {}_5\alpha_6^{k5}\mathcal{S}_k^6 + \mathcal{S}_{L_k} \quad (4.45)$$

donde ${}_n\alpha_{n+1}^k = \frac{d}{dt}({}_n\omega_{n+1}^k)$ denota la magnitud de aceleración entre dos cuerpos adyacentes denotados como n y $n+1$ pertenecientes a la k -ésima cadena cinemática, $\forall k = 1, 2, 3$. Además, \mathcal{S}_{L_k} es el tornillo de Lie de aceleración, el cual está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{L_i} = & \begin{bmatrix} {}_0\omega_1^{i0}\mathcal{S}_i^1 & {}_1\omega_2^{i1}\mathcal{S}_i^2 + {}_2\omega_3^{i2}\mathcal{S}_i^3 + \dots + {}_5\omega_6^{i5}\mathcal{S}_i^6 \\ + \begin{bmatrix} {}_1\omega_2^{i1}\mathcal{S}_i^2 & {}_2\omega_3^{i2}\mathcal{S}_i^3 + {}_3\omega_4^{i3}\mathcal{S}_i^4 + \dots + {}_5\omega_6^{i5}\mathcal{S}_i^6 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} {}_2\omega_3^{i2}\mathcal{S}_i^3 & {}_3\omega_4^{i3}\mathcal{S}_i^4 + {}_4\omega_5^{i4}\mathcal{S}_i^5 + {}_5\omega_6^{i5}\mathcal{S}_i^6 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} {}_3\omega_4^{i3}\mathcal{S}_i^4 & {}_4\omega_5^{i4}\mathcal{S}_i^5 + {}_5\omega_6^{i5}\mathcal{S}_i^6 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} {}_4\omega_5^{i4}\mathcal{S}_i^5 & {}_5\omega_6^{i5}\mathcal{S}_i^6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{L_3} = & \begin{bmatrix} {}_0\omega_1^{30}\mathcal{S}_3^1 & {}_1\omega_2^{31}\mathcal{S}_3^2 + {}_2\omega_3^3\mathcal{S}_{\text{mod}} \\ + \begin{bmatrix} {}_1\omega_2^{31}\mathcal{S}_3^2 & {}_2\omega_3^3\mathcal{S}_{\text{mod}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $[* \ *]$ denota el producto de Lie. Las velocidades pasivas ${}_n\omega_{n+1}^k$ de cada cadena cinemática se calculan como sigue

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \mathbf{J}_i^{-1}\mathbf{V}_O \quad (4.46)$$

Aplicando sistemáticamente la forma de Klein en ambos lados de la ecuación (4.45) y

pasando a forma matricial, la ecuación de entrada-salida de aceleración resulta en

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_O = \mathbf{B}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}_a \quad (4.47)$$

donde $\ddot{\mathbf{Q}}$ se denomina matriz de control de segundo orden del robot, la cual está dada por

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

y finalmente \mathbf{C}_a es la matriz complementaria de aceleración, la cual está dada por

$$\mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \{L_1 \quad {}^3S_1^4\} & \{L_2 \quad {}^3S_2^4\} & \{L_3 \quad S_{\text{mod}}\} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

4.3. Cinemática Inversa

4.3.1. Análisis Inverso de Desplazamiento

El problema de cinemática inversa consiste en encontrar el desplazamiento de las variables q_i , dadas las coordenadas \mathbf{B}_i de la base móvil. Desarrollando las ecuaciones dadas en (4.1) y despejando q_1 y q_2 se tiene

$$q_1 = Z_1 \pm \sqrt{-X_1^2 - 2bX_1 - Y_1^2 - 2cY_1 - b^2 - c^2 + d_1^2} \quad (4.48)$$

$$q_2 = Z_2 \pm \sqrt{-X_2^2 + 2bX_2 - Y_2^2 - 2cY_2 - b^2 - c^2 + d_2^2} \quad (4.49)$$

donde

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{B}_i \quad (4.50)$$

\mathbf{R} es la matriz de rotación sobre sistema de coordenadas global (Figura 4.6) conformada por las matrices de rotación \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y y \mathbf{R}_z .

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_y\mathbf{R}_z\mathbf{R}_x \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_x) & -\sin(\psi_x) \\ 0 & \sin(\psi_x) & \cos(\psi_x) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}_y &= \begin{bmatrix} \cos(\psi_y) & 0 & \sin(\psi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi_y) & 0 & \cos(\psi_y) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}_z &= \begin{bmatrix} \cos(\psi_z) & -\sin(\psi_z) & 0 \\ \sin(\psi_z) & \cos(\psi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

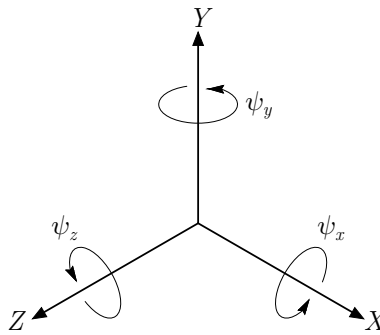


Figura 4.6: Ángulos de rotación sobre sistema de coordenadas global.

4.3.2. Análisis Inverso de Velocidad

Conociendo la velocidad de la base móvil es posible calcular la velocidad de los actuadores despejando $\dot{\mathbf{Q}}$ de la ecuación (4.44) como se muestra a continuación

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}_O \tag{4.53}$$

Otra manera de obtener la velocidad de los actuadores es derivando con respecto al tiempo las ecuaciones (4.48) y (4.49) como se muestra a continuación

$$\dot{q}_1 = \dot{Z}_1 + \frac{X_1 \dot{X}_1 + b \dot{X}_1 + Y_1 \dot{Y}_1 + c \dot{Y}_1}{\sqrt{-X_1^2 - 2bX_1 - Y_1^2 - 2cY_1 - b^2 - c^2 + d_1^2}} \tag{4.54}$$

$$\dot{q}_2 = \dot{Z}_2 + \frac{X_2 \dot{X}_2 - b \dot{X}_2 + Y_2 \dot{Y}_2 + c \dot{Y}_2}{\sqrt{-X_2^2 + 2bX_2 - Y_2^2 - 2cY_2 - b^2 - c^2 + d_2^2}} \tag{4.55}$$

donde

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_i \\ \dot{Y}_i \\ \dot{Z}_i \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{B}_i \quad (4.56)$$

derivando con respecto al tiempo la matriz de rotación \mathbf{R} , se obtiene lo siguiente

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_z \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y \dot{\mathbf{R}}_z \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z \dot{\mathbf{R}}_x \quad (4.57)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_x &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\psi}_x \sin(\psi_x) & -\dot{\psi}_x \cos(\psi_x) \\ 0 & \dot{\psi}_x \cos(\psi_x) & -\dot{\psi}_x \sin(\psi_x) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{R}}_y &= \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_y \sin(\psi_y) & 0 & \dot{\psi}_y \cos(\psi_y) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\psi}_y \cos(\psi_y) & 0 & -\dot{\psi}_y \sin(\psi_y) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{R}}_z &= \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_z \sin(\psi_z) & -\dot{\psi}_z \cos(\psi_z) & 0 \\ \dot{\psi}_z \cos(\psi_z) & -\dot{\psi}_z \sin(\psi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.58)$$

4.3.3. Análisis Inverso de Aceleración

Conociendo la aceleración de la base móvil es posible calcular la aceleración de los actuadores despejando $\ddot{\mathbf{Q}}$ de la ecuación (4.47) como se muestra a continuación

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{A}_O - \mathbf{C}_a) \quad (4.59)$$

Otra manera de obtener la aceleración de los actuadores es derivando con respecto al tiempo las ecuaciones (4.54) y (4.55) como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \ddot{Z}_1 + \frac{\left(X_1 \ddot{X}_1 + \dot{X}_1^2 + b \ddot{X}_1 + Y_1 \ddot{Y}_1 + \dot{Y}_1^2 + c \ddot{Y}_1 \right)}{\sqrt{-X_1^2 - 2bX_1 - Y_1^2 - 2cY_1 - b^2 - c^2 + d^2}} \\ &+ \frac{\left(X_1 \dot{X}_1 + b \dot{X}_1 + Y_1 \dot{Y}_1 + c \dot{Y}_1 \right)^2}{\sqrt{\left(-X_1^2 - 2bX_1 - Y_1^2 - 2cY_1 - b^2 - c^2 + d^2 \right)^3}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\ddot{q}_2 = \ddot{Z}_2 + \frac{\left(X_2 \ddot{X}_2 + \dot{X}_2^2 - b \ddot{X}_2 + Y_2 \ddot{Y}_2 + \dot{Y}_2^2 + c \ddot{Y}_2 \right)}{\sqrt{-X_2^2 + 2bX_2 - Y_2^2 - 2cY_2 - b^2 - c^2 + d^2}} + \frac{\left(X_2 \dot{X}_2 - b \dot{X}_2 + Y_2 \dot{Y}_2 + c \dot{Y}_2 \right)^2}{\sqrt{\left(-X_2^2 + 2bX_2 - Y_2^2 - 2cY_2 - b^2 - c^2 + d^2 \right)^3}} \quad (4.61)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_i \\ \ddot{Y}_i \\ \ddot{Z}_i \end{bmatrix} = \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{B}_i \quad (4.62)$$

derivando con respecto al tiempo la matriz de rotación \mathbf{R} , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} = & \ddot{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_z \mathbf{R}_x + \dot{\mathbf{R}}_y \dot{\mathbf{R}}_z \mathbf{R}_x + \dot{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_z \dot{\mathbf{R}}_x + \dot{\mathbf{R}}_y \dot{\mathbf{R}}_z \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y \ddot{\mathbf{R}}_z \mathbf{R}_x + \\ & \mathbf{R}_y \dot{\mathbf{R}}_z \dot{\mathbf{R}}_x + \dot{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_z \dot{\mathbf{R}}_x + \mathbf{R}_y \dot{\mathbf{R}}_z \dot{\mathbf{R}}_x + \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z \ddot{\mathbf{R}}_x \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_x = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\psi}_x^2 \cos(\psi_x) - \ddot{\psi}_x \sin(\psi_x) & \dot{\psi}_x^2 \sin(\psi_x) - \ddot{\psi}_x \cos(\psi_x) \\ 0 & \dot{\psi}_x \cos(\psi_x) - \dot{\psi}_x^2 \sin(\psi_x) & -\dot{\psi}_x^2 \cos(\psi_x) - \ddot{\psi}_x \sin(\psi_x) \end{bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{R}}_y = & \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_y^2 \cos(\psi_y) - \ddot{\psi}_y \sin(\psi_y) & 0 & \dot{\psi}_y \cos(\psi_y) - \dot{\psi}_y^2 \sin(\psi_y) \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\psi}_y^2 \sin(\psi_y) - \ddot{\psi}_y \cos(\psi_y) & 0 & -\dot{\psi}_y^2 \cos(\psi_y) - \ddot{\psi}_y \sin(\psi_y) \end{bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{R}}_z = & \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_z^2 \cos(\psi_z) - \ddot{\psi}_z \sin(\psi_z) & \dot{\psi}_z^2 \sin(\psi_z) - \ddot{\psi}_z \cos(\psi_z) & 0 \\ \dot{\psi}_z \cos(\psi_z) - \dot{\psi}_z^2 \sin(\psi_z) & -\dot{\psi}_z^2 \cos(\psi_z) - \ddot{\psi}_z \sin(\psi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.64)$$

4.4. Transformación de Velocidades y Aceleraciones Angulares

La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es un vector que expresa la velocidad de cambio de orientación de un sistema de referencia con respecto a otro [45]. Por consiguiente existe una relación entre la derivada de los ángulos de la matriz de rotación $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, la cual esta

dada como sigue

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_y \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_y \begin{bmatrix} \dot{\psi}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_z \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

acomodando términos se tiene

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{T}^\omega \dot{\psi} \quad (4.66)$$

donde

$$\dot{\psi} \mathbf{T}^\omega = \begin{bmatrix} \cos(\psi_y) & 0 & \cos(\psi_x) \sin(\psi_y) \\ 0 & 1 & -\sin(\psi_x) \\ -\sin(\psi_y) & 0 & \cos(\psi_x) \cos(\psi_y) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\psi} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_x & \dot{\psi}_y & \dot{\psi}_z \end{bmatrix}^T$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.66) se obtiene la relación entre la segunda derivada de los ángulos de la matriz de rotación $\ddot{\psi}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\psi} \mathbf{T}^\alpha \dot{\psi} + \dot{\psi} \mathbf{T}^\omega \ddot{\psi} \quad (4.67)$$

donde

$$\ddot{\psi} \mathbf{T}^\alpha = \dot{\psi} \dot{\mathbf{T}}^\omega = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_y \sin(\psi_y) & 0 & \dot{\psi}_y \cos(\psi_x) \cos(\psi_y) - \dot{\psi}_x \sin(\psi_x) \sin(\psi_y) \\ 0 & 0 & -\dot{\psi}_x \cos(\psi_x) \\ -\dot{\psi}_y \cos(\psi_y) & 0 & -\dot{\psi}_x \cos(\psi_y) \sin(\psi_x) - \dot{\psi}_y \cos(\psi_x) \sin(\psi_y) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\psi} = \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_x & \ddot{\psi}_y & \ddot{\psi}_z \end{bmatrix}^T$$

Por otro lado se puede calcular la relación inversa entre la derivada de los ángulos de la matriz de rotación $\dot{\psi}$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, la cual se calcula como

$$\dot{\psi} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{T}^\psi \quad (4.68)$$

donde

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{T}^\psi = \left(\dot{\psi} \mathbf{T}^\omega \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_y) & 0 & -\sin(\psi_y) \\ \tan(\psi_x) \sin(\psi_y) & 1 & \tan(\psi_x) \cos(\psi_y) \\ \sin(\psi_y) \sec(\psi_x) & 0 & \cos(\psi_y) \sec(\psi_x) \end{bmatrix}$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.68) se obtiene la relación inversa entre

la segunda derivada de los ángulos de la matriz de rotación $\ddot{\psi}$ y la aceleración angular α , la cual está dada por

$$\ddot{\psi} = {}^{\alpha}\mathbf{T}^{\psi}\dot{\omega} + {}^{\omega}\mathbf{T}^{\psi}\alpha \quad (4.69)$$

donde

$${}^{\alpha}\mathbf{T}^{\psi} = {}^{\omega}\dot{\mathbf{T}}^{\psi} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_y \sin(\psi_y) & 0 \\ \left(\dot{\psi}_x \sin(\psi_y) + \dot{\psi}_y \cos(\psi_x) \cos(\psi_y) \sin(\psi_x) \right) \sec^2(\psi_x) & 0 \\ \left(\dot{\psi}_y \cos(\psi_x) \cos(\psi_y) + \dot{\psi}_x \sin(\psi_x) \sin(\psi_y) \right) \sec^2(\psi_x) & 0 \\ -\dot{\psi}_y \cos(\psi_y) & \\ \left(\dot{\psi}_x \cos(\psi_y) - \dot{\psi}_y \cos(\psi_x) \sin(\psi_x) \sin(\psi_y) \right) \sec^2(\psi_x) & \\ \left(\dot{\psi}_x \cos(\psi_y) \sin(\psi_x) - \dot{\psi}_y \cos(\psi_x) \sin(\psi_y) \right) \sec^2(\psi_x) & \end{bmatrix}$$

4.5. Análisis de Singularidades

Para robots paralelos, las singularidades son configuraciones donde la base móvil gana o pierde grados de libertad. Algunos autores analizan estas configuraciones basándose en las ecuaciones del análisis de velocidad [12, 38, 60]. Para este estudio se analiza la ecuación (4.44) que relaciona las velocidades angulares de la base móvil con las velocidades lineales de los actuadores

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_O = \mathbf{B}\dot{\mathbf{Q}} \quad (4.44 \text{ Rep.})$$

donde

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccccccc} {}^3\mathcal{S}_1^4 & {}^3\mathcal{S}_2^4 & \mathcal{S}_{\text{mod}} & \mathcal{S}_1^r & \mathcal{S}_2^r & \mathcal{S}_3^r & \Delta \end{array} \right]^T$$

$$\mathbf{B} = \text{diag} \left[\begin{array}{cccccccc} \{ {}^0\mathcal{S}_1^1 & {}^3\mathcal{S}_1^4 \} & \{ {}^0\mathcal{S}_2^1 & {}^3\mathcal{S}_2^4 \} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Estas singularidades se pueden clasificar en tres tipos, con una interpretación física cada una [60].

Singularidad tipo 1: habrá un vector de velocidad $\dot{\mathbf{Q}}$ distinto de cero para el cual la plataforma no se mueve. Esto ocurre cuando $\det(\mathbf{B}) = 0$.

Analizando la matriz \mathbf{B} del robot bajo estudio, se observa que existe una singularidad cuando el producto de Klein entre los tornillos $\{ {}^0\mathcal{S}_i^1 \quad {}^3\mathcal{S}_i^4 \} = 0$, esto ocurre cuando la dirección de ambos tornillos es perpendicular. Esta situación puede ser evitada con una correcta selección de los parámetros geométricos del robot ($b, c, d_1, d_2, e_{12}, e_{13}$ y e_{23}).

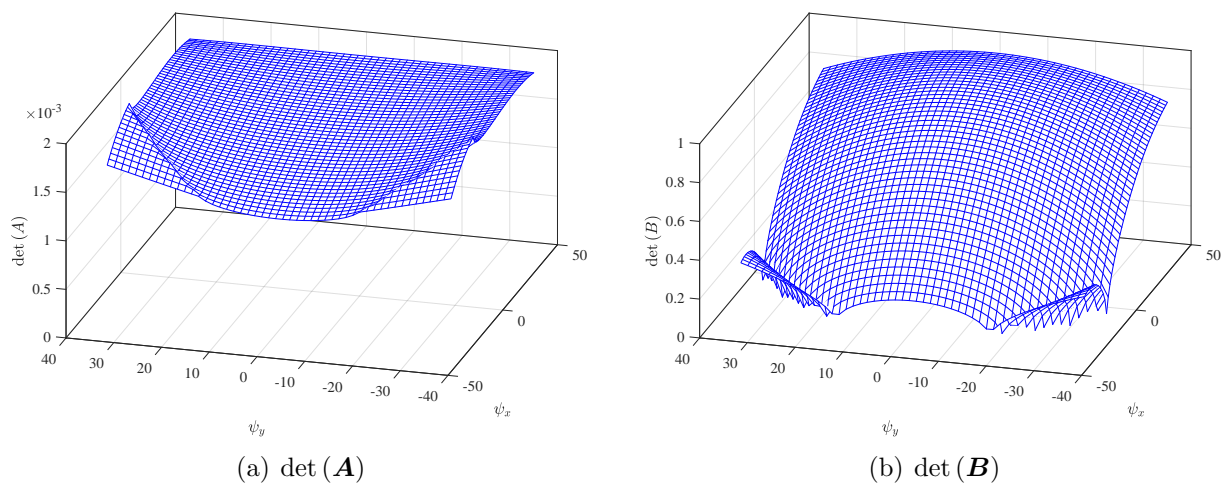
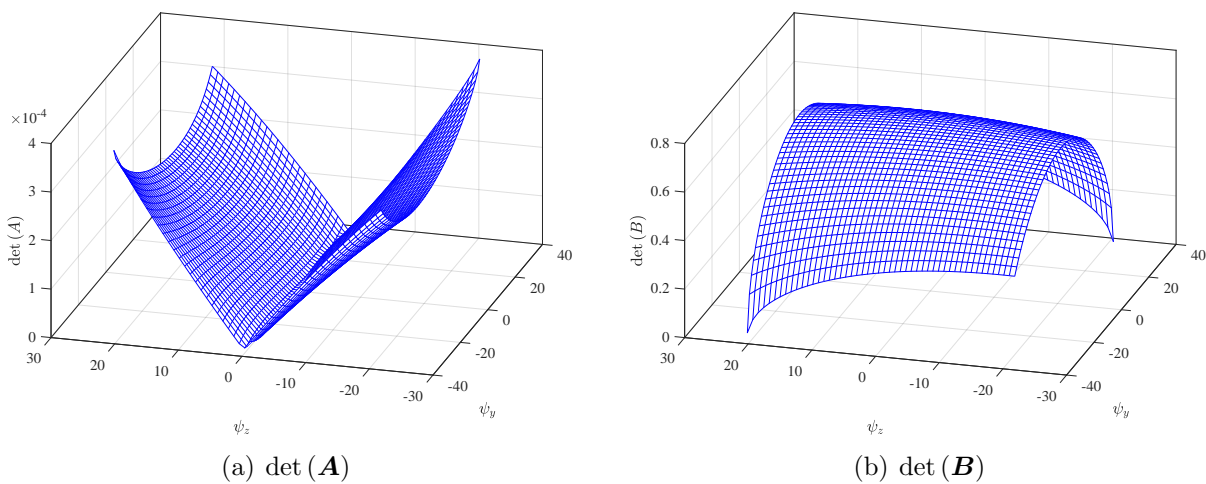
Singularidad tipo 2: habrá un vector de velocidad \mathbf{V}_O distinto de cero para el cual las velocidades de los actuadores es cero, es decir, el robot podrá tener un movimiento infinitesimal mientras los actuadores están bloqueados. Como consecuencia, ciertos grados de libertad de la base móvil no se pueden controlar, y este es un problema importante. Esta ocurre cuando $\det(\mathbf{A}) = 0$. Esta condición implica que al menos dos tornillos que conforman la matriz \mathbf{A} tengan una dependencia lineal. Para el caso del robot paralelo en estudio, no se tiene la solución en forma cerrada del análisis de desplazamiento, por lo tanto, se analiza de forma geométrica la dependencia lineal de los tornillos. Una posibilidad de que esto ocurra es cuando la dirección de los tornillos se intersectan en un punto en común, otra posibilidad es que los seis tornillos son paralelos. Analizando la Figura 4.5, se observa que, dados los parámetros geométricos del robot, no existe dependencia lineal entre los tornillos ${}^3S_1^4$, ${}^3S_2^4$, S_{mod} , S_1^r , S_2^r y S_3^r , por lo tanto, no existen singularidades en el robot.

Singularidad tipo 3: el efector final puede ser movido mientras los actuadores están bloqueados, y viceversa. Esto ocurre cuando $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$.

Dando valores numéricos a los ángulos de rotación ψ_x y ψ_y en el intervalo $[-29.8^\circ, 45.8^\circ]$ y $[-36^\circ, 36^\circ]$, respectivamente, y seleccionando como parámetros geométricos $b = 115.37157978$, $c = 100.45008479$, $d_1 = d_2 = 206$, $e_{13} = e_{23} = 172.98539394$ y $e_{12} = 118.18195393$ mm, se obtiene el valor absoluto del determinante de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} para el modo 1, Figura 4.7.

Dando valores numéricos a los ángulos de rotación ψ_y y ψ_z en el intervalo $[-36^\circ, 36^\circ]$ y $[-22^\circ, 22^\circ]$, respectivamente, y seleccionando los parámetros anteriormente mencionados, se obtiene el valor absoluto del determinante de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} para el modo 2, Figura 4.8.

En la Figura 4.8(a), se observa que el determinante de la matriz \mathbf{A} se acerca a cero, sin embargo, el sistema de ecuaciones (4.44) tiene solución, por lo tanto, el robot bajo estudio no presenta singularidades en los intervalos de movimientos del tobillo mencionados anteriormente.

Figura 4.7: Determinante de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} para modo 1.Figura 4.8: Determinante de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} para modo 2.

4.6. Análisis de Fuerzas Estáticas

La estática determina las condiciones bajo las cuales un cuerpo actuado por diversas fuerzas permanece en equilibrio. La primera ley de Newton establece que un cuerpo rígido permanece en equilibrio estático si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (4.70)$$

$$\sum \mathbf{M} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{0} \quad (4.71)$$

Para este análisis el robot se compone de 5 cuerpos rígidos (Figura 4.9) y a partir de los diagramas de cuerpo libre (Figura 4.10), las ecuaciones de equilibrio para cada eslabón se pueden escribir en forma vectorial

Cuerpo 1:

$$\sum \mathbf{F}_1 = {}^0\mathbf{F}^1 - {}^1\mathbf{F}^3 = \mathbf{0} \quad (4.72)$$

Cuerpo 2:

$$\sum \mathbf{F}_2 = {}^0\mathbf{F}^2 - {}^2\mathbf{F}^4 = \mathbf{0} \quad (4.73)$$

Cuerpo 3:

$$\sum \mathbf{F}_3 = {}^1\mathbf{F}^3 - {}^3\mathbf{F}^5 + \mathbf{W}_3 = \mathbf{0} \quad (4.74)$$

$$\sum \mathbf{M}_{A_1} = -({}^3\mathbf{r}^1 + {}^3\mathbf{r}^5) \times {}^3\mathbf{F}^5 - {}^3\mathbf{r}^1 \times \mathbf{W}_3 = \mathbf{0} \quad (4.75)$$

Cuerpo 4:

$$\sum \mathbf{F}_4 = {}^2\mathbf{F}^4 - {}^4\mathbf{F}^5 + \mathbf{W}_4 = \mathbf{0} \quad (4.76)$$

$$\sum \mathbf{M}_{A_2} = -({}^4\mathbf{r}^2 + {}^4\mathbf{r}^5) \times {}^4\mathbf{F}^5 - {}^4\mathbf{r}^2 \times \mathbf{W}_4 = \mathbf{0} \quad (4.77)$$

Cuerpo 5:

$$\sum \mathbf{F}_5 = {}^3\mathbf{F}^5 + {}^4\mathbf{F}^5 + {}^0\mathbf{F}^5 + \mathbf{F}_P + \mathbf{W}_5 = \mathbf{0} \quad (4.78)$$

$$\sum \mathbf{M}_{B_3} = \mathbf{B}_1 \times {}^3\mathbf{F}^5 + \mathbf{B}_2 \times {}^4\mathbf{F}^5 + \mathbf{B}_3 \times ({}^0\mathbf{F}^5 + \mathbf{F}_P) - {}^5\mathbf{r}^0 \mathbf{W}_5 + \mathbf{M}_P = \mathbf{0} \quad (4.79)$$

donde ${}^i\mathbf{r}^j$ son los vectores de posición desde el centro de gravedad del eslabón i a la unión del cuerpo j , estos vectores definen los puntos de aplicación de las fuerzas, los cuales están dados por:

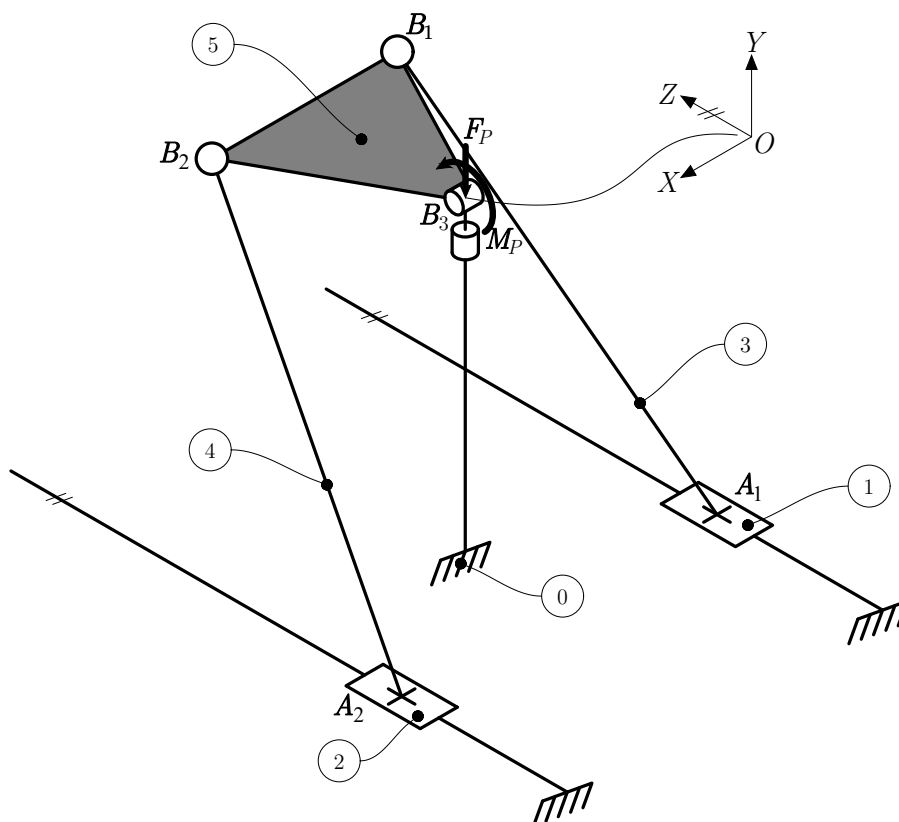


Figura 4.9: Robot paralelo.

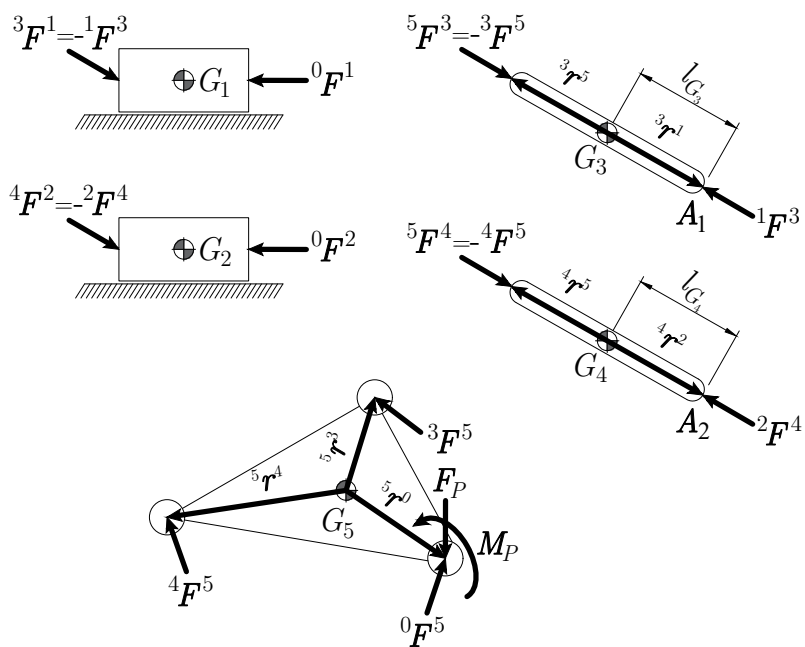


Figura 4.10: Diagrama de cuerpo libre.

$$\begin{aligned}
{}^3\mathbf{r}^1 &= \frac{l_{G_3}}{d_1} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1) \\
{}^3\mathbf{r}^5 &= \frac{d_1 - l_{G_3}}{d_1} (\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1) \\
{}^4\mathbf{r}^2 &= \frac{l_{G_4}}{d_2} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2) \\
{}^4\mathbf{r}^5 &= \frac{d_2 - l_{G_4}}{d_2} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_2) \\
{}^5\mathbf{r}^0 &= \mathbf{R}_x \mathbf{G}_5 \\
{}^5\mathbf{r}^3 &= {}^5\mathbf{r}^0 + \mathbf{B}_1 \\
{}^5\mathbf{r}^4 &= {}^5\mathbf{r}^0 + \mathbf{B}_2,
\end{aligned}$$

por otro lado \mathbf{F}_P y \mathbf{M}_P son un vector de fuerza externa debido al peso de la pierna de una persona promedio, y el par de torsión requerido para realizar el movimiento pasivo del tobillo, respectivamente. Con el propósito de simular el par de torsión necesario para realizar el movimiento pasivo de flexión/extensión en una persona. Dicho par de torsión es obtenido de [3], Figura 4.11, donde participaron nueve sujetos sanos (ninguno de los participantes informó problemas musculoesqueléticos, de columna vertebral, enfermedades neuromusculares u ortopédicos) de 25 ± 3 años. Este par de torsión se aplica en la base móvil en dirección del eje X global, donde dicho par de torsión se puede aproximar mediante un polinomio de cuarto orden utilizando la función *polyfit* de Matlab[®], el cual está dado por

$$\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} 4.2614 \times 10^{-6} \psi_x^4 - 6.4331 \times 10^{-4} \psi_x^3 + 0.0212 \psi_x^2 - 0.4632 \psi_x + 4.9973 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_P se considera colineal al poste central debido a que la base móvil se diseñó para que el eje longitudinal de la pierna coincidiera con el eje del poste central. Dicha magnitud de fuerza es obtenida de [69], la cuál está dada por

$$\mathbf{F}_P = \begin{bmatrix} 0 & -157 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Por último el peso y centro de gravedad del cuerpo i es denotado como \mathbf{W}_i y G_i , respectivamente, donde \mathbf{W}_i está dado por

$$\mathbf{W}_i = m_i \mathbf{g}$$

donde m_i es la masa del cuerpo i y $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & -9.81 & 0 \end{bmatrix}^T$ es el vector de gravedad.

