Universidad Tecnológica de la Mixteca

División de Estudios de Posgrado

FORMALIZACIÓN DE LA TEORÍA DINÁMICA DISCRETA Y EL ÁLGEBRA LINEAL QUE SURGEN EN LA TEORÍA ECONÓMICA

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

LIC. MARÍA MONSERRAT ZAPATA GORDILLO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JESÚS FERNANDO TENORIO ARVIDE

CODIRECTOR:

DR. FRANCO BARRAGÁN MENDOZA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA DICIEMBRE DE 2019

A Israel por acompañarme en esta batalla.
Sin tu amor, paciencia y apoyo no lo habría logrado.
Recuerda que siempre juntos. Esto es uno de los tantos logros
que conseguiremos juntos en la aventura de nuestra vida.

A mi madre quien siempre me animo
a pesar de la distancia y no me dejo sola. Gracias por cada palabra
y abrazo, se que siempre estaremos juntas aunque estemos en lugares distintos.

A mi padre quien me apoyo y se emociono tanto como yo
con cada uno de mis logros. Eres un pilar muy importante en la
construcción de mi futuro y se que siempre contaré contigo.

A mi hermanito, que aunque cada uno esta haciendo su vida
en lugares apartados se que nos tenemos uno al otro.

A la señora Norma y al señor Rigo, muchas gracias
por la paciencia, el amor y por dejarme ser parte de su familia.
Este es un logro que quiero compartir con ustedes.
A Leno y a Gusy, siempre me sentiré feliz con solo verlas.

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Jesús F. Tenorio, por toda la paciencia que me tuvo, la dedicación y el tiempo. Gracias por no rendirse conmigo y ser un gran mentor.

Agradezco también a mi codirector de tesis, el Dr. Franco Barragán, por sus consejos y confianza. Gracias por la confianza al permitirme iniciar mi experiencia dando clases.

Sin ambos no se habría logrado este trabajo.

Finalmente agradezco a mis revisores por su tiempo, paciencia y cada uno de sus consejos.

Índice general

Introducción 1

1. Nociones básicas de Matemáticas y Economía 3
- 1.1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales 3
- 1.2. Cálculo diferencial 9
- 1.3. Teoría económica 18

2. Modelo de Markov 23
- 2.1. Límites de sucesiones de matrices 24
- 2.2. Los procesos de Markov 32
- 2.3. Aplicaciones de procesos de Markov a producción por sectores y consumo 36
- 2.4. Aplicaciones de procesos de Markov a migración 43

3. Modelo de Leontief 53
- 3.1. Matrices no negativas 54
- 3.2. El modelo de Leontief: modelo abierto y modelo cerrado 56
- 3.3. Una aplicación del modelo abierto de Leontief 63
- 3.4. Una aplicación del modelo cerrado de Leontief 74

4. Modelo de oferta y demanda y modelo keynesiano 81
- 4.1. Sistemas dinámicos: puntos periódicos, órbitas, diagrama de cobweb 82
- 4.2. Los modelos de oferta y demanda y keynesiano 92
- 4.3. Aplicaciones del modelo de oferta y demanda 104
- 4.4. Aplicaciones del modelo keynesiano 112

Conclusiones 115

Índice alfabético 117

Bibliografía 119

Formalización de la teoría dinámica discreta y el álgebra lineal que surgen en la teoría económica

María Monserrat Zapata Gordillo

Diciembre de 2019

Introducción

La Economía es una ciencia que estudia las leyes de producción, distribución, intercambio y consumo de bienes y servicios. Uno de sus principales objetivos es describir las acciones de los individuos que están involucrados en dichas actividades [37]. Para lograrlo, ha sido necesaria la incorporación, entre otras áreas de conocimiento, de la Matemática a la Economía, a través de modelos matemáticos que expliquen los fenómenos sociales y formalicen la ciencia económica [29]. Lo anterior es una consecuencia del *"progreso científico-técnico y de la mayor complejidad que alcanzan los nexos económicos"* [5, pág. 159].

Sin embargo, la utilización de los modelos matemáticos en la Economía, y en general de herramientas matemáticas, ha generado un debate en la forma de cómo se usan, dividiendo las opiniones de los economistas, y limitando a los interesados en obtener el máximo potencial de la Matemática en problemas económicos [24]. Más aún, esta problemática se ve reflejada, en menor o mayor grado, en las exposiciones de autores tanto de libros como de artículos de investigación especializados, donde con frecuencia se detecta una ausencia de formalidad y detalles en la aplicación de la herramienta matemática, dificultando al lector identificar el proceso de su desarrollo en los temas de la Economía.

Lo anteriormente expuesto, nos ha motivado a plantear el presente trabajo de tesis como una aportación a la solución de la problemática que hemos mencionado, aunque nos queda claro que es bastante compleja y amplia de atender. Creemos conveniente poner al alcance de los interesados en la aplicación de la Matemática en la Economía, un escrito pormenorizado en donde se muestre el potencial matemático, sin perder de vista la teoría económica. Específicamente, nos enfocamos en revisar y detallar, tanto en su parte matemática como económica, algunas aplicaciones del modelo de Markov, el modelo de Leontief, el modelo de oferta y demanda y el modelo keynesiano.

Respecto a estos modelos, brevemente mencionamos que en particular el modelo de Markov es estocástico, dado que está enfocado a resolver problemas que involucran cambios de estado a corto y largo plazo, empleando algunos hechos del álgebra lineal. De igual forma, el modelo de Leontief utiliza herramientas de esta rama de la matemática para su formulación. Cabe señalar que este modelo es estático, pues estudia el comportamiento de los entes económicos en un instante, o bien considera que los cambios son tan rápidos que no es relevante el estudio de lo que pasa en cada periodo sino el comportamiento final [21]. A su vez, el modelo de oferta y demanda y el modelo keynesiano se denominan modelos dinámicos, porque explican el comportamiento de sus respectivas variables a través del tiempo, y utilizan en su planteamiento algunas nociones de los sistemas dinámicos discretos [35].

Para la elección del estudio de los modelos que hemos mencionado nos basamos en la relevancia de sus aplicaciones y que son pieza fundamental de modelos económicos más complejos. Es preciso decir que una buena parte del desarrollo teórico de los temas propuestos los tomaremos de los trabajos de Friedberg [9], Miller [21], Schuschny [33] y Shone [34, 35].

La presente investigación se encuentra dividida en 4 capítulos. En el Capítulo 1 se revisan conceptos preliminares del área de las matemáticas que se requieren. En el Capítulo 2 se describe el modelo de Markov, el cual emplea nociones del álgebra lineal, en específico se detalla la aplicación de la diagonalización de matrices, valores y vectores propios en la existencia del límite de una sucesión de potencias de una matriz. En el Capítulo 3 se analiza el modelo de Leontief, en el cual se detallan las nociones del álgebra lineal que se emplean en la aplicación del modelo. En el Capítulo 4 se detalla la parte matemática de los modelos de oferta y demanda y keynesiano que utilizan la teoría de los sistemas dinámicos discretos. Cabe destacar que cada uno de los modelos está ejemplificado en los apartados de cada uno de los capítulos correspondientes, con la finalidad de ilustrar los conceptos matemáticos. Finalmente se encuentran las conclusiones y la bibliografía. Conviene subrayar que, a lo largo de este trabajo, se utiliza $\diamondsuit$ como símbolo para denotar que se finaliza un ejemplo.

Capítulo 1

Nociones básicas de Matemáticas y Economía

En este capítulo se revisan conceptos preliminares del área de las matemáticas y del área económica que se requieren para el desarrollo del presente trabajo. Por la naturaleza de los modelos económicos que se detallan en la presente tesis se dividió el capítulo en tres secciones.

En la Sección 1.1 describimos algunas nociones del álgebra lineal utilizadas en los modelos de Markov y de Leontief. En la Sección 1.2 detallamos los preliminares requeridos para el desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos discretos que se aplican en los modelos de oferta y demanda y keynesiano. Por último, en la Sección 1.3 enunciamos algunos conceptos útiles de la teoría económica que se emplean en los modelos propuestos.

Durante el desarrollo del presente trabajo, como es usual, con $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}_+$ denotamos el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números reales y el conjunto de los números enteros no negativos, respectivamente. Más aún, $\mathbb{R}^n$ denota el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo n veces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Sección 1.1

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Recordemos uno de los objetos de estudio de este escrito, a saber, el concepto de matriz. Consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ fijos. Una *matriz de tamaño $m \times n$ con componentes o entradas en el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales* es un arreglo rectangular (o simplemente matriz real) de la forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{13} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix},$$

donde cada componente A_{ij} es un número real, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Comúnmente, las matrices se denotan con letras mayúsculas, por ejemplo A, B, C, etcétera. Aunque también es posible considerar matrices con componentes a_{ij} en números complejos, en el presente trabajo, sólo usamos matrices reales.

Una matriz de $m \times n$ en la cual $m = n$, se denomina *matriz cuadrada* de tamaño $n \times n$. Esto es, un arreglo de la forma:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{A_{11}} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \color{red}{A_{22}} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \color{red}{A_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Las entradas $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ de una matriz cuadrada conforman lo que se conoce como *diagonal principal*.

Una matriz de tamaño $m \times 1$ se le conoce como *vector columna* (vea Figura 1.1.1-(a)), y una matriz de tamaño $1 \times n$ se llama *vector renglón* (vea Figura 1.1.1-(b)). Los vectores los denotamos con las letras $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, etcétera; es preciso señalar que a las componentes de los vectores se les suele denominar como coordenadas. Si $\boldsymbol{p}$ es un vector de tamaño $m \times 1$ escribimos $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$. De manera análoga, si $\boldsymbol{p}$ es un vector de tamaño $1 \times n$ escribimos $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, sin hacer distinción explicita si es un vector renglón o vector columna.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

(a) *Vector columna de $m \times 1$*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

(b) *Vector renglón de $1 \times n$*

Figura 1.1.1: Vectores.

Sean A una matriz de tamaño $m \times n$ y B una matriz de tamaño $p \times q$. Se dice que $A = B$ si se cumple que $m = p$, $n = q$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_{ij} = B_{ij}$. Es decir, dos matrices A y B son iguales si son del mismo tamaño y coinciden componente a componente.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ fijos, denotamos por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices reales de tamaño $m \times n$.

Algunos tipos especiales de matrices. Una matriz de tamaño $n \times n$ tal que todas sus componentes son cero se denomina *matriz nula* y la denotamos por $\mathcal{O}$, vea Figura 1.1.2-(a). De igual forma, un vector cuyas coordenadas son todas cero se denomina *vector nulo* y se denota por $\boldsymbol{o}$. A su vez, la *matriz identidad* de tamaño $n \times n$, que denotamos por I_n se define, para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, como $(I_n)_{ij} = 1$, si $i = j$ y $(I_n)_{ij} = 0$, si $i \neq j$ (vea Figura 1.1.2-(b)). Cuando no existe confusión simplemente denotamos por I la matriz identidad de cualquier tamaño. Una matriz D de tamaño $n \times n$, se llama *matriz diagonal* si, para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $D_{ij} = 0$, si $i \neq j$ (vea Figura 1.1.2-(c)). Una matriz diagonal también la denotamos por $D = \operatorname{diag}(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn})$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Matriz nula*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(b) *Matriz identidad*

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}$$

(c) *Matriz diagonal*

Figura 1.1.2: Algunos tipos de matrices de tamaño $n \times n$.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se define la *transpuesta* de A como la matriz A^t de tamaño $n \times m$, tal que para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

Requerimos otras propiedades de las matrices, necesarias para el desarrollo de la tesis. Primero, veamos el concepto de producto de matrices.

Definición 1.1.1. Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. El *producto* de A por B es la matriz $AB \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. La componente $(AB)_{ij}$ de AB es la sumatoria del producto del reglón i de A y la columna j de B, es decir, $(AB)_{ij} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ji}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Es importante notar que el producto de matrices únicamente es posible si el número de renglones de la matriz A es igual al número de columnas de B. De hecho, algunas propiedades de esta operación son las siguientes [2, pág. 50]:

Proposición 1.1.2. Sean $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se cumple lo siguiente:

(a) $AI = A = IA$.

(b) $(AB)^t = B^tA^t$.

(c) $A(BC) = (AB)C$.

En la Proposición 1.1.2, la parte (a) nos dice que si multiplicamos una matriz A por la matriz identidad obtenemos la misma matriz A; la parte (b) indica que la transpuesta del producto de dos matrices AB es el producto de la transpuesta de B por la transpuesta de A; y la parte (c) indica que el producto de matrices es asociativo, con lo cual podemos multiplicar cualquier cantidad finita de matrices, en este caso, cuadradas del mismo tamaño. Esto es, dado $k \in \mathbb{N}$ y las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que $A_1A_2\cdots A_k = A_1(A_2(\cdots A_{k-2}(A_{k-1}A_k)))$.

Un caso particular del producto de m matrices cuadradas es cuando la matriz se multiplica por sí misma. El producto $\underbrace{AAA\cdots A}_{m\text{-veces}}$, lo denotamos por A^m, y se denomina *potencia m-ésima*, o simplemente *potencia m*, de la matriz A. La transpuesta de una potencia de una matriz cuadrada se comporta como sigue.

Observación 1.1.3. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $(A^m)^t = (A^t)^m$.

Las potencias de una matriz diagonal son particularmente sencillas de calcular. De hecho, sólo debemos calcular la potencia m de cada componente en su diagonal principal. Esto lo establecemos en el siguiente resultado cuya demostración se sigue de la Definición 1.1.1.

Proposición 1.1.4. Sea $D = \operatorname{diag}(D_{11}, D_{22}, \ldots, D_{nn}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonal. Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $D^m = \operatorname{diag}(D_{11}^m, D_{22}^m, \ldots, D_{nn}^m)$ es una matriz diagonal.

Esquematizamos la Proposición 1.1.4 como sigue:

$$\begin{aligned}
\text{Si} \quad D = \operatorname{diag}(D_{11}, D_{22}, \ldots, D_{nn}) \quad &= \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & D_{nn} \end{pmatrix}, \\
\text{entonces} \quad \underbrace{DDD\cdots D}_{m\text{-veces}} = D^m \quad &= \begin{pmatrix} D_{11}^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D_{22}^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & D_{nn}^m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Una noción muy importante dentro de la teoría de matrices es la de matriz invertible. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$, entonces se dice que A es *invertible*. Se puede demostrar que si A es invertible, entonces la matriz B que cumple $AB = BA = I_n$ es única [2, pág. 55]. B se conoce como la *inversa* de A denotándose como $B = A^{-1}$ [12, pág. 103]. La siguiente proposición es una consecuencia directa de lo explicado anteriormente.

Proposición 1.1.5. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A es invertible, entonces la inversa de A, A^{-1}, también es invertible. De hecho, $(A^{-1})^{-1} = A$.

Para los fines de nuestro trabajo requerimos el siguiente concepto. Dadas $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, se dice que A es *semejante* o *equivalente* a B si existe una matriz invertible $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B = C^{-1}AC$. La relación "semejante a" de matrices satisface la propiedad de simetría, como lo vemos a continuación.

Proposición 1.1.6. Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.

Demostración. Supongamos que A es semejante a B. Así, existe una matriz invertible, digamos Q, tal que $B = Q^{-1}AQ$. Multiplicando a ambos lados por Q obtenemos que $QB = Q(Q^{-1}AQ)$. Así, en vista de la Proposición 1.1.2, tenemos que $QB = AQ$. Ahora, multiplicando por Q^{-1} a ambos lados y nuevamente aplicando la Proposición 1.1.2, concluimos que $A = QBQ^{-1}$. Definiendo $C = Q^{-1}$, vemos, por la Proposición 1.1.5, que C es invertible. Además, $A = C^{-1}BC$. Por lo tanto, B es semejante a A. □

En vista de la Proposición 1.1.6, decir que A es semejante a B es equivalente a decir que A y B son semejantes.

Proposición 1.1.7. Sean $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tales que C es invertible y $A = C^{-1}BC$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $A^m = C^{-1}B^mC$.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ cualquiera. Puesto que $A = C^{-1}BC$, elevando a la m potencia ambos lados de esta igualdad, obtenemos que $A^m = (C^{-1}BC)^m$. Esto es:

$$A^m = \underbrace{(C^{-1}BC)(C^{-1}BC)\cdots(C^{-1}BC)}_{m\text{-veces}}.$$

Se sigue de la parte (c) de la Proposición 1.1.2 que:

$$A^m = C^{-1}B(CC^{-1})B(CC^{-1})B\cdots(CC^{-1})BC.$$

Así, por la parte (a) de la Proposición 1.1.2, concluimos que $A^m = C^{-1}B^mC$. □

El siguiente resultado, donde se se verifica que se cumple que $A^m = C^{-1}B^mC$, es consecuencia de la Proposición 1.1.7.

Corolario 1.1.8. Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A y B son semejantes, entonces para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se tiene que A^m y B^m son semejantes.

Con la herramienta del álgebra lineal que hemos expuesto, estamos preparados para abordar la noción de diagonalización, concepto útil para el desarrollo de muchas aplicaciones. Comenzamos recordando que si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, el número real λ es un *valor propio* de A si existe un vector no nulo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. El vector $\boldsymbol{v}$ se llama *vector propio* de A correspondiente al valor propio λ. Por otro lado, un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ es *linealmente independiente* si la igualdad $(0, 0, \ldots, 0) = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ ocurre únicamente cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Definición 1.1.9. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es *diagonalizable* si existe una matriz diagonal $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A es semejante a D.

Notemos que la Definición 1.1.9 dice que A es diagonalizable si y sólo si existe una matriz diagonal D y una matriz invertible Q tales que $D = Q^{-1}AQ$. Equivalentemente, $A = QDQ^{-1}$. Por otro lado, otra manera equivalente al concepto de matriz diagonalizable la encontramos en el siguiente teorema, cuya demostración puede ser consultada en [12, pág. 580].

Teorema 1.1.10. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, A es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes. De hecho, si existe la matriz diagonal D semejante a A, entonces D es tal que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

Terminamos esta sección recordando algunos aspectos de los sistemas de ecuaciones lineales, herramienta indispensable para comprender uno de los temas abordados en esta tesis.

Un *sistema de ecuaciones lineales de tamaño* $m \times n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales con n variables. Esto es, un arreglo de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & b_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.1.1}$$

Sean:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema (1.1.1) y $\boldsymbol{x}$ el vector de incógnitas. El sistema (1.1.1) se escribe como $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y se dice que está dado en su forma matricial. Si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, se dice que el sistema es un *sistema de ecuaciones homogéneo*. Si $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$, se dice que el sistema es un *sistema de ecuaciones no homogéneo*.

Una solución del sistema (1.1.1) es un vector $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$ tal que $A\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$ [2, pág. 20].

Especificamos que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución. Los sistemas de ecuaciones que no tienen solución se les denomina *inconsistentes*. En el caso de que tengan una o infinitas soluciones se les conoce como *consistentes*.

Ahora bien, el siguiente resultado es básico y muy importante dentro del álgebra lineal. Su demostración puede consultarse en [12, pág. 114]

Teorema 1.1.11. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Son equivalentes:

(1) A es invertible.

(2) La única solución del sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ es la solución trivial $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

(3) El sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ tiene una única solución para cualquier vector $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$, la cual está dada por $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{d}$.

Sección 1.2

Cálculo diferencial

Antes de abordar nociones propias del cálculo, necesitamos los siguientes conceptos de la topología, el lector interesado en este tema puede consultar [16].

La distancia entre dos puntos pertenecientes a un conjunto se define de la siguiente manera.

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una métrica en X es una función denotada por d, la cual posee las siguientes propiedades:

(a) Para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $d(x, y) \geq 0$.

(b) Sean $x, y \in X$. La métrica $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(c) Para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$.

(d) Para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Así, dado el conjunto X y la métrica d definida sobre X, al par (X, d) se le denomina *espacio métrico* [16, pág. 16]. De manera intuitiva, un espacio métrico se entiende como un conjunto en el cual es posible medir las distancias entre cualesquiera dos de sus puntos. Definiremos ahora un subconjunto de X en términos de su métrica d.

Definición 1.2.2. Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $\delta > 0$. Se denomina *bola abierta* de centro en a y radio δ al conjunto que se define y se denota como:

$$B(a, \delta) = \{x \in X : d(x, a) < \delta\}.$$

Un ejemplo particular de un espacio métrico es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), donde la métrica correspondiente es la diferencia entre dos puntos en valor absoluto. En este caso, se entiende como una bola abierta al intervalo abierto compuesto por el conjunto de números que se encuentran entre el centro x_0 y un radio δ. Matemáticamente se representa como $B(x_0, \delta) = \{y \in X : |x_0 - y| < \delta\}$, donde $x_0 \in X$ y $\delta > 0$ [16].

Por otro lado, del área de cálculo diferencial recordemos que, si se tiene dos conjuntos X y Y, una *función f de X en Y* es una correspondencia que asocia a cada elemento de X con un único elemento de Y, a la cual se le denota como $f : X \to Y$. En este sentido, a X se le conoce como *dominio* y a Y como *contradominio* de f.

Definición 1.2.3. Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Dados A un subconjunto de X y B un subconjunto de Y. Se denota y se define la imagen de A bajo f como:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x), \text{ para algún } x \in A\}.$$

La preimagen de B bajo f como:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B, \text{ para algún } x \in A\}.$$

La *función identidad*, de un conjunto cualquiera X, es un ejemplo de una función. Se le denota como $I_x : X \to X$ y define por $I_x(x) = x$, para cada $x \in X$. La siguiente definición relaciona dos funciones.

Definición 1.2.4. Sean X, Y y Z conjuntos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. La función $h : X \to Z$ es la *composición de f seguida de g* si $h(x) = g(f(x))$, para toda $x \in X$. En tal caso h se denota como $g \circ f$.

La asociación de la composición de funciones es una de las propiedades que son relevantes para nuestro estudio. Notemos que, si $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_3$ y $f_3 : X_3 \to X_4$ son funciones, entonces $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$. Teniendo en cuenta lo anterior y partiendo de las Definiciones 1.2.3 y 1.2.4, tenemos la siguiente observación.

Observación 1.2.5. Sean X un conjunto, $f : X \to X$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos como f^n la composición de f consigo misma n veces. Además, si $A \subset X$, entonces la imagen de A bajo f^n lo denotaremos por $f^n(A)$.

No sólo nos interesa revisar la composición de las funciones, sino también algunas características específicas de éstas. Para lograrlo necesitamos lo siguiente.

Definición 1.2.6. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función.

(a) La función f es *creciente* en A, si para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ se tiene que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

(b) La función f es *decreciente* en A, si para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$ se tiene que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Veamos ahora la siguiente definición, la cual hace referencia al tipo de concavidad que se puede presentar en una función.

Definición 1.2.7. Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función.

(a) La función f es *convexa* en I, si para toda $a, b \in I$ tal que $a < b$, se cumple que para toda $x \in (a, b)$:
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
La gráfica de una función convexa es como la que se observa en la Figura 1.2.1-(a).

(b) La función f es *cóncava* en I, si para toda $a, b \in I$ tal que $a < b$, se cumple que para toda $x \in (a, b)$:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
La gráfica de una función cóncava es como la que se observa en la Figura 1.2.1-(b).

(a) Gráfica de una función convexa.

(b) Gráfica de una función cóncava.

Figura 1.2.1: Gráficas de una función convexa y cóncava

Para visualizar mejor la Definición 1.2.7, ejemplificamos cada concepto como sigue.

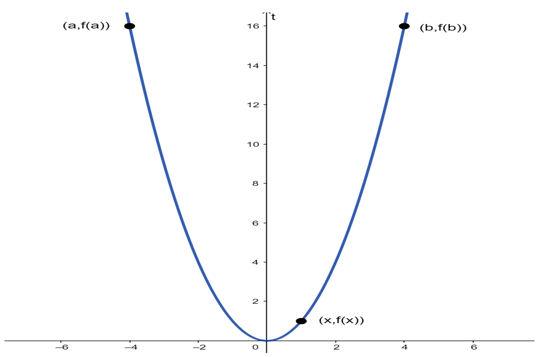
Ejemplo 1.2.8. (a) Sean $I = (-5, 5)$ y la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$. Si tomamos $a = -4$ y $b = 4$, se cumple que $a < b$. Así, al tomar un $x \in (-4, 4)$, por ejemplo $x = 1$ se cumple lo siguiente:
$$\begin{array}{rcl} \frac{f(1)-f(-4)}{1-(-4)} < & \frac{f(4)-f(-4)}{4-(-4)} & < \frac{f(4)-f(1)}{4-1} \\ \frac{1-16}{5} < & \frac{16-16}{8} & < \frac{16-1}{3} \\ -3 < & 0 & < 5 \end{array}$$

Así, no es difícil de verificar que la función es convexa, y su gráfica se presenta en la Figura 1.2.2-(a).

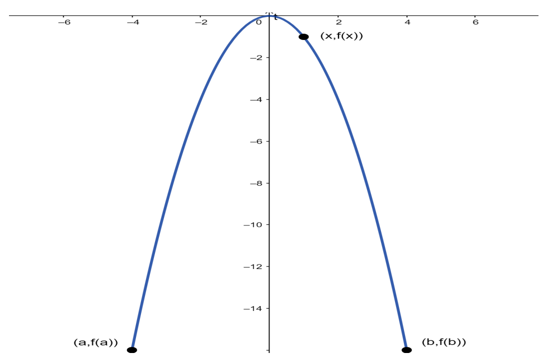
(b) Sean $I = (-5, 5)$ y la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = -x^2$. Si tomamos $a = -4$ y $b = 4$, se cumple que $a < b$. Así, al tomar un $x \in (-4, 4)$, por ejemplo $x = 1$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tfrac{f(4)-f(-4)}{4-(-4)} &< \tfrac{f(1)-f(-4)}{1-(-4)} \\ \tfrac{-16-(-16)}{8} &< \tfrac{-1-(-16)}{5} \\ 0 &< 3 \end{aligned}$$

No es difícil generalizar esta idea y verificar que la función es cóncava. Su gráfica se muestra en la Figura 1.2.2-(b).



(a) Gráfica de la función $f(x) = x^2$.



(b) Gráfica de la función $f(x) = -x^2$.

Figura 1.2.2: Gráficas de las funciones dadas por $f(x) = x^2$ y $f(x) = -x^2$.

Más aún, las funciones particulares que son de nuestro interés son las funciones continuas. Estas funciones se pueden definir de la siguiente manera.

Definición 1.2.9. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. La función f es *continua* en el punto a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. La función f es continua en A si es continua en cada punto de A.

Considerando lo anterior, se puede caracterizar a una función continua como se muestra a continuación.

Observación 1.2.10. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. La función f es continua en el punto a si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Tomemos en cuenta el siguiente resultado puesto que nos interesa la continuidad de una función en valor absoluto.

Teorema 1.2.11. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en a, entonces $|f|$ es continua en a.

Demostración. Supongamos que f es continua en a. Veamos que si $|x - a| < \delta$, entonces $||f(x)| - |f(a)|| < \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, en vista de la Observación 1.2.10, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Veamos que $||f(x)| - |f(a)|| < \epsilon$. Tomando en cuenta que, para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (vea [36, pág. 20]), se sigue que $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$. De lo anterior, se tiene que $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \epsilon$, por consiguiente $||f(x)| - |f(a)|| < \epsilon$. Por lo tanto, $|f|$ es una función continua. $\square$

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Se define el derivado de A como sigue.

Definición 1.2.12. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$.

(a) Se dice que x es un punto de acumulación de A si para todo $\epsilon > 0$ existe un punto $a \in A$ tal que $0 < |x - a| < \epsilon$.

(b) Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A se le llama *derivado* de A y se denota por A'.

Un concepto importante que necesitamos incluir es el de derivada de una función, el cual definimos a continuación.

Definición 1.2.13. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$ tal que $a \in A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. La función f es *derivable en a* si existe:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A este límite se le denota por $f'(a)$ y se le conoce como la *derivada de f en a*.

Observación 1.2.14. Notemos que, partiendo de la Definición 1.2.13, se define recursivamente la n-ésima derivada de f en a de la siguiente manera:
Sabemos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

entonces:

$$\begin{aligned}
f''(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}, \\
f'''(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f''(x) - f''(a)}{x - a}, \\
&\vdots \\
f^{(n)}(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a},
\end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

En vista de que conocemos ahora la derivada de una función, veamos el siguiente resultado, el cual indica que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (a, b) y $(f(a), f(b))$, coinciden con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en algún punto del intervalo. La demostración se puede consultar en [36, pág. 266].

Teorema 1.2.15 (Teorema del valor medio)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, donde I es el intervalo cerrado $[a, b]$. Si f es derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Consideremos la siguiente proposición, ya que es relevante en el desarrollo del presente trabajo.

Proposición 1.2.16. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, un número no negativo c y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) < c$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, se cumple que $f(x) < c$.

De manera similar, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2.17. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, un número no negativo c y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $c < \lim\limits_{x \to a} f(x)$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, se cumple que $c < f(x)$.

La siguiente proposición hace referencia a la función $|f|$ y será de mucha utilidad más adelante.

Proposición 1.2.18. Sean A un conjunto no vacío tal que $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to a} f(x)| = |L|$.

Hasta ahora, hemos revisado el concepto de la primera derivada de una función. En relación a ésta, el *criterio de la primera derivada* permite determinar el comportamiento de la función en intervalos específicos tal como lo muestra el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en [36, pág. 269].

Teorema 1.2.19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, donde I es el intervalo cerrado $[a, b]$ y f derivable en (a, b).

(a) Si $0 < f'(x)$, para cada $x \in (a, b)$, entonces f es una función creciente en (a, b).

(b) Si $f'(x) < 0$, para cada $x \in (a, b)$, entonces f es una función decreciente en (a, b).

También recordemos el siguiente lema (vea [36, pág. 307]).

Lema 1.2.20. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, donde I es el intervalo cerrado $[a, b]$ y f derivable en (a, b).

(a) Si f' es creciente y $f(a) = f(b)$, entonces $f(x) < f(a) = f(b)$ para toda $x \in (a, b)$.

(b) Si f' es decreciente y $f(a) = f(b)$, entonces $f(x) > f(a) = f(b)$.

Más aun, si tomamos en cuenta el Teorema 1.2.19 podemos determinar si una función es cóncava o convexa. El siguiente resultado nos garantiza dichas propiedades.

Teorema 1.2.21. Sean un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I.

(a) f' es creciente sobre I si y sólo si f es convexa en I.

(b) f' es decreciente sobre I si y sólo si f es cóncava en I.

Demostración.

(a) Supongamos que f' es creciente, veamos que f es convexa en I. Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$. Tomamos $x \in (a, b)$ y definimos la función g como sigue:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Observemos que $g(a) = f(a) = g(b)$. Luego, derivando la función g tenemos lo siguiente:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es fácil notar que g' es creciente al serlo f'. Así, por el Lema 1.2.20, sabemos que si $a < b$ y $g(a) = g(b)$, entonces $g(x) < g(a) = g(b)$, para toda $x \in (a, b)$, esto es:

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < f(a).$$

Luego, tenemos que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por lo tanto, en vista de la Definición 1.2.7, f es convexa.

Por el otro lado, suponiendo que f es convexa, veamos que f' es creciente. Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$ y tomamos a $x \in (a, b)$. Puesto que f es convexa, se sigue de la Definición 1.2.7 que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Así, el límite de las desigualdades anteriores es:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \lim_{x \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \lim_{x \to a} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{1.2.1}$$

Notemos que la desigualdad (1.2.1) se puede dividir en dos partes. De la primera parte, puesto que f es derivable en a y en vista de la Definición 1.2.13, tenemos que:

$$f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Más aún, por el Teorema del valor medio 1.2.15, se sigue que existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De modo que $f'(a) < f'(c)$. Luego, de la segunda parte de (1.2.1), puesto que f es derivable en b y en vista de la Definición 1.2.13, tenemos que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b).$$

De manera que $f'(c) < f'(b)$. En vista de que $f'(a) < f'(c)$ y $f'(c) < f'(b)$ se concluye que f' es creciente.

(b) Se demuestra de manera similar a como se hizo en (a). □

Note que la convexidad o concavidad también puede analizarse mediante la segunda derivada cuando ésta existe. A esta propiedad se le conoce como *el criterio de convexidad*. En el siguiente resultado se caracteriza la convexidad de una función en base a su segunda derivada.

Teorema 1.2.22. Sean un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I.

(a) Si $0 < f''(x)$, para cada $x \in I$, entonces f es convexa en el intervalo I.

(b) Si $f''(x) < 0$, para cada $x \in I$, entonces f es cóncava en el intervalo I.

Demostración.

(a) Supongamos que $f''(x) > 0$. Veamos que f es convexa. Dado que $f''(x) > 0$ se tiene que f' es creciente. Así, por el Teorema 1.2.21, se sigue que f es convexa.

