



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA
MIXTECA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CONTROL DE FORMACIÓN DE ROBOTS MÓVILES DE
AUTOBALANCEO DE DOS RUEDAS

Tesis para obtener el grado de
Doctor en Robótica

Presenta:

M.C. Oscar David Ramírez Cárdenas

Director de Tesis:

Dr. Jesús Linares Flores

(Universidad Tecnológica de la Mixteca)

Co-director de Tesis:

Dr. José Fermi Castellanos

(Benemérita Universidad Autónoma de Puebla)

H. Cd. de Huajuapán de León, Oaxaca, México, Febrero del 2020

Sinodales:

Dr. José Aníbal Arias Aguilar
Dr. Carlos García Rodríguez
Dr. Edgardo Yescas Mendoza
Dr. Jorge Luis Barahona Avalos
Dr. Miguel Gabriel Villarreal Cervantes

Directores:

Dr. Jesús Linares Flores
Dr. José Fermi Guerrero Castellanos

Dedicatoria

Con mucho cariño a:

Mis padres y hermanos, especialmente a mi madre Eugenia por su apoyo incondicional en todos mis proyectos y metas, por ser el motivo de nunca rendirme, por darme todo lo posible en su vida.

Agradecimientos

Principalmente a ti madre por el apoyo que me has brindado, por darme las fuerzas para seguir adelante aún en los momentos más oscuros y difíciles. Por tu amor incondicional y darme todo lo posible para que yo pudiera completar este objetivo, aun con todas las necesidades y carencias. No hay palabras suficientes para agradecerte, y solo decirte "¡¡Gracias madre, lo conseguimos!!".

A ustedes mis queridos hermanos Erick (manto) y Eugenia (manta), que aún con nuestra diferencia de opiniones, me han demostrado lo que es el respeto, apoyo y cariño entre hermanos, y que en vez de alejarnos con los años, nos vamos uniendo más. Gracias por confiar en mi nuevamente y apoyarme en esta etapa.

A ti Jero, por estar cuando necesito un consejo, por mostrarme lo que es humildad, has sido un padre para mi sin que tuvieras la obligación de hacerlo, por eso te admiro y te doy las gracias.

Al Dr. Jesús Linares Flores, director de la presente tesis, por el apoyo y tiempo concebido en el desarrollo de esta tesis. Gracias por su amistad y apoyo desde la maestría.

Al Dr. José Fermi Guerrero castellanos, co-director de la presente tesis, por la dedicación y esfuerzo otorgado al trabajo de tesis y trabajos relacionados. Gracias por los consejos académicos y personales, que fueron fundamentales para mi desarrollo personal.

A mis grandes amigos de la familia Sandoval Luna, que me consideraron parte de su familia y me abrieron las puertas de su casa desde que me conocieron, y que me apoyaron en varios aspectos de mi vida.

Un especial agradecimiento a Selene, que me apoyó en la carrera, maestría y doctorado. Por su comprensión, paciencia, y los ánimos que me dabas que siempre me ayudaron a salir de los momentos más difíciles y complicados. Jamás podré pagar todo lo que me diste, por eso muchas gracias. Parte de este logro, es tuyo también.

A doña Oly, doña Mary, Tania, Mario, Celes y Carmen, grandes amigos que me apoyaron en el proceso del doctorado. Gracias por su amistad.

A mis compañeros Tommy, Julian, Samuel, Jonathan, Alex, Donato, Edgar y Arturo. Con los que compartí parte del doctorado y que me ayudaron a ser más tranquilo todo el proceso y por ser mis compañeros de laboratorio. Gracias por los buenos momentos que me hacían bajar el estrés.

Agradezco también a CONACYT por el apoyo económico brindado (Becario No. 302610), ya que sin este apoyo no hubiera sido posible mi estadía en el doctorado.

Resumen

El presente trabajo de tesis trata sobre el desarrollo de un control distribuido mediante una comunicación asíncrona disparada por eventos aplicado al problema de consenso y formación en el plano de un grupo de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI). Se presenta el modelo matemático no lineal de los RMPI que incluye la dinámica de los actuadores cuando solo se desplaza en línea recta y en el plano, así como el modelo lineal alrededor de un punto de operación en ambos casos. De ahí, mediante la parametrización diferencial proporcionada a través de la salida plana, se propone una ley de control distribuida tipo descentralizada, y se desarrolla un algoritmo disparado por eventos que permite decidir si es necesario que el agente i -ésimo comunique su estado a sus vecinos. La estrategia propuesta resuelve el problema de consenso en su configuración líder-seguidor. La topología de comunicación se basa en grafos direccionados y fuertemente conectados. Simulaciones computacionales y resultados experimentales validan la capacidad de la estrategia propuesta.

Índice general

Lista de Acrónimos	xiv
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Planteamiento del problema	10
1.2.1. Aportaciones	11
1.3. Justificación	12
1.4. Hipótesis	13
1.5. Objetivos	13
1.6. Organización de la tesis	14
2. Fundamentos Teóricos	17

2.1. Teoría de Grafos	17
2.2. Consenso de Sistemas Multiagentes	21
2.3. Planitud Diferencial	25
2.3.1. Sistemas SISO LTI	25
2.3.2. Sistemas MIMO LTI	26
2.4. Control disparado por eventos	28
2.4.1. Comunicación entre agentes basada en eventos	30
3. Robot Móvil tipo Péndulo invertido	33
3.1. Modelado del Sistema RMPI	33
3.2. Diseño del control para el Robot Movil tipo Péndulo Invertido (RMPI)	38
3.2.1. Resultados de simulación	41
3.2.2. Resultados Experimentales	45
3.3. Control de consenso de múltiples RMPI	48
3.3.1. Control basado en planitud y comunicación basada en eventos	48
3.3.2. Implementación de la estrategia de control	52
3.4. Resultados	54

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XI
3.4.1. Resultados a nivel simulación	54
3.4.2. Consenso con un líder con posición constante	54
3.4.3. Consenso con un líder con posición lineal variante en el tiempo	57
3.4.4. Consenso en tiempo continuo vs Consenso basado en eventos	58
3.4.5. Resultados Experimentales	61
4. RMPI: Desplazamiento en el plano	69
4.1. Modelado del Sistema RMPI	70
4.1.1. Modelado Cinemático del Sistema RMPI	70
4.1.2. Modelado Dinámico del Sistema RMPI	71
4.2. Diseño del control para el RMPI	79
4.2.1. Modelo Linealizado del sistema RMPI representado mediante la salida plana.	81
4.2.2. Resultados de Simulación	83
4.3. Control de múltiples RMPI	86
4.3.1. Consenso de Múltiples RMPI basado en planitud diferencial en el plano y comunicación basada en eventos	88
4.3.2. Prueba de Estabilidad: Comunicación disparada por eventos	89

4.3.3. Implementación de la estrategia de control	94
4.3.4. Resultados a nivel Simulación	95
5. Conclusiones y trabajo futuro	103
5.1. Conclusiones	103
5.2. Trabajo Futuro	104
A. Publicaciones	117
B. Estancia Nacional	125

Lista de Acrónimos

BDCM *Brushless DC Machine*

BUAP Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FEM Fuerza Electromotriz

FCL Función Candidata de Lyapunov

CINVESTAV Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

DSP *Digital Signal Processor*

EKF *Extended Kalman Filter*

FPGA *Field Programmable Gate Array*

GPIO *General Purpose Input/Output*

GPS *Global Positioning System*

ITESM Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

ITP Instituto Tecnológico de la Paz

ISS *Input-to-State Stability*

LQR *Linear Quadratic Regulator*

MEMS Múltiples Entradas y Múltiples Salidas

MIMO *Multiple-input Multiple-output*

MSI *Minimal Sampling Interval*

PD Proporcional Derivativo

PI Proporcional Integral

PID Proporcional Integral Derivativo

PSO *Particle Swarm Optimization*

PWM *Pulse Width Modulation*

RMPI Robot Movil tipo Péndulo Invertido

Segway PT *Segway Personal Transporter*

SLAM *Simultaneous Localization And Mapping*

SMA Sistemas Multiagentes

UNAM Universidad Autónoma de México

UTM Universidad Tecnológica de la Mixteca

Índice de figuras

1.1. Robots móviles de dos ruedas de autobalanceo	2
1.2. Segway Transporte Personal	3
1.3. El movimiento colectivo de los animales depende del comportamiento individual de cada uno de los miembros y es diferente para las diferentes especies: a) Cardumen respondiendo a un depredador. b) Parvada de patos en migración. c) Manada de Ñus en migración.	5
1.4. Esquemas de arquitecturas de control	6
2.1. Grafo fuertemente conectado y balanceado	18
2.2. Grafo dirigido balanceado	18
2.3. Grafo no dirigido	18
2.4. Grafo no dirigido de cuatro agentes	20
2.5. Esquemas de control (Síncrono y Asíncrono)	29

3.1. Sistema de referencia y variables del sistema	34
3.2. Sistema representado en cadena de integradores.	41
3.3. Respuesta de los estados del RMPI.	42
3.4. Control aplicado por el RMPI y Perturbación aplicada.	43
3.5. Respuesta de los estados del RMPI.	43
3.6. Control aplicado por el RMPI y Perturbación aplicada.	44
3.7. Robot Móvil tipo Péndulo Invertido (RMPI).	45
3.8. Programación de la tarjeta TMS320- F28335 en el entorno de Matlab/Simulink.	46
3.9. Respuesta de los estados del RMPI.	47
3.10. Respuesta del control aplicado por el RMPI.	47
3.11. Diagrama general de cada agente.	53
3.12. Grafo dirigido.	53
3.13. Respuesta de los estados de los 5 agentes.	55
3.14. a) Evolución de las señales de control de los cinco agentes, b) Evolución del número de eventos disparados.	55
3.15. Eventos realizados por los 5 agentes.	56

3.16. Respuesta de los estados de los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria.	57
3.17. Respuesta de los controles de los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria.	59
3.18. Eventos realizados por los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria.	60
3.19. Integral del error cuadrático de las 5 pruebas.	61
3.20. Respuesta de los estados de los 5 agentes ante las referencias dadas.	62
3.21. Respuesta de los controles de los 5 agentes.	63
3.22. Eventos realizados por los 5 agentes.	64
3.23. Conteo de eventos realizados por los 5 agentes.	64
3.24. Energía consumida en la comunicación.	65
3.25. Datos obtenidos transmitidos por el RMPI y datos obtenidos por el sistema Optitrack.	66
4.1. Diagrama de cuerpo libre del RMPI.	70
4.2. Respuesta de los estados x_1, x_3, x_5	84
4.3. Comportamiento del RMPI en las coordenadas x y y	84
4.4. Comportamiento de los controles y la perturbación aplicada al péndulo.	85
4.5. Desplazamiento realizado por el RMPI en el plano (x, y)	85
4.6. Grafo dirigido.	86

4.7. Relaciones de las distancias entre agentes.	87
4.8. Diagrama general del agente i	95
4.9. Entorno de simulación utilizado para los 5 RMPI y un líder virtual con comunicación disparada por eventos.	96
4.10. Respuesta de los 5 agentes en las coordenadas x, y con comunicación disparada por eventos.	97
4.11. Respuesta de los estados x_1, x_3, x_5 de los 5 agentes con comunicación disparada por eventos.	98
4.12. Eventos realizados por cada uno de los agentes.	99
4.13. Conteo de los eventos realizados.	99
4.14. Formación realizada por el conjunto de RMPI en el plano (x, y) , con comunicación disparada por eventos.	100
4.15. Energía consumida en la comunicación.	101

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo que ha tenido en los últimos años la robótica ha resaltado la importancia del uso de sistemas autónomos móviles en aplicaciones como la automatización, tareas de reconocimiento, supervisión de zonas de desastre, el transporte de cargas industriales, etc. Sin embargo, en algunos casos el uso de un solo robot autónomo no resuelve una tarea en común de manera eficiente o resulta con un costo elevado. Recientemente se ha optado por resolver dichas aplicaciones con varios robots, lo cual resulta en ocasiones una solución más eficiente y más económica. El presente trabajo se enfoca en la investigación de nuevas estrategias de control para la cooperación entre un conjunto de robots. Se muestra un estudio relacionado con los controles que han sido aplicados a los robots móviles. Además, se muestra un estudio de los diferentes trabajos realizados para obtener el control cooperativo de sistemas multiagentes, así como las ventajas y desventajas de las diferentes topologías utilizadas.

1.1. Estado del arte

Dentro de las ramas que comprende la robótica se encuentran los denominados robots manipuladores y la robótica móvil. Los robots manipuladores tuvieron sus orígenes en la robótica industrial, en la mayoría de los casos cuando se habla de un robot industrial hacen referencia a un robot manipulador [1]. Es por esto que la mayoría de los libros de robótica abarcan temas exclusivamente sobre los robots manipuladores. Sin embargo, desde los años ochenta y noventa del siglo pasado, los llamados robots móviles han ido tomando gran im-

portancia. A diferencia de los robots manipuladores, los robots móviles se caracterizan por no estar sujetos o fijos, es decir, pueden desplazarse por la tierra, en el agua o incluso volar libremente. Los aspectos más relevantes de la robótica móvil son los que están relacionados con el desplazamiento autónomo o navegación del robot.

La robótica móvil tiene como meta principal lograr que el robot sea cada vez más independiente del operador, de modo que el operador sólo realice tareas de supervisión del comportamiento normal del robot, efectuar ajustes y correcciones [2]. Así pues, la problemática de un robot móvil es la navegación e interacción con el entorno, es decir, encontrar una trayectoria desde un punto de inicio a un objetivo basándose en sensores, planeación y control [3].

La mayoría de los robots móviles terrestres usan tres o más ruedas, debido a que éstos por su naturaleza resultan ser estables, aún sin tener control sobre ellos. Sin embargo, están limitados en su movilidad para desplazarse en un ambiente humano. Un robot de dos ruedas proporciona una movilidad excelente, ya que puede realizar movimientos rápidos y suaves, tales como girar instantáneamente sobre su propio eje [4]. A pesar de ello, este tipo de sistemas son de naturaleza inestable, ya que son sistemas subactuados, es decir, tiene menos actuadores que grados de libertad [5]. Este tipo de robots corresponden al principio del péndulo invertido, el cual es un problema clásico en la teoría de control de sistemas sub-actuados. Los robots de dos ruedas auto-balanceables contienen un sistema inercial, el cual permite monitorear posición, velocidad y aceleración, para poder implementar técnicas de control que estabilicen a este tipo de robots (ver Figura 1.1). Dicho sistema inercial es la base para diferentes aplicaciones tales como robots móviles aéreos, submarinos, sistemas anti-sismos, entre otros, donde la tarea radica en estabilizar la posición del sistema inercial. El péndulo invertido sobre base móvil es uno de los sistemas más conocidos y estudiados por la comunidad de robótica y control automático, ya que además de ser un sistema no lineal es un sistema subactuado y con restricciones holónomas [6, 7]. Por lo anterior, el péndulo invertido sobre base móvil representa un gran reto para los investigadores pasando desde los diferentes enfoques para la obtención de un modelo matemático, la identificación de parámetros, hasta la aplicación de diferentes técnicas de control y observación, dando lugar al desarrollo de nuevos e innovadores vehículos conocidos como RMPI los



Figura 1.1: Robots móviles de dos ruedas de autobalanceo

cuales constituyen un desafío para la teoría e ingeniería de control [8–10] y una inspiración para científicos y tecnólogos [11–13]. La movilidad urbana es un tópico de interés actual y en ese sentido los RMPI están jugando un papel muy importante, [14].

De ahí, surge el interés por lograr la construcción de un robot auto-balanceable de menor costo que sirva para el transporte personal [15–22], así como de tamaño a escala que sirva para implementar diferentes técnicas de control [23–27].



Figura 1.2: Segway Transporte Personal

En el caso particular de [15] y [16] en Australia, lograron la construcción de un robot móvil auto-balanceable de dos ruedas, al que llamaron "EDGAR CAR" capaz de transportar a una persona, se inspiraron en diseñar y construir un robot móvil que tuviera características similares a las del *Segway Personal Transporter* (Segway PT) (ver Figura 1.2), reduciendo el costo del móvil, mejorando el rendimiento de la energía e implementaron diferentes tipos de controladores con la ayuda de un giroscopio. Otro estudio realizado a este tipo de robot es el trabajo presentado por Umar Draz *et al.* [19], donde muestran el diseño, construcción y control del robot, así como el análisis de deflexión del material cuando el móvil está sujeto a una carga de 200 N, implementando el controlador en un dispositivo ATmega16.

En el 2014 en China, Muhammad *et al.* [20], presentaron un trabajo relacionado con la fabricación y modelación de un robot móvil de dos ruedas usando el principio de estabilidad dinámica. Aplicaron un controlador clásico Proporcional Integral Derivativo (PID) para estabilizar la postura del vehículo de auto-balanceo. Para la tracción eléctrica del robot utilizaron motores *Brushless DC Machine* (BDCM), controlaron el sentido de giro mediante un inversor trifásico y determinaron la posición del rotor mediante sensores de efecto *Hall* integrados en la estructura del motor.

En el 2019 en México, Curiel *et al.* [28] presentaron el diseño, construcción y control para el vehículo eléctrico de dos ruedas de auto-balanceo. Este control se calcula a través de la propiedad de planitud diferencial del sistema (controlabilidad). De ahí, la salida plana calculada linealiza al sistema entrada-salida alrededor del punto de operación del vehículo, el cual se mide a través de un inclinómetro. A conocimiento del autor, este trabajo es uno de los pocos que se basan en la propiedad de planitud diferencial para el vehículo eléctrico de dos ruedas de auto-balanceo.

Como se mencionó anteriormente, se han estado implementando diversos métodos y técnicas de control para mejorar la estabilidad de este tipo de robot tales como controles clásicos Proporcional Integral (PI), Proporcional Derivativo (PD), PID [15–20, 22, 23, 25, 26], Técnicas Modernas de Control [9], Espacio de Estados [11], [26], Control Adaptable [29], Control Óptimo (*Linear Quadratic Regulator* (LQR)) [23], así como la implementación de técnicas de control en el módulo *NXTway-GS de LEGO Ltd.* [23–25, 27]. Aprovechando los recursos del módulo, tal como: motores, sensores (ultrasónicos, de color, inclinómetro, magnetómetro) y comunicación Bluetooth, se consiguen mejoras importantes para el perfeccionamiento en la unidad de control, para el auto-balanceo y sentido de giro.

Por otro lado, en la década pasada la comunidad de robótica y control enfocó su atención en el control de un conjunto o red de vehículos que permitan desarrollar tareas de manera grupal y colaborativa, permitiendo de esta manera cumplir funciones que sería imposible llevar a cabo de manera individual, [30–32]. Cuando se considera el control de forma grupal de tales vehículos, cada uno de estos vehículos es considerado un agente y el control de los mismos se suscribe en el marco de trabajo más general del control de Sistemas Multiagentes (SMA), [33] o redes de sistemas robóticos, [34]. Un problema de control cooperativo de mucho interés es el consenso. De manera general, consenso significa llegar a un acuerdo respecto a una cantidad o un punto de interés y depende del estado de cada uno de los agentes implicados. Un algoritmo o protocolo de consenso es una interacción que especifica la manera en que la información debe ser intercambiada entre un agente y sus vecinos, los cuales a su vez están contenidos en la red e interconectados mediante una cierta topología de comunicación. Las estrategias de control cooperativo distribuido o descentralizado para el consenso de SMA han generado especial atención ya que proveen una solución atractiva al control de sistemas de gran escala, tanto en términos de complejidad en la formulación del problema, como en términos de la carga computacional requerida, [35].

Los sistemas robóticos grupales surgen de la observación del comportamiento social de los animales, tales como los peces, hormigas, aves, entre otros (ver Figura 1.3). Una aplicación importante del problema de consenso es lograr la formación de un grupo de robots, debido al comportamiento coordinado que esto requiere. Se han realizado estudios sobre diversos enfoques de algoritmos para el control de formaciones, tales como líder-seguidor, por comportamiento, líder virtual y teoría de grafos, etc. [36].

Existen dos principales clasificaciones para las arquitecturas de control, **centralizada** y **descentralizada** (ver Figura 1.4). La arquitectura centralizada supone que cada miembro de la red tiene la capacidad de comunicarse con una ubicación central o enviar información a través de una red completamente conectada. Sin embargo, el esquema centralizado puede resultar con algunas complicaciones, requiriendo la interrupción del sistema completo cuando

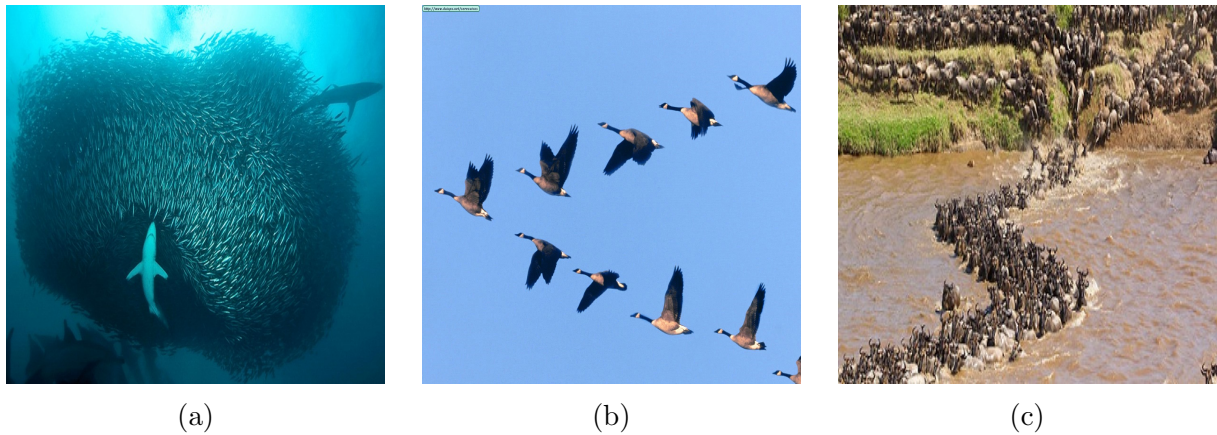


Figura 1.3: El movimiento colectivo de los animales depende del comportamiento individual de cada uno de los miembros y es diferente para las diferentes especies: a) Cardumen respondiendo a un depredador. b) Parvada de patos en migración. c) Manada de Ñus en migración.

ocurre una falla en cualquier punto de la red, de tal manera que los sistemas no se adaptan con eficiencia a los cambios del ambiente. Por otro lado, en un esquema descentralizado cada uno de los integrantes de la red contienen su propio control, lo que hace que se comporten como agentes autónomos. El control descentralizado se puede clasificar como **distribuido**, el término distribuido se refiere a que cada agente contiene su propio control, los agentes pueden ser homogéneos o heterogéneos. El **jerárquico** donde se presenta un orden de importancia en los niveles de control de los agentes permitiendo la existencia de un líder, quien impondrá señales de referencia deseadas para que los demás agentes generen sus acciones de control [37].

La idea fundamental del control de consenso es que cada agente determine su entrada de control basada en los estados de sus vecinos locales, de tal manera que los estados de todos los agentes converjan a un mismo valor. En los últimos años, se han presentado diversos resultados interesantes para resolver el problema de consenso en diferentes tipos de dinámicas de agentes y para diferentes tipos de tareas. A continuación se comentan algunos de estos trabajos.

En 1995 Vicsek *et al.* [38] proponen un modelo de tiempo discreto simple de agentes autónomos (como puntos o partículas) que se mueven todos en un mismo plano con la misma velocidad, pero con diferentes estados de posición. Los estados de cada agente se actualizan utilizando una regla local basada en el promedio de las posiciones de sus "vecinos" más su propia posición. Demuestran que la regla del vecino más cercano que están estudiando, puede causar que todos los agentes eventualmente se muevan en la misma direc-

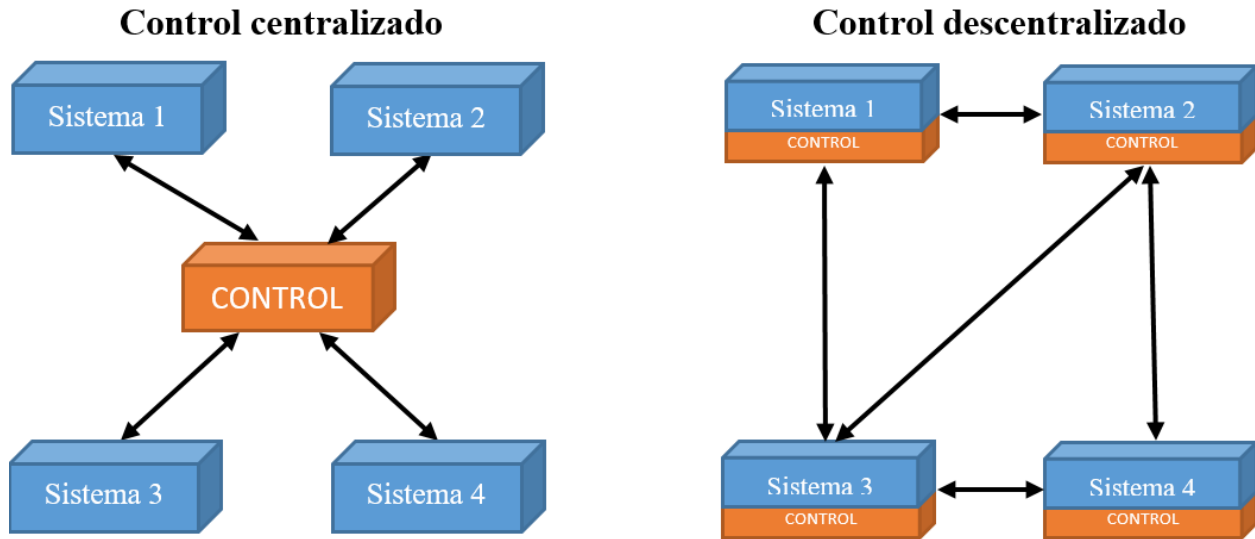


Figura 1.4: Esquemas de arquitecturas de control

ción, a pesar de la ausencia de la coordinación centralizada y a pesar de que cada conjunto de vecinos más cercanos cambien con el tiempo a medida que el sistema evoluciona [39]. En el 2003 Jadbabaie *et al.* [39], usan herramientas de la teoría del grafo algebraico para dar una explicación teórica del comportamiento de consenso, observado en los sistemas de partículas reportados en el trabajo de Vicsek [38]. Dos años más tarde, Moreau [40] propone un enfoque de Lyapunov para tratar el problema del consenso con enlaces de comunicación unidireccionales dependientes del tiempo. Los trabajos antes mencionados pueden considerarse como referencias clave que marcaron el camino para los avances en el concepto de consenso de los sistemas en red.

Existen dos problemáticas principales que se estudian en los algoritmos de consenso: sin liderazgo, es el que se refiere a que no existe un líder en la red y con liderazgo, el cual se refiere a que existe un líder que indica un estado deseado para los agentes que componen la red. En los últimos años, se han presentado estudios en problemas de consenso bajo una topología de red fija y una topología de red cambiante, en presencia o falta de retrasos de comunicación, con flujo de información de red dirigida y no dirigida. Estas suposiciones son presentadas en los trabajos de Olfati [41], Ren [42] y Murray [43] por mencionar algunos. Cabe mencionar que en la mayoría de los trabajos citados se centran en agentes con dinámicas de primer orden o de segundo orden. Los trabajos recientes de consenso para sistemas dinámicos de primer orden amplían más los resultados considerando ajustes más generales. Por ejemplo en el 2013, Terelius *et al.* [44] estudian el control de consenso para un sistema multiagente con un nodo defectuoso. En el mismo año Hu *et al.* [45] investigan un problema de consenso grupal con transmisiones discontinuas de información entre diferentes grupos de agentes dinámicos.

Por otro lado, el problema de consenso también se ha estudiado para sistemas de segundo orden que permiten utilizar dinámicas más complicadas. A diferencia de los sistemas de primer orden, los sistemas de segundo orden pueden fallar a pesar de utilizar una topología de grafo dirigido [46]. En [47] y [48] hacen un estudio de las condiciones suficientes que se deben cumplir para conseguir el consenso en un sistema de segundo orden. En los últimos años se han presentado algunos trabajos relacionados con sistemas de dinámica de segundo orden, por ejemplo [49–54]. De ahí, se observa que los algoritmos de consenso, revisados para el caso de los agentes dinámicos no lineales, no son sencillos, y en la literatura publicada existen pocos trabajos que tratan este problema. Prestando particular atención a los sistemas robóticos, se ha estudiado el problema de consenso en sistemas multi-robot mediante la topología líder-seguidor. De ahí, en el 2004 Rodríguez [55], propone un control por retroalimentación cuando sólo se dispone de mediciones de posición y un conjunto de observadores no lineales. En el 2011 Nuño *et al.* [56], consideran los retardos de tiempo constantes y ellos proponen un controlador adaptable. Del mismo autor, dos años posteriores Nuño *et al.* [57] y [58] presentan una solución para el caso de una red que no cuente con un líder, mediante controladores clásicos del tipo proporcional y proporcional derivativo.

La mayoría de las obras publicadas sobre el control de consenso de sistemas multiagentes se centran en sistemas lineales con dinámicas de primer orden y de segundo orden, y en lo que se refiere al control por consenso basado en agentes con dinámica no lineal existen pocos trabajos publicados. Una razón podría ser la dificultad de implementar los métodos clásicos de control de consenso aplicados en sistemas lineales a sistemas no lineales, debido a la existencia de incertidumbres paramétricas en los modelos.

En el 2009, Khoo S. *et al.* [59] realizan el seguimiento de tiempo finito de un sistema multi-robot utilizando un control por modos deslizantes. Configuran la red mediante la teoría de grafos y demuestran la estabilidad del controlador propuesto mediante la teoría de Lyapunov. De manera similar en el 2015, Bin Lei *et al.* [60] se basan en la teoría de grafos con una topología de control descentralizado proponiendo un algoritmo de control para el consenso de un enjambre de 5 robots. Demostraron la estabilidad del algoritmo mediante el criterio de estabilidad de Lyapunov considerando restricciones de entrada. Muestran resultados de simulación del algoritmo propuesto para el problema de formación. En el mismo año Ahmad Baranzadeh [61] consideran un control descentralizado para coordinación de movimiento en un grupo de 5 robots móviles, tal que los robots eventualmente se mueven en un patrón geométrico dado desde una posición inicial evitando obstáculos sobre sus rutas. Utilizan la teoría de grafos considerando que cada robot usa la información proporcionada de sus vecinos más cercanos. Justifican el desempeño de su algoritmo de control propuesto mediante resultados de simulación. Otro trabajo interesante es el presentado en el 2016 por Ching-Chih Tsai [62], donde utilizan la teoría de grafos con una topología líder-seguidor, obteniendo un control de consenso con la cual lograron la formación de 4 drones evitan-

do colisiones y obstáculos. Mediante resultados de simulación verifican que las técnicas de control por modos deslizantes y Lyapunov consiguen el control de la formación.

Si bien los trabajos mencionados resuelven el problema de consenso, no consideran posibles problemas en la comunicación entre los agentes debido a su implementación en simulación.

Por otro lado, existen trabajos que se han dado a la tarea de implementar de forma experimental este tipo de algoritmos de consenso. Tal es el caso del trabajo presentado por Joshua Cook et. al. [63], donde presentan un control cooperativo mediante estimación de estados para el control de la formación basada en visión de robots móviles. Donde cada robot sólo puede medir parte de la información del estado relativo, mientras que el resto de la información es medida mediante los otros robots. Cada robot fue equipado con una computadora y una cámara abordo, para realizar una formación triangular.

Algunas de las aplicaciones de este tipo de control ha sido en sistemas de transporte de cargas a través de varios robots. Por ejemplo, Gustavo Montemayor [64] realiza un control colaborativo descentralizado con el objetivo de transportar una carga mediante múltiples robots. Utiliza un control PD y se basan en el criterio de estabilidad de Lyapunov. Muestra resultados a nivel simulación con tres brazos robóticos, y también muestra resultados experimentales con dos brazos robóticos.

En México también se está comenzando a atacar el problema de consenso, tal es el caso del trabajo presentado por Argel Vega [65], donde él desarrolla un control cooperativo para la formación de 3 robots móviles aéreos, utilizando la teoría de grafos y la técnica de control disparado por eventos, donde se logra resolver un problema de consenso. Utiliza un sistema de captura de movimiento de la firma VICON, que consiste en un sistema de 12 cámaras infrarrojas, que proporciona la posición de cada agente mediante un algoritmo de procesamiento de imágenes. Obtiene resultados satisfactorios a nivel experimental.

También en México, Soledad Ramírez [37] desarrolló un control disparado por eventos para estabilizar el valor del consenso promedio de las condiciones iniciales, para un sistema multiagente de robots móviles (3,0). Utilizó la teoría de grafos y una topología de control centralizada. Obtuvo resultados a nivel simulación.

Como se puede apreciar, los SMA están equipados con sistemas de cómputo embebidos, actuadores mecánicos, sensores, sistemas de comunicación, entre otros, y con una capacidad

de energía limitada. En algunas aplicaciones el excesivo consumo de energía y cómputo podrían hacer que el sistema no realice la tarea de manera satisfactoria. Interesados en solucionar este problema, investigadores en el área de sistemas multiagentes han planteado resolver el problema directamente en el diseño del control, esto con la finalidad de mejorar el desempeño de los sistemas embebidos utilizados en las redes multiagentes permitiendo un aprovechamiento racional y coordinado de los recursos disponibles de la red. De esta manera, los recursos energéticos limitados de los agentes se pueden ahorrar en gran medida y la vida operativa de los SMA se puede extender [66].

Dentro de este enfoque, algunos trabajos han abordado el manejo adecuado de los recursos de cómputo y comunicación, mediante comunicación basada en eventos también llamadas disparados por eventos o muestreo de Lesbesgue. Con dicho paradigma la información se transmite sólo cuando es absolutamente necesario, es decir, cuando la dinámica del sistema cambia, *i.e* cuando ocurre algún evento. Recientemente, ha incrementado la popularidad de las estrategias de control basadas en eventos aplicados a los sistemas formados en red, especialmente debido a su característica aperiódica que permite que la señal de control sea actualizada de forma asíncrona, [67,68]. Un excelente panorama al control basado en eventos se da en, [69]. La idea central se basa en la actualización del control únicamente cuando existe un evento, en lugar de realizarse de forma periódica. El evento ocurre si se satisface una condición predefinida, llamada función de evento y la cual está directamente relacionada con la salida del sistema, con los estados o con la evolución de una función de Lyapunov de Control asociada al sistema [70–72]. Es así como en el contexto del control distribuido, el esquema de control basado en eventos representa una alternativa para reducir el ancho de banda de la comunicación, el uso de recursos computacionales y de hardware en la red multiagente.