Desarrollando el sistema de ecuaciones (4.72)-(4.79) y pasando a forma matricial se tiene

$$A_{E_{22}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4r_5^z - 4r_2^z & 4r_2^y - 4r_5^y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4r_2^z - 4r_5^z & 0 & 4r_5^x - 4r_2^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4r_5^y - 4r_2^y & 4r_2^x - 4r_5^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -Z_1 & Y_1 & 0 & -Z_2 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 & -X_1 & Z_2 & 0 & -X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_1 & X_1 & 0 & -Y_2 & Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por otro lado \mathbf{F} es el vector de 21×1 que contiene las variables desconocidas

$$\mathbf{F} = \left[{}^0\mathbf{F}^1 \quad {}^0\mathbf{F}^2 \quad {}^1\mathbf{F}^3 \quad {}^2\mathbf{F}^4 \quad {}^3\mathbf{F}^5 \quad {}^4\mathbf{F}^5 \quad {}^0\mathbf{F}^5 \right]^T$$

por último \mathbf{B}_E es un vector de 24×1 que contiene información de fuerzas y momentos conocidos

$$\mathbf{B}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{W}_3 \\ {}^3\mathbf{r}^1 \times \mathbf{W}_3 \\ -\mathbf{W}_4 \\ {}^4\mathbf{r}^2 \times \mathbf{W}_4 \\ -\mathbf{F}_P - \mathbf{W}_5 \\ {}^5\mathbf{r}^0 \times \mathbf{W}_5 - \mathbf{B}_3 \times \mathbf{F}_P - \mathbf{M}_P \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales de (4.80) se encuentran todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos del robot para los movimientos de flexión/extensión, ya que para estos movimientos se requiere más del doble par de torsión que para los movimientos restantes [19]. En la figura 4.12 se muestran los resultados del análisis de fuerzas estáticas en donde observando el diagrama de cuerpo libre (Figura 4.10) y aplicando la tercera ley de Newton se obtiene que ${}^3\mathbf{F}^5 = {}^1\mathbf{F}^3 = {}^0\mathbf{F}^1$ y ${}^4\mathbf{F}^5 = {}^2\mathbf{F}^4 = {}^0\mathbf{F}^2$.

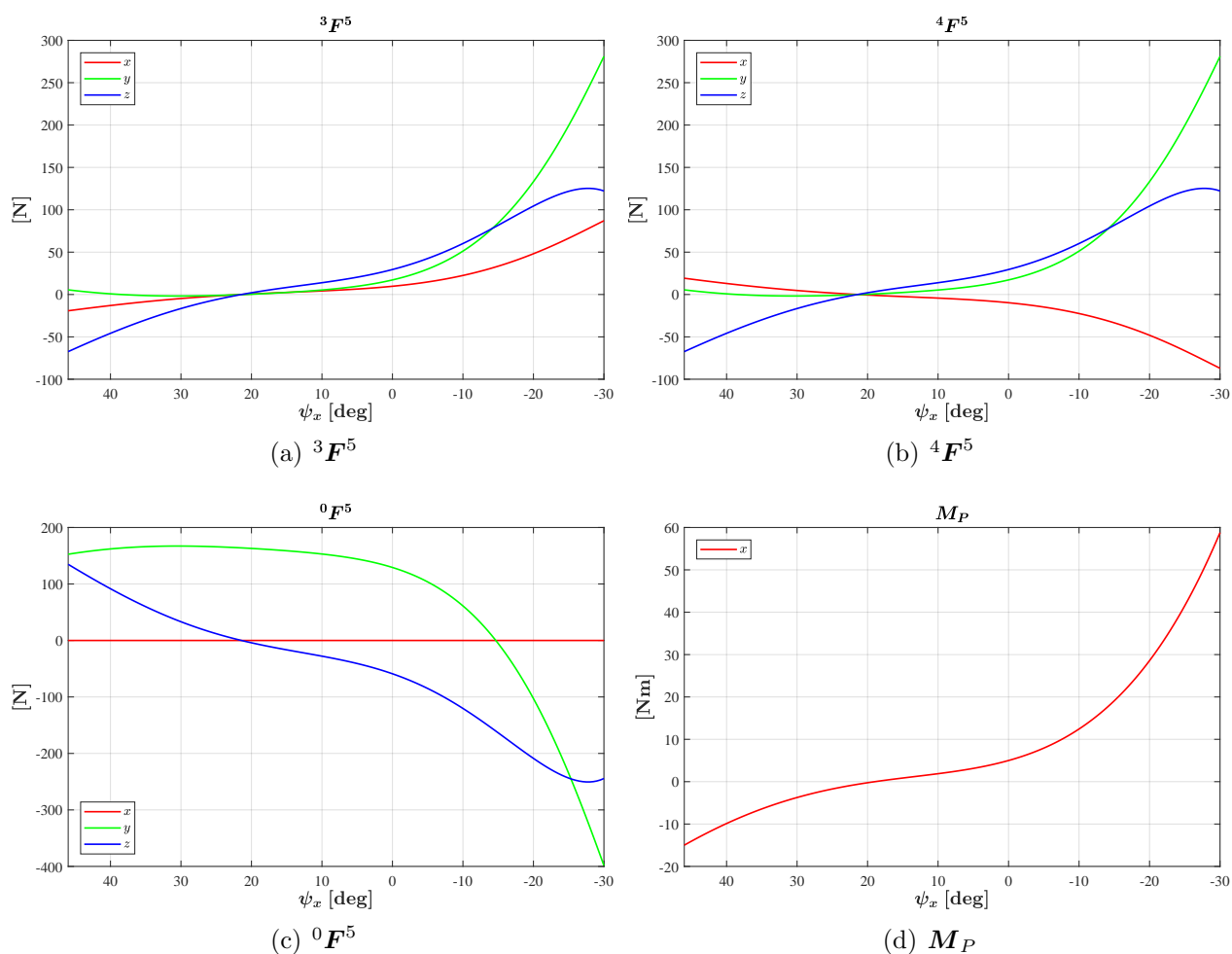


Figura 4.12: Fuerzas de reacción en los apoyos ${}^0F^5$, ${}^3F^5$ y ${}^4F^5$

4.7. Análisis de Fuerzas Dinámicas

En el diseño mecánico, la determinación de las fuerzas que operan sobre un sistema es una tarea fundamental, si se conocen las aceleraciones, velocidades y desplazamientos deseados a aplicar en el sistema puede resolverse para las magnitudes y direcciones de las fuerzas y pares de torsión necesarios para generar los movimientos deseados, a esto se le conoce como dinámica inversa. Las fuerzas inerciales creadas por el movimiento de muchos sistemas de alta velocidad exceden las fuerzas requeridas para ejecutar la tarea encomendada [62], por lo tanto, es necesario un análisis de fuerzas dinámicas, existen diferentes enfoques para realizar este análisis. Dada su naturaleza, la segunda ley de Newton proporciona mayor información sobre las fuerzas internas que actúan en un sistema de cuerpos rígidos [63], matemáticamente

la segunda ley de Newton se puede expresar como:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad (4.81)$$

$$\sum \mathbf{T} = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \quad (4.82)$$

Para este análisis el robot se compone de 5 cuerpos rígidos (Figura 4.9) y a partir de los diagramas de cuerpo libre (Figura 4.10), las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo se pueden escribir en forma vectorial

Cuerpo 1:

$$\sum \mathbf{F}_1 = {}^0\mathbf{F}^1 - {}^1\mathbf{F}^3 = m_1 {}^0\mathbf{a}_{G_1}^1 \quad (4.83)$$

Cuerpo 2:

$$\sum \mathbf{F}_2 = {}^0\mathbf{F}^2 - {}^2\mathbf{F}^4 = m_2 {}^0\mathbf{a}_{G_2}^2 \quad (4.84)$$

Cuerpo 3:

$$\sum \mathbf{F}_3 = {}^1\mathbf{F}^3 - {}^3\mathbf{F}^5 = m_3 {}^0\mathbf{a}_{G_3}^3 \quad (4.85)$$

$$\sum \mathbf{T}_3 = {}^3\mathbf{r}^1 \times {}^1\mathbf{F}^3 - {}^3\mathbf{r}^5 \times {}^3\mathbf{F}^5 = \mathbf{I}_{G_3} {}^0\boldsymbol{\alpha}^3 + {}^0\boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{I}_{G_3} {}^0\boldsymbol{\omega}^3 \quad (4.86)$$

Cuerpo 4:

$$\sum \mathbf{F}_4 = {}^2\mathbf{F}^4 - {}^4\mathbf{F}^5 = m_4 {}^0\mathbf{a}_{G_4}^4 \quad (4.87)$$

$$\sum \mathbf{T}_4 = {}^4\mathbf{r}^2 \times {}^2\mathbf{F}^4 - {}^4\mathbf{r}^5 \times {}^4\mathbf{F}^5 = \mathbf{I}_{G_4} {}^0\boldsymbol{\alpha}^4 + {}^0\boldsymbol{\omega}^4 \times \mathbf{I}_{G_4} {}^0\boldsymbol{\omega}^4 \quad (4.88)$$

Cuerpo 5:

$$\sum \mathbf{F}_5 = {}^0\mathbf{F}^5 + {}^3\mathbf{F}^5 + {}^4\mathbf{F}^5 + \mathbf{F}_P = m_5 {}^0\mathbf{a}_{G_5}^5 \quad (4.89)$$

$$\sum \mathbf{T}_5 = {}^5\mathbf{r}^3 \times {}^3\mathbf{F}^5 + {}^5\mathbf{r}^4 \times {}^4\mathbf{F}^5 + {}^5\mathbf{r}^0 \times ({}^0\mathbf{F}^5 + \mathbf{F}_P) + \mathbf{M}_P = \mathbf{I}_{G_5} {}^0\boldsymbol{\alpha}^5 + {}^0\boldsymbol{\omega}^5 \times \mathbf{I}_{G_5} {}^0\boldsymbol{\omega}^5 \quad (4.90)$$

donde ${}^0\boldsymbol{\omega}^i$, ${}^0\boldsymbol{\alpha}^i$ es la velocidad y aceleración angular, respectivamente, del cuerpo i como se observa desde el sistema de referencia fijo 0, \mathbf{I}_{G_i} representa el tensor de inercia obtenido en el centro de masa y medido con respecto al sistema global de referencia, por último ${}^0\mathbf{a}_{G_i}^i$ es la aceleración lineal del centro de masa del cuerpo i como se observa desde el sistema de referencia fijo 0. Obteniendo información del análisis cinemático se calculan las velocidades y

aceleraciones de cada cuerpo como sigue:

$${}^0\mathbf{a}_{G_1}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{q}_1 \end{bmatrix}^T$$

$${}^0\mathbf{a}_{G_2}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{q}_2 \end{bmatrix}^T$$

$${}^0\boldsymbol{\omega}^3 = P({}_0\omega_1^{10}\$1_1^1 + {}_1\omega_2^{11}\$1_1^2 + {}_2\omega_3^{12}\$1_1^3)$$

$${}^0\mathbf{v}_{G_3}^3 = D({}_0\omega_1^{10}\$1_1^1 + {}_1\omega_2^{11}\$1_1^2 + {}_2\omega_3^{12}\$1_1^3) + {}^0\boldsymbol{\omega}^3 \times (\mathbf{B}_1 - {}^3\mathbf{r}^5)$$

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\alpha}^3 &= P({}_0\alpha_1^{10}\$1_1^1 + {}_1\alpha_2^{11}\$1_1^2 + {}_2\alpha_3^{12}\$1_1^3) + P({}_0\omega_1^{10}\$1_1^1) \times P({}_1\omega_2^{11}\$1_1^2) \\ &+ P({}_0\omega_1^{10}\$1_1^1) \times P({}_2\omega_3^{12}\$1_1^3) + P({}_1\omega_2^{11}\$1_1^2) \times P({}_2\omega_3^{12}\$1_1^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{a}_{G_3}^3 &= D({}_0\alpha_1^{10}\$1_1^1 + {}_1\alpha_2^{11}\$1_1^2 + {}_2\alpha_3^{12}\$1_1^3) + P({}_0\omega_1^{10}\$1_1^1) \times D({}_1\omega_2^{11}\$1_1^2) \\ &+ P({}_0\omega_1^{10}\$1_1^1) \times D({}_2\omega_3^{12}\$1_1^3) + P({}_1\omega_2^{11}\$1_1^2) \times D({}_2\omega_3^{12}\$1_1^3) \\ &+ {}^0\boldsymbol{\omega}^3 \times (\mathbf{B}_1 - {}^3\mathbf{r}^5) + {}^0\boldsymbol{\omega}^3 \times {}^0\mathbf{v}_{G_3}^3 \end{aligned}$$

$${}^0\boldsymbol{\omega}^4 = P({}_0\omega_1^{20}\$2_1^1 + {}_1\omega_2^{21}\$2_1^2 + {}_2\omega_3^{22}\$2_1^3)$$

$${}^0\mathbf{v}_{G_4}^4 = D({}_0\omega_1^{20}\$2_1^1 + {}_1\omega_2^{21}\$2_1^2 + {}_2\omega_3^{22}\$2_1^3) + {}^0\boldsymbol{\omega}^4 \times (\mathbf{B}_2 - {}^4\mathbf{r}^5)$$

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\alpha}^4 &= P({}_0\alpha_1^{20}\$2_1^1 + {}_1\alpha_2^{21}\$2_1^2 + {}_2\alpha_3^{22}\$2_1^3) + P({}_0\omega_1^{20}\$2_1^1) \times P({}_1\omega_2^{21}\$2_1^2) \\ &+ P({}_0\omega_1^{20}\$2_1^1) \times P({}_2\omega_3^{22}\$2_1^3) + P({}_1\omega_2^{21}\$2_1^2) \times P({}_2\omega_3^{22}\$2_1^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{a}_{G_4}^4 &= D({}_0\alpha_1^{20}\$2_1^1 + {}_1\alpha_2^{21}\$2_1^2 + {}_2\alpha_3^{22}\$2_1^3) + P({}_0\omega_1^{20}\$2_1^1) \times D({}_1\omega_2^{21}\$2_1^2) \\ &+ P({}_0\omega_1^{20}\$2_1^1) \times D({}_2\omega_3^{22}\$2_1^3) + P({}_1\omega_2^{21}\$2_1^2) \times D({}_2\omega_3^{22}\$2_1^3) \\ &+ {}^0\boldsymbol{\omega}^4 \times (\mathbf{B}_2 - {}^4\mathbf{r}^5) + {}^0\boldsymbol{\omega}^4 \times {}^0\mathbf{v}_{G_4}^4 \end{aligned}$$

$${}^0\boldsymbol{\omega}^5 = P(\mathbf{V}_O) = \boldsymbol{\omega}$$

$${}^0\boldsymbol{\alpha}^5 = P(\mathbf{A}_O) = \boldsymbol{\alpha}$$

$${}^0\mathbf{a}_{G_5}^5 = {}^0\boldsymbol{\alpha}^5 \times {}^0\mathbf{r}^5 + {}^0\boldsymbol{\omega}^5 \times {}^0\boldsymbol{\omega}^5 \times {}^0\mathbf{r}^5$$

donde $P(*)$ y $D(*)$ representan la parte primaria y la parte dual, respectivamente, de un estado de velocidad o aceleración.

Desarrollando el sistema de ecuaciones (4.83)-(4.90) y pasando a forma matricial se tiene

$$\mathbf{A}_D \mathbf{F} = \mathbf{B}_D \quad (4.91)$$

donde \mathbf{A}_D es una matriz de 24×21 que contiene los coeficientes de las variables desconocidas y la información geométrica del robot, la cual está dada por

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} A_{D11} & A_{D12} \\ A_{D21} & A_{D22} \end{bmatrix}$$

donde

$$A_{D11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3r_1^z & 3r_1^y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3r_1^z & 0 & -3r_1^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3r_1^y & 3r_1^x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{D12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3r_5^z & -3r_5^y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3r_5^z & 0 & 3r_5^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_5^y & -3r_5^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{D_{21}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4r_2^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4r_2^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4r_2^y & 4r_2^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{D_{22}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4r_2^y & 0 & 0 & 0 & 0 & 4r_5^z & -4r_5^y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4r_2^x & 0 & 0 & 0 & -4r_5^z & 0 & 4r_5^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4r_5^y & -4r_5^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5r_3^z & 5r_3^y & 0 & -5r_4^z & 5r_4^y & 0 & -5r_0^z & 5r_0^y \\ 0 & 5r_3^z & 0 & -5r_3^x & 5r_4^z & 0 & -5r_4^x & 5r_0^z & 0 & -5r_0^x \\ 0 & -5r_3^y & 5r_3^x & 0 & -5r_4^y & 5r_4^x & 0 & -5r_0^y & 5r_0^x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por otro lado \mathbf{F} es el vector de 21×1 que contiene las variables desconocidas

$$\mathbf{F} = \left[{}^0\mathbf{F}^1 \quad {}^0\mathbf{F}^2 \quad {}^1\mathbf{F}^3 \quad {}^2\mathbf{F}^4 \quad {}^3\mathbf{F}^5 \quad {}^4\mathbf{F}^5 \quad {}^0\mathbf{F}^5 \right]^T$$

por último \mathbf{B}_D es un vector de 24×1 que contiene información de fuerzas y pares de torsión

conocidos

$$B_D = \begin{bmatrix} m_1^0 \mathbf{a}_{G_1}^1 \\ m_2^0 \mathbf{a}_{G_2}^2 \\ m_3^0 \mathbf{a}_{G_3}^3 \\ \mathbf{I}_{G_3}^0 \boldsymbol{\alpha}^3 + {}^0\boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{I}_{G_3}^0 \boldsymbol{\omega}^3 \\ m_4^0 \mathbf{a}_{G_4}^4 \\ \mathbf{I}_{G_4}^0 \boldsymbol{\alpha}^4 + {}^0\boldsymbol{\omega}^4 \times \mathbf{I}_{G_4}^0 \boldsymbol{\omega}^4 \\ m_5^0 \mathbf{a}_{G_5}^5 - \mathbf{F}_P \\ \mathbf{I}_{G_5}^0 \boldsymbol{\alpha}^5 + {}^0\boldsymbol{\omega}^5 \times \mathbf{I}_{G_5}^0 \boldsymbol{\omega}^5 - \mathbf{M}_P - {}^5\mathbf{r}^0 \times \mathbf{F}_P \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta las especificaciones de velocidad obtenidos la Tabla 3.2 (30 rep/min) y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales de (4.91) con los desplazamientos, velocidades y aceleraciones deseados de la base móvil mostrados en la Figura 4.13, los cuales se calculan mediante un polinomio del tipo Bézier [84], dado por las ecuaciones (4.92), (4.93) y (4.94), se encuentran todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos del robot. Para realizar la simulación solo toman el cuenta los movimientos de flexión/extensión, porque estos requieren más del doble par de torsión que los movimientos restantes del tobillo [19]. En la Figura 4.14 se muestran los resultados del análisis de fuerzas dinámicas en donde observando el diagrama de cuerpo libre (Figura 4.10) y aplicando la tercera ley de Newton se obtiene que ${}^3\mathbf{F}^5 = {}^1\mathbf{F}^3 = {}^0\mathbf{F}^1$ y ${}^4\mathbf{F}^5 = {}^2\mathbf{F}^4 = {}^0\mathbf{F}^2$.

$$\psi_x(t) = \begin{cases} \bar{\psi}_{x_{ini}} & \text{para } t < t_{ini} \\ \bar{\psi}_{x_{ini}} + (\bar{\psi}_{x_{fin}} - \bar{\psi}_{x_{ini}}) p_\psi(t, t_{ini}, t_{fin}) & \text{para } t_{ini} \leq t \leq t_{fin} \\ \bar{\psi}_{x_{fin}} & \text{para } t > t_{fin} \end{cases} \quad (4.92)$$

$$\dot{\psi}_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_{ini} \\ -(\bar{\psi}_{x_{fin}} - \bar{\psi}_{x_{ini}}) \dot{p}_\psi(t, t_{ini}, t_{fin}) & \text{para } t_{ini} \leq t \leq t_{fin} \\ 0 & \text{para } t > t_{fin} \end{cases} \quad (4.93)$$

$$\ddot{\psi}_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_{ini} \\ -(\bar{\psi}_{x_{fin}} - \bar{\psi}_{x_{ini}}) \ddot{p}_\psi(t, t_{ini}, t_{fin}) & \text{para } t_{ini} \leq t \leq t_{fin} \\ 0 & \text{para } t > t_{fin} \end{cases} \quad (4.94)$$

donde

$$p_\psi(t, t_{ini}, t_{fin}) = \rho^5 (\gamma_1 - \gamma_2 \rho + \gamma_3 \rho^2 - \gamma_4 \rho^3 + \gamma_5 \rho^4 - \gamma_6 \rho^5)$$

$$\dot{p}_\psi(t, t_{ini}, t_{fin}) = 1260 \rho^4 \dot{\rho} (\rho - 1)^5$$

$$\ddot{p}_\psi(t, t_{ini}, t_{fin}) = 1260 \rho^3 \dot{\rho}^2 (9\rho - 4) (\rho - 1)^4$$

$$\rho = \left(\frac{t - t_{\text{ini}}}{t_{\text{fin}} - t_{\text{ini}}} \right)$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{1}{t_{\text{fin}} - t_{\text{ini}}} \right)$$

con $\gamma_1 = 252$, $\gamma_2 = 1050$, $\gamma_3 = 1800$, $\gamma_4 = 1575$, $\gamma_5 = 700$, $\gamma_6 = 126$.

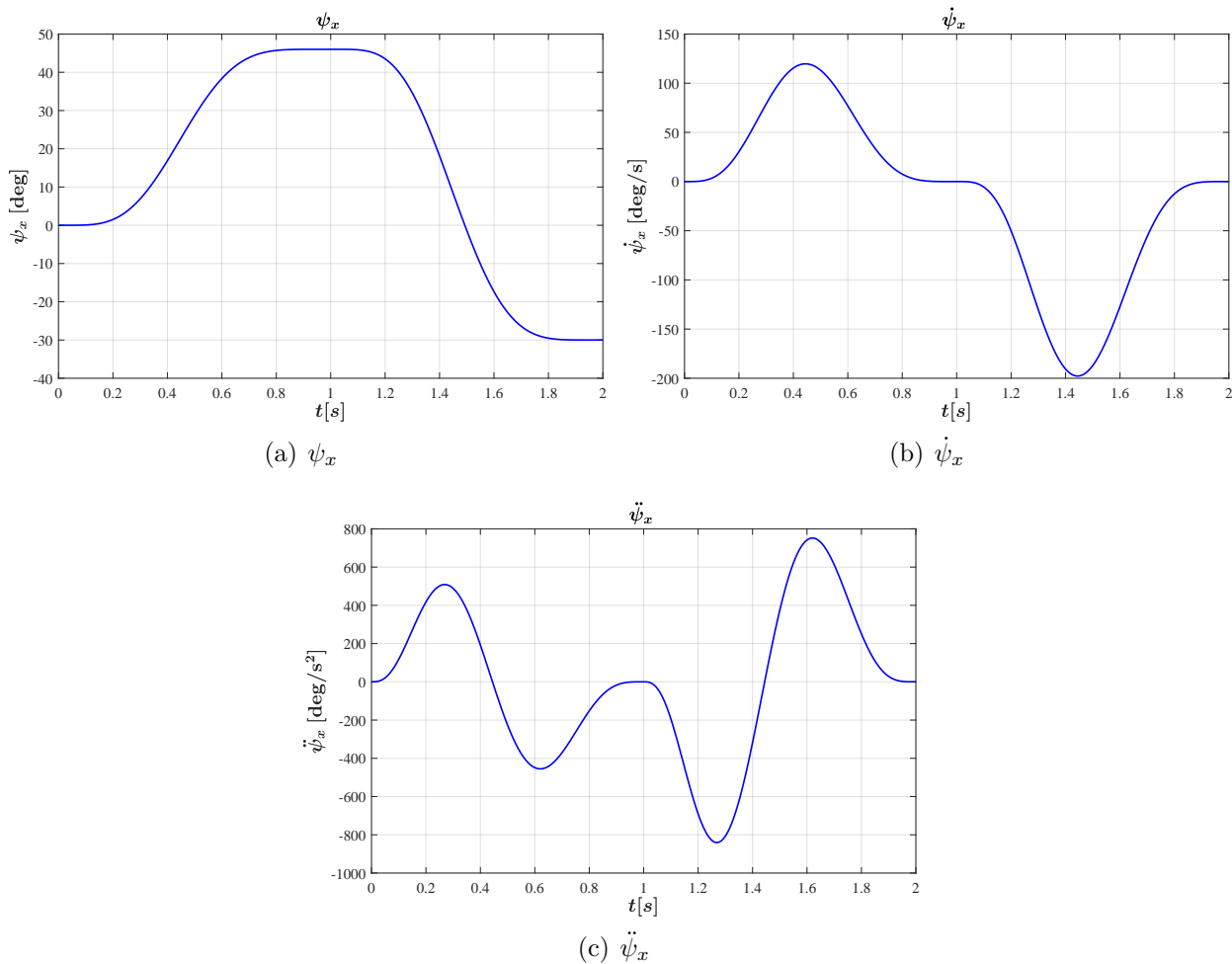


Figura 4.13: Desplazamiento, velocidad y aceleración de la base móvil.

Se selecciona un polinomio del tipo Bézier, ecuación (4.92), para interpolar entre el ángulo inicial $\bar{\psi}_{\text{ini}}$ y el ángulo final $\bar{\psi}_{\text{fin}}$, y con esto conseguir reducir las velocidades y aceleraciones de los cuerpos que conforman el robot, y a la vez, reducir las fuerzas necesarias para realizar estos movimientos.

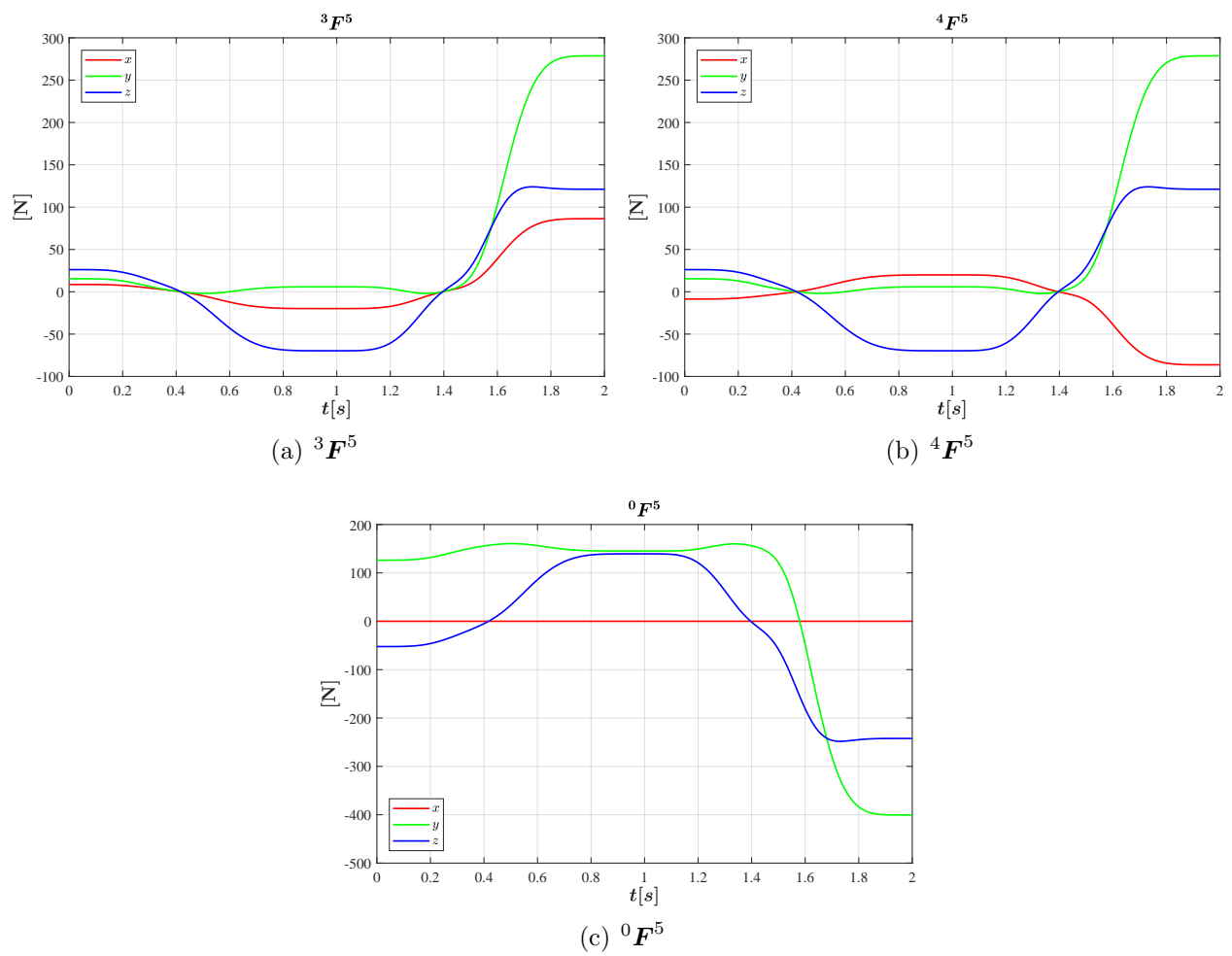


Figura 4.14: Fuerzas de reacción en los apoyos ${}^0F^5$, ${}^3F^5$ y ${}^4F^5$

Capítulo 5

Diseño Estructural y Construcción

Una tarea importante en el diseño estructural consiste en garantizar que la resistencia de los eslabones y las uniones sea suficiente para soportar las fuerzas ejercidas sobre estas. Por ello, el conocimiento completo de las fuerzas sobre las diferentes componentes del robot es de vital importancia. Las fuerzas obtenidas también definen la potencia requerida para generar el movimiento del robot.