(b) Se demuestra de manera similar a como se hizo en (a). □

También es necesario hacer mención de algunas caracterizaciones de las sucesiones. Una *sucesión* en $\mathbb{R}$ es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ pongamos $f(n) = x_n$. A x_n se le llama el *$n-$ésimo término* de la sucesión y al conjunto de los términos de la sucesión se denota como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ [36].

Definición 1.2.23. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

(a) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión acotada superiormente* si existe un número $K \in \mathbb{R}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n \leq K$.

(b) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión acotada inferiormente* si existe un número $K \in \mathbb{R}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $K \leq x_n$.

El concepto de límite de una sucesión está definido de la siguiente manera.

Definición 1.2.24. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a L si para toda $\epsilon > 0$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ con $N \leq n$, se cumple que $|x_n - L| < \epsilon$.

Una sucesión creciente y una sucesión decreciente se definen bajo las siguientes condiciones.

Definición 1.2.25. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

(a) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión creciente*, si para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n \leq x_{n+1}$.

(b) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión decreciente*, si para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_{n+1} \leq x_n$.

En el caso de que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea creciente o decreciente y además acotada, el siguiente resultado nos garantiza que dicha sucesión converge. La demostración del resultado se puede consultar en [36, pág. 621].

Teorema 1.2.26. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

(a) Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Más aún $\lim_{n\to\infty} x_n = K$, donde $K = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

(b) Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Más aún $\lim_{n\to\infty} x_n = K$, donde $K = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Se define la convergencia de un número real de la siguiente forma.

Definición 1.2.27. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión converge a l, es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n > N$, entonces $|a_n - l| < \epsilon$.

El siguiente resultado indica la convergencia de un ejemplo particular de sucesión de número reales, a saber la *sucesión de potencias* de un número real, cuya demostración se puede consultar en [36, pág. 618].

Teorema 1.2.28. Si $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Sección 1.3

Teoría económica

La *Economía* es una ciencia que estudia cómo las sociedades utilizan recursos escasos para producir bienes y servicios, y cómo distribuirlos para su consumo entre diferentes personas, evaluando entre las distintas alternativas para lograr su cometido. Para ello, la teoría económica construye modelos de los fenómenos sociales con el objetivo principal de determinar la forma en que se organiza la sociedad, de tal manera que se logré el uso más eficiente de los recursos para satisfacer las necesidades y deseos de los individuos [32].

Para cumplir con dicho objetivo, la Economía emplea dos métodos de razonamiento, variando dependiendo del tipo de investigación, por un lado el desarrollo de las teorías emplean razonamientos deductivos a partir del planteamiento de ciertos supuestos mientras que por otro lado las aplicaciones de dichas teorías, es decir los estudios empíricos, aplican razonamientos inductivos [13].

Las investigaciones tanto deductivas como inductivas, con la finalidad de complementarse, se auxilian de las herramientas matemáticas como el álgebra lineal y el calculo diferencial, entre otros, logrando describir y predecir los costos y beneficios que generan un progreso y una distribución eficiente y equitativa de los recursos en la sociedad resolviendo qué bienes se producen, cómo se producen y para quienes se producen, las cuales son tres problemáticas fundamentales de la organización económica [32]. Para determinar las decisiones que solventen las problemáticas antes mencionadas, es necesario tomar en cuenta dos conceptos: los *insumos* y los *productos*.

Los *insumos* (*inputs*), son los bienes o servicios que son empleados por las unidades económicas de producción para generar bienes o servicios, también se les denomina como *factores de producción* y se pueden clasificar en tres categorías: *tierra*, que abarca los recursos naturales o ambientales; *trabajo*, que se refiere al tiempo, capacidad intelectual y esfuerzo que un individuo dedica a las actividades productivas; y *capital*, que integra los bienes durables de una economía cuyo objetivo no es satisfacer el consumo, sino que son utilizados en el proceso de producción [22, pág. 2]. Y los *productos* (*outputs*), son los distintos bienes o servicios que resultan de la combinación de los insumos en el proceso de producción, cuya finalidad es satisfacer el consumo [32, pág. 9].

Además de los insumos y los productos, se requiere del lugar donde se efectuará la interacción, para ello se define al *sistema económico* como el “conjunto de relaciones básicas, técnicas e institucionales que caracterizan la organización económica de una sociedad y condicionan el sentido general de sus decisiones fundamentales, así como los cauces predominantes de su actividad” [22, pág. 14]. En dicho sistema si los agentes sociales actúan libremente, entonces se trata de una *economía de mercado*, donde el *mercado* se entiende como el mecanismo a través del cual interactúan los compradores y vendedores para determinar los precios de los productos y servicios que requieren intercambiar [32, pág.

25]. Es necesario tener en cuenta que no solo participan compradores y vendedores, ya que existen otras instituciones económicas involucradas como es el caso del organismo de Estado, que se encarga de regular la actividad económica.

En un sistema económico existen diferentes problemas que la Economía trata de solventar, sin embargo dependiendo del agente económico a quien va dirigido, la variable económica o la relación a analizar se requiere una visión microscópica o macroscópica, por lo que cabe señalar que la Economía se estudia según dos enfoques, el *microeconómico* y el *macroeconómico*.

La *microeconomía* estudia y modela los comportamientos básicos y las elecciones realizadas por los agentes económicos individuales, que inciden en el funcionamiento de mercados específicos. Por otra parte, la *macroeconomía* analiza y modela comportamientos agregados o globales, es decir, los fenómenos que afectan al conjunto de la economía como el empleo, la inflación, el producto total o ingreso general de una región, el mercado monetario, entre otros [22]. Esta dicotomía no es precisamente rigurosa al analizar los fenómenos sociales, puesto que las agregaciones son las sumas de los valores individuales, y lo único que diferencia un enfoque del otro son los objetivos y métodos de las problemáticas a las que se enfrenta la ciencia económica.

Antes de abordar los conceptos que se requieren para los modelos propuestos en la presente investigación, es necesario tener en cuenta que se basan en el *principio de optimización* y en el *principio del equilibrio*, sin importar el enfoque económico que se le esté dando. Específicamente, el *principio de optimización* supone que los individuos tratan de elegir niveles de consumo o producción que están a su alcance, de manera racional y que les proporcione mayor satisfacción; mientras que el *principio del equilibrio* implica que los precios se ajustan hasta que la cantidad que demandan los individuos de un bien es igual al que se ofrece [37, pág. 2]. Aunque esta sea la definición general del equilibrio, cada modelo puede variar dicha definición para ser adecuada a las necesidades del investigador, por ejemplo, Varian determina que “el equilibrio exigirá que los actos de los agentes económicos sean mutuamente coherentes” [37, pág. 2].

En este sentido, cada uno de los modelos propuestos en la presente tesis sigue los principios mencionados con algunas adecuaciones particulares que son detallados en los capítulos correspondientes.

El objetivo general de las teorías microeconómicas es el análisis de la determinación de los precios y el intercambio de bienes y servicios con fines de uso particular; para ello, Henderson señala que se proponen modelos matemáticos que “traducen los argumentos verbales en formas concisas y consistentes” [13, pág. 4]. Más aun, las matemáticas permiten la vinculación de conceptos y resultados que no pueden ser explicados únicamente con la lógica filosófica.

Antes de comenzar con las relaciones matemáticas que se proponen en los modelos económicos de este trabajo, incluimos algunos conceptos de la microeconomía que permitan comprender en que consiste el intercambio entre entres económicos, partiendo de la teoría del productor y de la teoría del consumidor.

Dentro de la teoría del productor se revisa el concepto de *frontera de posibilidades de producción*, que se entiende como el límite entre los niveles de producción alcanzables y los que no lo son cuando todos los recursos disponibles se utilizan. La frontera de posibilidades de producción depende principalmente del costo de oportunidad y el costo marginal [26, pág. 35]. Y dentro de la teoría del consumidor se revisa el concepto de *beneficio* o *utilidad marginal* de los consumidores, el cual es el beneficio que se obtiene de consumir una unidad más de un bien. Se mide a través de los precios que los individuos se están dispuestos a pagar por un bien [26, pág. 35]. De lo anterior, se tiene que los recursos de una economía se están utilizando eficientemente cuando el costo marginal cada bien es igual a su beneficio marginal.

Si los recursos se emplean eficientemente podemos hablar entonces del intercambio de bienes y servicios entre los entes económicos dentro de un mercado competitivo. En el cual se efectúan las siguientes acciones. El consumidor es el ente económico que efectúa la siguiente acción [13].

Definición 1.3.1. Demandar significa estar dispuesto a comprar, mientras que comprar es efectuar realmente la adquisición. Así, la demanda refleja una intención, y la compra constituye una acción. Un agente demanda un bien cuando lo desea y, además, posee los recursos necesarios para adquirirlo.

La cantidad demandada es la cantidad de un bien que los compradores quieren y pueden comprar. Por otro lado, el productor es el ente económico que efectúa la siguiente acción [13].

Definición 1.3.2. Ofrecer es tener la intención de vender o estar dispuesto a ello, mientras que vender es hacerlo realmente. La oferta refleja las intenciones de venta de los productores.

La cantidad ofrecida de un bien es la que los vendedores quieren y pueden vender. En relación a lo anterior, de forma general se define al equilibrio en relación a la demanda y la oferta, como sigue.

Definición 1.3.3. La condición de equilibrio entre la oferta y la demanda se cumple cuando la cantidad demanda y la cantidad ofrecida son la mismas a un precio dado.

Sin embargo, cuando no se cumplen la condición de equilibrio en una economía, se pueden dar dos casos importantes que dependen de que los precios estén por encima del precio de equilibrio, esto es que exista un excedente de la oferta o de la demanda, los cuales se definen a continuación.

Definición 1.3.4. El *excedente de la oferta* o el *excedente del productor* es el valor de la producción menos el valor consumido de los bienes producidos dentro de una economía.

Definición 1.3.5. El *excedente de la demanda* o el *excedente del consumidor* ocurre cuando la cantidad demandada de un bien es superior a la oferta de dicho bien dentro de un mercado.

Cuando los precios están por debajo del precio de equilibrio surge un faltante que con el tiempo genera que los precios suban [26, pág. 69]. Dicho desequilibrio es solucionado por el mercado por si solo, puesto que hay ajustes en los precios o en la demanda u oferta del mercado externo de dicho excedente. El lector interesado en la microeconomía puede consultar [13, 26, 32, 37].

Por otra parte, los objetivos de las teorías macroeconómicas están enfocados en la determinación de los niveles de renta nacional y del empleo agregado de recursos, permitiendo describir el estado y el progreso de la economía como un todo. Parten de definiciones similares a las que se abordan en microeconomía. Para los fines de la presente investigación se requieren los siguientes conceptos.

Definición 1.3.6. La demanda que se dirige a un mercado que esta fuera del sistema, el cual puede ser otra economía, los demandantes finales, el gobierno, entre otros, se le conoce como *demanda externa*.

Partiendo de la definición anterior, se puede generalizar lo siguiente.

Definición 1.3.7. Una economía abierta se entiende como aquella en la que existe un intercambio con una entidad económica exógena al sistema. O bien, una economía cerrada se entiende como aquella en la que el intercambio se da sólo con los entes económicos del sistema sin que exista intercambio de entrada o salida con el exterior.

Sin embargo, no sólo nos interesa hablar de la demanda. Por el lado de la oferta, requerimos conocer la siguiente definición.

Definición 1.3.8. La *producción bruta* es el total de la producción sin depreciación, ni impuestos.

Los modelos de enfoque macroeconomícos desarrollados en los capítulos posteriores son el modelo de Leontief y en el modelo keynesiano. Los modelos al ser de corrientes de pensamiento distintas presentan secuencias diferentes de como abordar el estudio de una economía, por lo cuál en los apartados correspondientes de los capítulos donde se desarrollan dichos modelos, se hace un análisis de los conceptos económicos que se requieren.

Capítulo 2

Modelo de Markov

El tema principal de este capítulo está enfocado en la aplicación de algunos hechos del Álgebra lineal en la resolución de problemas de las ciencias económicas que involucran un tipo particular de procesos estocásticos discretos. Específicamente fenómenos para los cuales lo que se prevé ocurra en el futuro depende de la probabilidad de lo que ocurra en el presente, sin que importe ningún conocimiento sobre la historia anterior. Dichos fenómenos suelen modelarse de manera dinámica con los procesos estocásticos discretos denominados *procesos y cadenas de Markov*, herramienta de la teoría de la probabilidad desarrollada por el matemático ruso A. Markov en 1907 [14].

A lo largo del presente capítulo, nos referimos a los procesos y cadenas de Markov solamente como *procesos de Markov*. Lo anterior, con la finalidad de facilitar la lectura y en vista de que algunos autores utilizan dicho término para referirse a este modelo.

Los procesos de Markov se puede interpretar coloquialmente como un proceso para el cual lo que se prevé pase mañana depende de la probabilidad de lo que ocurra hoy, sin tomar en cuenta lo que sucedió ayer. Uno de los principales objetivos, de dichos procesos, es el de predecir el comportamiento de los cambios de estado a corto y largo plazo. La representación matemática de este modelo es mediante matrices de transición, que son la forma matemática de describir las probabilidades de movilidad, y de vectores de estado, que son las tasas de movilidad general. De esta manera, requerimos de algunos hechos más del álgebra lineal.

En vista de la naturaleza del modelo, el capítulo se divide en cuatro secciones. En primer lugar, en la Sección 2.1 se detallan algunos hechos del álgebra lineal requerida para describir el comportamiento de los fenómenos modelados. A saber, analizamos límites de sucesiones de matrices, en particular el límite de una sucesión de potencias de una matriz. En segundo lugar, en la Sección 2.2 se describe brevemente en qué consiste el modelo y algunas nociones propias de la teoría de la probabilidad que se requieren para comprender el modelo. Finalmente en las Secciones 2.3 y 2.4 se dan ejemplos de aplicaciones en diferentes contextos de índole económico. En particular, en la Sección 2.3 se atienden problemas referentes a producción sectorial y preferencias de consumo; y en la Sección 2.4 se analizan problemas migratorios.

Sección 2.1

Límites de sucesiones de matrices

Partiendo de lo expuesto en la Sección 1.1 del Capítulo 1, abordamos lo necesario para atender las aplicaciones que se modelan con procesos de Markov. En esta sección revisamos la teoría básica de los límites de sucesiones de matrices. Cabe señalar que en el análisis de estos conceptos vemos claramente una aplicación de la diagonalización de matrices, de los valores y vectores propios en la existencia del límite de una sucesión de potencias de una matriz. Primero, comenzamos con la definición del límite de una sucesión de matrices.

Definición 2.1.1. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, L \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Se dice que la sucesión de matrices $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ *converge a la matriz* L, si $\lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{ij} = L_{ij}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Llamamos a la matriz L de la Definición 2.1.1 el límite de la sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$, y lo denotamos por $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = L$. Una forma en que podemos visualizar la matriz L es:

$$L = \lim_{m\to\infty} A_m = \begin{pmatrix} \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{11} & \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{12} & \cdots & \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{1p} \\ \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{21} & \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{22} & \cdots & \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{n1} & \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{n2} & \cdots & \lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{np} \end{pmatrix}.$$

Observación 2.1.2. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} (A_m)_{ij}$ es el límite de una sucesión de números reales.

A continuación ejemplificamos algunas sucesiones de matrices.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos la sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$, donde para cada $m \in \mathbb{N}$, $A_m \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, definida por:

$$A_m = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{27m^6+m}}{\sqrt{4m^4-m+5}} & \left(1-\frac{1}{m}\right)^m & -3 \\ \\ \frac{1}{m+3} & \left(\frac{1}{6}\right)^m & \frac{m+7}{m-9} \end{pmatrix}.$$

Determinemos $\lim\limits_{m\to\infty} A_m$. Notemos que los primeros términos de la sucesión son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{28}}{\sqrt{8}} & 0 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{1730}}{\sqrt{67}} & \frac{1}{4} & -3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{36} & -\frac{9}{7} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{19686}}{\sqrt{326}} & \frac{8}{27} & -3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{216} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}, \ldots$$

El límite de la sucesión es:

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \begin{pmatrix} \lim\limits_{m\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27m^6+m}}{\sqrt{4m^4-m+5}} & \lim\limits_{m\to\infty} (1-\frac{1}{m})^m & \lim\limits_{m\to\infty} -3 \\ \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m+3} & \lim\limits_{m\to\infty} (\frac{1}{6})^m & \lim\limits_{m\to\infty} \frac{m+7}{m-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{e} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.1.4. Consideremos la sucesión de matrices $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$, donde para cada $m \in \mathbb{N}$, $A_m \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ está dada por:

$$A_m = \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{m})^m & \sqrt{m+1}-\sqrt{m} \\ (7m)^{\frac{1}{m}} & \frac{m^2+m+1}{2m^2-m+2} \end{pmatrix}.$$

En este caso, los primero términos de la sucesión son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2}-1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{14} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{64}{27} & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt[3]{21} & \frac{13}{17} \end{pmatrix}, \ldots$$

Así, el límite está dado por:

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \begin{pmatrix} \lim\limits_{m\to\infty} (1+\frac{1}{m})^m & \lim\limits_{m\to\infty} (\sqrt{m+1}-\sqrt{m}) \\ \lim\limits_{m\to\infty} (7m)^{\frac{1}{m}} & \lim\limits_{m\to\infty} \frac{m^2+m+1}{2m^2-m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Un caso particular de sucesiones de matrices es el siguiente:

Observación 2.1.5. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. La sucesión de potencias de la matriz A está dada por:

$$A_1 = A, \quad A_2 = A^2, \quad A_3 = A^3, \ldots, A_m = A^m, \ldots$$

De hecho, en este trabajo de tesis estamos interesados en las aplicaciones que involucran límites de sucesiones de potencias de una matriz diagonal. Más aún, nos restringimos a un tipo particular de matrices diagonales como vemos a continuación.

Observación 2.1.6. Sea $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonal. Supongamos que $D = \operatorname{diag}(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn})$, entonces en vista de la Proposición 1.1.4, para cada $m \in \mathbb{N}$, $D^m = \operatorname{diag}\left(D_{11}^m, D_{22}^m, \dots, D_{nn}^m\right)$. Así, si para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, se cumple que $0 < D_{ii} \leq 1$, entonces por la Observación 2.1.5 y por el Teorema 1.2.28, tenemos que:

$$\lim_{m\to\infty} D^m = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\,, \text{ donde } \lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{ii} < 1 \\ 1 & \text{si } a_{ii} = 1 \end{cases}.$$

Esto es, el límite de la sucesión $\{D^m\}_{m=1}^{\infty}$ es una matriz diagonal, cuya diagonal principal consta de 0 o 1.

Ejemplo 2.1.7. Veamos una sucesión de matrices como se indica en la Observación 2.1.5. Sea $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Definimos la sucesión:

$$D_1 = D, \quad D_2 = D^2, \quad D_3 = D^3, \dots, D_m = D^m, \dots$$

Puesto que D es una matriz diagonal, los primeros términos de la sucesión quedan de la siguiente manera:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{125} \end{pmatrix}, \dots$$

Además, se tiene por la Proposición 1.1.4 que $D^m = \begin{pmatrix} 1^m & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^m & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{5}\right)^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5^m} \end{pmatrix}$.

De donde, $\lim\limits_{m\to\infty} D_m = \lim\limits_{m\to\infty} D^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mostramos una propiedad importante del límite de una sucesión de matrices. Notemos la analogía con una propiedad del límite de una sucesión de números reales, a saber $\lim\limits_{m\to\infty} cx_m = c \lim\limits_{m\to\infty} x_m$ la cual, de hecho, se utiliza en la demostración. Recordemos que dos matrices son iguales si coinciden componente a componente. También recordemos la definición del producto de matrices (vea Definición 1.1.1).

Teorema 2.1.8. Sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de matrices, donde para cada $m \in \mathbb{N}$, $A_m \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ y sean $P \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$ y $Q \in M_{p\times s}(\mathbb{R})$. Si $\lim\limits_{m\to\infty} A_m$ existe y lo denotamos como L, entonces:

$$\lim_{m\to\infty} PA_m = P\left(\lim_{m\to\infty} A_m\right) = PL \quad \text{y} \quad \lim_{m\to\infty} A_m Q = \left(\lim_{m\to\infty} A_m\right) Q = LQ.$$

Demostración. Veamos que se cumple la igualdad de matrices $\lim_{m\to\infty} PA_m = PL$. Para esto, demostremos que coinciden componente a componente. Sean $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ cualesquiera. Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} (PA_m)_{ij} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(A_m)_{kj} \\
&= \lim_{m\to\infty} [P_{i1}(A_m)_{1j} + P_{i2}(A_m)_{2j} + \cdots + P_{ik}(A_m)_{kj}] \\
&= \left[\lim_{m\to\infty} P_{i1}(A_m)_{1j}\right] + \left[\lim_{m\to\infty} P_{i2}(A_m)_{2j}\right] + \cdots + \left[\lim_{m\to\infty} P_{ik}(A_m)_{kj}\right] \\
&= P_{i1} \lim_{m\to\infty} (A_m)_{1j} + P_{i2} \lim_{m\to\infty} (A_m)_{2j} + \cdots + P_{ik} \lim_{m\to\infty} (A_m)_{kj} \\
&= P_{i1}L_{1j} + P_{i2}L_{2j} + \cdots + P_{ik}L_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_{ik}L_{kj} = (PL)_{ij}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\lim_{m\to\infty} PA_m = PL$. De forma similar se demuestra la igualdad $\lim_{m\to\infty} A_mQ = LQ$. □

Corolario 2.1.9. Sean $A, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde Q es una matriz invertible. Si $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe, entonces se cumple que $\lim_{m\to\infty} (QAQ^{-1})^m = Q\left(\lim_{m\to\infty} A^m\right) Q^{-1}$.

Demostración. Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, en vista de la Proposición 1.1.7, se cumple que $(QAQ^{-1})^m = QA^mQ^{-1}$. Así, $\lim_{m\to\infty} (QAQ^{-1})^m = \lim_{m\to\infty} QA^mQ^{-1}$. Por lo tanto, aplicando dos veces el Teorema 2.1.8, se tiene que:

$$\lim_{m\to\infty} QA^mQ^{-1} = Q\left(\lim_{m\to\infty} A^mQ^{-1}\right) = Q\left(\lim_{m\to\infty} A^m\right) Q^{-1}.$$

Se tiene el corolario. □

El siguiente teorema brinda condiciones suficientes para la existencia del límite de una sucesión de potencias de una matriz diagonalizable.

Teorema 2.1.10. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si se cumplen las siguientes condiciones:

(a) Cada valor propio λ de A cumple que $\lambda = 1$ o bien $|\lambda| < 1$.

(b) A es diagonalizable,

entonces, $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe.

Demostración. Puesto que A es diagonalizable, en vista de la Definición 1.1.9, se tiene que A es semejante a una matriz diagonal. Así, existen una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^{-1}$. De hecho, por el Teorema 1.1.10, D es tal que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, λ_i es un valor propio de A. Observemos que por la Proposición 1.1.4, se tiene que $D^m = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m\right)$. Por otro lado, en vista de la hipótesis (a), tenemos que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_i^m = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i = 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

así, por la Observación 2.1.6, $\lim\limits_{m\to\infty} D^m$ existe. En vista del Corolario 2.1.9, se tiene que:

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty} QD^mQ^{-1} = Q\left(\lim_{m\to\infty} D^m\right)Q^{-1},$$

por lo que concluimos que $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ existe. □

No sólo estamos interesados en la aplicación de la herramienta hasta ahora detallada, requerimos exponer también algunos otros conceptos del álgebra lineal que están enfocados en la probabilidad. Es decir, nos centraremos en las matrices de transición y los vectores de estado.

Definición 2.1.11. Una matriz cuadrada con entradas no negativas tal que la suma de las componentes de cada una de sus columnas es uno se llama *matriz de transición* o *matriz estocástica.*

Ejemplo 2.1.12. Las siguientes matrices son un ejemplo de matriz de transición:

$$A = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.15 \\ 0.35 & 0.85 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.125 \\ 0 & 0.4 & 0.850 \\ 0 & 0.2 & 0.025 \end{pmatrix}.$$

Observación 2.1.13. Las entradas de una matriz de transición representan probabilidades. Sin embargo, en ocasiones es conveniente considerar dichas entradas como proporciones [9, pág. 289].

Definición 2.1.14. Un vector columna de n coordenadas se llama *vector de estado* o *vector de probabilidad* si sus entradas son no negativas y suman uno.

Ejemplo 2.1.15. Los vectores $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ son ejemplos de vectores de estado.

Observación 2.1.16. Las coordenadas de un vector de estado también representan probabilidades. En ocasiones, es conveniente considerar estas coordenadas como porcentajes [9, pág. 289].

Veamos un resultado que caracteriza la noción de una matriz de transición.

Teorema 2.1.17. Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz con entradas no negativas, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector columna con coordenadas no negativas y $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector columna cuyas coordenadas son uno. Se cumple:

(a) A es una matriz de transición si y sólo si $A^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

(b) $\boldsymbol{v}$ es un vector de estado si y sólo si $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v} = \big(1\big)$.

Demostración. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que para toda $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que $A_{ij} \geq 0$ y sea $u \in \mathbb{R}^n$ un vector columna, cuya coordenada $u_i = 1$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Supongamos que A es una matriz de transición. Se tiene que:

$$A^t\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn} \end{pmatrix}.$$

Puesto que A es de transición, obtenemos que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{kj} = 1$. Por lo tanto, $A^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Supongamos que se cumple la igualdad $A^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Veamos que A es de transición. Por la forma en que hemos tomado A se cumple que todas sus componentes son no negativas. Además, observemos que $A^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ equivale a tener que:

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cada columna de A suma uno. Por lo tanto, A es una matriz de transición.

(b) Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector columna tal que, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que $v_i \geq 0$ y supongamos que $\boldsymbol{v}$ es un vector de estado. Notemos que $\boldsymbol{u}^t = (1, 1, \ldots, 1)$, así:

$$\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v} = (1, 1, \ldots, 1)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right).$$

Puesto que $\boldsymbol{v}$ es un vector de estado, obtenemos que $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v} = \big(1\big)$. Recíprocamente, supongamos que se cumple que $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v} = \big(1\big)$. Veamos que $\boldsymbol{v}$ es un vector de estado. Por la forma en que se tomó $\boldsymbol{v}$ se tiene que sus coordenadas son no negativas. Más aún, la condición $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v} = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)$ equivale a $\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$. Por lo tanto, $\boldsymbol{v}$ es un vector de estado.

$\square$

El Teorema 2.1.17 lo empleamos para demostrar lo siguiente.

Corolario 2.1.18. Se cumple:

(a) El producto de dos matrices de transición de tamaño $n \times n$ es una matriz de transición de tamaño $n \times n$. En particular, cualquier potencia de una matriz de transición es una matriz de transición.

(b) El producto de una matriz de transición por un vector de estado es un vector de estado.

Demostración.

(a) Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices de transición. Es claro que $AB \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Veamos que AB es una matriz de transición. Sea $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector columna cuyas coordenadas son todas uno. Puesto que A y B son matrices de transición, se sigue del Teorema 2.1.17 que $A^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ y $B^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Ahora, por la parte (b) de la Proposición 1.1.2 tenemos que $(AB)^t\,\boldsymbol{u} = (B^tA^t)\,\boldsymbol{u}$. Además, por la parte (c) de la Proposición 1.1.2, $(B^tA^t)\,\boldsymbol{u} = B^t\,(A^t\boldsymbol{u}) = B^t\,(A^t\boldsymbol{u}) = B^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Se sigue que, $(AB)^t\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Por lo que podemos concluir, por el Teorema 2.1.17, que AB es una matriz de transición.

Veamos que para cada $m \in \mathbb{N}$, A^m es una matriz de transición, esto es $(A^m)^t\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Para demostrar esta afirmación usamos inducción matemática sobre m. Para $m = 1$ se tiene que, en vista de que A es una matriz de transición, $(A^1)^t\,\boldsymbol{u} = A^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Supongamos la veracidad de la igualdad $(A^m)^t\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, veamos que también es verdad la igualdad $(A^{m+1})^t\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. En efecto, utilizando la Observación 1.1.3, tenemos que:

$$\left(A^{m+1}\right)^t\boldsymbol{u} = \left(A^t\right)^{m+1}\boldsymbol{u} = A^t\left(A^t\right)^m\boldsymbol{u} = A^t\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

Concluimos, por la parte (a) del Teorema 2.1.17, que A^m es una matriz de transición.

(b) Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de transición y $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector de estado. Veamos que $A\boldsymbol{v}$ es un vector de estado. Sea $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector columna con todas sus entradas iguales a uno. Veamos que $\boldsymbol{u}^t\,(A\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$. En efecto, por la parte (c) de la Proposición 1.1.2, tenemos que $\boldsymbol{u}^t\,(A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}^t A)\,\boldsymbol{v}$. Notemos que por la parte (a) del Teorema 2.1.17, $(\boldsymbol{u}^t A)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v}$. Así, $\boldsymbol{u}^t\,(A\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v}$. Puesto que $\boldsymbol{v}$ es un vector de estado, por la parte (b) del Teorema 2.1.17, se tiene que $\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$. De donde, $\boldsymbol{u}^t\,(A\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$. Nuevamente por la parte (b) del Teorema 2.1.17, obtenemos que $A\boldsymbol{v}$ es un vector de estado. □

Ejemplo 2.1.19. Para visualizar de mejor manera el Corolario 2.1.18 consideremos lo siguiente.

(a) Sean B y C las matrices del Ejemplo 2.1.12. Se tiene que:

$$BC = \begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0 & 1\\ 0 & 0.5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.125\\ 0 & 0.4 & 0.850\\ 0 & 0.2 & 0.025\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.500 & 0.400 & 0.488\\ 0.500 & 0.400 & 0.088\\ 0 & 0.200 & 0.424\end{pmatrix},$$

es una matriz de transición.

Más aún, para la matriz A del Ejemplo 2.1.12, se tiene que:

$$AA = A^2 = \begin{pmatrix}0.65 & 0.15\\ 0.35 & 0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.65 & 0.15\\ 0.35 & 0.85\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.475 & 0.225\\ 0.525 & 0.775\end{pmatrix},$$

es una matriz de transición.

Y para la matriz B del mismo ejemplo,

$$B^5 = B^3B^2 = \begin{pmatrix}0.375 & 0.500 & 0.250\\ 0.500 & 0.125 & 0.750\\ 0.125 & 0.375 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.50 & 0.25 & 0.50\\ 0.25 & 0.75 & 0\\ 0.25 & 0 & 0.50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.375 & 0.469 & 0.312\\ 0.469 & 0.219 & 0.625\\ 0.156 & 0.312 & 0.063\end{pmatrix},$$

es una matriz de transición, donde además B^2 y B^3 también lo son.

(b) Tomando en cuenta las matrices de transición A y B del Ejemplo 2.1.12 y los vectores de estado $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ del Ejemplo 2.1.15, notamos que:

$$A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}0.65 & 0.15\\ 0.35 & 0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2\\ 0.8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.25\\ 0.75\end{pmatrix}, \quad B^2\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}0.50 & 0.25 & 0.50\\ 0.25 & 0.75 & 0\\ 0.25 & 0 & 0.50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.3\\ 0.4\\ 0.3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.400\\ 0.375\\ 0.225\end{pmatrix}.$$

Así, $A\boldsymbol{p}$ y $B^2\boldsymbol{q}$ son vectores de estado.

Veamos que la propiedad de la parte (a) del Corolario 2.1.18 se generaliza para cualquier número de factores. Esta generalización es relevante para las aplicaciones.

Teorema 2.1.20. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de transición. Si $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe, entonces $\lim_{m\to\infty} A^m$ es una matriz de transición.

Demostración. Supongamos que $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe. Veamos que $\lim_{m\to\infty} A^m$ es una matriz de transición. Para esto utilizamos el Teorema 2.1.17. Sea $\boldsymbol{u}$ un vector columna cuyas coordenadas son todas uno. Demostremos que $\boldsymbol{u}^t(\lim_{m\to\infty} A^m) = \boldsymbol{u}^t$. Por la parte (a) del Corolario 2.1.18 sabemos que A^m es una matriz de transición. Luego, por el Teorema 2.1.17, $\boldsymbol{u}^t A^m = \boldsymbol{u}^t$. Así, sustituyendo y aplicando el Teorema 2.1.8, tenemos que $\boldsymbol{u}^t(\lim_{m\to\infty} A^m) = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{u}^t A^m = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{u}^t = \boldsymbol{u}^t$. Por lo tanto, $\lim_{m\to\infty} A^m$ es una matriz de transición. $\square$

Sección 2.2

Los procesos de Markov

Existen fenómenos en diversas áreas de conocimiento, principalmente en ciencias naturales y sociales, que presentan un comportamiento temporal, en los cuales la probabilidad de ocurrencia depende sólo del presente; tal es el caso del movimiento migratorio de alguna especie, las preferencias de consumo, los mercados financieros, entre otros. Para predecir el comportamiento de dichos fenómenos se utilizan los procesos de Markov, modelo que se propone para resolver las incertidumbres que se tienen al respecto de lo que ocurrirá con la evolución de estos problemas [38]. De hecho, se entiende que un proceso de Markov, herramienta de la teoría de la probabilidad desarrollada por el matemático Andréi Markov en 1907, es un proceso estocástico para el cual se establece que la probabilidad de que suceda un evento tiene una dependencia únicamente con el evento anterior, sin tomar en cuenta la historia de eventos. [14].