Numerosos trabajos han estudiado y desarrollado algoritmos de control con el enfoque basado en eventos, orientados hacia el consenso, formación o sincronización de sistemas dinámicos lineales y no lineales. En [73] se aborda el problema de consenso para un sistema multiagente y donde el agente es representado por un integrador simple. La topología de comunicación es representada por un grafo no dirigido. Dicho trabajo se extiende en [74], al caso de control de consenso promedio mediante una comunicación entre agentes disparada por eventos y donde los agentes se representan como el integrador y el doble integrador. En [75–77] se presenta el problema de consenso para SMA con dinámica lineal y usando topología de comunicación mediante grafos dirigidos. El problema de formación de SMA en red a través de un mecanismo de comunicación basado en eventos que permite reducir la transmisión de datos entre los agentes mediante funciones de evento dinámicas se estudia en [78]. Como se puede notar, el común denominador de estas estrategias de control se basa en optimizar el funcionamiento de los SMA mediante el uso eficiente de los canales de comunicación. La principal diferencia entre ellos es el diseño de la condición o función de

evento.

1.2. Planteamiento del problema

Como se vio al inicio de la sección, el uso de sistemas robóticos de dos ruedas de auto-balanceo permiten una movilidad de 360 grados, debido a que es un sistema omnidireccional terrestre el cual puede girar sobre su propio eje. Además, es práctico en espacios pequeños, ya que utiliza solo dos motores lo que implica un consumo de baja potencia, en comparación con sistemas de 4 motores, contribuyendo a la eficiencia energética.

A pesar del gran avance realizado en el control de sistemas tipo péndulo invertido ([15]-[27]), se investigó y analizó que son pocos los trabajos que se enfocan en técnicas de control basadas en planitud diferencial (ver [28,79]). Esto debido a la complejidad del sistema RMPI, siendo un sistema altamente no lineal de tipo sub-actuado de Múltiples Entradas y Múltiples Salidas (MEMS) o del inglés *Multiple-input Multiple-output* (MIMO).

Por otro lado, recientemente, se ha reportado en la literatura, algunos trabajos sobre algoritmos de consenso aplicados en diferentes sistemas, tales como robots móviles aéreos, terrestres, brazos robóticos, entre otros [36–48, 51–54, 54–58, 60–65, 80], donde una de las aplicaciones más importantes que se les ha dado es la formación de patrones. En la mayoría de estos sistemas multiagentes se utilizan sistemas autónomos equipados con actuadores, sensores, sistemas de cómputo embebidos y sistemas energéticos. Si consideramos que en los diferentes esquemas multiagentes, cada agente debe medir su estado, transmitirlo a sus vecinos y actualizar la señal de control de manera continua o por un tiempo de muestreo establecido, las leyes de control podrían llegar a ser poco prácticas en diferentes aplicaciones por el excesivo consumo de energía o poca autonomía. Es por lo anterior que es deseable diseñar esquemas de control multiagente, tal que el consumo de energía producido por la comunicación entre los agentes sea reducida de manera significativa.

Existe un número importante de trabajos que utilizan la teoría de grafos para caracterizar la topología de comunicación entre los agentes, lo cual permite definir la matriz Laplaciana la cual es usada para el análisis de estabilidad vía el formalismo en el sentido de Lyapunov. Además, en la mayoría de los trabajos presentados no se ha aplicado el enfoque de control cooperativo para la formación de múltiples RMPI. Esto debido a la dificultad que existe en controlar tanto el desplazamiento de cada uno de los robots, como el de la correcta postura de cada uno de ellos. Uno de los trabajos donde se ha comenzado a resolver el problema de consenso, donde se emplean sistemas RMPI es en [81], en este trabajo se realiza un control

cooperativo tipo líder seguidor virtual para la formación de dos robots móviles de dos ruedas y un RMPI, mediante un control Backstepping y un control por modos deslizantes. Si bien es cierto que la metodología propuesta realiza la formación de los robots, solo se preocupa por la postura de uno de ellos.

Bajo este marco de referencia, este trabajo plantea diseñar e implementar de forma experimental un algoritmo descentralizado de consenso, para un grupo de robots móviles de auto-balanceo de dos ruedas denominados RMPI bajo un esquema de control basado en la propiedad de planitud diferencial, o que es lo mismo, para sistemas diferencialmente planos. Además, con la necesidad de reducir el consumo de energético en la etapa de comunicación, se apoyará del principio del esquema de control disparado por eventos.

1.2.1. Aportaciones

El presente trabajo se enfoca en el diseño de una estrategia de control de auto-balanceo y un control distribuido con comunicación activada por eventos, para el consenso de un conjunto de RMPI. El objetivo es estabilizar la postura de cada RMPI y realizar el consenso de la posición en el sistema de referencia del móvil, tal que todos los agentes converjan a la dinámica impuesta por un líder. Para ello se consideran las ecuaciones de movimiento de los RMPI, las cuales incluyen la dinámica de los actuadores, esto con la finalidad de que la ley de control resultante esté en función del voltaje que debe ser aplicado a cada actuador. La linealización de dichas ecuaciones alrededor del punto de equilibrio, permiten explotar las propiedades de planitud diferencial de los RMPI ([82]).

Así entonces, y a diferencia de los trabajos generalmente reportados donde los controladores tipo PID o LQR son aplicados, la planitud diferencial nos permite reparametrizar al sistema mediante su salida plana, de tal forma que el sistema RMPI se transforma en una cadena de integradores de cuarto orden [83] y sexto orden [84], incorporando de esta manera a los sistemas RMPI en los sistemas multiagentes. Esto representa una de nuestras aportaciones a esta área de la robótica.

La estrategia propuesta generaliza el trabajo de [74] al caso general de sistemas con dinámica lineal, con comunicación entre agentes mediante una topología expresada por grafos dirigidos y resuelve el problema de consenso con líder de manera natural para el grupo de RMPI [85]. Esto representa otro importante aporte a esta área.

Los productos de investigación que resultaron de las aportaciones antes mencionadas,

publicados en congresos y revistas, son los siguientes:

- J.F. Guerrero-Castellanos, A. Osorio-Orduña, **O.D. Ramírez-Cárdenas**, J. Linares-Flores, G. Curiel-Olivares and A.M. Garcia-de-Dionisio, G. Mino-Aguilar, V. González-Díaz, H. Sira-Ramírez y M. Contreras-Ordaz, M., "Estimación y control de la postura del vehículo de auto balanceo: LoboMixci", Congreso Mexicano de Robótica, Mazatlán, Sinaloa 2017.
- **O.D. Ramírez-Cárdenas**, J.F. Guerrero-Castellanos, J. Linares-Flores, y S. Durand, "Control distribuido asíncrono de múltiples robots tipo péndulo invertido vía una estrategia basada en eventos", Congreso Nacional de Control Automático, San Luis Potosí 2018.
- **O. Ramírez Cárdenas**, J. Guerrero-Castellanos, y J. Linares-Flores, "Control de formación de múltiples robots móviles de auto-balanceo vía una comunicación disparada por eventos," Congreso Nacional de Control Automático, Puebla, 2019.
- **O.D. Ramírez-Cárdenas**, J.F. Guerrero-Castellanos, J. Linares-Flores, S. Durand, y W.F. Guerrero-Sánchez, "Control descentralizado basado en eventos para el consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido en el esquema líder-seguidor; Decentralized event-based leader-following consensus for a group of two-wheeled self-balancing robots", Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, 2019.

1.3. Justificación

Actualmente una de las problemáticas a las que se enfrenta la robótica móvil es resolver problemas en los cuales la participación de un sólo robot especializado, no es suficiente para resolver el problema, o resulta ser muy costoso en términos de diseño, control y tiempo. Por ejemplo el transporte de objetos pesados, el manejo de material peligroso, la exploración de un entorno, sistemas militares (formación de vuelo, vigilancia, reconocimiento, ataque y encuentro cooperativo, búsqueda y rescate) por mencionar algunos, al dividir las tareas entre varios robots el trabajo se realiza de una manera más rápida y eficiente [30, 46, 86]. Una de las ramas que ha llamado la atención de los investigadores en el área, es la de realizar formaciones con una red de robots para llevar a cabo las diferentes tareas antes mencionadas. En la literatura se mencionan diversos métodos para resolver el problema de formación de robots, donde se destacan tres principales estructuras: líder-seguidor [87, 88], por comportamiento [86, 89–91], líder virtual o estructura virtual [92–94].

Una red de robots es un sistema multi-robot interconectado. Esta interconexión es modelada por la teoría de grafos, donde cada robot está representado por un nodo y el flujo de información entre robots está representado por un borde.

Se ha visto que en los últimos años, el uso de algoritmos de control cooperativo han enfocado su atención a los sistemas robóticos móviles. Además, en este trabajo de tesis, se introducen conceptos de planitud diferencial al control cooperativo dando como resultado una variante para resolver la interacción entre sistemas con dinámica de orden superior, de una manera sencilla. Se propone utilizar una configuración de comunicación descentralizada entre los agentes. Así, cada agente tomará las decisiones basadas en la información de los otros agentes y no de un controlador central. De esta forma, el sistema será robusto ante perturbaciones y falla de un controlador central.

1.4. Hipótesis

Basado en la propiedad de planitud diferencial (sistemas diferencialmente planos) y un esquema de comunicación disparado por eventos, se puede realizar un control cooperativo para un conjunto de N robots de auto-balanceo de dos ruedas, que permita realizar formaciones en el plano horizontal de los robots, todo ello asumiendo un ambiente controlado (plano horizontal, sin pendientes ni obstáculos).

1.5. Objetivos

El objetivo principal del trabajo es realizar un control de auto-balanceo, desplazamiento y formación de múltiples RMPI en el plano, utilizando la propiedad de planitud diferencial del sistema en combinación con una función de evento y un algoritmo de consenso. La función de evento diseñada está en función de la dinámica de los agentes y decide cuando el agente transmite su información a los vecinos con los que existe comunicación, mientras que el algoritmo de consenso se encarga del consentimiento de todos los robots para llevar a cabo su formación pre-especificada.

Objetivo general

- Implementar un control para la formación de un conjunto de N robots de tipo sub-actuado de auto-balanceo, basándose en la propiedad de planitud diferencial y donde la comunicación entre los robots se lleva a cabo mediante una estrategia disparada por eventos

Objetivos particulares

- Obtener el modelo cinemático y dinámico del robot sub-actuado.
- Diseñar un algoritmo de control para la estabilización (regulación) de la postura del robot sub-actuado.
- Diseñar un algoritmo de control descentralizado para la formación de un conjunto de robots auto-balanceados.
- Evaluar en tiempo real el desempeño de los algoritmos desarrollados bajo un ambiente controlado.

1.6. Organización de la tesis

El trabajo de tesis se enfoca al estudio de los sistemas RMPI el cual está representado mediante un sistema de cuarto orden y sexto orden. Se propone la incorporación de la propiedad de planitud diferencial a los esquemas de control distribuido, la cual usa una comunicación asíncrona donde el sistema multiagente puede ser controlado reduciendo el consumo energético en la comunicación.

En el capítulo 2 se estudian los fundamentos teóricos de la técnica de control basada en planitud diferencial y los sistemas de control colaborativos. Además, se realiza una introducción acerca de la teoría de grafos, la cual ayuda a comprender como está interconectada la red de comunicación. Se presenta también conceptos básicos sobre el control basado en eventos, el cual es utilizado en este trabajo para la comunicación entre agentes. En el capítulo 3 se desarrolla el modelo del robot móvil de autobalanceo de dos ruedas autónomo, con la restricción de solo desplazarse a lo largo de un solo eje del plano horizontal, lo que resulta en un sistema de cuarto orden. El capítulo 4, extiende los resultados obtenidos en el capítulo 3 al permitir que el RMPI pueda desplazarse de manera autónoma en el plano. Lo anterior

resulta en un sistema de sexto orden MIMO. Finalmente, las conclusiones y perspectivas de todo el trabajo se establecen en el capítulo 5.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

En este capítulo se exponen los fundamentos teóricos que se toman como base para realizar este trabajo de investigación. Se introducen conceptos básicos sobre la teoría de grafos, la cual se utiliza en los sistemas multiagentes para representar la topología de comunicación entre los agentes. Después se abordan los conceptos del control de sistemas multiagentes y el problema de consenso para los sistemas dinámicos descritos en la forma de integradores simples e integradores dobles y los criterios necesarios que se deben de cumplir. Además, se presentan conceptos del control basado en planitud diferencial para sistemas MIMO. Por último, se presenta el paradigma de control disparado por eventos, y la forma de ser utilizado para la comunicación y el control de sistemas multiagentes.

2.1. Teoría de Grafos

Como se tratará en la siguiente sección, en sistemas de control cooperativos un factor importante es la manera en que cada agente esta relacionado con demás miembros de la red y en particular con sus vecinos. Por esta razón, se recurre a la teoría de grafos para visualizar de manera clara el comportamiento y flujo de información entre los agentes de un sistema colaborativo. La conexión que existe entre los elementos se identifica mediante líneas, con flechas para representar la dirección de la comunicación, las líneas son denominadas bordes mientras que los elementos se les conoce como vértices. Así pues, empecemos por definir que es un grafo.

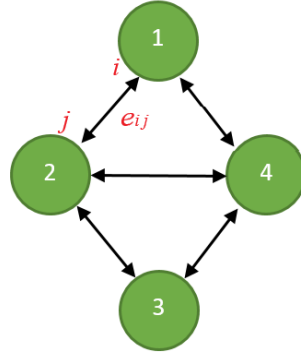


Figura 2.1: Grafo fuertemente conectado y balanceado

Definición 1 (Grafo1) Un grafo \mathcal{G} se define como un par de conjuntos (V, E) , donde V es un conjunto finito de puntos $V(G) = \{v_1, \dots, v_N\}$, siendo N un conjunto de elementos llamados nodos o vértices y E es un conjunto finito de aristas, bordes o enlaces e_{ij} cada uno de los cuales une pares ordenados de vértices. A las aristas se les puede asignar un valor o peso w_{ij} (ver Figura 2.1).

Si $(v_i, v_j) \in E \implies (v_j, v_i) \in E, \forall i, j$ entonces se dice que el grafo es no dirigido o bidireccional. De otra forma, se le llama un grafo dirigido. Una flecha con vértice v_i y vértice v_j como cabeza representa a un borde (v_i, v_j) que está entrando con respecto a v_j y está saliendo con respecto a v_i . El grado de entrada de un vértice $v \in G$ es el número de bordes que tienen su vértice como cabeza. El grado de salida de un vértice $v \in G$ es el número de bordes que tienen su vértice como cola. Si el grado de entrada equivale al grado de salida para todos los vértices $v \in G$, entonces se dice que el grafo es balanceado.

Una trayectoria de longitud r en un grafo dirigido es una secuencia v_0, \dots, v_r de $r + 1$ vértices distintos tales que para cada $i \in \{0, \dots, r - 1\}$, (v_i, v_{i+1}) es un borde. Una trayectoria débil es una secuencia v_0, \dots, v_{r+1} de $r + 1$ vértices distintos tales que para cada $i \in \{0, \dots, r - 1\}$, (v_i, v_{i+1}) o (v_{i+1}, v_i) es un borde. Un grafo dirigido está *fuertemente conectado* si dos vértices cualquiera pueden ser unidos por una trayectoria y está *débilmente conectado* si dos vértices cualquiera pueden ser unidos por una trayectoria débil. En base a las definiciones descritas con anterioridad, se puede describir un grafo dirigido balanceado como aquel en el que los bordes están dirigidos en cierta dirección y a su vez que el número de bordes que entran en cada vértice es igual al que sale

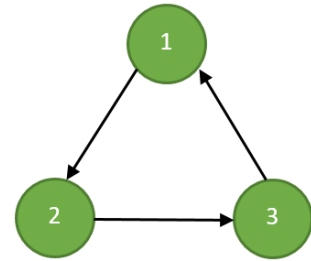


Figura 2.2: Grafo dirigido balanceado

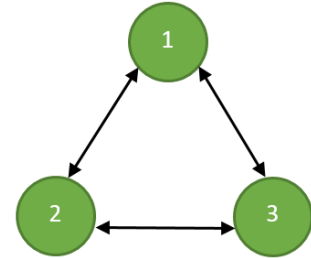


Figura 2.3: Grafo no dirigido

como el que se ejemplifica en la Figura 2.2, mientras que si es balanceado por naturaleza, ya que las relaciones entre pares de vértices es simétrica se considera grafo no dirigido como el de la Figura 2.3, en ocasiones se suele evitar flechas para representar este tipo de grafos. Por otro lado en la figura 2.1 se muestra un grafo fuertemente conectado y balanceado, ya que a partir de cualquier nodo es posible alcanzar cualquier otro nodo siguiendo la dirección en la que apuntan los bordes [33].

Además de la teoría de grafos existe otra forma que es ampliamente utilizada para expresar la interconexión entre agentes en un sistema colaborativo. La matriz Laplaciana L , la cual se construye a través de la Matriz de Adyacencia y la Matriz de Grado de un grafo dirigido.

Matriz de Adyacencia. Teniendo un grafo dirigido ponderado $A = [a_{ij}]$ su matriz es aquella en la que los elementos a_{ij} son no negativos y se forma a partir de las conexiones que existen entre los vértices del grafo. Si existe un borde que conecta al elemento i con el elemento j , entonces al elemento a_{ij} se le asigna el peso asociado, de lo contrario se le asigna el valor "0".

Matriz de Grado. La matriz de grado $D = [d_{ij}]$ de un grafo G es una matriz diagonal donde

$$D = \begin{cases} d_{ij} = 0 & i \neq j \\ d_{ij} = \text{deg}_{out}(v_i) & i = j \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $\text{deg}_{out}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ es grado de salida del nodo v_i y está dado por la suma de los elementos fila de la matriz de adyacencia.

Como ya se mencionó la matriz Laplaciana $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ se construye a partir de las matrices que se definieron anteriormente, la cual se describe como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L} = D - A, \quad (2.2)$$

es decir, los elementos de la matriz están dados por

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik} & i = j \\ -a_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

Para grafos no dirigidos, la matriz Laplaciana es simétrica y semi-definida positiva, *i.e.*, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T \geq 0$. Por otro lado, la matriz Laplaciana tiene las siguientes propiedades:

- La suma de los elementos de cada una de las filas es igual a cero.
- Sus valores propios tienen parte real no negativa.

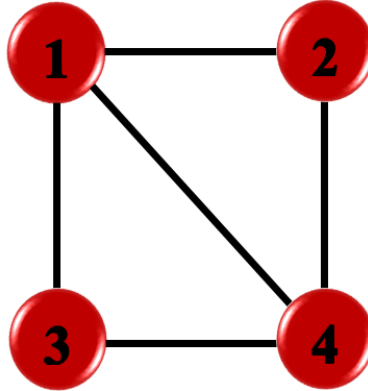


Figura 2.4: Grafo no dirigido de cuatro agentes

- Cero es un valor propio y el vector propio asociado es $1^T = [1, \dots, 1]$, por lo tanto el rango $\mathcal{L} \geq n - 1$. Para los grafos fuertemente conectados, el rango es $\mathcal{L} = n - 1$.

Ejemplo: Considere un grafo no dirigido representado por cuatro agentes e interconectados entre sí, como se muestra en la figura 2.4. El conjunto de los vértices (V) y aristas o enlaces (E) están definidas como

$$V = (1, 2, 3, 4) \quad E = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$$

entonces las matrices de grado y de adyacencia resultan de la siguiente manera

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz Laplaciana resulta

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Note que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T \geq 0$, lo cual implica que \mathcal{L} es simétrica y semi-definida positiva, el rango de $\mathcal{L} = 3$ y los eigenvalores resultan $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ y $\lambda_4 = 4$.

Ahora bien, ya se tiene el conocimiento de la estructura del grafo, sus características importantes como lo es la matriz Laplaciana. Pero, ¿Qué relación tiene con el control de consenso?. Esta relación es descrita en la siguiente sección.

2.2. Consenso de Sistemas Multiagentes

En los últimos años ha surgido el interés por conseguir que múltiples sistemas robóticos estén de acuerdo con el valor de una variable, donde existe un algoritmo que es capaz de negociar entre los sistemas para llegar a un acuerdo sobre la variable de interés. Este proceso es formalmente llamado algoritmo de consenso. Dentro de los problemas que pretende solucionar la robótica, se encuentran diferentes comportamientos colaborativos como el consenso, la sincronización concurrente, rendezvous y flocking, que se definen mediante diferentes conceptos pero cumpliendo los principios básicos: evitar colisiones, intentar igualar la velocidad de sus compañeros cercanos y mantener la distancia entre ellos. Los conceptos son:

- Consenso: Se refiere a que todos los agentes del sistema lleguen a un punto manteniendo la formación.
- Sincronización concurrente: Diversos grupos de agentes sincronizados interactuando entre sí.
- Rendezvous: Se conoce como rendezvous al caso en el que los agentes llegan a una posición común desconocida mediante negociación entre ellos.
- Flocking: Se refieren a la formación de vehículos imitando a las parvadas de aves.

Tanto los problemas de consenso como los de sincronización de los sistemas dinámicos se ha vuelto un campo de investigación en la actualidad, en especial para sistemas representados por dinámicas como integradores o masas puntuales, por lo que el estudio de diferentes técnicas de control es de importancia. Existen trabajos en los que se ha obtenido resultados sobre sincronización exponencial global para sistemas Lagrangianos con seguimientos de trayectorias, sin embargo una de las limitaciones son los dispositivos y herramientas para implementar las leyes de control. Por otro lado el considerar cambios en la topología de comunicación es mediante un enfoque pasivo, en el que se analiza las leyes de control con retardos en la comunicación.

Una red puede considerarse como un conjunto de nodos o agentes que colaboran para lograr lo que cada uno no puede lograr por sí solo. Con la finalidad de capturar la noción de agentes dinámicos, se define cada nodo i de un grafo con un vector de estado variable en el tiempo $x_i(t)$. Por lo que un grafo con nodos dinámicos es de la forma (\mathcal{G}, x) con \mathcal{G} siendo un

grafo con N nodos y $x = [x_1^T \dots x_N^T]^T$ un vector de estado global, donde el estado de cada nodo evoluciona de acuerdo a dinámicas de la forma:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i) \quad (2.4)$$

con u_i siendo una entrada de control y $f_i(\cdot)$ alguna función de flujo. Dado un grafo $\mathcal{G} = (V, E)$, interpretamos $(v_i, v_j) \in E$ tal que el nodo v_j puede obtener información desde el nodo v_i para la retroalimentación de control.

Definición 2 (Control Distribuido) *El control dado por $u_i = k_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i})$ para alguna $k_i(\cdot)$ se dice que está distribuida si $m_i < N$, $\forall i$, esto es, la entrada de control de cada nodo depende de algún subconjunto propio de todos los nodos. Se dice que un protocolo es de topología G si $u_i = k_i(x_{i1}, \{x_j \mid j \in N_i\})$, es decir, cada nodo puede obtener información sobre el estado únicamente de sí mismo y de sus (n)-vecinos en N_i [33].*

El control colaborativo mediante grafos se emplea en situaciones en las que cada nodo obtiene información para el control de sí mismo y de sus vecinos. Para estos casos los grafos representan una red que restringe las comunicaciones permitidas entre los nodos. Los grafos son considerados también sistemas de control multi-agente, aunque no tiene la misma notación utilizada por la comunidad de Ciencias de la Computación.

Definición 3 Consenso: *Comportamiento que tiene lugar cuando mediante un control distribuido los estados de los agentes convergen al mismo valor, i.e. $x_i = x_j$, $\forall i, j$. Este valor se conoce como un valor de consenso [33].*

Definición 4 Consenso promedio: *Comportamiento que tiene lugar cuando mediante un control distribuido los estados de los agentes convergen al promedio de las Condiciones Iniciales (CI), i.e. $c = x_i = x_j$, $\forall i, j$, donde*

$$c = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i(0) \quad (2.5)$$

Consenso para integradores simples

En esta sección se estudia el algoritmo de control para el consenso, donde los agentes o nodos están descritos por la dinámica de integradores simples. Por lo que el sistema es de la

siguiente forma:

$$\dot{x}_i = u_i \quad (2.6)$$

con $x_i, u_i \in \mathbb{R}$. Esto corresponde a dotar a cada nodo o agente con una memoria. Se considera el algoritmo de control local para cada agente i

$$u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i) \quad (2.7)$$

donde a_{ij} son los pesos de los bordes del grafo. Este control se distribuye en los vecinos inmediatos N_i de nodo i en el grafo. Este se conoce como un algoritmo de votación local donde la entrada de control de cada nodo depende de la diferencia entre su estado y sus vecinos inmediatos. Se observa que si los estados son los mismos, entonces $\dot{x}_i = u_i = 0$. Este algoritmo bajo algunas condiciones conduce a todos los estados al mismo valor [33].

Se define el vector de estado global como $x = [x_1 \dots x_N]^T \in \mathbb{R}^N$ y la matriz diagonal de grado $D = \text{diag}d_i$. Entonces la dinámica global esta dada por

$$\dot{x} = -Dx + Ax = -(D - A)x \quad (2.8)$$

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x \quad (2.9)$$

Note que el vector de control global $u = [u_1 \dots u_N]^T \in \mathbb{R}^N$ está dado por

$$u = -\mathcal{L}x \quad (2.10)$$

Se observa que usando el protocolo local (2.7), la dinámica enlace cerrado (2.9) depende de la matriz Laplaciana del grafo \mathcal{L} . Vemos ahora como la evolución de los sistemas, con dinámica de un integrador de primer orden, depende de las propiedades del grafo a través de la matriz Laplaciana. Los eigenvalores de \mathcal{L} son una herramienta en estos análisis.

Consenso para dobles integradores

Los diferentes algoritmos de consenso han recibido un gran interés por parte de la comunidad de control, dando lugar a interesantes resultados en el control cooperativo de vehículos. La mayoría de dichos aportes han sido desarrollados en base a dinámicas de integradores simple, sin embargo se han extendido el trabajo a dobles integradores.

Una de las aplicaciones que tiene el consenso, es la formación de vehículos, por lo cual a continuación se estudia el consenso de sistemas que satisfagan las leyes de Newton $\ddot{x}_i = u_p$,

los cuales son denominados sistemas de segundo orden o de dobles integradores. Los sistemas de dobles integradores tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= u_i\end{aligned}\tag{2.11}$$

con $x_i \in \mathbb{R}$ que representa la posición, $v_i \in \mathbb{R}$ la velocidad y $u_i \in \mathbb{R}$ la entrada. Considerando la retroalimentación del estado de los agentes se obtiene el siguiente algoritmo para los vecinos locales de cada sistema de segundo orden:

$$u_i = c \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i) + c\gamma \sum_{j \in N_i} a_{ij}(v_j - v_i)\tag{2.12}$$

$$= \sum_{j \in N_i} ca_{ij}((x_j - x_i) + \gamma(v_j - v_i))\tag{2.13}$$

donde $c > 0$ es la ganancia de rigidez y γ es la ganancia de amortiguamiento. Dicho algoritmo de basa en las votaciones locales de posición y velocidad, de modo que cada sistema busca coincidir con las posiciones y velocidades de sus vecinos inmediatos.

Formación de sistemas dinámicos representados por la dinámica de un doble integrador

El sistema dinámico representativo de un doble integrador tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= u\end{aligned}\tag{2.14}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ que representa la posición, $v \in \mathbb{R}$ la velocidad y $u \in \mathbb{R}$ la entrada. Para este tipo de sistemas se pueden desarrollar estrategias para control de formaciones, es decir, conducir a los agentes de un sistema colaborativo a una configuración específica donde cada agente sea descrito por la dinámica de un doble integrador. Considerando el algoritmo para el consenso de dobles integradores de la sección 2.2 y teniendo en cuenta que se desean posiciones deseadas se obtuvo el siguiente algoritmo:

$$u_i = \sum_{j \in N_i} ca_{ij}((X_j - X_i) + (v_j - v_i)) - fv_i - bX_i\tag{2.15}$$

con $X_j = (x_j - x_j^d)$ y $X_i = (x_i - x_i^d)$, donde x_i^d representan la posición deseada del nodo y x_j^d la posición deseada de sus vecinos. Por su parte f y b son coeficientes constantes.

Se sabe entonces, que la relación entre cada agente, así como sus dinámicas individuales, se representa mediante la estructura de la matriz Laplaciana. Sin embargo, la tarea que representa un reto es obtener una ley de control, tal que, obligue a cada agente a realizar cierta tarea sin perder la relación con sus agentes vecinos [43].

2.3. Planitud Diferencial

El objetivo de muchas técnicas de control, es estudiar primeramente el modelo dinámico del sistema para obtener soluciones a la dinámica inversa y la regulación para la retroalimentación.

Una forma de estudiar y resolver los problemas de dinámica inversa es mediante el uso de planitud diferencial. Se dice que el sistema es plano si se puede encontrar un conjunto de variables igual al número de entradas, que son llamadas salidas planas, tal que las entradas y estados del sistema se expresen en términos de éstas y sus derivadas [95].

2.3.1. Sistemas SISO LTI

Considere un sistema lineal de primer orden representado por la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

con A una matriz constante de $n \times n$ y b siendo un n -vector constante.

Se puede proponer una transformación de coordenadas en espacio de estados de la forma $z = Tx$, con T definida como la inversa de la matriz de controlabilidad de Kalman, es decir,

$$T = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]^{-1}. \quad (2.17)$$

De lo anterior, según [96] la salida plana del sistema controlable 2.16 está dado por la combinación lineal de los estados obtenidos del último renglón de la inversa de la matriz de controlabilidad Kalman T , es decir,

$$F = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1][b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]^{-1}x \quad (2.18)$$

Entonces en sistemas lineales SISO, siempre se puede hacer que la salida plana dependa solo de las variables de estado del sistema. Esto tiene una consecuencia importante con

respecto a la observabilidad de la salida plana. Suponga por el momento que la salida plana F esta solamente en función del vector de estados x . Además, dado que el sistema es lineal, supongamos que F es una función lineal del vector de estado x ,

$$F = \lambda x$$

para un determinado vector renglón λ de dimensión $1 \times n$. Ahora, el problema de encontrar la salida plana, es cómo encontrar este vector λ .

Escribamos el vector de derivadas de F como

$$\begin{aligned} F &= \lambda x \\ \dot{F} &= \lambda \dot{x} = \lambda Ax + \lambda bu \\ \ddot{F} &= \lambda \ddot{x} = \lambda A^2 x + \lambda Abu + \lambda b\dot{u} \\ &\vdots \\ F^{(n-1)} &= \lambda A^{(n-1)} x + \lambda A^{(n-2)} xu + \dots + \lambda bu^{(n-2)} \end{aligned}$$

En notación matricial, este conjunto de relaciones se escribe como

$$\begin{bmatrix} F \\ \dot{F} \\ \ddot{F} \\ \vdots \\ F^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \lambda A^2 \\ \vdots \\ \lambda A^{(n-1)} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda b & 0 & \dots & 0 \\ \lambda Ab & \lambda b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda A^{(n-2)} b & \lambda A^{(n-3)} b & \dots & \lambda b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Dado que desde aquí podemos obtener x solo en términos de F y de sus derivadas temporales, todas las entradas en la matriz que relacionan a F , las derivadas de F , para u y las derivadas de u , deberían desaparecer.

Entonces tenemos que λ tiene que satisfacer

$$\lambda b = 0, \lambda Ab = 0, \dots, \lambda A^{(n-2)} b = 0 \quad (2.20)$$

es decir, λ es ortogonal para cada vector columna en el rango completo de la matriz de controlabilidad, excepto el último, que esta alineado a $(\lambda A^{(n-1)} b \neq 0)$.

2.3.2. Sistemas MIMO LTI

Considere un sistema lineal multivariable y controlable representado por la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (2.21)$$

Donde la matriz B es de rango completo m y constituido por los vectores columna $B = [b_1, \dots, b_m]$. Que el sistema sea controlable implica que la matriz de controlabilidad de Kalman de $n \times nm$

$$\mathcal{K}_c = (B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B)$$

es de rango completo n (ver [96]). La controlabilidad del sistema implica que se puede extraer la siguiente matriz C de rango completo de $n \times n$

$$C = [b_1 \ Ab_1 \ \dots \ A^{\gamma_1-1}b_1 \ b_2 \ Ab_2 \ \dots \ A^{\gamma_2-1}b_2 \ \dots \ b_m \ Ab_m \ \dots \ A^{\gamma_m-1}b_m]$$

con γ_i siendo los índices de controlabilidad de Kronecker del sistema, para $i = 1, \dots, m$, los cuales satisfacen: $\sum_i \gamma_i = n$. En la construcción de C , primero se incluyen todas las columnas de B , y un vector columna de la forma $A^{\gamma_j}b_j$ para cualquier j se elimina de la colección de las columnas retenidas cuando $A^{\gamma_j}b_j \in \text{rank } \mathcal{K}_c$, en caso contrario, se retiene el vector y continuamos, hasta obtener n independientes en el conjunto.

Bajo la suposición anterior, las salidas planas están dadas por las siguientes m cantidades

$$F = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} C^{-1}x \quad (2.22)$$

con ϕ_i siendo vectores renglón de dimensión n para $i = 1, \dots, m$, de la forma

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad (2.23)$$

con 1 en la posición $(\sum_{i=1}^j \lambda_i)$.

La prueba de este hecho es que considerando la transformación de coordenadas de estado no singular ($z = C^{-1}x$), resulta en el siguiente conjunto de subsistemas acoplados.

$$\begin{aligned} \dot{z}_{j1} &= \alpha_1^{jj} z_{j\gamma_j} + \left(\sum_{i=1, i \neq j}^m \alpha_1^{jj} z_{i\gamma_i} \right) + u_j \\ \dot{z}_{j2} &= z_{j1} + \alpha_2^{jj} z_{j\gamma_j} + \left(\sum_{i=1, i \neq j}^m \alpha_2^{jj} z_{i\gamma_i} \right) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{j\gamma_j} &= z_{j(\gamma_j-1)} + \alpha_{\gamma_j}^{jj} z_{j\gamma_j} + \left(\sum_{i=1, i \neq j}^m \alpha_{\gamma_j}^{jj} z_{i\gamma_i} \right) \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Debe quedar claro que todas las variables de estado en el subsistema j -ésimo y la entrada de control, u_j , pueden ser parametrizadas diferencialmente por las variables de estado $z_{j\gamma_j}$, $j = 1..m$. Estos son precisamente los componentes reunidos en el vector F .

Note que para un sistema controlable con una sola entrada, una salida plana F viene dada por la combinación lineal, o cualquier múltiplo constante de la misma, de los estados originales obtenidos mediante el uso de la última fila del inverso de la matriz de controlabilidad [96].

2.4. Control disparado por eventos

Los sistemas de control periódicos o activados por tiempo (donde las señales de tiempo continuo se representan por sus valores muestreados con período de muestreo h constante) han dominado casi de manera exclusiva la investigación en ingeniería de control. El control basado en eventos se presenta como una alternativa muy prometedora particularmente cuando se consideran sistemas con capacidades reducidas de computación y de comunicación. En un sistema de control basado en eventos es la ocurrencia de un evento, en lugar del paso del tiempo lo que decide cuándo se debe efectuar el muestreo [97].