Uno de los requerimientos del cliente obligatorios (mostrados en la Tabla 3.1) es que los materiales deben garantizar la portabilidad del rehabilitador. Para esto, se seleccionan materiales con criterios como: bajo costo, disponibilidad en el mercado nacional, baja densidad y alta rigidez. A continuación se selecciona el material para cada uno de los cuerpos que conforman el robot (Figura 5.1). El detalle de todos los componentes del robot se muestran en el Anexo A.

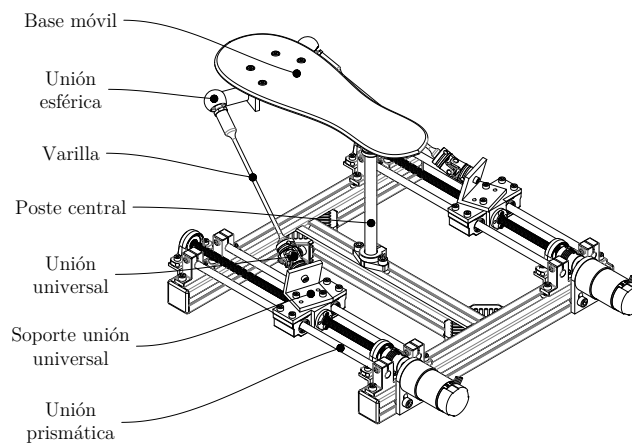


Figura 5.1: Robot rehabilitador de tobillo.

5.1. Selección de Materiales

Observando las gráficas mostradas en la Figura 5.2 y descartando familias de materiales que poseen baja rigidez (elastómetros, espumas poliméricas y maderas), alto costo relativo por unidad de volumen (cerámicos) y alta fragilidad (vidrio y cerámicas porosas), se obtiene que, los materiales que cumplen con los criterios antes mencionados son los metales y polímeros; dado que los metales poseen mayor rigidez que los polímeros, se seleccionan estos últimos para fabricar los componentes que conforman el robot.

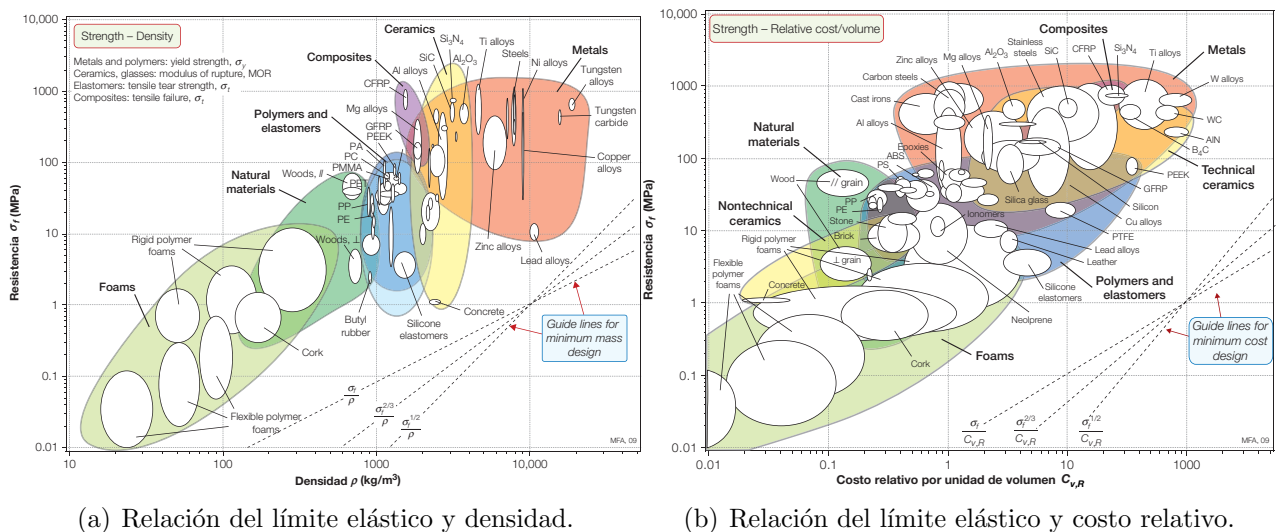


Figura 5.2: Relación de límite elástico, densidad y costo relativo de diferentes materiales [5].

Como se muestra en las gráficas de relación de límite elástico y costo relativo de diferentes materiales (Figura 5.2(b)), dentro de la familia de metales, los aceros y las aleaciones de aluminio poseen mejor relación de costo y rigidez. Por otro lado, como se muestra en la Figura 5.2(a), las aleaciones de aluminio poseen mejor relación de densidad y rigidez que los aceros. Por ello se selecciona la aleación de aluminio 6061 para fabricar los componentes que conforman el robot.

5.2. Análisis de Elemento Finito

El análisis de elemento finito es un método computacional que permite predecir el comportamiento de un elemento ante fuerzas, vibraciones, calor, flujo y otros efectos físicos del entorno [56]. En esta sección se realiza el análisis estático de cada uno de los componentes del robot con el objetivo de conocer los esfuerzos internos, deformaciones y tensiones a los que se

someten.

Esta simulación permite evaluar el factor de seguridad (FDS) para rediseñar y evitar el fallo en las zonas donde se presenten tensiones elevadas. Un FDS inferior a la unidad indica una falla del material, un FDS mayor a la unidad indica que el modelo se encuentra sometido a bajas tensiones y se tiene la posibilidad de eliminar material para optimizar la pieza que se está analizando. A continuación se realiza el análisis de elemento finito a cada uno de los cuerpos que conforman el robot (Figura 5.1(a)).

5.2.1. Base Móvil

La base móvil es el cuerpo donde se apoya el pie del paciente, sobre esta base se consideran uniformemente distribuidos el momento máximo y el peso del pie; realizando el análisis estático por elemento finito se obtienen los siguientes resultados (Figura 5.3).

- ✓ Material: Aluminio 6061
 - Límite elástico: 55.1485MPa
 - Límite de tracción: 124.084MPa
 - Módulo elástico: 69GPa
 - Coeficiente de Poisson: 0.33
 - Densidad: 2700kg/m³
 - Módulo cortante: 26GPa
- ✓ Resultados
 - Tensión de von Mises máxima: 31.49MPa
 - Desplazamiento resultante máximo: 4.269×10^{-2} mm
 - Deformación unitaria máxima: 2.717×10^{-4}
 - Factor de seguridad mínimo: 1.751

5.2.2. Poste Central

El poste central es el cuerpo sólido que une a las bases fija y móvil, donde las fuerzas que actúan sobre este cuerpo se muestran en las Figuras 4.12 y 4.14, tomando el valor absoluto máximo de estas fuerzas y realizando el análisis estático por elemento finito se obtienen los siguientes resultados:

- ✓ Material: Aluminio 6061-T6
 - Límite elástico: 275MPa
 - Límite de tracción: 310MPa
 - Módulo elástico: 69GPa
 - Coeficiente de Poisson: 0.33
 - Densidad: 2700kg/m³
 - Módulo cortante: 26GPa
- ✓ Resultados

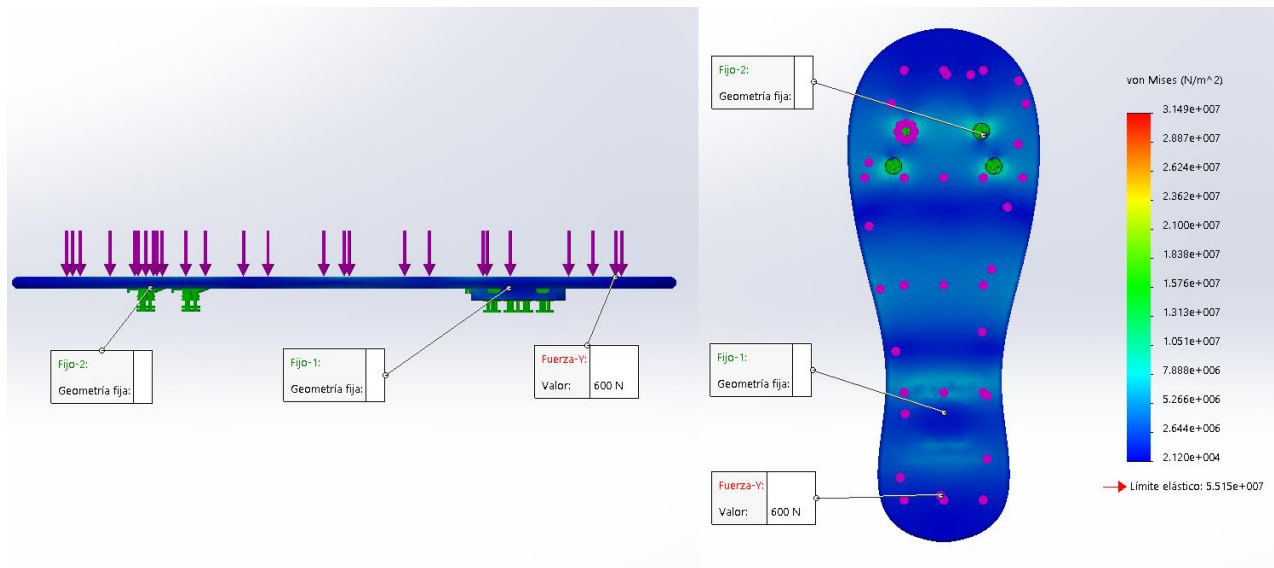


Figura 5.3: Análisis de elemento finito de base móvil.

- Tensión de von Mises máxima: 186.1MPa
- Desplazamiento resultante máximo: 2.995mm
- Deformación unitaria máxima: 2.21×10^{-3}
- Factor de seguridad mínimo: 1.478

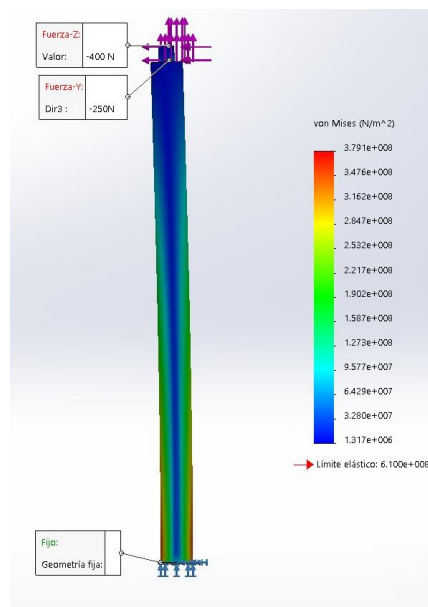


Figura 5.4: Análisis de elemento finito de poste central.

5.2.3. Varillas

La varilla es el cuerpo que une la base móvil con el actuador prismático, donde las fuerzas que actúan sobre este cuerpo se muestran en las Figuras 4.12 y 4.14, tomando el valor máximo de la norma del vector ${}^4\mathbf{F}^5$ y realizando el análisis estático por elemento finito se obtienen los siguientes resultados:

✓ Material: Aluminio 6061-T6

- Límite elástico: 275MPa
- Límite de tracción: 310MPa
- Módulo elástico: 69GPa
- Coeficiente de Poisson: 0.33
- Densidad: 2700kg/m³
- Módulo cortante: 26GPa

✓ Resultados

- Tensión de von Mises máxima: 25.85MPa
- Desplazamiento resultante máximo: 0.4916mm
- Deformación unitaria máxima: 3.235×10^{-4}
- Factor de seguridad mínimo: 10.64

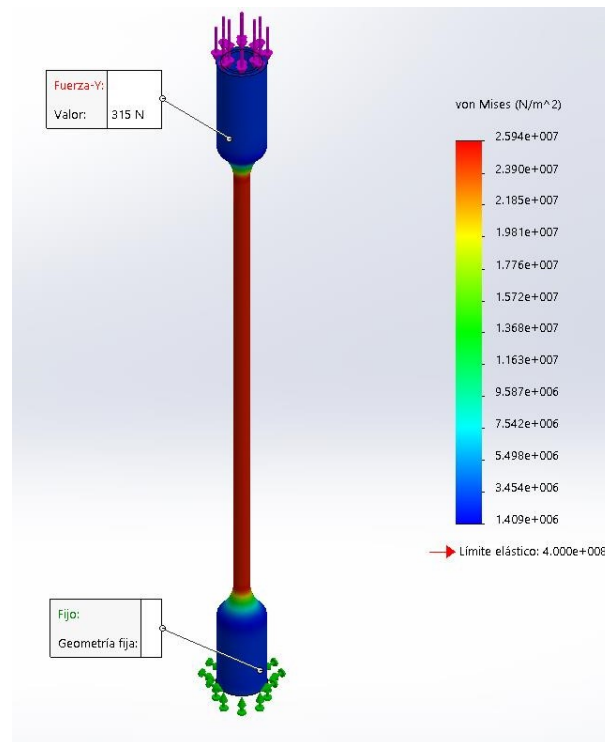


Figura 5.5: Análisis de elemento finito de varilla.

5.2.4. Soporte de Unión Universal

El soporte de unión universal es parte del actuador prismático, donde las fuerzas que actúan sobre este cuerpo se muestran en las Figuras 4.12 y 4.14, tomando el valor máximo de la norma del vector $\|{}^4\mathbf{F}^5\| = 315\text{N}$ y realizando el análisis estático por elemento finito se obtienen los siguientes resultados:

- ✓ Material: Aluminio 6061-T6
 - Límite elástico: 275MPa
 - Límite de tracción: 310MPa
 - Módulo elástico: 69GPa
 - Coeficiente de Poisson: 0.33
 - Densidad: 2700kg/m³
 - Módulo cortante: 26GPa
- ✓ Resultados
 - Tensión de von Mises máxima: 62.05MPa
 - Desplazamiento resultante máximo: $1.545 \times 10^{-1}\text{mm}$
 - Deformación unitaria máxima: 7.339×10^{-4}
 - Factor de seguridad mínimo: 4.432

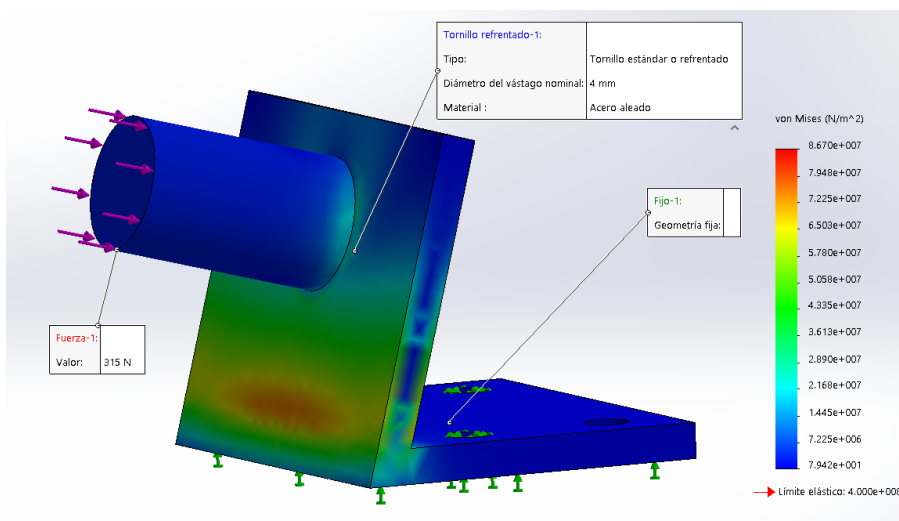


Figura 5.6: Análisis de elemento finito de soporte de unión universal.

5.2.5. Uniones Prismática, Universal y Esférica

Considerando las fuerzas máximas que se encontraron en la sección anterior, se realiza la selección de las uniones universal, prismática y esférica empleando los manuales respectivos de cada fabricante. Para el caso de la unión prismática el fabricante SKF [85], muestra una mesa lineal cerrada LZBU Quadro, que soporta 1290N de carga dinámica, Figura 5.7. Para la unión

universal se selecciona la marca JW Winco GN 9080-20-B12-EG (Figura 5.8(a)) y para la unión esférica se selecciona la marca JW Winco DIN 71802-16-M10-C (Figura 5.8(b)), donde la fuerza requerida para separar la bola del zócalo es de 80N y para realizar el movimiento de flexión se requiere una fuerza máxima de 70N, por lo que esta unión puede funcionar adecuadamente.

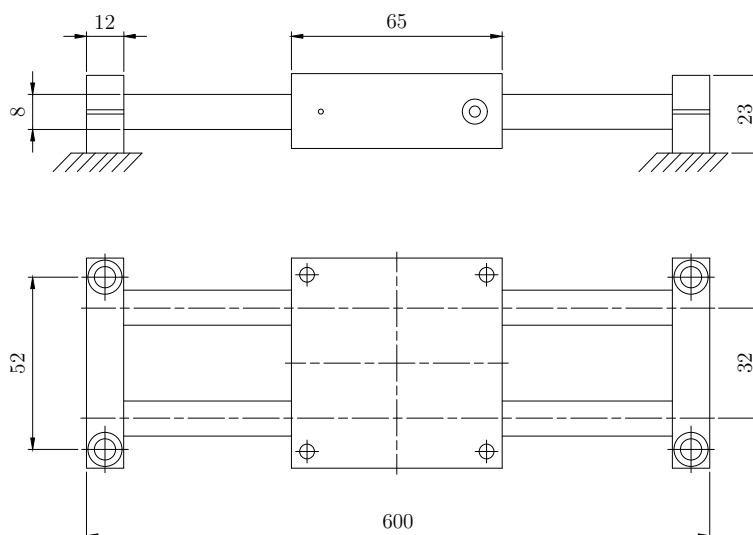
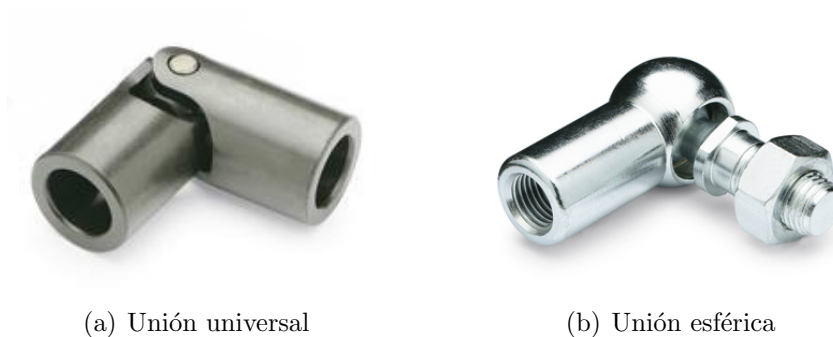


Figura 5.7: Mesa lineal cerrada [85].



(a) Unión universal

(b) Unión esférica

Figura 5.8: Uniones JW Winco [48].

5.3. Cálculo de Actuadores

Los actuadores son dispositivos esenciales en el diseño y construcción de cualquier robot, puesto que son los encargados de producir el movimiento en cada articulación. Un actuador lineal eléctrico convierte movimiento de rotación en movimiento lineal. En este trabajo, los

actuadores lineales del robot estarán integrados por dos rodamientos lineales guiados sobre dos ejes e impulsados por un tornillo de potencia acoplado al motor eléctrico (Figura 5.9).

5.3.1. Par de Torsión

Considerando las fuerzas de reacción ${}^3F^5$ y ${}^4F^5$ obtenidas en los análisis estático y dinámico, se puede calcular el par de torsión requerido para producir el movimiento de cada uno de los eslabones que conforman el robot. Para calcular dicho par se toma la ecuación de [82], donde las fuerzas son paralelas al eje del tornillo, de esta manera se calcula el par de torsión como sigue

$$\tau_L = \frac{Fd_m}{2} \left(\frac{l + \pi f d_m \sec(\phi)}{\pi d_m - fl \sec(\phi)} \right) \quad (5.1)$$

donde d_m y l es diámetro medio y avance del tornillo de potencia, respectivamente, f el coeficiente de fricción entre el tornillo y la tuerca, 2ϕ es el ángulo de la rosca ACME y por último F es la fuerza que actúa en dirección opuesta al movimiento de la corredera, para el caso de estudio de los análisis de fuerzas estáticas y dinámicas se tiene que $F = {}_0F_1^z = {}_0F_2^z$.

Sustituyendo las fuerzas estáticas de la sección anterior en la ecuación (5.1) se obtiene el par requerido para mantener en equilibrio al robot (Figura 5.10a) y sustituyendo las fuerzas dinámicas se obtiene el par de torsión requerido para realizar los movimientos propuestos en las ecuaciones (4.92), (4.93) y (4.94) (Figura 5.10b). El par de torsión de fuerzas dinámicas se valida por co-simulación entre Matlab-Simulink[®] y MSC Adams[™] utilizando el controlador propuesto en el Capítulo 6, ecuación (6.23).

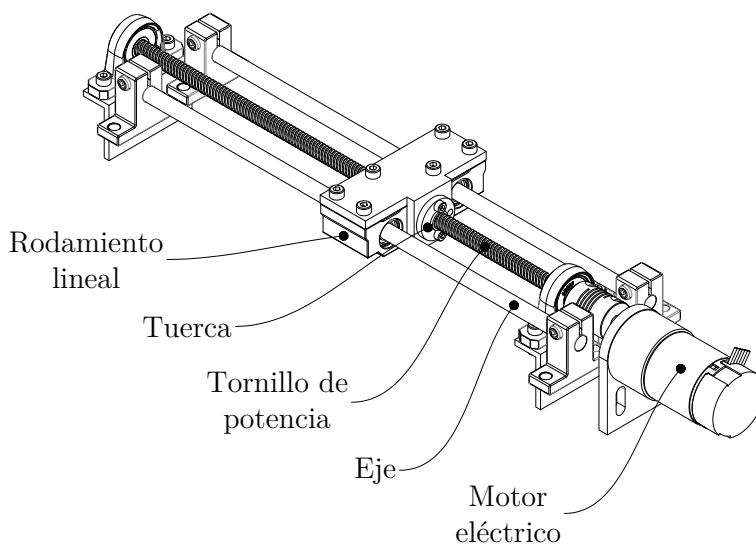


Figura 5.9: Actuador prismático.

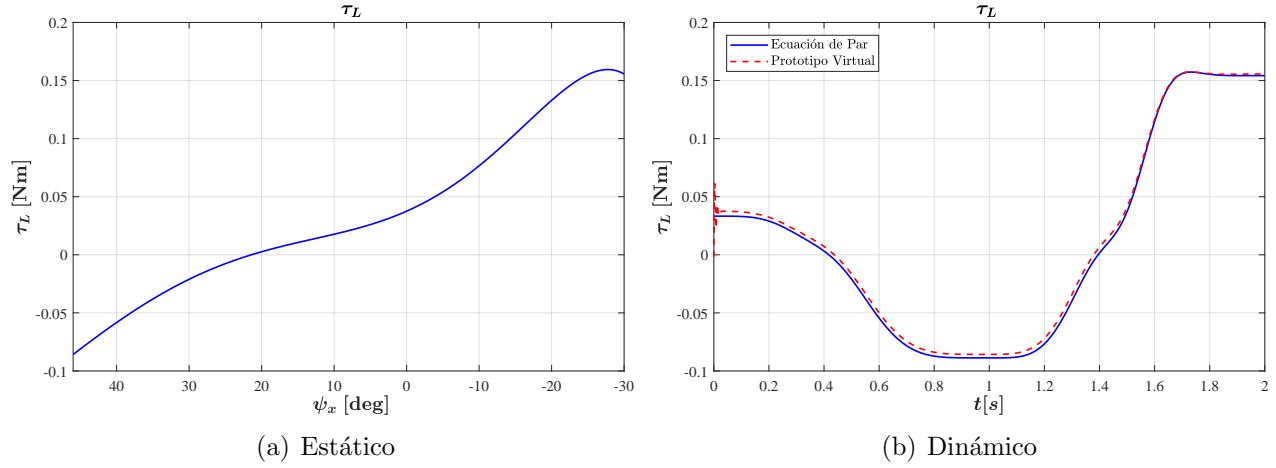


Figura 5.10: Par de torsión requerido para mover la carga de la base móvil.

5.3.2. Selección de Motor

Una vez encontrado el par de torsión requerido para realizar los movimientos establecidos en la Figura 4.13 se selecciona un motor de corriente directa para generar movimiento angular en el tornillo de potencia, ya que este tipo de motor permite un amplio rango de velocidad y puede proporcionar un alto par-motor con un controlador más sencillo y económico que cualquier motor de corriente alterna [1]. Para seleccionar el motor que pueda realizar dicho movimiento angular, se encuentra la curva par-velocidad requerida para realizar los movimientos establecidos, para esto, una vez que se conoce la velocidad deseada de la base móvil (4.93) se calculan las velocidades de los pares prismáticos \dot{Q} de la ecuación de entrada-salida (4.53) obtenida en el análisis cinemático

$$\dot{Q} = B^{-1}AV_O, \quad (\text{Rep. 4.53})$$

para este caso se tiene que

$$\mathbf{V}_O = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Del sistema de ecuaciones (4.53) se obtienen \dot{q}_1 y \dot{q}_2 , conociendo la velocidad lineal de la unión prismática se calcula la velocidad angular del tornillo, que es igual a la velocidad angular del motor $\dot{\theta}$, esta relación de velocidades se calcula como sigue

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{q}_1}{pn_h} \text{rad/s} = \frac{60\dot{q}_1}{2\pi pn_h} \text{RPM} \quad (5.2)$$

donde p y n_h es el paso y número de hilos del tornillo, respectivamente.

Conociendo el par de torsión y velocidad angular requerido (Figura 5.11) se selecciona un motor de CD que cumpla con estas características. El motor Pololu 37D con un motoreductor de 19:1 (Figura 5.11(a)), donde su curva par de torsión contra velocidad obtenida por el fabricante se muestra en la Figura 5.11(b), cumple con estas características, puesto que la curva de este motor está por arriba de la curva requerida.

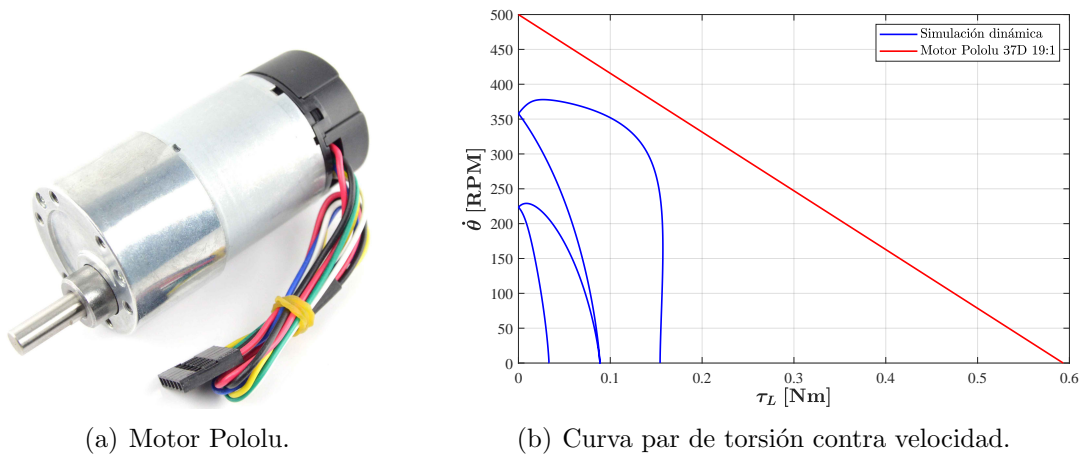


Figura 5.11: Motor Pololu 37D 19:1 [70].

5.4. Manufactura y Ensamble

Después de obtener los dibujos técnicos de los principales cuerpos que conforman el robot, se realiza el maquinado de estas piezas. Los dibujos técnicos correspondientes a cada pieza se encuentran en el Anexo A. La lista de materiales se muestra en la Tabla 5.1. En la Figuras 5.12, 5.13 y 5.14 se muestran las vistas explosionadas del prototipo, en ellas se observan todas las piezas para realizar el ensamblaje.

Tabla 5.1: Lista de Materiales.