Uno de los principales objetivos de los procesos de Markov es el de predecir el comportamiento de los cambios de estado a corto y largo plazo, teniendo en cuenta tres hipótesis fundamentales. A saber, (a) la *propiedad markoviana*, la cual supone que la posición del sistema en un instante depende solamente de su posición en un instante anterior; (b) *homogeneidad de los eventos*, que ocurre cuando la probabilidad de transición del estado i al j en cualquier instante sólo depende del cambio en el tiempo; y finalmente, (c) *homogeneidad temporal*, que se refiere a que los periodos en el proceso son iguales [14, pág. 475].

Una de las ventajas del planteamiento y análisis de fenómenos a través de los procesos de Markov es proporcionar al investigador de tales fenómenos un instrumento de predicción de ocurrencias sin renunciar a la consistencia de los resultados al corto plazo como se señala en [14, pág. 476]. Esto ha generado una aplicación real en áreas económico-administrativas al permitir analizar y estimar los patrones de conducta de los sujetos de estudio derivado de su experiencia y las consecuencias de sus conductas. Algunos ejemplos de las aplicaciones de los procesos de Markov en esta área son los estudios de la conducta del consumidor, la prevención de morosidad o la demanda estacionaria de mano de obra, algunos ejemplos de la aplicación de los procesos de Markov a fenómenos reales se puede consultar en [14, 28, 38]. En este sentido, antes de abordar los ejemplos que proponemos para ejemplificar las aplicaciones de los procesos de Markov requerimos conocer previamente algunos conceptos propios del modelo.

De manera informal un *proceso estocástico discreto* es un proceso en el que los elementos de un conjunto se ubican en uno de varios estados fijos que pueden cambiar con el tiempo. Dichos cambios se describen por una probabilidad, la cual generalmente depende de factores tales como: (a) el estado y el tiempo presente, (b) los estados previos en los que el objeto ha permanecido y (c) los estados en los que permanece o permaneció otro objeto relacionado [9]. El lector interesado en una definición formal de los procesos estocásticos discretos puede consultar [3, 15, 30].

Sea $n \in \mathbb{N}$, denotamos con n a uno de los varios estados fijos del proceso estocástico discreto. A un tipo particular de proceso estocástico discreto, el que satisface sólo la condición (a), se le denomina proceso de Markov, como vemos a continuación [9].

Definición 2.2.1. Un proceso estocástico discreto se denomina *proceso de Markov* de n estados si cumple que la probabilidad de cambio de un estado en el proceso depende solamente del estado anterior y no de otros estados o algún otro factor.

A un proceso de Markov de n estados se le asocia una matriz de transición $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y un vector de estado $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ [4, pág. 212], en el siguiente sentido. Los renglones y columnas de A corresponden a los n estados del proceso, donde la componente A_{ij} de A representa la probabilidad de moverse del estado j al estado i en una etapa. A su vez, la coordenada j del vector de estado $\boldsymbol{p}$ corresponde a la probabilidad de pertenecer al estado j en el inicio del proceso. A continuación exponemos algunas características de la matriz de transición asociada a los procesos de Markov.

Observación 2.2.2. Dados un proceso de Markov de n estados y A su matriz de transición asociada, tenemos lo siguiente:

(a) La entrada A_{ij} de A representa la probabilidad de cambio del estado j al estado i. En vista de que $A = A^1$ este cambio de estado se dice que ocurre en la etapa 1 o en la primera etapa.

Por otro lado, en vista del Corolario 2.1.18, se tiene que A^2 es nuevamente una matriz de transición. De este modo, la entrada $(A^2)_{ij}$ de A^2 representa la probabilidad de cambio del estado j al estado i, pero en la etapa 2 o en la segunda etapa.

Considerando que, por el Corolario 2.1.18, A^m sigue siendo una matriz de transición, se tiene que la componente $(A^m)_{ij}$ de la potencia m de A, representa la probabilidad de cambio del estado j al estado i en la etapa m o en m etapas.

(b) En vista del Teorema 2.1.20 tenemos que $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ es una matriz de transición. Así, la entrada $(\lim\limits_{m\to\infty} A^m)_{ij}$ de la matriz $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ representa la probabilidad de cambio del estado j al estado i en una etapa lo suficientemente grande.

Veamos un análisis similar para el vector de estado asociado a un proceso de Markov de n estados.

Observación 2.2.3. El vector de estado $\boldsymbol{p}$ de un proceso de Markov de n estados representa la manera en que se disponen inicialmente las probabilidades de ocurrencia de cada estado del proceso. Es decir, la coordenada p_i de $\boldsymbol{p}$ representa la probabilidad de ocurrencia del estado i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Tomando en cuenta las Observaciones 2.2.2 y 2.2.3, un proceso de Markov se puede interpretar de la siguiente manera.

Observación 2.2.4. Dados un proceso de Markov de n estados, A su matriz de transición asociada y $\boldsymbol{p}$ su vector de estado, tenemos lo siguiente:
Hemos dicho en la Observación 2.2.3 que la coordenada p_i de $\boldsymbol{p}$ representa la probabilidad de ocurrencia del estado i del proceso. Puesto que, $A^0\boldsymbol{p}$ es un vector de estado (vea la parte (b) del Corolario 2.1.18) y $\boldsymbol{p} = A^0\boldsymbol{p}$, podemos decir que la coordenada $(A^0\boldsymbol{p})_i$ del vector $A^0\boldsymbol{p}$ representa la probabilidad de ocurrencia del estado i del proceso en la etapa cero, o bien, que es la manera en que se disponen las probabilidades para cada estado de manera inicial.
Similarmente, por la parte (b) del Corolario 2.1.18, como el vector $A\boldsymbol{p}$ es un vector de estado podemos decir que la coordenada $(Ap)_i$ del vector $A\boldsymbol{p}$ representa la probabilidad de ocurrencia del estado i del proceso en la etapa uno, o bien, que es la manera en que se disponen las probabilidades para cada estado en la etapa uno.
En general, para cada $m \in \mathbb{N}$, en vista de las partes (a) y (b) del Corolario 2.1.18, tenemos que $A^m\boldsymbol{p}$ es un vector de estado. Así, podemos decir que la coordenada $(A^m p)_i$ del vector $A^m\boldsymbol{p}$ representa la probabilidad de ocurrencia del estado i del proceso en la etapa m, o bien, que es la manera en que en que se disponen las probabilidades para cada estado en la etapa m.

Es importante destacar que, en vista de las Observaciones 2.2.2 y 2.2.4, para analizar el comportamiento a largo plazo en los procesos de Markov, se requiere la aplicación del límite de una sucesión de potencias de una matriz, particularmente se hace una aplicación de los valores propios de una matriz diagonalizable.

Finalmente, para el desarrollo de las aplicaciones, requerimos dos hechos fundamentales de la combinatoria que involucra la teoría de probabilidades [20, pág. 23-24]. Estos son:

Definición 2.2.5.

(a) *El principio de multiplicación*:

Si existen k procedimientos y el i-ésimo procedimiento se puede hacer de n_i maneras, donde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces el procedimiento que consiste en el procedimiento 1, seguido por el procedimiento 2, ..., seguido por el procedimiento k puede hacerse de $n_1 n_2 \cdots n_k$ maneras.

(b) *El principio de adición*:

Si existen k procedimientos y el $i-$ésimo procedimiento se puede hacer en n_i maneras, donde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces el número de maneras como se puede hacer el procedimiento 1, el procedimiento 2, ..., o el procedimiento k está dado por $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, bajo el supuesto que los procedimientos no se pueden realizar conjuntamente.

Los principios definidos anteriormente los ejemplificamos a continuación, el lector interesado en profundizar más sobre este tema puede consultar [19, pág. 25].

Ejemplo 2.2.6.

(a) Principio de multiplicación.

Un articulo manufacturado debe pasar por tres controles. En cada uno de los controles, se inspecciona una característica particular del artículo y se le anota de conformidad. En el primer control hay tres mediciones posibles mientras que en cada uno delos dos últimos controles hay cuatro mediciones posibles. Por lo tanto hay $3 \times 4 \times 4 = 48$ maneras de anotar el artículo.

(b) Principio de adición.

Supongamos que proyectamos un viaje y debemos decidir entre el transporte por camión o tren. Si hay tres rutas para el camión y dos para el tren, entonces hay $3 + 2 = 5$ rutas posibles para el viaje.

Sección 2.3

Aplicaciones de procesos de Markov a producción por sectores y consumo

Ahora estamos en posibilidades de entender las aplicaciones de los procesos de Markov para fenómenos estudiados por el área económico-administrativo. En esta sección abordamos dos ejemplos. El Ejemplo 2.3.1 se basa en el que se presenta en [18, pág. 53], el cual atiende un problema de interdependencia sectorial. El Ejemplo 2.3.2 lo hemos adecuado del ejemplo de [9, pág. 301], que estudia un problema de consumo. Los cambios realizados en estos ejemplos se reducen a cambios en el nombre de los estados posibles del proceso, y se debieron a que se busca familiaridad con los términos y facilitar la comprensión del modelo; además de incorporar interrogantes que permitan determinar una estimación del proceso en el corto y largo plazo.

Ejemplo 2.3.1. Supóngase que una economía comprende dos sectores, Agricultura y Minería, y la producción de cada uno de estos sectores se distribuye entre ellos como se muestra en la Tabla 2.3.1, donde cada columna representa las proporciones de la producción que pone a la venta cada sector, para un período en particular.

	Agricultura	Minería
Agricultura	0.60	0.20
Minería	0.40	0.80

Tabla 2.3.1: Proporciones de la producción por sectores.

Suponiendo que para mantener el equilibrio entre la oferta y la demanda la producción total es constante en cada período, pero hay un intercambio continuo en las proporciones de producción entre los sectores, estamos interesados en saber:

a) ¿Cuál es la proporción de producción que Agricultura le vende a Minería en dos períodos?

b) ¿Qué proporción de producción conservará y pondrá a la venta cada sector al tercer período?

c) Bajo el supuesto inicial de que Agricultura aporta el 40 % de la producción total y Minería el 60 %, ¿qué porcentaje aporta a la producción total cada uno de los sectores para los tres primeros períodos?

Solución:

Previo a atender cada inciso, indicamos la interpretación de la información de la Tabla 2.3.1. La producción del sector agrícola se divide en 0.60, que es la proporción de producción que se conserva con la finalidad de operar su actividad, y en 0.40 que es la proporción que le vende al sector minero; mientras que la producción del sector minero se divide en 0.20, que corresponde a lo que le vende al sector agrícola, y el 0.80 que es la proporción de su producción que conserva. Puesto que se deben considerar todas las producciones, la suma de las cantidades de cada columna es 1.

De esta forma hay dos maneras de intercambiar las producciones entre los sectores: que un sector le venda una proporción de su producción al otro sector o que lo conserve para continuar con su actividad. Estos hechos corresponden a los estados de un proceso estocástico discreto. Así, suponiendo que la proporción de producción que venderá o conservará cada uno de los sectores no depende de la proporción de producción que conservó o vendió en periodos anteriores, o de la proporción de producción que conserve o ponga a la venta el otro sector, nos encontramos con un proceso de Markov de dos estados, cuyas etapas están dadas por los períodos (vea Definición 2.2.1). Por consiguiente, con la información de la Tabla 2.3.1, podemos conformar la siguiente matriz de transición asociada al proceso de Markov en cuestión:

$$A = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.20 \\ 0.40 & 0.80 \end{pmatrix}.$$

Notemos que A representa las proporciones de la producción de cada sector que vende en cada periodo. Específicamente, la componente A_{11} de A es la proporción de la producción de Agricultura que conserva, A_{21} es la proporción de la producción que Agricultura vende a Minería. A su vez, la componente A_{12} es la producción de Minería que le vende a Agricultura y A_{22} es la producción que Minería conserva para sí. Es importante destacar que, por la parte (a) de la Observación 2.2.2, este intercambio de producción corresponde al primer período, es decir la primera etapa. Mencionado lo anterior, resolvemos cada inciso.

a) La proporción de la producción del sector agrícola que venderá al sector minero en dos períodos puede ser calculada de dos posibles formas debido a como puede darse el intercambio entre los sectores. Caso 1, que Agricultura conserve su producción el primer período, y al segundo le venda a Minería. Caso 2, que en el primer período Agricultura le venda a Minería y ésta lo conserve para volver a utilizarlo en su actividad el segundo período. Así, la proporción buscada se obtiene de la probabilidad de que ocurra el caso 1 más la probabilidad de que ocurra el caso 2. Lo anterior lo visualizamos en la Figura 2.3.1.

Con relación a los principios de adición y multiplicación, se obtiene la proporción de producción que el sector agrícola le venderá al sector minero después de dos períodos de

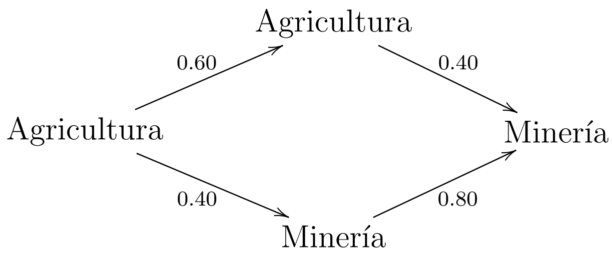


Figura 2.3.1: Intercambio de producción Agricultura-Minería en dos períodos.

la suma de los productos resultantes de: la proporción de la producción que Agricultura reservará para mantener su actividad en el primer período por la proporción de producción que venderá a Minería en el segundo período, lo cual corresponde al caso 1; más la proporción de la producción que venderá a Minería en el primer período por la proporción de la producción que reservará en el segundo período, es decir, el caso 2. Esto es, $(0.60 \times 0.40) + (0.40 \times 0.80) = 0.56$.

Cabe señalar que nos hemos ayudado de la herramienta de combinatoria para solucionar el problema planteado. Si bien, este procedimiento se puede hacer para obtener la proporción de producción de cada uno de los sectores para el segundo período podemos recurrimos a la herramienta del álgebra lineal, debido a que se puede facilitar el cálculo empleando específicamente la teoría de las matrices de transición. Tal como se indica en la parte (a) de la Observación 2.2.2, el movimiento de estado del segundo período lo obtenemos de la potencia 2 de la matriz A. En efecto, consideremos la matriz $A^2 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.28 \\ 0.56 & 0.72 \end{pmatrix}$. La proporción 0.56 es la componente del renglón 2 y la columna 1 de A^2. Por lo tanto, la proporción que el sector agrícola le venderá al sector minero, en el segundo período, es del 0.56, como se obtuvo con los principios de adición y multiplicación.

Aunque en el inciso sólo nos pregunta por la proporción de producción que Agricultura le venderá al sector minero en el segundo período, los valores 0.44 y 0.72 de las componentes $(A^2)_{11}$ y $(A^2)_{22}$ de la matriz A^2 corresponden a las proporciones de producción que Agricultura y Minería conservarán, respectivamente; y el valor 0.28 de la componente $(A^2)_{12}$ es la proporción de producción que el sector minero le venderá al sector agrícola, todo lo anterior en el segundo período.

b) Siguiendo la explicación del inciso (a) previo y nuevamente por la parte (a) de la Observación 2.2.2, para determinar las proporciones de producción a la venta de cada sector, para el tercer período, es necesario considerar la matriz $A^3 = \begin{pmatrix} 0.376 & 0.312 \\ 0.624 & 0.688 \end{pmatrix}$. De donde, observamos que Agricultura conservará el 37.60 % de su producción y le venderá a Minería el 62.40 %; mientras que Minería le venderá el 31.20 % de su producción a

Agricultura y conservará el 68.80 %.

Notesé que, los principios de adición y multiplicación también pueden ser empleados para hallar estas proporciones, sin embargo utilizando el álgebra lineal se facilita el cálculo.

c) Para saber los porcentajes que cada sector aporta a la producción total en los tres primeros períodos consideramos que, la aportación de cada uno de los sectores en la producción total en el primer período se puede obtener utilizando los principios de Adición y Multiplicación de la siguiente manera. El porcentaje de la producción total que aportará Agricultura se obtiene de la suma de la proporción que ésta reservará para su actividad para el primer período, 0.60, por la proporción de producción total del sector agrícola en el período inicial. 0.40, más la proporción de la producción que venderá a Minería en el primer período, 0.20, por la proporción de producción total del sector textil en el período inicial, 0.60. Esto es, el porcentaje que aporta Agricultura a la producción total en el primer período es $0.60 \times 0.40 + 0.20 \times 0.60 = 0.36$. A su vez, el porcentaje de la producción total que aportará Minería es la suma de la proporción de la producción que Minería le venderá a Agricultura en el primer período, 0.40, por la proporción de producción total del sector agrícola en el período inicial ,0.40, más la proporción de la producción que reservará en el primer período, 0.80, por la proporción de producción total del sector minero, 0.60. Esto es, el porcentaje que aporta Minería a la producción total en el primer período es $0.40 \times 0.40 + 0.80 \times 0.60 = 0.64$. Lo anterior sólo corresponde al primer período, se debe hacer los mismos cálculos para el segundo y tercer período.

Estas proporciones o porcentajes también pueden ser obtenidas utilizando la herramienta de las matrices de transición y los vectores de estado, dado que la producción inicial conforma el vector de estado asociado al proceso de Markov. En vista de la Observación 2.2.3, registramos la información adicional proporcionada en el inciso (c) en el vector de estado $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{pmatrix}$, del que se entiende que la primera coordenada corresponde a la producción total del sector agrícola, y la segunda coordenada a la del minero. Así, la Observación 2.2.4 indica que, para cada $m \in \mathbb{N}$, las coordenadas del vector $A^m\boldsymbol{p}$ corresponden a la producción total del sector agrícola y del minero, respectivamente, para un período m. Observemos que, la aportación de cada uno de los sectores en la producción total en el primer período queda determinada por $A\boldsymbol{p}$, para el segundo período por $A^2\boldsymbol{p}$ y para el tercer período por $A^3\boldsymbol{p}$.

En consecuencia se tiene que:

$$A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.20 \\ 0.40 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.64 \end{pmatrix},$$

es igual a lo que encontramos anteriormente mediante la combinatoria. De igual forma, la aportación de cada sector en el segundo periodo es:

$$A^2\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.28 \\ 0.56 & 0.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.344 \\ 0.656 \end{pmatrix}.$$

Para el tercer periodo es:

$$A^3\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.376 & 0.312 \\ 0.624 & 0.688 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.338 \\ 0.662 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que, la aportación en la producción total del sector agrícola será de 36 %, 34.40 % y 33.80 % para el primer, segundo y tercer período, respectivamente; mientras que el sector minero aportará 64 %, 65.60 % y 66.20 %, igualmente para el primer, segundo y tercer período, respectivamente. ♢

Veamos a continuación un ejemplo de procesos de Markov para el caso de un problema económico en el cual se hace alusión a la preferencia de consumo. Este ejemplo parte de tomar a un grupo determinado de estudiantes del que se quiere conocer cuales son sus preferencias respecto a ciertos alimentos, con base en encuestas aplicadas cada mes.

Ejemplo 2.3.2. Una encuesta llevada acabo en una escuela primaria, referente al desayuno de los estudiantes, arrojó en un día cualquiera, que el 50 % de los alumnos prefería ensalada de pollo, el 30 % prefería sincronizadas y el 20 % prefería sándwich. Una encuesta posterior, un mes después, arrojó los datos registrados en la Tabla 2.3.2.

	Ensalada	Sincronizada	Sándwich
Ensalada	0.40	0.20	0.20
Sincronizada	0.10	0.70	0.20
Sándwich	0.50	0.10	0.60

Tabla 2.3.2: Proporciones del consumo a partir de la preferencia previa.

Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál es el porcentaje de estudiantes que prefiere cada alimento, para cada mes, posterior a la encuesta original?

Solución:

La información proporcionada por la Tabla 2.3.2 se puede interpretar como sigue. De aquellos alumnos que prefirieron ensalada de pollo en la primera encuesta, el 40 % continuó prefiriéndola, el 10 % ahora prefería sincronizada y el 50 % prefería sándwich. De aquellos que primero prefirieron sincronizada, el 20 % ahora prefería ensalada, el 70 %

continuó prefiriendo sincronizada y el 10 % ahora prefería sándwich. Finalmente, de los que prefirieron sándwich en la primera encuesta, el 20 % ahora prefería ensalada, el 20 % prefería sincronizada y el 60 % siguió prefiriendo sándwich. Observemos que cada columna de la Tabla 2.3.2 suma 1, pues se contempla la totalidad de estudiantes y todas las preferencias.

En vista de la naturaleza de los datos de la Tabla 2.3.2 nos encontramos con un proceso estocástico discreto de tres estados, los cuales son la preferencia por la ensalada de pollo, por las sincronizadas y por el sándwich. Más aún, al suponer que las preferencias de los estudiantes no se ven afectadas por las preferencias previas o por las preferencias de algún compañero, se sigue de la Definición 2.2.1 que es un proceso de Markov, cuyas etapas están dadas por meses. Representamos la información de la Tabla 2.3.2 en la matriz de transición de tres estados asociada al proceso de Markov:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Veamos la información que podemos obtener de las componentes de la matriz A. En vista de la parte (a) de la Observación 2.2.2, por ejemplo, la componente A_{11} de A, representa el porcentaje de estudiantes que sigue prefiriendo ensalada de todos aquellos estudiantes que en la primera encuesta también prefería ensalada; la componente A_{31} de A, representa el porcentaje de estudiantes que prefieren sándwich de todos aquellos estudiantes que en la primera encuesta prefería ensalada; la componente A_{22}, representa el porcentaje de estudiantes que sigue prefiriendo sincronizada de todos aquellos estudiantes que en la primera encuesta también prefería sincronizada; y la componente A_{33}, representa el porcentaje de estudiantes que sigue prefiriendo sándwich de todos aquellos estudiantes que en la primera encuesta también prefería sándwich.

Notemos que la primera encuesta conforma el vector de estado asociado al proceso de Markov. Esto es, por la Observación 2.2.3 la preferencia por ensalada de pollo, sincronizadas y sándwich, respectivamente, de la encuesta original conforman el vector de estado $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$. Así, siguiendo el análisis del inciso (c) del Ejemplo 2.3.1 y de la Observación 2.2.4, para cada $m \in \mathbb{N}$, las coordenadas del vector $A^m\boldsymbol{p}$ representan el porcentaje de estudiantes que prefieren cada uno de los alimentos en el mes m posterior a la primera encuesta.

Para calcular el porcentaje de estudiantes que prefieren cada uno de los alimentos en cualquier mes posterior a la primera encuesta, requerimos primero conocer la proporción de estudiantes que prefieren cada uno de los alimentos también para cualquier mes m posterior; esto es, en vista de la parte (b) de la Observación 2.2.2, debemos calcular la matriz de transición $\lim_{m\to\infty} A^m$.

Primero debemos asegurar que $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ existe. Para ello, con ayuda de una calculadora de matrices, por ejemplo [39], obtenemos que A es diagonalizable. De hecho, obtenemos que $A = QDQ^{-1}$, donde las matrices Q, D, Q^{-1} halladas son:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{8} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-11}{15} & \frac{4}{15} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Observemos que, por el Teorema 1.1.10, los valores propios de A son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$, De modo que, A cumple con las condiciones del Teorema 2.1.10, lo que nos asegura que $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ existe. Con ésto, por el resultado del Corolario 2.1.9, se tiene que:

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty} \left(QD^mQ^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.35 & 0.35 & 0.35 \\ 0.40 & 0.40 & 0.40 \end{pmatrix}.$$

De la matriz de transición $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$, en vista de la parte (b) de la Observación 2.2.2, por ejemplo, la componente $\left(\lim\limits_{m\to\infty} A^m\right)_{11}$ de $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$, representa la proporción de estudiantes que sigue prefiriendo ensalada de todos aquellos estudiantes que en la primera encuesta también prefería ensalada para cualquier mes m posterior; la componente $\left(\lim\limits_{m\to\infty} A^m\right)_{22}$, representa la proporción de estudiantes que sigue prefiriendo sincronizada de todos aquellos estudiantes que en la primera encuesta también prefería sincronizada para cualquier mes m posterior; y la componente $\left(\lim\limits_{m\to\infty} A^m\right)_{33}$, representa la proporción de estudiantes que sigue prefiriendo sándwich de todos aquellos estudiantes que en la primera encuesta también prefería sándwich para cualquier mes m posterior.

Ahora bien, de la Observación 2.2.4 se sigue que, el porcentaje de estudiantes que prefieren cada uno de los alimentos en los meses posteriores a la primera encuesta corresponde a calcular el vector de estado $\lim\limits_{m\to\infty} A^m\boldsymbol{p}$. Por el Teorema 2.1.8, se tiene que:

$$\lim_{m\to\infty} A^m\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.35 & 0.35 & 0.35 \\ 0.40 & 0.40 & 0.40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.35 \\ 0.40 \end{pmatrix}.$$

Por tal motivo, en los meses posteriores a la encuesta original, el 25 % de los estudiantes preferirá una ensalada, el 35 % sincronizadas y el 40 % sándwich. $\diamondsuit$

Sección 2.4

Aplicaciones de procesos de Markov a migración

A continuación se señalan otras aplicaciones de los procesos de Markov de índole demográfico. La interpretación de los supuestos y de los resultados obtenidos en los ejemplos parecen estar alejados de la realidad. Sin embargo, son ilustrativos para la estimación del comportamiento de una población. Cabe señalar que, el Ejemplo 2.4.1 se ha adecuado del ejemplo en [8, pág. 81] y el Ejemplo 2.4.2 está inspirado en [9, pág.288]. Los cambios realizados en estos ejemplos van en el sentido de adecuar los nombres de los estados posibles del procesos por términos familiares e incorporar interrogantes adicionales al problema con el objetivo de conocer la distribución de la población en el largo plazo.

Ejemplo 2.4.1. En cierto país se clasificó a una generación inicial de mujeres según el área en la que viven: urbana, suburbana o rural. Los registros de un censo indican que las hijas de mujeres urbanas tienen una probabilidad de 0.10 de establecerse en áreas rurales y de 0.50 en áreas suburbanas; las hijas de mujeres suburbanas tienen una probabilidad de 0.20 de establecerse en áreas rurales y de 0.30 en áreas urbanas; y las hijas de mujeres rurales tienen una probabilidad de 0.20 de establecerse en zonas suburbanas y de 0.70 en áreas rurales. Con esta información y bajo la restricción de que tenemos una población constante en el sentido de que cada mujer tiene sólo una hija, quien a su vez tiene sólo una hija, y así sucesivamente, y además de que no hay decesos, podemos analizar la distribución de las nuevas generaciones de mujeres en una región diferente a la de su madre, es decir, el comportamiento a futuro de esta población en distintos aspectos; por ejemplo, de manera particular podríamos responder las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué probabilidad existe de que las hijas de las mujeres de la generación inicial, que habitan áreas urbanas, migren a zonas suburbanas?

Incluso esta pregunta puede realizarse para las nietas y para las bisnietas de la generación inicial, así como el movimiento hacia las otras regiones. Más aún, si el censo arroja la información adicional de que la población inicial de mujeres está distribuida en 40 % mujeres urbanas, 50 % mujeres suburbanas y 10 % mujeres rurales, entonces podemos ser capaces de predecir cómo quedará distribuida la población de mujeres en las tres zonas para las generaciones futuras. En particular, podríamos cuestionarnos:

b) ¿Cómo queda distribuida la población de las hijas, las nietas y las bisnietas en las tres áreas bajo estas nuevas consideraciones?

c) ¿Es posible que la población de mujeres se distribuya equitativamente a largo plazo en cada región? o ¿cómo sería su distribución?

Solución:

Conviene presentar en la Tabla 2.4.1 la información brindada de antemano.

	Urbana	Suburbana	Rural
Urbana	0.40	0.30	0.10
Suburbana	0.50	0.50	0.20
Rural	0.10	0.20	0.70

Tabla 2.4.1: Probabilidades del área de residencia de la primera generación.

Cada renglón de la Tabla 2.4.1 representa la probabilidad que tiene la hija de una mujer, ubicada en alguna de las áreas (urbana, suburbana o rural), de establecerse en una zona determinada (urbana, suburbana o rural). En consecuencia, puesto que tenemos la restricción de una población constante, la suma de cada columna es uno.

Se señala a continuación la solución de cada inciso, para lo cual debemos tener presente que la generación inicial de mujeres, o bien generación cero, corresponde a las madres; la primera generación, corresponde a las hijas; la segunda generación a las nietas; la tercera a las bisnietas, etc.

a) Para obtener la probabilidad que tienen las hijas de las mujeres de la generación inicial, que habitan áreas urbanas, de migrar a zonas suburbanas, existen tres posibilidades: que las hijas vivan en zonas urbanas, suburbanas o rurales. Estos hechos corresponden a los estados de un proceso estocástico discreto. Aunado a que la probabilidad de que la hija se establezca en alguna de las regiones depende únicamente de donde se ubico su madre y no de donde se ubique otra mujer contemporánea o alguna mujer de otra generación, se sigue de la Definición 2.2.1 que tenemos un proceso de Markov de tres estados, cuyas etapas están dadas por el periodo de tiempo de una generación a otra.

Ahora bien, es importante señalar que la información de la Tabla 2.4.1 corresponde a la primera generación. De esta forma, conformamos con dichos datos la matriz de transición asociada al proceso de Markov:

$$A = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.30 & 0.10 \\ 0.50 & 0.50 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.70 \end{pmatrix}.$$

En particular, la probabilidad que tiene la hija de una mujer urbana de ser suburbana es la componente A_{21}, esto es, las hijas de las mujeres de la generación inicial que habitan áreas urbanas tienen el 0.50 de probabilidad de migrar a zonas suburbanas.

De hecho, las componentes de la matriz A, o bien A^1, proporcionan la probabilidad de migración de la primera generación a cada una de las zonas. Por ejemplo, la componente

A_{13} de A es la probabilidad que tiene la hija de una mujer rural de mudarse a una zona urbana; de igual forma, la componente A_{33} de A es la probabilidad que tiene la hija de una mujer rural de permanecer en una zona rural.

Por otro lado, para determinar cuál es la probabilidad que tienen las nietas de las mujeres de la generación inicial, que habitan en áreas urbanas, migren a zonas suburbanas existen tres formas diferentes en las que puede ocurrir tal movimiento: que la hija de una mujer urbana permanezca en una zona urbana y la hija de esta hija se mueva a la zona suburbana; que la hija de la mujer urbana se mude a una zona suburbana y la hija de la hija permanezca ahí; o que la hija de la mujer urbana se mueva a una zona rural y la hija de la hija se mude a la zona suburbana. Estas probabilidades se muestran en el esquema de la Figura 2.4.1.

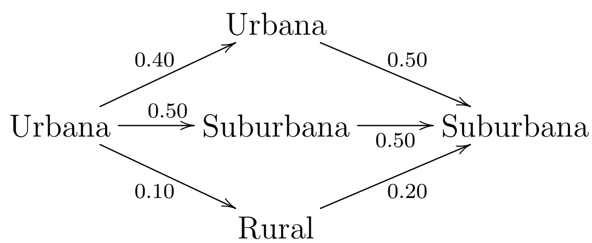


Figura 2.4.1: Cambio de residencia de las mujeres en dos etapas.

Ahora bien, para conocer la probabilidad de migración de las nietas es necesario tener en cuenta que, tal como se indica en la parte (a) de la Observación 2.2.2, el movimiento de estado de la segunda generación lo obtenemos de la potencia 2 de la matriz A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.29 & 0.17 \\ 0.47 & 0.44 & 0.29 \\ 0.21 & 0.27 & 0.54 \end{pmatrix}.$$

Así, la componente $(A^2)_{21}$ es la probabilidad que tienen las nietas de las mujeres de la generación inicial, que habitan áreas urbanas, de ser suburbana. En vista de lo anterior, las nietas de las mujeres de la generación inicial, que habitan áreas urbanas, tienen el 0.47 de probabilidad de migrar a zonas suburbanas. Notemos que las componentes de la matriz A^2 proporcionan la probabilidad de migración de la segunda generación a cada una de las zonas.

Cabe señalar que, este cálculo también puede realizarse mediante la herramienta de la probabilidad, como una aplicación de los llamados principios de la multiplicación y de la adición tal y como se planteo en el inciso (a) del Ejemplo 2.3.1. En efecto, auxiliándonos de la Figura 2.4.1, podemos determinar que la probabilidad que tiene la nieta de una mujer urbana de vivir en una zona suburbana es la suma de los productos resultantes de las diversas formas de combinación de los casos posibles de residencia de las hijas de mujeres urbanas por la probabilidad de que las hijas de éstas sean suburbanas. Esto es, $(0.40\times 0.50)+(0.50\times 0.50)+(0.10\times 0.50) = 0.470$, valor que coincide con la componente $(A^2)_{21}$, como lo habíamos encontrado.