La motivación para desarrollar estrategias de control asíncronas es que, en un sistema de control basado en tiempo, es la progresión autónoma del tiempo lo que dispara la ejecución de las acciones, mientras que en los sistemas de control basados en eventos es la propia *evolución dinámica* del sistema la que decide cuándo se ejecutará la próxima acción de control. Los beneficios que presenta la estrategia de disparo por eventos es la reducción de la acción de control hacia el sistema mientras no se requiera, dando oportunidad al sistema y control de utilizar recursos en otro proceso como el bus de comunicación o el uso del procesador [98].

La Figura 2.5 se observa la diferencia entre los dos enfoques de control síncrono ("tiempo continuo") y asíncrono ("basado en eventos"). Se puede observar que en un control síncrono el sistema a controlar es muestreado de manera uniforme en el tiempo, mientras que en el caso de un control asíncrono es muestreado en amplitud (momento en el que sucede un evento). Bajo esta ideología la teoría del control basado en eventos se presenta de la manera siguiente.

Considere un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.24)$$

donde $x \in \chi \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$, f y g son funciones Lipschitz que se desvanecen al origen. Si el sistema admite un control por retroalimentación $k : \chi \rightarrow \mathcal{U}$ que estabiliza al sistema

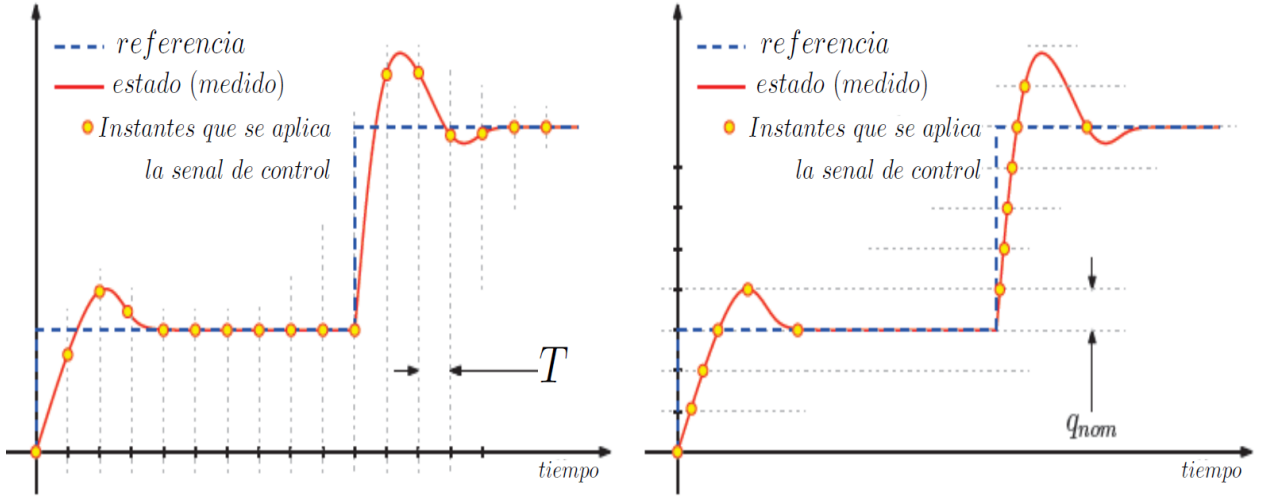


Figura 2.5: Esquemas de control (Síncrono y Asíncrono)

asintóticamente, entonces existe una Función Candidata de Lyapunov (FCL) $V : \chi \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es una función suave, definida positiva tal que

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)k(x) < 0 \quad (2.25)$$

Es necesario notar que si se asume que k es suave, entonces V existe y es suave. En el marco del trabajo de control disparado por eventos generalmente se trabaja con dos funciones [71, 98]:

- *Función de evento:* $\bar{e} : \chi \times \chi \rightarrow \mathbb{R}$ que indica si es necesario ($\bar{e} \leq 0$) o no ($\bar{e} > 0$) recalcular y aplicar la señal de control al sistema. En su forma más general, la función de evento \bar{e} toma como entrada el estado actual x y una memoria m que tomó del estado x , la última vez que \bar{e} fue negativa.
- *Función de retroalimentación k :* Hablamos de una retroalimentación por eventos *estática* cuando $k : \chi \rightarrow \mathcal{U}$. Sin embargo, se adiciona el tiempo (entonces $k : \chi \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{U}$) o el índice de muestro (entonces $k : \chi \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}$) para construir una retroalimentación por eventos *dinámica*.

2.4.1. Comunicación entre agentes basada en eventos

Con la finalidad de mejorar el desempeño de los sistemas embebidos utilizados en las redes multiagentes, es necesario desarrollar nuevas estrategias de control que permitan un aprovechamiento racional y coordinado de los recursos disponibles de la red. Bajo este enfoque, recientemente, ha incrementado la popularidad de las estrategias de control basadas en eventos aplicadas a los sistemas formados en red, especialmente debido a su característica aperiódica que permite que la señal de control sea actualizada de forma asíncrona [99, 100]. La idea central se basa en la transmisión de datos únicamente cuando existe un evento, en lugar de realizarse de forma continua o periódica. El evento ocurre si se satisface una condición predefinida, llamada función de evento y la cual está directamente relacionada con la salida del sistema, con los estados o con la evolución de una función de Lyapunov de Control asociada al sistema [70–72].

En base al esquema anterior, el control basado en eventos ha dado la pauta para introducir dichos conceptos en el área de sistemas multiagentes, por ejemplo en la comunicación. De esta manera y considerando la notación presentada en 2.2, se presentan algunos conceptos y definiciones como sigue.

Considere un grafo teniendo como nodos sistemas dinámicos es denotado por (\mathcal{G}, x) , siendo \mathcal{G} el grafo que contiene N nodos y $x = [x_1^T \cdots x_N^T]^T$ un vector de estado global, donde los estados de cada nodo evolucionan de acuerdo a la dinámica

$$\dot{x}_i = f(x_i, u_i) \quad (2.26)$$

donde $x_i \in \chi \subset \mathbb{R}^n$ y $u_i \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$. La transmisión de información entre agentes basada en eventos relaciona dos funciones principales [101].

- Una función de evento: $e_i : \chi \times \chi \rightarrow \mathbb{R}$ que indica si es necesario que el agente i transmita ($e_i > 0$) o no ($e_i \leq 0$) su estado al agente j , con $j \in N_i$. La función de evento toma como entrada el valor actual del estado del agente i , x_i y una memoria m_i de x_i la última vez que e_i fue positivo.
- Control distribuido $u_i(x_i, m_i, m_j)$. El control depende de las memorias de los estados x_i y x_j con $j \in N_i$, esto significa que el control del agente i depende del estado transmitido por el propio agente la última vez que ocurrió un evento (m_i) y el estado proveniente del agente j , así como del estado actual del agente i , i.e. x_i . El término distribuido se debe a que el control del agente i solo depende del conjunto N_i el cual es un subconjunto del conjunto total de nodos, i.e. $N_i \subset \mathcal{V}$.

Como se observa, en un control distribuido con comunicación basada en eventos, cada agente i tiene una medida de error $\epsilon_i = m_i - x_i$, donde $i = \{1, 2, \dots, N\}$. De esta forma, el sistema (2.26) en lazo cerrado se escribe

$$\dot{x}_i = f(x_i, k_i(x_i + \epsilon_i, x_j + \epsilon_j)) \quad (2.27)$$

Considerando un sistema multiagente, donde cada uno de los agentes está determinado por la dinámica de un integrador simple (2.6) con una comunicación basada en eventos, se obtiene que el control distribuido depende de las memorias de la forma

$$k_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(m_j - m_i) \quad (2.28)$$

con a_{ij} los bordes del grafo, N es el número de agente en el grafo \mathcal{G} . Note que la ecuación (2.28), el agente i no utiliza los estados presentes (x_i, x_j) , en su lugar se emplean las memorias de los estados la última vez que ocurrió un evento (m_i, m_j) .

Teorema 1 (Consenso con una comunicación por eventos) *Considerando el sistema multiagente con una comunicación por eventos, donde los agentes tienen la forma (2.6) y con una ley de control (2.28), Se propone una función de evento de la forma*

$$e_i(x_i, m_i) = \|\bar{e}_i\| - \delta \quad (2.29)$$

con $\bar{e}_i = m_i - x_i$, $\delta > 0 \in \mathbb{R}_+$ el umbral de activación de la función de evento, $i \in \mathcal{V}$. Tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga al menos la convergencia del consenso dentro de un radio de diámetro Δ .

Una respuesta a este problema es presentada a lo largo de los capítulos siguientes.

Capítulo 3

Robot Móvil tipo Péndulo invertido

En este capítulo se presenta el modelado del Robot Móvil tipo Péndulo invertido (RMPI) con la restricción de giro sobre su propio eje (lo que resulta en un sistema de cuarto orden). Se presenta también el control para el avance y autobalanceo del mismo mediante el enfoque de *Planitud Diferencial*. Además, se muestra el diseño de una estrategia de control distribuido con comunicación activada por eventos, que resuelve el problema de consenso líder-seguidor de un conjunto de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI). El análisis de estabilidad se lleva a cabo mediante el segundo método de Lyapunov y con el enfoque de estabilidad entrada al estado (*Input-to-State Stability* (ISS), en inglés). Se muestran también resultados de simulación numérica, donde se aprecia, el desempeño del consenso de vehículos en dos escenarios representativos: regulación y seguimiento de trayectoria. Para finalizar se muestran resultados experimentales del consenso de múltiples RMPI basado en el esquema de control propuesto.

3.1. Modelado del Sistema RMPI

En esta sección se presenta el modelado del sistema Robot Móvil tipo Péndulo invertido (RMPI). El modelo del sistema RMPI considera la dinámica del péndulo en conjunto con la dinámica de los motores de CD, esta idea se basa en los trabajos de [102] y [103, pág 36]. La linealización de las ecuaciones de movimiento de los RMPI, alrededor del punto de equilibrio, permiten explotar las propiedades de planitud diferencial, dando lugar a una

reparametrización del sistema mediante la salida plana.

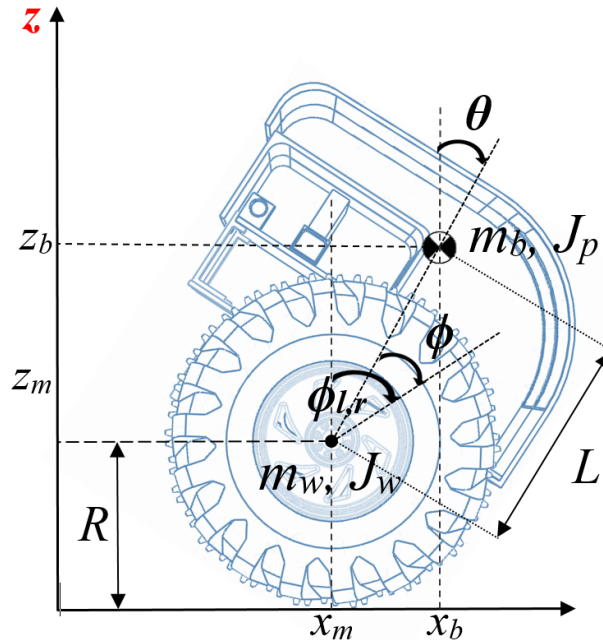


Figura 3.1: Sistema de referencia y variables del sistema

Parámetros	Descripción	Valor
m_w	Masa de las ruedas	0.04 Kg
m_b	Masa del péndulo	1.05 Kg
J_w	Inercia de la rueda	$8.45e^{-5} \text{ Kg}m^2$
J_m	Inercia del motor	$9.356e^{-4} \text{ Kg}m^2$
J_p	Inercia del péndulo	$0.021 \text{ Kg}m^2$
R	Radio de la rueda	0.06 m
w	Longitud entre el eje de las ruedas	0.2 m
L	Longitud entre el c.m del péndulo y el eje de las ruedas	0.15 m
g	Gravedad	$9.8 \frac{m}{s^2}$
k_t	Constante de torque del motor	0.3093
R_m	Resistencia del Motor	5.15 Ω
k_b	Constante de FEM del Motor	0.3093
β	Coefficiente de fricción	0.01

Tabla 3.1: Parámetros del RMPI

Considere un sistema robótico autónomo representado por la Figura 3.1 y con los paráme-

tros dados en la Tabla 3.1. La ubicación de las coordenadas cartesianas están representadas por:

$$\begin{aligned}x_b &= x_m + L \sin \theta & z_b &= z_m + L \cos \theta \\x_m &= x & z_m &= R\end{aligned}$$

y donde sus velocidades están determinadas mediante

$$\begin{aligned}\dot{x}_b &= \dot{x}_m + L\dot{\theta} \cos \theta & \dot{z}_b &= \dot{z}_m - L\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x}_m &= \dot{x} & \dot{z}_m &= 0\end{aligned}$$

Con la finalidad de analizar el modelo dinámico en función del desplazamiento angular de las ruedas ϕ y la posición angular del péndulo θ , se aplica la condición de no-deslizamiento obteniendo

$$\dot{x} = R\dot{\phi}$$

Para determinar el modelo dinámico del sistema, se utiliza las ecuaciones de movimiento de Euler Lagrange del sistema coordinado mostrado por la Figura 3.1. De ahí, se calculan las energías cinética y potencial de las coordenadas generalizadas. Por lo tanto, la energía cinética de estas coordenadas resulta

$$T_1 = \frac{1}{2}m_w (\dot{x}_m^2) + \frac{1}{2}m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{z}_b^2)$$

o bien

$$T_1 = \frac{1}{2}m_w (R^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}m_b \left((\dot{x}_m + L\dot{\theta} \cos \theta)^2 + L^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right)$$

haciendo algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene que:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_w (R^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}m_b \left[2LR\dot{\phi}\dot{\theta} (\cos \theta) + R^2\dot{\phi}^2 + L^2\dot{\theta}^2 \right] \quad (3.1)$$

Por otra parte, la energía cinética rotacional del sistema se obtiene por el efecto que produce el movimiento del péndulo como sigue:

$$T_2 = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 \quad (3.2)$$

La energía potencial del sistema está representada por la siguiente ecuación:

$$U = m_b g z_b = m_b g (R + L \cos \theta) \quad (3.3)$$

De lo anterior, se calcula el Lagrangiano del sistema mediante la suma de las energías de la siguiente forma

$$L = T_1 + T_2 - U$$

sustituyendo (3.1),(3.2) y (3.3) se obtiene

$$L = \frac{1}{2}m_w \left(R^2 \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2}m_b \left[2LR\dot{\phi}\dot{\theta} (\cos \theta) + R^2 \dot{\phi}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 \right] + \frac{1}{2}J_p \dot{\theta}^2 - m_b g (R + L \cos \theta)$$

Considerando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange del sistema de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = F_\phi \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta \quad (3.5)$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= m_w R^2 \dot{\phi} + m_b L R \dot{\theta} (\cos \theta) + m_b R^2 \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= m_w R^2 \ddot{\phi} + m_b L R \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) + m_b R^2 \ddot{\phi} \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_b L R \dot{\phi} (\cos \theta) + m_b L^2 \dot{\theta} + J_p \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m_b L R \left(\dot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \right) + m_b L^2 \ddot{\theta} + J_p \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m_b L R \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + m_b g L \sin \theta \end{aligned}$$

se obtiene las ecuaciones dinámicas del sistema RMPI como sigue:

$$\begin{aligned} F_\phi &= m_w R^2 \ddot{\phi} + m_b L R \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) + m_b R^2 \ddot{\phi} \\ F_\theta &= m_b L R \dot{\phi} \cos \theta + m_b L^2 \ddot{\theta} + J_p \ddot{\theta} - m_b g L \sin \theta \end{aligned}$$

reacomodando las ecuaciones del modelo dinámico del sistema, se tiene que:

$$\begin{aligned} F_\phi &= [(m_w + m_b) R^2] \ddot{\phi} + [m_b L R \cos \theta] \ddot{\theta} - m_b L R \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ F_\theta &= [m_b L R \cos \theta] \dot{\phi} + [m_b L^2 + J_p] \ddot{\theta} - m_b g L \sin \theta \end{aligned}$$

Debido a que se utilizarán motores de corriente directa para mover las ruedas del robot móvil, la dinámica de los motores se incluirán en la dinámica del robot. De este modo el par desarrollado por los motores viene dado por la ecuación mecánica definida como:

$$\tau = k_t i_a + J_m \dot{\omega} - \beta \omega$$

donde i_a es la corriente de armadura del motor y $\omega = (\dot{\phi} - \dot{\theta})$. Para evaluar la relación entre i_a y el voltaje u se usará la ecuación del motor de CD

$$L_m \dot{i}_a = u + k_b(\dot{\theta} - \dot{\phi}) - R_m i_a$$

donde L_m y R_m es la inductancia y resistencia del motor respectivamente. Considerando que la inductancia del motor es despreciable y es aproximadamente cero ($L \rightarrow 0$):

$$i_a = \frac{u + k_b(\dot{\theta} - \dot{\phi})}{R_m}$$

Se sustituye i_a en las fuerzas generalizadas

$$F_\phi = K_s u - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) - J_m(\ddot{\phi} - \ddot{\theta}) \quad (3.6)$$

$$F_\theta = -K_s u + T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) + J_m(\ddot{\phi} - \ddot{\theta}) \quad (3.7)$$

con

$$K_s = \frac{k_t}{R_m}, \quad T_s = \frac{k_t k_b}{R_m}$$

sustituyendo la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} [(m_w + m_b) R^2] \ddot{\phi} + [m_b L R \cos \theta] \ddot{\theta} - m_b L R \dot{\theta}^2 \sin \theta &= K_s u - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) - J_m(\ddot{\phi} - \ddot{\theta}) \\ [m_b L R \cos \theta] \ddot{\phi} + [m_b L^2 + J_p] \ddot{\theta} - m_b g L \sin \theta &= -K_s u + T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) + J_m(\ddot{\phi} - \ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Reescribiendo (3.8) en forma matricial, se obtiene el modelo dinámico del vehículo de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & [m_b L R \cos \theta] - J_m \\ [m_b L R \cos \theta] - J_m & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_b L R \dot{\theta}^2 \sin \theta + K_s u - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \\ m_b g L \sin \theta - K_s u + T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

con

$$\bar{M} = (m_w + m_b) R^2 + J_m \quad \bar{I} = m_b L^2 + J_p + J_m$$

La ecuación (3.9) representa la dinámica no-lineal del sistema RMPI. Dicha dinámica representa a un sistema mecánico sub-actuado, los cuales no cumplen con la condición de involutividad. De esta manera, se busca que una linealización aproximada alrededor de un punto de equilibrio sea diferencialmente plano, es decir sea controlable y observable al menos cerca de ese punto de equilibrio [28].

Se realiza una linealización aproximada del modelo no lineal. El punto de equilibrio utilizado para obtener el modelo lineal del robot es:

$$\theta \approx 0 \quad (\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1)$$

De ahí, se obtiene el siguiente modelo dinámico lineal:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M} & [m_b LR] - J_m \\ [m_b LR] - J_m & \bar{I} \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_s u - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \\ m_b g L \theta - K_s u + T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \end{bmatrix}}_{\Upsilon} \quad (3.10)$$

puesto que Λ es definida positiva, el sistema anterior se escribe de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M} & [m_b LR] - J_m \\ [m_b LR] - J_m & \bar{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_s u - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \\ m_b g L \theta - K_s u + T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\phi}(-LRm_b - \bar{I} + J_m)T_s + (J_m m_b Lg - L^2 m_b^2 Rg)\theta + \dot{\theta}(\bar{I} - J_m + LRm_b)T_s + u(\bar{I} - J_m + LRm_b)K_s}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} \\ \frac{\dot{\phi}(LRm_b + \bar{M} - J_m)T_s + \bar{M}m_b g L \theta + \dot{\theta}(J_m - \bar{M} - LRm_b)T_s + u(-\bar{M} + J_m - LRm_b)K_s}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Seleccionando las siguientes variables de estado $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$ y definiendo el siguiente vector de estado $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ y la entrada de control u , el sistema (3.12) se representa mediante un sistema LTI de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (3.13)$$

donde,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(-LRm_b - \bar{I} + J_m)T_s}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} & a_2 &= \frac{(J_m m_b Lg - L^2 m_b^2 Rg)}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} \\ a_3 &= \frac{(\bar{I} - J_m + LRm_b)T_s}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} & a_4 &= \frac{(LRm_b + \bar{M} - J_m)T_s}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} \\ a_5 &= \frac{\bar{M}m_b g L}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} & a_6 &= \frac{(J_m - \bar{M} - LRm_b)T_s}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} \\ b_1 &= \frac{(\bar{I} - J_m + LRm_b)K_s}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} & b_2 &= \frac{(-\bar{M} + J_m - LRm_b)K_s}{\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2} \end{aligned}$$

son los valores constantes de parámetros del sistema linealizado del robot móvil.

3.2. Diseño del control para el RMPI

En esta subsección, se muestra el diseño del control para el autobalanceo del sistema RMPI de cuarto orden.

Considerando que el vehículo operará cerca de la posición angular de equilibrio $x_3 = \theta \approx 0$ y con velocidad angular cercana a cero, $\dot{x}_4 = \dot{\theta} \approx 0$, el sistema (3.13) se escribe en la forma de un sistema LTI

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ x &\in \mathbb{R}^4, u \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, B \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considere el sistema lineal mostrado en (3.14). Sea el par (A, B) controlable, i.e., la matriz de controlabilidad de Kalman

$$\mathcal{K} = (B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B)$$

es de rango completo. La salida plana $F \in \mathbb{R}$ está dada por las variables obtenidas de la multiplicación del último renglón de la matriz inversa de controlabilidad del sistema \mathcal{K} por el vector de estado (ver [82]):

$$F = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \mathcal{K}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

de ahí que

$$F = k_1 x_1 + k_2 x_3$$

con las constantes k_1 y k_2 calculadas como:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-(\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2)}{LgK_s m_b} \\ k_2 &= \frac{-(\bar{I} - J_m + LRm_b)(\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2)}{m_b LgK_s (\bar{M} - J_m + LRm_b)} \end{aligned}$$

donde F representa la salida plana del sistema ([104, 105]). De esta forma, el sistema se parametriza en función de F y de sus derivadas sucesivas. La manera en que las derivadas sucesivas de dicha salida fueron determinadas para el robot tipo péndulo invertido, se muestra a continuación. Note que las entradas de control no influyen directamente a las salidas, es decir, $F = Cx$. Sin embargo, el sistema (3.14) indica que la entrada podría influir en las derivadas temporales de esta salida F (ver [105]). En efecto, $\dot{F} = C\dot{x} = CAx + CBu$, de modo que si $CB \neq 0$, la entrada u influye directamente \dot{y} . En caso contrario se calcula las derivadas sucesivas hasta que la entrada de control influya. Considerando entonces, que si $C = (0 \ 0 \ 0 \ 1)\mathcal{K}^{-1}$, resulta que $CB = 0$, $CAB = 0$, $CA^2B = 0$ por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= C\dot{x} = CAx + CBu = CAx \\ \ddot{F} &= C\ddot{x} = CA\dot{x} = CA^2x + CABu = CA^2x \\ \dddot{F} &= C\ddot{x} = CA^2\dot{x} = CA^3x + CA^2Bu = CA^3x \\ \dots &= C\ddot{x} = CA^3\dot{x} = CA^4x + CA^3Bu \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{-(\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2)}{LgK_s m_b} x_2 - \frac{(\bar{I} - J_m + LRm_b)(\bar{M}\bar{I} - (J_m - LRm_b)^2)}{LgK_s m_b (\bar{M} - J_m + LRm_b)} x_4 \\ \ddot{F} &= \left(-\frac{\bar{M}(\bar{I} - J_m + LRm_b)}{K_s (\bar{M} - J_m + LRm_b)} - \frac{(J_m - LRm_b)}{K_s} \right) x_3 \\ \dddot{F} &= \left(-\frac{\bar{M}(\bar{I} - J_m + LRm_b)}{K_s (\bar{M} - J_m + LRm_b)} - \frac{(J_m - LRm_b)}{K_s} \right) x_4\end{aligned}$$

ya que, $CA^3B \neq 0$, la entrada de control influye en la derivada temporal y el proceso finaliza. Además considerando que la entrada de control u resulta de la siguiente forma

$$u = \frac{1}{CA^3B} (\bar{u} - CA^4x) \quad (3.15)$$

con

$$\bar{u} = \ddot{y}$$

esto muestra que la salida F seleccionada es efectivamente la salida plana del RMPI y todo el sistema es parametrizado en función de la variable F y de sus derivadas sucesivas. Para conseguir la convergencia de F a una referencia deseada F^* , se propone un control basado en planitud de la siguiente forma

$$\bar{u} = -\kappa_3(\ddot{F}_1 - \ddot{F}_1^*) - \kappa_2(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) - \kappa_1(F_1 - F_1^*) - \kappa_0(F_1 - F_1^*) \quad (3.16)$$

con coeficientes κ elegidos tal que el siguiente polinomio, en la variable s , sea un polinomio de Hurwitz

$$s^4 + \kappa_3s^3 + \kappa_2s^2 + \kappa_1s + \kappa_0 \quad (3.17)$$

De lo anterior, sea $F = z_1$, $\dot{F} = z_2$, $\ddot{F} = z_3$, $\dddot{F} = z_4$ y considerando $u = \frac{1}{CA^3B} (\bar{u} - A^4x)$, el sistema queda parametrizado a partir de la salida plana mediante la siguiente cadena de integradores

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= \bar{u}\end{aligned}$$

de tal modo que el sistema general queda representado como:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}\bar{u} \quad (3.18)$$

$$z \in \mathbb{R}^4, \bar{u} \in \mathbb{R}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \bar{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$$

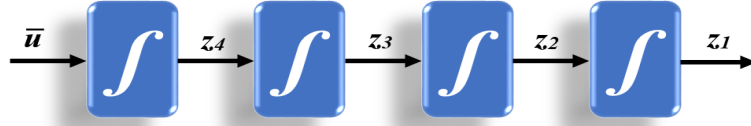


Figura 3.2: Sistema representado en cadena de integradores.

con

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

De manera general, se observa que el sistema no lineal de cuarto orden se transforma a una cadena de integradores mediante la parametrización de la salida plana. La estructura de estas ecuaciones se representa mediante el diagrama de la Figura 3.2.

3.2.1. Resultados de simulación

Usando el modelo linealizado y parametrizado mediante la salida plana mostrado en la anterior sub-sección, se realizaron dos pruebas a nivel simulación (Regulación y Seguimiento de trayectoria) para un RMPI, donde el objetivo principal es verificar que el control propuesto (3.15) consiga que el RMPI llegue a una referencia deseada, sin perder el equilibrio y postura del robot. En ambas pruebas a nivel simulación se utilizaron los parámetros del RMPI, dados en la Tabla 3.1 y con las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = [0, 1 \ 0 \ -0.3 \ 0]^T$.

Regulación del RMPI

La Figura 3.3 muestra las respuestas en el tiempo de los cuatro estados del RMPI. El sistema es forzado a desplazarse de manera súbita a tres referencias deseada en $t = 0s$, $t = 5s$ y $t = 10s$, y se aplica una perturbación al péndulo en el tiempo $t = 14s$. Sin embargo el sistema es capaz de desplazarse y absorber la perturbación sin perder la postura deseada.

La Figura 3.4 muestra la respuesta de la entrada de control aplicada, u , dado por (3.15) y la perturbación aplicada al péndulo. Se observa que el control converge al punto de equilibrio

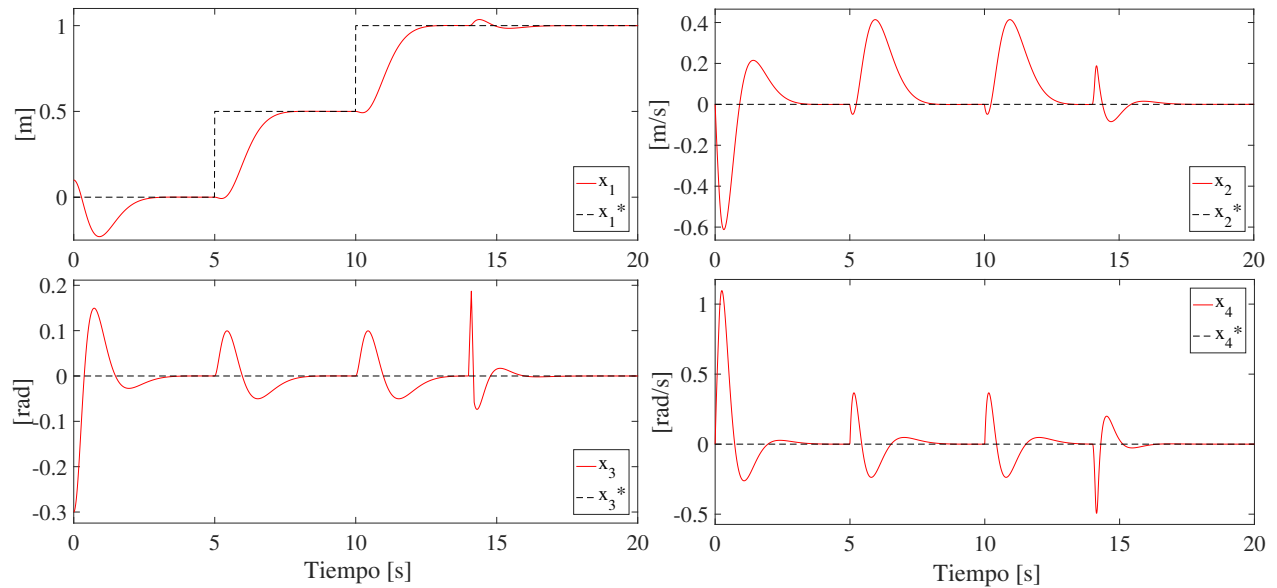


Figura 3.3: Respuesta de los estados del RMPI.

deseado, lo cual significa que el sistema en lazo cerrado es estable y robusto, ya que el sistema parte de condiciones iniciales distintas al equilibrio, resolviendo el problema de regulación de la posición de avance y mantiene la postura de referencia deseada del RMPI.

Seguimiento del RMPI

La segunda prueba consistió en aplicar una trayectoria de referencia, similar a la prueba anterior, la Figura 3.5 muestra las respuestas de los estados del RMPI. En esta figura se observa que el estado x_1 sigue la trayectoria de referencia x_1^* , la cual tiene una forma de una rampa, comenzando en el tiempo $t = 5s$ y finalizando en $t = 16s$. Se observa que los estados siguen a las referencias deseadas tanto en posición como en velocidad.

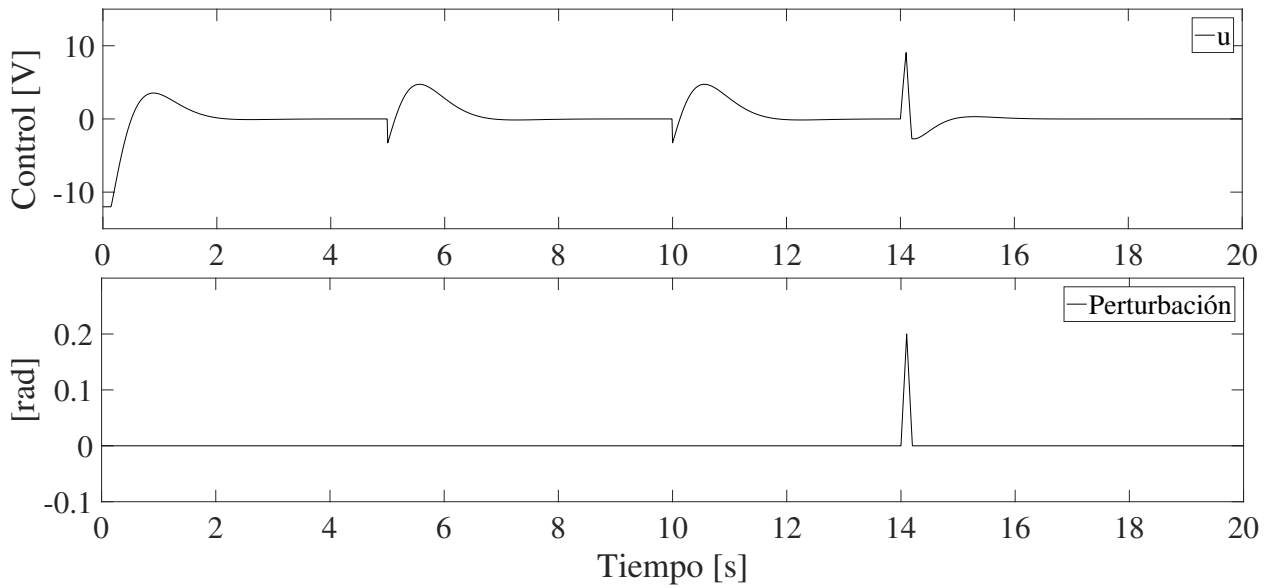


Figura 3.4: Control aplicado por el RMPI y Perturbación aplicada.

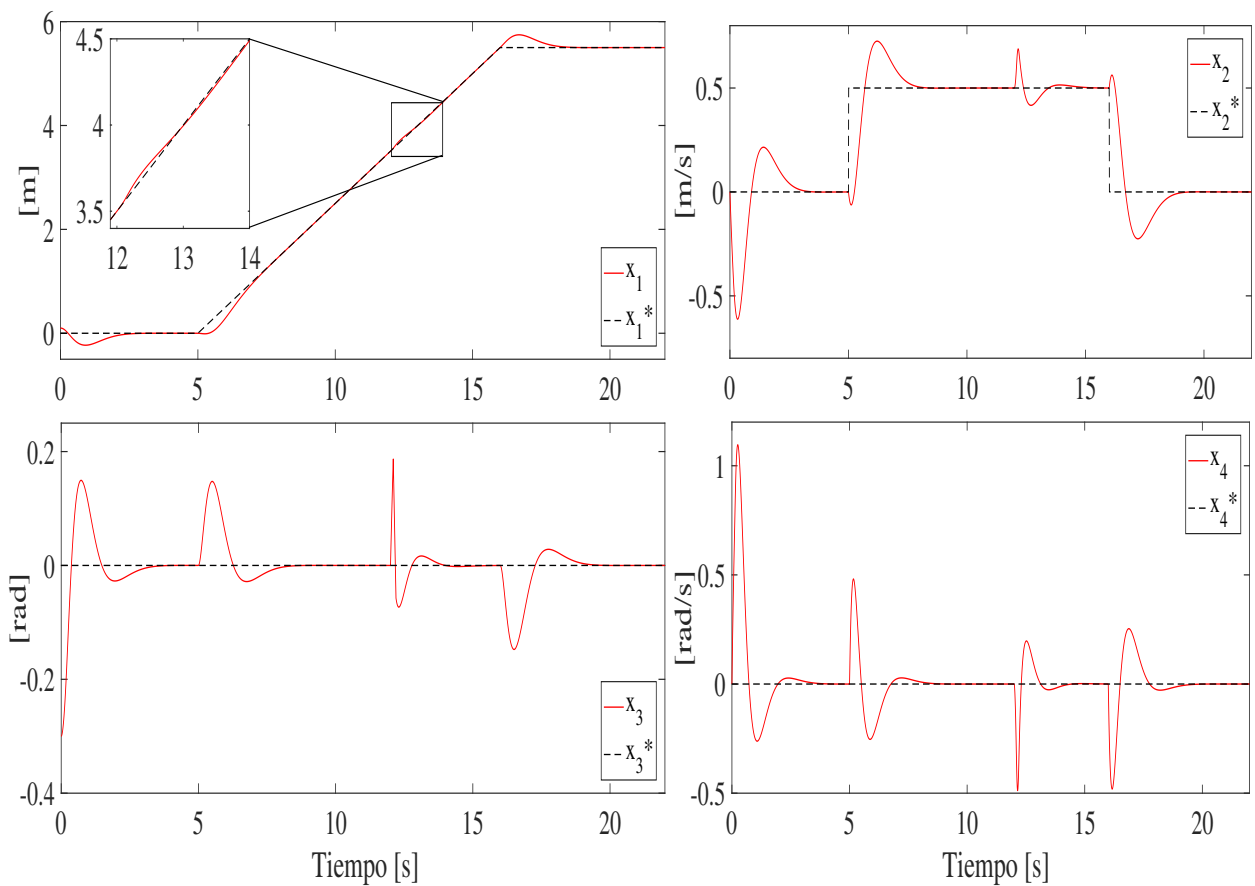


Figura 3.5: Respuesta de los estados del RMPI.