Descripción	Cantidad	P. Unitario (MXN)	Sub-total (MXN)
Varilla de aluminio 1/2in	1	95	95
Cable 22 AWG	5	5	25
Chumacera KP08	4	55	220
Cople flexible 8 a 6.35mm	2	38	76
Escuadra para perfil Bosch 28x28mm	4	29	116
Motor Pololu 37Dx68L 19:1 con encoder	2	1199	2398
Perfil ángulo 1 1/4in x 1/8in aluminio	1	100	100
Perfil Bosch 28x28mm	1	150	150
Placa Nylamid 3/8in 30x30cm	1	960	960
Puente H VNH2SP30 simple	2	100	200
Rodamiento lineal SC08UU	4	59	236
Soporte para eje lineal SHF12	1	60	60
Soporte para eje lineal SK08	8	39	312
Tuerca T 8mm M5x0.8	38	3	114
Tornillo Allen M10x1.5 - 30	2	4	8
Tornillo Allen M5x0.8 - 16	38	2.04	77.52
Tornillo Allen M4x0.7 - 16	20	1.97	39.4
Tornillo Allen M4x0.7 - 20	4	2.13	8.52
Tornillo Allen M3x0.5 - 16	4	1.5	6
Tuerca M4x0.7	12	0.25	3
Tuerca M3x0.5	4	0.7	2.8
Rondana plana 7/32	4	0.25	1
Rondana de presión 7/32	4	0.58	2.32
Gabinete de plastico	1	99	99
Unión esférica	2	164.49	328.98
Unión universal	3	165.43	496.29
Varilla eje lineal 8mm	2	195	390
Imán Neodimio redondo 8x2mm	2	4	8
Varilla y tuerca rosca ACME \varnothing 8mm	2	250	500
4 hilos 2mm paso 400mm longitud			
		Total	6457.83

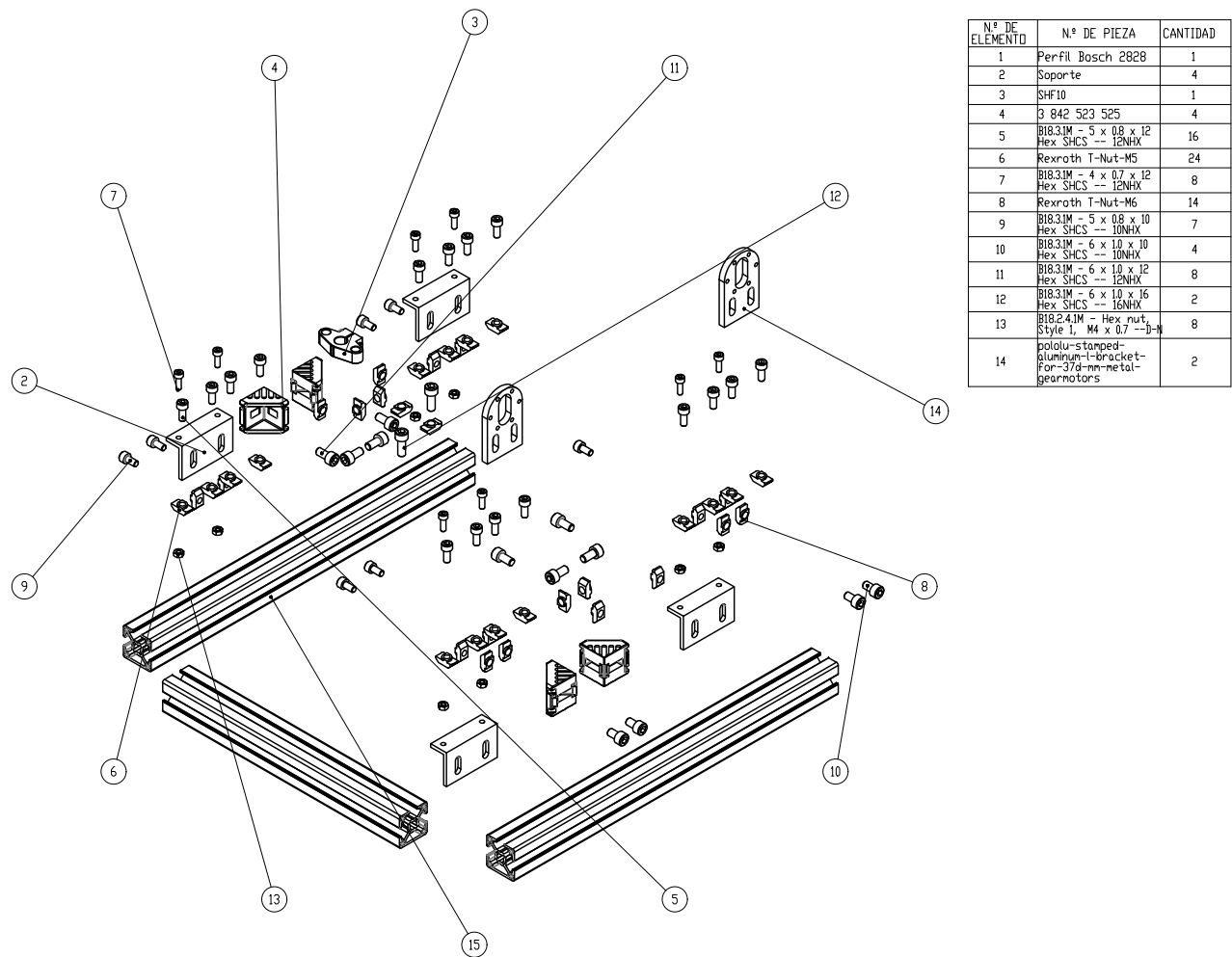
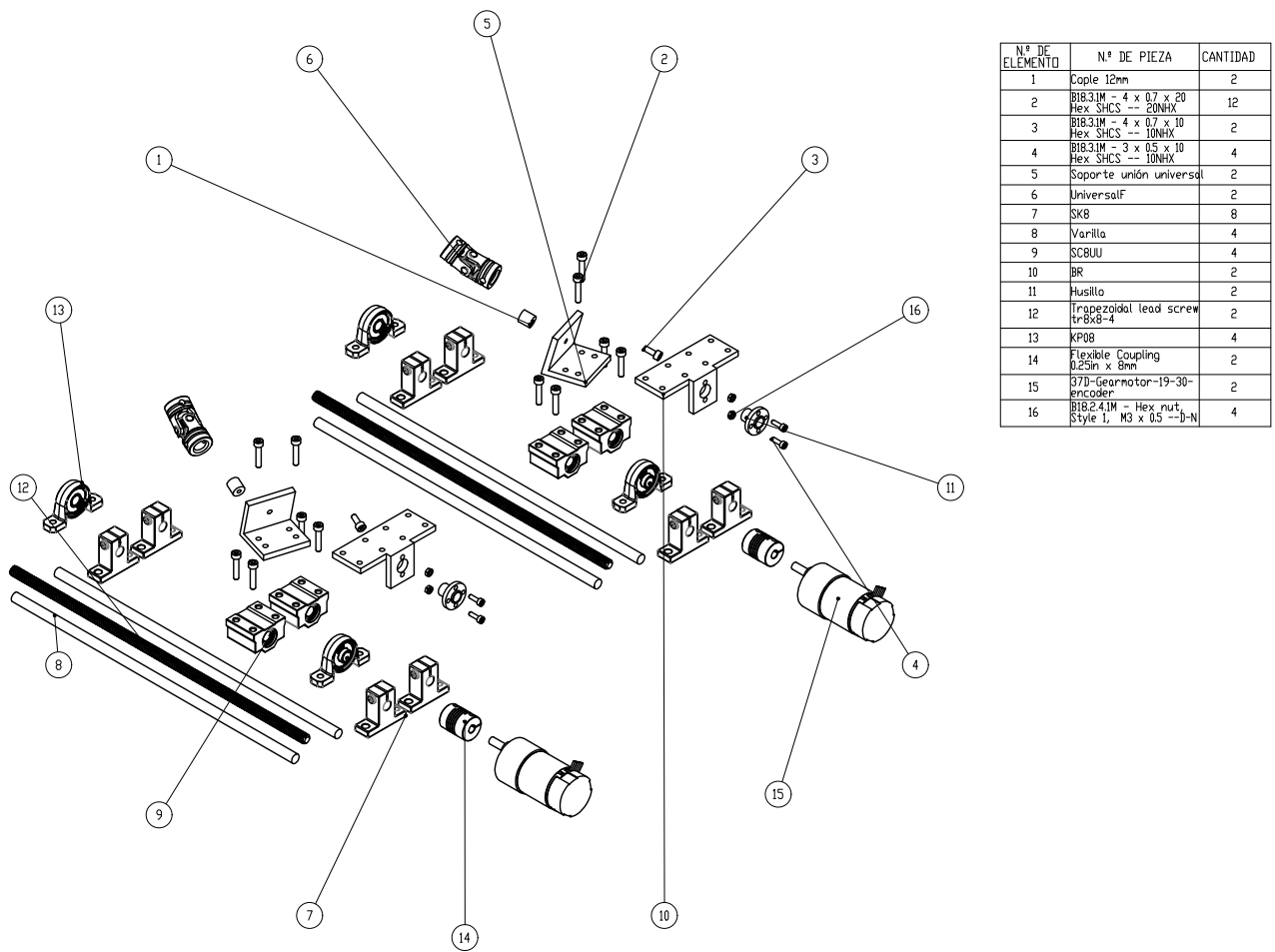


Figura 5.12: Vista explosionada 1.



Nº DE ELEMENTO	Nº DE PIEZA	CANTIDAD
1	Cople 12mm	2
2	B1B.3.1M - 4 x 0.7 x 20 Hex SHCS -- 20NHX	12
3	B1B.3.1M - 4 x 0.7 x 10 Hex SHCS -- 10NHX	2
4	B1B.3.1M - 3 x 0.5 x 10 Hex SHCS -- 10NHX	4
5	Soporte unión universal	2
6	UniversalF	2
7	SK8	8
8	Varilla	4
9	SCBUU	4
10	BR	2
11	Husillo	2
12	Trapezoidal lead screw tr6x8-4	2
13	kP08	4
14	Flexible Coupling 0.25in x 8mm	2
15	37B-Gearmotor-19-30- encoder	2
16	B1B.2.4.1M - Hex nut, Style 1, M3 x 0.5 --b-N	4

Figura 5.13: Vista explosionada 2.

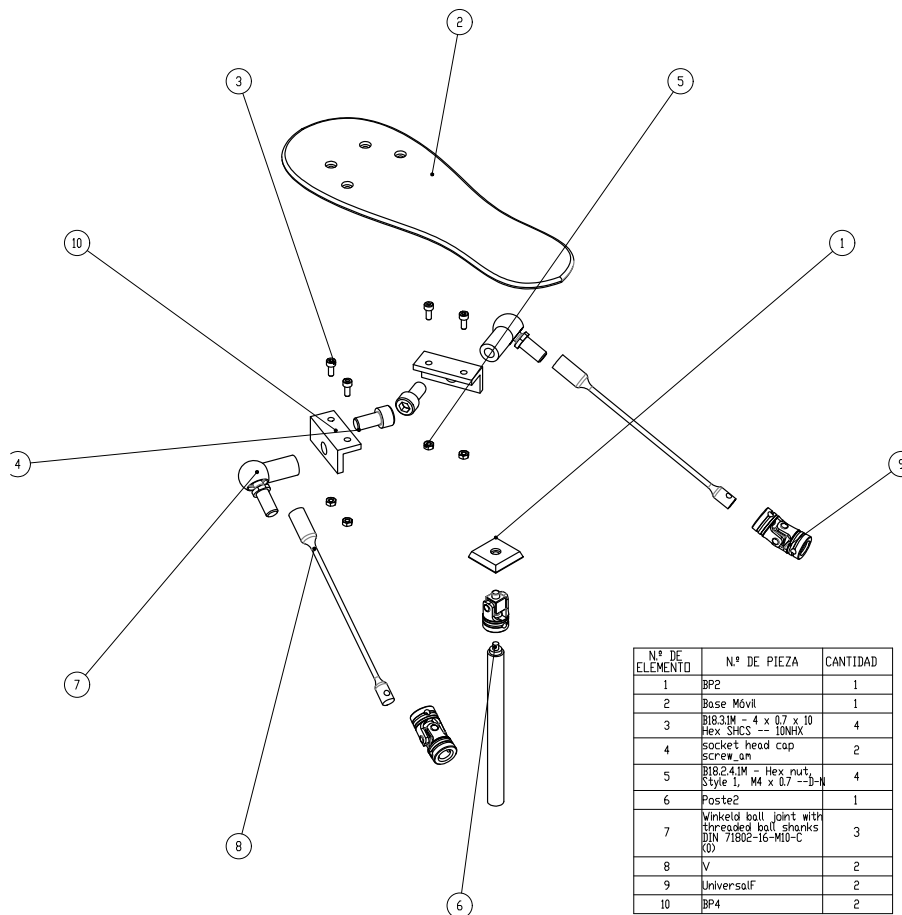


Figura 5.14: Vista explosionada 3.

El tipo de ensamble utilizado es el mecánico, es decir, la forma de unión entre los componentes puede deshacerse fácilmente o cuando convenga, por ello se usan sujetadores roscados. El procedimiento a seguir para el ensamble de las piezas del prototipo se muestra en las Figuras 5.15, 5.16 y 5.17, este incluye de forma general 3 etapas:

- ✓ Ensamblar la base fija con sujetadores roscados (Figura 5.15).
- ✓ Ensamblar cada uno de los dos actuadores y unirlos mediante sujetadores roscados a la base fija (Figura 5.16).
- ✓ Ensamblar la base móvil con sujetadores roscados, para el caso del poste central y la unión universal se utiliza un rodamiento. Posteriormente unir dicha base a los actuadores y la base fija (Figura 5.17).

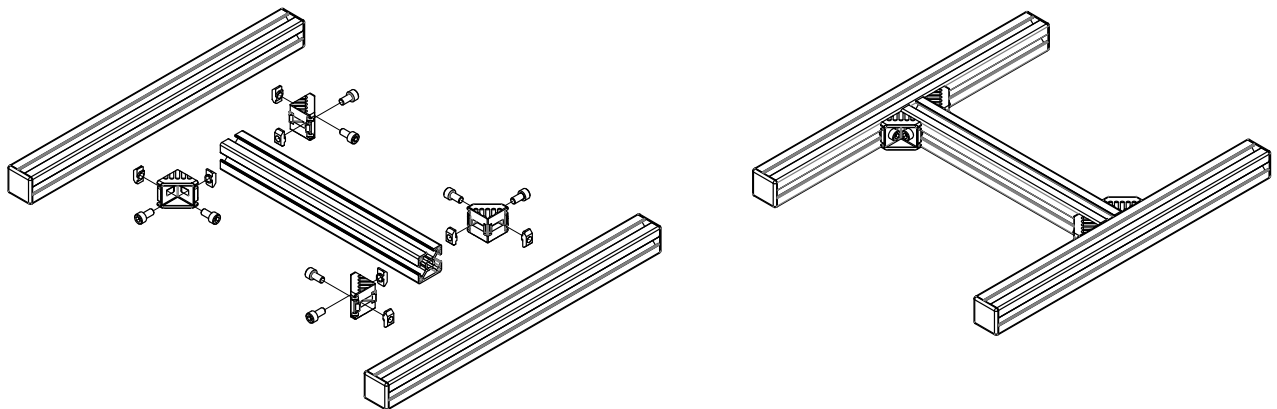


Figura 5.15: Ensamble de base fija.

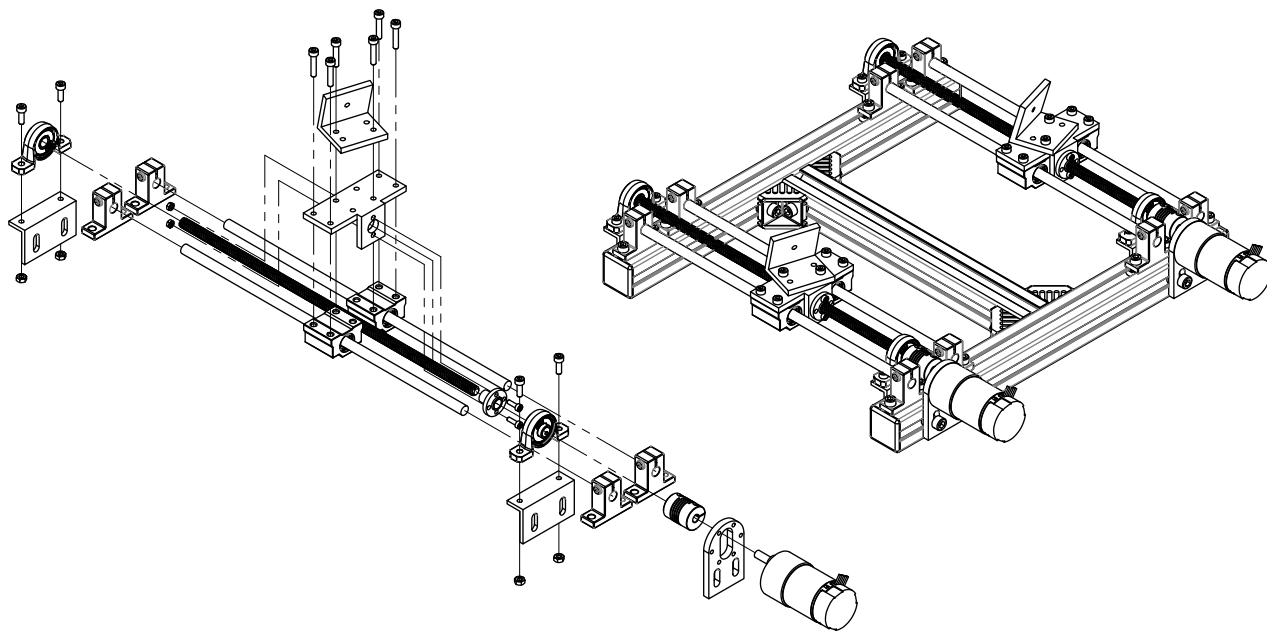


Figura 5.16: Ensamble de actuadores.

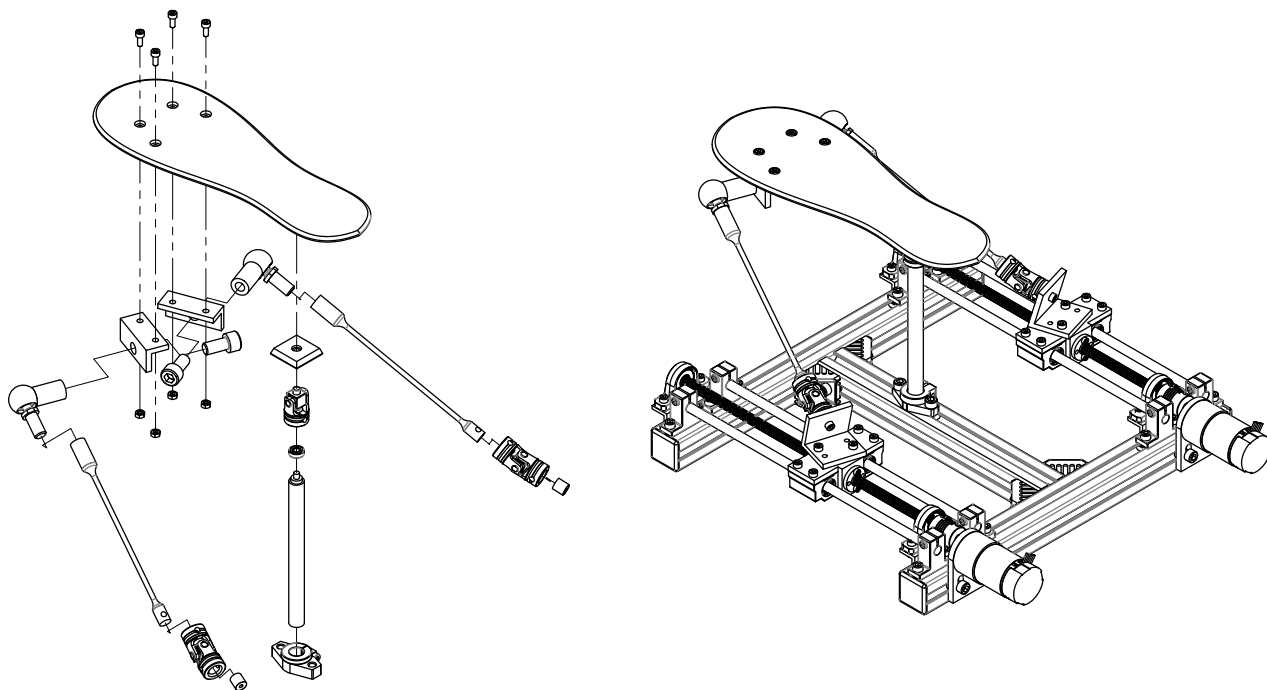


Figura 5.17: Ensamble de base móvil.

En la Figura 5.18 se aprecia el prototipo físico ensamblado. En la Figura 5.19 se muestra el prototipo realizando los movimientos de flexión, extensión, abducción y aducción. Durante la extensión, el pie es atraído hacia arriba en dirección a la pierna, el rehabilitador desplaza sus actuadores hacia adelante y la base móvil rota con un ángulo negativo máximo de 30° . La flexión es un movimiento en dirección opuesta a la extensión, en este caso el rehabilitador desplaza sus actuadores hacia atrás y la base móvil rota con un ángulo positivo máximo de 46° . Por otro lado, la aducción es el movimiento de los dedos del pie hacia adentro, para este caso, el rehabilitador desplaza sus actuadores en sentido contrario para rotar la base móvil en un ángulo positivo máximo de 36° . La abducción es el movimiento de los dedos del pie hacia afuera, para este caso, el rehabilitador desplaza sus actuadores en sentido contrario para rotar la base móvil en un ángulo negativo máximo de 36° . Por otra parte, la eversión es el giro alrededor del eje del pie, de tal manera que la planta se orienta hacia afuera, donde los actuadores se desplazan en sentido contrario para rotar la base móvil en un ángulo positivo máximo de 22° . La inversión es el movimiento contrario, en donde la base móvil rota con un ángulo negativo máximo de 17° .

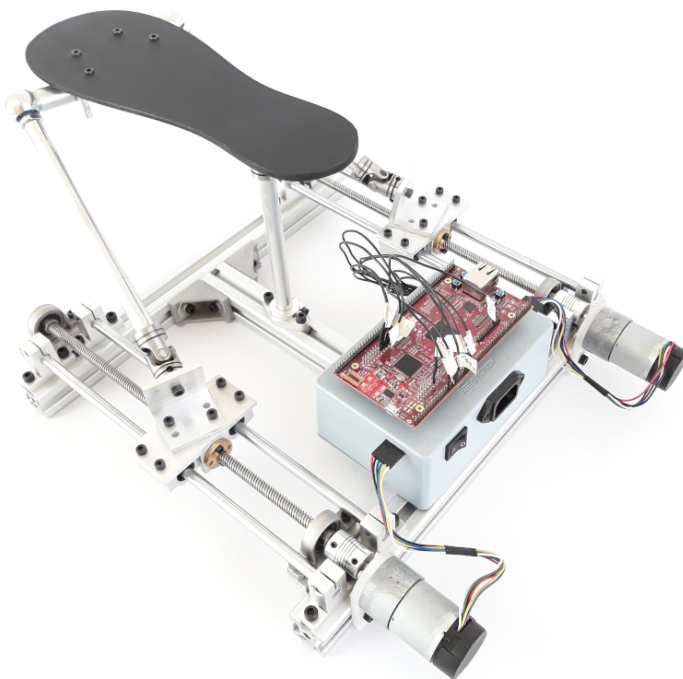


Figura 5.18: Prototipo ensamblado.

Durante la construcción del prototipo se observó que existe una singularidad del tipo 2 cuando el robot se encuentra en el segundo modo de operación, como consecuencia, ciertos grados de la base móvil no se pueden controlar. Para solucionar este problema se añade una

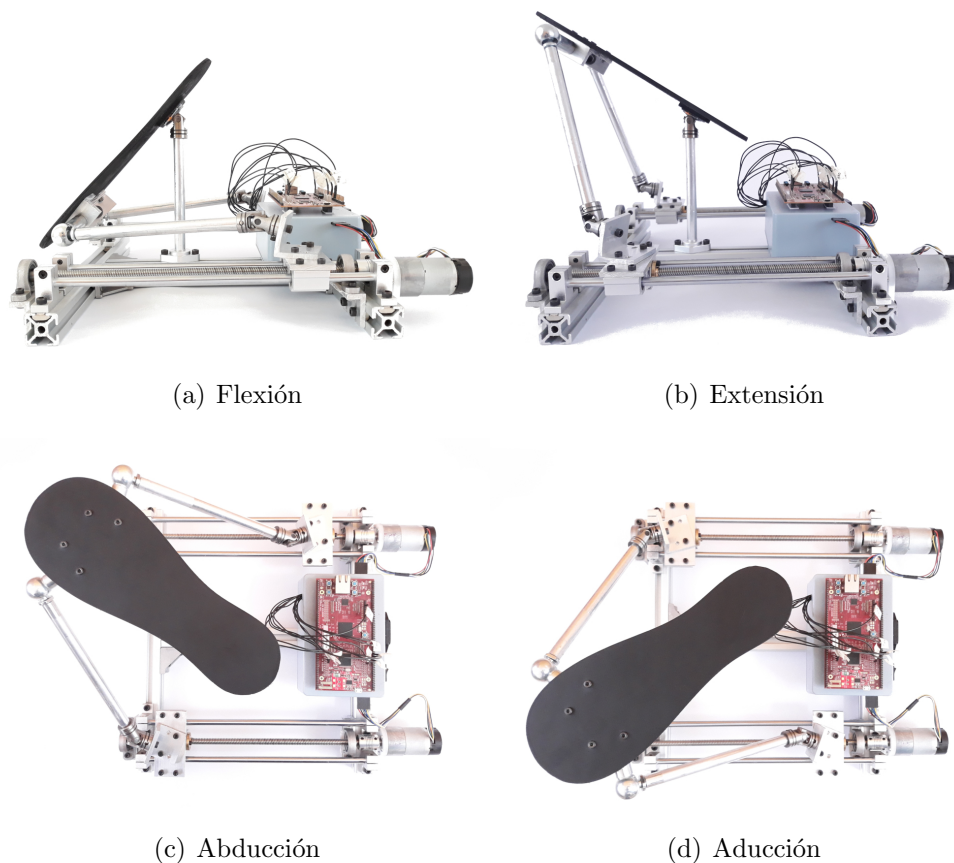


Figura 5.19: Prototipo realizando movimientos de rehabilitación, modo 1.

pieza para bloquear la rotación sobre el eje Y. Con esta restricción el robot solo realiza los movimientos de inversión/eversión y se bloquean los movimientos de abducción/aducción. El dibujo técnico correspondiente a la pieza de bloqueo se muestra en el Anexo A.

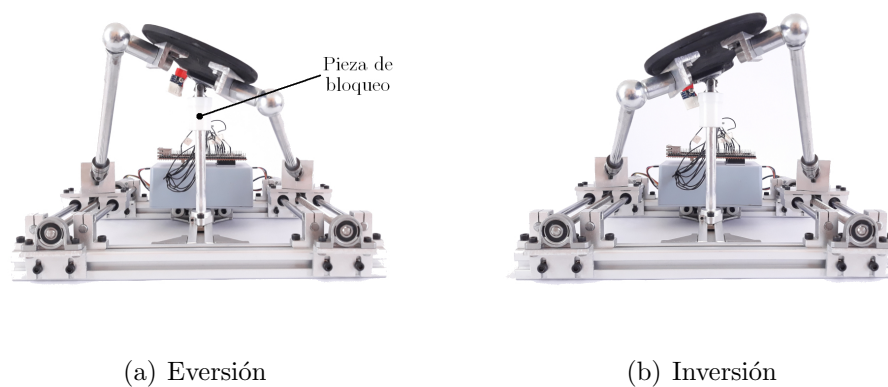
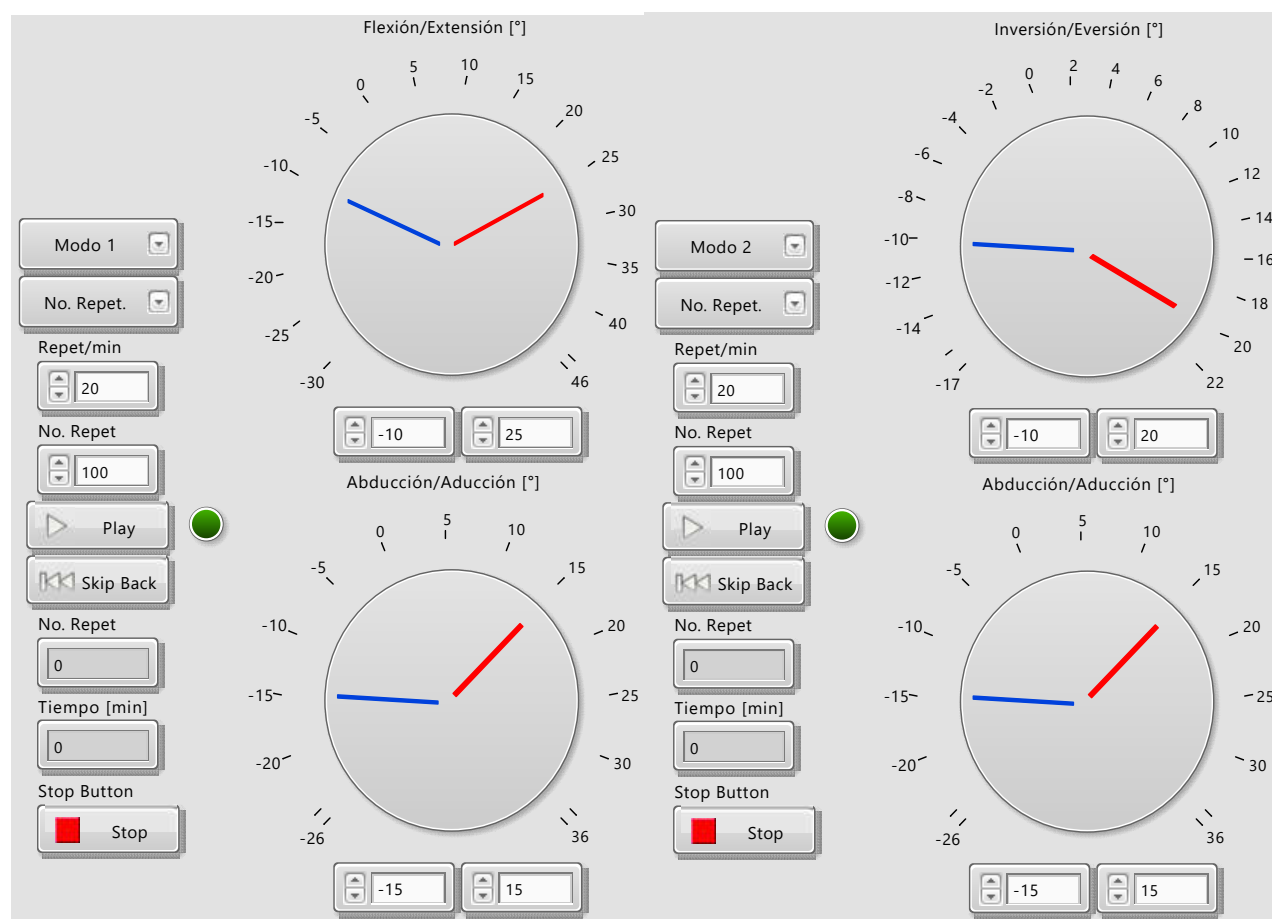


Figura 5.20: Prototipo realizando movimientos de rehabilitación, modo 2.

5.5. Interfaz de Usuario

La interfaz es el medio con que el usuario puede comunicarse con un dispositivo. Se diseñó una interfaz gráfica utilizando el programa LabVIEW™ con la finalidad de presentar una consola de controles del dispositivo rehabilitador en forma sencilla, de tal manera que facilite la operación del mismo introduciendo solamente los parámetros necesarios para un programa de terapia tales como: modo de operación, tipos de movimiento y valores de los ángulos de flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción, tiempo de duración de la terapia, número y velocidad de repeticiones, Figura 5.21.



(a) Modo 1.

(b) Modo 2.

Figura 5.21: Interfaz de usuario.

5.6. Sistema Electrónico

El sistema electrónico (Figura 5.22) se compone de los siguientes módulos:

- ✓ Microcontrolador HerculesTM TMS570LC43x LaunchPadTM.
- ✓ Puente H VNH2SP30.
- ✓ Motor de CD Pololu 37D 19:1.
- ✓ Unidad de medición inercial MPU-6050.
- ✓ Fuente de alimentación.

Donde el microcontrolador es programado para que funcione como tarjeta de adquisición de datos. El puente H es utilizado para controlar la dirección y velocidad de giro del motor de CD. Por otro lado, la unidad de medición inercial es utilizada para medir la velocidad angular, calcular la posición y aceleración angular de la base móvil. Finalmente, la fuente de alimentación convierte la tensión alterna, en varias tensiones continuas, para alimentar a los sensores y actuadores. En la Figura 5.23 se muestran los componentes instalados en el prototipo.