Finalmente, para establecer la probabilidad de migración de las bisnietas de las mujeres de la generación inicial que habitan áreas urbanas, requerimos seguir el mismo procedimiento anterior ahora para la tercera generación. Para ello, siguiendo el análisis de la parte (a) de la Observación 2.2.2, sabemos que el cambio de estado de las mujeres de la generación inicial a la tercera, está dada por la potencia 3 de la matriz A:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0.290 & 0.275 & 0.209 \\ 0.437 & 0.419 & 0.338 \\ 0.273 & 0.306 & 0.453 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior, la componente $(A^3)_{21}$ de A^3 es el número que corresponde a la probabilidad que tiene la tercera generación de migrar a zonas suburbanas; esto es, las bisnietas, de las mujeres de la generación inicial que habitan en áreas urbanas, tienen el 0.437 de probabilidad de migrar a zonas suburbanas. Observemos que las componentes de la matriz A^3 proporcionan la probabilidad de migración de la tercera generación a cada una de las zonas.

b) Para conocer cómo se distribuye la población de las hijas, nietas y bisnietas en las tres zonas, considerando la información indicada originalmente, primero requerimos establecer que dicha información corresponde a la distribución de la población inicial de las mujeres censadas. Notemos que esto equivale a decir cómo están ubicadas las mujeres de la generación inicial en cada uno de los estados posibles del proceso. Así, en vista de la Observación 2.2.3, registramos la información adicional indicada en el vector de estado $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.50 \\ 0.10 \end{pmatrix}$. La Observación 2.2.4 indica que, para cada $m \in \mathbb{N}$, las coordenadas del vector $A^m\boldsymbol{p}$ corresponden a la manera en que se disponen los porcentajes de la población para cada estado de la generación m. De esto, se deduce que el vector $A\boldsymbol{p}$ representa la manera en que se ubica el total de las hijas en cada una de las tres regiones. Observemos que:

$$A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.30 & 0.10 \\ 0.50 & 0.50 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.50 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.47 \\ 0.21 \end{pmatrix}.$$

Del total de las mujeres de la primera generación, el 32 % se establecerá en zonas urbanas, el 47 % en áreas suburbanas y el 21 % en regiones rurales.

De igual forma, para determinar la ubicación de las nietas en cada una de las zonas, requerimos conocer el valor correspondiente a cada una de las coordenadas del vector $A^2\boldsymbol{p}$.

Puesto que:

$$A^2\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.29 & 0.17 \\ 0.47 & 0.44 & 0.29 \\ 0.21 & 0.27 & 0.54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.50 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.290 \\ 0.437 \\ 0.273 \end{pmatrix},$$

obtenemos que del total de las mujeres de la segunda generación, el 29 % se establecerá en zonas urbanas, el 43.70 % en áreas suburbanas y el 27.30 % en regiones rurales.

Finalmente, para saber cómo se ubican las bisnietas en cada una de las zonas, sólo es cuestión de calcular el vector $A^3\boldsymbol{p}$. Notemos que:

$$A^3\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.290 & 0.275 & 0.209 \\ 0.437 & 0.419 & 0.338 \\ 0.273 & 0.306 & 0.453 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.50 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.274 \\ 0.418 \\ 0.308 \end{pmatrix}.$$

Del total de las mujeres de la tercera generación, el 27.40 % serán urbanas, el 41.80 % suburbanas y el 30.80 % rurales.

c) Para poder ver si es posible que las mujeres se distribuyan equitativamente o no entre las tres regiones conforme pasen las generaciones necesitamos conocer la distribución de las mujeres en estas tres regiones para una generación m lo suficientemente grande. Dicha distribución es el vector $\lim_{m\to\infty} A^m\boldsymbol{p}$. De esta forma, primero debemos encontrar la matriz $\lim_{m\to\infty} A^m$, la cual por la parte (b) de la Observación 2.2.2 es una matriz de transición, y nos indica la probabilidad que tienen las mujeres de una generación futura de moverse de una región a otra.

Para poder encontrar las componentes de la matriz $\lim_{m\to\infty} A^m$ primero debemos asegurarnos que tal límite existe. Para esto, notemos que, utilizando una calculadora de matrices, por ejemplo [39], obtenemos que la matriz A es semejante a una matriz diagonal, es decir A es diagonalizable (vea la Definición 1.1.9). De hecho, se tiene que $A = QDQ^{-1}$, donde:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \sqrt{6}+2 & -\sqrt{6}+2 \\ \frac{17}{15} & -\sqrt{6}-3 & \sqrt{6}-3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{43} & \frac{15}{43} & \frac{15}{43} \\ \frac{31\sqrt{6}-45}{258} & \frac{19\sqrt{6}-90}{516} & \frac{-67\sqrt{6}+168}{516} \\ \frac{-31\sqrt{6}-45}{258} & \frac{-19\sqrt{6}-90}{516} & \frac{67\sqrt{6}+168}{516} \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{6}+3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}+3}{10} \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 1.1.10, 1, $\frac{-\sqrt{6}+3}{10}$ y $\frac{\sqrt{6}+3}{10}$ son los valores propios de A. De modo que A cumple con las condiciones del Teorema 2.1.10, lo que nos asegura que el $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe.

Observemos que, como A es semejante a D, entonces por el Corolario 1.1.8 A^m es semejante a D^m, para cada $m \in \mathbb{N}$. Más aún, en vista del Corolario 2.1.9, tenemos que:

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty}(QD^mQ^{-1}) = Q(\lim_{m\to\infty} D^m)Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2199}{8600} & \frac{2199}{8600} & \frac{2199}{8600} \\ \frac{3399}{8600} & \frac{3399}{8600} & \frac{3399}{8600} \\ \frac{15}{43} & \frac{15}{43} & \frac{15}{43} \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la explicación de la Observación 2.2.4, la distribución de mujeres de alguna generación futura que habitarán las zonas urbanas, suburbanas y rurales es la primera, segunda y tercera coordenada, respectivamente, del vector $\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p}$. De hecho:

$$\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \frac{2199}{8600} & \frac{2199}{8600} & \frac{2199}{8600} \\ \frac{3399}{8600} & \frac{3399}{8600} & \frac{3399}{8600} \\ \frac{15}{43} & \frac{15}{43} & \frac{15}{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.50 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.256 \\ 0.395 \\ 0.349 \end{pmatrix}.$$

Así eventualmente, del total de mujeres de la generación m, alrededor del 25.60 % vivirá en zonas urbanas, el 39.50 % en zonas suburbanas y el 34.90 % en zonas rurales. Por lo tanto, se puede asegurar que no habrá una distribución equitativa en el largo plazo. Más aún, las mujeres de las siguientes generaciones, sin importar de que región sean sus madres, preferirán establecerse en zonas suburbanas. $\diamondsuit$

También desarrollamos otra aplicación en el contexto de fenómenos demográficos. En este ejemplo abordamos las probabilidades de movilidad laboral de una persona entre la capital y la provincia.

Ejemplo 2.4.2. En la Tabla 2.4.2 encontramos información referente a la migración de una población, proporcionada por una empresa especializada que está interesada en registrar el movimiento poblacional de una cierta entidad causada por cuestiones laborales. En lo que respecta a dicha tabla, las entradas en cada columna representan las probabilidades que tiene alguien que vive en la capital o en la provincia el primero de enero de 2017, de seguir viviendo o mudarse de región en enero del siguiente año.
Suponiendo que la población permanece constante, es decir, sólo existe un movimiento continuo entre la capital y la provincia y los individuos registrados son personas que en ese momento contaban con un empleo, podemos analizar el movimiento migratorio de las personas. Por ejemplo, en primer lugar:

	Capital	Provincia
Capital	0.90	0.02
Provincia	0.10	0.98

Tabla 2.4.2: Probabilidades del movimiento migratorio de 2018.

a) Determinemos la probabilidad que tiene una persona de moverse de una zona a otra o de permanecer en la zona de origen después de dos años.
Asimismo, suponiendo que en 2017 el 70 % de la población vivía en la capital y el 30 % en la provincia, podemos calcular:

b) Calcular el porcentaje de la población que vivirá en la capital en 2018, en 2019 y en 2020.
Finalmente, podemos responder a la siguiente pregunta:

c) ¿La población de la provincia podría agotarse eventualmente si las probabilidades de migración registradas permanecen constantes?

Solución:

Antes de abordar cada uno de los incisos que hemos planteado, consideremos que de la Tabla 2.4.2, el valor 0.9 indica la probabilidad que tiene una persona que vive en la capital de permanecer ahí en 2018; o bien, que el 90 % de la población que vive en la capital en 2017 se quedará en la misma región en 2018. Así, el 10 % restante se mudará a la provincia. En cambio, el valor 0.98 nos indica la probabilidad que tiene una persona que vive en la provincia de permanecer ahí en 2018, o bien de las personas que viven en la provincia en 2017, el 98 % permanecerá en su lugar de residencia y en consecuencia el 2 % restante se mudará a la capital para 2018. Note que bajo el supuesto de la población constante, cada columna suma 1.

De lo anterior, notemos que una persona tiene dos posibilidades de lugar de residencia: la ciudad o a la provincia. Esto corresponde a los estados de un proceso estocástico discreto. Más aún, suponiendo que la probabilidad de que una persona viva en la ciudad o la provincia no depende del lugar donde viva otra persona o donde vivió en el pasado, se sigue de la Definición 2.2.1 que nos encontramos con un proceso de Markov de dos estados, cuyas etapas están dadas por los años. Por consiguiente, con los datos de la Tabla 2.4.2 conformamos la matriz de transición asociada al proceso de Markov:

$$A = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.02 \\ 0.10 & 0.98 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el Ejemplo 2.4.1, analizamos las componentes de A; veamos que la componente A_{21} de A es la probabilidad de moverse de la capital a la provincia; y la A_{12} de

A es la probabilidad de moverse de la provincia a la capital.

a) De manera similar a como se obtuvieron las probabilidades de movimiento migratorio generacional en el Ejemplo 2.4.1, es posible encontrar la probabilidad que tiene un individuo de moverse de una zona a otra o de permanecer en la zona de origen después de dos etapas, esto es después de dos años. Tal como se indica en la parte (a) de la Observación 2.2.2, basta con calcular la matriz de transición:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.812 & 0.038 \\ 0.188 & 0.962 \end{pmatrix}.$$

Después de dos años, es decir en 2019, la probabilidad de que las personas permanezcan en su zona de origen es de 0.812 para la capital y 0.962 para la provincia. Mientras que la probabilidad de moverse de la capital a la provincia es 0.188 y la probabilidad de moverse de la provincia a la capital es de 0.038. Notemos que las componentes de las matrices $A^3, A^4, \ldots$, representan las probabilidades de migración entre capital y provincia de una persona para el año 2020, 2021, etcétera.

b) Para establecer el porcentaje de la población que vivirá en la capital para los siguientes tres años: 2018, 2019 y 2020, bajo los supuestos adicionales de distribución de la población en el 2017 que se han indicado, hacemos un análisis similar como el realizado en la parte (b) del Ejemplo 2.4.1. De esta forma conformamos el vector $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.30 \end{pmatrix}$, donde la primera y segunda coordenada son las proporciones de la población que reside en la capital y en la provincia en 2017, respectivamente, es decir, los dos estados del proceso de Markov. Notemos que por la Observación 2.2.3, $\boldsymbol{p}$ es un vector de estado. Luego, por la Observación 2.2.4, la proporción de la población que vivirá en la capital para 2018 se obtiene mediante el siguiente vector:

$$A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.02 \\ 0.10 & 0.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.636 \\ 0.364 \end{pmatrix}.$$

El 63.60 % de la población total vivirá en la capital en 2018.

Por otro lado, para saber la distribución poblacional de 2019, basta sólo con hacer el producto de $A^2\boldsymbol{p}$. Esto es:

$$A^2\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.812 & 0.038 \\ 0.188 & 0.962 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.58 \\ 0.42 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, el porcentaje de la población total que vivirá en la capital en 2019 es del 58 %.

A su vez, el porcentaje de la población que vivirá en la capital para el año 2020, es decir la tercera etapa del proceso, simplemente lo obtenemos del vector:

$$A^3\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.735 & 0.053 \\ 0.265 & 0.947 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 0.47 \end{pmatrix}.$$

El porcentaje de la población total que vivirá en la capital en 2020 es del 53 %.

c) Para establecer si la población de la provincia se puede agotar eventualmente cuando la tendencia de movimiento migratorio continué, es necesario conocer el vector $\lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p}$, que por la Observación 2.2.4, sus coordenadas representan el porcentaje de la población total que vivirá en cada una de las áreas en una etapa m, para un $m \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande. Cabe señalar que si existe $\lim_{m\to\infty} A^m$, por el Teorema 2.1.20, éste es una matriz de transición y por la parte (b) de la Observación 2.2.2 representa las probabilidades migratorias a largo plazo.

Para encontrar el vector $\lim_{m\to\infty} A^m p$, primero veamos que $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe. En efecto, mediante la calculadora de matrices [39], obtenemos que A es diagonalizable, es decir, A es semejante a una matriz diagonal. Más aún, $A = QDQ^{-1}$, donde:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.88 \end{pmatrix}.$$

En vista del Teorema 1.1.10, los valores propios de A son 1 y 0.88. Por lo tanto, A cumple con las condiciones del Teorema 2.1.10. De donde, $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe.

Puesto que A es semejante a D, se tiene del Corolario 1.1.8 que A^m es semejante a D^m, para toda $m \in \mathbb{N}$. De hecho, por la Proposición 1.1.7, $A^m = QD^mQ^{-1}$. Más aún, en vista del Teorema 2.1.8 y el Corolario 2.1.9, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} A^m \boldsymbol{p} = \lim_{m\to\infty} (QD^mQ^{-1})\boldsymbol{p} &= \left[Q(\lim_{m\to\infty} D^m)Q^{-1} \right] \boldsymbol{p} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.30 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.30 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.167 \\ 0.833 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tal razón, aproximadamente el 83.30 % de la población total vivirá en provincia en los años posteriores. Con lo que podemos concluir que la población de la provincia no puede agotarse si la tendencia continua. ♢

Finalmente, los procesos de Markov son sencillos y tienen aplicaciones en distintas áreas de la ciencia. Sin embargo, son muy criticados por esta misma razón, porque al ser un modelo simplificado no puede ser totalmente efectivo en procesos complejos. Actualmente, los procesos de Markov se han retomado como complemento de modelos estáticos, por ejemplo para ampliar el modelo de Leontief. Por lo cual, a pesar de esta desventaja, los procesos de Markov son ilustrativos para observar el comportamiento de los individuos en el modelo.

Capítulo 3

Modelo de Leontief

En este capítulo se revisa el modelo macroeconómico propuesto por el economista estadounidense W. Leontief, el cual recibe el nombre de *modelo de Leontief* o *modelo input-output*. Dicho modelo describe las demandas de insumos de cada uno de los sectores cumpliendo la regla de partida doble contable, que consiste en que los gastos producidos al consumir sean iguales a los ingresos obtenidos por las ventas manteniendo el equilibrio general estático de Walras [7].

A mediados de los años 30's, Leontief dio a conocer el concepto de Tabla input-output con lo cual comenzaría a elaborar el modelo que recibe su nombre [7]. Sin embargo, su trabajo no fue bien recibido por las corporaciones y gobiernos de Estados Unidos y la Unión Soviética, por lo cual su investigación se vio parcialmente suspendida. Fue por esto que hasta en el año 1973, Leontief obtuvo el Premio Nobel de Economía al publicar su modelo, utilizando los datos que le proporciono el Consejo Económico y Social de las Naciones Unidas para la estructura de una economía a la que denomino *economía mundial* [27].

La contribución de Leontief es la unión de la teoría económica clásica de corte ricardiano y la contabilidad de los flujos de mercancías producidas y distribuidas en una economía, siguiendo la línea iniciada en el Tableau économique de Quesnay, continuada por Marx en los esquemas de reproducción y formalizada por medio de los esquemas extendidos de Von Bortkievicz [27].

El modelo de Leontief parte de una tabla que representa los balances contables sectoriales observados en un momento dado del tiempo y utiliza dicha información para calcular unos coeficientes que son equivalentes a las propensiones medias del gasto propuestos en los modelos macroeconómicos de corte keynesiano y no a los coeficientes técnicos de la teoría de la producción [27]. Entre sus principales funciones destaca el permitir medir el impacto directo o indirecto de cambios en la demanda final sobre la producción bruta.

En vista de la estructura del modelo, el presente capítulo se encuentra dividido en cuatro secciones. En la Sección 3.1 se revisan conceptos del álgebra lineal utilizados en el desarrollo de la aplicación del modelo de Leontief; en la Sección 3.2 se detallan conceptos propios del modelo. Finalmente en las últimas secciones vemos las aplicaciones, particularmente, en la Sección 3.3 se desarrolla un ejemplo de un modelo abierto de Leontief y en la Sección 3.4 un ejemplo de un modelo cerrado de Leontief.

Sección 3.1

Matrices no negativas

Antes de entender el modelo de Leontief, es necesario tener presente las siguientes nociones del álgebra lineal que permitirán plantear la solución al sistema de ecuaciones lineales del modelo. Por lo que, en esta sección abordaremos la teoría de las matrices no negativas, en particular la que esta enfocada a la noción de matriz productiva.

Definición 3.1.1. Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Se dice que $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$ (respectivamente, $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$) si se cumple que $a_i \geq b_i$ (respectivamente, $a_i > b_i$), para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) Se dice que $\boldsymbol{b}$ es un *vector no negativo* si $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{o}$. Se dice que $\boldsymbol{b}$ es un *vector positivo* si $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{o}$.

Debido a la transitividad de la relación "$\geq$" en $\mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:

Observación 3.1.2. Para cualesquiera vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, si $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{c}$ (respectivamente si cambiamos $\geq$ por $>$).

De manera similar a la relación entre vectores, se puede definir una relación entre matrices comparando componente a componente. Lo anterior está formalizado en la siguiente definición. Recordemos que $\mathcal{O}$ es la matriz nula, de tamaño adecuado a cada contexto.

Definición 3.1.3. Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(a) Se dice que $A \geq B$ (respectivamente, $A > B$) si se cumple que $A_{ij} \geq B_{ij}$ (respectivamente, $A_{ij} > B_{ij}$), para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) Se dice que A es una *matriz no negativa* si $A \geq \mathcal{O}$. Se dice que A es una *matriz positiva* si $A > \mathcal{O}$.

El siguiente tipo de matrices es utilizada en las aplicaciones.

Definición 3.1.4. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es una *matriz productiva*, si A es no negativa, la suma de cada una de sus columnas es menor a 1 y si existe un vector positivo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}$.

La condición de $\boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}$, para un $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{o}$, se llama condición de productividad de una matriz productiva A. Veamos un ejemplo de una matriz productiva.

Ejemplo 3.1.5. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. A es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que A es una matriz no negativa porque todas sus componentes son mayor o igual a cero (vea la parte (b) de la Definición 3.1.3). Más aún, la suma de cada una de sus columnas son menor que 1. Además, si tomamos a $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$, comprobemos la condición de productividad.

$$\begin{pmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 85 \\ 80 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

En vista de lo anterior, A cumple la condición de productividad. Por lo cual concluimos que A es una matriz productiva.

Respecto a la teoría de matrices productivas, tenemos los siguientes tres resultados (Lemas 3.1.6 y 3.1.7, y Teorema 3.1.8) los cuales están tomados de [1]. Una demostración del Lema 3.1.6 se puede consultar en [1, pág. 174], dado que su demostración esta fuera del alcance de este trabajo de tesis.

Lema 3.1.6. Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz productiva y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{x} \geq A\boldsymbol{x}$, entonces $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$.

Otro resultado importante de matrices productivas es el siguiente. Para simplificar la notación usamos el símbolo I para representar la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Lema 3.1.7. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz no negativa, cuyas suma de cada una de sus columnas son menores que 1. Entonces, A es una matriz productiva si y sólo si $I - A$ es una matriz invertible.

Demostración. Supongamos que A es una matriz productiva. Para ver que $I - A$ es una matriz invertible, utilizamos la parte (2) del Teorema 1.1.11. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Veamos que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Como $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, se tiene que $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$. Luego por el Lema 3.1.6, se tiene que $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$. Por otro lado, puesto que también se cumple $(I - A)(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$, nuevamente por el Lema 3.1.6, obtenemos que $-\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$. Así, se sigue que $\boldsymbol{o} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{o}$. De donde, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. De aquí, por la parte (2) del Teorema 1.1.11, obtenemos que $I - A$ es invertible.
Ahora, supongamos que $I - A$ es una matriz invertible. Para ver que A es una matriz productiva, resta verificar que A cumple la condición de productividad. Puesto que $I - A$ es invertible, se sigue de la parte (3) del Teorema 1.1.11, que para un vector $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$, existe un único vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$. Luego, $(I - A)\boldsymbol{x} > \boldsymbol{o}$. Así, $\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{o}$. De donde $\boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}$. Por lo tanto, A es productiva. □

El siguiente resultado garantiza la existencia y unicidad de una solución no negativa para un sistema no homogéneo que involucra una matriz productiva y un vector positivo.

Teorema 3.1.8. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz no negativa, cuyas suma de cada una de sus columnas son menores que 1. Si $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$, entonces A es una matriz productiva si y sólo si existe un único vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$ y $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$.

Demostración. Supongamos que $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$ y que A es una matriz productiva. Por el Lema 3.1.7, la matriz $I - A$ es invertible. Luego, por la parte (3) del Teorema 1.1.11, existe un único vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$. Resta ver que $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$. Puesto que $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$, se tiene que $(I - A)\boldsymbol{x} > \boldsymbol{o}$. Luego, $\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{o}$. Esto es $\boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}$. Así, por el Lema 3.1.6, concluimos que $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$.
Recíprocamente, veamos que A es productiva. Por hipotesis para algún $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$ se cumple que $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$. Como $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$, se sigue que $(I - A)\boldsymbol{x} > \boldsymbol{o}$. Luego, $\boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}$. Por lo tanto A es productiva. □

Sección 3.2

El modelo de Leontief: modelo abierto y modelo cerrado

El modelo de Leontief es un modelo de enfoque macroeconómico que se basa en el análisis del equilibrio general estático. Entre los principales objetivos de dicho modelo está el representar la estructura intersectorial de una economía y medir el impacto en la producción bruta causado por la respuesta de la demanda a políticas económicas, como por ejemplo reducir el desempleo, entre otros [7].

Para cumplir dicho objetivo se parte de suponer que todo lo producido es consumido y que se cumplen tres hipótesis fundamentales. A saber, (a) *homogeneidad sectorial*, que implica suponer que cada insumo es producido por un único sector; (b) *invarianza de precios relativos*, que indica que se homogeneiza la medición de los valores agregados, es decir, todos los datos están medidos en unidades monetarias; y (c) *proporcionalidad estricta*, que asume que los insumos requeridos para producir una unidad de mercancía son fijos [33, pág. 15].

Para poder identificar si un problema económico puede ser modelado con el modelo de Leontief, se requiere primero identificar con qué información se cuenta. Para ello, recordemos las siguientes definiciones, las cuales se pueden consultar en [1, 4, 9, 21, 33].

Definición 3.2.1. La *demanda intermedia* de una entidad económica, por ejemplo un sector o una economía, es la composición de los insumos requeridos por un sector en particular para lograr la producción del bien que ofrece.

En la Definición 1.3.6 se introduce el concepto de demanda externa. La demanda total se define en términos de la demanda intermedia y la demanda externa como sigue.

Definición 3.2.2. La *demanda total* de una entidad económica es la suma de la demanda intermedia más la demanda externa.

Para el resto del presente capítulo consideramos una economía con una técnica de producción no derrochadora, es decir, una economía en la que cada sector es capaz de producir más de lo que consume como insumo. Además, asumimos que de la economía dada se conoce información de los balances contables sectoriales, o bien la entrada y salida (compra y venta) de productos de los sectores que la componen, observados en un momento dado de tiempo.

Una de las formas en que normalmente se presentan estos datos es a través de tablas, las cuales por sus características es posible identificarlas con un nombre. A saber, las *tablas input-output* donde se concentra la información de entrada y salida (compra y venta) de insumos de la economía dada. En este caso las filas de la tabla están destinadas para describir la distribución de la producción de un sector entre los otros sectores, así como la demanda externa (vea Tabla 3.2.1), lo cual corresponde a las salidas o ventas de insumos.

Otra forma de leer o interpretar la tabla de input-ouput (Tabla 3.2.1) es dividiendo sus columnas en dos secciones. La primera sección corresponde a las columnas de los sectores: Sector 1, Sector 2, $\ldots$, Sector n, las cuales se caracterizan porque detallan la información del intercambio entre sectores. En esta parte encontramos la demanda intermedia de la economía. A su vez, la segunda sección corresponde a las columnas de demanda externa y producción bruta. La columna de demanda externa registra las ventas de cada sector al mercado final o externo, y la columna de producción bruta registra la información del total de la producción que genera cada uno de los sectores [33, pág. 7-9]. El análisis por columnas corresponde a las entradas o compras de los insumos. Es importante señalar que

Entrada para \ Salida a	Sector 1	Sector 2	...	Sector n	Demanda externa	Producción
Sector 1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	d_1	x_1
Sector 2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	d_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Sector n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	d_n	x_n

Tabla 3.2.1: Tabla input-output

los valores de la tabla deben expresarse en unidades monetarias, para permitir la suma de las columnas. En caso contrario no se podría hacer el análisis antes mencionado.

Las tablas input-ouput permiten apreciar la información fundamental utilizada en el análisis de insumos y productos, es decir muestran el equilibrio entre la oferta y la demanda detallando el proceso de producción y la utilización de bienes y servicios que se producen dentro de una economía [21, pág. 2]. La relevancia de presentar de esta manera la información recae en que se considera a cada sector como productor y consumidor.

Otra utilidad de las tablas input-output es facilitar el estudio de la estructura productiva, sus tendencias y sus cambios en un periodo dado. Así, se puede conocer la importancia relativa de los sectores y el grado de interdependencia a través de la identificación de los principales flujos de producción e intercambio y los requerimientos de bienes para su uso intermedio y final [33].

Teniendo en cuenta lo anterior, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos la producción bruta del sector i como x_i, las ventas del sector i al sector j como x_{ij} y la demanda externa del sector i como d_i. Así, los datos en la Tabla 3.2.1 se representan por las igualdades:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} + d_1 \\
x_2 &= x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} + d_2 \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} + d_n,
\end{aligned}$$

las cuales representan la relación de equilibrio que existe entre la producción bruta del sector i y la venta de insumos del sector i entre todos los sectores $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$, más la demanda externa del sector i.

Si bien las cantidades expresadas en la Tabla 3.2.1 son los datos obtenidos de los sectores involucrados, es conveniente manejar estas cantidades como proporciones de producción, con la finalidad de expresar qué cantidad de producción del sector i se requiere para producir una unidad del bien j. Así, dados los datos x_{ij}, donde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

de la Tabla 3.2.1, definimos al término:

$$t_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad \text{para cada } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{3.2.1}$$

Cada término t_{ij} corresponde a una entrada de la Tabla 3.2.2, la cual recibe el nombre de *Tabla de tecnología de input-output.*

Salida a / Entrada para	Sector 1	Sector 2	$\ldots$	Sector n
Sector 1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}
Sector 2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
Sector n	x_{n1}	x_{n2}	$\ldots$	x_{nn}

Tabla 3.2.2: Tabla de tecnología de input-output

La información concentrada en la tabla de tecnología nos auxilia para representar la relación que existe entre la producción bruta del sector i y las proporciones puestas a la venta del sector i al j, más la demanda externa del bien i. Es decir, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x_1 &= t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 &= t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2n}x_n + d_2 \\ &\vdots \\ x_n &= t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n + d_n \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Nótese que el conjunto de las ecuaciones en (3.2.2) conforman un sistema de ecuaciones lineales. Llamamos T a la matriz de coeficientes del sistema, esto es $T_{ij} = t_{ij}$, $\boldsymbol{x}$ al vector columna cuyas coordenadas son los términos x_i y $\boldsymbol{d}$ al vector columna con coordenadas los términos d_i. De lo anterior, la forma matricial del sistema (3.2.2) es:

$$T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{x}. \tag{3.2.3}$$

Todo el análisis anterior nos lleva a definir una noción importante que, entre otras cosas, relaciona la economía con el álgebra lineal.

Definición 3.2.3. Sea $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz no negativa. Se dice que T es una *matriz tecnológica* o *matriz de consumo* para una economía si sus componentes son los cocientes de las ventas (salidas) de cada sector entre la producción bruta del sector comprador (entradas).

De esta forma, la matriz T del sistema (3.2.3) es una matriz tecnológica. Observemos lo siguiente referente a una matriz tecnológica.

Definición 3.2.4. Sea T una matriz tecnológica. A la componente T_{ij} de T se le denomina *coeficiente tecnológico* y representa los requerimientos de insumos del sector i necesarios para la producción bruta del sector j.

Dado que estamos considerando economías no derrochadoras, se cumple lo siguiente.

Observación 3.2.5. Si T es la matriz tecnológica de una economía, entonces los coeficientes tecnológicos T_{ij} de T son menores que 1.

A partir de la matriz tecnológica se define otra matriz que es de nuestro interés, a saber, la matriz de Leontief. Recordemos que con I estamos denotando la matriz identidad de $n \times n$.

Definición 3.2.6. Sea $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tecnológica de una economía. Se dice que la matriz $L = I - T$ es una *matriz de Leontief para la economía dada.*

A una matriz de Leontief también se le denomina *matriz de requerimientos totales* [33, pág. 17]. Observemos la siguiente propiedad de una matriz de Leontief, la cual se desprende de la Observación 3.2.5.

Observación 3.2.7. Sean $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tecnológica y $L = I - T$ su matriz de Leontief asociada. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que, $0 < L_{ii} \leq 1$. Más aún, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, se tiene que $L_{ij} < 0$ y $|L_{ij}| \leq 1$.

El sistema $T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{x}$ que hemos deducido y analizado en (3.2.3) es equivalente a $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, donde $L = (I - T)$. Este sistema recibe un nombre particular.

Definición 3.2.8. Sean $L \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de Leontief para una economía y $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$. Se dice que el sistema $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ es un *modelo de Leontief* para la economía dada.

Un modelo de Leontief puede ser abierto o cerrado, dependiendo el tipo de sistema que éste determine.

Definición 3.2.9. Sean $L \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de Leontief para una economía y $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$. El modelo de Leontief $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ es un *modelo abierto*, si el sistema es no homogéneo. En caso contrario el modelo de Leontief es *cerrado.*

Una forma de interpretar un modelo abierto o un modelo cerrado de Leontief es como sigue.

Observación 3.2.10. En la presente tesis, al hacer referencia a un modelo de Leontief para una economía no homogéneo sólo estamos considerando que $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$, aunque la condición de no homogéneo sea más general. Esto es cuando la demanda externa para los sectores sea mayor que cero. De igual forma, el modelo de Leontief es cerrado si $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$, lo cual se obtiene cuando no existe una demanda externa de todos los sectores.

Es importante resaltar que el modelo de Leontief se interpreta, económicamente hablando, de diferente manera dependiendo si se trata del modelo abierto o cerrado.

Observación 3.2.11. Sean $L \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de Leontief para una economía y $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$. El modelo de Leontief $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ equivale a la representación matemática del equilibrio entre la oferta y la demanda de una economía dada. En el caso de un modelo abierto, se entiende que, el valor del excedente del productor (vea Definición 1.3.4) denotado por $L\boldsymbol{x}$ debe ser igual a la demanda externa denotada por $\boldsymbol{d}$. Para el caso de un modelo cerrado no debe existir un exceso del productor, por lo cual $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Respecto a la solución del modelo de Leontief, primero consideremos el modelo abierto $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, donde $L = I - T$ y T es la matriz tecnológica de la economía (vea Definición 3.2.6). Puesto que $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ es no homogéneo se tiene, por la Observación 3.2.10, que $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$. El siguiente teorema brinda condiciones bajo las cuales dicho sistema tiene una única solución.

Teorema 3.2.12. Sea $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz tecnológica de una economía no derrochadora. Si T es productiva, entonces el sistema no homogéneo $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, donde $L = I - T$, tiene una única solución no negativa.