En esta prueba también se le aplicó una perturbación al péndulo con una amplitud máxima de 0.2 rad , como se observa en la Figura 3.6. Sin embargo el control propuesto u consigue controlar el sistema RMPI ante dicha perturbación sin perder la trayectoria de referencia ni la postura erguida del péndulo. Por último en la Figura 3.6, se observa la respuesta del control ante la trayectoria y la perturbación aplicada.

Esto demuestra que es viable que la ley de control (3.15) se lleve a pruebas experimentales ya que, además de resolver el problema de regulación y seguimiento, presenta una estructura simple que puede ser implementada en sistemas embebidos, como se muestra en la siguiente sección.

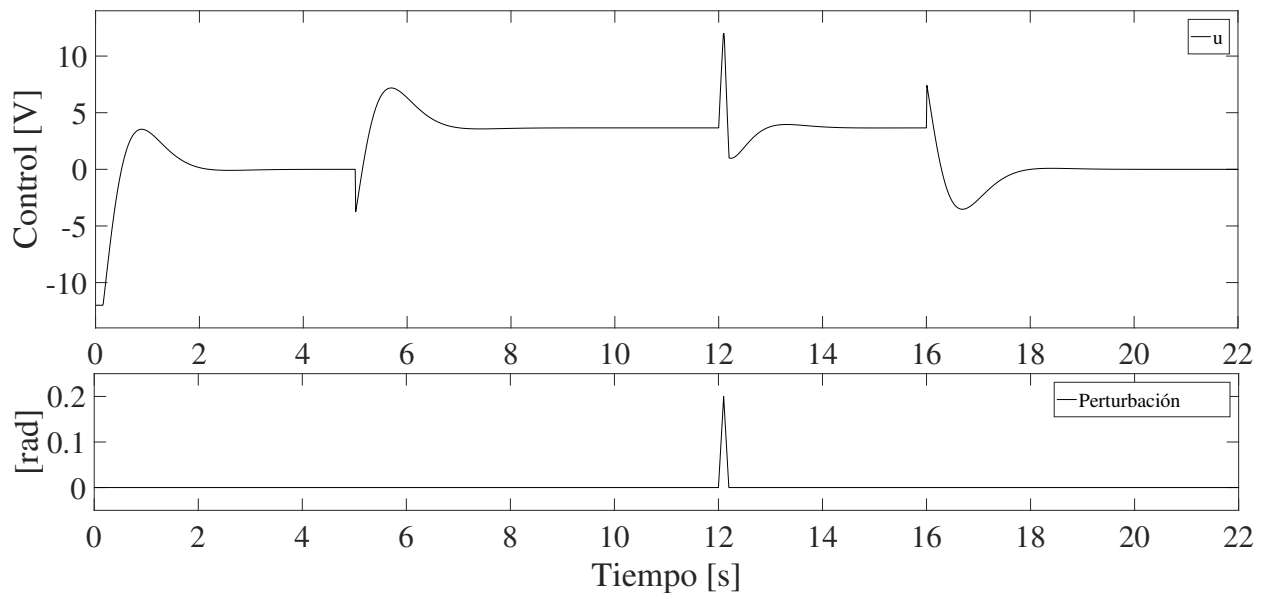


Figura 3.6: Control aplicado por el RMPI y Perturbación aplicada.

3.2.2. Resultados Experimentales

La estrategia de control propuesta (3.15) se implementa experimentalmente en un Robot Móvil tipo Péndulo Invertido (RMPI) como se muestra en la Figura 3.7.

El robot móvil está equipado con una tarjeta DSP Delfino TMS320- F28335 de la firma Texas Instruments, dos motores de corriente directa (DC) acoplados a llantas de capacidades "todo terreno", esto con la finalidad de que el vehículo navegue en terrenos irregulares. El chasis alberga las baterías tipo LiPo de tres celdas (11.1 V), el sistema sensorial, es decir, un inclinómetro modelo G-NSDOG2-003 y encoders de 64 CPR, la electrónica de potencia para el control de los motores (Puente H doble modelo Vnh2sp30). El prototipo cuenta con un dispositivo de comunicación inalámbrica vía WiFi ESP8266 en la parte superior del robot, esto con el propósito de obtener las posiciones y velocidades tanto del avance del robot como del péndulo. El RMPI se monitorea por el sistema de captura Optitrack el cual cuenta con cámaras infrarrojas que a través de una triangulación y procesamiento de imágenes se obtiene la posición de un objeto o varios objetos con una precisión de ± 1 mm. Este equipo se utilizó para verificar que los datos enviados por el robot sean fiables, para posteriormente realizar un esquema multi-agente netamente descentralizado de un conjunto de robots.

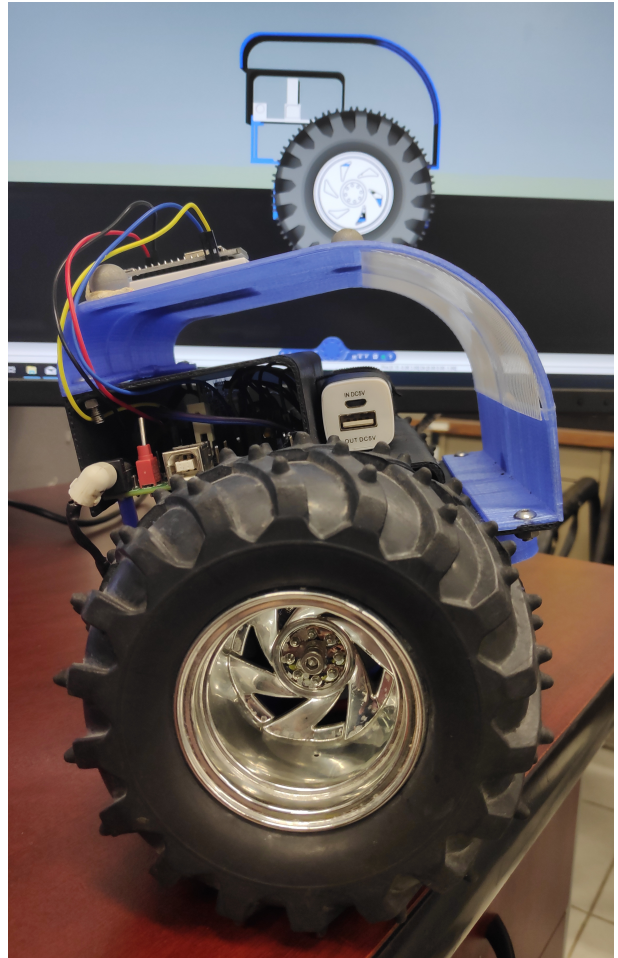


Figura 3.7: Robot Móvil tipo Péndulo Invertido (RMPI).

El sistema de computo embebido se programó en el entorno de Matlab/Simulink como se muestra en la Figura 3.8. Dicha figura esta organizado por señales de entrada (lado izquierdo), señales de salida (lado derecho) y el control propuesto (parte central). La distribución de los puertos GPIO y ADC utilizados se presentan en la Tabla 3.2. La referencia

deseada se programó dentro de la tarjeta.

Las pruebas se realizaron con tiempo de muestreo de $\Delta t = 1ms$, una frecuencia natural de $w_n = 3.5$ y un factor de amortiguamiento de $\xi = 0.7071$ para obtener las ganancias del polinomio Hurwitz expresado en (3.17). Los parámetros del RMPI se presentan en la Tabla 3.1 y con las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = [0,075 \ 0 \ -0,53 \ 0]^T$.

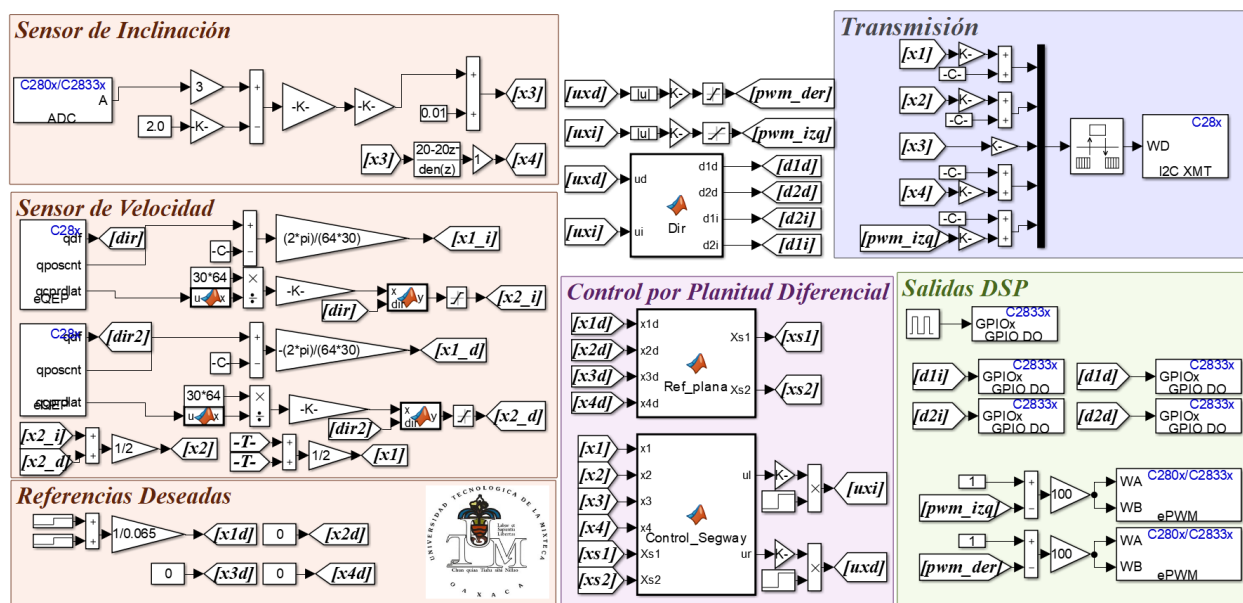


Figura 3.8: Programación de la tarjeta TMS320- F28335 en el entorno de Matlab/Simulink.

Descripción	GPIO/ADC
Sensor de Inclinación	ADC A1
PWM para el motor izq	GPIO 0/ GPIO 1
PWM para el motor der	GPIO 2/ GPIO 3
Encoder izquierdo	GPIO 24/ GPIO 25
Encoder derecho	GPIO 20/ GPIO 21
Dirección de giro izq	GPIO 5/GPIO 7
Dirección de giro der	GPIO 9/GPIO 11
Transmisión I2C	GPIO 32/GPIO 33

Tabla 3.2: Distribución de los Puertos GPIO de la tarjeta DSP-F28335.

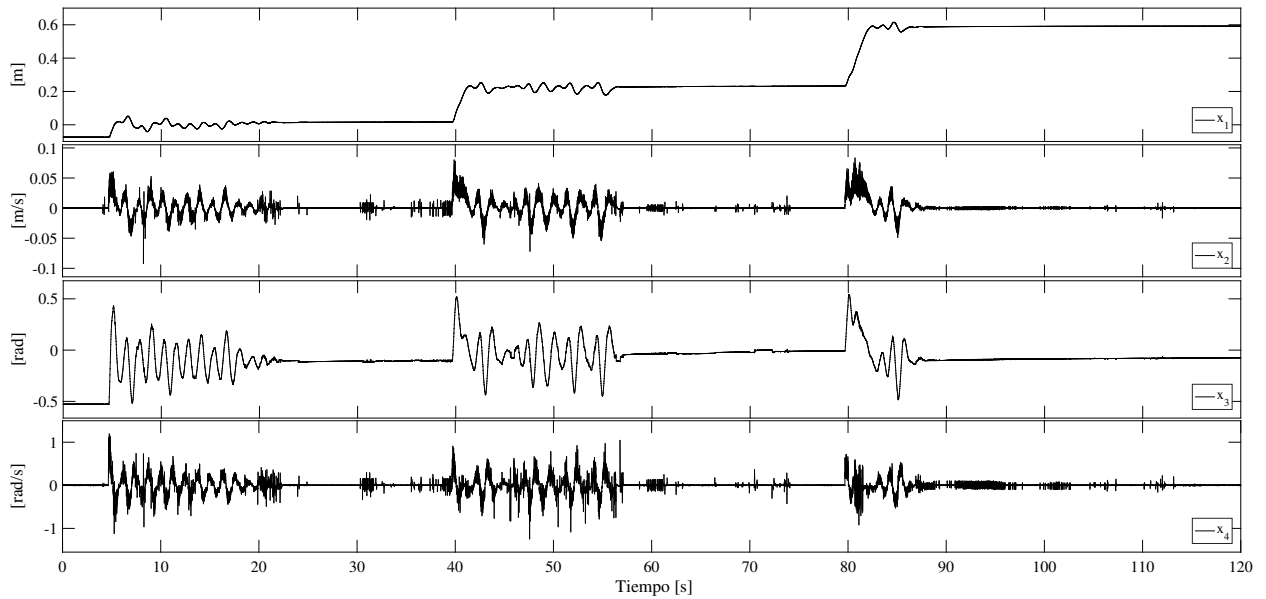


Figura 3.9: Respuesta de los estados del RMPI.

La Figura 3.9, muestra las condiciones iniciales de las variables del robot RMPI, las cuales en el $t = 4.5s$ se enciende el controlador, posteriormente el robot se desplaza a una referencia deseada de 0.2 m en $t = 40s$, y se desplaza a 0.6 m en $t = 80s$.

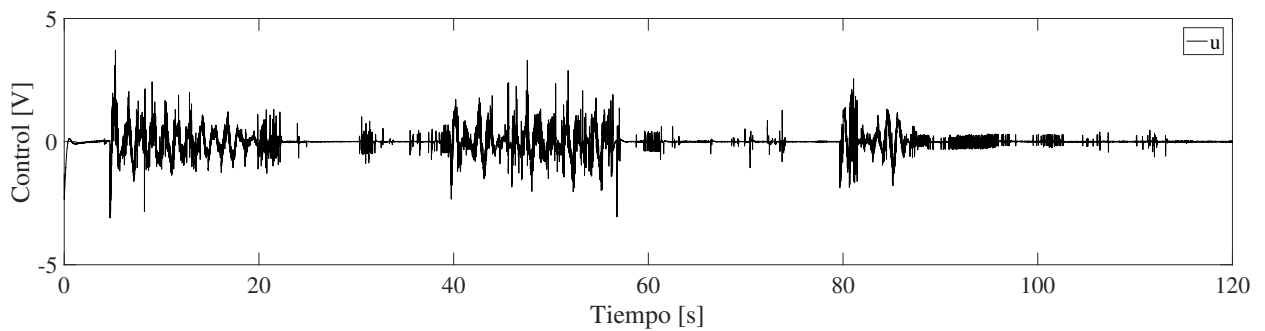


Figura 3.10: Respuesta del control aplicado por el RMPI.

La respuesta de la entrada de control se muestra en la Figura 3.10. En ella se observa que la entrada de control no se satura aún cuando las referencias deseadas son dadas de manera súbita. Esto implica que la ley de control propuesta (3.15), la cual es basada en

la propiedades planitud diferencial del sistema linealizado, resuelve el problema de avance (movimiento traslacional) y postura (autobalanceo) de un RMPI autónomo.

3.3. Control de consenso de múltiples RMPI

En esta sección se presenta el algoritmo de control para el consenso de un grupo de robots tipo RMPI con la característica de poseer un líder de este grupo. El cual controla la postura de los péndulos así como el desplazamiento respecto al sistema de referencia móvil de cada RMPI. El nodo líder genera las señales de referencias deseadas, el cual es representado mediante un sistema autónomo y no es afectado por ningún RMPI de la red. También se presenta la función de evento que determina el instante en el que el i -ésimo RMPI, debe transmitir su estado al j -ésimo RMPI con $j \in N_i$ y la prueba de convergencia a una última cota.

3.3.1. Control basado en planitud y comunicación basada en eventos

Considere un conjunto de RMPI con una topología de comunicación representada mediante un grafo dirigido y fuertemente conectado y teniendo un nodo como líder. La dinámica de cada agente está parametrizada mediante la salida plana $y_i = z_i$. La dinámica del líder se considera como un sistema exógeno de la siguiente forma

$$\dot{z}_0 = \bar{A}z_0 \quad (3.19)$$

y los RMPI seguidores tienen una dinámica de la siguiente forma

$$\dot{z}_i = \bar{A}z_i + \bar{B}\bar{u}_i \quad (3.20)$$

donde \bar{u}_i representa el protocolo de consenso entre los agentes, el cual se presenta en el siguiente Teorema.

Teorema 2 *Considere un nodo líder y un grupo de N -vehículos RMPI representados por (3.19) y (3.20), respectivamente, los cuales interactúan bajo el grafo fuertemente conectado y no dirigido \mathcal{G} . Si existe comunicación entre el RMPI i y el líder, entonces existe un peso*

$g_i > 0$ y el grafo aumentado que contiene al líder se denota por $\bar{\mathcal{G}}$. Entonces la función de control distribuido se define por

$$\bar{u}_i = K \left[\sum_{j=1}^N (m_j - m_i) + g_i(z_0 - m_i) \right] \quad (3.21)$$

y $K = \rho \bar{B}^T P$. Siendo P la solución de la ecuación de Riccati

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} - 2\rho P \bar{B} \bar{B}^T P = -Q$$

Además, la función de evento está dada por:

$$e_i(z_i, m_i) = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} \wedge e_{i_4} \quad (3.22)$$

donde, $e_{i_s} = |\bar{e}_{i_s}| - \delta$ con $\bar{e}_{i_s} = m_{i_s} - z_{i_s}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ el umbral de activación de la función de evento, $i \in \mathcal{V}$ y $s = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces el vector z_i tiende a una vecindad del estado z_0 , esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t)\| = \frac{2\sqrt{N}\delta \|\tilde{B}\| \alpha}{\lambda_1^{\tilde{A}}}$$

donde $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$ y $\varepsilon_i = z_i - z_0$. Con $\lambda_1^{\tilde{A}} = \lambda_{\min}(\tilde{A})$ siendo $\tilde{A} = I_N \otimes \bar{A} - \tilde{B}$, $\alpha = \|R\| \|R^T\|$, con R una matriz que diagonaliza a la matriz \tilde{A} y $\tilde{B} = -H \otimes \bar{B}K$, donde $H = \mathcal{L} + G$, con $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$.

Lo anterior indica que la función de evento (3.22) depende de los estados actuales z_i y de las memorias m_i generadas de la última comunicación existió. Cuando la función de evento (3.22) se cumple, el estado del agente i (z_i) es transmitido a los agentes con los que tiene comunicación y se almacena en una memoria m_i y el control u_i (definido en (3.21)) se calcula con los datos actualizados. En caso contrario, los estados z_i no se transmiten, las memorias no se actualizan y el control es calculado con las memorias guardadas del último evento que ocurrió.

Prueba 1 Sea el control de consenso de múltiples RMPI determinado por las memorias m_i del estado z_i de la última vez que ocurrió un evento

$$\bar{u}_i = K \left[\sum_{j=1}^N (m_j - m_i) + g_i(z_0 - m_i) \right]$$

y si se define el error de la memoria con respecto al estado $\bar{e}_i = m_i - z_i$ o bien $m_i = \bar{e}_i + z_i$ y el error del estado con respecto a la referencia z_0 como $\varepsilon_i = z_i - z_0$, el control se escribe en términos de ε_i

$$\bar{u}_i = K \left[\sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + g_i \varepsilon_i + \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) - g_i \bar{e}_i \right]$$

recuerde que el objetivo es $\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\|z_i - z_0\|}_{\varepsilon_i} = 0$ o al menos a una vecindad del origen, entonces

la dinámica del error es:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \dot{z}_i - \dot{z}_0 = \bar{A}z_i + \bar{B}\bar{u}_i - \bar{A}z_0 = \bar{A}(z_i - z_0) + \bar{B}\bar{u}_i \\ \dot{\bar{e}}_i &= \bar{A}\varepsilon_i + \bar{B}\bar{u}_i \end{aligned}$$

así que la dinámica del error en lazo cerrado se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \bar{A}\varepsilon_i + \bar{B} \left(K \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + K g_i \varepsilon_i \right. \\ &\quad \left. + K \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) - K g_i \bar{e}_i \right) \\ &= \bar{A}\varepsilon_i + \bar{B}K \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + \bar{B}K g_i \varepsilon_i \\ &\quad + \bar{B}K \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) - \bar{B}K g_i \bar{e}_i \end{aligned}$$

haciendo $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$, $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$, $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_N)$ se escribe el sistema multi-agente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= (I_N \otimes \bar{A})\varepsilon - (I_N \otimes \bar{B})(\mathcal{L} \otimes I_N)(I_N \otimes K)\varepsilon \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B})(G \otimes I_N)(I_N \otimes K)\varepsilon \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B})(\mathcal{L} \otimes I_N)(I_N \otimes K)\bar{e} \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B})(G \otimes I_N)(I_N \otimes K)\bar{e} \\ \dot{\bar{e}} &= [I_N \otimes \bar{A} - (\mathcal{L} + G) \otimes \bar{B}K] \varepsilon + [-(\mathcal{L} + G) \otimes \bar{B}K] \bar{e} \\ \dot{\varepsilon} &= \left[\underbrace{(I_N \otimes \bar{A}) - H \otimes \bar{B}K}_{\bar{A}} \right] \varepsilon + \left[\underbrace{-(H \otimes \bar{B}K)}_{\bar{B}} \right] \bar{e} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Observación 1: La matriz $H = \mathcal{L} + G$ corresponde al grafo $\bar{\mathcal{G}}$ y tiene las siguientes propiedades (ver [33]):

- H contiene valores propios positivos
- H es definida positiva

Observación 2: En este trabajo se asume que el grafo $\bar{\mathcal{G}}$ está fuertemente conectado, es decir, existe un camino entre cada par de vértices.

Se asume primero que $\bar{e} = 0$ y se prueba que el sistema $\dot{\varepsilon} = \tilde{A}\varepsilon$ es asintóticamente estable. Para esto proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T (I_N \otimes P) \varepsilon$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= \varepsilon^T [(I_N \otimes \bar{A}^T) - (H \otimes K^T \bar{B}^T) (I_N \otimes P)] \varepsilon \\ &+ \varepsilon^T [(I_N \otimes P) (I_N \otimes \bar{A} - H \otimes \bar{B}K)] \varepsilon \\ &= \varepsilon^T [I_N \otimes (P\bar{A} + \bar{A}^T P) - H \otimes (2P\bar{B}\bar{B}^T P)] \varepsilon \end{aligned}$$

puesto que H es simétrica, existe una matriz $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que $THT^T = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ donde $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ son los valores propios de H los cuales por la observación 1 son positivos.

Sea $\tilde{\varepsilon} = (T \otimes I_N)\varepsilon$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\varepsilon}^T [(I_N \otimes (P\bar{A} + \bar{A}^T P)) - \Lambda \otimes (2P\bar{B}\bar{B}^T P)] \tilde{\varepsilon} \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T [P\bar{A} + \bar{A}^T P - \lambda_i (2P\bar{B}\bar{B}^T P)] \tilde{\varepsilon}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T \left[\underbrace{P\bar{A} + \bar{A}^T P - \rho (2P\bar{B}\bar{B}^T P)}_{-Q} \right] \tilde{\varepsilon}_i \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T Q \tilde{\varepsilon}_i \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^T \underbrace{(I_N \otimes T^T) Q (T \otimes I_N)}_{\bar{Q}} \varepsilon_i \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^T \bar{Q} \varepsilon_i < 0 \quad \forall \quad \varepsilon_i \neq 0 \end{aligned}$$

$\implies \bar{A}$ es Hurwitz y $\varepsilon_i \rightarrow 0$ cuando $\bar{e} = 0$ y $t \rightarrow \infty$.

Ahora, consideremos el caso general donde $\bar{e} \neq 0$ y se asume que el valor propio más pequeño de \tilde{A} es $\rho = \lambda_1^{\tilde{A}}$, entonces

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{A}\varepsilon + \tilde{B}\bar{e}$$

la solución de esta ecuación es

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= e^{\tilde{A}t}\varepsilon(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}\bar{e}(\tau) d\tau \\ \|\varepsilon(t)\| &\leq \left\| e^{\tilde{A}t}\varepsilon(0) \right\| + \int_0^t \left\| e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}\bar{e}(\tau) \right\| d\tau\end{aligned}$$

se asume $\lambda_1^{\tilde{A}} = \lambda_{\min}(\tilde{A})$, y $R\tilde{A}R^T = \Phi = \text{diag}(\lambda_1^{\tilde{A}}, \dots, \lambda_N^{\tilde{A}})$ entonces

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}t} \|\varepsilon(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}(t-\tau)} \left\| \tilde{B}\bar{e}(\tau) \right\| d\tau$$

donde

$$\alpha = \|R\| \|R^T\|$$

note que $\left\| \tilde{B}\bar{e} \right\| \leq \left\| \tilde{B} \right\| \|\bar{e}\|$, puesto que la condición de evento fuerza a

$$\|\bar{e}\| = \sqrt{4\delta^2 + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^2} = 2\delta\sqrt{N}$$

y se sustituye

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(t)\| &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}t} \|\varepsilon(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}(t-\tau)} 2\delta\sqrt{N} \left\| \tilde{B} \right\| d\tau \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}t} \|\varepsilon(0)\| + 2\alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}t} \left\| \tilde{B} \right\| \delta\sqrt{N} \int_0^t e^{\lambda_1^{\tilde{A}}\tau} d\tau \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}t} \|\varepsilon(0)\| \\ &\quad + 2\alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}}t} \left\| \tilde{B} \right\| \delta\sqrt{N} \left(\frac{e^{\lambda_1^{\tilde{A}}t}}{\lambda_1^{\tilde{A}}} - \frac{1}{\lambda_1^{\tilde{A}}} \right) \\ \|\varepsilon(t)\| &\leq \frac{2\alpha\delta\sqrt{N} \left\| \tilde{B} \right\|}{\lambda_1^{\tilde{A}}}\end{aligned}\tag{3.24}$$

Entonces el estado de los RMPI, $z_i(t)$, tienden a una vecindad de z_0 y se mantienen al menos a una distancia $\|\varepsilon(t)\|$ cuando $t \rightarrow \infty$.

3.3.2. Implementación de la estrategia de control

La estrategia de control se implementa siguiendo el diagrama a bloques de la Figura 3.11.

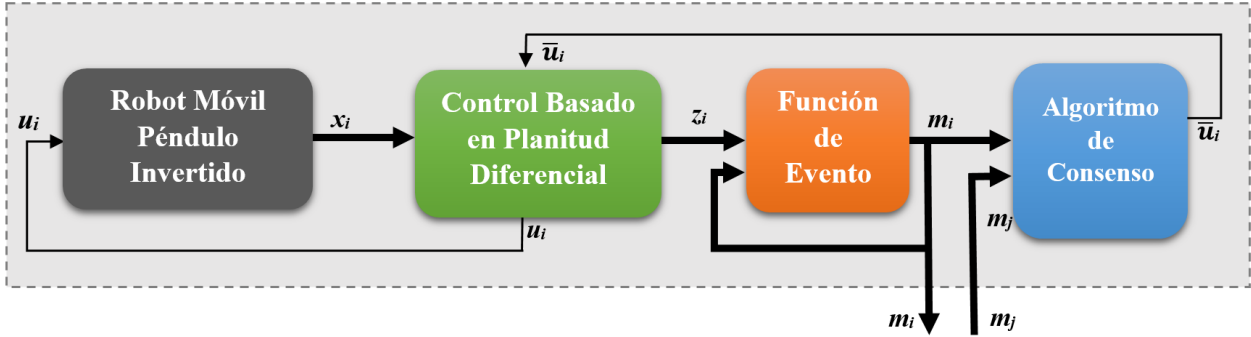


Figura 3.11: Diagrama general de cada agente.

Dicho diagrama muestra el esquema general del control propuesto para cada agente i . El primer bloque (gris) representa el modelo dinámico del robot móvil i , con la entrada de control u_i y el estado del sistema representado por $x_i = (x_{1i} \ x_{2i} \ x_{3i} \ x_{4i})^T$. A partir de planitud diferencial del sistema se parametriza mediante la salida plana y se expresa en términos de $z_i = (z_{1i} \ z_{2i} \ z_{3i} \ z_{4i})^T$, lo cual es representado mediante el segundo bloque (verde). Este bloque recibe la señal de control \bar{u}_i determinado por el algoritmo de consenso y envía la señal correspondiente de control u_i al robot para regular la postura y desplazamiento. Esta relación está dada por

$$u_i = \frac{1}{C_i A_i^3 B_i} (\bar{u}_i - C_i A_i^4 x_i) \quad (3.25)$$

El tercer bloque (naranja) es la función de evento que determina, cuando el estado z_i debe actualizarse a m_i y éste se retroalimenta, y se envía también al algoritmo de consenso (bloque azul). Este último bloque contiene el control de consenso del robot i (\bar{u}_i) calculado y determinado por los agentes j con los que existe comunicación.

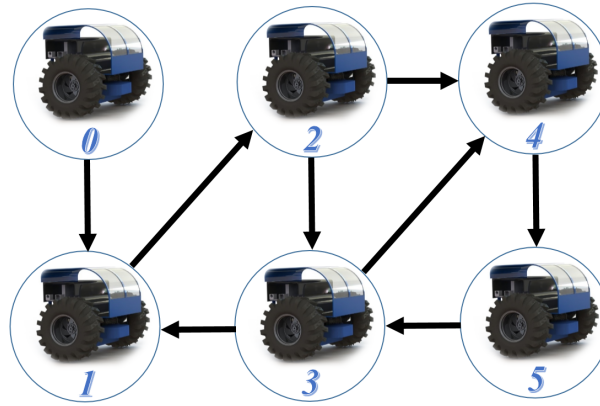


Figura 3.12: Grafo dirigido.

3.4. Resultados

3.4.1. Resultados a nivel simulación

Con el fin de validar la técnica de control propuesta, se realizaron algunas simulaciones numéricas. Para ello, se consideraron 5 robots móviles cuyos parámetros son mostrados en la Tabla 3.1. El objetivo de estas simulaciones fue para verificar que los robots móviles se movieran a una referencia deseada determinada por el líder, el cual es denotado $RMPI_0$. Además, se realizaron dos pruebas a un conjunto de 5 RMPI, la primera prueba consistió en regular desplazamiento de cada agente a una posición de referencia deseada, y la segunda prueba consistió en el seguimiento de trayectoria parar el desplazamiento traslacional. Nótese que en ambas pruebas se reguló la postura erguida de cada uno de los RMPI. La intercomunicación entre los agentes del sistema multi-robot se muestra en la Figura 3.12, la cual consiste de un grafo dirigido y fuertemente conectado, donde sólo el $RMPI_1$ obtiene información del nodo líder. Se asume que no existe un retardo en la comunicación entre los agentes, y las condiciones iniciales se establecen en la Tabla 3.3, así como la referencia deseada dada por el líder $RMPI_0 = (0,5 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ y $K = \{1,5 \ 1,5 \ 1,5 \ 1,5 \ 1,5\}$. Note que el nodo cero (líder) es considerado como un exo-sistema el cual es el encargado de generar la trayectoria que deberán seguir los otros nodos.

	$(x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0) \ x_4(0))^T$
$RMPI_1$	$(-0.5 \ 0 \ 0.52 \ 0)^T$
$RMPI_2$	$(0.5 \ 0 \ -0.4 \ 0)^T$
$RMPI_3$	$(-0.3 \ 0 \ 0.2 \ 0)^T$
$RMPI_4$	$(-0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0)^T$
$RMPI_5$	$(-0.3 \ 0 \ -0.2 \ 0)^T$

Tabla 3.3: Condiciones iniciales de los 5 RMPI.

3.4.2. Consenso con un líder con posición constante

La Figura 3.13 muestra la evolución de los cuatro estados de cada uno de los agentes. Se observa que el estado x_{1i} , corresponde a la posición lineal de cada uno de los robots, el cual alcanza la posición de referencia deseada. Del mismo modo, el estado x_{3i} , corresponde a la posición angular de cada uno de los péndulos, el cual llega de forma consensuada a la

referencia deseada, es decir, a una postura erguida. También se observa que en el instante $t = 25s$ un disturbio se aplica al $RMPI_2$ lo cual afecta tanto la postura (posición angular) como la posición lineal en los otros RMPIs.

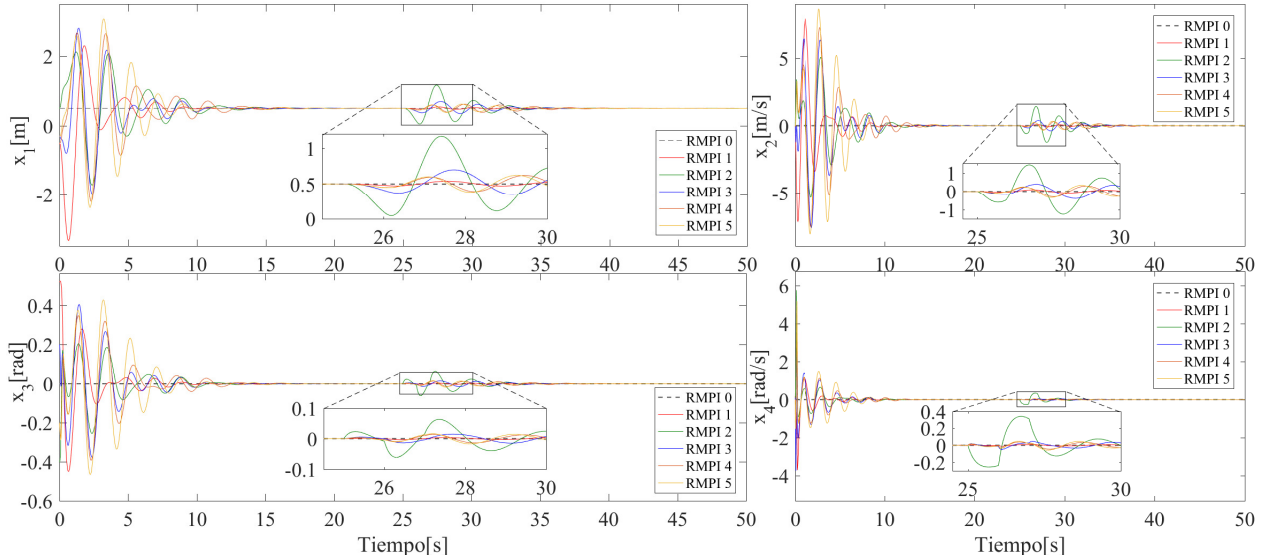


Figura 3.13: Respuesta de los estados de los 5 agentes.