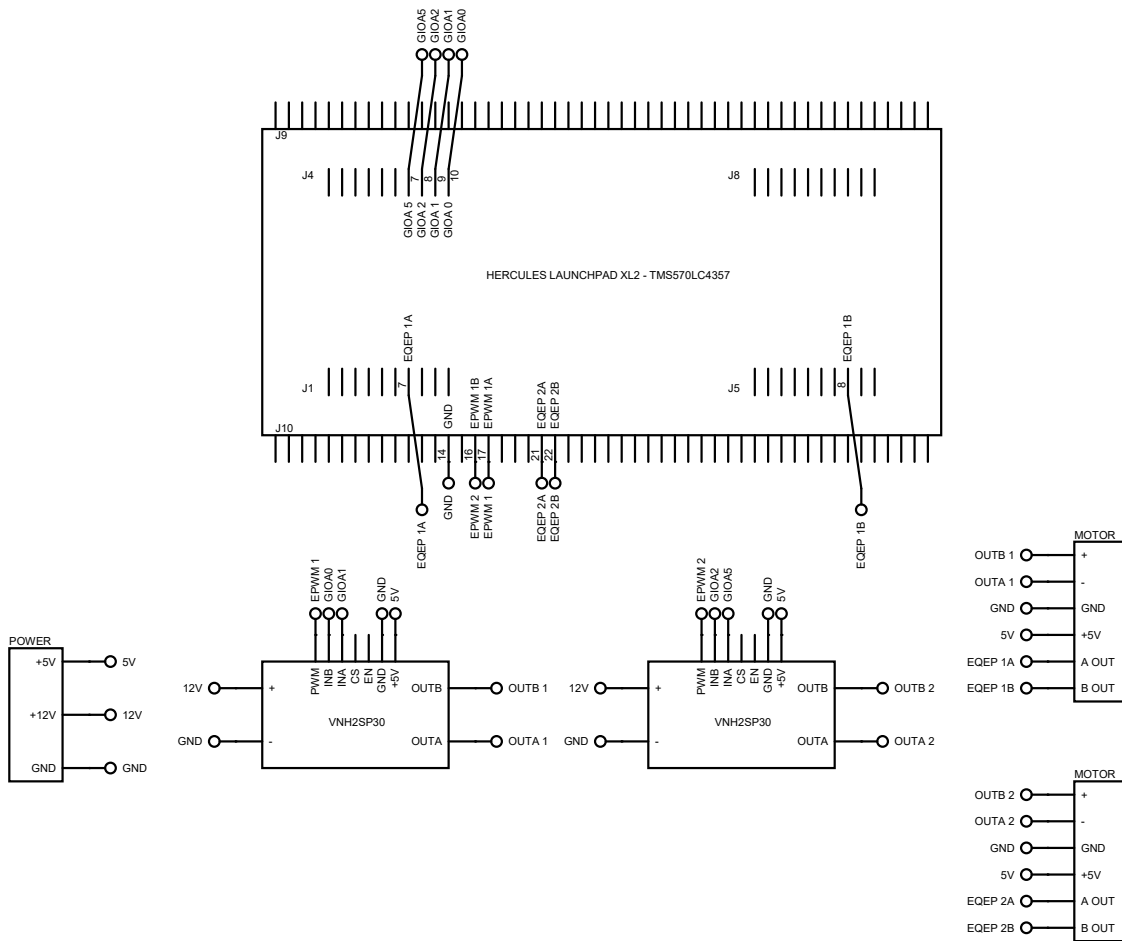


Figura 5.22: Diagrama electrónico.

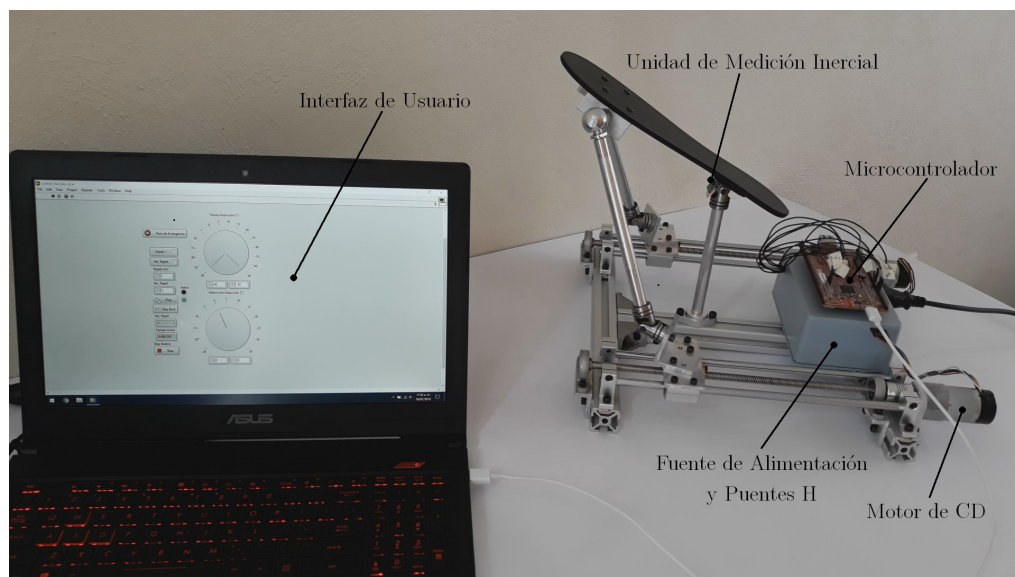


Figura 5.23: Componentes de Prototipo.

Capítulo 6

Diseño del Control del Sistema

El objetivo de este capítulo es diseñar un controlador para que la base móvil del robot paralelo siga trayectorias planificadas que corresponden a los movimientos del tobillo, para lograr esto es necesario obtener un conjunto de ecuaciones que describan el comportamiento dinámico del robot paralelo, pero la principal desventaja de este tipo de robots radica en que su configuración en lazo cerrado restringe el movimiento del sistema, lo cual dificulta la obtención sistemática de las ecuaciones que definen su comportamiento dinámico [23]. Por consiguiente, se toma solamente el comportamiento de cada uno de los actuadores (correderas lineales) y se consideran ambas dinámicas desacopladas con el fin de reducir la complejidad del modelado. Para controlar la base móvil del robot se plantea que a través de la cinemática inversa se genere una trayectoria deseada para cada uno de sus actuadores y así la base móvil siga las trayectorias planificadas. Por otro lado, el robot diseñado presenta incertidumbres estructuradas (incertidumbres paramétricas) e incertidumbres no estructuradas (fricción no lineal, perturbaciones externas y dinámicas no modeladas), por lo tanto, en este capítulo se propone diseñar un controlador en conjunto con un observador de estado extendido para compensar dichas incertidumbres.

6.1. Modelado Dinámico

La corredera lineal se compone de dos rodamientos lineales guiados por dos ejes, los cuales son impulsados por un tornillo de potencia, y a la vez, el tornillo es impulsado por un motor eléctrico (Figura 6.1). Se considera fricción viscosa, b_q , entre el carro y la guía, y entre el rotor del motor, la tuerca y el tornillo se considera fricción viscosa, b_m . Para el desplazamiento en q se tiene una fuerza de entrada denotada por F_q . Se considera como perturbación ξ a las fuerzas que generan en cada movimiento debido al peso de la base móvil y al peso del pie.

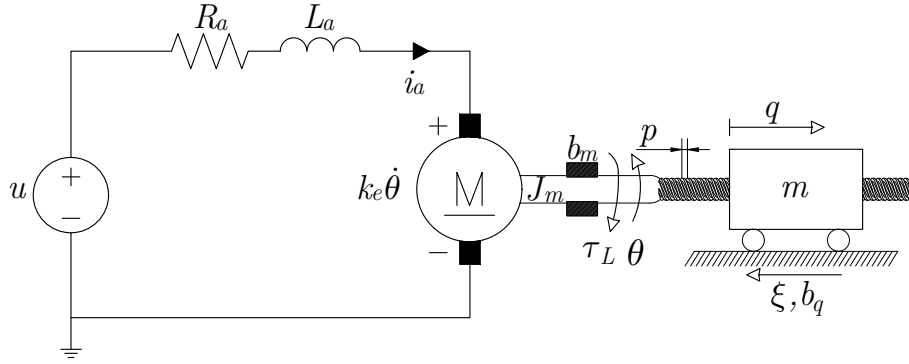


Figura 6.1: Actuador prismático.

Las ecuaciones que describen el movimiento de la masa a desplazar (ecuación (6.1)) y el motor de CD (ecuaciones (6.2) y (6.3)) mostrados en la Figura 6.1, utilizando la segunda ley de Newton y las leyes de Kirchhoff pueden ser escritas como sigue

$$m\ddot{q} = -b_q\dot{q} - \xi + F_q \quad (6.1)$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} = -R_a i_a - k_e \dot{\theta} + u \quad (6.2)$$

$$J_m \ddot{\theta} = -b_m \dot{\theta} - \tau_L + k_m i_a \quad (6.3)$$

En motores de CD de imán permanente se tiene una inductancia de armadura muy pequeña, por ello, se puede considerar $L_a \approx 0$, debido a esto se tiene que $L_a \frac{di_a}{dt} \approx 0$, en consecuencia la variable dinámica i_a se puede considerar como estática

$$\bar{i}_a = \left(\frac{u - k_e \dot{\theta}}{R_a} \right) \quad (6.4)$$

sustituyendo (6.4) en (6.3), se tiene

$$J_m \ddot{\theta} = - \left(\frac{k_m k_e}{R_a} + b_m \right) \dot{\theta} + \left(\frac{k_m}{R_a} \right) u - \tau_L \quad (6.5)$$

para acoplar las dinámicas del motor de CD y la masa a desplazar, se conoce que

$$\theta = \frac{q}{p}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{q}}{p}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{q}}{p}, \quad \tau_L = pF_q \quad (6.6)$$

donde p es el paso del tornillo de potencia.

Acoplando ambas dinámicas se tiene

$$\underbrace{\left(\frac{J_m}{p} + mp\right)}_{:=J_{eq}} \ddot{q} = - \underbrace{\left(\frac{k_m k_e}{R_a p} + \frac{b_m}{p} + b_q p\right)}_{:=\alpha} \dot{q} + \underbrace{\left(\frac{k_m}{R_a}\right)}_{:=\beta} u - p\xi \quad (6.7)$$

despejando la derivada de más alto orden

$$\ddot{q} = - \left(\frac{\alpha}{J_{eq}}\right) \dot{q} - \left(\frac{p}{J_{eq}}\right) \xi + \left(\frac{\beta}{J_{eq}}\right) u \quad (6.8)$$

representado el sistema en variables de estado, $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$ se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \Phi(x_2, \xi) + \left(\frac{\beta}{J_{eq}}\right) u \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde

$$\Phi(x_2, \xi) = - \left(\frac{\alpha}{J_{eq}}\right) x_2 - \left(\frac{p}{J_{eq}}\right) \xi$$

La función Φ se asume que es desconocida, pero se considera como acotada. Se puede considerar que la dinámica del actuador izquierdo está desacoplada de la dinámica del actuador derecho, por ello, se pueden proponer estrategias de control para el seguimiento de trayectorias planificadas de posición por separado.

6.2. Control Backstepping

En esta sección se diseña un controlador de movimiento basado en la técnica Backstepping, a partir del modelo obtenido en la sección anterior, ecuación (6.9), escogiendo como salida el desplazamiento $q = x_1$. Para esto se propone la primer función candidata de Lyapunov, la cual debe ser una función definida positiva y su derivada debe ser una función semi-definida negativa, de esta manera se propone la siguiente función

$$V(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (6.10)$$

donde z_1 denota el error de seguimiento de la salida seleccionada

$$z_1 = x_1 - x_1^* \quad (6.11)$$

La función candidata de Lyapunov cumple con ser definida positiva $V(z_1) > 0 - \{0\}$, donde su derivada temporal es

$$\dot{V}(z_1) = z_1 \dot{z}_1 \quad (6.12)$$

donde \dot{z}_1 es la derivada del error de seguimiento

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_1^* = x_2 - \dot{x}_1^* \quad (6.13)$$

sustituyendo \dot{x}_1 del modelo, ecuación (6.9) en (6.13)

$$\dot{V}(z_1) = z_1 (x_2 - \dot{x}_1^*) \quad (6.14)$$

como paso intermedio se propone el error de seguimiento z_2 , el cual involucra al controlador virtual $\gamma(x)$ para conseguir que $\dot{V}(z_1)$ sea semi-definida negativa

$$z_2 = x_2 - \gamma(x) \quad (6.15)$$

despejando x_2 de la ecuación anterior

$$x_2 = z_2 + \gamma(x) \quad (6.16)$$

sustituyendo la ecuación anterior (6.16) en (6.14)

$$\dot{V}(z_1) = z_1 (z_2 + \gamma(x) - \dot{x}_1^*) \quad (6.17)$$

Ahora se propone un controlador virtual $\gamma(x)$, para cancelar el término \dot{x}_1^* y conseguir que $\dot{V}(z_1)$ sea semi-definida negativa

$$\gamma(x) = -k_1 z_1 + \dot{x}_1^* \quad (6.18)$$

donde $k_1 > 0$ es un valor constante que define la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable z_1 . Sustituyendo (6.18) en (6.17)

$$\dot{V}(z_1) = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (6.19)$$

Proponiendo una función de control de Lyapunov como la siguiente

$$V(z_1, z_2) = V(z_1) + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (6.20)$$

Derivando con respecto al tiempo la función de Lyapunov propuesta, se tiene

$$\dot{V}(z_1, z_2) = \dot{V}(z_1) + z_2 \dot{z}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2 (z_1 + \dot{z}_2) \quad (6.21)$$

donde \dot{z}_2 se obtiene de derivar la ecuación (6.15)

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\gamma}(x) = \dot{x}_2 + k_1 \dot{z}_1 - \ddot{x}_1^* = \Phi(x_2, \xi) + \frac{\beta}{J_{eq}} u + k_1 \dot{z}_1 - \ddot{x}_1^* \quad (6.22)$$

Finalmente se propone una ley de control que haga que la función $\dot{V}(z_1, z_2)$ sea semi-definida negativa

$$u = -\frac{J_{eq}}{\beta} \left[k_2 z_2 + z_1 + \hat{\Phi}(x_2, \xi) + k_1 \dot{z}_1 - \ddot{x}_1^* \right] \quad (6.23)$$

donde $\hat{\Phi}(x_2, \xi)$ es una función a ser estimada a través de un observador de estado extendido y $k_2 > 0$ es un valor constante que define la sensibilidad proporcional del error de seguimiento de la variable z_2 . Sustituyendo la ley de control (6.23) en (6.21) se obtiene

$$\dot{V}(z_1, z_2) = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 \tilde{\Phi}(x_2, \xi) \quad (6.24)$$

donde

$$\tilde{\Phi}(x_2, \xi) = \Phi(x_2, \xi) - \hat{\Phi}(x_2, \xi) \quad (6.25)$$

Para que la ecuación (6.24) sea semi-definida negativa y asegurar la estabilidad asintótica, el error de estimación de la función Φ debe estar acotado como sigue

$$\tilde{\Phi} \text{sign}(z_2) \leq k_2 |z_2| \quad (6.26)$$

6.3. Observador de Estado Extendido (OEE)

En esta sección se diseña un observador de estado extendido para la estimación en línea de la función Φ y los estados x_1 y x_2 , donde los valores estimados son adaptados a las referencias del controlador Backstepping.

Para el diseño del observador de estado extendido se hacen las siguientes suposiciones:

- ✓ La única variable disponible para la medición es x_1 .
- ✓ Los parámetros R_a , J_m , k_m , m y p son conocidos.
- ✓ El valor estimado de la función Φ que incluye incertidumbres estructuradas y no estruc-

turadas, se considera una función desconocida, pero acotada.

- ✓ El estimado de la función desconocida Φ es denotada por η_1 .
- ✓ Los estimados de la salida x_1 y sus derivadas sucesivas son denotadas por $y_1 = \hat{x}_1$ y $y_2 = \dot{\hat{x}}_2$.

Tomando el modelo dinámico de la corredera, ecuación (6.9), se diseña el observador de estado extendido como sigue

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 + \lambda_3 (x_1 - y_1) \\
 \dot{y}_2 &= \eta_1 + \left(\frac{\beta}{J_{eq}}\right) u + \lambda_2 (x_1 - y_1) \\
 \dot{\eta}_1 &= \eta_2 + \lambda_1 (x_1 - y_1) \\
 \dot{\eta}_2 &= \lambda_0 (x_1 - y_1)
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

La selección adecuada de los coeficientes constantes $\{\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0\}$, como coeficientes de un polinomio Hurwitz, es tal que, las raíces del polinomio característico domine el comportamiento de la dinámica del error de estimación de salida, ubicándolas en el semiplano izquierdo del plano complejo. Por lo tanto, se escogió un polinomio de cuarto orden dado por

$$P(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^2 \tag{6.28}$$

De aquí, se tiene que los valores finales de los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= \omega_n^4 \\
 \lambda_1 &= 4\zeta\omega_n^3 \\
 \lambda_2 &= 4\zeta^2\omega_n^2 + 2\omega_n^2 \\
 \lambda_3 &= 4\zeta\omega_n
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

para $0 < \zeta < 1$ y $\omega_n > 0$

6.4. Trayectorias Deseadas

Las trayectorias deseadas de los actuadores q^* , \dot{q}^* y \ddot{q}^* se generan a través de la cinemática inversa (ecuaciones (4.48) y (4.49)). Las trayectorias deseadas de la base móvil ψ_n^* , $\dot{\psi}_n^*$ y $\ddot{\psi}_n^*$ que corresponden a los movimientos del tobillo (Figura 6.2), se calculan mediante un polinomio

del tipo Bézier [84], dado por

$$\psi_n^* = \begin{cases} \bar{\psi}_{n_0} & \text{para } t < t_0 \\ \bar{\psi}_{n_0} + (\bar{\psi}_{n_f} - \bar{\psi}_{n_0}) \phi(t, t_0, t_f) & \text{para } t_0 \leq t \leq t_f \\ \bar{\psi}_{n_f} & \text{para } t > t_f \end{cases} \quad (6.30)$$

$\forall n = x, y, z$.

donde

$$\phi(t, t_0, t_f) = \left(\frac{t - t_0}{t_f - t_0} \right)^5 \sum_{i=0}^5 (-1)^i \sigma_i \left(\frac{t - t_0}{t_f - t_0} \right)^i$$

con $\sigma_0 = 252$, $\sigma_1 = 1050$, $\sigma_2 = 1800$, $\sigma_3 = 1575$, $\sigma_4 = 700$, $\sigma_5 = 126$.

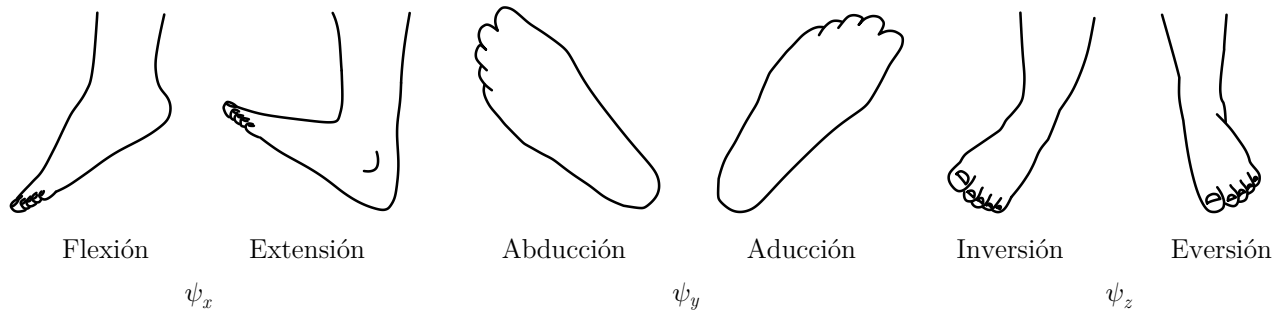


Figura 6.2: Movimientos del tobillo [53].

6.5. Resultados de Co-simulación

Para validar el controlador y el observador propuestos se realiza una co-simulación entre Matlab-Simulink[®] y MSC Adams[™]. En la Figura 6.3 se muestra el esquema de control utilizado.

El prototipo virtual es mostrado en la Figura 6.4, en el cual se adiciona una perturbación externa ξ_P (Figura 6.5) al robot con el propósito de simular el par de torsión necesario para realizar el movimiento pasivo de flexión/extensión en una persona. Dicho par de torsión es obtenido de [3], donde participaron nueve sujetos sanos (ninguno de los participantes informó problemas musculoesqueléticos, de columna vertebral, enfermedades neuromusculares u ortopédicos) de 25 ± 3 años. Este par de torsión se aplica en la base móvil en dirección del eje X global, donde dicho par de torsión se puede aproximar mediante un polinomio de cuarto orden, el cual está dado por

$$\xi_P = 4.2614 \times 10^{-6} \psi_x^4 - 6.4331 \times 10^{-4} \psi_x^3 + 0.0212 \psi_x^2 - 0.4632 \psi_x + 4.9973 \quad (6.31)$$

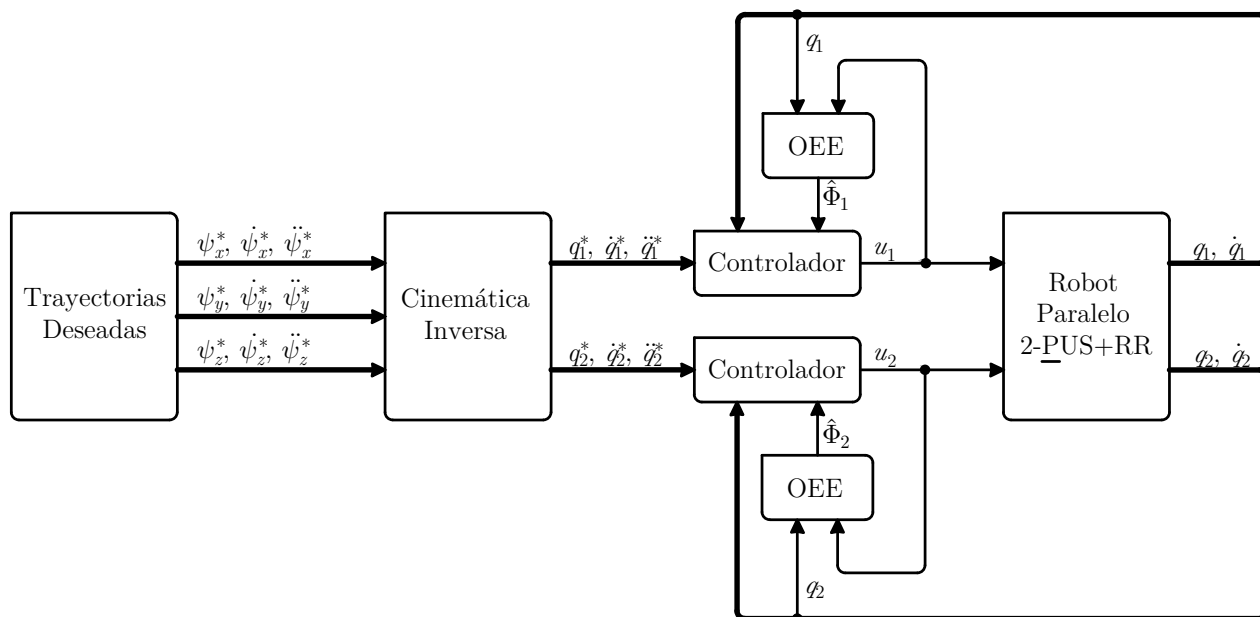


Figura 6.3: Esquema de control.

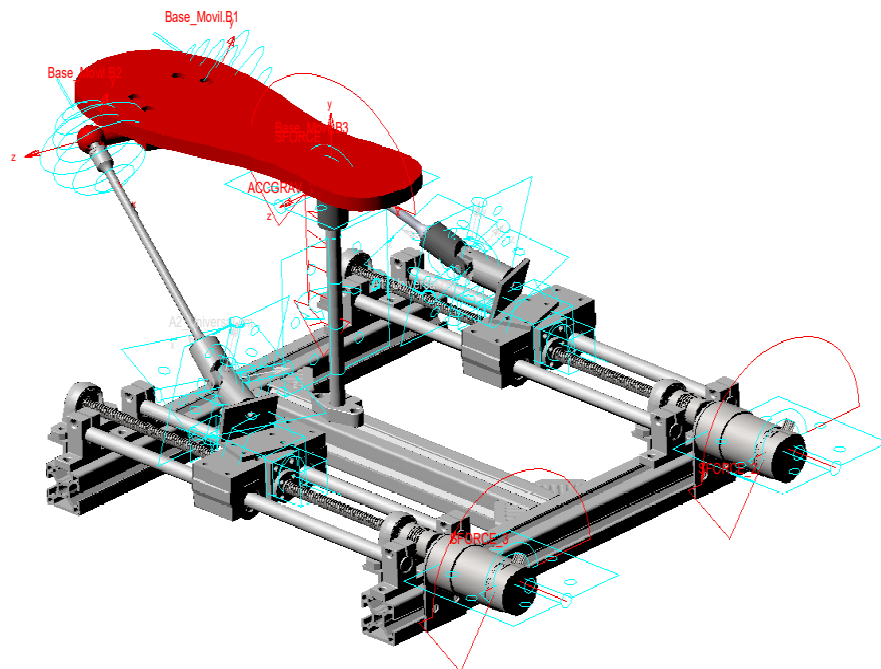
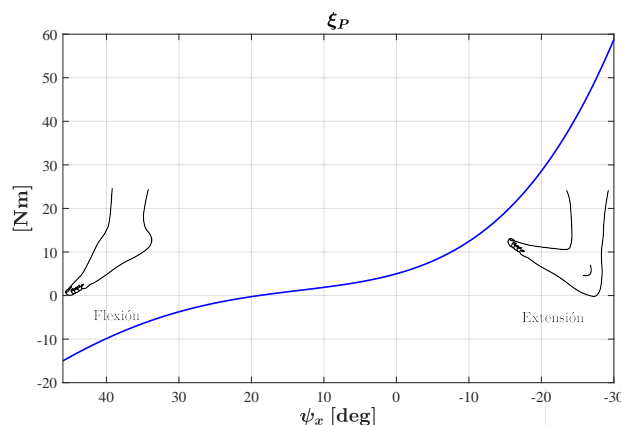


Figura 6.4: Prototipo virtual en MSC AdamsTM.

Con el fin transformar la entrada de control del prototipo virtual y simular la dinámica de los motores de CD (ecuación (6.5)), se sustituye (6.6) en (6.5) y despejando para τ_L , se


 Figura 6.5: Perturbación externa ξ_P .

obtiene

$$\tau_L = \left(\frac{k_m}{R_a} \right) u - \left(\frac{J_m}{p} \right) \ddot{q} - \left(\frac{k_m k_e}{R_a p} + \frac{b_m}{p} \right) \dot{q} \quad (6.32)$$

donde τ_L es el par de torsión aplicado al eje del motor de CD y u es la ley de control diseñada anteriormente (ecuación (6.23)).

En la Tabla 6.1 se muestran los parámetros del prototipo virtual utilizados en la co-simulación.

Tabla 6.1: Parámetros del robot y ganancias

Parámetro	Valor	Unidades
B_1	(-59.09097697, 0, 162.57983565)	mm
B_2	(59.09097697, 0, 162.57983565)	mm
b	$115.37157978 \times 10^{-3}$	m
c	$100.45008479 \times 10^{-3}$	m
d_1	206×10^{-3}	m
d_2	206×10^{-3}	m
m	0.2824474643	kg
R_a	2.4	Ω
k_m	0.1186	N·m/A
J_m	0.0005	kg·m ²
p	0.008	m
k_1	600	-
k_2	580	-
ζ	1	-
ω_n	40	-

Los resultados de la co-simulación utilizando la ley de control (ecuación (6.23)) y el observador (ecuación (6.27)) se muestran en las Figuras 6.6-6.7.

En las Figuras 6.6(a) y 6.6(b) se muestra el seguimiento para cada actuador y las trayectorias generadas a través de la cinemática inversa. El seguimiento de la base móvil y las

trayectorias generadas a través del polinomio tipo Bézier (ecuación (6.30)) es mostrado en las Figuras 6.6(d) y 6.6(e), donde el movimiento de flexión/extensión comienza en $\bar{\psi}_x = 0^\circ$ y termina en $\bar{\psi}_x = 46^\circ$ en el intervalo de tiempo $t = [0s, 1s]$, a partir del intervalo $t = [1s, 2s]$ dicho movimiento empieza en $\bar{\psi}_x = 46^\circ$ y termina en $\bar{\psi}_x = -30^\circ$. El movimiento de abducción/aducción comienza en $\bar{\psi}_y = 0^\circ$ y termina en $\bar{\psi}_y = 15^\circ$ en el intervalo de tiempo $t = [0s, 2s]$.

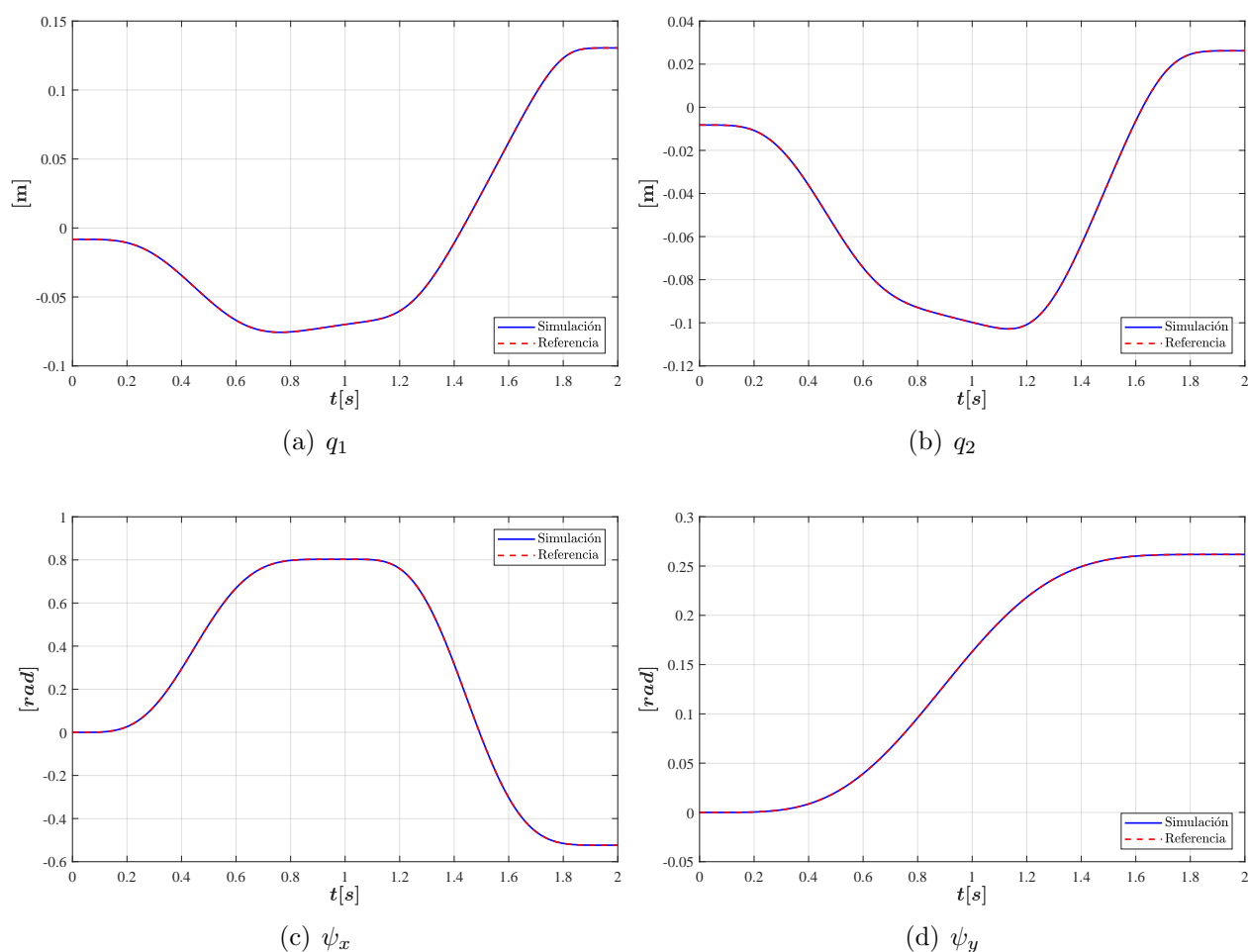


Figura 6.6: Respuesta de seguimiento de posición de los actuadores y la base móvil.