Demostración. Como T es productiva por el Lema 3.1.7, podemos garantizar que la matriz de Leontief L es invertible. Observemos que $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$ (porque el sistema es no homogéneo, vea Observación 3.2.10). De donde, por el Teorema 3.1.8, el sistema $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ tiene una única solución no negativa. De hecho, dado que L es invertible, entonces por la parte (3) del Teorema 1.1.11, la solución es $\boldsymbol{x} = L^{-1}\boldsymbol{d}$. □

Cabe señalar que a cada una de las coordenadas de la solución $\boldsymbol{x} = L^{-1}\boldsymbol{d}$ se interpreta como las cantidades, en unidades monetarias, que debe producir cada uno de los sectores para mantener la condición de equilibrio entre la oferta y la demanda en un período de tiempo fijo, con lo cual se genera una nueva tabla de input-output.

Observación 3.2.13. En relación con la solución del modelo abierto de Leontief, se debe considerar que el vector $\boldsymbol{x} = L^{-1}\boldsymbol{d}$ se obtiene unívocamente a partir del vector $\boldsymbol{d}$ y de la matriz T. Por lo cual se cumple lo siguiente:

(a) La solución del modelo abierto de Leontief para un período inicial, al cual denotamos como $\boldsymbol{x}_0 = L^{-1}\boldsymbol{d}_0$, corresponde a los valores de las Tablas 3.2.1 y 3.2.2. Así, las entradas de las columnas de producción bruta y demanda externa de la Tabla 3.2.1 son las coordenadas de $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{d}_0$, respectivamente; y la matriz de Leontief L es la que está asociada a la matriz tecnológica, la cual representa los términos de la Tabla 3.2.2.

(b) En vista de lo anterior, para determinar el valor de la producción bruta de cualquier período posterior, se requiere determinar un nuevo vector de demanda externa $\boldsymbol{d}$ y calcular la matriz tecnológica a partir nuevamente de los datos que se proporcionan en la Tabla 3.2.1 para este otro vector $\boldsymbol{d}$.

En el modelo cerrado de Leontief para una economía no derrochadora, la matriz tecnológica de la economía cumple que las sumas de cada una de sus columnas sean igual a 1. Respecto a su solución tenemos lo siguiente.

Observación 3.2.14. Consideremos el sistema homogéneo $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, donde $L = I - T$. En vista de que el sistema es homogéneo, se sabe que una solución es la solución trivial ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$). Sin embargo, es de interés poder obtener una solución no trivial, la cual queda garantizada si la matriz de Leontief L no es invertible (vea Teorema 1.1.11).

Es importante resaltar que, cada una de las coordenadas del conjunto solución corresponden a las cantidades, en unidades monetarias, que deben producir cada uno de los sectores para mantener la condición de equilibrio entre la oferta y la demanda para el periodo de tiempo n, con lo cual se genera una nueva Tabla de input-output.

Partiendo de lo mencionado respecto a que el modelo de Leontief mide el impacto de cambios en la demanda sobre la producción, estos cambios pueden ser en la demanda intermedia o en la demanda externa. Aunque hasta ahora sólo se ha mencionado que la variación en la demanda total sea resultado de un cambio en la demanda externa, el cambio en la demanda intermedia puede ser resultado de la aplicación de políticas encaminadas a incrementar la productividad de los sectores, cambios en los precios o resultado de un cambio tecnológico, entre otros; y se ve reflejado en la tabla de tecnología y por ende en la matriz tecnológica que genera una nueva matriz de Leontief asociada. Por lo que, para encontrar una solución al modelo de Leontief, dependiendo de si se trata de un modelo abierto o cerrado, basta con cumplir las condiciones del Teorema 3.2.12, o bien seguir lo indicado en la Observación 3.2.14, respectivamente.

Por lo antes mencionado, en el presente estudio hemos analizado el modelo de Leontief considerando que el modelo cerrado es un caso particular del modelo abierto, ya que se considera que la economía no produce un excedente que pueda comerciar con el mercado externo. Sin embargo, históricamente la descripción original hecha por W. Leontief presenta un enfoque contrario, esto es, primero presenta el modelo cerrado y después el modelo abierto. De hecho, en 1936, Leontief publicó su modelo para el caso de una economía aislada, es decir, en donde todo lo que se produce es consumido y no hay entrada o salida de mercancías. Todo esto corresponde a un modelo cerrado. A su vez, el análisis del modelo abierto fue presentado en 1973.

Sección 3.3

Una aplicación del modelo abierto de Leontief

En vista de lo que se ha detallado en las Secciones 3.1 y 3.2, tenemos las herramientas necesarias para atender la aplicación del modelo de Leontief a una economía determinada. A continuación presentamos la aplicación del modelo abierto a una economía que se conforma de tres sectores. Para facilitar el análisis de la aplicación del modelo, lo hemos dividido en dos ejemplos, inspirados en el ejemplo de [4, pág. 247-250]. En el Ejemplo 3.3.1 se detalla el desarrollo del modelo de Leontief para una economía abierta. En el Ejemplo 3.3.2 se hacen algunas variaciones con respecto a las variables que componen la economía del Ejemplo 3.3.1 y se comparan los resultados obtenidos en ambos ejemplos, con la finalidad de determinar qué consecuencias derivan de las variaciones que se proponen.

Ejemplo 3.3.1. Consideremos que en el año 2016 una economía está conformada por tres sectores: agricultura, manufactura y servicios y aplica una técnica de producción no derrochadora. Se produce un solo bien por sector, esto es bienes agrícolas, bienes manufacturados y servicios, respectivamente. Los sectores son interdependientes, ya que compran y venden insumos entre sí sin la intervención del gobierno ni la importación de bienes ni capital. Además, suponemos que todos los bienes y servicios terminados que no son utilizados en el proceso de producción son consumidos por un sector externo (gobierno, otras economías, etcétera). El flujo de bienes y servicios de esta economía en el año 2016, se resume en la Tabla 3.3.1, cuyos datos están medidos en miles de millones de pesos.

Salida a / Entrada para	Agricultura	Manufactura	Servicios	Demanda externa	Producción bruta
Agricultura	15	20	30	35	100
Manufactura	30	10	45	115	200
Servicios	20	60	0	70	150

Tabla 3.3.1: Tabla Input-output para el año 2016.

Suponiendo que para el año 2017, cada sector mantiene las mismas proporciones de compra y venta de insumos por unidad producida, pero se aplica una política exterior que favorece al intercambio con otras economías, la cual se refleja en una nueva demanda externa de \$100 mil millones de pesos en bienes agrícolas, \$200 mil millones de pesos en bienes manufacturados y \$300 mil millones de pesos en servicios, queremos determinar ¿qué nivel de producción bruta debería generar cada uno de los sectores para satisfacer esta nueva demanda externa?

Solución:

Los datos de la Tabla 3.3.1 los interpretamos como se describe en la Tabla 3.2.1. Así, en cualquier fila de la Tabla 3.3.1 se muestra la distribución de los insumos de los tres sectores (salidas o ventas). Por ejemplo, en la segunda fila encontramos que la producción bruta de Manufactura es de \$200, de los cuales \$30 se venderán a Agricultura, \$10 se conservarán para su propia producción adicional, \$45 se venderán a Servicios y \$115 satisfacen la demanda externa. A su vez, los datos en las columnas de la Tabla 3.3.1, indican el total de insumos por cada sector necesarios para obtener la producción bruta (entradas o compras). Por ejemplo, en la segunda columna tenemos que el sector manufacturero requiere \$20 de bienes agrícolas como insumos, \$10 de sus propios productos y \$60 de servicios para tener una producción bruta de \$200. Observemos, además, que el consumo intermedio total del sector manufacturero es de \$90, que corresponde a la suma de los insumos de cada sector (\$20, \$10 y \$60, respectivamente). De manera similar, el consumo intermedio total del sector agrícola es de \$65, y el de servicios es de \$75.

Teniendo en cuenta lo anterior, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, denotamos la producción bruta de cada sector como x_i, las ventas del sector i al sector j como x_{ij} y la demanda externa de cada sector como d_i.

Así, la relación que se presenta en la Tabla 3.3.1 es:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + d_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.3.1}$$

La relación en (3.3.1) dice que la producción bruta del sector x_i consiste en el producto vendido, como insumo, entre los sectores, lo que corresponde a la suma $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}$, más el producto vendido al sector externo d_i. A la suma $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}$ se le denomina demanda intermedia (vea Defininicón 3.2.1). De donde, la demanda total o producción bruta es igual a la suma de la demanda intermedia y la demanda externa (vea Definición 3.2.2). Lo anterior, se interpreta como el equilibrio entre la oferta (producción bruta) y la demanda (demanda total). En nuestro problema, con la información de la Tabla 3.3.1 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 100 &= 15 + 20 + 30 + 35 \\ 200 &= 30 + 10 + 45 + 115 \\ 150 &= 20 + 60 + 70. \end{aligned}$$

Es necesario resaltar que las demandas externas de los tres sectores son mayores que cero por lo cual, en vista de la Definición 1.3.7, nos encontramos con una economía abierta.

Es necesario transformar los valores obtenidos de los sectores involucrados a proporciones de producción con la finalidad de expresar la cantidad del producto i necesaria para producir una unidad del bien j. Para lo cual, definimos el término t_{ij} como en (3.2.1). Esto es:

$$t_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad \text{para cada } i, j \in \{1, 2, 3\}. \tag{3.3.2}$$

De esta forma, obtenemos la Tabla 3.3.2, que es la Tabla de tecnología de input-output del problema.

Entrada para \ Salida a	Agricultura	Manufactura	Servicios
Agricultura	0.15	0.10	0.20
Manufactura	0.30	0.05	0.30
Servicios	0.20	0.30	0.00

Tabla 3.3.2: Tabla de tecnología de input-output para el año 2016.

Ahora, para conocer el nivel de producción bruta que ofrece cada uno de los sectores para *cualquier* demanda externa requerida por cada sector, realizamos lo siguiente. Comenzamos, primero, reescribiendo la ecuación (3.3.2) como:

$$x_{ij} = t_{ij}x_j, \quad \text{para cada } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.3.1), obtenemos:

$$x_i = t_{i1}x_1 + t_{i2}x_2 + t_{i3}x_3 + d_i, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{3.3.3}$$

En el problema ejemplificado, el conjunto de las ecuaciones generadas de las relaciones de intercambio dada en la Tabla 3.3.2 es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.15x_1 + 0.10x_2 + 0.20x_3 + d_1 \\ x_2 &= 0.30x_1 + 0.05x_2 + 0.30x_3 + d_2 \\ x_3 &= 0.20x_1 + 0.30x_2 + d_3 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Es importante resaltar que las ecuaciones en (3.3.4) representan la relación de la producción bruta del bien i y las proporciones puestas a la venta del sector i al j más la demanda externa del bien i (vea Definición 3.2.4).

Definimos la matriz T con los coeficientes de las ecuaciones en (3.3.4), esto es:

$$T = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0 \end{pmatrix}.$$

De igual forma, definimos los vectores $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$. En vista de que T es una matriz no negativa (vea parte (b) de la Definición 3.1.3), y cada una de sus componentes son los cocientes de las ventas de cada sector obtenidos en (3.3.2), por la Definición 3.2.3, la matriz T es una matriz tecnológica. Por otro lado, las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$ corresponden a la producción bruta de cada sector y las coordenadas del vector $\boldsymbol{d}$ representan su demanda externa.

Con la matriz T y los vectores columna $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{d}$, la representación matricial del sistema (3.3.4) queda como $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$. De donde $\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$. De manera equivalente, en vista de que el vector $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{o}$, tenemos el sistema no homogéneo:

$$L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \quad \text{donde } L = I_3 - T. \tag{3.3.5}$$

Recordemos que L es la matriz de Leontief de la economía (vea Definición 3.2.6) y representa la cantidad de producción que debe realizar el sector i para satisfacer una unidad de demanda final del producto j.

Observemos que el sistema $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, de acuerdo a la Definición 3.2.8, es el modelo de Leontief para esta economía. Así, por la Definición 3.2.9, $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ es un modelo abierto de Leontief. También, en vista de la Observación 3.2.11, se tiene que el vector $L\boldsymbol{x}$ representa el valor del excedente del productor, lo cual es igual a la demanda externa $\boldsymbol{d}$ y las dos partes de la ecuación representa el equilibrio entre la demanda interna de insumos y las demandas externas (vea Definición 1.3.3).

Notemos que, de acuerdo a las entradas de la matriz T, obtenemos que:

$$L = \begin{pmatrix} 0.85 & -0.10 & -0.20 \\ -0.30 & 0.95 & -0.30 \\ -0.20 & -0.30 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3.6}$$

Además, L cumple la propiedad de la Observación 3.2.7. De lo anterior, el sistema lineal $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, para cualquier demanda externa $\boldsymbol{d}$ se expresa como:

$$\begin{aligned} 0.85x_1 - 0.10x_2 - 0.20x_3 &= d_1 \\ -0.30x_1 + 0.95x_2 - 0.30x_3 &= d_2 \\ -0.20x_1 - 0.30x_2 + 1.00x_3 &= d_3 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Notemos que, en vista de la parte (a) de la Observación 3.2.13, la información correspondiente a la producción bruta y la demanda externa de cada unos de los sectores en el año 2016, dada por la Tabla 3.3.1, la podemos registrar en los vectores $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{d}_0 = \begin{pmatrix} 35 \\ 115 \\ 70 \end{pmatrix}$, respectivamente. Así, junto a la matriz L, satisfacen la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 0.85 & -0.10 & -0.20 \\ -0.30 & 0.95 & -0.30 \\ -0.20 & -0.30 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 115 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

De esta manera estamos comprobando que el sistema $L\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{d}_0$ se satisface para la demanda externa inicial $\boldsymbol{d}_0$, que corresponde a los datos del flujo de bienes y servicios del año 2016. Ahora, encontrar el nivel de producción que debería ofrecer cada uno de los sectores en el año 2017 para satisfacer la nueva demanda externa, registrada en el vector $\boldsymbol{d}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$, se tiene por la parte (b) de la Observación 3.2.13, que esto equivale a resolver el sistema $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_1$ para la variable $\boldsymbol{x}$.

Para esto utilizamos el Teorema 3.2.12. Veamos que T es una matriz productiva. Puesto que, las componentes de T son todas mayor o igual a cero, se tiene que T es una matriz no negativa (vea Definición 3.1.3). Más aún, la suma de cada una de las columnas de T son menores que 1, esto se debe a que estamos suponiendo que la economía es no derrochadora. Además, se cumple que:

$$T \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 85 \\ 80 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Esto es, T cumple la condición de productividad. Con todo, obtenemos que T es una matriz productiva (vea la Definición 3.1.4). De donde, por el Teorema 3.2.12, la solución del sistema $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_1$, esta dada por $\boldsymbol{x} = L^{-1}\boldsymbol{d}_1$. Recordemos que la productividad de T asegura la existencia de L^{-1} (vea Lema 3.1.7)

Con ayuda de una calculadora de matrices, por ejemplo [39], obtenemos que:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{860}{639} & \dfrac{160}{639} & \dfrac{220}{639} \\ \\ \dfrac{40}{71} & \dfrac{90}{71} & \dfrac{35}{71} \\ \\ \dfrac{280}{639} & \dfrac{275}{639} & \dfrac{1555}{1278} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución del sistema $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_1$ es:

$$\boldsymbol{x} = L^{-1}\boldsymbol{d}_1 = \begin{pmatrix} \frac{860}{639} & \frac{160}{639} & \frac{220}{639} \\ \\ \frac{40}{71} & \frac{90}{71} & \frac{35}{71} \\ \\ \frac{280}{639} & \frac{275}{639} & \frac{1555}{1278} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ \\ 200 \\ \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{184000}{639} \\ \\ \frac{32500}{71} \\ \\ \frac{316250}{639} \end{pmatrix}.$$

Hacemos $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 287.96 \\ 457.76 \\ 494.91 \end{pmatrix}$, la solución del sistema para la nueva demanda $\boldsymbol{d}_1$, su interpretación es como sigue: el nivel de producción bruta que satisface el equilibrio del mercado para esta economía debe ser para el sector agrícola de aproximadamente \$287.96 mil millones, del sector manufacturero debe ser de \$457.76 mil millones y de servicios debe ser de \$494.91 mil millones.

Los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{d}_1$ que corresponden a la producción bruta y a la demanda externa, respectivamente, generan una nueva Tabla de input-output (vea Tabla 3.3.3) para el año 2017, que satisface la condición de igualdad entre la producción bruta y la demanda intermedia más la demanda externa que se expresa en las igualdades (3.3.1), manteniendo de esta forma el equilibrio entre la oferta y la demanda.

De la Tabla 3.3.3 vemos que, por ejemplo, en la segunda fila encontramos que la producción bruta de Manufactura para el año 2017 es de aproximadamente \$457.76, de los cuales, también aproximadamente, \$86.38 se venderán a Agricultura, \$22.89 se conservarán para su propia producción adicional, \$148.47 se venderán a Servicios y \$200 satisfacen la demanda externa. De manera general, con la información de la Tabla 3.3.3 tenemos que la demanda total o producción bruta es igual a la suma de la demanda

Entrada para \ Salida a	Agricultura	Manufactura	Servicios	Demanda externa	Producción bruta
Agricultura	$\frac{9200}{213}$	$\frac{3250}{71}$	$\frac{63250}{639}$	100	287.96
Manufactura	$\frac{18400}{213}$	$\frac{1625}{71}$	$\frac{94875}{639}$	200	457.76
Servicios	$\frac{36800}{639}$	$\frac{9750}{71}$	0	300	494.91

Tabla 3.3.3: Tabla Input-output para el año 2017.

intermedia y la demanda externa, lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 287.96 &= \frac{9200}{213} + \frac{3250}{71} + \frac{63250}{639} + 100 \\ 457.76 &= \frac{18400}{213} + \frac{1625}{71} + \frac{94875}{639} + 200 \\ 494.91 &= \frac{36800}{639} + \frac{9750}{71} + 300 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

El siguiente ejemplo considera la misma economía que en el ejemplo anterior, pero se incluyen variaciones en las demandas, con las que se pretenden resaltar las consecuencias que tienen sobre el nivel de producción.

Ejemplo 3.3.2. Utilizando la información del Ejemplo 3.3.1, volvemos a considerar la misma economía con tres sectores: Agricultura, Manufactura y Servicios. Analicemos lo siguiente.

a) Considerando que en el año 2018 cada sector mantiene las mismas proporciones de compra y venta de insumos por unidad producida, pero la demanda externa del sector agrícola incrementa de los \$100 mil millones de pesos registrados en el año 2017 a \$300 mil millones, ¿cómo afectará este incremento de la demanda externa en el nivel de producción bruta que ofrecerá cada sector?

b) De manera similar, si se sabe que para el año 2019, se mantienen las demandas externas del año 2018 para el sector agrícola y manufacturero, pero la demanda del sector servicios se reduce de los \$300 mil millones registrados en el año 2018 a \$200 mil millones, entonces ¿cómo se vería afectado el nivel de producción de cada uno de los sectores?

c) Se tiene conocimiento de que para el año 2020 el sector servicios lanzara una campaña exitosa para comer productos frescos de granja, e incrementará su participación con el sector agrícola al 40 %, mientras que su participación con el sector manufacturero caerá al 10 %. Analizar si estas decisiones que tomará el sector servicios sobre su participación en el intercambio con los otros dos sectores conseguirá que se incrementen las producciones brutas, si se mantienen las demandas externas del año 2017.

Solución:

Retomando los datos del Ejemplo 3.3.1, tenemos que la matriz de tecnología, el vector de demanda externa y el vector de producción del año 2017 son, respectivamente:

$$T = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 287.96 \\ 457.76 \\ 494.91 \end{pmatrix}.$$

Con esta información analizamos los problemas planteados.

a) Para determinar cómo afectará el incremento en la demanda externa de agricultura en el nivel de producción bruta de cada sector para el año 2018, primero retomamos el sistema de Leontief $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, donde $L = I_3 - T$ es la matriz de Leontief (vea (3.3.5) del Ejemplo 3.3.1). Recordemos que los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{d}$ son los vectores correspondientes a la producción bruta y la demanda externa, respectivamente. Además, obtuvimos que L es (vea (3.3.6) del Ejemplo 3.3.1):

$$L = \begin{pmatrix} 0.85 & -0.10 & -0.20 \\ -0.30 & 0.95 & -0.30 \\ -0.20 & -0.30 & 1 \end{pmatrix}.$$

En vista de que se incrementó la demanda externa del sector agrícola para el año 2018, definimos un nuevo vector de demanda externa como $\boldsymbol{d}_2 = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$. La producción bruta del año 2018 que deseamos conocer la representamos por el vector $\boldsymbol{x}_2$. Para encontrar dicho vector $\boldsymbol{x}_2$ debemos resolver el sistema $L\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{d}_2$. Del Ejemplo 3.3.1 se sabe que T es una matriz productiva. Luego, por el Teorema 3.2.12, la solución del sistema es $\boldsymbol{x}_2 = L^{-1}\boldsymbol{d}_2$, donde hemos visto que la inversa de L es:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{860}{639} & \frac{160}{639} & \frac{220}{639} \\ \frac{40}{71} & \frac{90}{71} & \frac{35}{71} \\ \frac{280}{639} & \frac{275}{639} & \frac{1555}{1278} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{x}_2 = L^{-1}\boldsymbol{d}_2 = \begin{pmatrix} \frac{860}{639} & \frac{160}{639} & \frac{220}{639} \\ \frac{40}{71} & \frac{90}{71} & \frac{35}{71} \\ \frac{280}{639} & \frac{275}{639} & \frac{1555}{1278} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{356000}{639} \\ \frac{40500}{71} \\ \frac{372250}{639} \end{pmatrix}.$$

Interpretamos la solución $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 557.12 \\ 570.42 \\ 582.55 \end{pmatrix}$ como que el nivel de producción que satisface el equilibrio de mercado para el año 2018, en miles de millones de pesos, es de \$557.12, \$570.42 y \$582.55 en bienes del sector agrícola, manufacturero y servicios, respectivamente.

En vista de que, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 287.96 \\ 457.76 \\ 494.91 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 557.12 \\ 570.42 \\ 582.55 \end{pmatrix}$, tenemos que $\boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{x}_2$ (vea Definición 3.1.1). Con esto, podemos notar que el incremento en la demanda del sector agrícola trajo como consecuencia que el nivel de producción bruta de los tres sectores para el año 2018 también incrementara comparada con el año 2017. Más aún, puesto que los incrementos $\Delta x_1 = 557.14 - 287.96 = 269.18$, $\Delta x_2 = 570.42 - 457.76 = 112.68$ y $\Delta x_3 = 582.55 - 494.91 = 87.64$, obtenemos que para el año 2018 el incremento en la producción bruta del sector agrícola es mayor al incremento de la producción bruta del sector manufacturero y que el de servicios.

b) Si resolvemos el sistema $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, tal y como se vio en el inciso previo, para determinar el nivel de producción para el año 2019 manteniendo las mismas proporciones de compra y venta de insumos por unidad producida del año 2018, pero con una disminución de la demanda externa en servicios basta con calcular $\boldsymbol{x}_3 = L^{-1}\boldsymbol{d}_3$, donde ahora el vector de demanda externa para el año 2019 queda como $\boldsymbol{d}_3 = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$. De donde:

$$\boldsymbol{x}_3 = L^{-1}\boldsymbol{d}_3 = \begin{pmatrix} \frac{860}{639} & \frac{160}{639} & \frac{220}{639} \\ \frac{40}{71} & \frac{90}{71} & \frac{35}{71} \\ \frac{280}{639} & \frac{275}{639} & \frac{1555}{1278} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{334000}{639} \\ \frac{37000}{71} \\ \frac{294500}{639} \end{pmatrix}.$$

Se tiene de la solución $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 522.69 \\ 521.13 \\ 460.88 \end{pmatrix}$ que el nivel de producción bruta para el año 2019, en miles de millones de pesos, será de \$522.68, \$521.13 y \$460.88 en bienes del sector agrícola, manufacturero y servicios, respectivamente.

Dado que $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 557.12 \\ 570.42 \\ 582.55 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 522.69 \\ 521.13 \\ 460.88 \end{pmatrix}$, tenemos que $\boldsymbol{x}_3 < \boldsymbol{x}_2$ (vea Definición 3.1.1). Con esto podemos notar que la disminución de la demanda externa de servicios trajo como consecuencia que el nivel de producción bruta de los sectores para el año 2019 también disminuyera comparada con el año 2018. Más aún, observemos que al comparar el nivel de producción bruta de los años 2017, 2018 y 2019, existe un incremento en el nivel de producción bruta del sector agrícola, resultado del incremento de la demanda externa del año 2018, ya que pasó de tener un nivel de producción bruta en el año 2017, en miles de millones de pesos, de \$287.96 a tener un nivel de producción bruta en el año 2019 de \$522.69. Sin embargo, existe una disminución en el nivel de producción bruta del sector servicios, resultado de la disminución de la demanda externa del año 2019, ya que pasó de tener un nivel de producción bruta en el año 2017 de \$494.91 a tener un nivel de producción bruta en el año 2019 de \$460.88.

Del análisis anterior, no podemos garantizar que el impacto del incremento de la producción bruta del sector agrícola sea mayor o menor que el impacto de la disminución de la producción bruta del sector servicios, ni cómo estas variaciones en la demanda externa afectan el nivel de producción bruta de los tres sectores. Es decir, en vista de la Definición 3.1.1, no podemos decir que el nivel de producción bruta en alguno de los tres años es mayor o menor que los otros, debido a que al comparar coordenada a coordenada los vectores $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ no es posible determinar cuál es mayor que el otro. Todo lo anterior se debe a que el modelo de Leontief planteado de esta manera no permite apreciar la participación de los sectores en la producción bruta para cada año.

c) Determinemos el nivel de producción para el año 2020. Consideremos que el sector servicios lanza su campaña que trae como resultado un incremento en la participación de dicho sector con el sector agrícola. Esto se ve reflejado en la componente t_{31} de la matriz tecnológica T, pues el valor de 0.20 cambia a 0.40; y la disminución de la participación de servicios con el sector manufacturero se refleja en la componente t_{32} de la matriz T, pues el valor pasa de 0.30 a 0.10. Así, conformamos una nueva matriz tecnológica T':

$$T' = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.40 & 0.10 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta nueva matriz, podemos calcular una nueva matriz de Leontief L', es decir, $L' = I_3 - T'$. De donde:

$$L' = \begin{pmatrix} 0.85 & -0.10 & -0.20 \\ -0.30 & 0.95 & -0.30 \\ -0.40 & -0.10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que T' es una matriz no negativa (vea Definición 3.1.3), la suma de las componentes de cada una de sus columnas son menores que uno y además, se cumple que:

$$T' \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 130 \\ 60 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, T' es una matriz productiva (vea Definición 3.1.4). Ya que se esta considerando que se mantienen las mismas demanda externas que las del año 2017, tenemos que $\boldsymbol{d}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$. Así, por el Teorema 3.2.12, la solución del sistema $L'\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{d}_1$ es $\boldsymbol{x}_4 = (L')^{-1}\boldsymbol{d}_1$. Con ayuda de una calculadora de matrices, por ejemplo [39], calculamos la inversa de L', la cual es:

$$(L')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{460}{329} & \frac{60}{329} & \frac{110}{329} \\ \frac{30}{47} & \frac{55}{47} & \frac{45}{94} \\ \frac{205}{329} & \frac{125}{658} & \frac{1555}{1316} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boldsymbol{x}_4 = (L')^{-1}\boldsymbol{d}_1 = \begin{pmatrix} \frac{460}{329} & \frac{60}{329} & \frac{110}{329} \\ \frac{30}{47} & \frac{55}{47} & \frac{45}{94} \\ \frac{205}{329} & \frac{125}{658} & \frac{1555}{1316} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13000}{47} \\ \frac{20750}{47} \\ \frac{21375}{47} \end{pmatrix}.$$

De la solución $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 276.60 \\ 441.49 \\ 454.79 \end{pmatrix}$ se tiene que, el nivel de producción bruta para el año 2020, en miles de millones de pesos, que satisface el equilibrio del mercado es de \$276.60, \$441.49 y \$454.79 en bienes agrícolas, manufactureros y servicios, respectivamente.

En vista de que $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 287.96 \\ 457.76 \\ 494.91 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 276.60 \\ 441.49 \\ 454.79 \end{pmatrix}$, tenemos que $\boldsymbol{x}_4 < \boldsymbol{x}_1$ (vea la Definición 3.1.1). Con esto, podemos notar que las modificaciones de la participación del sector servicios traerá como consecuencia una disminución en el nivel de producción bruta de la economía para el año 2020, comparado con el nivel de producción del año 2017. De esto podemos concluir que la campaña que planea implementar el sector servicios no tendrá éxito, ya que la producción bruta de cada uno de los sectores será menor que si no implementará dicha campaña. $\diamondsuit$

Sección 3.4

Una aplicación del modelo cerrado de Leontief

A continuación presentamos una aplicación del modelo cerrado de Leontief a una economía que se conforma de tres sectores y que no cuenta con un intercambio con el mercado externo. De hecho, una economía con esta característica normalmente se conoce como una economía cerrada (vea Definición 1.3.7). Analicemos el siguiente ejemplo, el cual está tomado parcialmente del Ejemplo 1 de [18, pág. 49-51], ya que desarrollamos y formalizamos la solución.

Ejemplo 3.4.1. Cierta economía consiste en los sectores carbonero, eléctrico y acerero y aplica una técnica de producción no derrochadora. Cada sector compra y vende mercancías dentro de la economía, por lo que se asume que todo lo que se produce se consume y no hay productos que entren o salgan del sistema, es decir, no hay demanda externa. Las transacciones de cierto año se registraron en la Tabla 3.4.1, cuyos datos están en millones de pesos. Note que en está tabla input-output no incluimos la columna de demanda externa, porque consta de ceros.
Suponiendo que se sigue manteniendo la misma estructura de mercado, es decir, que se mantiene el intercambio entre las mismas entidades económicas sin la intervención de alguien externo, ¿qué nivel de producción deberá generar cada sector, para años posteriores,

Entrada para \ Salida a	Carbón	Electricidad	Acero	Producción bruta
Carbón	200	350	450	1000
Electricidad	500	400	600	1500
Acero	300	750	950	2000

Tabla 3.4.1: Tabla Input-output para una economía cerrada.

con la finalidad de mantener un equilibrio entre la oferta y la demanda?

Solución:

Notemos que los datos, todos en millones de pesos, en cualquier fila de la Tabla 3.4.1 muestran la distribución de la producción de insumos entre los tres sectores (salidas o ventas); y en cualquier columna muestran los insumos requeridos para generar la producción bruta de cada uno de los sectores (entradas o compras).

Teniendo en cuenta lo anterior, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, denotamos la producción bruta de cada sector como x_i y las ventas del sector i al sector j como x_{ij}. Así, la relación que se presenta en la Tabla 3.4.1 es:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{3.4.1}$$

La relación en (3.4.1) dice que la producción bruta u oferta, del sector x_i es igual a la demanda de los sectores x_{ij}, es decir, el producto vendido como insumo entre los sectores $(x_{i1}+x_{i2}+x_{i3})$, que corresponde a la demanda intermedia. Lo anterior, se interpreta como el equilibrio entre la oferta y la demanda (vea Definición 1.3.3). En nuestro problema, con la información de la Tabla 3.4.1, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1000 &= 200 + 350 + 450 \\ 1500 &= 500 + 400 + 600 \\ 2000 &= 300 + 750 + 950 \end{aligned}$$

Con t_{ij}, tal como se indica en (3.2.1) indicamos la cantidad del producto i necesaria para producir una unidad del bien j. Esto se obtiene mediante la relación:

$$t_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad \text{para cada } i, j \in \{1, 2, 3\}. \tag{3.4.2}$$

Tomando esto en cuenta, obtenemos la Tabla 3.4.2, que es la Tabla de tecnología de input-output del problema.

Entrada para \ Salida a	Carbón	Electricidad	Acero
Carbón	0.20	0.23	0.225
Electricidad	0.50	0.27	0.300
Acero	0.30	0.50	0.475

Tabla 3.4.2: Tabla de tecnología de input-output para una economía cerrada.

Para conocer el nivel de producción bruta que debe generar cada uno de los sectores para seguir manteniendo un equilibrio entre la oferta y la demanda, realizamos lo siguiente. Comenzamos, primero, reescribiendo la ecuación (3.4.2) como:

$$x_{ij} = t_{ij}x_j, \quad \text{para cada } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.4.1), obtenemos:

$$x_i = t_{i1}x_1 + t_{i2}x_2 + t_{i3}x_3, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{3.4.3}$$

En nuestro problema, el conjunto de las ecuaciones generadas de las relaciones de intercambio dada en la Tabla 3.4.2 es:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}x_1 + \frac{7}{30}x_2 + \frac{9}{40}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{4}{15}x_2 + \frac{3}{10}x_3 \\ x_3 &= \frac{3}{10}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{19}{40}x_3 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Cabe señalar que las ecuaciones en (3.4.4) representan la relación de la producción bruta del bien i y las proporciones puestas a la venta del sector i al j (vea Definición 3.2.4). Definimos la matriz T con los coeficientes de las ecuaciones en (3.4.4), esto es:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{30} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{15} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{19}{40} \end{pmatrix}.$$

La matriz T es una matriz tecnológica (vea Definición 3.2.3). Notemos que como estamos analizando una economía no derrochadora, la suma de cada una de las columnas de la

matriz T son igual a 1. Definimos el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, cuyas coordenadas corresponden a la producción bruta de cada sector.
Así, con la matriz T y el vector columna $\boldsymbol{x}$, la representación matricial del sistema (3.4.4) queda como $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}$, que es la representación de la condición de equilibrio entre oferta y demanda.
Lo anterior, lo podemos ver como $\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Esto es, tenemos el sistema homogéneo $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, donde $L = I_3 - T$. La matriz L se denomina matriz de Leontief (vea Definición 3.2.6). En vista de la Observación 3.2.11, se tiene que el vector $L\boldsymbol{x}$ representa el valor del excedente del productor, lo cual debe ser igual al vector nulo puesto que se considera que todo lo producido es consumido dentro de la economía y no hay entradas o salidas de mercancías.