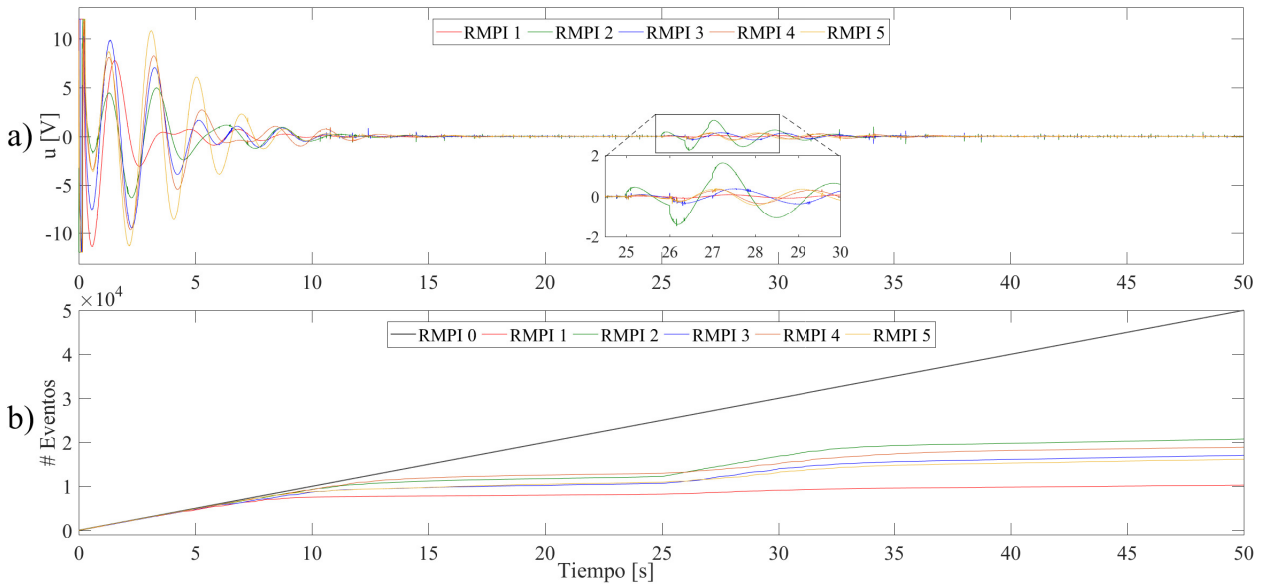


Figura 3.14: a) Evolución de las señales de control de los cinco agentes, b) Evolución del número de eventos disparados.

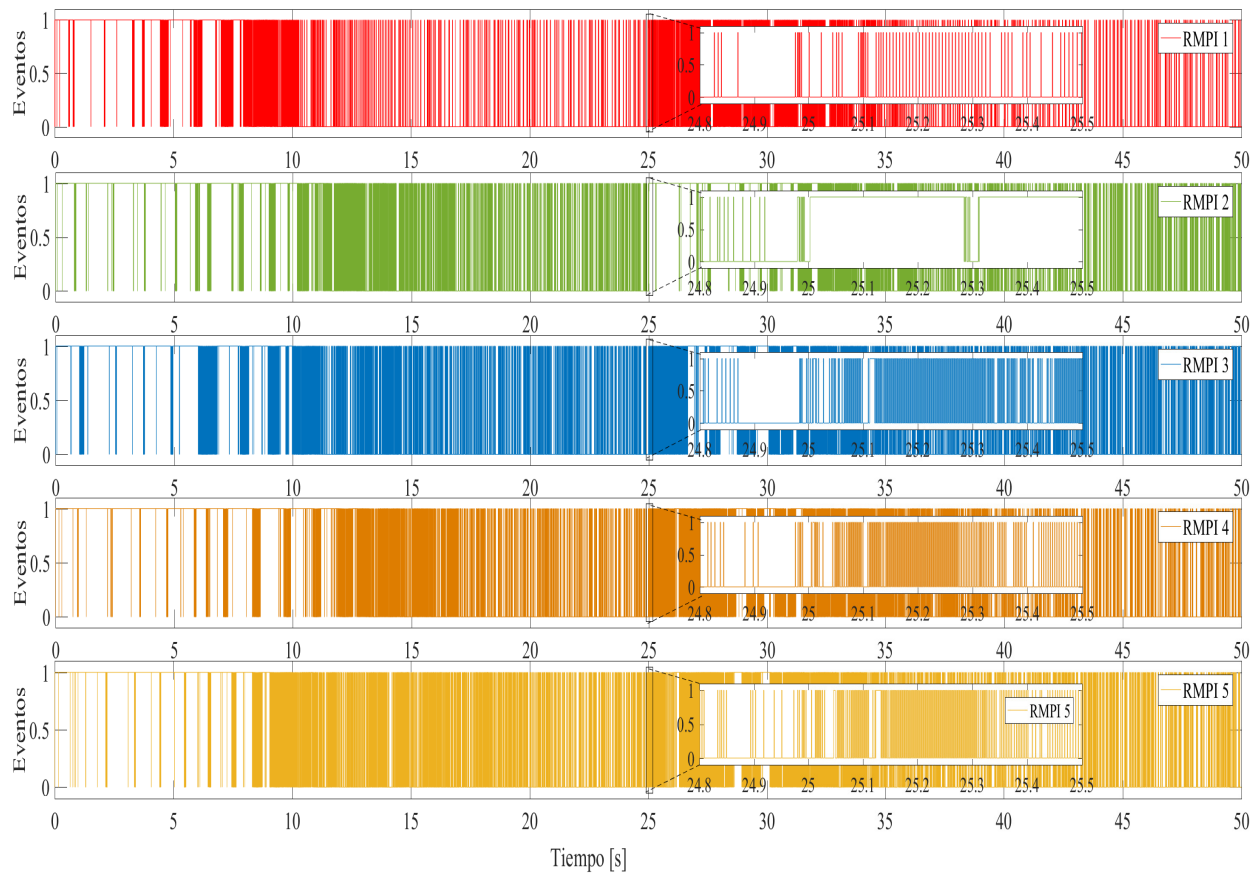


Figura 3.15: Eventos realizados por los 5 agentes.

La Figura 3.14(a) muestra la señal de control calculada por el algoritmo propuesto para cada uno de los robots. Se observa que el control aplicado para cada robot depende del estado del agente en cuestión, y de los estados de cada uno de los agentes con los que existe comunicación. La Figura 3.14(b), muestra la evolución en el número de eventos de cada uno de los móviles, es decir, las ocasiones en la que la función de evento determinó que debe existir comunicación entre los agentes. Note que hay un incremento en el número de eventos en $t = 25s$, esto se debe a que es necesaria una comunicación más continua cuando existe una perturbación. Ahí, se observa que existe una gran reducción en las veces que se requiere hacer una transmisión de información entre agentes, en comparación con un esquema de transmisión continua en el tiempo. La Figura 3.15 muestra los eventos realizados por cada uno de los agentes. Se observa que existen momentos en los que cada agente no envía información a sus vecinos correspondientes, lo que permite un ahorro computacional y energético. En el apartado 3.4.4 se muestra que a pesar de la gran reducción en el número

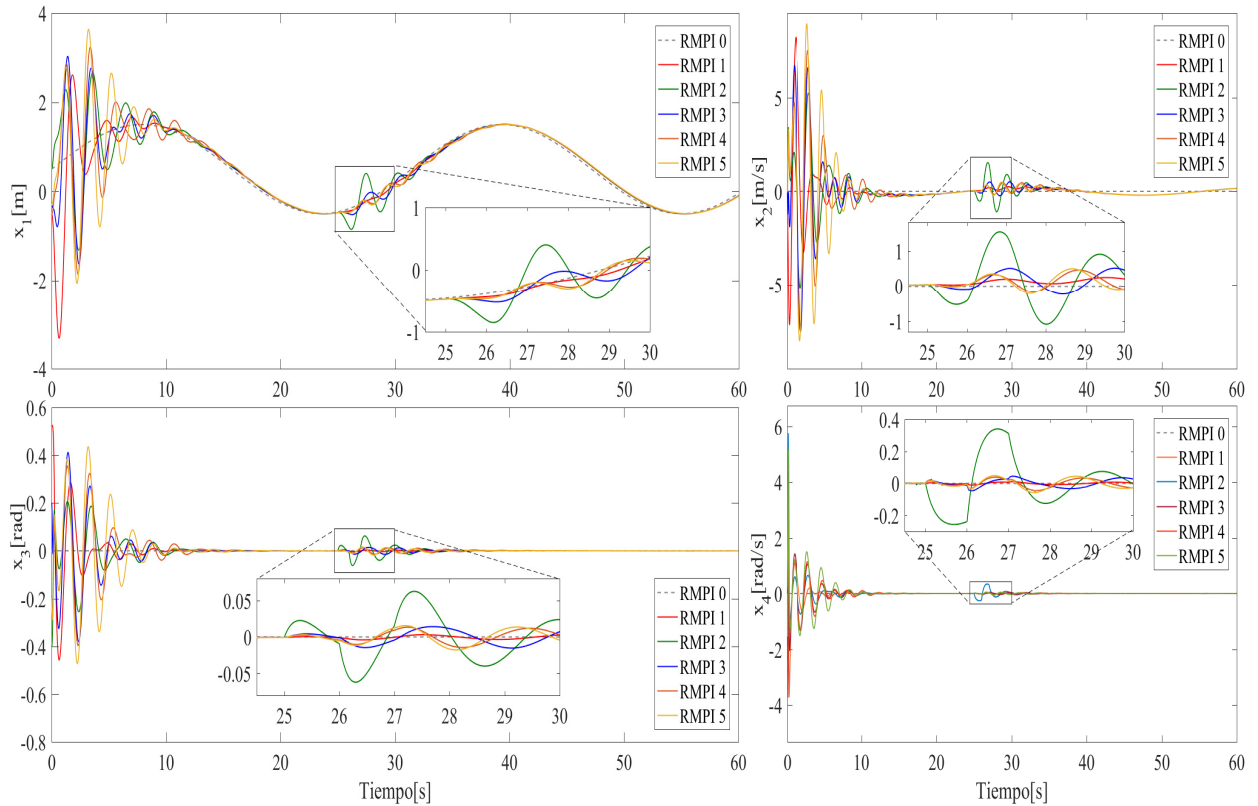


Figura 3.16: Respuesta de los estados de los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria.

de transmisión entre agentes, el desempeño se ve poco afectado con respecto al desempeño que pudiera obtenerse con una transmisión continua. Para dar más claridad a los resultados obtenidos, se recomienda al lector consultar una visualización 3D de la prueba en la siguiente dirección: <https://www.youtube.com/watch?v=axCZdrG4MVw>.

3.4.3. Consenso con un líder con posición lineal variante en el tiempo

Este escenario consiste en el seguimiento del líder, cuando éste se desplaza en una trayectoria variante en el tiempo. La Figura 3.16 muestra los cuatro estados de cada uno de los agentes. Como se mencionó con anterioridad, x_{1i} y x_{2i} corresponde a la respuesta de posición y velocidad lineal, en el sistema de referencia del móvil. De igual forma, se muestra

los estados x_{3i} y x_{4i} , correspondiente a la posición y velocidad angular. La figura refleja que los estados alcanzan la referencia en posición lineal, determinada por el líder, mientras se controla la posición angular. En el instante $t = 25s$ el robot $RMPI_2$ se somete a un disturbio, el cual afecta tanto la postura como el desplazamiento en los otros RMPIs.

De igual manera que la prueba anterior se observa en la Figura 3.17(a) la señal de control calculada por el algoritmo propuesto para cada uno de los robots. En la parte inferior, Figura 3.17(b), se encuentran el número de eventos disparados en cada uno de los móviles. Se observa que en esta prueba se generan un mayor número de eventos que en la prueba anterior, esto debido a que la posición de referencia dada por el agente líder, está en constante cambio y que los agentes necesitan transmitir un mayor número de información, lo cual es razonable. A pesar de ello, sigue existiendo un ahorro computacional y energético. Se invita al lector a visualizar en 3D el escenario anteriormente descrito en la siguiente liga: <https://www.youtube.com/watch?v=ZEs05oHH6yw>.

3.4.4. Consenso en tiempo continuo vs Consenso basado en eventos

En los apartados anteriores se describió el resultado obtenido con la técnica de control propuesta ante dos escenarios representativos. Estos resultados mostraron que el consenso del conjunto de vehículos se logra mientras existe una importante disminución del tráfico de información en la red de comunicaciones. Sin embargo, una pregunta lógica es ¿Qué pasa con el desempeño de la técnica propuesta respecto a una transmisión continua de información entre agentes?. Para responder a esta pregunta se considera la ley de control propuesta, dada por (3.21) y una ley de control para el consenso con transmisión de información continua dada por la siguiente expresión:

$$\bar{u}_i = K \left[\sum_{j=1}^N (z_j - z_i) + g_i(z_0 - z_i) \right] \quad (3.26)$$

El escenario considerado es el mismo presentado en el apartado 3.4.3. Para ello se realizaron 5 pruebas para el seguimiento de trayectoria con diferentes condiciones iniciales, las cuales se muestran en la Tabla 3.4. El objetivo de estas pruebas es obtener una comparativa estadística. Se utilizó el criterio de la Integral del Error Cuadrático (ISE, por sus siglas en ingles) de los estados x_1 (desplazamiento) con respecto a la señal emitida por el líder en cada prueba y se obtuvo un promedio. Se realizó el mismo procedimiento con el estado x_3 (ángulo del péndulo). La Tabla 3.5 muestra los criterios ISE promedio de las 5 pruebas realizadas, y la

Figura 3.19 muestra la evolución del ISE promedio para los estados x_1 y x_3 de cada robot a través del tiempo.

	$RMPI_1$	$RMPI_2$	$RMPI_3$	$RMPI_4$	$RMPI_5$
1	$(-0.5 \ 0 \ 0.52 \ 0)^T$	$(0.5 \ 0 \ -0.4 \ 0)^T$	$(-0.3 \ 0 \ 0.2 \ 0)^T$	$(-0.5 \ 0 \ -0. \ 0)^T$	$(-0.3 \ 0 \ -0.2 \ 0)^T$
2	$(-0.3 \ 0 \ -0.2 \ 0)^T$	$(-0.2 \ 0 \ 0.25 \ 0)^T$	$(-1 \ 0 \ 0.1 \ 0)^T$	$(-0.3 \ 0 \ -0.1 \ 0)^T$	$(0.25 \ 0 \ -0.2 \ 0)^T$
3	$(0 \ 0 \ -0.4 \ 0)^T$	$(0.5 \ 0 \ -0.3 \ 0)^T$	$(1 \ 0 \ -0.2 \ 0)^T$	$(-0.7 \ 0 \ 0.3 \ 0)^T$	$(-0.6 \ 0 \ 0.15 \ 0)^T$
4	$(0.2 \ 0 \ 0.3 \ 0)^T$	$(-0.7 \ 0 \ -0.25 \ 0)^T$	$(-0.3 \ 0 \ -0.3 \ 0)^T$	$(0.5 \ 0 \ 0.25 \ 0)^T$	$(0.8 \ 0 \ -0.1 \ 0)^T$
5	$(1 \ 0 \ 0.15 \ 0)^T$	$(0.7 \ 0 \ 0.2 \ 0)^T$	$(0 \ 0 \ 0.4 \ 0)^T$	$(-0.3 \ 0 \ 0 \ 0)^T$	$(-0.4 \ 0 \ -0.2 \ 0)^T$

Tabla 3.4: Condiciones iniciales $x_i(0) = (x_{1_i}(0) \ x_{2_i}(0) \ x_{3_i}(0) \ x_{3_i}(0))^T$ utilizadas en las 5 pruebas.

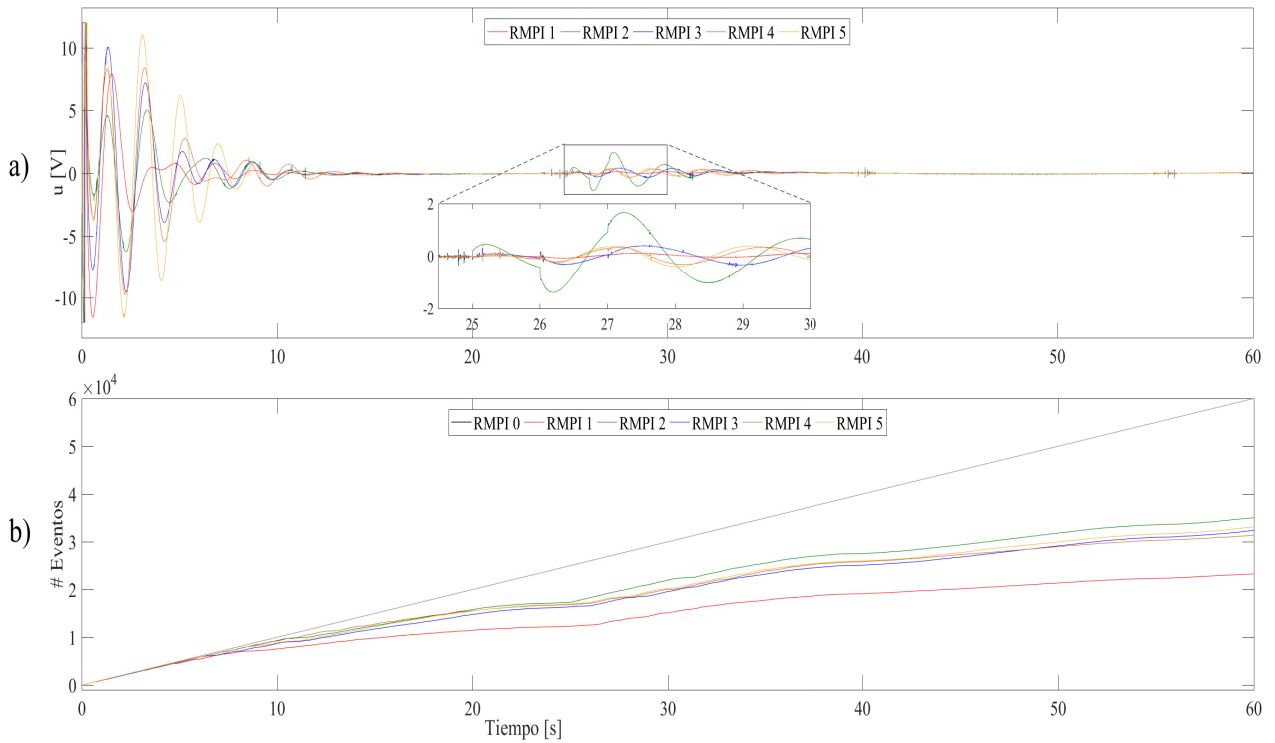


Figura 3.17: Respuesta de los controles de los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria.

	ISE Promedio x_1		ISE Promedio x_3	
	CTC	CBE	CTC	CBE
$RMPI_1$	3.0798	3.1002	0.0539	0.0549
$RMPI_2$	3.0137	3.0973	0.0418	0.0435
$RMPI_3$	2.7828	3.2782	0.0710	0.0808
$RMPI_4$	3.7854	3.9480	0.0672	0.0708
$RMPI_5$	4.2822	4.5283	0.1037	0.1104

Tabla 3.5: Promedio de los criterios ISE de las 5 pruebas, para una estrategia de Control en tiempo continuo (CTC) y Control Basado en Eventos (CBE).

Esta información indica que los errores obtenidos usando un control de consenso disparado por eventos (la transmisión de información entre agentes es asíncrona) son muy cercanos a los errores resultantes en un control de consenso en tiempo continuo (la transmisión de información entre agentes es continua). Lo anterior muestra que la técnica de control propuesta en este trabajo, consigue reducir el tráfico de datos y el gasto computacional y energético, todo ello sin sacrificar el desempeño del sistema.

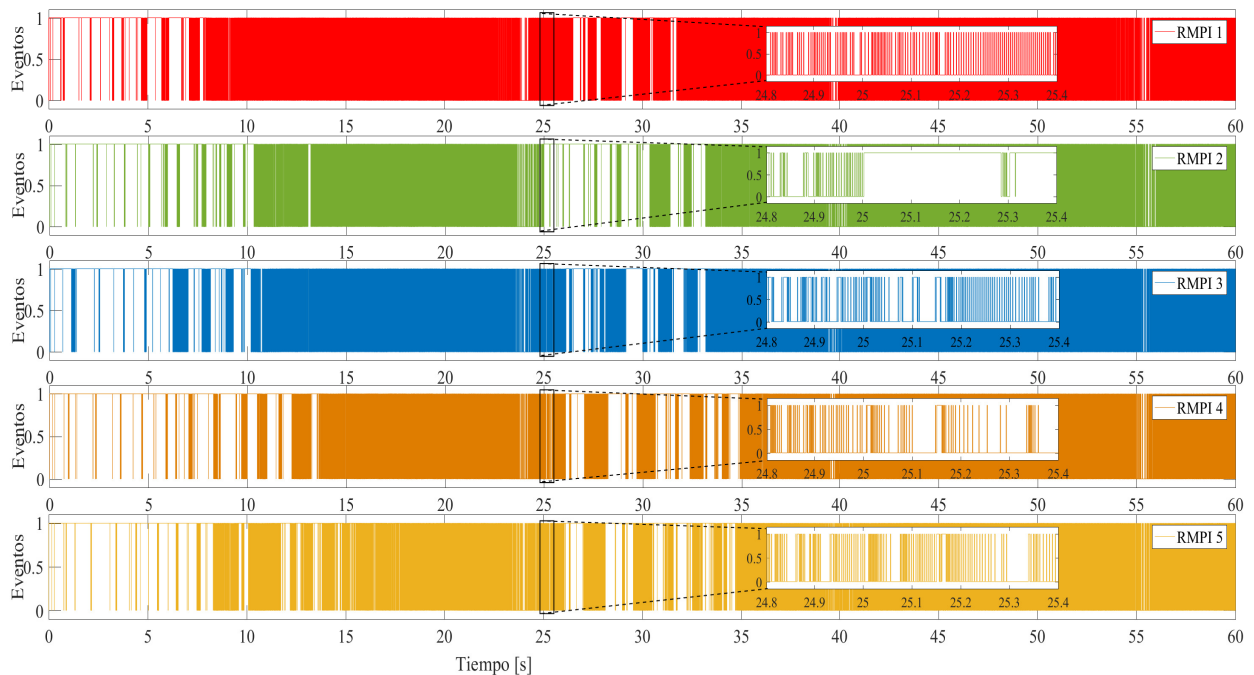


Figura 3.18: Eventos realizados por los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria.

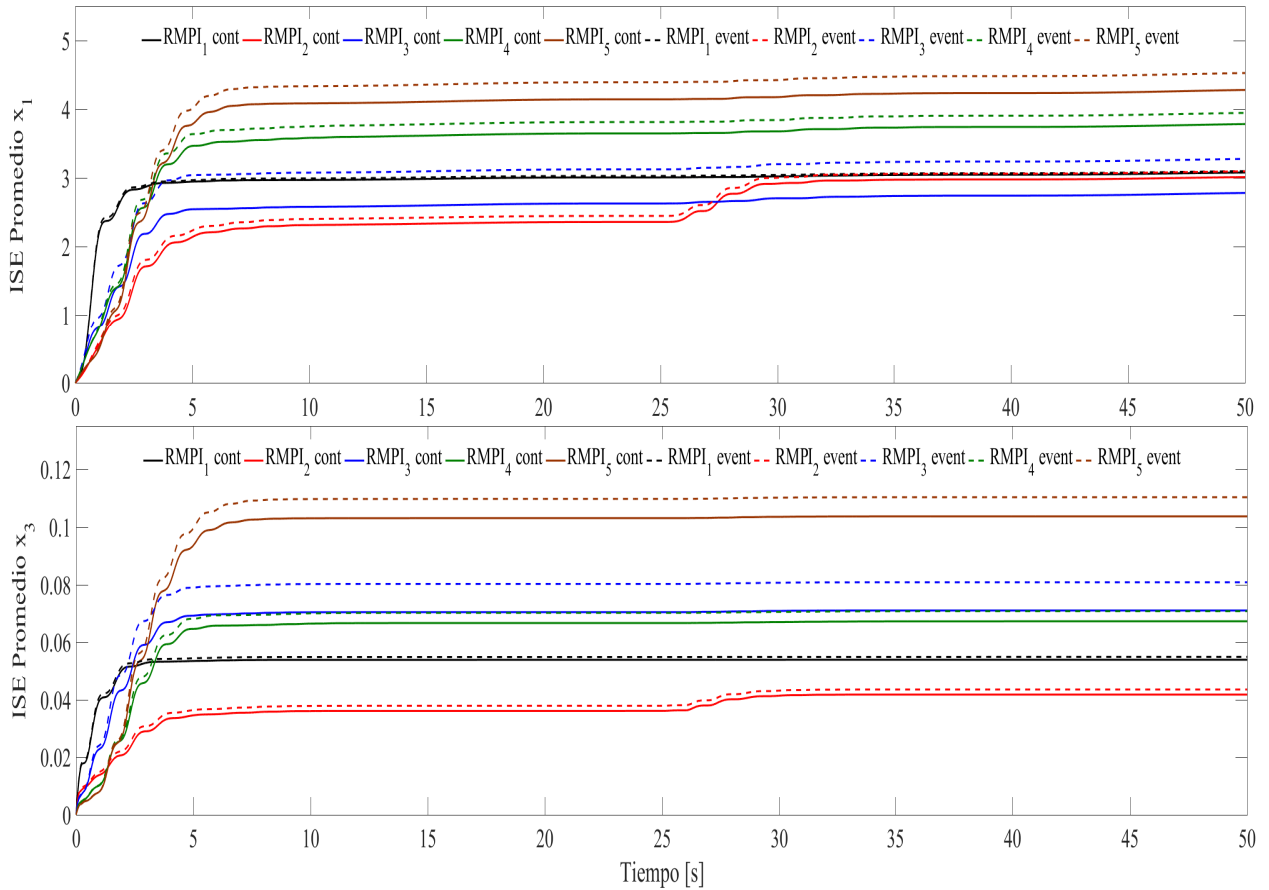


Figura 3.19: Integral del error cuadrático de las 5 pruebas.

3.4.5. Resultados Experimentales

En esta sección, se realizaron pruebas experimentales en un escenario donde 5 RMPIs se desplazan de manera lineal y respetan las referencias deseadas dadas por el líder (el cual se considera como un exosistema), mediante un intercambio de información local. Las pruebas se realizaron considerando un RMPi real y 4 robots virtuales, bajo una red de comunicación dada por el grafo conectado y dirigido (Figura. 3.12). El robot real representa al $RMPi_1$ el grafo utilizado y, por simplicidad, tiene programado las referencias dadas por el agente líder $RMPi_0$. Los parámetros tanto del sistema real como de los virtuales están dados en la Tabla 3.1 y con condiciones iniciales dadas por la Tabla 3.6. La Figura 3.20 muestra el comportamiento de los estados de cada uno de los RMPIs a través del tiempo. Se aprecia que el sistema multi-agente se somete a cambio de referencia en $t \approx 21,7s$ y $t \approx 41,7$, por

	$(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)^T$
$RMPI_1$	$(0.008 \quad 0 \quad 0.7810 \quad 0)^T$
$RMPI_2$	$(0.300 \quad 0 \quad -0.200 \quad 0)^T$
$RMPI_3$	$(-0.10 \quad 0 \quad -0.200 \quad 0)^T$
$RMPI_4$	$(-0.40 \quad 0 \quad 0.200 \quad 0)^T$
$RMPI_5$	$(0.200 \quad 0 \quad -0.25 \quad 0)^T$

Tabla 3.6: Condiciones iniciales de los 5 RMPI.

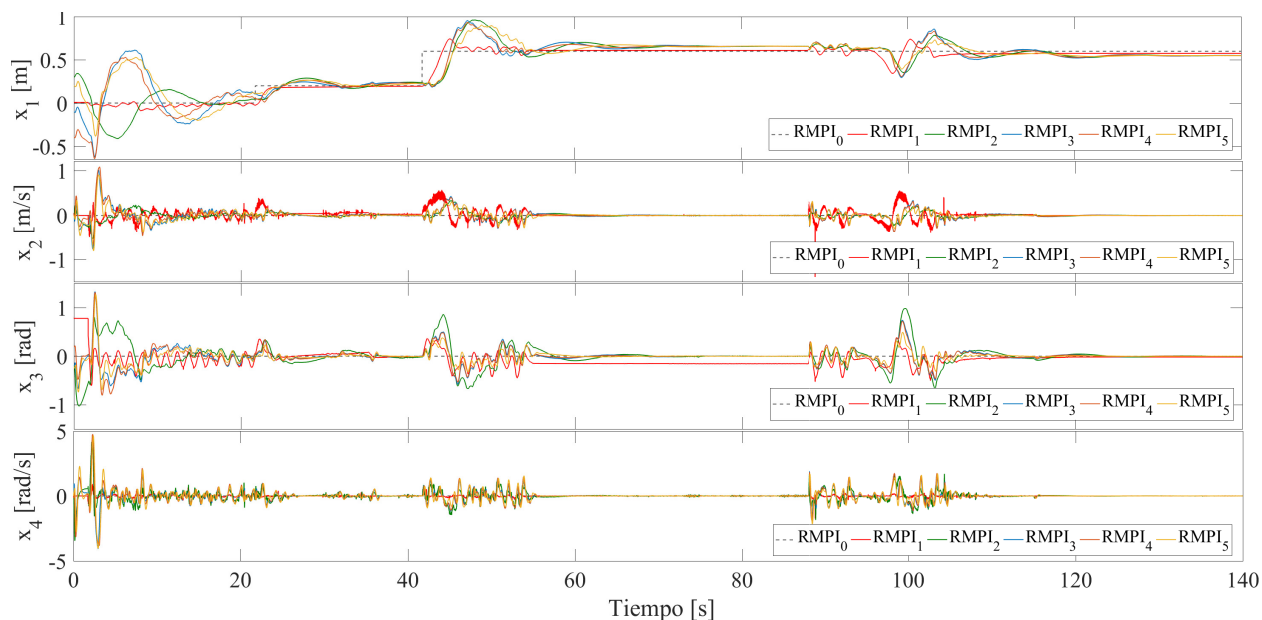


Figura 3.20: Respuesta de los estados de los 5 agentes ante las referencias dadas.

medio del líder, y el sistema en general es capaz de llegar a los puntos deseados. Observe que el $RMPI_1$ se perturba en el péndulo del robot y se aleja de la referencia en $t \approx 88s$, sin embargo el RMPI es capaz de rechazar la perturbación y regresar al estado deseado. La respuesta de los controladores se muestra en la Figura 3.21, donde se observa un ligero sobre tiro al iniciar el arranque de la prueba. Esto se debe a que el $RMPI_1$ tiene una condición inicial lejana al estado de referencia deseado, y por lo tanto requiere de un mayor voltaje para converger a dicho estado.

Cabe mencionar que la dinámica de comportamiento de los RMPI es en tiempo continuo y sólo la red de comunicación es asíncrona, lo que implica que la red de comunicación definida por \mathcal{G} es variante en el tiempo, y se mantiene conectada de acuerdo a las solicitudes de información en el instante t . Los eventos realizados por cada RMPI se muestran en la Figura

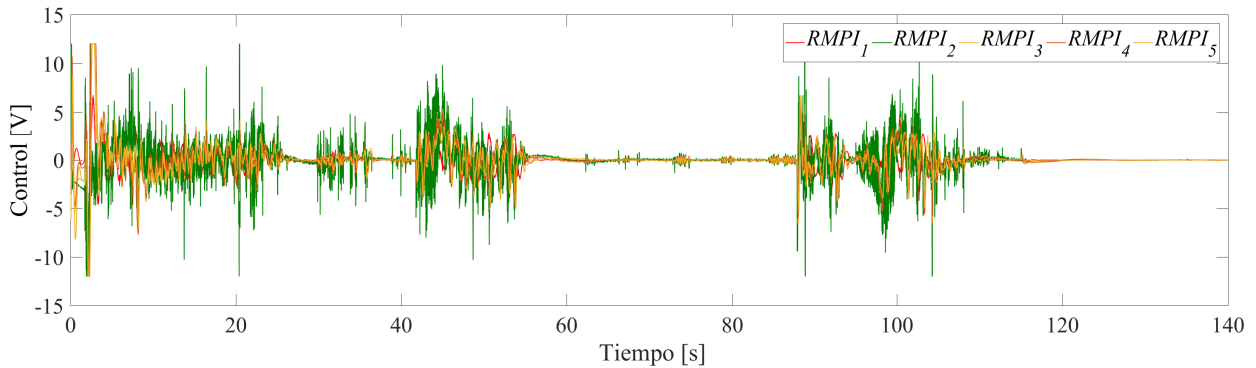


Figura 3.21: Respuesta de los controles de los 5 agentes.

3.22. Se observa que con cada cambio de referencia, y cuando la perturbación se aplica, existe un mayor número de eventos, debido a que los RMPI se encuentran en constante cambio, y es necesario una mayor comunicación entre ellos para llegar a la convergencia hacia el consenso. A medida que los RMPI se acercan a la referencia deseada, los eventos se van reduciendo. Es evidente que la ley de control estabiliza al sistema hacia el consenso, y en términos prácticos no hay mayor requerimiento de información para lograr una buena interacción del SMA. El conteo de los eventos conforme va transcurriendo el tiempo se observa en la Figura 3.23, la línea punteada representa los eventos que se realizarían si se utilizará una comunicación continua. Se observa las veces que se realizó la transmisión de información de aproximadamente menor al 70 %.

Análisis Energético

Se realizó un análisis de la energía consumida en la etapa de transmisión por cada uno de los RMPI, de la prueba anterior, cuando se realiza una transmisión de información continua y bajo una comunicación basada en eventos.