Como se puede observar en la Figura 6.7 el controlador junto con el observador minimizan el error de seguimiento de trayectorias aún cuando se aplican perturbaciones externas al robot.

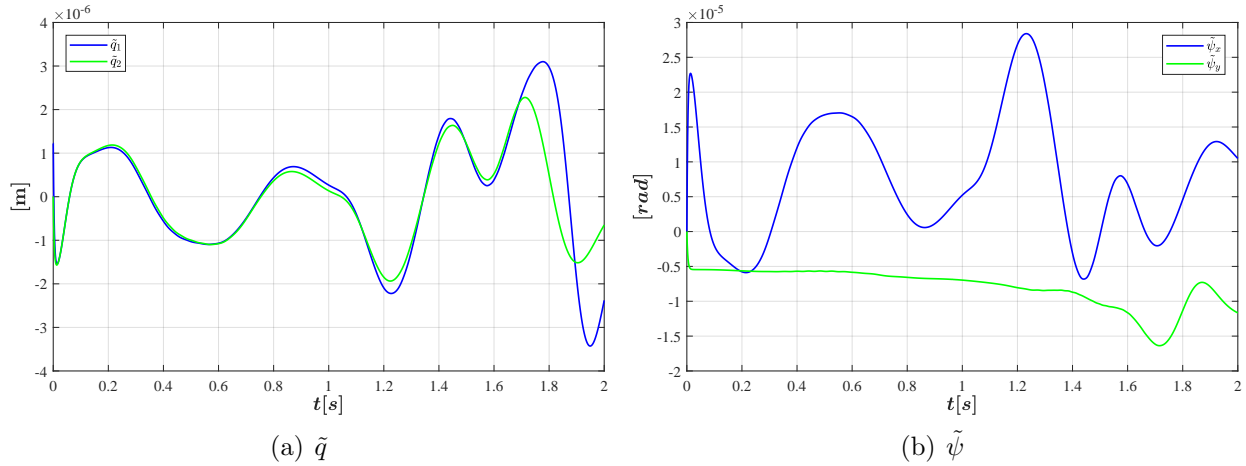


Figura 6.7: Dinámica del error.

6.6. Implementación del Control en el Sistema Físico

Se realizó una prueba de movimiento de flexión en una persona sana de edad adulta. En dicha prueba se utilizaron los siguientes parámetros para la trayectoria deseada (ecuación (6.30)) que corresponde al movimiento de flexión: $\bar{\psi}_{x_0} = 0^\circ$ (valor inicial del ángulo de flexión), $\bar{\psi}_{x_f} = 30^\circ$ (valor final del ángulo de flexión) en el intervalo de tiempo $t = [1.25s, 4.25s]$ ($t_0 = 1.25s$ y $t_f = 4.25s$), a partir del intervalo $t = [4.25s, 7.25s]$ dicho movimiento comienza en $\bar{\psi}_{x_0} = 30^\circ$ y termina en $\bar{\psi}_{x_f} = 0^\circ$.

El esquema de control utilizado se muestra en la Figura 6.12. Los resultados de la implementación del controlador y observador diseñado se muestran en las Figuras 6.8-6.10. En la Figura 6.8 se muestra la respuesta de seguimiento de posición de los actuadores, donde la posición del actuador es medida por un encoder incremental con una resolución de 150 pulsos por milímetro.

En la Figura 6.9 se muestra la respuesta de seguimiento de las trayectorias deseadas del movimiento de flexión, donde la velocidad angular (línea azul) de dicho movimiento es medida con una unidad de medición inercial (MPU6050), a través de éste sensor se obtiene un valor estimado de la posición angular (línea azul) y derivando dicha velocidad con respecto al tiempo se obtiene la aceleración (línea azul). En la misma Figura se muestra la posición, velocidad y aceleración de la base móvil calculada a través de la cinemática directa (línea verde). Para comparar las derivadas de las trayectorias deseadas de la base móvil con las velocidades y aceleraciones angulares obtenidas con la cinemática directa, es necesario utilizar las transformaciones mostradas en la sección 4.4. En la Figura 6.12 se muestra el diagrama de bloques del proceso de dichas transformaciones.

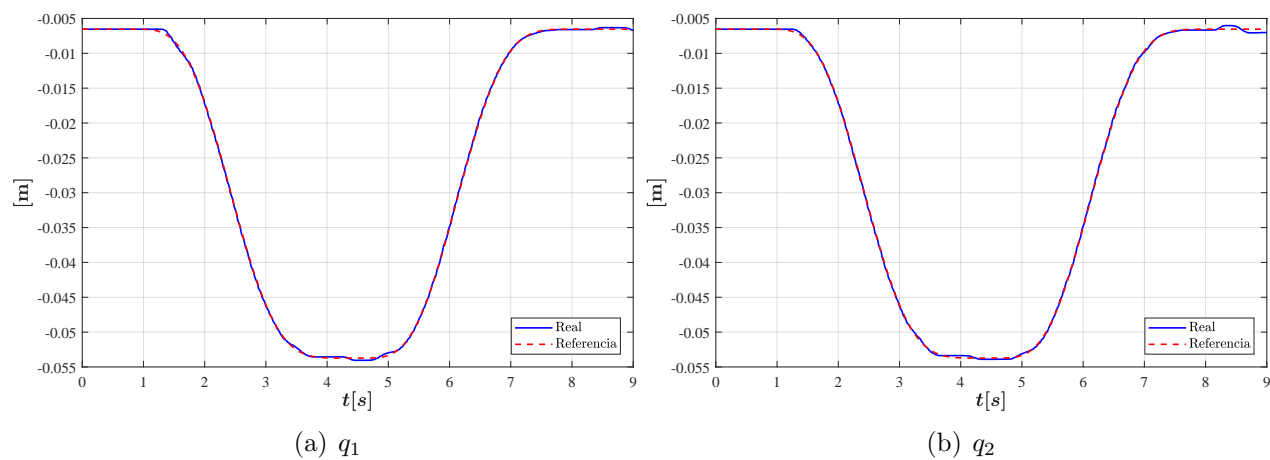


Figura 6.8: Respuesta de seguimiento de las trayectorias deseadas de los actuadores.

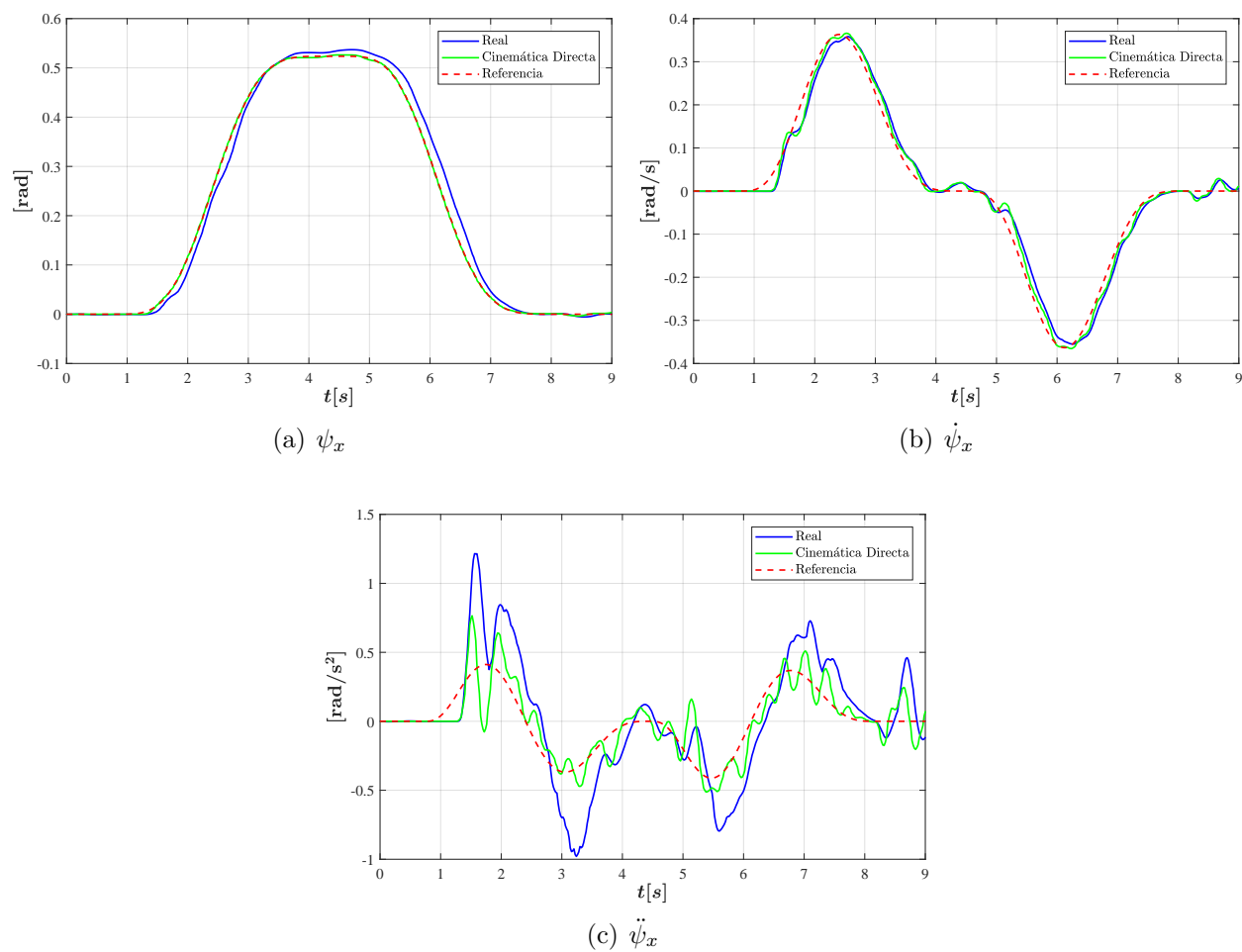


Figura 6.9: Respuesta de seguimiento de las trayectorias deseadas de la base móvil.

Como se observa en la Figura 6.10(a) los actuadores presentan un error de seguimiento menor a un milímetro. Por otro lado, la base móvil presenta un error de seguimiento entre el valor estimado mediante la unidad de medición inercial y la trayectoria deseada menor a 3.5 grados (6.10(b)), tomando en cuenta los valores calculados mediante la cinemática directa el error de seguimiento es menor a medio grado (6.10(c)). En conclusión, el controlador junto con el observador minimizan el error de seguimiento de trayectorias aún cuando se aplican perturbaciones externas al robot.

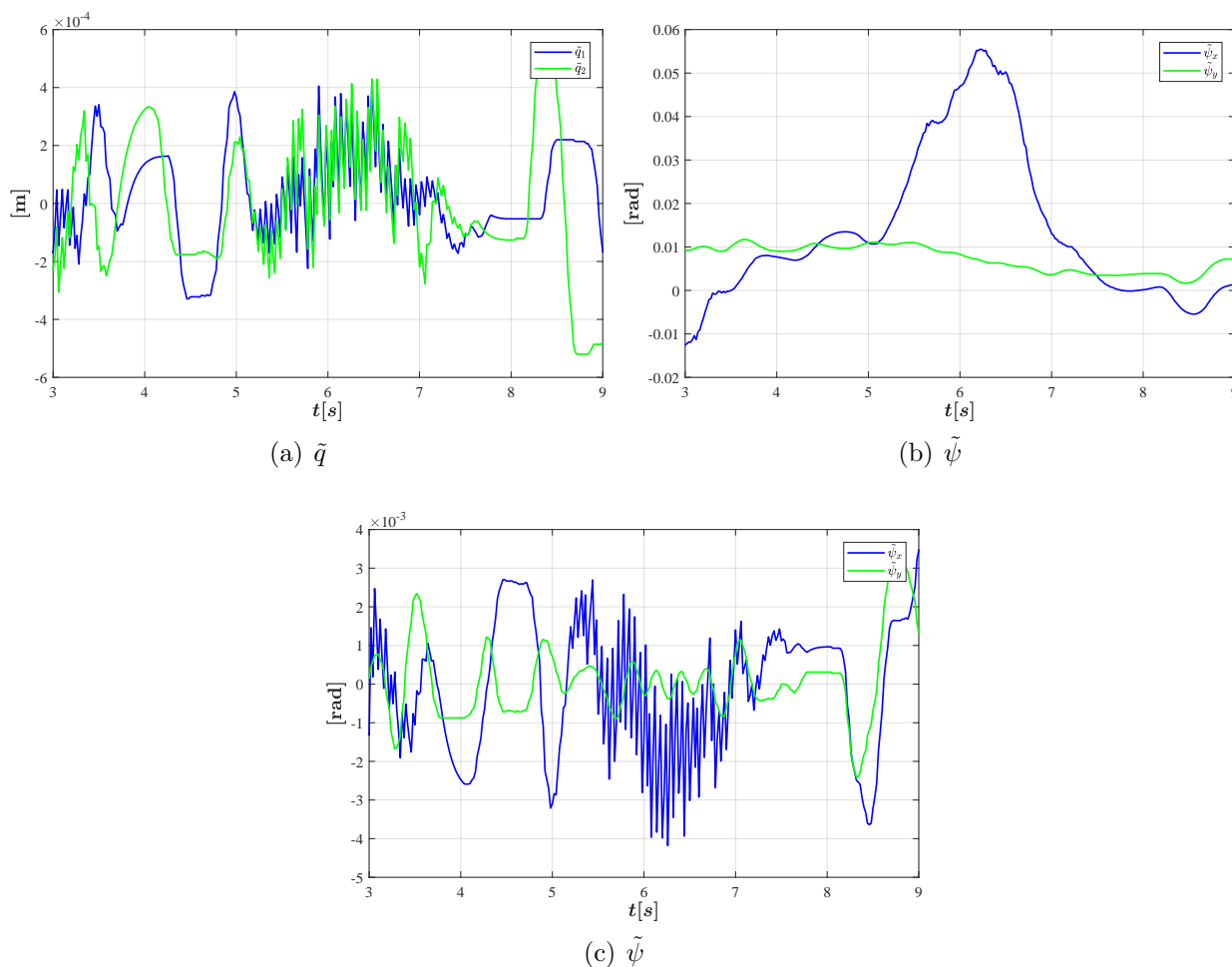


Figura 6.10: Dinámica del error.

En la Figura 6.11 se muestra el seguimiento de trayectoria de la base móvil para los movimientos de aducción (Figura 6.11(a)) y eversión (Figura 6.11(b))

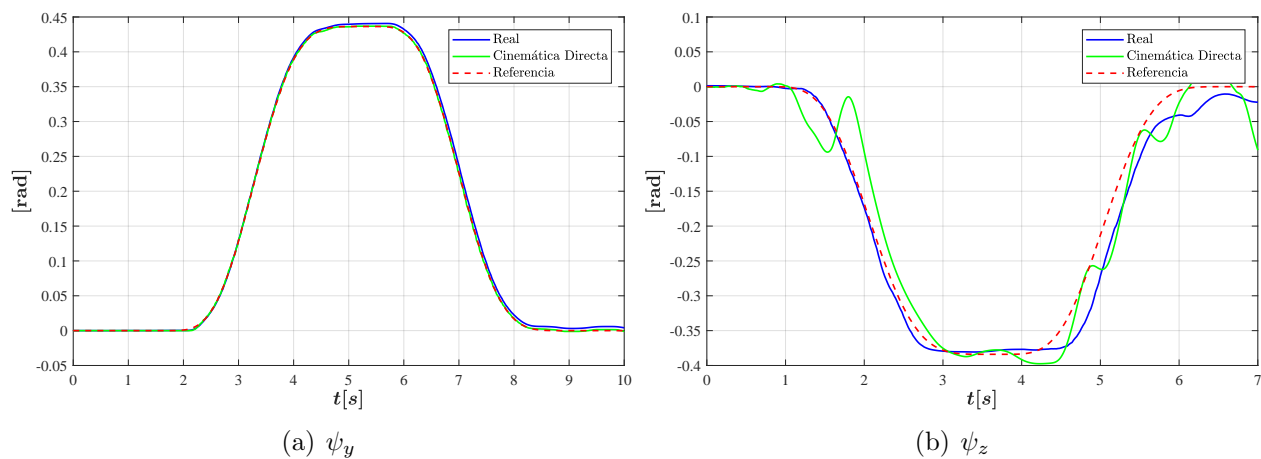


Figura 6.11: Respuesta de seguimiento de las trayectorias deseadas de la base móvil.

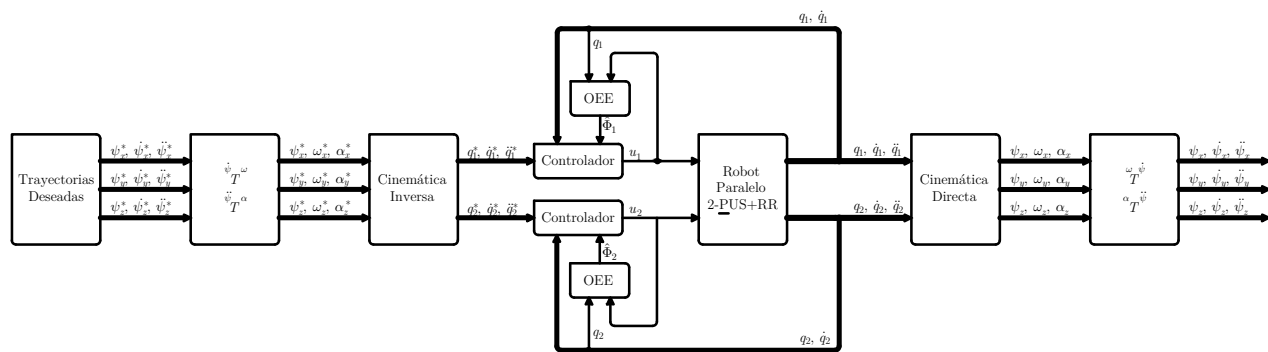


Figura 6.12: Esquema de control.

Conclusiones y Trabajos Futuros

Conclusiones

En este trabajo se diseñó un robot paralelo con la configuración 2-PUS + RR, para realizar los movimientos de rehabilitación del tobillo en todo su intervalo, cumpliendo así con el objetivo general de la tesis.

El análisis de posición fue planteado haciendo uso de ecuaciones de restricciones mecánicas, las cuales fueron resueltas empleando la eliminación dialítica de Sylvester. Por otra parte, los análisis de velocidad y aceleración son desarrollados utilizando la teoría de tornillos, para obtener los estados de la velocidad y de la aceleración de la plataforma móvil del robot. Las expresiones obtenidas son lineales, simples y compactas a través del uso de la forma Klein del álgebra de Lie. La ventaja de utilizar estas expresiones es que no se necesita conocer las velocidades y aceleraciones de articulaciones pasivas para resolver dichos análisis, además, es posible identificar fácilmente las configuraciones singulares del robot porque estas expresiones son funciones de los tornillos que se asocian a una dirección vectorial.

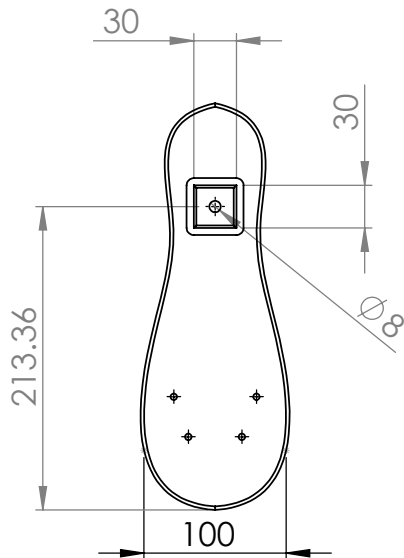
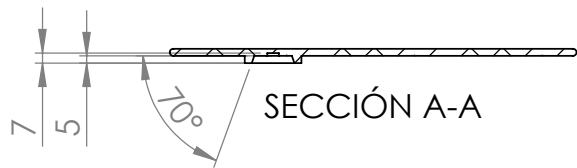
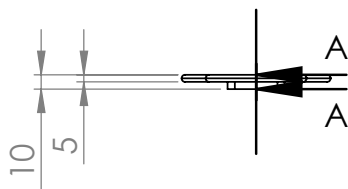
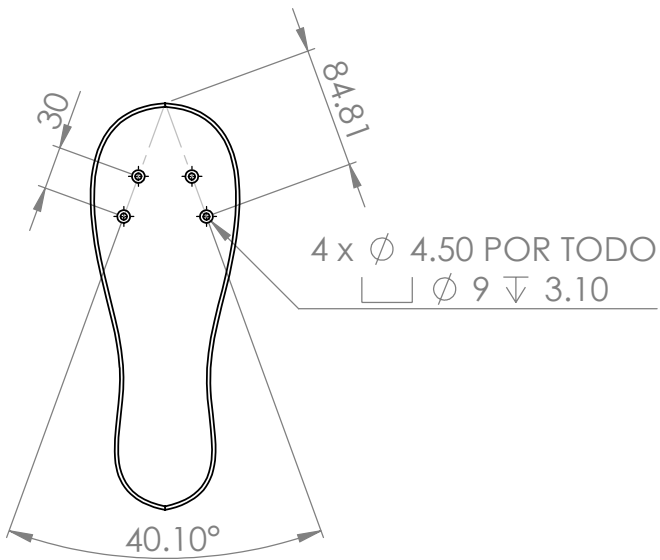
Considerando que el robot paralelo es altamente no lineal, a través de la cinemática inversa se logró obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, utilizar un esquema de control descentralizado basado en la técnica Backstepping y observador de estado extendido lineal (OEE), con esto se logra resolver el problema de seguimiento de trayectorias y estimación de las incertidumbres estructuradas y no estructuradas que el robot presenta. Los resultados experimentales muestran un buen rendimiento en el seguimiento de posición angular bajo perturbaciones desconocidas para el controlador. El algoritmo OEE junto con el control permite disminuir el error de seguimiento de la plataforma móvil al minimizar el error de posición en cada actuador.

Trabajos Futuros

- ✓ Implementar un sistema de comunicación inalámbrica entre el dispositivo de adquisición de datos y la PC para permitir la operación del robot rehabilitador en forma remota.
- ✓ Diseñar una base ergonómica para el pie con la finalidad de lograr una mejor estabilidad y comodidad al realizar la terapia.
- ✓ Rediseñar el sistema de electrónica de potencia del robot para reducir el calentamiento.
- ✓ Realizar pruebas con pacientes que padezcan alguna lesión o enfermedad en el tobillo.
- ✓ Implementar un controlador de fuerza o impedancia con la finalidad de que el robot realice rehabilitación activa.

Anexo A

Dibujos Técnicos



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:

HASTA 3 \pm 0.1
 3 A 6 \pm 0.12
 6 A 10 \pm 0.15
 MAYOR A 10 \pm 0.18

MATERIAL:

Aluminio 6061

N.º DE DIBUJO

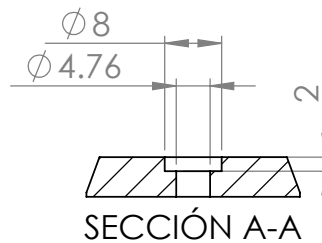
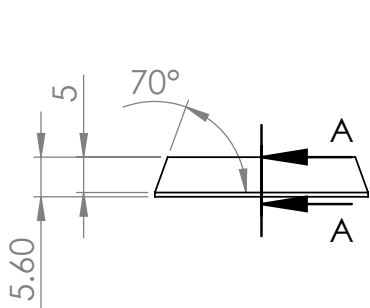
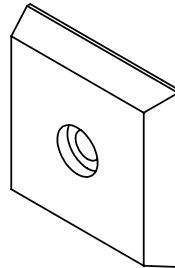
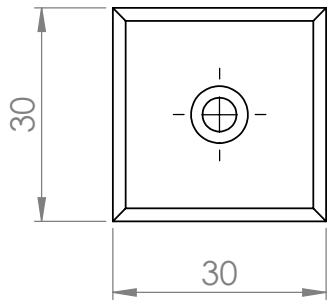
Base Móvil

A4

PESO: 302.88 g

ESCALA: 1:5

HOJA 1 DE 1



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:

HASTA 3 ± 0.1
 3 A 6 ± 0.12
 6 A 10 ± 0.15
 MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:

Aluminio 6061

N.º DE DIBUJO

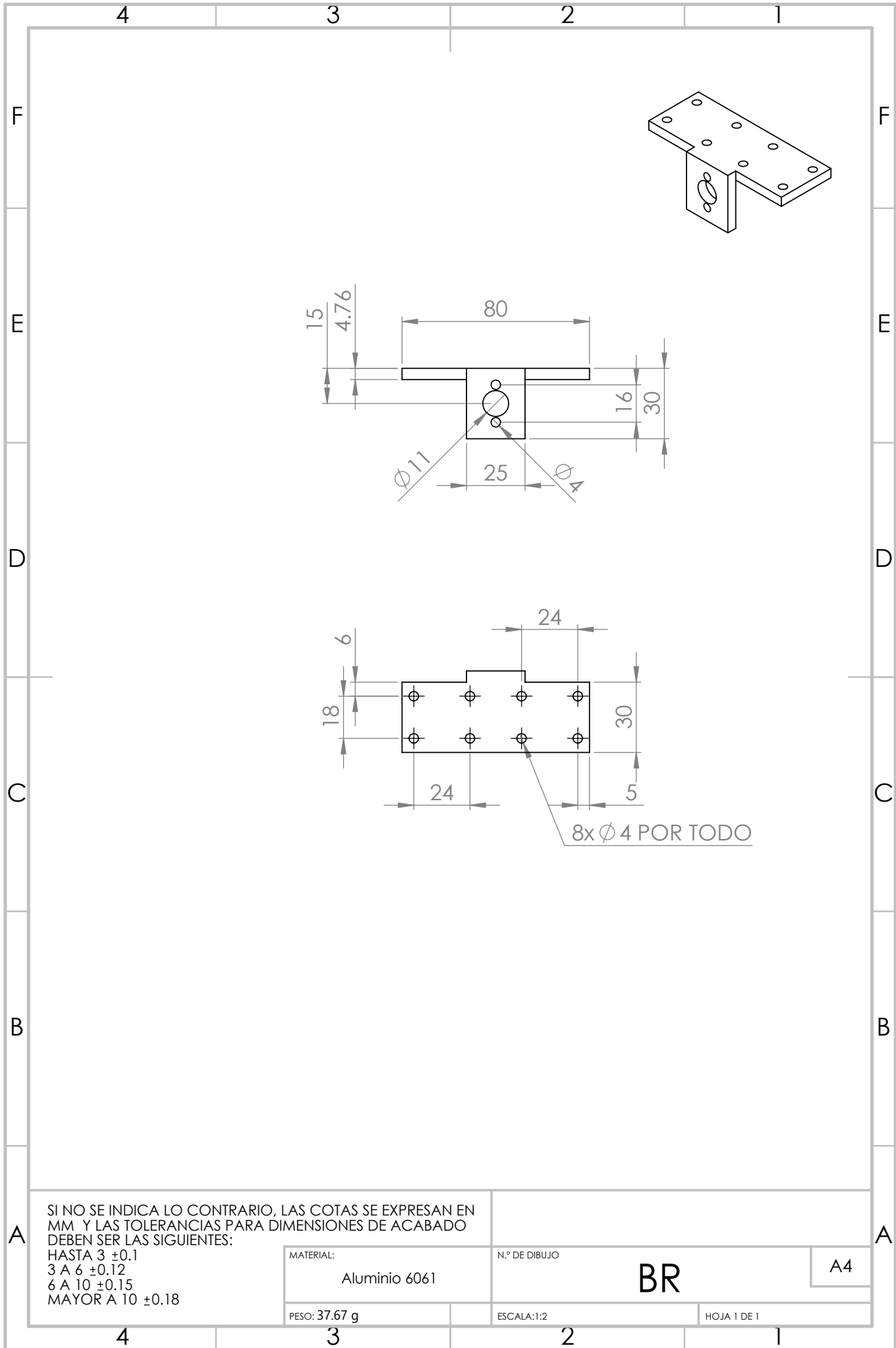
BP2

A4

PESO: 4.35 g

ESCALA: 1:1

HOJA 1 DE 1



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:
 HASTA 3 ± 0.1
 3 A 6 ± 0.12
 6 A 10 ± 0.15
 MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:
 Aluminio 6061

N.º DE DIBUJO

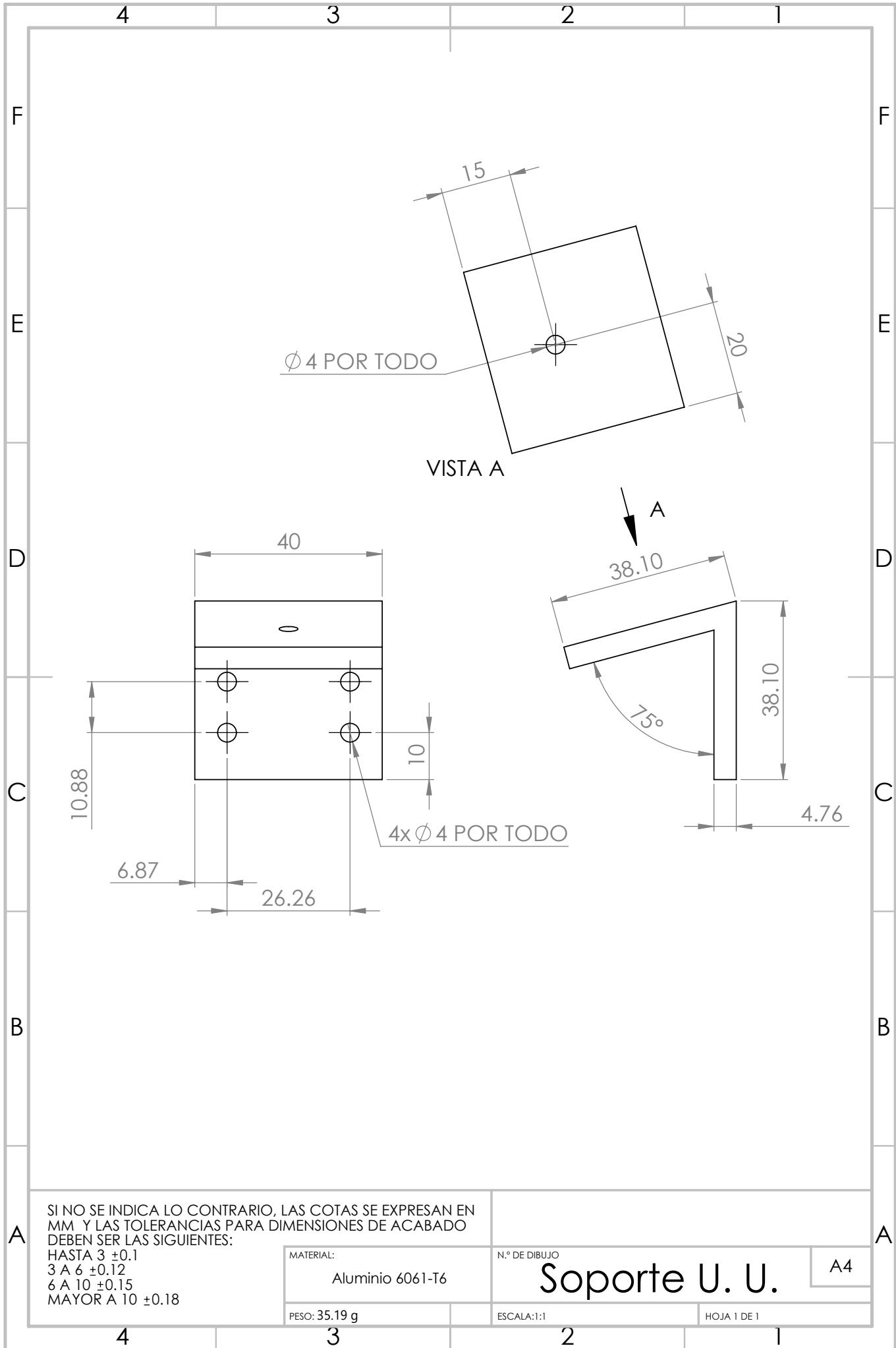
BR

A4

PESO: 37.67 g

ESCALA: 1:2

HOJA 1 DE 1



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:
 HASTA 3 ± 0.1
 3 A 6 ± 0.12
 6 A 10 ± 0.15
 MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:
 Aluminio 6061-T6