Notemos que de acuerdo a las componentes de la matriz T, obtenemos que:

$$L = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & -\dfrac{7}{30} & -\dfrac{9}{40} \\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \dfrac{11}{15} & -\dfrac{3}{10} \\[2ex] -\dfrac{3}{10} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{21}{40} \end{pmatrix}.$$

El sistema lineal $L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}x_1 - \frac{7}{30}x_2 - \frac{9}{40}x_3 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{15}x_2 - \frac{3}{10}x_3 &= 0 \\ -\frac{3}{10}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{21}{40}x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Notemos que la información correspondiente a la producción bruta de cada uno de los sectores dada por la Tabla 3.4.1, la podemos registrar en el vector $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 2000 \end{pmatrix}$. Así, junto a la matriz L, en vista de la Observación 3.2.13, se satisface la igualdad:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{7}{30} & -\frac{9}{40} \\[2ex] -\frac{1}{2} & \frac{11}{15} & -\frac{3}{10} \\[2ex] -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{21}{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\[2ex] 1500 \\[2ex] 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\[2ex] 0 \\[2ex] 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar el nivel de producción que debería ofrecer cada uno de los sectores para mantener el equilibrio para un año posterior al registro de los datos de la Tabla 3.4.1, resolvemos el sistema homogéneo $L\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$ para la variable $\boldsymbol{x}_1$. Para esto, primero haciendo uso de una calculadora de matrices, por ejemplo [39], podemos comprobar que la inversa de L no existe y como el sistema es homogéneo y en vista de la Observación 3.2.14, podemos garantizar que existen infinitas soluciones para el modelo de Leontief.

Así, al resolver el sistema obtenemos el siguiente conjunto solución:

$$S = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Interpretamos cada solución del sistema $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.5x_3 \\ 0.75x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, con $x_3 \in \mathbb{R}$ diciendo que el nivel de producción que deben ofrecer el sector carbonero y el sector eléctrico, en un año posterior, es una proporción de la producción que ofrezca el sector acerero.

De manera particular, por cada millón de pesos que produzca en mercancías el sector acerero, el sector carbonero debe ofrecer \$500 mil pesos en productos de carbón y el sector eléctrico debe producir \$750 mil pesos en productos de electricidad. En la Tabla 3.4.3 vemos la nueva relación de equilibrio entre la demanda y la oferta que cumple con las igualdades en (3.4.1), resultante del nivel de producción particular que hemos mencionado.

Salida a / Entrada para	Carbón	Electricidad	Acero	Producción bruta
Carbón	0.100	0.175	0.225	0.5
Electricidad	0.250	0.200	0.300	0.75
Acero	0.150	0.375	0.475	1

Tabla 3.4.3: Tabla Input-output para una economía cerrada.

Notemos que, de la Tabla 3.4.3 por ejemplo, en la primera fila encontramos que la producción bruta del sector carbonero, en un año posterior, es de aproximadamente \$500 mil pesos, de los cuales, también aproximadamente, \$100 mil pesos conservará para su propia producción, \$175 mil pesos le venderá al sector eléctrico y \$225 mil pesos le venderá al sector acerero.

De igual forma, en caso de que el sector acerero produzca \$4 millones de pesos en productos de acero, el sector carbonero debe ofrecer \$2 millones de pesos en productos de carbón y el sector eléctrico debe producir \$3 millones de pesos en productos de electricidad. En la Tabla 3.4.4 vemos la nueva relación de equilibrio entre la demanda y la oferta que cumple con las igualdades en (3.4.1), resultante del nivel de producción particular que hemos mencionado.

Salida a / Entrada para	Carbón	Electricidad	Acero	Producción bruta
Carbón	0.200	0.525	0.900	2
Electricidad	0.500	0.600	1.200	3
Acero	0.300	1.125	1.900	4

Tabla 3.4.4: Tabla Input-output para una economía cerrada.

Así, de la Tabla 3.4.4 por ejemplo, en la primera fila encontramos que la producción bruta del sector carbonero, en un año posterior, es de aproximadamente \$2 millones de pesos, de los cuales \$200 mil pesos conservará para su producción, \$525 mil pesos le venderá al sector eléctrico y \$900 mil pesos le venderá al sector acerero.

Este análisis lo podemos hacer para cualquier cantidad de producción en millones de pesos del sector acerero. ♢

Finalmente, es importante señalar que el modelo de Leontief además de lo que se pudo observar en el presente capítulo, también es un instrumento esencial para medir el déficit de la balanza comercial y el nivel general de los precios, sin embargo se requiere definir otros conceptos propios de la Economía, que están fuera del alcance de este trabajo de tesis.

Si bien el modelo de Leontief planteado como se hizo parece sencillo y tiene una desventaja importante pues carece de temporalidad, existen adecuaciones al modelo original, en los cuales se ha ido incorporando otras herramientas matemáticas que permitan al modelo predecir la evolución del intercambio sectorial en el tiempo. Algunos ejemplos de estos modelos son el modelo de precios y factores primarios, el modelo dinámico, el modelo ampliado por Miyazawa, el modelo de oferta de Gosh, modelos de proyección y de equilibrio general entre otros; además de métodos para la construcción de las tablas como el método de Ras y procesos de ajuste, matrices de origen y destino, el valor agregado, entre otros [7].

Es importante agregar que, haciendo una comparativa de publicaciones tanto de aspecto teórico como aplicado del modelo de Leontief, se ha trabajado más este tema en países como Estados Unidos, Holanda y Reino Unido; mientras que México representa menos del 1 % de publicaciones [7, pág. 21-22].

Capítulo 4

Modelo de oferta y demanda y modelo keynesiano

En este capítulo se revisa el modelo microeconómico de oferta y demanda, el cual fue desarrollado por A. Marshall, siendo el modelo estático la base de modelos aplicados a la microeconomía y a la macroeconomía, pues parte del equilibrio general propuesto por L. Walras en 1874. Y el modelo macroeconómico keynesiano, el cual se basa en la teoría propuesta por J. M. Keynes en 1930 [37].

Los modelos tal y como se plantean en este capítulo no son los clásicos que se estudian a nivel formativo en Economía, sino son una ampliación puesto que se incorporó el dinamismo a las variables por la década de los años 30's. Tal hecho se le atribuye, en el caso del modelo de oferta y demanda, a los economistas estadounidenses K. Arrow y L. W. McKenzie y al economista francés G. Debreu; y en el caso del modelo keynesiano al economista estadounidense P. Samuelson [29, 31].

En particular, el modelo de oferta y demanda describe el ajuste del precio, resultado del equilibrio entre la disponibilidad de un producto y la disponibilidad de quien desea adquirirlo a cada precio posible. A su vez, el modelo keynesiano identifica el nivel de equilibrio de los precios y analiza las interrupciones de los mercados de bienes y servicios, centrándose en el análisis de las causas y consecuencias de las variaciones de la demanda agregada y sus relaciones con el nivel de empleo y el ingreso.

En vista de la naturaleza de los modelos, el capítulo se divide en cuatro secciones. En primer lugar, en la Sección 4.1 se detallan algunos hechos de la teoría de los sistemas dinámicos discretos requeridos para describir los modelos de oferta y demanda y keynesiano. A saber, analizamos el concepto de iteración, órbita, diagrama de cobweb, puntos fijos y puntos periódicos y algunas caracteristicas de éstos. En segundo lugar, en la Sección 4.2 se describe brevemente en qué consiste el modelo de oferta y demanda y el modelo keynesiano. Finalmente en las Secciones 4.3 y 4.4 se dan ejemplos de aplicaciones de los modelos mencionados. En particular, en la Sección 4.3 se dan ejemplos de la aplicación del modelo de oferta y demanda; y en la Sección 4.4 se analiza un ejemplo de la aplicación del modelo keynesiano.

Sección 4.1

Sistemas dinámicos: puntos periódicos, órbitas, diagrama de cobweb

Abordemos un concepto, importante en el desarrollo de los modelos que se desarrollan en este capítulo, el cual se define a continuación.

Definición 4.1.1. Sean X un espacio métrico y $(G, *)$ un semi-grupo con elemento neutro. Un *sistema dinámico* es una función continua $\varphi : G \times X \to X$ que satisface lo siguiente:

1) $\varphi(0, x) = x$, para cada $x \in X$, donde 0 es el elemento neutro en G.

2) $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t * s, x)$, para cada $t, s \in G$ y para cada $x \in X$.

Generalmente, al espacio X se le llama *espacio fase*, al semi-grupo G se le denomina *conjunto de parámetros* y la función φ se conoce como *ley deterministica*. Si $G = \mathbb{R}^+$, al sistema dinámico se le llama *sistema dinámico continuo o flujo*. Si $G = \mathbb{N} \cup \{0\}$, al sistema dinámico se le llama *sistema dinámico discreto*. Para ampliar esta noción, el lector interesado puede consultar [6, 11, 23].

En vista de lo anterior, se entiende que dado un espacio métrico X y una función continua $f : X \to X$, al par (X, f) se le denomina *sistema dinámico discreto*. Dada la naturaleza de los modelos en los que se aplicarán estos conceptos, al espacio métrico al que haremos referencia es al conjunto de los números reales con la métrica usual. Así, la función continua está considerada en $\mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), y al referirnos al sistema dinámico discreto haremos alusión al par $(\mathbb{R}, f)$.

A partir de la función f, podemos definir el concepto de iteración, que precisamente implica que un proceso se repita una y otra vez.

Definición 4.1.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. La n-ésima *iterada* o *iteración* de f, para toda $n \in \mathbb{Z}_+$, determinada por la función continua f, se define como:

$$\begin{aligned}
f^0 &= I_x \\
f^1 &= f \\
f^2 &= f \circ f \\
f^3 &= f \circ f^2 \\
&\vdots \\
f^n &= f \circ f^{n-1}
\end{aligned}$$

Que es equivalente a la composición de f consigo misma n veces.

Por ello, a un sistema dinámico discreto se le puede entender, de manera intuitiva, como una secuencia de números X_n que se definen recursivamente. Es decir, es una secuencia en la que para toda $n \in \mathbb{Z}_+$, cada número después del primero está relacionado con el número anterior por la relación $x_{n-1} = f(x_n)$ [34]. Teniendo ésto presente, surge la siguiente definición.

Definición 4.1.3. Sean $(\mathbb{R}, f)$ un sistema dinámico discreto y x un punto en $\mathbb{R}$. La *órbita* de x bajo f se entiende como una sucesión de puntos que cumplen la siguiente condición de iteración:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\} = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Una órbita se puede interpretar como el movimiento de un objeto a lo largo del tiempo. Específicamente, en el tiempo $n = 0$ al que se denomina tiempo inicial, el objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $n = 1$ el objeto cambia de posición a $f(x)$; en el tiempo $n = 2$ el objeto nuevamente cambia de posición a $f(f(x)) = f^2(x)$, y así sucesivamente, tal como lo muestra la Figura 4.1.1.

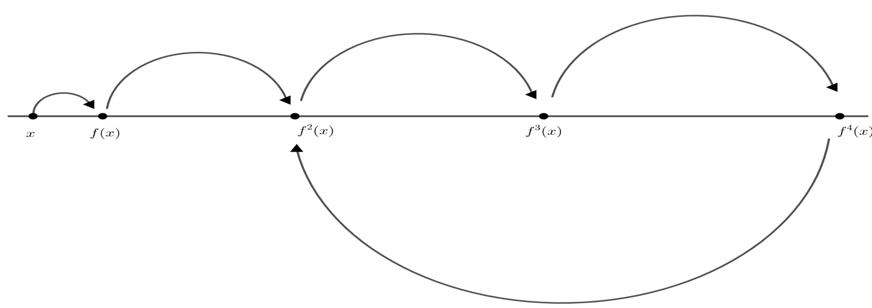


Figura 4.1.1: Órbita de x bajo f.

En el siguiente ejemplo se ilustra mejor este concepto.

Ejemplo 4.1.4. Sea $(\mathbb{R}, f)$ un sistema dinámico discreto, donde la función continua está definida como $f(x) = x^2$, para toda $x \in \mathbb{R}$, y consideramos el punto $x = 2$. Obtenemos la órbita de x bajo f de la siguiente manera: Así, la órbita del punto x (vea Figura 4.1.2) esta dada por el siguiente conjunto $\mathcal{O}(x, f) = \{2, 4, 16, 256, \ldots\}$

Podemos notar que las órbitas cambian dependiendo del valor del punto que se tome. De lo cuál, surge la siguiente definición con respecto a uno de los puntos más relevantes en el estudio de los sistemas dinámicos discretos.

Tiempos:	Posiciones
$n = 0$	$x = 2$
$n = 1$	$f(x) = 4$
$n = 2$	$f(f(x)) = f^2(x) = 16$
$n = 3$	$f(f^2(x)) = f^3(x) = 256$
$\vdots$	$\vdots$

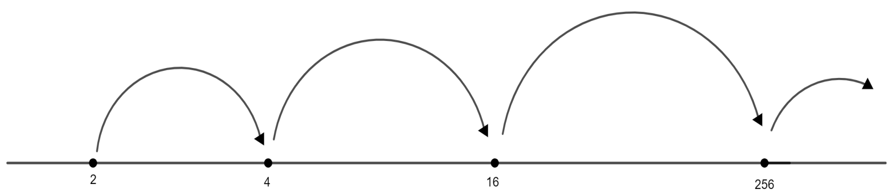


Figura 4.1.2: ÓRBITA DE $x = 2$, BAJO $f(x) = x^2$.

Definición 4.1.5. Sean $(\mathbb{R}, f)$ un sistema dinámico discreto y x_0 un punto de $\mathbb{R}$. El punto x_0 es un *punto fijo* de f si $f(x_0) = x_0$. En este caso, la órbita de x_0 bajo f es el siguiente conjunto:

$$\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0, x_0, \ldots\} = \{x_0\}.$$

De la cual se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $f^n(x_0) = x_0$. En otras palabras, la órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$ tiende a x_0, es decir se cumple que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x_0$.

En el siguiente ejemplo se ilustra el concepto anterior.

Ejemplo 4.1.6. Sea el sistema dinámico discreto $(\mathbb{R}, f)$, donde $f(x) = x^2$, en vista de la Definición 4.1.5, se tiene que los puntos fijos de esta función son 0 y 1.
Esto es fácil de comprobar. En el primer caso de que $x_0 = 0$, se tiene, al aplicar la iteración, que $f(x_0) = 0, f^2(x_0) = 0, f^3(x_0) = 0, \ldots$; al mismo tiempo que en el caso de que $x_0 = 1$, se tiene que $f(x_0) = 1, f^2(x_0) = 1, f^3(x_0) = 1, \ldots$ Por lo tanto ambos son puntos fijos de la función f. En la Figura 4.1.3 se muestra la gráfica de los dos únicos puntos fijos bajo la función f.

Formalmente, buscamos los puntos donde coinciden las dos funciones, en este caso, la función f y la función identidad (vea Figura 4.1.3); así, $f(x) = x$ si y solo sí $x^2 = x$, lo que equivale a que $x^2 - x = 0$. De lo anterior, se tiene que $x(x-1) = 0$ de donde $x = 0$ o bien $x = 1$, por lo tanto los únicos puntos fijos son $x = 0$ y $x = 1$.

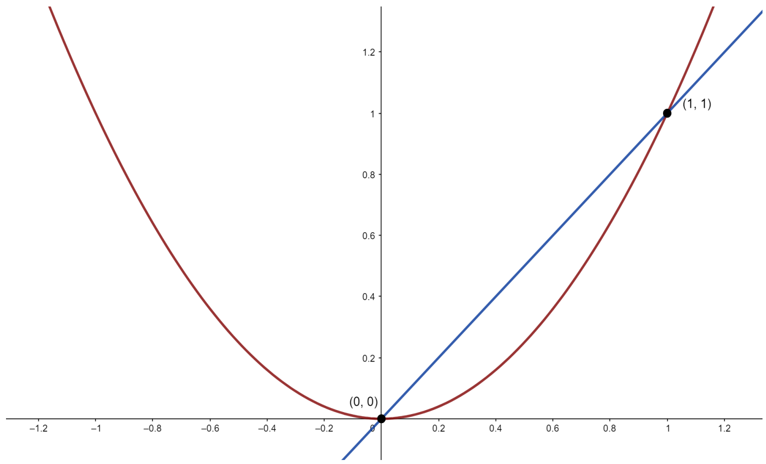


Figura 4.1.3: Puntos fijos de la función $f(x) = x^2$.

Diagrama de cobweb

Para observar de manera gráfica la órbita de un punto bajo la función f se emplea un diagrama, el cual permite visualizar el movimiento de un punto perteneciente al sistema dinámico discreto $(\mathbb{R}, f)$ a través de la gráfica de la función f y la gráfica de la función identidad. Al proceso que lleva este análisis gráfico se le conoce como la *red de araña* o el *diagrama de cobweb*.

Para hacer el diagrama de cobweb, por ejemplo, supongamos que deseamos analizar el comportamiento de la órbita del punto x_0. Para ello es preciso seguir los siguientes pasos:

1. Se dibujan las gráficas de la función f y de la función identidad.

2. Se determina el valor de $f(x_0)$, con la finalidad de tener la coordenada $(x_0, f(x_0))$.

3. Se traza una linea recta horizontal de la coordenada $(x_0, f(x_0))$ a la función identidad, donde al cruzar con esta se llega a la coordenada $(f(x_0), f(x_0))$.

4. De esta nueva coordenada, se traza una nueva recta vertical en dirección a la función f, donde encontramos el punto $(f(x_0), f^2(x_0))$.

5. Se repiten los pasos 3 y 4 tantas veces como sean necesarias.

Para ejemplificar este proceso, comenzaremos con una función sencilla; $f(x) = x^2$, lo cuál nos mostrará gráficamente algunos puntos que son importantes en la aplicación de modelos que hacen uso de los sistemas dinámicos discretos y que posteriormente se definirán propiamente.

Ejemplo 4.1.7. Sean $a = \frac{3}{5} \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x) = x^2$, para toda $x \in \mathbb{R}$, y consideremos a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la función identidad. Observemos que los puntos fijos de esta función son $x = 0$ y $x = 1$ (vea Ejemplo 4.1.6) y la orbita del punto a se visualiza con el diagrama de cobweb en color negro (vea Figura 4.1.4).

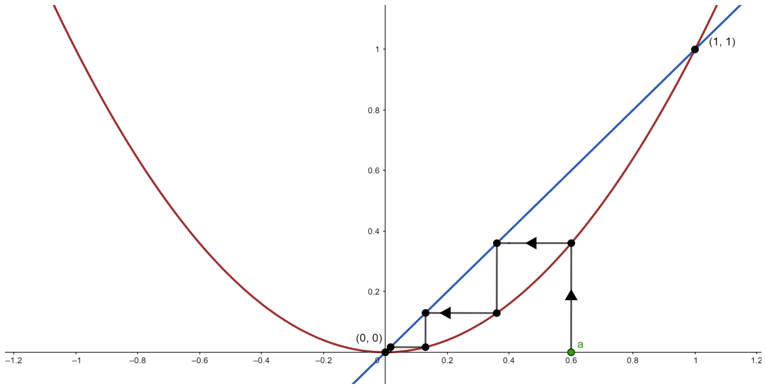


Figura 4.1.4: Diagrama de cobweb.

Podemos apreciar que la órbita del punto a tiende al punto $x = 0$.

Nuevamente con la misma función pero esta vez tomando un punto a diferente al que se planteó en el ejemplo anterior, con la finalidad de ver en la misma gráfica diferentes puntos.

Ejemplo 4.1.8. Sean $a = 2 \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x) = x^2$, para toda $x \in \mathbb{R}$, y consideremos a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la función identidad. La orbita del punto a se visualiza con el diagrama de cobweb (vea Figura 4.1.5).

Podemos apreciar que la órbita del punto a tiende a alejarse del punto $x = 1$.

En el siguiente ejemplo podemos observar una función que es común encontrarse al estudiar los sistemas dinámicos discretos, ya que sirve para ejemplificar varios de los conceptos debido a sus propiedades dinámicas, el lector interesado en revisar las propiedades de esta función puede consultar [17].

Ejemplo 4.1.9. Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A la función T se le conoce como la *función tienda.*

Sea $a = \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$ y T la función tienda, para toda $x \in \mathbb{R}$, y consideremos a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la función identidad. La órbita del punto a se visualiza con el diagrama de cobweb (vea Figura 4.1.6).

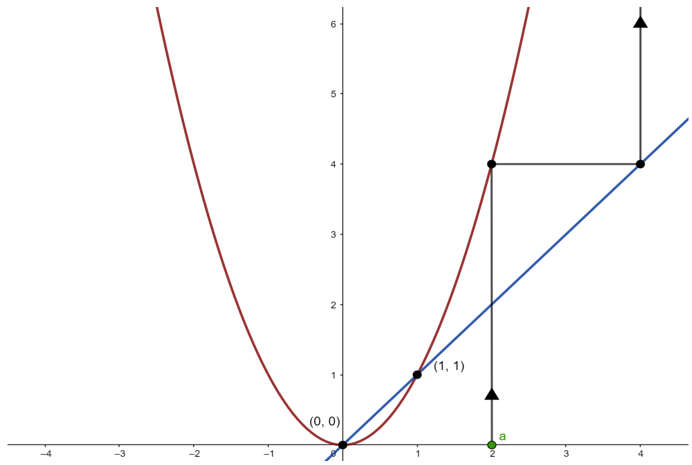


Figura 4.1.5: Diagrama de Cobweb.

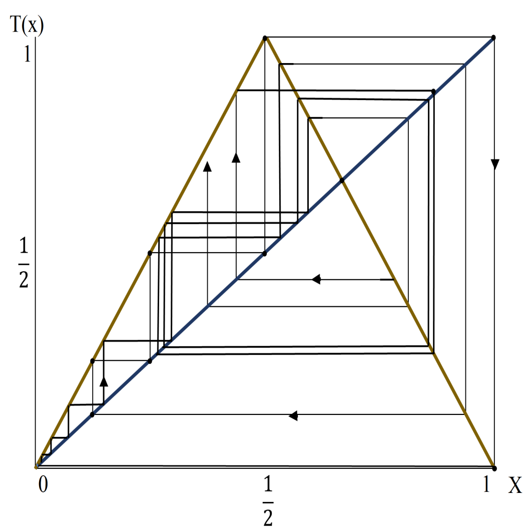


Figura 4.1.6: Diagrama de cobweb de la función tienda.

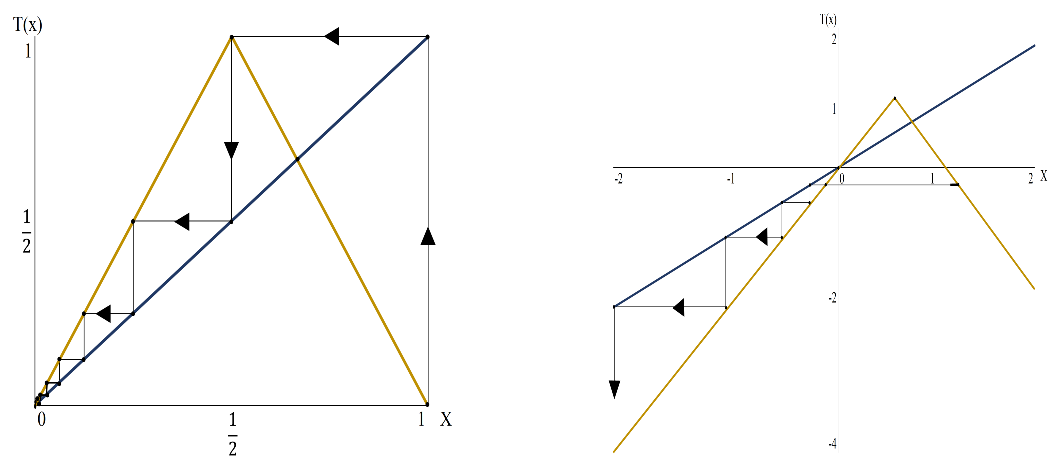
Si bien el punto fijo de una función es importante, requerimos conocer además cuál es el comportamiento de una vecindad de dicho punto. Para ello, es importante resaltar algunas de las propiedades de los puntos fijos que arrojan información sobre la dinámica inducida por las iteraciones de la función f en una vecindad del punto fijo.

Definición 4.1.10. Sean $(\mathbb{R}, f)$ un sistema dinámico discreto y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto fijo.

(a) El punto fijo x_0 es un *punto fijo atractor* si existe un número $\delta > 0$ tal que para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

(b) El punto x_0 es un *punto fijo repulsor* si existe un número $\delta > 0$ tal que para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, se tiene que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Intuitivamente, un punto fijo atractor es aquel donde existe una vecindad cuya órbita eventualmente converge al punto fijo (vea Figura 4.1.7-(a)) y un punto fijo repulsor es aquel en el que los puntos cercanos escapan en alguna vecindad del punto fijo en un tiempo finito (vea Figura 4.1.7-(b)).



(a) Punto fijo atractor

(b) Punto fijo repulsor

Figura 4.1.7: Punto fijo atractor y repulsor.

Para determinar si un punto fijo es atractor o repulsor podemos hacer uso del siguiente resultado, el cual muestra la relación entre la primera derivada de la función f.

Teorema 4.1.11. Sean $(\mathbb{R}, f)$ un sistema dinámico discreto donde f es una función derivable en $\mathbb{R}$, y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto fijo.

(a) Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.

(b) Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.

Demostración.

(a) Suponiendo que $|f'(x_0)| < 1$. Veamos que x_0 es un punto fijo atractor. En vista de la parte (a) de la Definición 4.1.10, queremos demostrar que existe un δ no negativo tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$. Puesto que $|f'(x_0)| < 1$, por la Definición 1.2.13, esto equivale a $\left|\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < 1$. Como x_0 es un punto fijo, es decir $f(x_0) = x_0$, se sigue que $\left|\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$. Por la Proposición 1.2.18, se tiene que $\lim_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$. Por otro lado, sea $c \in (0, 1)$ tal que $\lim_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < c$, en vista de la Proposición 1.2.16, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $\left|\frac{f(x)-x_0}{x-x_0}\right| < c$.
Notemos lo siguiente: sea $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Así, $|x - x_0| < \delta$. Entonces $|f(x) - x_0| < c\,|x - x_0|$. Como $c < 1$ y $|x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x) - x_0| < \delta$. Esto es: si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces $f(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Es decir, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - x_0| < \delta$. Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|f^n(x) - x_0| < \delta$ (vea la Definición 4.1.2).
Más aún, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - x_0| < c\,|x - x_0|$, se sigue que $|f(f(x)) - f(x_0)| < c|f(x) - f(x_0)| < c(c|x - x_0|)$, es decir, $|f^2(x) - x_0| < c^2|x - x_0|$. Inductivamente, para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|f^n(x) - x_0| < c^n|x - x_0|$. Ahora bien, aplicando límite tenemos que $\lim_{n\to\infty} |f^n(x) - x_0| \leq \lim_{n\to\infty} c^n|x - x_0|$. Debido a que $0 < c < 1$, por el Teorema 1.2.28, $\lim_{n\to\infty} c^n|x - x_0| = 0$. Así, $\lim_{n\to\infty} |f^n(x) - x_0| \leq 0$. Por la Proposición 1.2.18 y como, para toda $t \in \mathbb{R}$, $|t| \geq 0$ se tiene que $\left|\lim_{n\to\infty} f^n(x) - x_0\right| = 0$. De lo anterior, se sigue que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$. Por lo tanto, x_0 es un punto fijo atractor.

(b) Supongamos que $|f'(x_0)| > 1$. Veamos que x_0 es un punto fijo repulsor. En vista de la parte (b) de la Definición 4.1.10, queremos demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se tiene que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Partiendo de forma similar a como se realizo en (a), sea $c > 0$ tal que $1 < c < \lim_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right|$, en vista de la Proposición 1.2.17, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $c < \left|\frac{f(x)-x_0}{x-x_0}\right|$.
Notemos lo siguiente: sea $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Así, $|x - x_0| < \delta$, entonces $c|x - x_0| < |f(x) - x_0|$. Como $|x - x_0| < \delta$ se tiene que $\delta < |f(x) - x_0|$. Similarmente a como se hizo en (a), se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\delta < |f^n(x) - x_0|$.
Más áun, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $c|x - x_0| < |f(x) - x_0|$, se sigue que $c|f(x) - f(x_0)| < |f(f(x)) - f(x_0)|$, es decir, $c^2|x - x_0| < |f^2(x) - x_0|$. Inductivamente, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $c^n|x - x_0| < |f^n(x) - x_0|$. Sin embargo, como $c > 1$ está situación no se puede mantener por mucho tiempo. En otras palabras, debe existir un $N \in \mathbb{N}$ que depende de x, tal que $f^N(x)$ no pertenece a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Por lo tanto, x_0 es un punto fijo repulsor.

□

Sin embargo, en el Teorema 4.1.11 no se hace mención de lo que ocurriría si x_0 es un punto fijo de f y $|f'(x_0)| = 1$. Para determinar el comportamiento de un punto fijo en el cual la primera derivada se comporta de dicha forma nos auxiliamos del siguiente resultado.

Teorema 4.1.12. Sean $(\mathbb{R}, f)$ un sistema dinámico discreto y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto fijo. Suponiendo que $f'(x_0) = 1$ y que la segunda y la tercera derivada de f en x_0 son continuas. Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.

Demostración. Supongamos que $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) < 0$. Veamos que x_0 es un punto fijo atractor. En vista de la parte (a) de la Definición 4.1.10, queremos demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$. Como $f'''(x_0) < 0$, por la Observación 1.2.14, esto equivale a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} < 0$. Notemos que, en vista de la Proposición 1.2.16, existe un $\delta_1 > 0$ tal que para toda $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\backslash\{x_0\}$, se tiene que $\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} < 0$. Sea $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\backslash\{x_0\}$ luego, existen dos posibilidades:

(1) $x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$. Así, $x < x_0$. Como $\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} < 0$ y $(x - x_0) < 0$ se tiene que $0 < (f''(x) - f''(x_0))$. Dado que $f''(x_0) = 0$ tenemos que $0 < f''(x)$. Así, $f''(x) \geq 0$, para toda $x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$. En vista de la parte (a) del Teorema 1.2.21 y la parte (a) del Teorema 1.2.22, la f' es creciente en $(x_0 - \delta_1, x_0)$. Veamos que existe un $\delta > 0$ tal que para toda $a \in (x_0 - \delta_1, x_0)$, se cumpla que $f(a) \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ y $a < f(a)$. Primero pongamos $b = x_0$ y sea $a \in (b - \delta_1, b)$. Tenemos que $a < b$. Por el Teorema 1.2.15, existe un número real $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Como f' es creciente, $f'(c) < f'(b)$. Puesto que $b = x_0$ y $f'(x_0) = 1$, se tiene que $f'(c) < 1$. De ahí que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1$. De lo anterior se sigue que $(f(b) - f(a)) < (b - a)$. Así, $-f(a) < (b-a) - f(b)$. Regresando a la nomenclatura anterior, se tiene que $-f(a) < (x_0 - a) - f(x_0)$. Debido a que x_0 es un punto fijo, se tiene que $-f(a) < (x_0 - a) - x_0 = -a$, es decir, $a < f(a)$. Por lo tanto:

$$a < f(a), \quad \text{para toda } a \in (x_0 - \delta_1, x_0). \tag{4.1.1}$$

Sea $x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$. Veamos que $f(x) < x_0$. Ya que $f'(x_0) = 1$, se tiene que $0 < f'(x_0)$. Dicha derivada se puede reescribir, por la Definición 1.2.13, como $0 < \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. En vista de la Proposición 1.2.17, existe un $\delta_2 > 0$ tal que para toda $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ se cumple que $0 < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Sea $z \in (x_0 - \delta_2, x_0)$, así $0 < \frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$. Dado que $z < x_0$, se sigue que $z - x_0 < 0$, de donde $f(z) - f(x_0) < 0$; así $f(z) < f(x_0)$. Puesto que x_0 es un punto fijo se tiene que $f(z) < x_0$. Por lo tanto:

$$f(x) < x_0, \quad \text{para toda } x \in (x_0 - \delta_2, x_0). \tag{4.1.2}$$

Ahora, sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea $a \in (x_0 - \delta, x_0)$. Así, $a \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ y $a \in (x_0 - \delta_2, x_0)$. Luego por (4.1.1) $a < f(a)$. También, como $x_0 - \delta < a$, se sigue que $x_0 - \delta < f(a)$. Además, por (4.1.2) $f(a) < x_0$. Así, $x_0 - \delta < f(a) < x_0$. En resumen, se tiene que $f(a) \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $a < f(a)$, para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Aplicando las iteraciones de f, se tiene que para toda $a \in (x_0 - \delta, x_0)$ se cumple que $x_0 > \ldots > f^n(x) > \ldots > f^2(x) > f(x) > x$. En vista de la parte (a) del Teorema 1.2.26, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$, para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Por lo tanto, x_0 es un punto fijo atractor.