Existen dispositivos de comunicación inalámbrica que tienen la capacidad de ahorrar energía cuando no están transmitiendo datos. Uno de estos es el dispositivo ESP8266, el cual reduce el consumo energético utilizando el modo "Light-Sleep", el cual permite mantener la conexión WiFi de tipo estación, pero reduce el consumo de energía en los momentos en los que no envió información. En este modo, cuando se transmite información se consume aproximadamente 170 mA y 0.9 mA cuando no existe envío de datos. Además, tomando en cuenta el voltaje de alimentación del dispositivo es aproximadamente 3.3 V, y los resul-

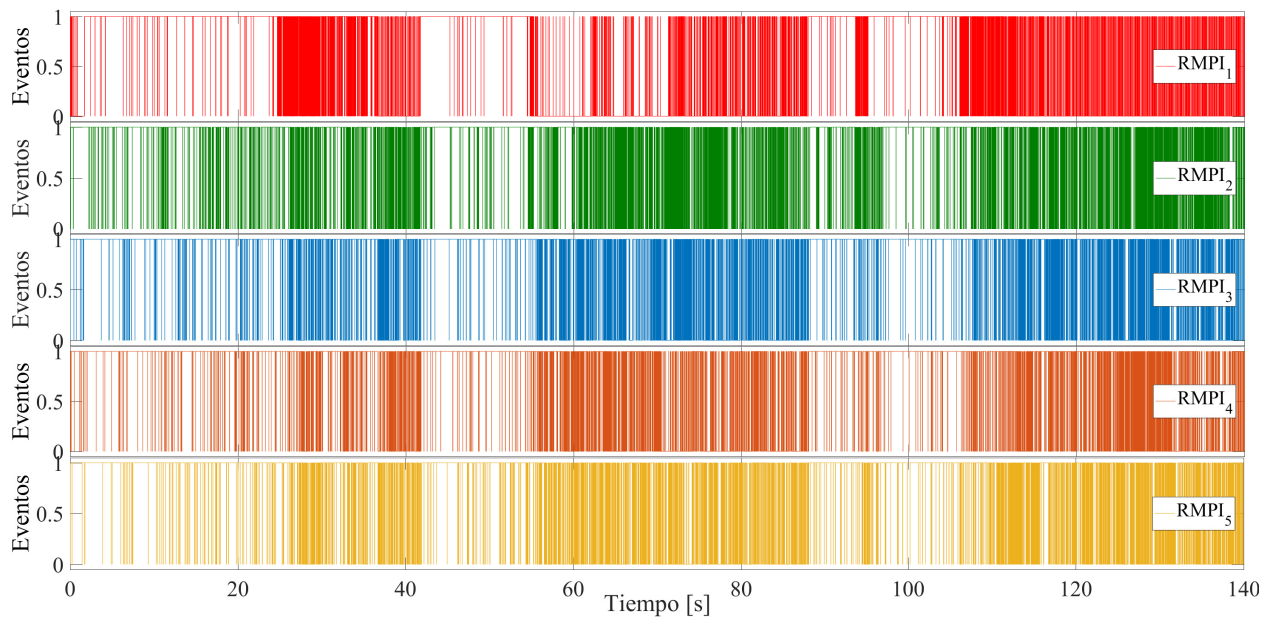


Figura 3.22: Eventos realizados por los 5 agentes.

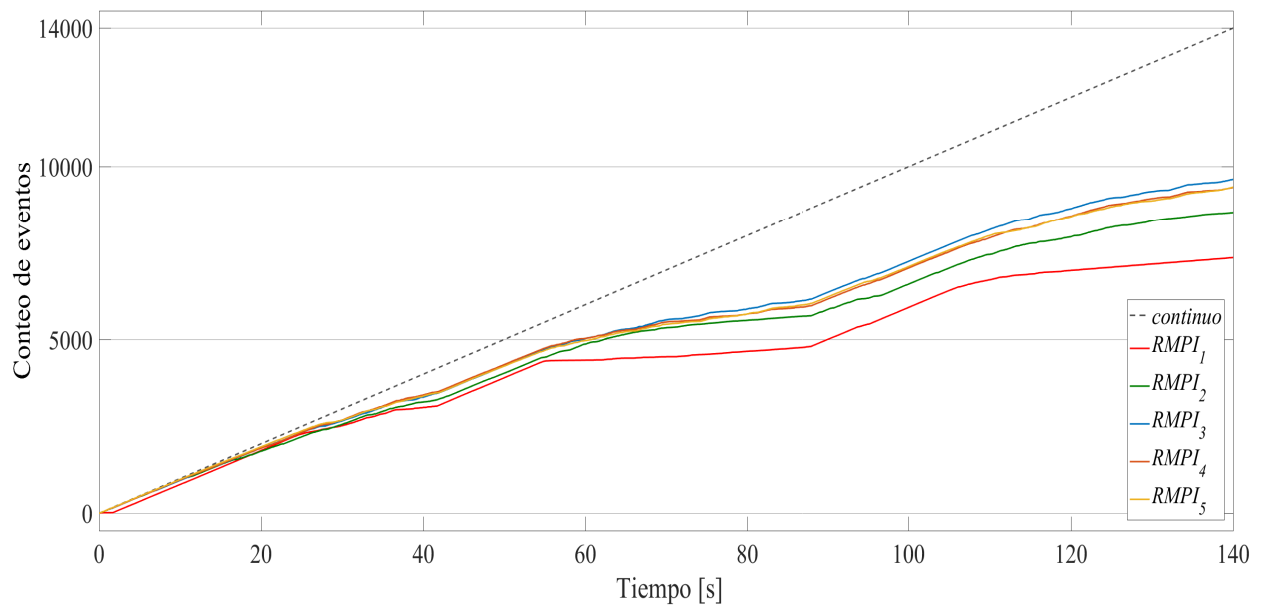


Figura 3.23: Conteo de eventos realizados por los 5 agentes.

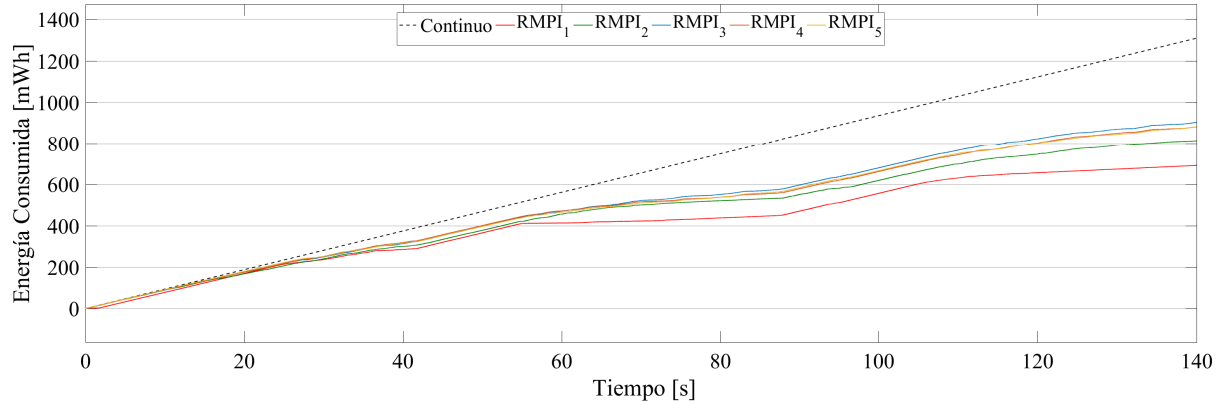


Figura 3.24: Energía consumida en la comunicación.

<i>Continuo</i>	1309 <i>mWh</i> → 100 %
<i>RMPI₁</i>	691.1 <i>mWh</i> → 52.79 %
<i>RMPI₂</i>	813.4 <i>mWh</i> → 62.14 %
<i>RMPI₃</i>	903 <i>mWh</i> → 68.98 %
<i>RMPI₄</i>	881.1 <i>mWh</i> → 67.31 %
<i>RMPI₅</i>	881.8 <i>mWh</i> → 67.36 %

Tabla 3.7: Consumo de Energía en la etapa de transmisión de datos.

tados mostrados en la Figura 3.23, se obtiene el consumo de energía en la transmisión de información de cada uno de los RMPI para la prueba anterior como se muestra en la Figura 3.24 y el porcentaje de consumo mostrado en la Tabla 3.7. La línea punteada de la Figura 3.24 muestra el consumo energético a través del tiempo de una comunicación estándar, es decir, cuando se transmite de manera continua o por un tiempo de muestreo establecido. Se observa que mediante un esquema de transmisión disparada por eventos es posible disminuir el consumo energético en la etapa de transmisión, en comparación con un esquema de comunicación continua en el tiempo. Lo anterior indica que el controlador propuesto no sólo realiza la formación y controla la postura de los robots, si no que además reduce el consumo energético de manera considerable, aumentando así la autonomía de los agentes, sin perder de vista el objetivo principal del control.

Para la pruebas experimentales, el robot real transmitía su información mediante un dispositivo ESP8266. Sin embargo, con el objetivo de verificar la veracidad de la respuesta de los estados se comparó los datos transmitidos por el robot con el sistema de captura de movimiento Optitrack, como se observa en la Figura 3.25.

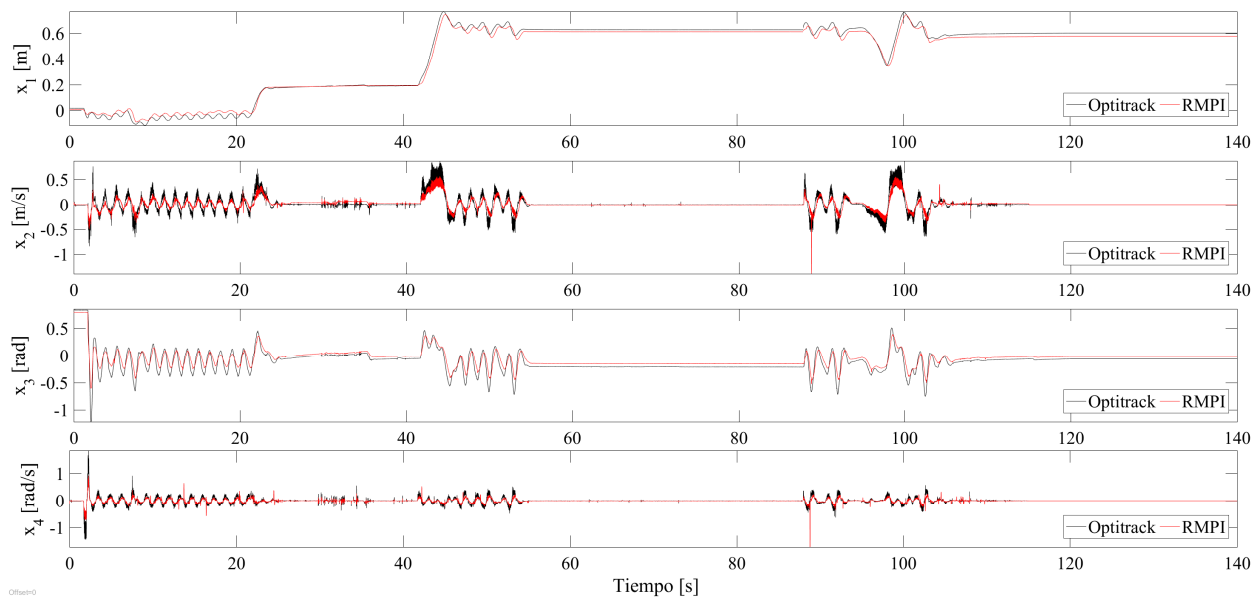


Figura 3.25: Datos obtenidos transmitidos por el RMPI y datos obtenidos por el sistema Optitrack.

La Figura 3.25 muestra dicha comparativa, en donde se observa que efectivamente los datos transmitidos son muy similares a los obtenidos por el sistema de captura de movimiento Optitrack. En estas pruebas no se utilizó el sistema Optitrack para el consenso, puesto que se podría interpretar como un esquema centralizado en lugar de un sistema descentralizado como se planteo, sin embargo en algunos trabajos se utiliza para un mejor manejo de los recursos de varios agentes como un sistema de GPS de entorno controlado. Además, el sistema de captura de movimiento, tendría un mayor impacto, cuando el sistema RMPI pueda desplazarse en el plano, aún con una superficie no uniforme.

Todo lo anterior comprueba que considerando un grafo conectado y dirigido (Figura 3.12), mediante una ley de control distribuida (3.25) basada en la propiedad de planitud diferencial y en una función de eventos (3.22) para transmisión de información. Es viable para el control de una red de múltiples RMPs reduciendo el tráfico de información sin afectar el objetivo principal del control. Para dar mayor claridad a los resultados obtenidos, el lector puede consultar una visualización 3D de la prueba en la siguiente dirección: https://youtu.be/xTgN01_W5KI.

Capítulo 4

Robot Móvil tipo Péndulo invertido: Desplazamiento en el plano

En el capítulo anterior se mostró el análisis y desempeño de un sistema Robot Móvil tipo Péndulo invertido (RMPI) con la limitación de avanzar en un sólo eje. En adición, este capítulo se basa en el estudio del sistema RMPI capaz de desplazarse en el plano de manera autónoma, lo cual representa un gran reto por ser un sistema altamente no lineal de sexto orden. De esta manera, este capítulo trata el modelado del RMPI considerando el giro sobre su propio eje, el control para el desplazamiento en el plano y el autobalanceo del mismo se realiza mediante el enfoque de planitud diferencial, el diseño de una estrategia de control distribuido con una comunicación activada por eventos, resolviendo así, el problema de formación líder-seguidor de un conjunto de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI) en el plano.

Adicionalmente, para corroborar la robustez del controlador propuesto se presenta el análisis de estabilidad usando el segundo método de Lyapunov y el enfoque de estabilidad entrada al estado ISS (Input-to-State Stability). Con el objetivo de mostrar el desempeño del controlador en lazo cerrado, se muestran resultados a nivel de simulación numérica, donde se observa el desempeño del consenso y formación de los vehículos ante una referencia deseada.

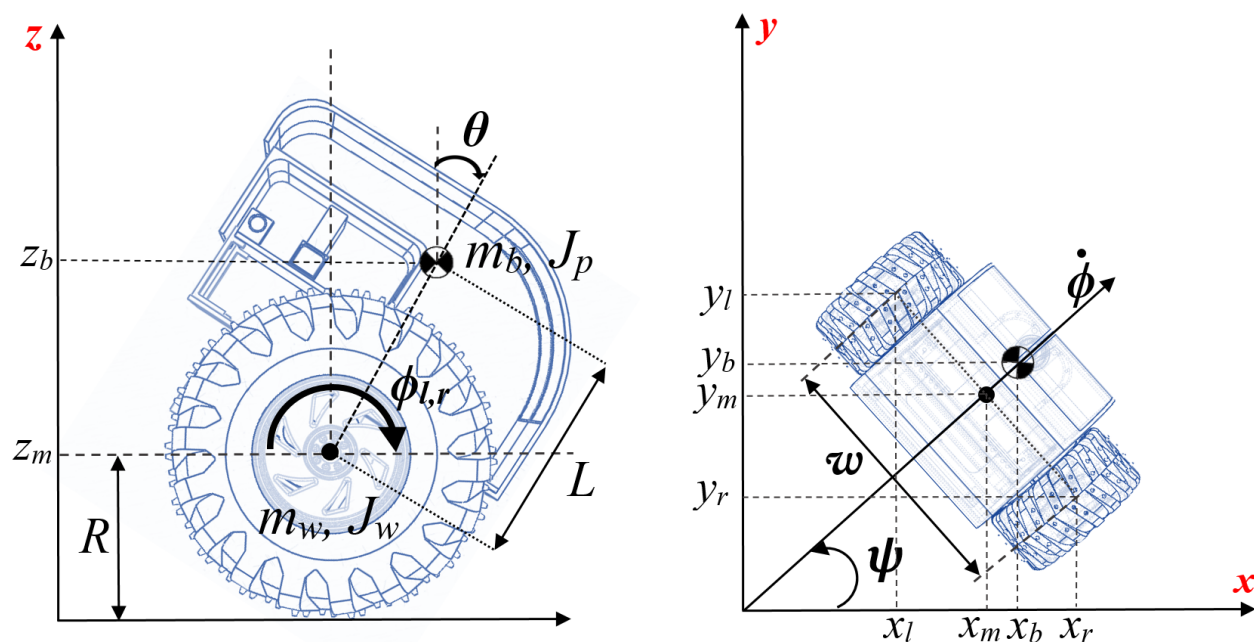


Figura 4.1: Diagrama de cuerpo libre del RMPI.

4.1. Modelado del Sistema RMPI con desplazamiento en un plano

En esta sección se presenta el modelo no lineal y el modelo linealizado alrededor de un punto de equilibrio del sistema RMPI, también se obtiene la salida plana junto con su parametrización diferencial del sistema linealizado.

4.1.1. Modelado Cinemático del Sistema RMPI

Considérese un robot móvil tipo péndulo invertido como se muestra en la Figura 4.1 con los parámetros dados por la Tabla 4.1, el cual es capaz de desplazarse de manera autónoma en un plano x, y . Definiendo el giro de las llantas (ϕ_l, ϕ_r) y el ángulo de inclinación del péndulo (θ) en el sentido de las manecillas del reloj y la rotación del robot en sentido antihorario, y

se obtiene que las siguientes coordenada cartesianas

$$(x_m, y_m, z_m) = (R\phi \cos \psi, R\phi \sin \psi, R) \quad (4.1)$$

$$(\phi, \psi) = \left[\frac{1}{2}(\phi_l + \phi_r), \frac{R}{w}(\phi_r - \phi_l) \right] \quad (4.2)$$

$$(x_l, y_l, z_l) = \left[x_m - \frac{w}{2} \sin \psi, y_m + \frac{w}{2} \cos \psi, z_m \right] \quad (4.3)$$

$$(x_r, y_r, z_r) = \left[x_m + \frac{w}{2} \sin \psi, y_m - \frac{w}{2} \cos \psi, z_m \right] \quad (4.4)$$

$$(x_b, y_b, z_b) = [x_m + L \sin \theta \cos \psi, y_m + L \sin \theta \sin \psi, z_m + L \cos \theta] \quad (4.5)$$

O bien,

$$\begin{aligned} x_l &= R\phi \cos \psi - \frac{w}{2} \sin \psi, & y_l &= R\phi \sin \psi + \frac{w}{2} \cos \psi, & z_l &= R \\ x_r &= R\phi \cos \psi + \frac{w}{2} \sin \psi, & y_r &= R\phi \sin \psi - \frac{w}{2} \cos \psi, & z_r &= R \\ x_b &= R\phi \cos \psi + L \sin \theta \cos \psi, & y_b &= R\phi \sin \psi + L \sin \theta \sin \psi, & z_b &= R + L \cos \theta \end{aligned}$$

derivando con respecto al tiempo el sistema de ecuaciones (4.1) a (4.5), se obtiene el modelo cinemático para el sistema RMPI, el cual describe al péndulo invertido sobre dos ruedas.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= R\dot{\phi} \cos \psi - R\phi\dot{\psi} \sin \psi & \dot{y}_m &= R\dot{\phi} \sin \psi + R\phi\dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{2}(\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l) & \dot{\psi} &= \frac{R}{w}(\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l) \\ \dot{x}_l &= R\dot{\phi} \cos \psi - R\phi\dot{\psi} \sin \psi - \frac{w}{2}\dot{\psi} \cos \psi, \\ \dot{y}_l &= R\dot{\phi} \sin \psi + R\phi\dot{\psi} \cos \psi - \frac{w}{2}\dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{x}_r &= R\dot{\phi} \cos \psi - R\phi\dot{\psi} \sin \psi + \frac{w}{2}\dot{\psi} \cos \psi, \\ \dot{y}_r &= R\dot{\phi} \sin \psi + R\phi\dot{\psi} \cos \psi + \frac{w}{2}\dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{x}_b &= R\dot{\phi} \cos \psi - R\phi\dot{\psi} \sin \psi + L\dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - L\dot{\psi} \sin \theta \sin \psi, \\ \dot{y}_b &= R\dot{\phi} \sin \psi + R\phi\dot{\psi} \cos \psi + L\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + L\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{z}_b &= -L\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Estas velocidades calculadas en esta sección se utilizaran en las siguiente sección para el calculo de las energías en la obtención del modelo dinámico.

4.1.2. Modelado Dinámico del Sistema RMPI

Para determinar el modelo dinámico del sistema, se utiliza las ecuaciones de movimiento de Euler Lagrange del sistema coordinado mostrado por la Figura 4.1. De ahí, se calcula la

Parámetros	Descripción	Valor
m_w	Masa de las ruedas	0.04 Kg
m_b	Masa del péndulo	1.05 Kg
J_w	Inercia de la rueda	$8.45e^{-5} \text{ Kg}m^2$
J_m	Inercia del motor	$9.356e^{-4} \text{ Kg}m^2$
J_ψ	Inercia del giro del robot	$3.6e^{-3} \text{ Kg}m^2$
J_p	Inercia del péndulo	$0.021 \text{ Kg}m^2$
R	Radio de la rueda	0.06 m
w	Longitud entre el eje de las ruedas	0.2 m
L	Longitud entre el c.m del péndulo y el eje de las ruedas	0.15 m
g	Gravedad	$9.8 \frac{m}{s^2}$
k_t	Constante de torque del motor	0.3093
R_m	Resistencia del Motor	5.15 Ω
k_b	Constante de FEM del Motor	0.3093
β	Coefficiente de fricción	0.01

Tabla 4.1: Parámetros del RMPI autónomo.

energías cinética y potencial.

Por tanto, la energía cinética de estas coordenadas generalizadas son:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_w (\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2 + \dot{z}_l^2) + \frac{1}{2}m_w (\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2) + \frac{1}{2}m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2) \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{x}_l^2 &= \left(\dot{x}_m - \frac{w}{2}\dot{\psi} \cos \psi \right)^2 = \dot{x}_m^2 - w\dot{x}_m\dot{\psi} \cos \psi + \frac{w^2}{4}\dot{\psi}^2 \cos^2 \psi \\ &= R^2\dot{\phi}^2 \cos^2 \psi - 2R^2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \psi \sin \psi + R^2\dot{\phi}^2\dot{\psi}^2 \sin^2 \psi \\ &\quad - wR\dot{\phi}\dot{\psi} \cos^2 \psi + wR\dot{\phi}\dot{\psi}^2 \cos \psi \sin \psi + \frac{w^2}{4}\dot{\psi}^2 \cos^2 \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_l^2 &= \left(\dot{y}_m - \frac{w}{2}\dot{\psi} \sin \psi \right)^2 = \dot{y}_m^2 - w\dot{y}_m\dot{\psi} \sin \psi + \frac{w^2}{4}\dot{\psi}^2 \sin^2 \psi \\ &= R^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \psi + 2R^2\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \psi \cos \psi + R^2\dot{\phi}^2\dot{\psi}^2 \cos^2 \psi \\ &\quad - wR\dot{\phi}\dot{\psi} \sin^2 \psi - wR\dot{\phi}\dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \psi + \frac{w^2}{4}\dot{\psi}^2 \sin^2 \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r^2 &= \left(\dot{x}_m + \frac{w}{2}\dot{\psi} \cos \psi \right)^2 = \dot{x}_m^2 + w\dot{x}_m\dot{\psi} \cos \psi + \frac{w^2}{4}\dot{\psi}^2 \cos^2 \psi \\ &= R^2\dot{\phi}^2 \cos^2 \psi - 2R^2\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \psi \cos \psi + R^2\dot{\phi}^2\dot{\psi}^2 \sin^2 \psi \\ &\quad + wR\dot{\phi}\dot{\psi} \cos^2 \psi - wR\dot{\phi}\dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \psi + \frac{w^2}{4}\dot{\psi}^2 \cos^2 \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_r^2 &= \left(\dot{y}_m + \frac{w}{2} \dot{\psi} \sin \psi \right)^2 = \dot{y}_m^2 + w \dot{y}_m \dot{\psi} \sin \psi + \frac{w^2}{4} \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi \\
&= R^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \psi + 2R^2 \dot{\phi} \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \psi \\
&\quad + wR \dot{\phi} \dot{\psi} \sin^2 \psi + wR \phi \dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \psi + \frac{w^2}{4} \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi \\
\dot{x}_b^2 &= R^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi - 2R^2 \dot{\phi} \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \psi \sin \psi + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi + 2RL \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \cos^2 \psi \\
&\quad - 2LR \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi - 2LR \phi \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \cos \psi + 2RL \phi \dot{\psi}^2 \sin \theta \sin^2 \psi \\
&\quad + L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \psi - 2L^2 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \cos \psi \sin \psi + L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi \\
\dot{y}_b^2 &= R^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + 2R^2 \dot{\phi} \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \psi \sin \psi + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \psi + 2RL \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin^2 \psi \\
&\quad + 2LR \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + 2LR \phi \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi \cos \psi + 2RL \phi \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos^2 \psi \\
&\quad + L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \psi + 2L^2 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \cos \psi \sin \psi + L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi \\
\dot{z}_b^2 &= L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

agrupando términos para simplificar el modelo dinámico se obtiene

$$\begin{aligned}
(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2) &= R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 + wR \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{w^2}{4} \dot{\psi}^2 \\
(\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2) &= R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 + 2RL \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + 2RL \phi \dot{\psi}^2 \sin \theta + L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \\
&\quad + L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \\
&= R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 + 2RL \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + 2RL \phi \dot{\psi}^2 \sin \theta + L^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

sustituyendo los términos anteriores en (4.6), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} m_w \left(R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 + \frac{w^2}{4} \dot{\psi}^2 \right) + \frac{1}{2} m_w \left(R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 + \frac{w^2}{4} \dot{\psi}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_b \left(R^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 + 2RL \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + 2RL \phi \dot{\psi}^2 \sin \theta + L^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \right) \\
&= m_w R^2 \dot{\phi}^2 + m_w R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 + \frac{m_w w^2}{4} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 \phi^2 \dot{\psi}^2 + m_b RL \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \\
&\quad + m_b RL \phi \dot{\psi}^2 \sin \theta + \frac{1}{2} m_b L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_b L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Por otra parte, la energía cinética rotacional del sistema se obtiene mediante la siguiente expresión

$$T_2 = \frac{1}{2} J_w \dot{\phi}_l^2 + \frac{1}{2} J_w \dot{\phi}_r^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 \tag{4.8}$$

donde T_2 es normalizada en términos de ϕ y ψ

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{R}{w}(\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l), \quad \dot{\psi} = \frac{R}{w}(\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l), \quad \dot{\psi}^2 = \frac{R^2}{w^2}(\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l)^2 \\ \dot{\psi}^2 &= \frac{R^2}{w^2}(\dot{\phi}_r^2 - 2\dot{\phi}_r\dot{\phi}_l + \dot{\phi}_l^2), \quad \text{con} \quad 2\dot{\phi}_r\dot{\phi}_l = \dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_l^2 - \frac{w^2}{R^2}\dot{\psi}^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2}(\phi_r + \phi_l), \quad \dot{\phi} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l), \quad \dot{\phi}^2 = \frac{1}{4}(\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l)^2 \\ 4\dot{\phi}^2 &= \dot{\phi}_r^2 + 2\dot{\phi}_r\dot{\phi}_l + \dot{\phi}_l^2, \quad \text{con} \quad 2\dot{\phi}_r\dot{\phi}_l = 4\dot{\phi}^2 - (\dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_l^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

se sustituye (4.9) dentro de (4.10)

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_l^2 - \frac{w^2}{R^2}\dot{\psi}^2 &= 4\dot{\phi}^2 - (\dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_l^2) \\ (\dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_l^2) &= \frac{w^2}{2R^2}\dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

reescribiendo a T_2 de la siguiente forma, resulta:

$$T_2 = \frac{1}{2}J_w(\dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_l^2) + \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2$$

sustituyendo (4.11) en (4.11) se obtiene lo siguiente

$$T_2 = \frac{1}{2}J_w \left[\frac{w^2}{2R^2}\dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}^2 \right] + \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2$$

Por lo tanto, la energía cinética rotacional queda determinada mediante la siguiente expresión

$$T_2 = J_w \frac{w^2}{4R^2}\dot{\psi}^2 + J_w\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 \quad (4.12)$$

La energía potencial del sistema es representada por la siguiente expresión:

$$U = m_w g R + m_w g R + m_b g (R + L \cos \theta) \quad (4.13)$$

Finalmente, el Lagrangiano del sistema se representa como:

$$L = T_1 + T_2 - U$$

sustituyendo (4.7), (4.12) y (4.13) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} L &= m_w R^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 \dot{\phi}^2 + J_w \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_b L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + m_b R L \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - 2 m_w g R \\ &\quad - m_b g (R + L \cos \theta) + J_w \frac{w^2}{4 R^2} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 \dot{\phi}^2 \dot{\psi}^2 + m_w R^2 \dot{\phi}^2 \dot{\psi}^2 + \frac{m_w w^2}{4} \dot{\psi}^2 \\ &\quad + m_b R L \dot{\phi} \dot{\psi}^2 \sin \theta + \frac{1}{2} m_b L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

agrupando términos, el Lagrangiano se reescribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
L = & \left(m_w R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + J_w \right) \dot{\phi}^2 + \left(\frac{1}{2} m_b L^2 + \frac{1}{2} J_p \right) \dot{\theta}^2 \\
& + \left(J_w \frac{w^2}{4R^2} + \frac{1}{2} J_\psi + \frac{1}{2} m_b R^2 \phi^2 + m_w R^2 \phi^2 + \frac{m_w w^2}{4} + m_b R L \phi \sin \theta + \frac{1}{2} m_b L^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\psi}^2 \\
& + m_b R L \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - 2m_w g R - m_b g (R + L \cos \theta)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Considerando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange del sistema RMPI determinadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= F_\phi \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= F_\theta \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= F_\psi
\end{aligned} \tag{4.15}$$

donde las derivadas parciales y temporales son calculadas como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= 2m_w R^2 \dot{\phi} + m_b R^2 \dot{\phi} + m_b R L \dot{\theta} \cos \theta + 2J_w \dot{\phi} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= 2m_w R^2 \ddot{\phi} + m_b R^2 \ddot{\phi} + m_b R L \ddot{\theta} \cos \theta - m_b R L \dot{\theta}^2 \sin \theta + 2J_w \ddot{\phi} \\
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= 2m_w R^2 \phi \dot{\psi}^2 + m_b R L \dot{\psi}^2 \sin \theta + m_b R \phi \dot{\psi}^2
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_b R L \dot{\phi} \cos \theta + m_b L^2 \dot{\theta} + J_p \dot{\theta} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m_b R L \ddot{\phi} \cos \theta - m_b R L \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + m_b L^2 \ddot{\theta} + J_p \ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m_b R L \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + m_b R L \phi \dot{\psi}^2 \cos \theta + m_b L^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + m_b g L \sin \theta \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= \left(\frac{w^2}{2} m_w + \frac{1}{2} J_w \frac{w^2}{R^2} + J_\psi + 2m_w R^2 \phi^2 + m_b R^2 \phi^2 + 2m_b R L \phi \sin \theta + m_b L^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\psi} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \left(\frac{w^2}{2} m_w + \frac{1}{2} J_w \frac{w^2}{R^2} + J_\psi + 2m_w R^2 \phi^2 + m_b R^2 \phi^2 + 2m_b R L \phi \sin \theta + m_b L^2 \sin^2 \theta \right) \ddot{\psi} \\
&+ \left(4m_w R^2 \phi \dot{\phi} + 2m_b R^2 \phi \dot{\phi} + 2m_b R L \dot{\phi} \sin \theta + 2m_b R L \phi \dot{\theta} \cos \theta + 2m_b L^2 \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \right) \dot{\psi} \\
\frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Sustituyendo las expresiones dadas de (4.16) a (4.18) en (4.15) se obtiene las ecuaciones dinámicas del sistema RMPI

$$\begin{aligned}
F_\phi &= ((2m_w + m_b) R^2 + 2J_w) \ddot{\phi} + m_b RL \cos \theta \ddot{\theta} - m_b RL \sin \theta \dot{\theta}^2 \\
&\quad - ((2m_w + m_b) R^2 \dot{\phi} + m_b RL \sin \theta) \dot{\psi}^2 \\
F_\theta &= m_b RL \cos \theta \ddot{\phi} + (m_b L^2 + J_p) \ddot{\theta} - (m_b RL \dot{\phi} + m_b L^2 \sin \theta) \dot{\psi}^2 \cos \theta - m_b g L \sin \theta \\
F_\psi &= \left(\begin{array}{c} \frac{w^2}{2} m_w + \frac{1}{2} J_w \frac{w^2}{R^2} + J_\psi \\ + 2m_w R^2 \dot{\phi}^2 + m_b R^2 \dot{\phi}^2 + 2m_b RL \dot{\phi} \sin \theta + m_b L^2 \sin^2 \theta \end{array} \right) \ddot{\psi} \\
&\quad + 2 \left(\begin{array}{c} 2m_w R^2 \dot{\phi} \dot{\phi} + m_b R^2 \dot{\phi} \dot{\phi} + m_b RL \dot{\phi} \sin \theta \\ + m_b RL \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + m_b L^2 \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \end{array} \right) \dot{\psi}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Debido a que se utilizarán motores de corriente directa para mover las ruedas del robot móvil, la dinámica de los motores se incluye en el modelo. De esta manera, las fuerzas dadas por cada motor son dadas por:

$$\begin{aligned}
F_l &= k_t i_l - J_m (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}_l) - \beta (\dot{\theta} - \dot{\phi}_l) \\
F_r &= k_t i_r - J_m (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}_r) - \beta (\dot{\theta} - \dot{\phi}_r)
\end{aligned}$$

donde $i_{l,r}$ es la corriente y β es el coeficiente de fricción viscosa del motor de CD. Para evaluar la relación entre $i_{l,r}$ y el voltaje $u_{l,r}$ se usará la ecuación del motor de CD

$$L_m \dot{i}_{l,r} = u_{l,r} - k_b (\dot{\theta} - \dot{\phi}_{l,r}) - R_m i_{l,r}$$

donde L_m y R_m es la inductancia y resistencia del motor respectivamente.