N.º DE DIBUJO

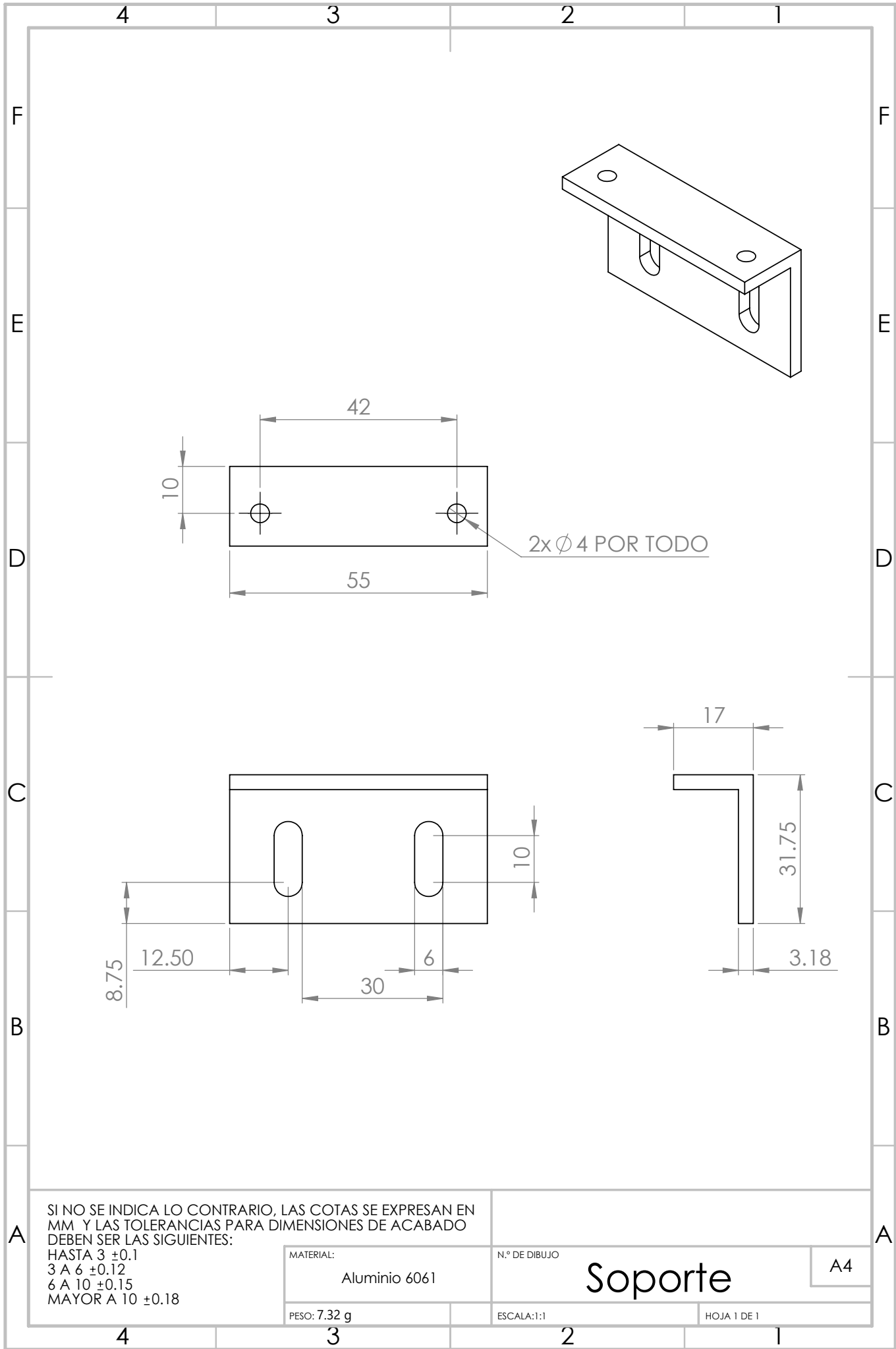
Soporte U. U.

A4

PESO: 35.19 g

ESCALA: 1:1

HOJA 1 DE 1



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:

HASTA 3 ± 0.1
 3 A 6 ± 0.12
 6 A 10 ± 0.15
 MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:

Aluminio 6061

N.º DE DIBUJO

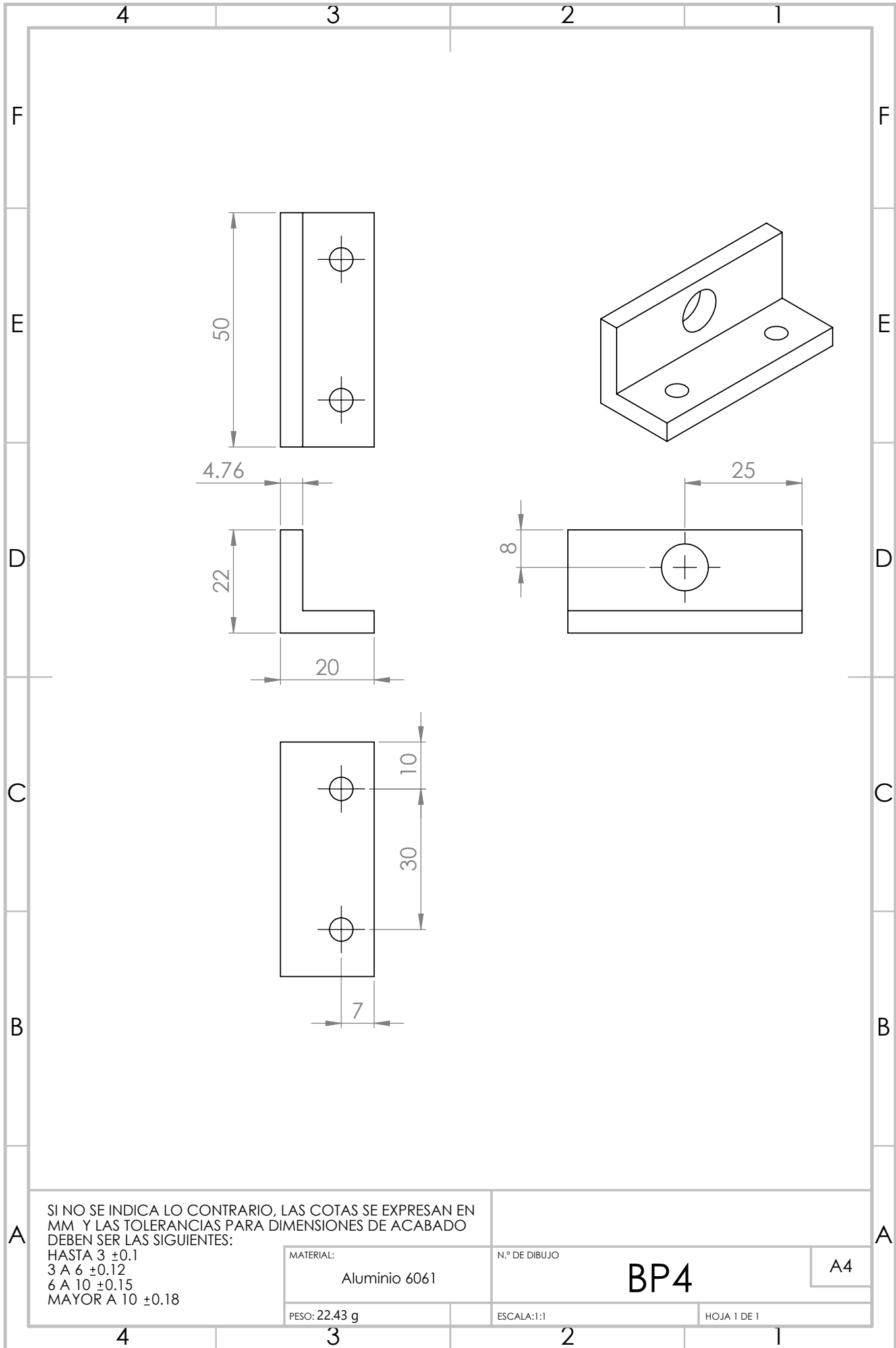
Soporte

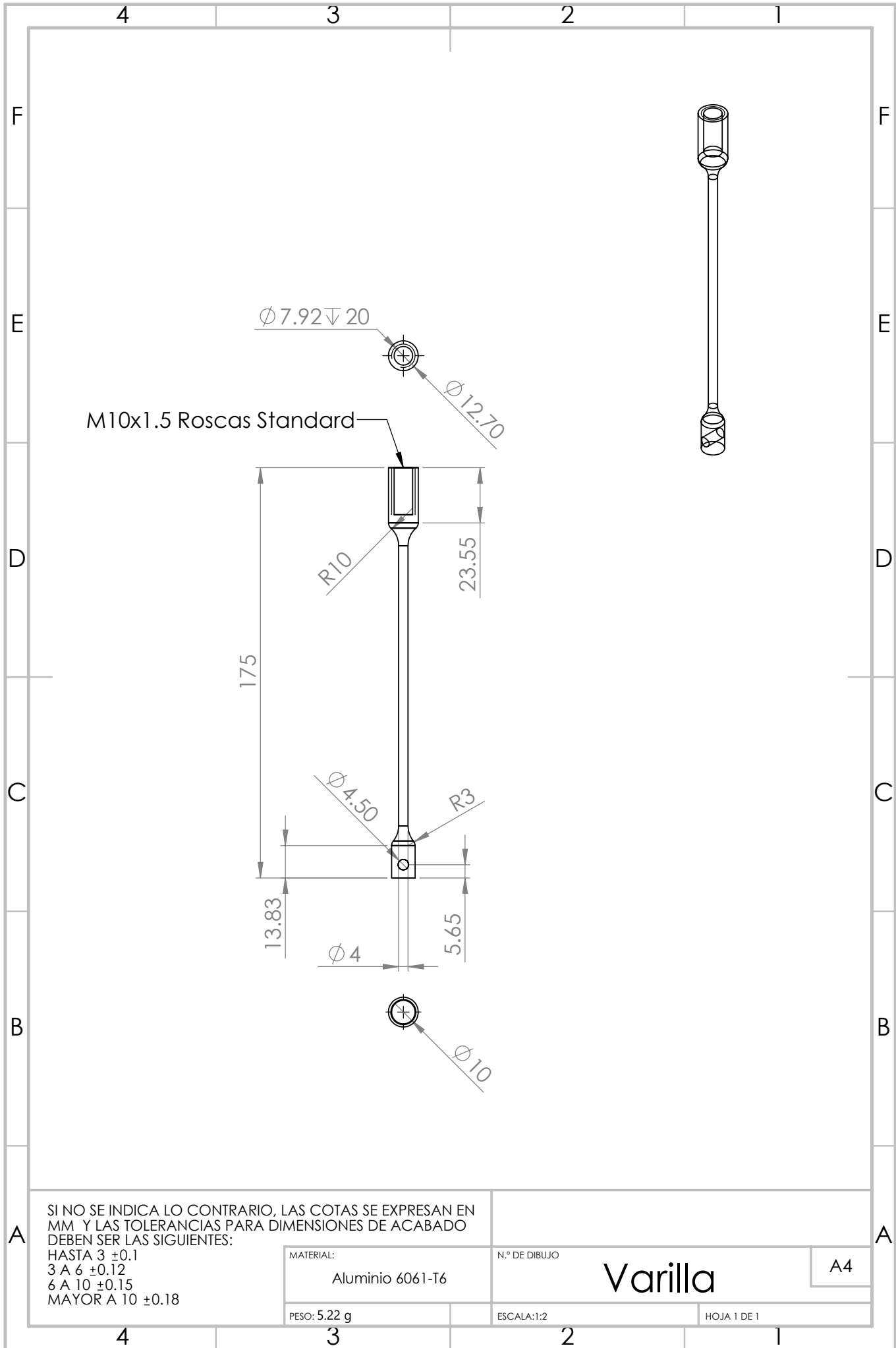
A4

PESO: 7.32 g

ESCALA: 1:1

HOJA 1 DE 1





SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:

HASTA 3 ± 0.1
 3 A 6 ± 0.12
 6 A 10 ± 0.15
 MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:
Aluminio 6061-T6

N.º DE DIBUJO

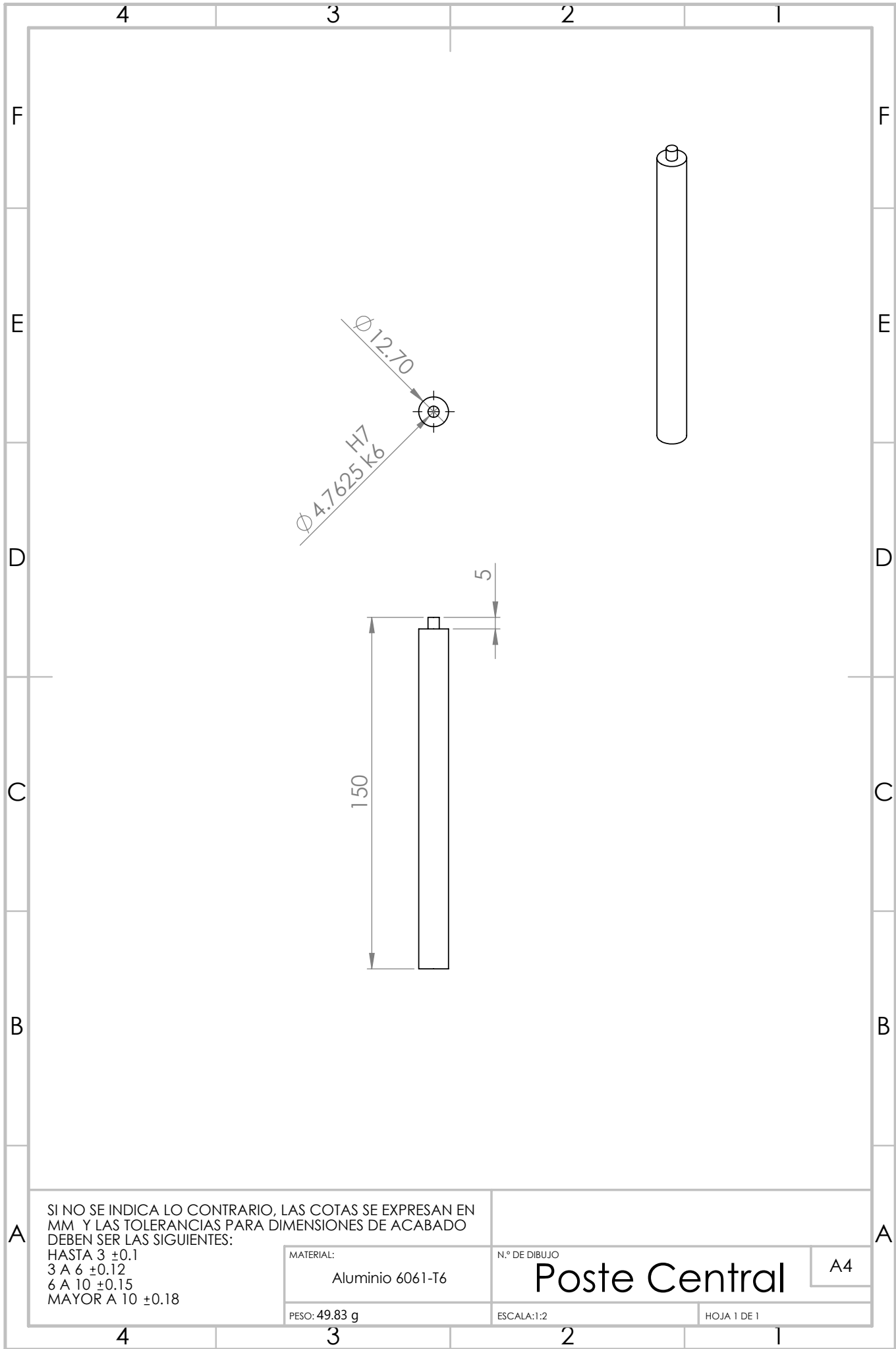
Varilla

A4

PESO: 5.22 g

ESCALA: 1:2

HOJA 1 DE 1



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:

HASTA 3 ± 0.1
 3 A 6 ± 0.12
 6 A 10 ± 0.15
 MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:

Aluminio 6061-T6

N.º DE DIBUJO

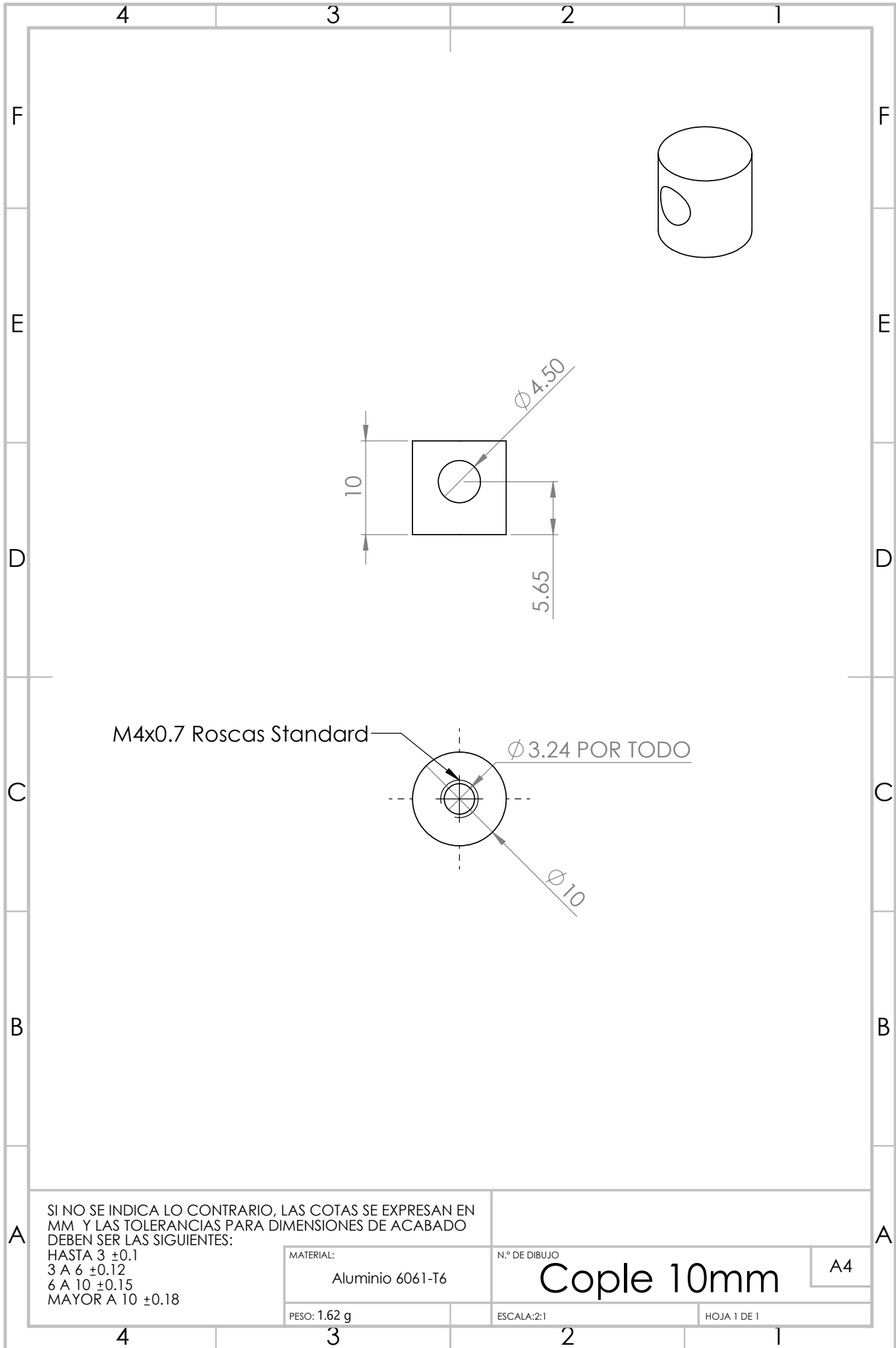
Poste Central

A4

PESO: 49.83 g

ESCALA: 1:2

HOJA 1 DE 1



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:

HASTA 3 ± 0.1
 3 A 6 ± 0.12
 6 A 10 ± 0.15
 MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:

Aluminio 6061-T6

N.º DE DIBUJO

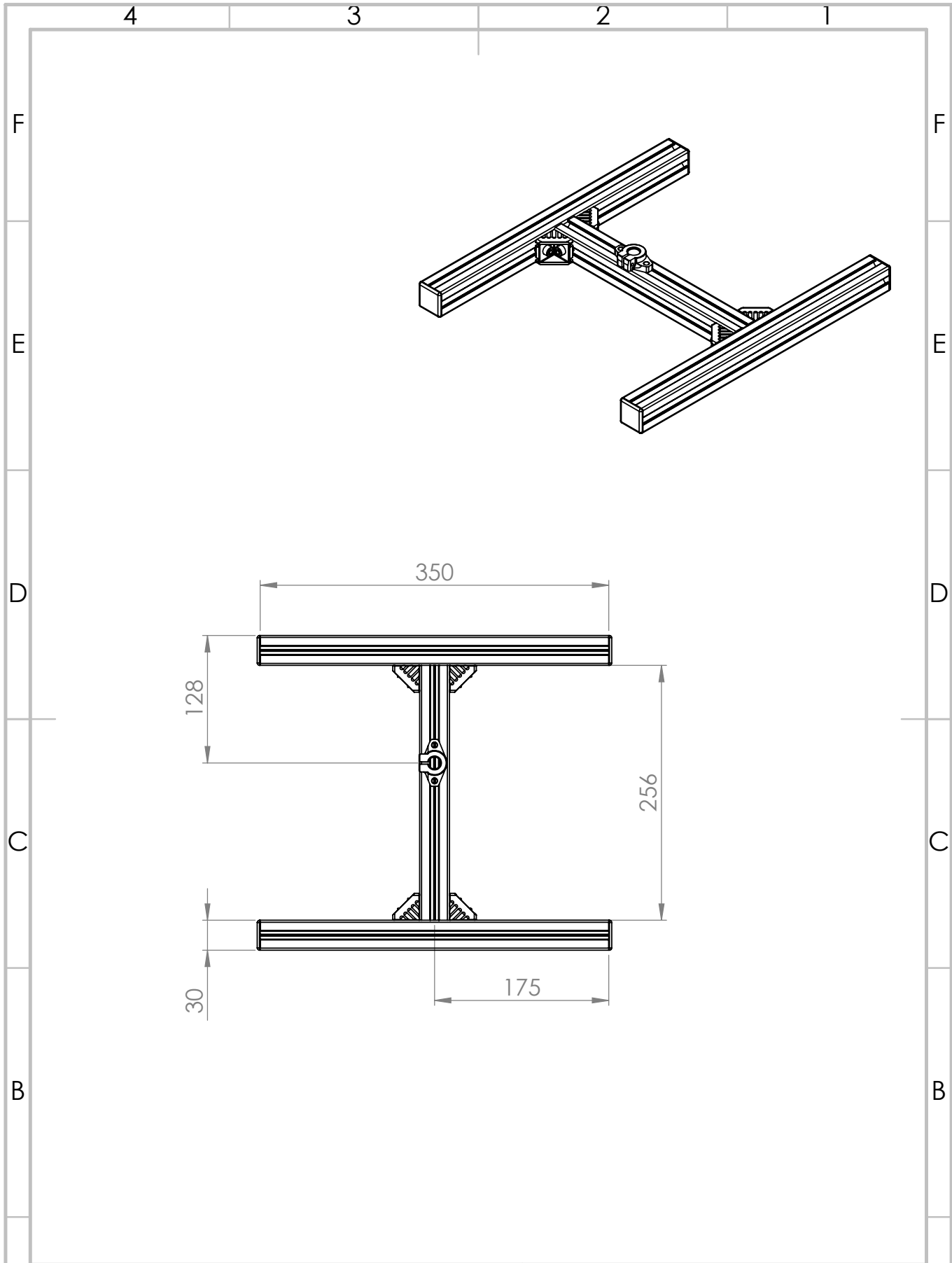
Cople 10mm

A4

PESO: 1.62 g

ESCALA: 2:1

HOJA 1 DE 1



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:

HASTA 3 ± 0.1
 3 A 6 ± 0.12
 6 A 10 ± 0.15
 MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:

Aluminio

N.º DE DIBUJO

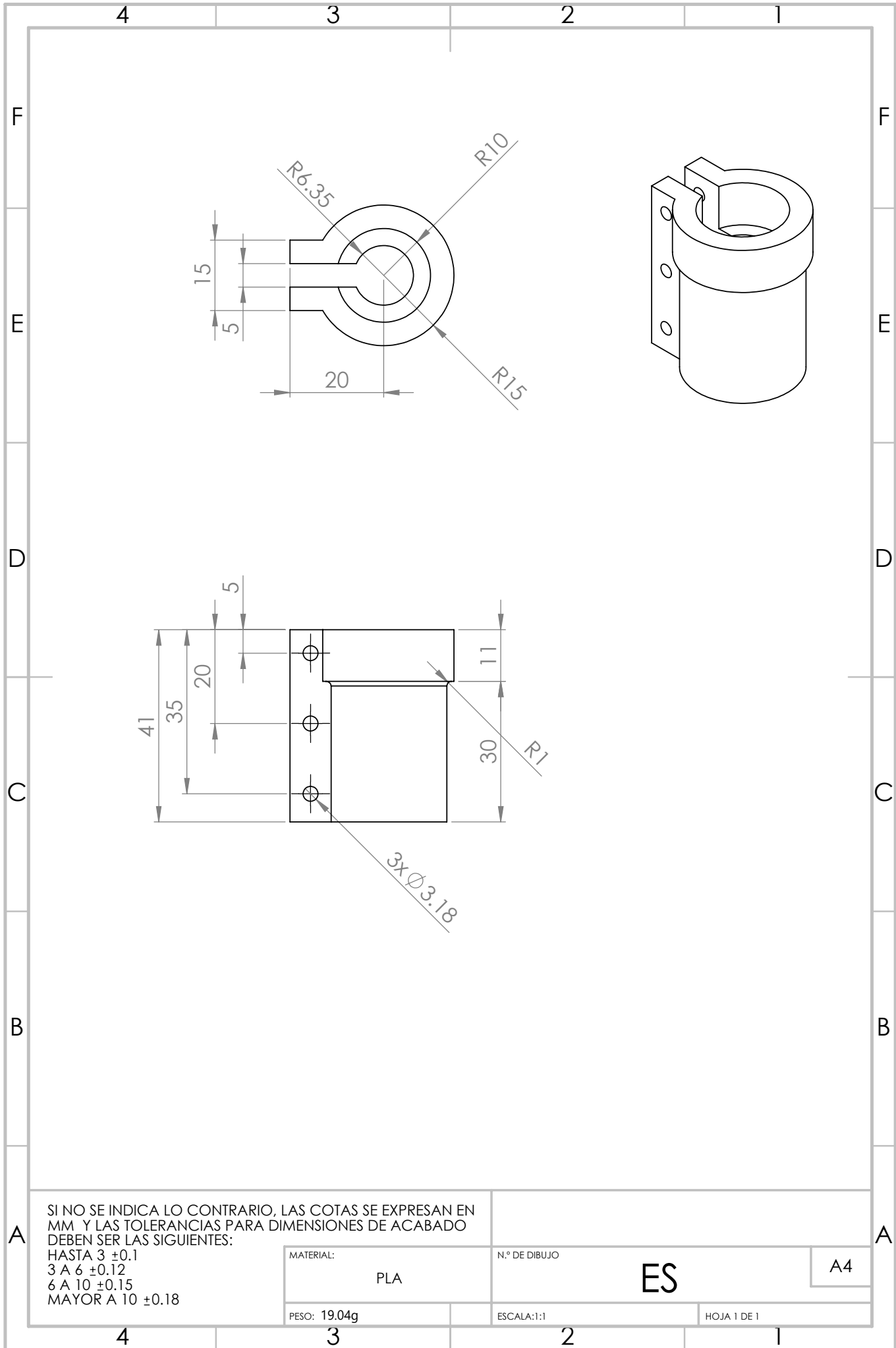
Base Fija

A4

PESO: 945.68 g

ESCALA: 1:5

HOJA 1 DE 1



SI NO SE INDICA LO CONTRARIO, LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM Y LAS TOLERANCIAS PARA DIMENSIONES DE ACABADO DEBEN SER LAS SIGUIENTES:

- HASTA 3 ± 0.1
- 3 A 6 ± 0.12
- 6 A 10 ± 0.15
- MAYOR A 10 ± 0.18

MATERIAL:

PLA

N.º DE DIBUJO

ES

A4

PESO: 19.04g

ESCALA: 1:1

HOJA 1 DE 1

Anexo B

Código Utilizado

El código utilizado para las simulaciones y pruebas del prototipo se encuentra en los siguientes enlaces:

B.1. MSC AdamsTM

<https://mega.nz/#F!d48ThCCI!YcgsyecdzfEBQ1jTS42c5Q>

B.2. MATLAB/Simulink[®]

https://mega.nz/#F!UgkhUQjK!diXTm_6SpP2mmWcWxk07Dw

B.3. LabVIEWTM

<https://mega.nz/#F!U00xiCAb!rVk3QxU2C3NUs4tWUcb84w>

B.4. Code ComposerTM Studio/HALCoGen

<https://mega.nz/#F!kh9FDSYY!ZGbp-k8Fn1tgKUSqkXHb2A>

Anexo C

Artículos Publicados

Capítulo 1

Análisis cinemático de un robot paralelo 2-PUS+RR aplicado a un rehabilitador de tobillo

Erick D. Flores-Salazar¹
Mario A. García-Murillo²
Esther Lugo-González³
Jaime Gallardo-Alvarado⁴
Manuel Arias-Montiel⁵

Abstract: In this work the kinematics of a two degrees of freedom 2-PUS + RR (R, P, U and S = revolute, prismatic, universal and spherical, respectively) parallel manipulator, are solved. The forward position analysis is carried out applying recursively the Sylvester dialytic elimination method. Finally, a numerical example is provided and validated using the MSC Adams ViewTM simulation software.