(2) $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$. Así, $x_0 < x$. Como $\frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} < 0$ y $0 < (x - x_0)$ se tiene que $f''(x) - f''(x_0) < 0$. Dado que $f''(x_0) = 0$, se tiene que $f''(x) < 0$. De donde, para toda $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$, $f''(x_0) < 0$. En vista de la parte (b) del Teorema 1.2.22, f es cóncava en $(x_0, x_0 + \delta_1)$. Veamos que para toda $b \in (x_0, x_0 + \delta_1)$, se cumpla que $f(b) \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ y $f(b) < b$. Primero pongamos $a = x_0$ y sea $b \in (x_0, x_0 + \delta_1)$. Tenemos que $a < b$. Tomemos un número cualquiera $x \in (a, b)$, así $a < x < b$. Como f es una función cóncava en $(x_0, x_0 + \delta_1)$, por la parte (b) de la Definición 1.2.7, se tiene que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. De lo anterior, si x tiende a a, entonces se tiene que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Por la Definición 1.2.13, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Así, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(a)$, es decir, $f(b) - f(a) < f'(a)(b - a)$. Así, $f(b) < f'(a)(b - a) + f(a)$. Regresando a la nomenclatura anterior, se tiene que $f(b) < f'(x_0)(b - x_0) + f(x_0)$. Puesto que x_0 es un punto fijo y $f'(x_0) = 1$ se sigue que, $f(b) < (b - x_0 + x_0) = b$. Por lo tanto:

$$f(b) < b, \quad \text{para toda } b \in (x_0, x_0 + \delta_1). \tag{4.1.3}$$

Considerando que $f'(x_0) = 1$, se tiene que $0 < f'(x_0)$. Dicha derivada se puede reescribir, por la Definición 1.2.13, como $0 < \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. En vista de la Proposición 1.2.17, existe un $\delta_2 > 0$ tal que para toda $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ se cumple que $0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Sea $z \in (x_0, x_0 + \delta_2)$ así, $0 < \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}$. Dado que $x_0 < z$, se sigue que $0 < z - x_0$, de donde $0 < f(z) - f(x_0)$; así, $f(x_0) < f(z)$. Puesto que x_0 es un punto fijo se tiene que $x_0 < f(z)$. Por lo tanto:

$$x_0 < f(x), \quad \text{para toda } x \in (x_0, x_0 + \delta_2). \tag{4.1.4}$$

Sea $\delta' = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, se sigue de (4.1.3) y (4.1.4), que para toda $x \in (x_0, x_0 + \delta')$, se cumple que $f(x) \in (x_0, x_0 + \delta')$ y $f(x) < x$. Aplicando las iteraciones de f, se tiene que para toda $x \in (x_0, x_0 + \delta')$ se cumple que $x_0 < \ldots < f^n(x) < \ldots < f^2(x) < f(x) < x$. Por la parte (b) del Teorema 1.2.26, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$, para toda $x \in (x_0, x_0 + \delta')$. Por lo tanto x_0 es un punto fijo atractor.

De los casos (1) y (2), sea $\beta < \text{mín}\{\delta, \delta'\}$ se tiene que x_0 es un punto fijo atractor. $\square$

Definición 4.1.13. Sea $(\mathbb{R}, f)$ un sistema dinámico discreto y x_0 un punto de $\mathbb{R}$. El punto x_0 es un *punto periódico* de f, si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(x_0) = x_0$.

Al conjunto de todos los puntos periódicos se le denota como $Per(f)$.

Si x es un elemento de $Per(f)$, se dice que $\mathcal{O}(x, f)$ es una *órbita periódica.* Si x_0 es un punto periódico, se dice que x_0 tiene un periodo k, si k es el menor natural para el cual $f^k(x_0) = x_0$. El siguiente ejemplo permite visualizar gráficamente la Definición 4.1.13.

Ejemplo 4.1.14. Sea $a = \frac{2}{5} \in \mathbb{R}$ y T la función tienda. La órbita de a bajo T es $\mathcal{O}(a, T) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$. Por lo cual, en vista de la Definición 4.1.13, a es un punto periódico de 2 periodos. En la Figura 4.1.8 podemos observar el diagrama de Cobweb para el punto a.

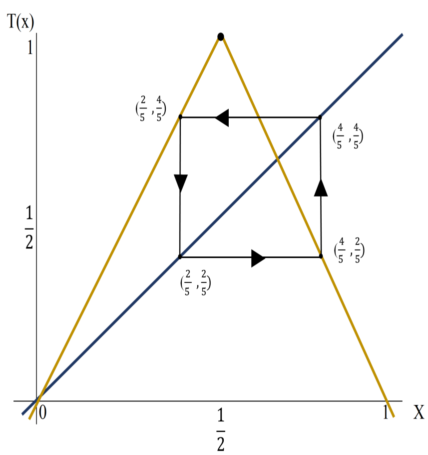


Figura 4.1.8: Órbita de $a = \frac{2}{5}$ bajo T.

Sección 4.2

Los modelos de oferta y demanda y keynesiano

Modelo de oferta y demanda

El modelo de oferta y demanda, desarrollado por Marshall [37], y base fundamental de varios modelos microeconómicos, describe la interacción en el mercado entre demandantes y oferentes, también llamados consumidores y productores, respectivamente (vea

Definición 1.3.3). Este modelo parte de suponer que se tiene un mercado cuya estructura es libre y competitiva, cumpliendo dos principios fundamentales: (a) *principio de optimización*, el cual implica que los individuos tratan de elegir niveles de consumo o producción que están a su alcance, de manera racional y que les proporcione mayor satisfacción; (b) *principio de equilibrio*, hace referencia a que los precios se ajustan hasta que la cantidad que demandan los agentes económicos de un producto es igual a la que se ofrece [37].

Para entender un poco más lo anterior, se requiere conocer las dos funciones que representan las acciones de intercambio. Las Definiciones 4.2.1 y 4.2.2 las hemos tomado de [35].

Definición 4.2.1. La *función de la demanda* es aquella que relaciona la elección óptima del consumidor, considerando las cantidades demandadas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, con los diferentes valores de los precios $(p_0, \ldots, p_n)$ y las rentas $(m_0, \ldots, m_n)$. También denominada como la *Curva de demanda individual.*

La relación que existe entre la cantidad demandada de un bien, su precio y las demás variables explicativas se refleja en la función de demanda. Por ejemplo, cuando decimos que la cantidad demandada de un bien (q_d) se ve influida por el precio de ese bien (p_a), los ingresos (m), los precios de otros bienes (p_b), los gustos de los consumidores (G) o el tamaño del mercado (N), estamos refiriéndonos a *la función de demanda*, que podemos expresar de la siguiente forma [22]:

$$q_d = D(p_a, m, p_b, G, N).$$

En relación a la función de demanda, la *ley de la demanda* establece que cusnto más alto sea el precio de un bien menor será la csntidad demanda de dicho bin, y cuando más bajo sea el precio de un bien mayor será la cantidad demandada del mismo. Además, los factores que provocan cambios en la demanda son los precios de bienes relacionados, los precios esperados, el ingreso, el ingreso esperado, la población y las preferencias [26].

Definición 4.2.2. La *función de la oferta* es aquella que relaciona la cantidad del bien que está dispuesto a ofrecer el productor $(y_0, \ldots, y_n)$ a los precios de mercado posibles $(p_0, \ldots, p_n)$. También denominada como la *Curva de oferta individual.*

La función de oferta establece que la cantidad ofrecida de un bien en un período de tiempo concreto (q_s) depende del precio de ese bien (p_a), de los precios de otros bienes (p_b), de los precios de los factores productivos (r), de la tecnología (z) y del número de empresas que actúan en este mercado (H). De esta forma podemos escribir la función de oferta siguiente [22]:

$$q_s = O(p_a, p_b, r, z, H).$$

En relación a la función de la oferta, la *ley de la oferta* establece que cuanto más alto sea el precio de un bien, mayor será la cantidad ofrecida de éste, y cuanto más bajo sea el precio de un bien, menor será la cantidad ofrecida del mismo. Además, los factores que provocan cambios en la oferta son los precios de los recursos productivos, precios de los bienes relacionados, numero de proveedores, tecnología y estado de la naturaleza [26].

Las curvas de demanda y de oferta representan las elecciones óptimas de los agentes implicados. El objetivo del modelo es buscar el precio en el cual los demandantes y oferentes coincidan, es decir, las conductas de dichos entes económicos sean compatibles (vea Definición 1.3.3), en la teoría económica a este hecho dentro del modelo se le conoce como equilibrio general. Si consideramos que el precio se modifica en un período próximo, y éste dependa de lo ocurrido en el período actual, se incluye al tiempo como una variable autónoma o exógena porque las variables de interés no dependen de éste.

La teoría de la oferta y la demanda ofrece un método para analizar los factores que influyen en los precios y las cantidades a las que se compran y venden los bienes en el mercado. De acuerdo con ésta, un cambio en el precio es resultado de un cambio en la demanda, un cambio en la oferta o un cambio tanto en la oferta como en la demanda.

Es importante señalar que el precio de un bien regula las cantidades demandas y ofrecidas del mismo, por un lado generando que en caso de que exista un faltante, es decir haya escasez, impulsa el precio hacia arriba, con la finalidad de tener un precio de equilibrio. Por otro lado, generando que en caso de que exista un excedente, impulsa el precio hacia abajo, con la finalidad de alcanzar el precio de equilibrio.

De tal forma que el modelo, planteándolo en forma lineal, hace uso de las siguientes funciones, las cuales notemos que se han planteado como funciones recursivas, es decir cada una de estas funciones representa el sistemas dinámico discreto $(\mathbb{R}, d)$ para la demanda y $(\mathbb{R}, s)$ para la oferta.

La función de la demanda:

Representa la cantidad de un bien que los consumidores están dispuestos a comprar bajo el nivel de precios real, en el tiempo t. Y se representa matemáticamente como:

$$d(p_t) = a - bp_t; \text{ donde } b > 0$$

Es importante señalar que p_t representa el precio en unidades monetarias, q_t la cantidad del bien demandada y a, b son los parámetros de la ecuación. En particular, b representa la *elasticidad precio de la demanda*, la cual es una medida carente de unidades. La elasticidad precio de la demanda mide la sensibilidad de la cantidad demandada de un bien respecto al cambio en su precio; y los factores que influyen en la elasticidad de la demanda son la cercanía de los sustitutos, la proporción del ingreso gastado en el bien y el tiempo transcurridos desde un cambio de precio.

La función de la oferta:

Representa la cantidad de un bien que los productores están dispuestos a producir en función del precio que espera recibir, en el tiempo t. Y se representa matemáticamente como:

$$s(p_t) = c + dp_t^e; \text{ donde } d > 0$$

Es importante señalar que p_t^e representa el precio esperado en unidades monetarias, q_t la cantidad del bien ofrecida y c, d son constantes positivas que se denominan parámetros. Especificamente, d representa la elasticidad de la oferta, la cuál mide la sensibilidad de la cantidad ofrecida de un bien a un cambio en su precio.

En relación al principio de equilibrio antes mencionado, consideramos que el mercado se autoregula, lo que implica que la cantidad ofertada es igual a la cantidad demandada y éstas a su vez son igual a la cantidad comercializada en el tiempo t. Esto es $d(p_t) = s(p_t) = q_t$.

Para resolver el modelo lineal suponemos que el precio esperado depende del precio del periodo anterior. Por lo que se tiene que:

$$p_t^e = p_{t-1} \tag{4.2.1}$$

Sustituyendo el supuesto de equilibrio en el mercado y la función del precio esperado (4.2.1), tenemos que:

$$\begin{aligned} a - bp_t &= c + dp_{t-1} \\ -bp_t &= c + dp_{t-1} - a \\ p_t &= \left(\frac{a-c}{b}\right) - \left(\frac{d}{b}\right) p_{t-1} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Notemos que (4.2.2) es la representación del sistema dinámico discreto no homogéneo que describe la dinámica del intercambio entre demandantes y oferentes. Dado que el objetivo del modelo es estudiar el punto de equilibrio, requerimos encontrar el punto fijo, en vista de la Definición 4.1.5, resulta al igualar la ecuación anterior a la ecuación identidad que sería lo mismo que $p_t = p_{t-1}$. Observemos que:

$$
\begin{aligned}
p_t &= \left(\frac{a-c}{b}\right) - \left(\frac{d}{b}\right) p_t \\
p_t + \left(\frac{d}{b}\right) p_t &= \frac{a-c}{b} \\
p_t \left(1 + \frac{d}{b}\right) &= \frac{a-c}{b} \\
p_t \left(\frac{b+d}{b}\right) &= \frac{a-c}{b} \\
p_t &= \frac{\frac{a-c}{b}}{\frac{b+d}{b}} \\
p_t &= \frac{a-c}{b+d} \qquad (4.2.3)
\end{aligned}
$$

Así, al punto de equilibrio obtenido en (4.2.3) se le denota como p^*. Del cuál, como se cumple que $b, d > 0$, se tiene que $0 < (b+d)$; entonces para que se cumpla la desigualdad $0 \leq \left(\frac{a-c}{b+d}\right)$, tiene que ocurrir que $0 \leq (a-c)$, y así $c \leq a$.

Sin embargo, no basta sólo con conocer cual es el punto fijo, se requiere resolver el modelo, para ello se reduce la ecuación en diferencias no homogenea a una ecuación en diferencias homogenea. Partiendo del sistema dinámico discreto no homogéneo en (4.2.2), al restarle el punto de equilibrio p^*, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
p_t - p^* &= \left(\frac{a-c}{b}\right) - \left(\frac{d}{b}\right) p_{t-1} - p^* \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right) p_{t-1} + \frac{a-c}{b} - \frac{a-c}{b+d} \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right) + (a-c)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+d}\right) \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right) + (a-c)\left(\frac{b+d-b}{b(b+d)}\right) \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right) + (a-c)\left(\frac{d}{b(b+d)}\right) \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right) + \left(\frac{d}{b}\right)\left(\frac{a-c}{b+d}\right) \\
&= -\left(\frac{d}{b}\right)\left(p_{t-1} - p^*\right)
\end{aligned}$$

De lo anterior, se observa que la ecuación en diferencias homogénea es:

$$p_t - p^* = -\left(\frac{d}{b}\right)\left(p_{t-1} - p^*\right). \tag{4.2.4}$$

Suponiendo que una condición inicial, es decir, en el tiempo $t = 0$ el precio esta fijado como p_0, tenemos que la iteración de (4.2.4) queda de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
& t=1 \\
(p_1-p^*) &= -\left(\frac{d}{b}\right)(p_0-p^*). \quad \text{Así,} \quad p_1=-\left(\frac{d}{b}\right)(p_0-p^*)+p^* \\
& t=2 \\
(p_2-p^*) &= -\left(\frac{d}{b}\right)(p_1-p^*) \\
(p_2-p^*) &= -\left(\frac{d}{b}\right)\left(\left[-\left(\frac{d}{b}\right)(p_0-p^*)+p^*\right]-p^*\right) \\
(p_2-p^*) &= \left(\frac{d}{b}\right)^2(p_0-p^*). \quad \text{Así,} \quad p_2=\left(\frac{d}{b}\right)^2(p_0-p^*)+p^* \\
& t=3 \\
(p_3-p^*) &= -\left(\frac{d}{b}\right)(p_2-p^*) \\
(p_3-p^*) &= -\left(\frac{d}{b}\right)\left\{\left[\left(\frac{d}{b}\right)^2(p_0-p^*)+p^*\right]-p^*\right\} \\
(p_3-p^*) &= -\left(\frac{d}{b}\right)^3(p_0-p^*). \quad \text{Así,} \quad p_3=-\left(\frac{d}{b}\right)^3(p_0-p^*)+p^* \\
& \vdots \\
(p_n-p^*) &= \left(-\frac{d}{b}\right)^n(p_0-p^*). \quad \text{Así,} \quad p_n=\left(-\frac{d}{b}\right)^n(p_0-p^*)+p^* \qquad (4.2.5) \\
& \vdots
\end{aligned}$$

La solución de (4.2.4), para toda $t \in \mathbb{N}$:

$$p_t-p^*=\left(-\frac{d}{b}\right)^t(p_0-p^*) \tag{4.2.6}$$

Así, la demanda general, sustituyendo la solución del sistema dinámico discreto homogéneo queda de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
p_t= &\left(\frac{a-c}{b+d}\right)+\left(\frac{-d}{b}\right)^t\left[p_0-\left(\frac{a-c}{b+d}\right)\right] \\
p_t= &\ p^*+\left(\frac{-d}{b}\right)^t[p_0-p^*]. \qquad (4.2.7)
\end{aligned}$$

Para determinar si el punto de equilibrio p^* es un punto atractor o repulsor, tomando en cuenta de que partimos de ecuaciones lineales, veamos la siguiente observación.

Observación 4.2.3. De la ecuación (4.2.7) podemos deducir, en vista del Teorema 4.1.11, el comportamiento del sistema dinámico discreto bajo los siguientes supuestos.

1. Si $|\frac{-d}{b}| < 1$, entonces el punto fijo p^* es un punto fijo atractor.

   Esto es fácil de notar, dado que conforme pase el tiempo, es decir t tienda a infinito, el segundo sumando de (4.2.7) será cero, por lo que $p_t = p^*$. Lo anterior, económicamente se cumple si el cociente de las elasticidades de la demanda y la oferta son menores que 1, lo cuál implica que los consumidores y los demandantes son sensibles a cambios en los precios.

   Caso contrario cuando las elasticidades son mayores que 1. puesto que matemáticamente se cumple lo siguiente.

2. Si $1 < |\frac{-d}{b}|$, entonces el punto fijo p^* es un punto fijo repulsor.

   Al igual que en el caso anterior, es fácil demostrarlo, dado que el segundo sumando de (4.2.7), conforme pase el tiempo, tenderá a infinito por lo que para vecindades cercanas, ninguna iteración de la función tenderá al punto fijo.

3. Si $|\frac{-d}{b}| = 1$, entonces nos encontraremos que se trata de un ciclo con dos periodos, en el cuál la demanda y de la oferta es perfectamente elástica.

El modelo de oferta y demanda, tal y como se ha planteado en la presente tesis, parte de suponer que las funciones de demanda y oferta son lineales. Por otra parte, la función del precio esperado puede ser cualquiera que se defina en base a datos obtenidos empíricamente. El análisis anterior parte de suponer que el precio esperado es igual al precio del periodo anterior, pero se puede suponer que el precio esperado es una función no lineal del precio en un periodo anterior, lo cual genera un sistema dinámico discreto no lineal y para poder determinar si el punto de equilibrio del modelo es atractor o repulsor se requiere hacer uso del Teorema 4.1.12.

Para visualizar el comportamiento del modelo se utiliza un diagrama de cobweb. Es preciso señalar que, para el modelo se plantean dos formas de dicho diagrama, que aunque en esencia muestran lo mismo particularmente cada uno arroja información importante para la interpretación. A continuación detallaremos los objetivos de cada uno de estos diagramas. Es importante añadir que dichos diagramas tienen la finalidad de ejemplificar las funciones de demanda y oferta lineales, sin embargo, su aplicación se pueden realizar en funciones no lineales.

El objetivo de la Figura 4.2.1 es mostrar la secuencia de puntos en un diagrama de oferta y demanda tradicional, porque de esta forma muestra el comportamiento del precio con respecto a la cantidad. Así, para gráficar dicho diagrama basta con trazar la función de la demanda y la oferta, utilizando a la función de oferta como si fuera la función identidad.

En la Figura 4.2.2 se muestra un diagrama de cobweb tradicional, en el cual se traza la ecuación del sistema no homogéneo en (4.2.2) y la función identidad, tal y como ya se explicó anteriormente al detallarse el concepto de diagrama de cobweb.

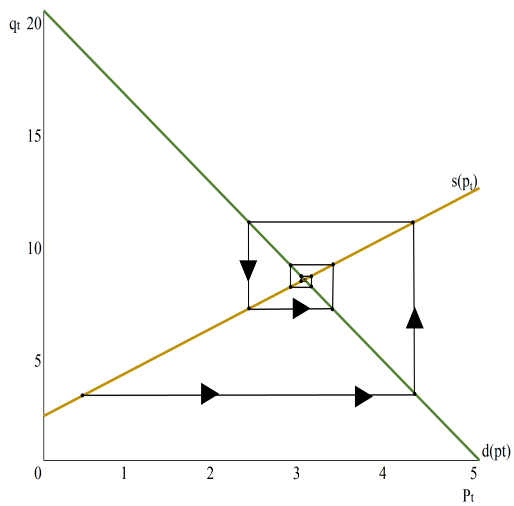


Figura 4.2.1: Diagrama tradicional del mercado para una función lineal.

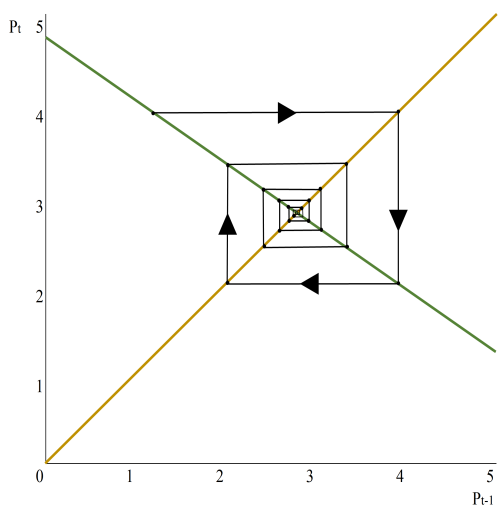


Figura 4.2.2: Diagrama tradicional de Cobweb para una función lineal.

Modelo keynesiano

El modelo keynesiano, basado en la teoría propuesta por el economista estadounidense J. M. Keynes en 1930 y que posteriormente fue formalizado por P. Samuelson, identifica el nivel de equilibrio de los precios y analiza las interrupciones de los mercados de bienes y servicios, centrándose en el análisis de las causas y consecuencias de las variaciones de la demanda agregada y sus relaciones con el nivel de empleo y el ingreso [10].

Las variables que son objeto de estudio en la macroeconomía son el ingreso nacional, consumo, inversión, gasto publico, impuestos, exportaciones e importaciones.

En un modelo macroeconómico, el ingreso nacional está en función de las otras variables. De manera particular, en el modelo keynesiano, el ingreso nacional es medido a través de la producción. Es decir, equivale al PIB. Su función es:

$$Y = C + I + G + X - Z.$$

De dicha igualdad, se tiene que la variable C representa al consumo familiar, el cual corresponde al gasto que realizan los individuos de la economía en el consumo. Dicha variable está en función a una proporción del ingreso y un consumo autónomo, el cual se representa como:

$$C = \alpha + \beta Y; \quad \alpha > 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

Las variables I, G son las que corresponden a la inversión y al gasto público, respectivamente. La inversión representa el gasto de los entes económicos dirigido a la compra de bienes de capital. El gasto público es la variable que registra el gasto efectuado por el gobierno y que tiene un impacto directo sobre la producción nacional. Finalmente, la variable $X - Z$ representa las exportaciones netas, es decir la diferencia entre el total de gasto de exportaciones menos las importaciones, en ocasiones se representa como X_n.

Para que el nivel de producción sea un nivel de equilibrio es necesario que la producción sea igual a la demanda agregada (vea Definición 1.3.3). La *demanda agregada* consiste en la suma de tres componentes: consumo familiar, la demanda de inversión deseada de las empresas y la demanda del sector público de bienes y servicios. Que consiste en cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y &= E \\ E &= C + I + G + X_n \\ C &= \alpha + \beta Y \end{aligned}$$

El modelo Keynesiano es la base de los modelos macroeconómicos que incluyen el desempleo como una consecuencia de la inestabilidad económica y no como una situación deseable de los individuos. Está basado en la teoría propuesta por Keynes y formalizado por Samuelson, y cuyo principal manifiesto es el aumento en el gasto público, de tal forma que este aumente el empleo y en consecuencia se alcance otro punto de equilibrio [32]. Lo anterior, mediante la formulación de tres ecuaciones principales: (a) gasto de consumo, que implica una relación entre el consumo y el ingreso agregado; (b) gasto total, que expresa la relación entre el gasto de consumo, la inversión y el gasto del gobierno; y finalmente (c) la igualdad entre el ingreso agregado y el gasto total. Para este modelo existen tres variantes: el de una economía simple, el de una cerrada y el de una abierta.

Para explicar la dinámica del modelo keynesiano, suponemos que estamos hablando de una economía simple. Para ello consideremos que en el modelo estático se sabe que al cumplirse la igualdad entre el ingreso nacional (Y) y el gasto total (E) el punto de equilibrio estaría dado por:

$$Y^* = \frac{\alpha + I + G}{1-\beta}.$$

Si consideramos que la función es una representación dinámica de la fluctuación del ingreso en el tiempo, se tendría que las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{aligned} Y_t &= E_t \\ E_t &= C_t + I + G \\ C_t &= \alpha + \beta Y_t \end{aligned}$$

Suponemos que la inversión (I) y el gasto del gobierno (G) son exogenos, es decir que no dependen del valor del ingreso, dado que se trata de una economía simple.

Si suponemos que el ajuste del ingreso es una proporción del exceso de demanda, representada como sigue:

$$\Delta Y_{t+1} = \lambda(E_t - Y_t);\ \text{donde } \lambda > 0.$$

En el punto de equilibrio no existiría exceso de demanda, es decir que $\Delta Y_{t+1} = 0$, porque $E_t = Y_t$. Así, la siguiente ecuación representa el ajuste del ingreso en el tiempo:

$$\Delta Y_{t+1} = \lambda(\alpha + \beta Y_t + I + G - Y_t) = \lambda(\alpha + I + G) - \lambda(1-\beta)Y_t.$$

Esta ecuación recursiva cumple con el mismo punto de equilibrio que el sistema estático, puesto que si se cumple que $\Delta Y_{t+1} = 0$, es:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(\alpha + I + G) - \lambda(1-\beta)Y_t \\ Y^* &= \frac{\alpha + I + G}{1-\beta} \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Para homogeneizar el modelo sustituimos la condición de diferencia en el tiempo del ingreso, del que tenemos que el ingreso en el tiempo $t+1$ para $t \in \mathbb{Z}_+$ como:

$$\begin{aligned}
\Delta Y_{t+1} &= \lambda(\alpha + I + G) - \lambda(1-\beta)Y_t. \\
Y_{t+1} - y_t &= \lambda(\alpha + I + G) - \lambda(1-\beta)Y_t. \\
Y_{t+1} &= \lambda(\alpha + I + G) + (1 - \lambda(1-\beta))Y_t
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Además se cumple que:

$$Y^* = \lambda(\alpha + I + G) + (1 - \lambda(1-\beta))Y^*$$

Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned}
Y_{t+1} - y^* &= (1 - \lambda(1-\beta))Y_t - (1 - \lambda(1-\beta))Y^* \\
Y_{t+1} - y^* &= (1 - \lambda(1-\beta))(Y_t - Y^*)
\end{aligned}$$

Considerando como valor inicial del ingreso a Y_0 en el $t = 0$, la ecuación recursiva del modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
Y_1 - y^* &= (1 - \lambda(1-\beta))(Y_0 - Y^*);\ \text{para } t = 0 \\
Y_2 - y^* &= (1 - \lambda(1-\beta))(Y_1 - Y^*) = (1 - \lambda(1-\beta))^2(Y_0 - Y^*);\ \text{para } t = 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación recursiva general queda de la siguiente manera:

$$Y_{t+1} = Y^* + (1 - \lambda(1-\beta))^t(Y_0 - Y^*) \tag{4.2.10}$$

El objetivo del modelo planteado en (4.2.10) busca determinar en cuantos periodos se alcanzara el punto de equilibrio en el cual no exista exceso de demanda o del productor que generen desempleo. Para ello, es importante determinar si el punto de equilibrio Y^* es atractor o repulsor. Para posteriormente examinar el comportamiento de algún desajuste del mercado, para ello veamos la siguiente observación.

Observación 4.2.4. De la ecuación (4.2.10) podemos deducir, en vista del Teorema 4.1.11, el comportamiento del sistema dinámico discreto bajo los siguientes supuestos.

1. Si $\lambda \leq 1$, entonces el punto fijo Y^* es un punto fijo atractor.
2. Si $\lambda > 1$, entonces el punto fijo Y^* es un punto fijo repulsor.

Notemos que la interpretación matemática de un punto fijo atractor y repulsor tiene que ver con la interpretación económica, puesto que $(1-\lambda(1-\beta))$ es la representación del multiplicador keynesiano, el cual mide la propensión marginal a consumir. Cuanto más grande sea la propensión marginal a consumir, mayor será el multiplicador. En modelos donde se incluye la inversión, el gasto del gobierno, las exportaciones e importaciones como variables explicativas, el multiplicador mide además de la propensión marginal a consumir, la propensión marginal a importar, invertir y por la tasa impositiva [25].

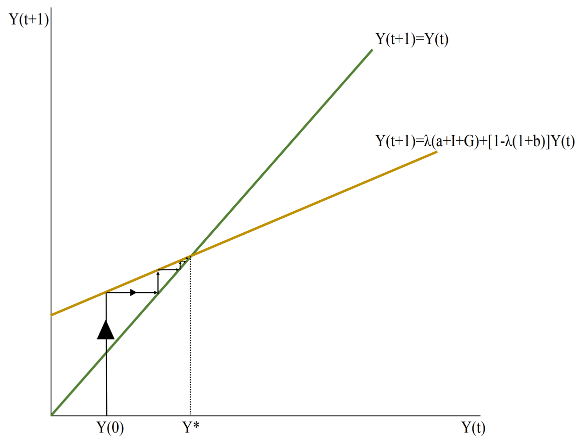


Figura 4.2.3: Diagrama de cobweb para el modelo keynesiano.

De forma similar a como se hace en el modelo de oferta y demanda, se utiliza el diagrama de cobweb para analizar el comportamiento de las órbitas de algún punto, también para visualizar las propiedades de los puntos fijos. Sin embargo, como se ve en la Figura 4.2.3, el diagrama de cobweb para el modelo keynesiano es el tradicional, puesto que el modelo analiza las variaciones en la demanda agregada y no particularmente para cada función, como si lo hace el modelo de oferta y demanda.

Sección 4.3

Aplicaciones del modelo de oferta y demanda

Una vez desarrollado el modelo de oferta y demanda de manera teórica, estamos preparados para abordar algunas aplicaciones reales. Es preciso señalar que, la información para el desarrollo de los dos ejemplos de esta sección se han tomado de manera total o parcial de [34]. Particularmente, el Ejemplo 4.3.1 hace alusión al intercambio de bienes agrícolas, considerando que las funciones de oferta, demanda y precio esperado son lineales.

Por otra parte, el Ejemplo 4.3.2 hace alusión al intercambio de automóviles, considerando que la función de demanda y oferta son lineales, pero la función del precio esperado es no lineal.

Ejemplo 4.3.1. Considere un mercado en el que se intercambia bienes agrícolas. Donde la demanda y la oferta de dicho mercado están especificadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d(p_t) &= 20 - 4p_t \\ s(p_t) &= 2 + 2.5p_t^e \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Suponiendo adicionalmente que, los agricultores determinan cuánto suministrar en el periodo actual en función de lo que esperan que sea el precio, es decir se cumple la condición $p_t^e = p_{t-1}$. Requerimos saber:

(a) ¿Cuál es el precio de equilibrio del mercado con el cual se satisface la demanda y la oferta sin que haya excedentes?

(b) Suponiendo que los demandantes están solicitando los bienes agrícolas a un precio de 7 unidades monetarias, ¿Es posible que con ese precio inicial se regule sólo el mercado y llegue al precio de equilibrio, con el paso del tiempo?

Solución:

Antes de responder cada uno de los incisos, requerimos transformar las funciones del modelo de Oferta y demanda a una función recursiva que represente el sistema dinámico discreto que queremos analizar.