Considerando que el valor la inductancia del motor es despreciable, este puede ser aproximado cero ($L \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned}
i_l &= \frac{u_l - k_b (\dot{\theta} - \dot{\phi}_l)}{R_m} \\
i_r &= \frac{u_r - k_b (\dot{\theta} - \dot{\phi}_r)}{R_m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_l &= \frac{k_t}{R_m} u_l - \frac{k_t k_b (\dot{\theta} - \dot{\phi}_l)}{R_m} - \beta (\dot{\theta} - \dot{\phi}_l) - J_m (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}_l) \\
F_r &= \frac{k_t}{R_m} u_r - \frac{k_t k_b (\dot{\theta} - \dot{\phi}_r)}{R_m} - \beta (\dot{\theta} - \dot{\phi}_r) - J_m (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}_r)
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
F_l &= K_s u_l - T_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}_l) - J_m (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}_l) \\
F_r &= K_s u_r - T_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}_r) - J_m (\ddot{\theta} - \ddot{\phi}_r)
\end{aligned}$$

con

$$K_s = \frac{k_t}{R_m}, \quad T_s = \frac{k_t k_b}{R_m} + \beta$$

De lo anterior las fuerzas generalizadas están dadas por

$$(F_\phi, F_\theta, F_\psi) = \left(\frac{1}{2}(F_l + F_r), -\frac{1}{2}(F_l + F_r), \frac{R}{w}(F_r - F_l) \right)$$

de esta manera se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} F_\phi &= \frac{K_s}{2}(u_l + u_r) + T_s \dot{\theta} + J_m \ddot{\theta} - \frac{T_s}{2}(\dot{\phi}_l + \dot{\phi}_r) - \frac{J_m}{2}(\ddot{\phi}_l + \ddot{\phi}_r) \\ F_\theta &= -\frac{K_s}{2}(u_l + u_r) - T_s \dot{\theta} - J_m \ddot{\theta} + \frac{T_s}{2}(\dot{\phi}_l + \dot{\phi}_r) + \frac{J_m}{2}(\ddot{\phi}_l + \ddot{\phi}_r) \\ F_\psi &= \frac{R}{w}(K_s(u_r - u_l) + T_s(\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l) + J_m(\ddot{\phi}_r - \ddot{\phi}_l)) \end{aligned}$$

como se sabe que $\phi = \frac{1}{2}(\phi_r + \phi_l)$ y $\psi = \frac{R}{w}(\phi_r - \phi_l)$, entonces se simplifica las fuerzas anteriormente calculadas

$$F_\phi = \frac{K_s}{2}(u_l + u_r) + T_s(\dot{\theta} - \dot{\phi}) + J_m(\ddot{\theta} - \ddot{\phi}) \quad (4.20)$$

$$F_\theta = -\frac{K_s}{2}(u_l + u_r) - T_s(\dot{\theta} - \dot{\phi}) - J_m(\ddot{\theta} - \ddot{\phi}) \quad (4.21)$$

$$F_\psi = \frac{R}{w}K_s(u_r - u_l) + T_s\dot{\psi} + J_m\ddot{\psi} \quad (4.22)$$

Se observa que las ecuaciones (4.20) y (4.21) están acopladas por los estados θ y ϕ . Considerando las fuerzas generalizadas y desacoplando las mismas, el sistema se expresa como sigue

$$\begin{aligned} F_\phi &= \frac{((2m_w + m_b)R^2 + 2J_w)\ddot{\phi}}{+m_bRL \cos \theta \ddot{\theta} - m_bRL \sin \theta \dot{\theta}^2} = \frac{K_s}{2}(u_l + u_r) + T_s(\dot{\theta} - \dot{\phi}) + J_m(\ddot{\theta} - \ddot{\phi}) \\ &\quad - \frac{((2m_w + m_b)R^2\phi + m_bRL \sin \theta)\dot{\psi}^2}{m_bRL \cos \theta \ddot{\phi} + (m_bL^2 + J_p)\ddot{\theta}} \\ F_\theta &= \frac{-((m_bRL\phi + m_bL^2 \sin \theta)\dot{\psi}^2 \cos \theta - m_bgL \sin \theta)}{-\frac{K_s}{2}(u_l + u_r) - T_s(\dot{\theta} - \dot{\phi}) - J_m(\ddot{\theta} - \ddot{\phi})} \\ F_\psi &= \left(\begin{array}{l} \frac{w^2}{2}m_w + \frac{1}{2}J_w\frac{w^2}{R^2} + J_\psi + 2m_wR^2\phi^2 \\ +m_bR^2\phi^2 + 2m_bRL\phi \sin \theta + m_bL^2 \sin^2 \theta \end{array} \right) \ddot{\psi} \\ &\quad + 2 \left(\begin{array}{l} 2m_wR^2\phi\dot{\phi} + m_bR^2\phi\dot{\phi} + m_bRL\dot{\phi} \sin \theta \\ +m_bRL\phi\dot{\theta} \cos \theta + m_bL^2\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \end{array} \right) \dot{\psi} = \frac{R}{w}K_s(u_r - u_l) + T_s\dot{\psi} + J_m\ddot{\psi} \end{aligned}$$

Reescribiendo el sistema anterior en forma matricial se obtiene el modelo no lineal del sistema RMPI como

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & \alpha & 0 \\ \alpha & \bar{I} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J} + (2m_w + m_b) R^2 \phi^2 + 2m_b RL \theta \sin \theta + m_b L^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_s}{2} (u_l + u_r) + T_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}) + ((2m_w + m_b) R^2 \phi + m_b RL \sin \theta) \dot{\psi}^2 + m_b RL \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ -\frac{K_s}{2} (u_l + u_r) - T_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}) + (m_b RL \phi + m_b L^2 \sin \theta) \dot{\psi}^2 \cos \theta + m_b g L \sin \theta \\ \frac{R}{w} K_s (u_r - u_l) + T_s \dot{\psi} - 2 \begin{pmatrix} (2m_w + m_b) R^2 \phi \dot{\phi} + m_b RL \dot{\phi} \sin \theta \\ + m_b RL \theta \dot{\theta} \cos \theta + m_b L^2 \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{M} &= (2m_w + m_b) R^2 + 2J_w + J_m & \bar{I} &= m_b L^2 + J_p + J_m \\ \bar{J} &= \frac{w^2}{4} m_w + \frac{w^2}{2R^2} J_w + J_\psi - J_m & \alpha &= (m_b RL \cos \theta - J_m) \end{aligned}$$

Puesto que el sistema presenta la característica de ser controlable más no involutivo, esto significa que el sistema no puede ser linealizabile en forma exacta. Por tanto nosotros tenemos que recurrir a una linealización aproximada de este modelo no lineal y así poder cumplir con los objetivos de control.

Siguiendo con el procedimiento se linealiza el modelo no lineal dado en 4.23 en los siguientes puntos de equilibrio utilizados para obtener el modelo linealizado del robot RMPI es:

$$\theta \approx 0 \quad (\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1)$$

De ahí, se obtiene el siguiente modelo dinámico lineal:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M} & (m_b RL - J_m) & 0 \\ (m_b RL - J_m) & \bar{I} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J} \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K_s}{2} (u_l + u_r) + T_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}) \\ -\frac{K_s}{2} (u_l + u_r) - T_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}) + m_b g L \theta \\ \frac{R}{w} K_s (u_r - u_l) + T_s \dot{\psi} \end{bmatrix}}_{\Upsilon}$$

Puesto que la matriz Λ es definida positiva, el sistema anterior se escribe en la forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}}_x = \Lambda^{-1} \Upsilon$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M} & (m_b RL - J_m) & 0 \\ (m_b RL - J_m) & \bar{I} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{K_s}{2} (u_l + u_r) + T_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}) \\ -\frac{K_s}{2} (u_l + u_r) - T_s (\dot{\theta} - \dot{\phi}) + m_b g L \theta \\ \frac{R}{w} K_s (u_r - u_l) + T_s \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{I}}{\bar{M}\bar{I}-(m_bRL-J_m)^2} & \frac{-Lm_bR+J_m}{\bar{M}\bar{I}-(m_bRL-J_m)^2} & 0 \\ \frac{-Lm_bR+J_m}{\bar{M}\bar{I}-(m_bRL-J_m)^2} & \frac{\bar{M}}{\bar{M}\bar{I}-(m_bRL-J_m)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K_s}{2}(u_l + u_r) + T_s(\dot{\theta} - \dot{\phi}) \\ -\frac{K_s}{2}(u_l + u_r) - T_s(\dot{\theta} - \dot{\phi}) + m_bgL\theta \\ \frac{R}{w}K_s(u_r - u_l) + T_s\dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\frac{(\bar{I}-(J_m-Lm_bR))K_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2}\right)(u_l + u_r) + \left(\frac{(\bar{I}-(J_m-Lm_bR))T_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2}\right)(\dot{\theta} - \dot{\phi}) + \frac{(J_m-Lm_bR)Lm_bg}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2}\theta \\ \frac{\bar{M}(Lm_bg)}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{((J_m-Lm_bR)-\bar{M})K_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2}\right)(u_l + u_r) + \left(\frac{T_s((J_m-Lm_bR)-\bar{M})}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2}\right)(\dot{\theta} - \dot{\phi}) \\ \frac{T_s}{J}\dot{\psi} + \frac{RK_s}{wJ}(-u_l + u_r) \end{bmatrix}$$

escribiendo el sistema en su forma matricial se obtiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\bar{I}-(J_m-Lm_bR))T_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} & \frac{(J_m-Lm_bR)Lm_bg}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} & \frac{(\bar{I}-(J_m-Lm_bR))T_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{T_s((J_m-Lm_bR)-\bar{M})}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} & \frac{\bar{M}(Lm_bg)}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} & \frac{T_s((J_m-Lm_bR)-\bar{M})}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T_s}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{(\bar{I}-(J_m-Lm_bR))K_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} & \frac{1}{2}\frac{(\bar{I}-(J_m-Lm_bR))K_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{((J_m-Lm_bR)-\bar{M})K_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} & \frac{1}{2}\frac{((J_m-Lm_bR)-\bar{M})K_s}{\bar{M}\bar{I}-(Lm_bR-J_m)^2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{RK_s}{wJ} & \frac{RK_s}{wJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_l \\ u_r \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

A partir de este sistema multivariable linealizado se podrá obtener las salidas planas del sistema, y dejar a cada uno de los robots en una cadenas de integradores, necesario para implementar los protocolos de consenso y formación.

4.2. Diseño del control para el RMPI

En esta sección, se muestra el diseño del control para el autobalanceo y desplazamiento del sistema RMPI. Considere un RMPI como el que se muestra en la Figura 4.1, el cual usa dos motores de corriente directa (CD) acoplados a neumáticos con capaz de desplazarse en el plano de manera autónoma, descrito mediante la ecuación dinámica no lineal multivariable

dada en (4.23). El cual es un sistema no holonómico, subactuado y no cumple con la propiedad de involutividad, por lo tanto el sistema no es diferencialmente plano, aunque si es controlable. Sin embargo, para tener un mejor tratamiento del modelo dinámico del robot, se recurre a una linealización aproximada al rededor de un punto de equilibrio del modelo no lineal. Con ello, se logra el objetivo del control propuesto en este trabajo.

De esta manera, se selecciona las variables de estado de la posición angular de las ruedas x_1 , velocidad angular de las ruedas x_2 , posición angular del péndulo x_3 , velocidad angular del péndulo x_4 , posición angular de la rotación del vehículo x_5 y velocidad angular de la rotación del RMPI x_6 , y de ahí se define el vector de estados como $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6)^T$ con un vector de entrada de control $u = (u_l \ u_r)^T$ y considerando que el RMPI funcionará cerca de la posición angular de equilibrio $x_3 = \theta \approx 0$, y con velocidad angular cercana a cero, *i.e.* $x_4 = \dot{\theta} \approx 0$. Por tanto el sistema se escribe en su forma típica lineal de un sistema LTI (*Linear Time-Invariant*, en inglés) multivariable de la siguiente forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.25)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

con $n = 6$ y $m = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_4 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_1 \\ 0 & 0 \\ b_2 & b_2 \\ 0 & 0 \\ -b_3 & b_3 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_l \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\bar{I} - (J_m - Lm_b R))T_s}{\bar{M}\bar{I} - (Lm_b R - J_m)^2} & a_2 &= \frac{(J_m - Lm_b R)Lm_b g}{\bar{M}\bar{I} - (Lm_b R - J_m)^2} & a_3 &= \frac{T_s((J_m - Lm_b R) - \bar{M})}{\bar{M}\bar{I} - (Lm_b R - J_m)^2} \\ a_4 &= \frac{M(Lm_b g)}{\bar{M}\bar{I} - (Lm_b R - J_m)^2} & a_5 &= \frac{T_s}{J} \\ b_1 &= \frac{1}{2} \frac{(\bar{I} - (J_m - Lm_b R))K_s}{\bar{M}\bar{I} - (Lm_b R - J_m)^2} & b_2 &= \frac{((J_m - Lm_b R) - \bar{M})K_s}{\bar{M}\bar{I} - (Lm_b R - J_m)^2} & b_3 &= \frac{RK_s}{wJ} \\ & K_s = \frac{k_t}{R_m} & & & T_s &= \frac{k_t k_b}{R_m} + \beta \end{aligned}$$

El sistema lineal dado en (4.25) se utilizará para calcular cada uno de los controladores del sistema multi-RMPI.

4.2.1. Modelo Linealizado del sistema RMPI representado mediante la salida plana.

Considerando el sistema linealizado (4.25) y con los conceptos presentados en la sección 2.3.2 se parametriza al sistema linealizado mediante la salida plana. Observe que la matriz B es de rango completo ($m = 2$) y esta está constituido por los vectores columna $B = [B_1 \ B_2]$. Si el sistema es controlable esto implica que la matriz de controlabilidad dada por

$$\mathcal{K}_c = (B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B) \quad (4.26)$$

es de rango completo n (ver [96]). En este caso particular, la matriz de controlabilidad \mathcal{K}_c es efectivamente de rango completo $n = 6$. Lo anterior indica que el sistema es controlable, y por consiguiente, plano. La controlabilidad del sistema permite extraer los vectores para construir la matriz \mathcal{C} de rango completo de dimensión 6×6 , desde la matriz de controlabilidad de Kalman dada en (4.26)

$$\mathcal{C} = (B_1 \ AB_1 \ \dots \ A^{\gamma_1-1}B_1 \ B_2 \ AB_2 \ \dots \ A^{\gamma_2-1}B_2)$$

con γ_1 y γ_2 siendo los índices de Kronecker del sistema, los cuales deben satisfacer: $\sum_{i=1,2} \gamma_i = 6$. Considerando lo presentado en la sección 2.3.2, se obtiene n columnas independientes para formar la matriz \mathcal{C} considerando a $\gamma_1 = 4$ y $\gamma_2 = 2$ para obtener la matriz \mathcal{C} de la siguiente manera

$$\mathcal{C} = (B_1 \ AB_1 \ A^2B_1 \ A^3B_1 \ B_2 \ AB_2) \quad (4.27)$$

denotando los vectores fila de dimensión n como ϕ_j para $j = 1, 2$, de la siguiente forma

$$\phi_j = [0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

con 1 en la posición $(\sum_{i=1}^j \gamma_i)$ y 0 en caso contrario, esto es

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bajo la suposición anterior, las salidas planas se obtienen mediante la siguiente ecuación

$$F = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} x \quad (4.28)$$

Dado que la matriz (4.27), la cual es de rango completo ($n = 6$). Por lo tanto, a través de la ecuación (4.28) se obtiene las salidas planas del sistema

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 \\ k_5x_1 + k_6x_2 + k_7x_3 + k_8x_4 + k_9x_5 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Calculando las derivadas con respecto al tiempo de la salida plana F , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{F} &= C\dot{x} = CAx + CBu = CAx \\ \ddot{F} &= C\ddot{x} = CA\dot{x} = CA^2x + CABu \\ F^{(3)} &= Cx^{(3)} = CA^2\dot{x} = CA^3x + CA^2Bu \\ F^{(4)} &= Cx^{(4)} = CA^3\dot{x} = CA^4x + CA^3Bu\end{aligned}$$

Del sistema (4.25), se calcula la parametrización diferencial del sistema en términos del vector $F = [F_1 \ F_2]^T$, de tal manera que el sistema se representa por el siguiente conjunto de derivadas sucesivas del vector F

$$\begin{aligned}\dot{F}_1 &= c_1x_2 + c_2x_3 + c_3x_4 \\ \ddot{F}_1 &= c_4x_2 + c_5x_3 + c_6x_4 \\ F_1^{(3)} &= c_7x_2 + c_8x_3 + c_9x_4 \\ F_1^{(4)} &= c_{10}x_2 + c_{11}x_3 + c_{12}x_4 + u_l + u_r \\ \dot{F}_2 &= c_{13}x_2 + c_{14}x_3 + c_{15}x_4 + c_{16}x_6 \\ \ddot{F}_2 &= c_{17}x_2 + c_{18}x_3 + c_{19}x_4 + u_r\end{aligned}\tag{4.30}$$

Mientras que las entradas de control del RMPI se expresan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}u_r &= \bar{u}_r - c_{17}x_2 - c_{18}x_3 - c_{19}x_4 \\ u_l &= \bar{u}_l - c_{10}x_2 - c_{11}x_3 - c_{12}x_4 - u_r\end{aligned}\tag{4.31}$$

donde las derivadas de más alto orden se remplazan por las siguientes variables

$$\bar{u}_r = \ddot{F}_2; \quad \bar{u}_l = \ddot{F}_1$$

por tanto, realizando un cambio de variable del vector de estado de la primera y segunda salida plana de la siguiente forma: $[F_1 \ \dot{F}_1 \ \ddot{F}_1 \ \ddot{F}_1] = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]$ y $[F_2 \ \dot{F}_2] = [\xi_1 \ \xi_2]$, el sistema (4.30)-(4.31) se reescribe mediante la siguiente parametrización diferencial de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= \bar{u}_l \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \bar{u}_r\end{aligned}\tag{4.32}$$

de tal manera que el sistema general que representa al modelo dinámico linealizado del RMPI se representa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}_z z + \bar{B}_z \bar{u}_l \\ \dot{\xi} &= \bar{A}_\xi \xi + \bar{B}_\xi \bar{u}_r\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R}^4, \quad \bar{u}_l \in \mathbb{R}, \quad \bar{A}_z \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \bar{B}_z \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \\ \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{u}_r \in \mathbb{R}, \quad \bar{A}_\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \bar{B}_\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \bar{A}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{B}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \bar{A}_\xi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{B}_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para conseguir la convergencia de F a una referencia deseada F^* , se propone un control virtual o auxiliar basado en la planitud de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \bar{u}_r &= -\lambda_1(\dot{F}_2 - \dot{F}_2^*) - \lambda_0(F_2 - F_2^*) \\ \bar{u}_l &= -\kappa_3(\ddot{F}_1 - \ddot{F}_1^*) - \kappa_2(\dot{F}_1 - \dot{F}_1^*) \\ &\quad - \kappa_1(F_1 - F_1^*) - \kappa_0(F_1 - F_1^*) \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde el conjunto de coeficientes κ y λ se calculan mediante los siguientes polinomios Hurwitz

$$\begin{aligned} s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0 \\ s^4 + \kappa_3 s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0 \end{aligned}$$

4.2.2. Resultados de Simulación

En base a lo anteriormente mencionado, se realizaron pruebas a nivel simulación de un RMPI con los parámetros dados en la Tabla 4.1. El objetivo del control en esta simulación es realizar un desplazamiento total dado por la referencia x_1^* del RMPI con un ángulo de giro deseado x_5^* , y que a su vez se consiga el equilibrio del péndulo en la referencia deseada x_3^* . Las condiciones iniciales del RMPI se definen como: $x_{init} = (0.092 \ 0 \ -0.2 \ 0.7854 \ 0 \ 0)^T$. La Figura 4.2 muestra el comportamiento de los estados x_1, x_3 y x_5 del RMPI. Se observa, que el robot avanza al origen y se mantiene en una postura erguida, y después sigue referencias distintas cada 5 s. En el segundo $t = 23$, se aplica una perturbación en el péndulo del robot, como se observa en la Figura 4.4. Lo anterior indica que el sistema RMPI no sólo avanza y gira a los valores deseados, si no que también respeta la postura erguida que debe conservar el RMPI.

El recorrido en las coordenadas x y y del robot se presenta en la Figura 4.3, donde se observa que el sistema inicia en un punto diferente al origen y llega a las referencias deseadas, aún con la presencia de una perturbación. En la parte superior de la Figura 4.4 se muestra el comportamiento de los controladores aplicados a cada uno de los motores, y la robustez al ser sometidos a una perturbación. Para observar el desplazamiento en el plano x, y del

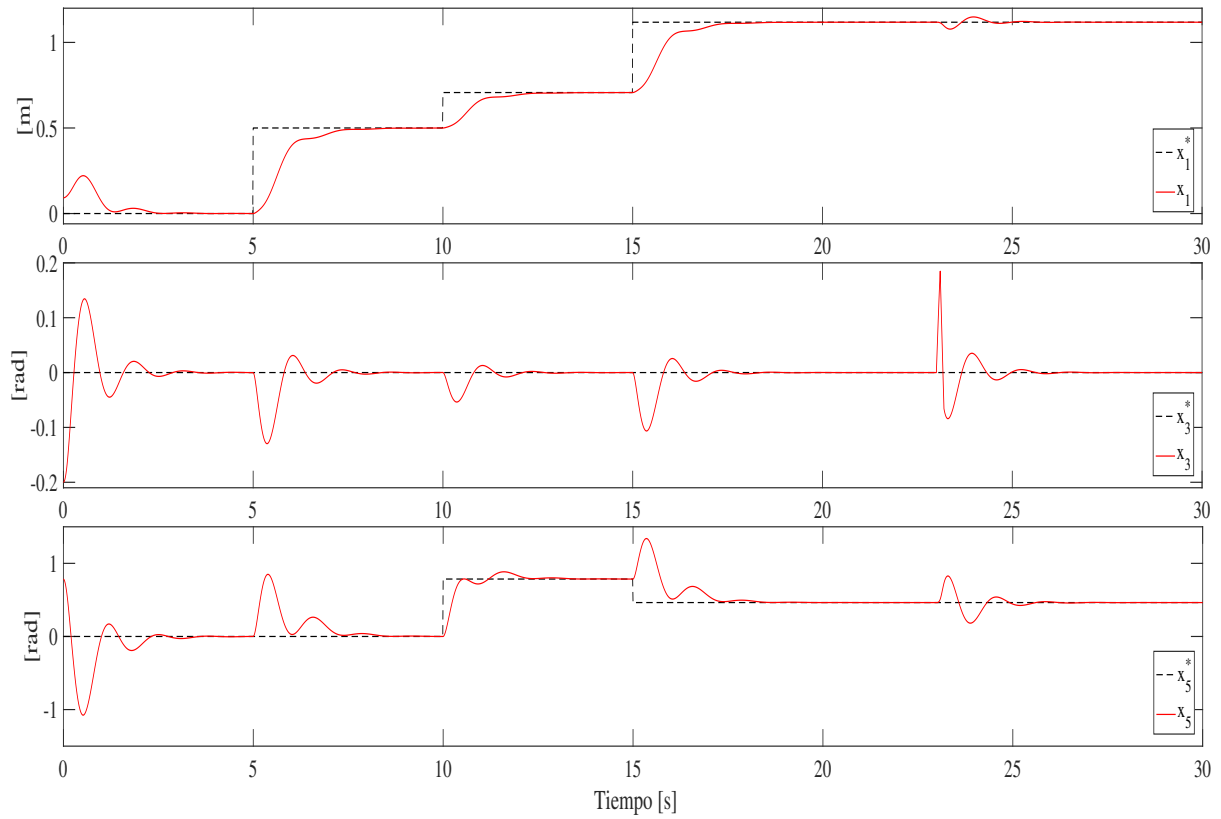


Figura 4.2: Respuesta de los estados x_1, x_3, x_5 .

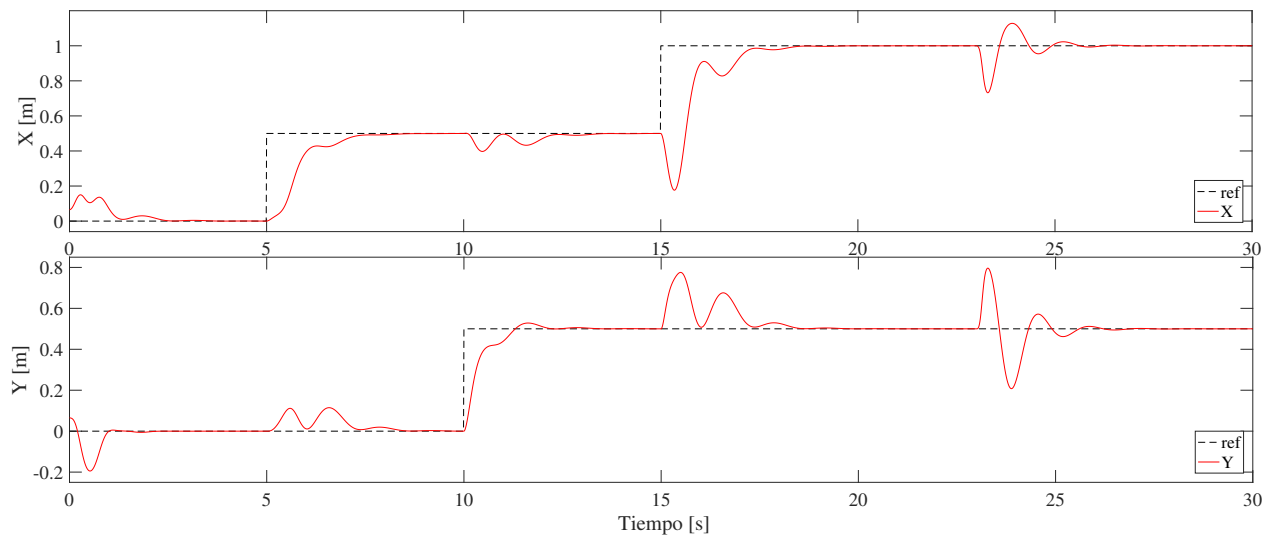


Figura 4.3: Comportamiento del RMPI en las coordenadas x y y .

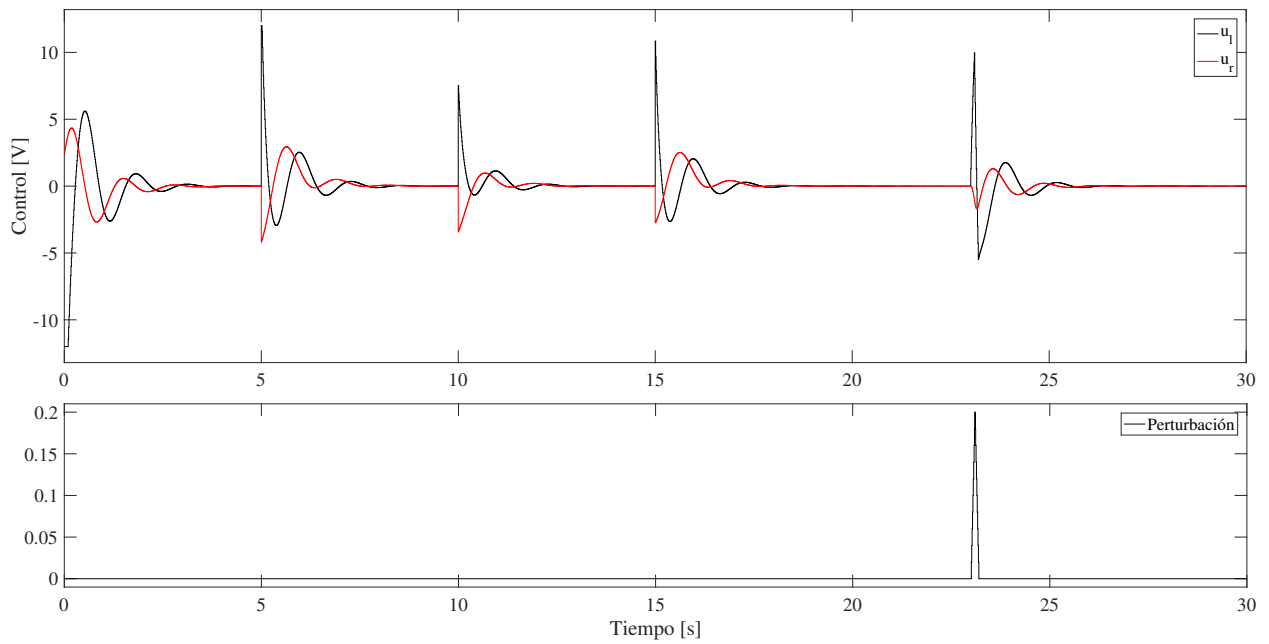


Figura 4.4: Comportamiento de los controles y la perturbación aplicada al péndulo.

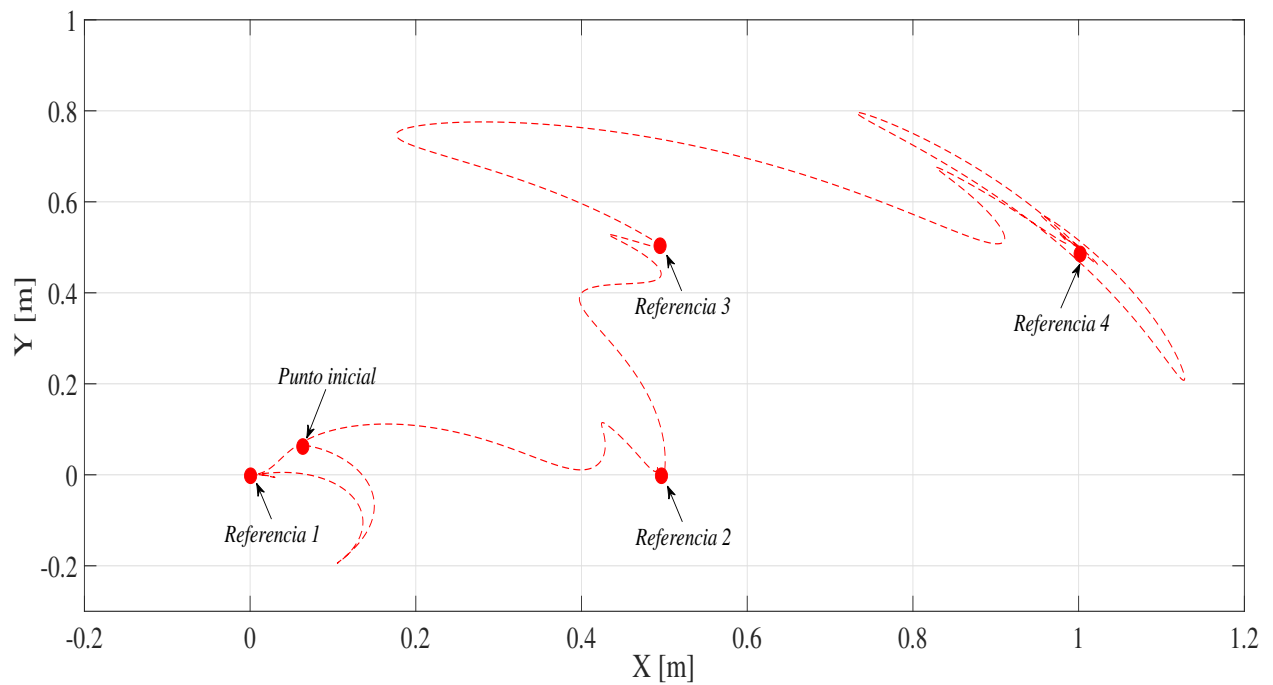


Figura 4.5: Desplazamiento realizado por el RMPI en el plano (x, y) .

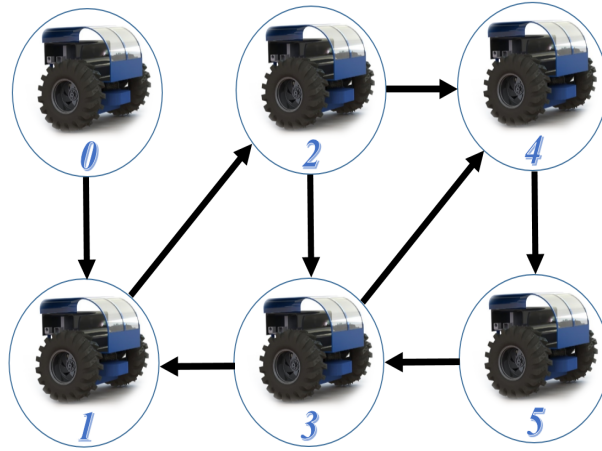


Figura 4.6: Grafo dirigido.

RMPI, se presenta una vista superior en la Figura 4.5. En esta figura se observa el recorrido realizado por el robot.

4.3. Control de múltiples RMPI

En esta sección se muestra el algoritmo de control de consenso de múltiples Robot Móvil tipo Péndulo invertido (RMPI), basado en los conceptos de planitud diferencial presentados en la sección anterior. La idea principal es que los robots realicen una formación en el plano (x, y) , y a la vez conserven su postura, el avance y el ángulo de giro ciertas referencias con respecto a un líder virtual para la realización de una formación preestablecida. En este trabajo se considera que el RMPI líder es un exo-sistema que genera las señales de referencias deseadas, el cual es autónomo y no es afectado por ningún RMPI seguidor. Se presenta también, la función de evento que determina el instante en que el i -ésimo RMPI debe transmitir su estado al j -ésimo RMPI con $j \in N_i$.

Considere un conjunto de RMPI donde la dinámica de cada agente se representa por la ecuación (4.32), y donde la comunicación entre los agentes esta determinada mediante un grafo dirigido y fuertemente conectado (ver Figura 4.6), el cual cuenta con un nodo líder (RMPI₀). Entonces el sistema multi-RMPI se representa por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \bar{A}_z z_i + \bar{B}_z \bar{u}_{l,i} \\ \dot{\xi}_i &= \bar{A}_\xi \xi_i + \bar{B}_\xi \bar{u}_{r,i} \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde $i = 1, \dots, N$, siendo N el número de agentes en el grafo, y el RMPI_0 se define como el agente líder, y se simplifica la terminología considerando a $z_i = [z_{1,i} \ z_{2,i} \ z_{3,i} \ z_{4,i}]^T$ y $\xi_i = [\xi_{1,i} \ \xi_{2,i}]^T$. Se observa en la ecuación (4.35), que cada agente tiene la forma de un integrador desacoplado de segundo orden. De esta manera, se introduce el concepto de protocolo de consenso promedio dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{l,i} &= K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [(z_j - z_i) + g_i(z_0 - z_i)] \\ \bar{u}_{r,i} &= K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [(\xi_j - \xi_i) + g_i(\xi_0 - \xi_i)]\end{aligned}\quad (4.36)$$

Para realizar una formación en el plano (x, y) es necesario considerar la relación de posiciones que se deben de conservar entre los agentes para realizar la formación. De lo anterior el protocolo de consenso se determina de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bar{u}_{l,i} &= K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\left[(z_j - z_i) + z_{\Delta_j^i} \right] + g_i \left[(z_0 - z_i) + z_{\Delta_0^i} \right] \right] \\ \bar{u}_{r,i} &= K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\left[(\xi_j - \xi_i) + \xi_{\Delta_j^i} \right] + g_i \left[(\xi_0 - \xi_i) + \xi_{\Delta_0^i} \right] \right]\end{aligned}\quad (4.37)$$

Donde $z_{\Delta_j^i}$ y $\xi_{\Delta_j^i}$ representan las distancias deseadas entre los robots i y j (Δx_j^i , Δy_j^i) calculadas a partir de la salida plana (ver Figura 4.7), establecidas para la realización de la formación de los robots. Note que puesto que el protocolo de consenso se encuentra en el mapeo coordinado de la salida plana, tanto los estados deseados como las variables de la formación, se deben encontrar en el mismo mapeo.

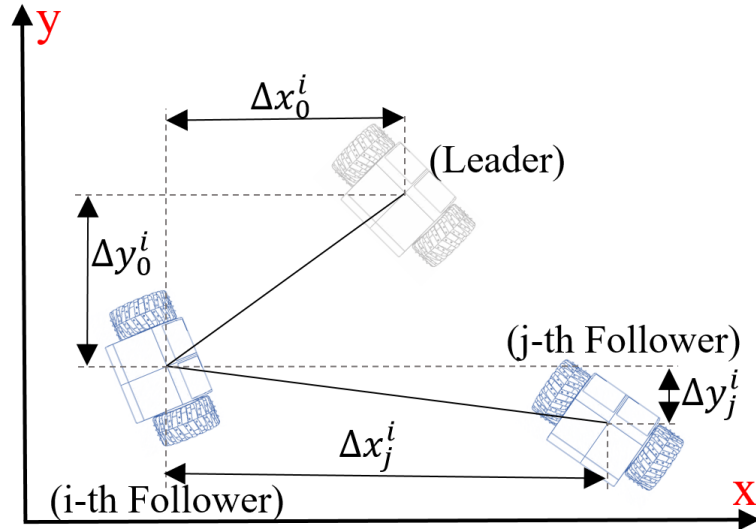


Figura 4.7: Relaciones de las distancias entre agentes.