Keywords: Parallel robot, kinematics, screw theory.

Resumen: En este trabajo se presenta el análisis cinemático de un robot paralelo 2-PUS + RR (R, P, U, S = revoluta, prismática, universal y esférica, respectivamente) de 2 grados de libertad. Para su análisis el robot paralelo tiene dos modos: en el primero se bloquea la rotación de la plataforma móvil asociada a los movimientos de inversión/eversión y para el segundo, se bloquea la rotación asociada a los movimientos de flexión/extensión. El análisis de desplazamiento conduce a cinco ecuaciones cuadráticas que se resuelven aplicando recursivamente la eliminación dialítica de Sylvester. Los resultados se validan por medio del software de simulación MSC Adams ViewTM.

Palabras clave: Robot paralelo, cinemática, teoría de tornillo.

¹fs1254@hotmail.com. Universidad Tecnológica de la Mixteca

²garcia.mario@ugto.mx. Universidad de Guanajuato

³elugog@mixteco.utm.mx. Universidad Tecnológica de la Mixteca

⁴jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx. Instituto Tecnológico de Celaya

⁵mam@mixteco.utm.mx. Universidad Tecnológica de la Mixteca

Análisis cinemático de un robot paralelo 2-PUS+RR mediante la teoría de tornillos

E. D. Flores-Salazar
Universidad Tecnológica de la Mixteca
División de Estudios de Postgrado
Huaquapan de León, México
email: fs1254@hotmail.com

M. A. García-Murillo
Universidad de Guanajuato
Depto. de Ing. Mecánica
Salamanca, México
email: garcia.mario@ugto.mx

E. Lugo-González
Universidad Tecnológica de la Mixteca
División de Estudios de Postgrado
Huaquapan de León, México
email: elugog@mixteco.utm.mx

J. Gallardo-Alvarado
Instituto Tecnológico de Celaya
Depto. de Ing. Mecánica
Celaya, México
email: jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx

M. Arias-Montiel
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Instituto de Electrónica y Mecatrónica
Huaquapan de León, México
email: mam@mixteco.utm.mx

Resumen—En este trabajo se presenta el análisis cinemático de un robot paralelo 2-PUS + RR (R, P, U, S = revoluta, prismática, universal y esférica, respectivamente) de 2 grados de libertad. Se realizan análisis de posición, velocidad y aceleración con el fin de evitar singularidades en el robot. El análisis de desplazamiento del robot en estudio se plantea mediante el uso de ecuaciones de restricciones mecánicas, las cuales conducen a cinco ecuaciones cuadráticas que se resuelven aplicando recursivamente la eliminación dialítica de Sylvester. Los análisis de velocidad y aceleración del robot se plantean utilizando la teoría de tornillos. Los resultados se validan por medio del software de simulación MSC Adams ViewTM.

Palabras clave—Robot paralelo, teoría de tornillos, cinemática.

I. INTRODUCCIÓN

La problemática de los robots paralelos surge con la determinación de un conjunto de parámetros dimensionales por la optimización de una o más funciones basadas en la cinemática o dinámica expresados de forma global, también por el cálculo de la cinemática, derivado del número de ecuaciones que pueden obtenerse, por ser sistemas con más variables que ecuaciones, entre otras. Los diseños cinemáticos óptimos permiten obtener el espacio de trabajo, la manipulabilidad, la destreza, isotropía, rigidez y para evitar singularidades [1]. Sergiu et al. [2] analizaron la cinemática de un manipulador de 2 GDL como si este tuviera los mismos ejes. Li et al [3] analizaron el manipulador actuando a lo largo de los ejes x-y. Bi et al. [4] analizaron la cinemática del manipulador que es actuado a lo largo de los mismos ejes, considerando que el efector final no tiene orientación. Jun et al y Shen et al. analizaron la cinemática del manipulador actuado a lo largo de las guías paralelas y del efector final que no tiene orientación. J. Gye Lee et al. [5] proponen un manipulador que hace un movimiento lineal recíproco con dos deslizadores paralelos y un efector final orientado, con el análisis cinemático se encontraron las condiciones de restricción. En estas investigaciones se utilizaron métodos clásicos como el geométrico, ecuaciones

cuadráticas, etc. Por otro lado, para simplificar las ecuaciones y los métodos numéricos empleados, se utilizó la teoría del tornillo, como se muestra en la investigación de Gallardo et al. [6], que utilizan esta teoría para realizar el análisis cinemático y de singularidades de un mecanismo paralelo de 4 GDL. Como ecuaciones principales se utiliza la forma de Klein como una forma bilineal simétrica del álgebra de Lie. Los resultados numéricos fueron validados con Adams View. En Gallardo et al. [7] se analiza la velocidad y la aceleración con teoría del tornillo en un manipulador de clase especial conocido como 2(3-RPS), demostrándose que es posible obtener un análisis dinámico simplificado considerablemente aplicando las propiedades de los tornillos recíprocos. En Xiang Chen et. al [8] se utiliza la teoría del tornillo para definir la transmisión y los índices de restricciones de robots paralelos para detectar singularidades y entender el significado físico de estas. En J. Gallardo et al [9] se realiza un análisis cinemático de un robot paralelo generador del movimiento de Schönflies por medio de la teoría de tornillos. En este trabajo se evitand el cálculo de la matriz de rotación. Las ecuaciones entrada-salida de velocidad y de aceleración se obtienen sistemáticamente recurriendo a la teoría de tornillos recíprocos. Abbasnejad et al [10], realizaron un mecanismo que consiste en una base fija y una plataforma móvil conectada por 5 cadenas seriales. La solución de la cinemática directa produce un polinomio de octavo grado con una variable simple, lo cual indica que puede tener 8 diferentes configuraciones para mover la plataforma. Se utiliza el método de eliminación dialítica para acoplar cuatro ecuaciones para reducir los grados del polinomio y obtener hasta 8 soluciones. Con base en las metodologías empleadas y los resultados obtenidos por los autores descritos anteriormente, se presenta el análisis cinemático de un robot paralelo 2-PUS+RR mediante la teoría de tornillos. El trabajo se desarrolla iniciando por la descripción del robot, posteriormente se tiene el análisis de movilidad, el de desplazamiento, la cinemática instantánea, el análisis de singularidades, la simulación numérica y las

ACELERACIÓN DE CORIOLIS, UN MÉTODO DE FÁCIL ENSEÑANZA/APRENDIZAJE

CORIOLIS ACCELERATION, AN EASY TEACHING-LEARNING METHOD

Jaime Gallardo Alvarado

Tecnológico Nacional de México en Celaya
jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx

Erick Daniel Flores Salazar

Universidad Tecnológica de la Mixteca
fs1254@hotmail.com

Carlos Rafael Aguilar Nájera

Tecnológico Nacional de México en Celaya
rafael.aguilar@itcelaya.edu.mx

Luciano Pérez González

Tecnológico Nacional de México en Celaya
luciano.perez@itcelaya.edu.mx

Resumen

Dinámica es un curso esencial en cualquier carrera de ingeniería. En ese sentido la aceleración de Coriolis, a pesar de haber sido ampliamente estudiada en diversos libros de texto y artículos científicos, representa un tópico retador para la enseñanza. En consecuencia, los estudiantes experimentan problemas en comprender la conexión entre las expresiones matemáticas y el significado físico del fenómeno. Esto es debido al hecho de que usualmente la aceleración de Coriolis se explica con base en un sistema de referencia rotatorio y otro inercial, por ejemplo, en libros de texto típicos la aceleración de Coriolis se deduce y explica en solo dos páginas. El método expuesto en este trabajo es más general y puede ser fácilmente extendido a los análisis cinemáticos de orden superior del cuerpo rígido debido a que éste está basado en simples derivadas temporales de vectores que relacionan cuerpos rígidos en movimiento general.

Palabra(s) Clave: Aceleración, Cinemática, Coriolis, Enseñanza/Aprendizaje, Vector anclado, Vector libre.

Referencias

- [1] ALVARADO, M. Modelo matemático de un motor de corriente continua separadamente excitado: Control de velocidad por corriente de armadura. *Latin American Journal of Physics Education*, vol. 6(1), páginas 155–161, 2012.
- [2] ALVAREZ, M., GARCIA, M. y CERVANTES, J. Robot-assisted ankle rehabilitation: a review. *Disability and Rehabilitation: Assistive Technology*, vol. 14, páginas 1–15, 2019.
- [3] ANDRADE, R., LACOURPAILLE, L., FREITAS, S., MCNAIR, P. y NORDEZ, A. Effects of hip and head position on ankle range of motion, ankle passive torque, and passive gastrocnemius tension. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*, vol. 26(1), páginas 41–47, 2016.
- [4] ARACIL, R., SALTAREN, R., SABATER, J. y REINOSO, O. Robots paralelos: Máquinas con un pasado para una robótica del futuro. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 3(1), páginas 16–28, 2006.
- [5] ASHBY, M. *Material selection in mechanical design*. Butterworth-Heinemann, cuarta edición, 2011. ISBN 978-1-85617-663-7.
- [6] AYTECO CONSULTORES S.L. Tabla de planificación de calidad. Disponible en <https://www.aiteco.com/>.
- [7] BALLESTER, M. Tiempo de recuperación del esguince de tobillo. Disponible en <http://www.cirugiapie.com/blog/tiempo-de-recuperacion-de-una-fractura-de-tobillo>.
- [8] BALLESTER, M. Pautas para la mejor recuperación tras un esguince de tobillo. Disponible en <http://www.cirugiapie.com/blog/recuperacion-del-esguince-de-tobillo>.
- [9] BIODEX. System 4 pro. Disponible en <https://www.biodex.com/physical-medicine/products/dynamometers/system-4-pro>.
- [10] BLANCO, A., GÓMEZ, F., VELA, L. y DELGADO, R. A generalized proportional integral controller for an ankle rehabilitation machine based on an XY table. *In Proceedings of 2013 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering, ICMEAE 2013*, páginas 152–157, 2013.

- [11] BLANCO, A., VÁZQUEZ, R., VELA, G., QUINTERO, E. y LÓPEZ, G. Control de un prototipo virtual de una máquina de rehabilitación de tobillo. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, vol. 67, páginas 183–196, 2013.
- [12] BONEV, I., ZLATANOV, D. y GOSSELIN, C. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory. *Journal of Mechanical Design*, vol. 125, páginas 573–581, 2003.
- [13] BUCCA, G., BEZZOLATO, A., BRUNI, S. y MOLteni, F. A mechatronic device for the rehabilitation of ankle motor function. *Journal of biomechanical engineering*, vol. 131(12), páginas 56–63, 2009.
- [14] CALDERÓN, M. y ULLOA, R. Cambios asociados al envejecimiento normal en los parámetros angulares de la marcha a una velocidad controlada. *Revista médica de Chile*, vol. 144, páginas 74–82, 2016.
- [15] CARVAJAL, J. Metodología de diseño mecatrónico de robots. *Épsilon*, vol. 1(4), páginas 91–101, 2005.
- [16] CHAITOW, L. y WALKER, J. *Aplicación clínica de las técnicas neuromusculares. Extremidades inferiores (Bicolor)*, vol. 1. Paidotribo, 2007. ISBN 9788480198691.
- [17] CHENG, H., LIU, G., YIU, Y., XIONG, Z. y LI, Z. Advantages and dynamics of parallel manipulators with redundant actuation. In *Proceedings 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Expanding the Societal Role of Robotics in the the Next Millennium*, páginas 171–176, 2001.
- [18] CHINESPORT. Fisiotek 2000e. Disponible en <http://www.chinesport.com/catalogue/rehabilitation-equipment/continuous-passive-motion-lower-limbs/XRI003-fisiotek-3000e/>.
- [19] CHUNBAO, W., ZHIJIANG, L., LIHONG, D., QUANQUAN, L., TONGYANG, S., ZHIXIANG, L., WEIGUANG, L., MENG, L., YAJING, S., QING, S., YULONG, W., JIANJUN, L., JIANJUN, W., JIAN, Q. y ZHENGZHI, W. Mechanism design and control strategies of an ankle robot for rehabilitation training*. In *Proceedings of the 6th Annual IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems*, páginas 132–137, 2015.
- [20] CLEARY, K. Medical robotics for pediatric applications shoulder arthrography, ankle rehabilitation, and temporal bone surgery. In *Proceedings of World Automation Congress*, páginas 1–5, 2016.
- [21] CORDO, P., LUTSEP, H., CORDO, L., WRIGHT, G., CACCIATORE, T. y SKOSS, R. Assisted movement with enhanced sensation (AMES): coupling motor and sensory to remediate motor deficits in chronic stroke patients. *Neurorehabilitation and neural repair*, vol. 23(1), páginas 67–77, 2009.

- [22] DAI, J., ZHAO, T. y NESTER, C. Sprained ankle physiotherapy based mechanism synthesis and stiffness analysis of a robotic rehabilitation device. *Autonomous Robots*, vol. 16(2), páginas 207–218, 2004.
- [23] DÍAZ, M., PROVENZANO, S., VERGARA, M. y CHACÓN, R. Dinámica directa de robots paralelos utilizando las ecuaciones de gibbs-appell. *Información Tecnológica*, vol. 18, páginas 75 – 82, 2007.
- [24] DING, Y., SIVAK, M., WEINBERG, B., MAVROIDIS, C. y HOLDEN, M. K. Nuvabat: northeastern university virtual ankle and balance trainer. In *Proceedings of 2010 IEEE Haptics Symposium*, páginas 509–514, 2010.
- [25] EFISIOTERAPIA. Tratamiento del esguince de tobillo. Disponible en <https://www.efisioterapia.net/articulos/tratamiento-esguince-tobillo>.
- [26] EFISIOTERAPIA. El tobillo anatomía y lesiones más frecuentes. Disponible en <https://www.efisioterapia.net/articulos/el-tobillo-anatomia-y-lesiones-mas-frecuentes>.
- [27] FISIOSTAR. Como no debe tratarse un esguince de tobillo. Disponible en <https://fisiostar.com/fisioterapia-tratamientos/fisioterapia-traumatologica/como-no-debe-tratarse-un-esguince-de-tobillo>.
- [28] FISIOTERAPIA ONLINE. Fracturas de tobillo. Disponible en <https://www.fisioterapia-online.com/articulos/las-lesiones-mas-frecuentes-del-tobillo>.
- [29] FISIOTERAPIA ONLINE. Las lesiones más frecuentes del tobillo. Disponible en <https://www.fisioterapia-online.com/articulos/las-lesiones-mas-frecuentes-del-tobillo>.
- [30] FISIOTERAPIA ONLINE. Tratamiento y recuperación de un esguince de tobillo. Disponible en <https://www.fisioterapia-online.com/videos/tratamiento-y-recuperacion-de-un-esguince-de-tobillo>.
- [31] GALLARDO, J. *Análisis cinemáticos de orden superior de cadenas espaciales, mediante el álgebra de tornillos, y sus aplicaciones*. Tesis Doctoral, Instituto Tecnológico de la Laguna, 1999.
- [32] GALLARDO, J. *Kinematic analysis of parallel manipulators by algebraic screw theory*. Springer International Publishing, 2016. ISBN 978-3-319-31126-5.
- [33] GALLARDO, J., RODRIGUEZ, R., ALCARAZ, L. y JUAREZ, F. A parallel manipulator for simulating the ship seakeeping trial. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, vol. 43, páginas 529–538, 2018.
- [34] GALLARDO, J., RODRÍGUEZ, R. y DELOSSANTOS, P. Kinematics and dynamics of a 4-PRUR schönflies parallel manipulator by means of screw theory and the principle of virtual work. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 122, páginas 347–360, 2018.

- [35] GALLARDO, J., RODRÍGUEZ, R. y ISLAM, M. Analytical solution of the forward position analysis of parallel manipulators that generate 3-RS structures. *Advanced Robotics*, vol. 22, páginas 215–234, 2008.
- [36] GALLARDO, J., RODRÍGUEZ, R., PÉREZ, L. y AGUILAR, C. Análisis cinemático de un manipulador paralelo plano mediante la teoría de tornillos infinitesimales. *Científica*, vol. 17(4), páginas 159–169, 2013.
- [37] GIRONE, M., BURDEA, G. y BOUZIT, M. The rutgers ankle orthopedic rehabilitation interface. In *Proceedings of the ASME Haptics Symposium*, vol. 67, páginas 305–312, 1999.
- [38] GOSSELIN, C. y ANGELES, J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, páginas 281 – 290, 1990.
- [39] GUERRERO, J., RIFAÏ, H., ARNEZ, V., LINARES, J., SAYNES, L. y MOHAMMED, S. Robust active disturbance rejection control via control lyapunov functions: Application to actuated-ankle-foot-orthosis. *Control Engineering Practice*, vol. 80, páginas 49 – 60, 2018.
- [40] GUZMÁN, C., CARRERA, J., BLANCO, A., OLIVER, M. y GÓMEZ, F. Diseño y control de un sistema interactivo para la rehabilitación de tobillo: Tobibot. *Ingeniería Mecánica, Tecnología y Desarrollo*, vol. 5(1), páginas 255–264, 2014.
- [41] GUZMÁN, C., BLANCO, A. y OLIVER, M. Entendiendo la mecatrónica en la rehabilitación. En *Memorias del X Congreso Internacional sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico*, páginas 1–6, 2013.
- [42] HEALTHWISE. Lesiones del tobillo. Disponible en <https://www.healthwise.org/>.
- [43] HOMMA, K. y USUBA, M. Development of ankle dorsiflexion/plantarflexion exercise device with passive mechanical joint. In *Proceedings of 2007 IEEE 10th international conference on rehabilitation robotics*, páginas 292–297, 2007.
- [44] ISIDRO, J. *Robot paralelo para la rehabilitación de tobillo*. Tesis Doctoral, CENIDET, 2012.
- [45] ITURRIAGAGOITIA, A. *Teoría de máquinas I*. Escuela Superior de Ingenieros Industriales, segunda edición, 2000.
- [46] JAMWAL, P., XIE, S. y AW, K. Kinematic design optimization of a parallel ankle rehabilitation robot using modified genetic algorithm. *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 57(10), páginas 1018–1027, 2009.
- [47] JIE, C., SORIN, S. y SCHNECK, C. The three-dimensional kinematics and flexibility characteristics of the human ankle and subtalar joints-part i: Kinematics. *Biomechanical Engineering*, vol. 110(2), páginas 364–373, 1988.

- [48] JW WINCO. Movimiento, transferencia y conexión con flechas y juntas. Disponible en <https://www.jwwinco.com/es-mx/productos/3.6-Movimiento-y-conexion-con-flechas-y-juntas>.
- [49] KHALIL, H. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 2002. ISBN 0-13-067389-7.
- [50] KIM, H., JUNG, J., LEE, K., CHOI, C. y KIM, G. Design of an ankle rehabilitation robot based on force sensor. *In Proceedings of 2016 6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)*, páginas 766–767, 2016.
- [51] KINETEC. Kinetec spectra kompanion. Disponible en <https://www.kinetec.fr/categories/continuous-passive-motion/continuous-passive-motion-knee/kinetec-kompanion>.
- [52] LIN, C., JU, M., CHEN, S. y PAN, B. A specialized robot for ankle rehabilitation and evaluation. *Journal of Medical and Biological Engineering*, vol. 28(2), páginas 79–86, 2008.
- [53] LIPPERT, L. *Clinical kinesiology and anatomy*. FA Davis, cuarta edición, 2006.
- [54] LIU, G., GAO, J., YUE, H., ZHANG, X. y LU, G. Design and kinematics analysis of parallel robots for ankle rehabilitation. *In Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systes*, páginas 253–258, 2006.
- [55] LUNG, T. *Robot analysis: The mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley & Sons, Inc., primer edición, 1999. ISBN 0471325937.
- [56] MADENCI, E. y GUVEN, I. *The finite element method and application in engineering using ansys*. Springer, segunda edición, 2015.
- [57] MALOSIO, M., NEGRI, S. P., PEDROCCHI, N., VICENTINI, F., CAIMMI, M. y TOSATTI, L. M. A spherical parallel three degrees-of-freedom robot for ankle-foot neuro-rehabilitation. *In Proceedings of 2012 Annual international conference of the IEEE engineering in medicine and biology society*, páginas 3356–3359, 2012.
- [58] MARTÍN, A., TERRILE, S., BARRIENTOS, A. y CERRO, J. Robots hiper-redundantes: Clasificación, estado del arte y problemática. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)*, vol. 15, página 351–362, 2018.
- [59] MEDLINEPLUS. Lesiones y enfermedades del tobillo. Disponible en <https://medlineplus.gov/spanish/ankleinjuriesanddisorders.html>.
- [60] MERLET, J. *Parallel robots*. Springer Science & Business Media, segunda edición, 2006. ISBN 978-1-4020-4133-4.
- [61] MUÑOZ, E., MOSQUERA, V., GAVIRIA, C. y VIVAS, O. Evaluación del desempeño de diversos controladores avanzados aplicados a un robot manipulador tipo SCARA. *Ingeniería y Desarrollo*, vol. 29(2), páginas 202–223, 2011.

- [62] MYSZKA, H. *Máquinas y mecanismos*. Prentice Hall, cuarta edición, 2004.
- [63] NORTON, R. *Diseño de maquinaria*. McGraw-Hill Interamericana de España S.L., cuarta edición, 2009. ISBN 978-970-10-6884-7.
- [64] OROZCO, S. y IBARRA, J. Control con rechazo activo de perturbaciones para el caminado estable de humanoides basado en el péndulo invertido lineal. *En Memorias del XVIII Congreso Mexicano de Robótica*, páginas 23–28, 2016.
- [65] ORTEGA, B., GODOY, J., MÁRMOL, E. y VALDÉS, L. Robot paralelo para rehabilitación asistida de tobillo. *En Memorias del X Congreso Internacional sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico (CIINDET'13)*, páginas 718–723, 2013.
- [66] ORTHOPRO. Cpm machine. Disponible en <https://orthoprousa.com/products/>.
- [67] PENAS, C. y MELIÁN, A. *Cinesiterapia: Bases fisiológicas y aplicación práctica*. Elsevier, 2019.
- [68] PEREZ, J., JUTINICO, A., CAMPO, J., ESCALANTE, F. y TERRA, M. Design and analysis of H force control of a series elastic actuator for impedance control of an ankle rehabilitation robotic platform. *In Proceedings of the American Control Conference*, páginas 2423–2428, 2017.
- [69] PLAGENHOEF, S., GAYNOR, F. y ABDELNOUR, T. Anatomical data for analyzing human motion. *Research Quarterly for Exercise and Sport*, vol. 54(2), páginas 169–178, 1983.
- [70] POLOLU. Motors and gearboxes. Disponible en <https://www.pololu.com/product/2822>.
- [71] PRENTICE, W. *Técnicas de rehabilitación en medicina deportiva*, vol. 44. Editorial Paidotribo, 2001.
- [72] RAKHODAEI, H., SAADAT, M., RASTEGARPANAH, A. y ABDULLAH, C. Path planning of the hybrid parallel robot for ankle rehabilitation. *Robotica*, vol. 34(1), páginas 173–184, 2016.
- [73] REN, Y., WU, Y., YANG, C., XU, T., HARVEY, R. y ZHANG, L. Developing a wearable ankle rehabilitation robotic device for in-bed acute stroke rehabilitation. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, vol. 25(6), páginas 589–596, 2017.
- [74] REYES, F. *Control de robots manipuladores*. Alfaomega, 2011. ISBN 978-607-707-190-7.
- [75] ROSADO, W., VELA, L., BLANCO, A., ASCENCIO, J. y BELTRÁN, C. Active rehabilitation exercises with a parallel structure ankle rehabilitation prototype. *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15(5), páginas 786–794, 2017.

- [76] ROSADO, W., VELA, L., BLANCO, A., ASCENCIO, J. y BELTRÁN, C. Passive rehabilitation exercises with an ankle rehabilitation prototype based in a robot parallel structure. *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15(1), páginas 48–56, 2017.
- [77] SAGLIA, J. A., TSAGARAKIS, N. G., DAI, J. S. y CALDWELL, D. G. A high performance 2-dof over-actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation. *In Proceedings of 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 2180–2186, 2009.
- [78] SALTER, R. y FIELD, P. The effects of continuous compression on living articular cartilage: An experimental investigation. *Journal of Bone and Joint Surgery*, vol. 42(1), páginas 31–90, 1960.
- [79] SATICI, A., ERDOGAN, A. y PATOGLU, V. Design of a reconfigurable ankle rehabilitation robot and its use for the estimation of the ankle impedance. *In Proceedings of 2009 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics*, páginas 257–264, 2009.
- [80] SELLES, R., LI, X., LIN, F., CHUNG, S., ROTH, E. y ZHANG, L. Feedback-controlled and programmed stretching of the ankle plantarflexors and dorsiflexors in stroke: effects of a 4-week intervention program. *Archives of physical medicine and rehabilitation*, vol. 86(12), páginas 2330–2336, 2005.
- [81] SERON, M. Sistemas no lineales. Informe técnico, Universidad Nacional de Rosario, Laboratorio de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de Señales, Santa Fe, Argentina, 2000.
- [82] SHIGLEY, J., MISCHKE, C., BOCANEGRA, F. y CORREA, C. *Diseño en ingeniería mecánica*. McGraw-Hill México, octava edición, 2002.
- [83] SIRA, H., LUVIANO, A., RAMÍREZ, M. y ZURITA, E. *Active disturbance rejection control of dynamic systems: A flatness based approach*. Butterworth-Heinemann, 2017. ISBN 978-0-12-849868-2.
- [84] SIRA, H. y SUNIL, K. *Differentially flat systems*. Crc Press, 2004.
- [85] SKF. Unidades y rodamientos lineales para ejes. Disponible en <http://www.skf.com/binary/tcm:12-68770/4182ES/index.html>.
- [86] STROKE REHAB. Stroke rehab exercises. Disponible en <https://www.stroke-rehab.com/stroke-rehab-exercises.html>.
- [87] SUNG, E., SLOCUM, A., MA, R., BEAN, J. y CULPEPPER, M. Design of an ankle rehabilitation device using compliant mechanisms. *Journal of Medical Devices*, vol. 5(1), páginas 1–7, 2011.
- [88] SYRSELOUDIS, C. y EMIRIS, I. A parallel robot for ankle rehabilitation-evaluation and its design specifications. *In Proceedings of 2008 8th IEEE International Conference on BioInformatics and BioEngineering*, páginas 1–6, 2008.

- [89] SYSTEMS, J. Jace ankle a330 cpm. Disponible en http://www.jacesystems.com/products/ankle/jace_ankle.htm.
- [90] TRAUMATOLOGÍA HELLÍN. Fractura de tobillo. Disponible en <https://traumatologiahellin.wordpress.com/ejercicios/fractura-de-tobillo/>.
- [91] TSOI, Y. y XIE, S. Design and control of a parallel robot for ankle rehabilitation. *In Proceedings of the 15th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice*, páginas 515–520, 2008.
- [92] URBANO, G. Rehabilitación mediante cinesiterapia. Disponible en <https://www.deustosalud.com/blog/rehabilitacion/rehabilitacion-mediante-cinesiterapia>.
- [93] UZELAC, S. *Zen leadership: The human side of total quality team management*. Mohican Pub, 1992.
- [94] VALLÉS, M., CAZALILLA, J., VALERA, Á., MATA, V., PAGE, Á. y DÍAZ, M. A 3-prs parallel manipulator for ankle rehabilitation: towards a low-cost robotic rehabilitation. *Robotica*, vol. 35(10), páginas 1939–1957, 2017.
- [95] VIVAS, A. Robótica paralela: Aplicaciones industriales, modelado y control. Informe técnico, Primer ISA Show Andino 2007, Bogotá, Colombia, 2007.
- [96] WANG, C., FANG, Y., GUO, S. y CHEN, Y. Design and kinematical performance analysis of a 3-RUS/RRR redundantly actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation. *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 5(4), páginas 1–11, 2013.
- [97] WANG, C., WANG, L., QIN, J., WU, Z., DUAN, L., LI, Z., CAO, M., LI, W., LU, Z., LI, M., WANG, Y., LONG, J., HUANG, M., LI, Y. y WANG, Q. Development of an ankle rehabilitation robot for ankle training. *In Proceedings of 2015 IEEE International Conference on Information and Automation*, páginas 94–99, 2015.
- [98] WEI, J., CHEN, H., CHEN, P., LU, Z., WEI, C., HOU, A., SUN, T., LIU, Q., LI, W., LU, Z. *et al.* Development of parallel mechanism with six degrees of freedom for ankle rehabilitation. *In Proceedings of International Conference on Advanced Robotics and Mechatronics (ICARM)*, páginas 353–358, 2016.
- [99] WEIGUANG, L., TONGYANG, S., WANG, C., LIHONG, D., QUANQUAN, L., YAJING, S., QING, S., MENG, L., YULONG, W., JIANJU, L., JIANJUN, W. y ZHENGZHI, W. Development of a 3 freedom ankle robot to assist the rehabilitation training. *In Proceedings of 2016 IEEE International Conference on Information and Automation*, páginas 1606–1611, 2016.
- [100] WU, Y., HWANG, M., REN, Y., GAEBLER, D. y ZHANG, L. Combined passive stretching and active movement rehabilitation of lower-limb impairments in children with cerebral palsy using a portable robot. *Neurorehabilitation and neural repair*, vol. 25(4), páginas 378–385, 2011.

- [101] YOON, J., RYU, J. y LIM, K.-B. Reconfigurable ankle rehabilitation robot for various exercises. *Journal of Robotic Systems*, vol. 22(1), páginas 15–33, 2006.
- [102] ZABALZA, I. y ROS, J. Aplicaciones actuales de los robots paralelos. *En Memorias del Congreso Iberoamericano De Ingeniería Mecánica*, páginas 605–613, 2007.
- [103] ZHANG, M., XIE, S., LI, X., ZHU, G., MENG, W., HUANG, X. y VEALE, A. Adaptive patient-cooperative control of a compliant ankle rehabilitation robot (CARR) with enhanced training safety. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 65(2), páginas 1398–1407, 2018.
- [104] ZHANG, M., XIE, S., MENG, W., GUOLI, Z., XIANGFENG, Z., XIAOLIN, H. y QUN, X. Robot-assisted ankle rehabilitation for the treatment of drop foot: A case study. *In Proceedings of 2016 12th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA)*, páginas 1–5, 2016.
- [105] ZHENG, Q. y GAO, Z. On practical applications of active disturbance rejection control. *In Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, páginas 6095–6100, 2010.
- [106] ZHOU, Z., ZHOU, Y., WANG, N., GAO, F., WEI, K. y WANG, Q. A proprioceptive neuromuscular facilitation integrated robotic ankle-foot system for post stroke rehabilitation. *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 73, páginas 111–122, 2015.
- [107] ZÖCH, C., FIALKA, V. y QUITTAN, M. Rehabilitation of ligamentous ankle injuries: A review of recent studies. *British Journal of Sports Medicine*, vol. 37(4), páginas 291–296, 2003.