Para ello, tomemos en cuenta que la función de oferta y demanda, respectivamente, son funciones lineales y que se hace referencia a una condición de los precios esperados similares a como se planteó en la explicación del modelo. Por consiguiente, la función recursiva la vamos a plantear tal y como se sugiere en la ecuación (4.2.2), donde los valores correspondientes a cada una de las letras utilizadas quedan de la siguiente manera: $a = 20$, $b = 4$, $c = 2$ y $d = 2.5$. Por lo tanto, se tiene que:

$$p_t = \left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{5}{8}\right) p_{t-1}. \tag{4.3.2}$$

Así, ahora estamos preparados para abordar cada una de las interrogantes planteadas.

a) El precio de equilibrio del mercado con el cual se satisface la demanda y la oferta, sin que existan excedentes del consumidor o del productor, se puede determinar gráficamente a través del diagrama tradicional del mercado (vea Figura 4.3.1), en el cual se interceptan ambas funciones.

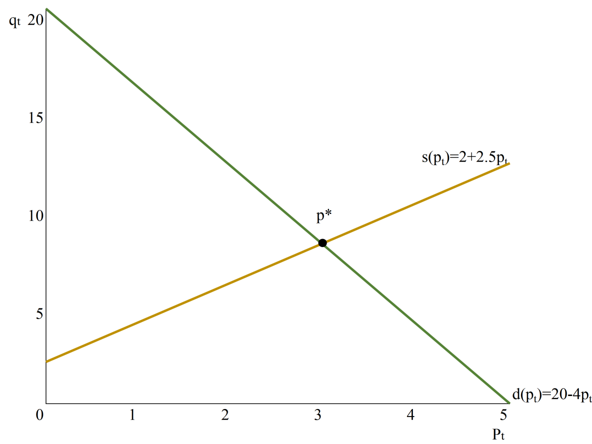


Figura 4.3.1: Diagrama tradicional del mercado: modelo lineal.

Notemos que en la Figura 4.3.1 sólo tenemos un punto fijo, el cual es $p^* = \frac{36}{13} \approx 2.769$.

b) Para saber si es posible que con un precio inicial, el mercado se regule y regrese al precio de equilibrio requerimos conocer si el precio de equilibrio es un punto fijo atractor o repulsor. Observemos que en este caso el sistema dinámico esta generado por la función dada por $f(x) = \frac{9}{2} - \frac{5}{8}x$.

Notemos que, en vista de la Observación 4.2.3 y por el Teorema 4.1.11, podemos determinar si el punto fijo es atractor o repulsor por la primera derivada de la función $f(p_{t-1})$. Así, de la ecuación recursiva del inciso (a) previo, si $f(p_{t-1}) = p_t$ entonces:

$$f(p_{t-1}) = \left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{5}{8}\right) p_{t-1}. \tag{4.3.3}$$

Para hallar el punto fijo seguimos el procedimiento de (4.2.3). Esto es:

$$\begin{aligned}
p_{t-1} &= \left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{5}{8}\right) p_{t-1} \\
p_t + \left(\frac{5}{8}\right) p_t &= \frac{9}{2} \\
p_t \left(1 + \frac{5}{8}\right) &= \frac{9}{2} \\
p_t \left(\frac{5+8}{8}\right) &= \frac{9}{2} \\
p_t &= \frac{\frac{9}{2}}{\frac{13}{8}} \\
p_t &= \frac{36}{13} \\
\text{Así,} \quad p^* &= \frac{36}{13}
\end{aligned}$$

Además de (4.3.3) se tiene que la primera derivada es:

$$f'(p_{t-1}) = -\frac{5}{8}. \tag{4.3.4}$$

En vista de que $|\frac{5}{8}| \approx |0.625| < 1$, por la parte (a) del Teorema 4.1.11, p^* es un punto fijo atractor. Más aún, suponiendo que los demandantes están solicitando los bienes agrícolas a un precio de 7 unidades monetarias, veamos el comportamiento de la órbita tomando a $p_0 = 7$.

Primero, requerimos encontrar la solución del sistema dinámico discreto homogéneo, el cual siguiendo la propuesta de la ecuación (4.2.4), la función queda de la siguiente manera.

$$p_t = \left(\frac{36}{13}\right) + \left(\frac{-5}{8}\right)^t \left[p_0 - \left(\frac{36}{13}\right)\right],$$

Sustituyendo el valor de p_0, se tiene:

$$p_t = \left(\frac{36}{13}\right) + \left(\frac{-5}{8}\right)^t \left[\left(\frac{55}{13}\right)\right]. \tag{4.3.5}$$

Notemos que $\lim\limits_{t\to\infty} p_t = \dfrac{36}{13}$.

Para conocer el conjunto que conforma la órbita $\mathcal{O}(p_0, f)$, notemos que estos están tabulados en la Tabla 4.3.1. En vista de que el punto fijo $p^* = \frac{36}{13} \approx 2.76923$, aproximadamente en la iteración número 30 la sucesión converge al punto de equilibrio.

En la Figura 4.3.2, podemos ver cual es el comportamiento de la órbita, resaltando que el punto fijo es un punto fijo atractor, pues el diagrama muestra como se va amortiguando el movimiento conforme pasa el tiempo.

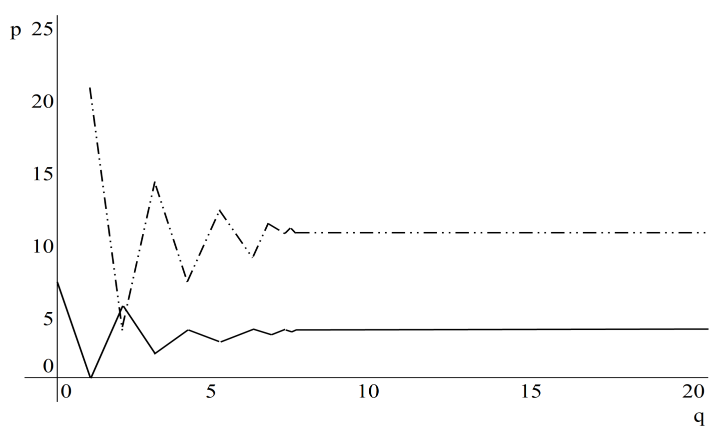


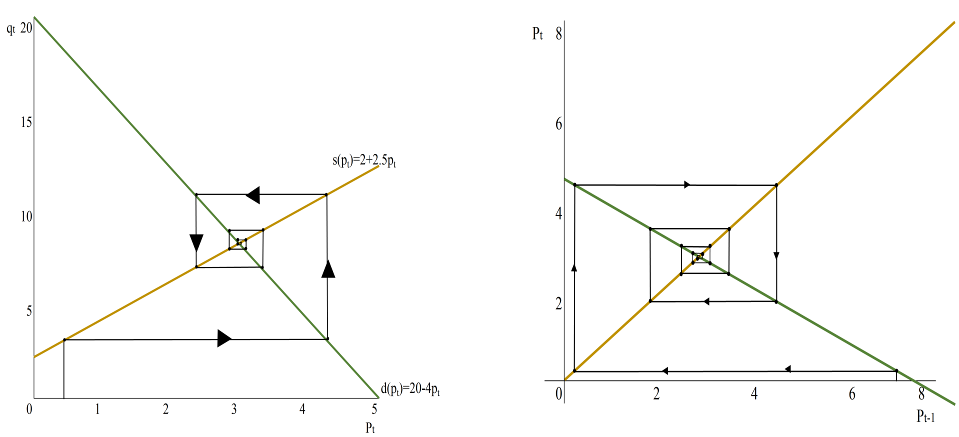
Figura 4.3.2: Diagrama del comportamiento de la órbita.

Analizando la Figura 4.3.3, notemos que los precios se van regulando al precio de equilibrio conforme incrementa el número de bienes agrícolas que se demandan, por lo

t	p_t	t	p_t
0	7	16	2.771524274
1	0.125	17	2.767797329
2	4.421875	18	2.770126669
3	1.736328125	19	2.768670832
4	3.414794922	20	2.76958073
5	2.365753174	21	2.769012044
6	3.021404266	22	2.769367473
7	2.611622334	23	2.76914533
8	2.867736042	24	2.769284169
9	2.707664974	25	2.769197394
10	2.807709391	26	2.769251629
11	2.74518163	27	2.769217732
12	2.784261481	28	2.769238917
13	2.759836574	29	2.769225677
14	2.775102141	30	2.769233952
15	2.765561162		

Tabla 4.3.1: Conjunto que conforma la órbita $\mathcal{O}(7, f)$

que en un principio existe un exceso de demanda pero conforme pasa el tiempo ésta se va disminuyendo y la cantidad de bien demandado es igual a la cantidad de bien que se ofrece.



(a) Diagrama tradicional de Mercado (b) Diagrama tradicional de Cobweb

Figura 4.3.3: Diagrama de Cobweb de Oferta y demanda: modelo lineal.

Por todo lo anterior podemos concluir que aunque los demandantes de los bienes agrícolas están tomando un precio por arriba del de equilibrio de mercado generando un excedente del consumidor, como se supone una estructura competitiva, el comportamiento de los demandante causa que los productores tengan un incentivo para producir más bienes, lo que genera que los bienes se abaraten y de esta forma el mercado se esta regulando por si solo para alcanzar el precio de equilibrio. $\diamondsuit$

A continuación presentamos un ejemplo de una modificación del modelo de oferta y demanda en el cual la función de del precio esperado es una función no lineal.

Ejemplo 4.3.2. Considere un mercado en el que se intercambia automóviles. Donde la demanda y la oferta de dicho mercado están especificadas de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} d(p_t) &= 10 - p_t \\ s(p_t) &= 22 + 4p_t^e. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Suponiendo adicionalmente que, las empresas ensambladoras de vehículos determinan cuantos automóviles sacar a la venta en el periodo actual en función a un estudio de mercado que arrojo que los precios se determinan por la función:

$$p_t^e = \frac{p_{t-1}^2}{4} - \frac{7p_{t-1}}{4} - \frac{2}{p_{t-1}}.$$

Requerimos saber:

(a) ¿Cuál es el precio de equilibrio del mercado con el cual se satisface la demanda y la oferta sin que haya excedentes?

(b) Suponiendo que los demandantes están solicitando automóviles a un precio de 3 unidades monetarias, ¿Es posible que con ese precio inicial se regule solo el mercado y llegue al precio de equilibrio, con el paso del tiempo?

Solución:

Antes de responder cada uno de los incisos, requerimos transformar las funciones del modelo de Oferta y demanda a una función recursiva que represente el sistema dinámico discreto que queremos analizar.

Para ello tomemos en cuenta que la función de oferta y demanda, respectivamente, son funciones lineales, pero los precios esperados son una función del precio de un periodo anterior. Por consiguiente, la función recursiva la vamos a plantear siguiendo el mismo desarrollo que en (4.2.2). Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} 10 - p_t &= -\frac{8}{p_{t-1}} + p_{t-1}^2 - 7p_{t-1} + 22 \\ p_t &= \frac{8}{p_{t-1}} - p_{t-1}^2 + 7p_{t-1} - 12 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Así, ahora estamos preparados para abordar cada una de las interrogantes planteadas.

a) El precio de equilibrio del mercado con el cual se satisface la demanda y la oferta, sin que existan excedentes del consumidor o del productor, se puede determinar gráficamente a través del diagrama tradicional del mercado (vea Figura 4.3.4), en el cual se interceptan ambas funciones.

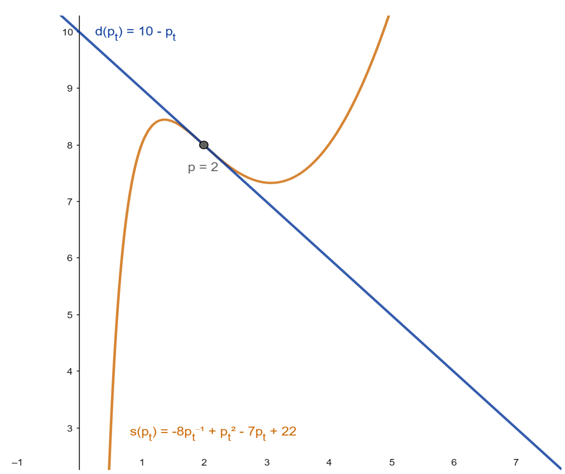


Figura 4.3.4: Diagrama tradicional del mercado: modelo no lineal.

Notemos que en la Figura 4.3.4 sólo tenemos un punto fijo, el cual es $p^* = 2$. El cual también se obtiene, en vista de lo que se hizo en (4.2.3), igualando la función recursiva (4.3.7) con la función identidad.

b) Ahora bien, para saber si es posible que con un precio inicial, el mercado se regule y regrese al precio de equilibrio requerimos conocer si el precio de equilibrio es un punto fijo atractor o repulsor.

Para ello primero requerimos calcular las tres primeras derivadas de (4.3.7). Esto es:

$$\begin{aligned} f(p_{t-1}) &= \frac{8}{p_{t-1}} - p_{t-1}^2 + 7p_{t-1} - 12 \\ f'(p_{t-1}) &= -\frac{8}{p_{t-1}^2} - 2p_{t-1} + 7 \\ f''(p_{t-1}) &= \frac{16}{p_{t-1}^3} - 2 \\ f'''(p_{t-1}) &= -\frac{48}{p_{t-1}^4} \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Evaluando las derivadas en (4.3.8) para el punto de equilibrio p^* se tiene que $f'(p^*) = 1$, $f''(p^*) = 0$ y $f'''(p^*) = -3 < 0$. En vista del Teorema 4.1.12, p^* es un punto fijo atractor.

Más aún, suponiendo que los demandantes están solicitando los bienes agrícolas a un precio de 3 unidades monetarias, veamos el comportamiento de la órbita tomando a $p_0 = 3$.

De lo anterior, para encontrar la solución del sistema dinámico discreto homogéneo, se sigue el procedimiento descrito en (4.2.4). Así, el sistema dinámico discreto homogéneo se obtiene al realizar la resta de la ecuación en (4.3.7) y el punto de equilibrio p^*. De esto, se tiene lo siguiente:

$$p_t - 2 = \frac{8}{p_{t-1}} - p_{t-1}^2 + 7p_{t-1} - 14 \tag{4.3.9}$$

Ahora bien, si suponemos la condición inicial, donde $t = 0$ y $p_0 = 3$, haciendo las iteraciones de (4.3.9), obtenemos que aproximadamente en la iteración número 10,000 la sucesión converge al punto de equilibrio $p^* = 2$.

En la Figura 4.3.5, podemos ver cual es el comportamiento de la órbita, resaltando que el punto fijo es un punto fijo atractor. Analizando dicha figura, notemos que los precios se van regulando al precio de equilibrio conforme pasa el tiempo. Aunque en un principio existe un exceso de demanda ésta se va disminuyendo y la cantidad de bien demandado es igual a la cantidad de bien que se ofrece.

Por lo tanto, aunque los demandantes de los automóviles estén tomando un precio por arriba del de equilibrio de mercado incentivando a que los oferentes produzcan más automóviles, el mercado se autorregulará para alcanzar el precio de equilibrio y eliminar el excedente de la demanda. $\diamondsuit$

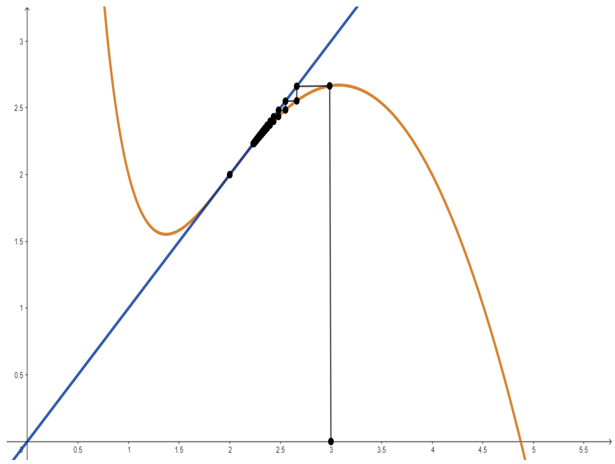


Figura 4.3.5: Diagrama de cobweb de oferta y demanda: modelo no lineal.

Sección 4.4

Aplicaciones del modelo keynesiano

Una vez desarrollado el modelo keynesiano de manera teórica, estamos preparados para abordar un ejemplo de una aplicación del modelo. Es preciso señalar que, la información para el desarrollo del ejemplo se han tomado de manera parcial de [34]. El ejemplo se desarrolla para una economía simple, es decir que supone que la inversión y el gasto de gobierno son endogénos, es decir no dependen del valor de la producción y no existe un intercambio con el mercado externo.

Ejemplo 4.4.1. Considere una economía simple en la cual las funciones que conforman la demanda agregada estan dadas por:

$$\begin{aligned} C_t &= 110 + 0.75Y_t \\ E_t &= C_t + 200 + 100 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Suponiendo adicionalmente que el exceso de demanda esta medida por la ecuación $\Delta Y_{t+1} = E_t - Y_t$. Tomando en cuenta lo anterior, si existe un desajuste en la economía que genera que los precios sean de 1,000 unidades monetarias, ¿cuantos periodos pasarán hasta que la economía se vuelva a ajustar en el punto de equilibrio?

Solución:

Antes de responder a la pregunta, requerimos transformar las funciones del modelo keynesiano a una función recursiva que represente el sistema dinámico discreto que queremos analizar.

Para ello, tomemos en cuenta que las funciones en (4.4.1), son funciones lineales y que el valor de $\lambda = 1$. Por consiguiente, la función recursiva se plantea como se sugiere en (4.2.9). Por lo tanto, se tiene que:

$$Y_{t+1} = (110 + 200 + 100) + (1 - (1 - 0.75))Y_t = 410 + 0.75Y_t. \tag{4.4.2}$$

Primero requerimos conocer cual es el punto de equilibrio para el sistema dinámico discreto que nos hemos planteado en (4.4.2). Para ello, en vista del análisis que se hizo en (4.2.8) el punto de equilibrio es:

$$Y^* = \frac{110 + 200 + 100}{1 - 0.75} = 1640. \tag{4.4.3}$$

Del punto de equilibrio Y^*, requerimos saber si es un punto fijo atractor o repulsor. En vista de la Observación 4.2.4 y por el Teorema 4.1.11 sabemos que del sistema dinámico discreto en (4.4.2) el punto de equilibrio Y^* es atractor, ya que $\lambda = 1$ y la primera derivada de (4.4.2) es menor que 1.

Más aún, suponiendo que el precio se registro para esta economía en 1,000 unidades monetarias, tenemos que en el tiempo $t = 0$ el nivel de ingreso nacional es $Y_0 = 1000$. Si planteamos la solución del sistema dinámico discreto homogéneo, tal como se propuso en (4.2.10), la función queda de la siguiente manera:

$$Y_{t+1} = 1640 + (0.75)^t(Y_0 - 1640).$$

Sustituyendo el valor de $Y_0 = 1000$, se tiene la ecuación recursiva del modelo.

$$Y_{t+1} = 1640 + (0.75)^t(-640) = 1640 - 640(0.75)^t. \tag{4.4.4}$$

Notemos que $\lim\limits_{t\to\infty} Y_{t+1} = 1640$. Así, al aplicar las iteraciones en (4.4.4), conformamos la órbita $\{1000, 1160, 1280, 1370, \ldots, 1639.99, 1640\}$, de la cual tenemos que en la iteración número 65 la sucesión converge al punto de equilibrio $Y^* = 1640$. Como podemos observar en la Figura 4.4.1.

Por lo tanto, después de 65 periodos la economía se ajustará nuevamente en el punto de equilibrio, con lo que no habrá desempleo. $\diamondsuit$

Finalmente, aunque el modelo de oferta y demanda y el modelo keynesiano se plantearon en la presente tesis como modelos lineales se pueden generalizar a funciones no

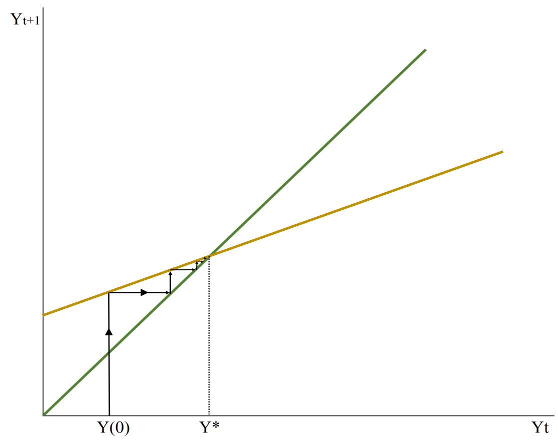


Figura 4.4.1: Diagrama de Cobweb del modelo keynesiano.

lineales pero al mismo tiempo se incrementará la complejidad del calculo de los puntos de equilibrio y el conjunto de las órbitas. La finalidad de haberlos planteados así era para hacer más ilustrativo el desarrollo de la dinámica en estos modelos clásicos.

Si bien estos modelos son parte de la teoría clasica, aun son utilizados en estudios de mercados o economías globales, ya que permiten visualizar el comportamiento de los precios con supuestos sencillos y con la inclusión de la dinámica que no existen en otros modelos económicos.

Conclusiones

En la presente tesis se desarrolló detalladamente la parte matemática de los procesos de Markov, el modelo de Leontief, el modelo de oferta y demanda y el modelo keynesiano, sin perder la relevancia de la teoría económica. Ésta investigación tuvo como objetivo general realizar un estudio sistemático de temas donde se relaciona la Matemática y la Economía, con la finalidad de exponer de manera clara y detallada, en ambas áreas del conocimiento, el planteamiento y desarrollo de modelos matemáticos aplicados a la Economía. En particular, se formalizaron algunos modelos que emplean álgebra lineal y sistemas dinámicos discretos. Para su cumplimiento fue necesario realizar los siguientes objetivos específicos.

El primer objetivo específico consistió en revisar los aspectos teóricos requeridos del álgebra lineal y de los sistemas dinámicos discretos empleados en el desarrollo de los modelos económicos propuestos; y se cumplió al detallar los conceptos del álgebra lineal, calculo diferencial y teoría económica que se requieren para el desarrollo de los modelos descritos en el Capítulo 1.

El segundo objetivo específico, fue analizar y formalizar la parte matemática referente al álgebra lineal y a la parte económica utilizadas en los procesos de Markov, lo cual se detalló en el Capítulo 2, al exponer los resultados que se utilizan para la aplicación de esta herramienta de la probabilidad que hace uso del álgebra lineal. Además, se describieron algunas aplicaciones a problemas de migración, interdependencia sectorial y preferencias de consumo.

El tercer objetivo específico, se cumplió a partir del análisis y formalización de la parte matemática referente al álgebra lineal y la parte económica utilizadas en el modelo de Leontief, lo cual se describe en el Capítulo 3; en el cual no sólo se precisó la parte matemática, sino que se enfatizó en la interpretación económica de los resultados utilizados. Más aún, se detalló la aplicación a una economía abierta y a una economía cerrada compuestas por tres sectores.

Finalmente, el cuarto objetivo específico se logró al revisar y destacar los detalles de la parte matemática alusiva a los sistemas dinámicos discretos y de la parte económica usados en los modelos de oferta y demanda y keynesiano, lo cual se puede observar en el Capítulo 4, donde detallamos algunas nociones de la dinámica empleados en estos modelos clásicos. Además, se incluyó aplicaciones de ambos modelos para ejemplificar el uso de los conceptos y resultados formalizados.

Sin embargo, es pertinente mencionar que aunque el objetivo general es poner al alcance un documento detallado en ambas áreas de la ciencia, el documento no cuenta con todos los pormenores económicos ya que se requiere la incorporación de otras áreas de la Matemática para justificar los conceptos económicos que escapan del objetivo de la tesis, además que cada uno de los modelos propuestos es sumamente extenso, por lo cuál queda como un posible trabajo a futuro.

Es importante destacar que la presente tesis es un aporte para solucionar la ausencia de detalles en la aplicación y desarrollo de la herramienta matemática en temas de la Economía, sin embargo, dicha problemática es extensa, por lo cual, para futuros trabajos de investigación se sugiere abordar o continuar con los mismos modelos, ya que sólo se planteó el desarrollo de los modelos originales, de los cuales existen modificaciones propuestas por autores que emplean nociones del álgebra lineal y sistemas dinámicos discretos más avanzados o de alguna otra rama de la Matemática.

Con esta investigación concluimos que la Matemática es parte fundamental de la ciencia económica porque permite la aplicación de los modelos económicos a la realidad y además facilita la comprensión de la teoría a partir de un estudio a profundidad de las bases matemáticas.

Índice alfabético

B
Bola abierta, 9

C
Coeficiente tecnológico, 60
Condición de productividad, 55
Contradominio, 10
Criterio de convexidad, 16

D
Demanda, 20
  agregada, 101
  exedente, 21
  externa, 21, 57
  función, 93
  intermedia, 57
  total, 57
Derivada, 13
  criterio de la primera, 14
Derivado de un conjunto, 13
Diagonal principal, 4
Diagonalización, 8, 27
Diagrama de Cobweb, 85
Dominio, 10

E
Economía abierta, 21
Economía cerrada, 21
Economía de mercado, 18
Equilibrio de la oferta y la demanda, 20, 58
Equilibrio general, 94
Espacio métrico, 9, 82

F
Función, 10
  cóncava, 11, 15, 16
  composición, 10, 83
  continua, 12
  convexa, 11, 15, 16
  creciente, 10, 14
  decreciente, 11, 14
  identidad, 10
  tienda, 86

I
Ingreso nacional, 101
Insumo, 18, 57
Iteracíon, 83

M
Métrica, 9, 82
Macroeconomía, 19
Matriz, 3
  coeficientes, 8, 59
  cuadrada, 4
  diagonal, 5, 25
  identidad, 5
  inversa, 6
  invertible, 27, 55
  Leontief, 60

no negativa, 54
nula, 5
positiva, 54
potencia, 6
productiva, 55
producto, 5
semejante, 7, 28
tecnológica, 59
transición, 28, 33
límite de la potencia de una matriz, 32
potencia, 30
transpuesta, 5
Microeconomía, 19
Modelo de Leontief, 56, 60
abierto, 60
cerrado, 60
Modelo de oferta y demanda, 92
Modelo keynesiano, 101

O
Oferta, 20
excedente, 21
función, 93
Órbita, 83

P
Precio esperado, 95
Principio de adición, 35
Principio de equilibrio, 19, 93
Principio de multiplicación, 35
Principio de optimización, 19, 93
Proceso
de Markov, 32, 33
estocástico discreto, 33
Producción bruta, 21, 57
Producto, 18, 57
Punto fijo, 84, 88
atractor, 88, 99
repulsor, 88, 99
Punto periódico, 92

S
Sistema de ecuaciones, 8, 59
homogéneo, 8, 60
no homogéneo, 8, 56, 60
Sistema dinámico discreto, 82
Sucesión, 16, 24
acotada inferiormente, 17
acotada superiormente, 16
convergencia, 17
creciente, 17
de potencias, 17
decreciente, 17
Sucesión de matrices, 24
límite, 24
límite de una sucesión de potencias de una matriz, 25, 27
potencias de una matriz, 25

T
Técnica de producción no derrochadora, 57
Tabla de tecnología de input-output, 59
Tabla input-output, 57

V
Valor propio, 7, 28
Vector
columna, 4
estado, 28, 30, 33
no negativo, 54
nulo, 5
positivo, 54
propio, 7
renglón, 4

Bibliografía

[1] F. Aleskerov, H. Ersel y D. Piontkovski, *Linear algebra for economists*, New York, USA: Springer, (2011).

[2] H. Anton, *Introducción al álgebra lineal*, 3ª edición, México: Editorial Limusa, (1993).

[3] R. Bellman, *Introducciíon al analisis matricial: un estudio de la moderna teoría de matrices*, México: Reverté, (1965).

[4] A. Berman y R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, vol. 9, Philadelphia, USA: Siam, (1994).

[5] E. F. Borisov, V. A. Zhamin, M.F. Makarova et alia, "Métodos matemáticos en la economía"en: *Diccionario de economía política*, Guatemala: Tratados y Manuales Grijalbo, (2009) 159-160.

[6] B. Ferguson y G. Lim, *Discrete time dinamic economic models: Theory and empirical applications*, 1ª edición, London: Routledge, (2003).

[7] E. Fontela y A. Pulido, "Tendencias de la investigación en el análisis input-output", *RAE: Revista Austriana de Economía*, no. 33, (2005) 9-29.

[8] J. B. Fraleigh y R. A. Beauregard, *Álgebra lineal*, México: Sistemas Técnicos de Edición, (1989).

[9] S. H. Friedberg, A. J. Insel, y L. E. Spence, *Linear algebra*, 4ª edición, Illinois, USA: Prentice Hall, (2003).

[10] R. T. Froyen, *Macroeconomía. Teorías y políticas*, 5ª edición, México: Prentice-Hall Hispanoamericana, (1997).

[11] V. M. Grijalva Altamirano, "Dinámica de funciones inducidas entre productos simétricos", *Tesis para obtener el grado de Maestro en Modelación Matemática*, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México, (2016).

[12] S. I. Grossman y J. J. Flores Godoy, *Álgebra lineal*, 7ª edición, México: McGraw-Hill, (2012).

[13] J. M. Henderson y R. E. Quandt, *Teoría microeconómica. Una aproximación matemática*, 3ª edición, Barcelona, España: Ariel, (1981).

[14] M. Hierro Franco y M. Guijarro Garvi, "Una revisión de la aplicación de las cadenas de Markov discretas al estudio de la movilidad geográfica", *Estadística Española*, vol. 49, no. 166, (2007) 473-499.

[15] W. W. Hines y D. C. Montgomery, *Probabilidad y estadística para ingeniería y administración*, 2ª edición, México: Compañía editiorial continental, (1996).

[16] I. L. Iribarren, *Topología de espacios metricos*, México: LIMUSA, (2008).

[17] J. E. King Dávalos y H. Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, 2ª edición, México: Facultad de Ciencias de la UNAM, (2014).

[18] D. C. Lay, *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, 4ª edición, México: Pearson, (2012).

[19] P. L. Meyer, *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*, México: Fondo Educativo Interamericano, (1973).

[20] P. L. Meyer, *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*, edición revisada, México: Addison-Wesley Iberoamericana, (1992).

[21] R. E. Miller y P. D. Blair, *Input-Output analysis*, 2ª edición, New York, USA: Cambridge University Press, (2009).

[22] F. Mochón Morcillo y V. A. Beker, *Economía: principios y aplicaciones*, 4ª edición, México: McGraw-Hill, (2008).

[23] V. M. Muñoz López, "Funciones del tipo mezclante en hiperespacios", *Tesis para obtener el título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas*, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México, (2016).

[24] D. Novick, P. A. Samuelson, L. R. Klein et alia, "Una discusión sobre el método matemático en economía", *Revista de Economía Política*, vol. 1, no. 2, (1955) 406-464.

[25] M. Parkin, *Macroeconomía*, 7ª edición, México: Pearson Educación, (2007).

[26] M. Parkin, *Microeconomía. Versión para Latinoamérica*, 9ª edición, México: Pearson Educación, (2010).

[27] M. Puchet Anyul y L. F. Punzo, "La tabla de insumo-producto desde una perspectiva dinámica estructural. En homenaje a Wassily Leontief", *Investigación económica*, vol. 61, no. 238, (2001) 13-35.

[28] C. Rabanal, "Análisis de la convergencia económica internacional en el período 1950-2009", *Revista de Economía Mundial*, no. 31, (2012) 167-197.

[29] J. C. Ramírez y D. Juárez, "La nueva escalada matemática. El impacto reciente de la teoría de sistemas dinámicos en economía", *Economía Mexicana Nueva Época*, vol. XVIII, no. 1, (2009) 71-103.

[30] L. Rincón, *Introducción a los procesos estocásticos*, México: UNAM, (2012).

[31] R. Roca, "Breve historia de la Macroeconomía", Paper, *Universidad Nacional Mayor de San Marcos*, Peru, (2015).

[32] A. P. Samuelson y W. D. Nordhaus, *Economía*, 18ª edición, México: McGraw-Hill, (2006).

[33] A. R. Schuschny, *Tópicos sobre el modelo de Insumo-Producto: teoría y aplicaciones*, Santiago de Chile: Naciones Unidas CEPAL, (2005).

[34] R. Shone, *Economic dynamics. Phase diagrams and their economic application*, 2ª edición, New York, USA: Cambridge University Press, (2002).

[35] R. Shone, *An introduction to economic dynamics*, 1ª edición, New York, USA: Cambridge University Press, (2003).

[36] M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal*, 2ª edición, México: Reverté Ediciones, (1996).

[37] H. R. Varian, *Microeconomía intermedia. Un enfoque actual*, 7ª edición, Barcelona, España: Antoni Bosch, (2006).

[38] F. Venegas-Martínez, "Procesos markovianos en la toma de decisiones: contribuciones de Onésimo Hernández-Lerma", *Morfismos*, vol. 16, no. 2, (2012) 1-28.

[39] *Matriz Calculator*. [Software] (2017). Recuperado de: https://matrixcalc.org/es/