Dichas referencias se encuentran programadas en cada RMPI, es decir, no se transmiten entre los agentes. Si el agente i se comunica con el líder, se dice que existe un peso $g_i > 0$.

4.3.1. Consenso de Múltiples RMPI basado en planitud diferencial en el plano y comunicación basada en eventos

En la sección anterior se aborda el problema de consenso y formación de un grupo de RMPI con una metodología líder virtual mediante una comunicación entre agentes de manera continua y la incorporación de las propiedades de planitud diferencial en los sistemas multiagentes. Sin embargo en sistemas donde la comunicación se realiza de manera inalámbrica existen restricciones energéticas lo cual representa un gran desafío. Una comunicación disparada por eventos reduce el consumo energético en la transmisión de datos enviando solamente cuando es necesario. Para conseguir esto, existe una función de evento que toma como entrada el valor actual del agente i (z_i, ξ_i), y memorias $m_{1,i}$ y $m_{2,i}$ de los estado z_i y ξ_i , respectivamente, de la última vez que ocurrió un evento.

La función de evento incorpora todos los errores de cada uno de los estados del sistema, un umbral de activación y las memorias de los estados, se describen como

$$e_i(z_i, \xi_i, m_{1,i}, m_{2,i}) = e_{z_1,i} \wedge e_{z_2,i} \wedge e_{z_3,i} \wedge e_{z_4,i} \wedge e_{\xi_1,i} \wedge e_{\xi_2,i} \quad (4.38)$$

donde $e_{z_{s_1},i} = |\bar{e}_{z_{s_1},i}| - \delta$ y $e_{\xi_{s_2},i} = |\bar{e}_{\xi_{s_2},i}| - \delta$ con $\bar{e}_{z_{s_1},i} = m_{1s_1,i} - z_{s_1,i}$ y $\bar{e}_{\xi_{s_2},i} = m_{2s_2,i} - \xi_{s_2,i}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ el umbral de activación de la función de evento, $i \in \mathcal{V}$, $s_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $s_2 = \{1, 2\}$. Entonces la función de control distribuido (4.37) se representa mediante las memorias $m_{1,i}$, $m_{2,i}$ de los estados z_i, ξ_i de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \bar{u}_{l,i} &= K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\left[(m_{1,j} - m_{1,i}) + z_{\Delta_j^i} \right] + g_i \left[(z_0 - m_{1,i}) + z_{\Delta_0^i} \right] \right] \\ \bar{u}_{r,i} &= K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\left[(m_{2,j} - m_{2,i}) + \xi_{\Delta_j^i} \right] + g_i \left[(\xi_0 - m_{2,i}) + \xi_{\Delta_0^i} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

La prueba de estabilidad del sistema se muestra a continuación.

4.3.2. Prueba de Estabilidad: Comunicación disparada por eventos

Considere un conjunto de RMPI con una topología de comunicación representada mediante un grafo dirigido y fuertemente conectado y teniendo un nodo como líder (ver Figura 4.6). La dinámica de cada agente está parametrizada mediante la salida plana (z_i, ξ_i) mostrada en (4.33). Los RMPI seguidores tienen una estructura dinámica general de la siguiente forma

$$\dot{Z}_i = A_{z\xi} Z_i + B_{z\xi} \bar{u}_i \quad (4.40)$$

y la dinámica del líder se considera como un exo-sistema de la siguiente forma

$$\dot{Z}_0 = A_{z\xi} Z_0 \quad (4.41)$$

con

$$A_{z\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{z\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$Z_i = \begin{bmatrix} z_{1,i} \\ z_{2,i} \\ z_{3,i} \\ z_{4,i} \\ \xi_{1,i} \\ \xi_{2,i} \end{bmatrix}; \quad \bar{u}_i = \begin{bmatrix} \bar{u}_{l,i} \\ \bar{u}_{r,i} \end{bmatrix}$$

donde $\bar{u}_{l,i}$ y $\bar{u}_{r,i}$ representan el protocolo de consenso entre los agentes el cual será presentado en el siguiente Teorema

Teorema 3 *Considere un nodo líder y un grupo de N -vehículos RMPI representados por (4.41) y (4.40), respectivamente, los cuales interactúan bajo el grafo fuertemente conectado y dirigido \mathcal{G} . Si existe comunicación entre el i -ésimo RMPI y el líder, entonces existe un peso $g_i > 0$ y el grafo aumentado que contiene al líder se denota por $\bar{\mathcal{G}}$. Entonces la función de control distribuido está definida por*

$$\bar{u}_{l,i} = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\left[(m_{1,j} - m_{1,i}) + z_{\Delta_j^i} \right] + g_i \left[(z_0 - m_{1,i}) + z_{\Delta_0^i} \right] \right]$$

$$\bar{u}_{r,i} = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\left[(m_{2,j} - m_{2,i}) + \xi_{\Delta_j^i} \right] + g_i \left[(\xi_0 - m_{2,i}) + \xi_{\Delta_0^i} \right] \right]$$

y $K = \rho \bar{B}^T P$. Siendo P la solución de la ecuación de Riccati

$$\bar{A}_{z\xi}^T P + P \bar{A}_{z\xi} - 2\rho P \bar{B}_{z\xi} \bar{B}_{z\xi}^T P = -Q$$

donde, la función de evento planteada se describe como

$$e_i(z_i, \xi_i, m_{1,i}, m_{2,i}) = e_{z_{1,i}} \wedge e_{z_{2,i}} \wedge e_{z_{3,i}} \wedge e_{z_{4,i}} \wedge e_{\xi_{1,i}} \wedge e_{\xi_{2,i}}$$

donde $e_{z_{s_1,i}} = |\bar{e}_{z_{s_1,i}}| - \delta$ y $e_{\xi_{s_2,i}} = |\bar{e}_{\xi_{s_2,i}}| - \delta$ con $\bar{e}_{z_{s_1,i}} = m_{1s_1,i} - z_{s_1,i}$ y $\bar{e}_{\xi_{s_2,i}} = m_{2s_2,i} - \xi_{s_2,i}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ el umbral de activación de la función de evento, $i \in \mathcal{V}$, $s_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $s_2 = \{1, 2\}$. Entonces, el vector de estado general $Z_i = [z_{1,i} \ z_{2,i} \ z_{3,i} \ z_{4,i} \ \xi_{1,i} \ \xi_{2,i}]^T$ tiende a una vecindad del estado del líder $Z_0 = [z_{1,0} \ z_{2,0} \ z_{3,0} \ z_{4,0} \ \xi_{1,0} \ \xi_{2,0}]^T$, esto es

$$\|\varepsilon_Z(t)\| \leq \frac{\alpha \delta \sqrt{6N} \|\tilde{B}_{z\xi}\|}{\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}}} \quad (4.43)$$

donde $\varepsilon_Z = (\varepsilon_{Z,1}, \varepsilon_{Z,2}, \dots, \varepsilon_{Z,N})^T$. Con $\varepsilon_{Z,i} = Z_i - Z_0$, $\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} = \lambda_{\min}(\tilde{A}_{z\xi})$ siendo $\tilde{A}_{z\xi} = I_N \otimes \bar{A}_{z\xi} - \tilde{B}_{z\xi}$, $\alpha = \|R\| \|R^T\|$, y R una matriz que diagonaliza a $\tilde{A}_{z\xi}$ y $\tilde{B}_{z\xi} = -H \otimes \bar{B}_{z\xi} K$, donde $H = \mathcal{L} + G$, y $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$.

Lo anterior indica que la función de evento (4.38) depende de los estados actuales z_i , ξ_i y de las memorias $m_{1,i}$, $m_{2,i}$ generadas de la última vez que existió comunicación. Cuando la función de evento (4.38) se cumple, el estado del agente i (z_i, ξ_i) que se transmite a los agentes con los que se tiene comunicación y se guarda como memorias $m_{1,i}$, $m_{2,i}$ y los controles ($u_{l,i}$, $u_{r,i}$) se definen en (4.39), los cuales son calculados con los datos actualizados. En caso contrario, los estados (z_i, ξ_i) no se transmiten, las memorias no se actualizan y el control se calcula con las memorias guardadas de la última vez que ocurrió el evento.

Prueba 2 Sea el control de consenso de múltiples RMPI determinado por las memorias $M_i = [m_{11,i} \ m_{12,i} \ m_{13,i} \ m_{14,i} \ m_{21,i} \ m_{22,i}]^T$ del estado $Z_i = [z_{1,i} \ z_{2,i} \ z_{3,i} \ z_{4,i} \ \xi_{1,i} \ \xi_{2,i}]^T$, y de la última vez que ocurrió un evento, se reescribe (4.39) en una estructura general de la forma

$$\bar{u}_i = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\left[(M_j - M_i) + Z_{\Delta_j^i} \right] + g_i \left[(Z_0 - M_i) + Z_{\Delta_0^i} \right] \right]$$

definiendo el error de la memoria con respecto al estado $\bar{e}_{Z,i} = M_i - Z_i$ o bien, $M_i = \bar{e}_{Z,i} + Z_i$ y el error del estado con respecto a la referencia Z_0 como $\varepsilon_{Z,i} = Z_i - Z_0$. Considerando que las referencias de formación deseadas no son transmitidas, el control se escribe

$$\bar{u}_i = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\begin{array}{c} [(Z_j - Z_i) + (\bar{e}_{Z,j} - \bar{e}_{Z,i})] \\ + g_i(Z_0 - Z_i) - g_i \bar{e}_{Z,i} \end{array} \right]$$

considerando

$$\bar{u}_i = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \begin{bmatrix} (Z_j - Z_0) - (Z_i - Z_0) + (\bar{e}_{Z,j} - \bar{e}_{Z,i}) \\ + g_i(Z_0 - Z_i) - g_i \bar{e}_{Z,i} \end{bmatrix}$$

en términos de $\varepsilon_{Z,i}$

$$\bar{u}_i = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [(\varepsilon_{Z,j} - \varepsilon_{Z,i}) + (\bar{e}_{Z,j} - \bar{e}_{Z,i}) - g_i \varepsilon_{Z,i} - g_i \bar{e}_{Z,i}]$$

Recuerde que el objetivo es que $\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\|Z_i - Z_0\|}_{\varepsilon_{Z,i}} = 0$ o al menos converjan a una vecindad

cercana del origen, entonces la dinámica del error está dada como:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{Z,i} &= \dot{Z}_i - \dot{Z}_0 = \bar{A}_{z\xi} Z_i + \bar{B}_{z\xi} \bar{u}_i - \bar{A}_{z\xi} Z_0 \\ &= \bar{A}_{z\xi} (Z_i - Z_0) + \bar{B}_{z\xi} \bar{u}_i \\ \dot{\varepsilon}_{Z,i} &= \bar{A}_{z\xi} \varepsilon_{Z,i} + \bar{B}_{z\xi} \bar{u}_i \end{aligned}$$

así que la dinámica del error en lazo cerrado se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{Z,i} &= \bar{A}_{z\xi} \varepsilon_{Z,i} + \bar{B}_{z\xi} \left(K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \begin{bmatrix} (\varepsilon_{Z,j} - \varepsilon_{Z,i}) + (\bar{e}_{Z,j} - \bar{e}_{Z,i}) \\ -g_i \varepsilon_{Z,i} - g_i \bar{e}_{Z,i} \end{bmatrix} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{Z,i} &= \bar{A}_{z\xi} \varepsilon_{Z,i} + \bar{B}_{z\xi} K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\varepsilon_{Z,j} - \varepsilon_{Z,i}) \\ &\quad + \bar{B}_{z\xi} K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\bar{e}_{Z,j} - \bar{e}_{Z,i}) \\ &\quad - \bar{B}_{z\xi} K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_i \varepsilon_{Z,i} \\ &\quad - \bar{B}_{z\xi} K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_i \bar{e}_{Z,i} \end{aligned}$$

definiendo $\varepsilon_Z = [\varepsilon_{Z,1} \ \varepsilon_{Z,2} \ \dots \ \varepsilon_{Z,N}]^T$, $\bar{e}_Z = [\bar{e}_{Z,1} \ \bar{e}_{Z,2} \ \dots \ \bar{e}_{Z,N}]^T$, $G = \text{diag}[g_1, g_2, \dots, g_N]$ se escribe el sistema multi-agente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_Z &= (I_N \otimes \bar{A}_{z\xi}) \varepsilon_Z - (I_N \otimes \bar{B}_{z\xi}) (\mathcal{L} \otimes I_N) (I_N \otimes K) \varepsilon_Z \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B}_{z\xi}) (G \otimes I_N) (I_N \otimes K) \varepsilon_Z \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B}_{z\xi}) (\mathcal{L} \otimes I_N) (I_N \otimes K) \bar{e}_Z \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B}_{z\xi}) (G \otimes I_N) (I_N \otimes K) \bar{e}_Z \\ \dot{\varepsilon}_Z &= [I_N \otimes \bar{A}_{z\xi} - (\mathcal{L} + G) \otimes \bar{B}_{z\xi} K] \varepsilon_Z \\ &\quad + [-(\mathcal{L} + G) \otimes \bar{B}_{z\xi} K] \bar{e}_Z \\ \dot{\varepsilon}_Z &= \underbrace{\begin{bmatrix} (I_N \otimes \bar{A}_{z\xi}) - H \otimes \bar{B}_{z\xi} K \\ \bar{A}_{z\xi} \end{bmatrix}}_{\bar{A}_{z\xi}} \varepsilon_Z + \underbrace{\begin{bmatrix} -H \otimes \bar{B}_{z\xi} K \\ \bar{B}_{z\xi} \end{bmatrix}}_{\bar{B}_{z\xi}} \bar{e}_Z \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde \otimes representa el producto de Kronecker.

Observación 1: La matriz $H = \mathcal{L} + G$ corresponde al grafo $\bar{\mathcal{G}}$ y tiene las siguientes propiedades (ver [33]):

- H contiene valores propios positivos
- H es definida positiva

Observación 2: En este trabajo se asume que el grafo $\bar{\mathcal{G}}$ está fuertemente conectado, es decir, existe un camino entre cada par de vértices.

Se asume primero que $\bar{\varepsilon}_Z = 0$, y se prueba que el sistema $\dot{\varepsilon}_Z = \tilde{A}_z \varepsilon_Z$ es asintóticamente estable. Para esto se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varepsilon_Z) = \varepsilon_Z^T (I_N \otimes P) \varepsilon_Z$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon_Z) &= \varepsilon_Z^T (I_N \otimes P) \dot{\varepsilon}_Z + \dot{\varepsilon}_Z^T (I_N \otimes P) \varepsilon_Z \\ &= \varepsilon_Z^T \left[\begin{array}{l} (I_N \otimes P) (I_N \otimes \bar{A}_{z\xi} - H \otimes \bar{B}_{z\xi} K) \\ + (I_N \otimes \bar{A}_{z\xi}^T - H \otimes K^T \bar{B}_{z\xi}^T) (I_N \otimes P) \end{array} \right] \varepsilon_Z \\ &= \varepsilon_Z^T \left[\begin{array}{l} (I_N \otimes P) (I_N \otimes \bar{A}_{z\xi} - H \otimes \bar{B}_{z\xi} K) \\ + (I_N \otimes \bar{A}_{z\xi}^T - H \otimes K^T \bar{B}_{z\xi}^T) (I_N \otimes P) \end{array} \right] \varepsilon_Z \\ &= \varepsilon_Z^T \left[\begin{array}{l} (I_N \otimes P) (I_N \otimes \bar{A}_{z\xi}) \\ + (I_N \otimes \bar{A}_{z\xi}^T) (I_N \otimes P) \\ - (I_N \otimes P) (H \otimes \bar{B}_{z\xi} K) \\ - (H \otimes K^T \bar{B}_{z\xi}^T) (I_N \otimes P) \end{array} \right] \varepsilon_Z \\ &= \varepsilon_Z^T \left[\begin{array}{l} (I_N \otimes (P \bar{A}_{z\xi}) + I_N \otimes (\bar{A}_{z\xi}^T P)) \\ - (I_N H \otimes P \bar{B}_{z\xi} K) \\ - (H I_N \otimes K^T \bar{B}_{z\xi}^T P) \end{array} \right] \varepsilon_Z \\ &= \varepsilon_Z^T \left[\begin{array}{l} (I_N \otimes (P \bar{A}_{z\xi} + \bar{A}_{z\xi}^T P)) \\ - (H \otimes (P \bar{B}_{z\xi} K + K^T \bar{B}_{z\xi}^T P)) \end{array} \right] \varepsilon_Z \\ \dot{V}(\varepsilon_Z) &= \varepsilon_Z^T \left[\begin{array}{l} (I_N \otimes (P \bar{A}_{z\xi} + \bar{A}_{z\xi}^T P)) \\ - (H \otimes (2P \bar{B}_{z\xi} \bar{B}_{z\xi}^T P)) \end{array} \right] \varepsilon_Z \end{aligned}$$

puesto que H es simétrica, existe una matriz $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que $THT^T = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ donde $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ son los valores propios de H , los cuales por la observación 1 son positivos.

Considerando que $\tilde{\varepsilon}_Z = (T \otimes I_N) \varepsilon_Z$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon_Z) &= \tilde{\varepsilon}_Z^T \left[(I_N \otimes (P \bar{A}_{z\xi} + \bar{A}_{z\xi}^T P)) - \Lambda \otimes (2P \bar{B}_{z\xi} \bar{B}_{z\xi}^T P) \right] \tilde{\varepsilon}_Z \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_{Z,i}^T \left[P \bar{A}_{z\xi} + \bar{A}_{z\xi}^T P - \lambda_i (2P \bar{B}_{z\xi} \bar{B}_{z\xi}^T P) \right] \tilde{\varepsilon}_{Z,i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\varepsilon_Z) &\leq \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_{Z,i}^T \left[\underbrace{P\bar{A}_{z\xi} + \bar{A}_{z\xi}^T P - \rho(2P\bar{B}_{z\xi}\bar{B}_{z\xi}^T P)}_{-Q_Z} \right] \tilde{\varepsilon}_{Z,i} \\
&\leq - \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_{Z,i}^T Q_Z \tilde{\varepsilon}_{Z,i} \\
&\leq - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Z,i}^T \underbrace{(I_N \otimes T^T) Q_Z (T \otimes I_N)}_{\bar{Q}_Z} \varepsilon_{Z,i} \\
&\leq - \sum_{i=1}^N \varepsilon_{Z,i}^T \bar{Q}_Z \varepsilon_{Z,i} < 0 \quad \forall \quad \varepsilon_{Z,i} \neq 0
\end{aligned}$$

$\implies \bar{A}_{z\xi}$ es Hurwitz y $\varepsilon_{Z,i} \rightarrow 0$ cuando $\bar{e}_Z = 0$ y $t \rightarrow \infty$.

Ahora, se considera el caso general donde $\bar{e}_Z \neq 0$ y se asume que el valor propio más pequeño de $\tilde{A}_{z\xi}$ es $\rho = \lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}}$, entonces

$$\dot{\varepsilon}_Z = \tilde{A}_{z\xi} \varepsilon_Z + \tilde{B}_{z\xi} \bar{e}_Z$$

la solución de esta ecuación es

$$\begin{aligned}
\varepsilon_Z(t) &= e^{\tilde{A}_{z\xi} t} \varepsilon_Z(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}_{z\xi}(t-\tau)} \tilde{B}_{z\xi} \bar{e}_Z(\tau) d\tau \\
\|\varepsilon_Z(t)\| &\leq \left\| e^{\tilde{A}_{z\xi} t} \varepsilon_Z(0) \right\| + \int_0^t \left\| e^{\tilde{A}_{z\xi}(t-\tau)} \tilde{B}_{z\xi} \bar{e}_Z(\tau) \right\| d\tau
\end{aligned}$$

considerando $\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} = \lambda_{\min}(\tilde{A}_{z\xi})$, y $R\tilde{A}_{z\xi}R^T = \Phi = \text{diag}(\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}}, \dots, \lambda_N^{\tilde{A}_{z\xi}})$ entonces

$$\|\varepsilon_Z(t)\| \leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} t} \|\varepsilon_Z(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}}(t-\tau)} \left\| \tilde{B}_{z\xi} \bar{e}_Z(\tau) \right\| d\tau$$

donde

$$\alpha = \|R\| \|R^T\|$$

note que $\left\| \tilde{B}_{z\xi} \bar{e}_Z \right\| \leq \left\| \tilde{B}_{z\xi} \right\| \|\bar{e}_Z\|$, puesto que la condición de evento fuerza a

$$\|\bar{e}_Z\| = \sqrt{6\delta^2 + 6\delta^2 + \dots + 6\delta^2} = \delta\sqrt{6N}$$

con N el numero de agentes en la red y δ el umbral de activación de la función de evento.

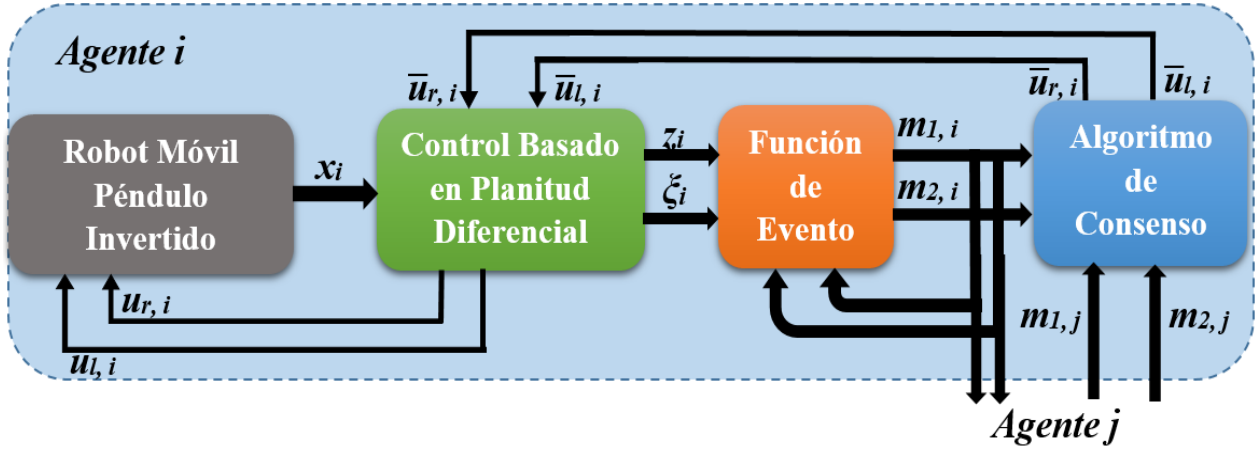
Sustituyendo lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_Z(t)\| &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} t} \|\varepsilon_Z(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}}(t-\tau)} \delta \sqrt{6N} \|\tilde{B}_{z\xi}\| d\tau \\
&\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} t} \|\varepsilon_Z(0)\| + \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} t} \|\tilde{B}_{z\xi}\| \delta \sqrt{6N} \int_0^t e^{\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} \tau} d\tau \\
&\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} t} \|\varepsilon_Z(0)\| \\
&\quad + \alpha e^{-\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} t} \|\tilde{B}_{z\xi}\| \delta \sqrt{6N} \left(\frac{e^{\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}} t}}{\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}}} - \frac{1}{\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}}} \right) \\
\|\varepsilon_Z(t)\| &\leq \frac{\alpha \delta \sqrt{6N} \|\tilde{B}_{z\xi}\|}{\lambda_1^{\tilde{A}_{z\xi}}} \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Entonces el estado de los MRIP $Z_i(t)$, tienden a una vecindad de Z_0 y se mantienen al menos a una distancia $\|\varepsilon_Z(t)\|$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4.3.3. Implementación de la estrategia de control

La estrategia de control implementada se describe por el diagrama a bloques de la Figura 4.8. Dicho diagrama muestra el esquema general del control propuesto para cada agente i . El primer bloque (pintado en color gris) representa el modelo dinámico del robot móvil i , con la entrada el vector de entrada de control $u_i = [u_{l,i} \ u_{r,i}]^T$ (4.31) y el vector de estado del sistema representado por $x_i = [x_{1,i} \ x_{2,i} \ x_{3,i} \ x_{4,i} \ x_{5,i} \ x_{6,i}]^T$. Estas variables de estado x_i se transforman al marco de referencia plano, es decir, $z_i = [z_{1,i} \ z_{2,i} \ z_{3,i} \ z_{4,i}]^T$ y $\xi_i = [\xi_{1,i} \ \xi_{2,i}]^T$ mediante el segundo bloque (verde). Este bloque recibe la señal de control interno $\bar{u}_i = [\bar{u}_{r,i} \ \bar{u}_{l,i}]^T$ el cual se determina por el algoritmo de consenso y envía la señal correspondiente de control u_i al robot para regular la postura, desplazamientos y los ángulos de giro de los RMPI. El tercer bloque (pintado de color naranja) contiene la función de evento (4.38) que determina cuando el estado z_i, ξ_i debe actualizar a $m_{1,i}, m_{2,i}$, respectivamente, éste se retroalimenta, y se envía al algoritmo de consenso (bloque azul). Este último bloque contiene el control de consenso del robot i descrito en (4.39), el cual involucra a los agentes j con los que existe comunicación.

Figura 4.8: Diagrama general del agente i .

4.3.4. Resultados a nivel Simulación

Se realizaron simulaciones numéricas en el ambiente de Matlab/Simulink, la cual se muestra en la Figura 4.9. En esta figura se muestra los 5 sistemas RMPI, el bloque que a través de la salida plana parametriza al sistema, un bloque que contiene el protocolo de consenso determinado por (4.37) y un bloque que parametriza la señales de formación deseada. En la parte inferior se observa que los bloques de la función de evento que determina cuando se transmite la información a otro agente. En las pruebas se consideraron los parámetros dados en la Tabla 4.1 y con condiciones iniciales dadas por la Tabla 4.2. El objetivo del control es realizar una formación deseada en el plano que a su vez consiga mantener el equilibrio de los péndulos de cada uno de los RMPI.

	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$
$RMPI_1$	$(0.8544 \ 0 \ -0.150 \ 0 \ 1.212 \ 0)^T$
$RMPI_2$	$(0.8544 \ 0 \ 0.100 \ 0 \ 0.3588 \ 0)^T$
$RMPI_3$	$(0.7280 \ 0 \ 0.150 \ 0 \ -1.292 \ 0)^T$
$RMPI_4$	$(0.4243 \ 0 \ 0.200 \ 0 \ -2.356 \ 0)^T$
$RMPI_5$	$(0.8544 \ 0 \ -0.100 \ 0 \ 2.7828 \ 0)^T$

Tabla 4.2: Condiciones iniciales de los 5 RMPI.

En la Figura 4.10 se presenta la respuesta en las coordenadas (x, y) de los 5 RMPI basándose en un esquema líder virtual y con una comunicación basada en eventos. Se ob-

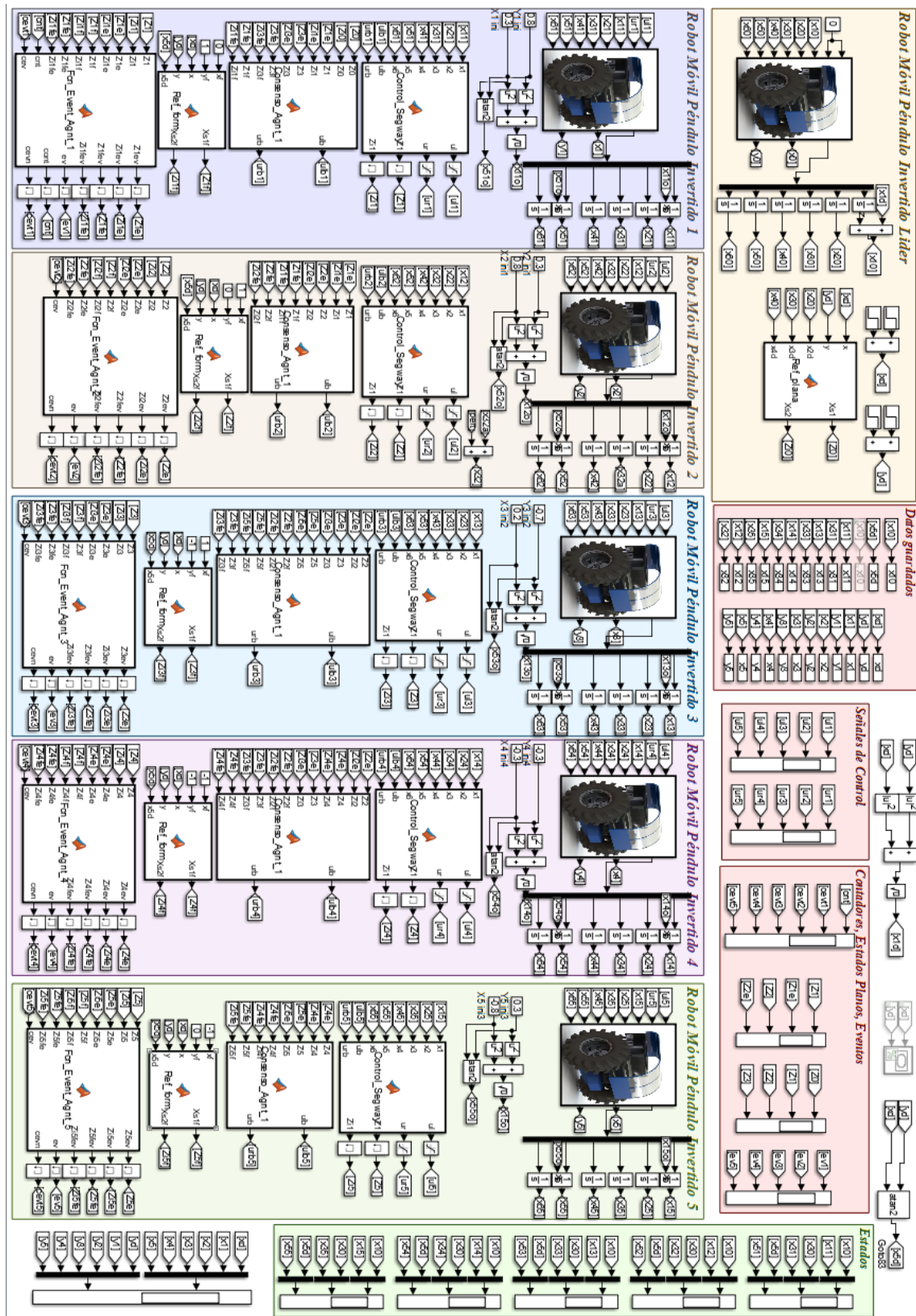


Figura 4.9: Entorno de simulación utilizado para los 5 RMPI y un líder virtual con comunicación disparada por eventos.

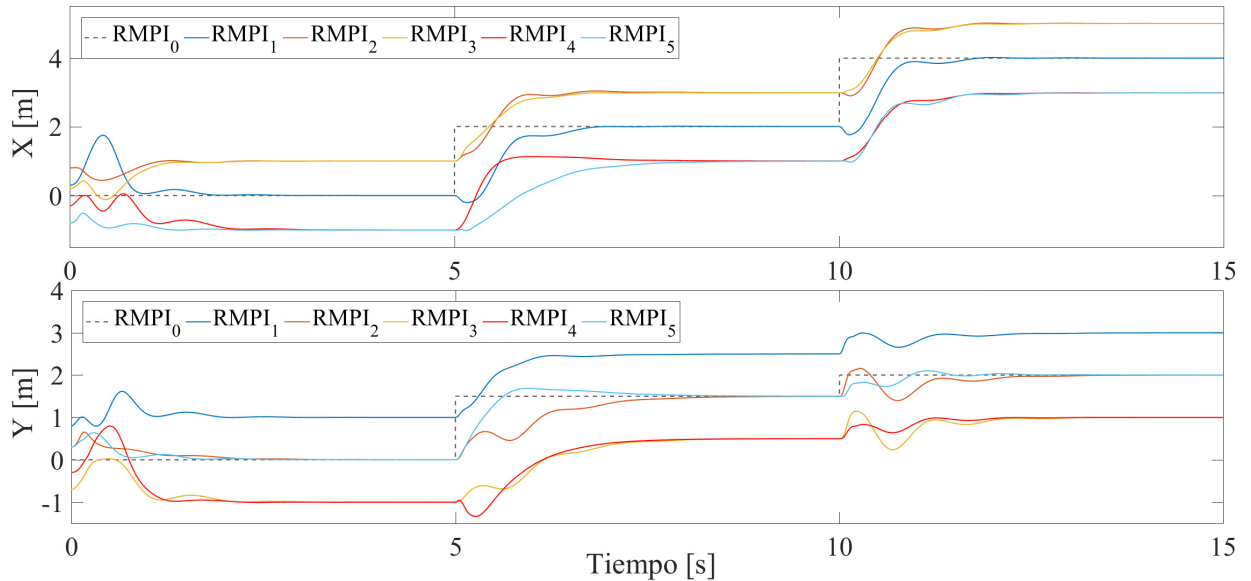


Figura 4.10: Respuesta de los 5 agentes en las coordenadas x, y con comunicación disparada por eventos.

serva que los robots inician con diferente ángulo de inclinación, con diferentes posiciones en el plano. Cabe mencionar que no todos los agentes conocen la señal deseada proporcionada por el líder, sin embargo todos los móviles llegan al punto deseado respetando las referencias de formación. La Figura 4.11 muestra las respuestas de los estados correspondientes al desplazamiento lineal total x_1 , la inclinación del péndulo x_3 y el ángulo de rotación x_5 . Se observa que estas llegan a las referencias deseadas respetando las distancias relativas entre ellos para conseguir la formación que a su vez mantienen el control de la postura de los péndulos de cada uno de los robots. Los eventos realizados por cada uno de los $RMPI$ a través del tiempo se muestran en la Figura 4.12. Estos eventos indican cuando los $RMPI$ transmiten su información a los agentes con los que tienen comunicación según la estructura del grafo. Se observa que cuando existe un cambio de referencia deseada, se exige una mayor comunicación entre los agentes ($t = 0s$, $t = 5s$ y $t = 10s$). Esto es normal, debido a que debe existir una mayor comunicación en los instantes en que todos los robots están en constante cambio y van disminuyendo los eventos cuando el sistema se acerca a su estabilidad. Se observa que los eventos se presentan cuando se cumple la función de evento mostrada en la sección anterior, por lo que no son generados de manera periódica. Se realizó un conteo de eventos realizados para esta prueba con un tiempo de muestreo de 1 ms mostrada en la Figura 4.13. Dicho conteo se determina por las ocasiones en que la función de eventos existe entre los agentes. Note que el conteo de eventos se incrementa en $t = 5$ y $t = 10$, eso sucede porque la comunicación es necesaria cuando existe un cambio de referencia. Se observó que en una comunicación "continua" (o determinada por el tiempo de muestreo) se

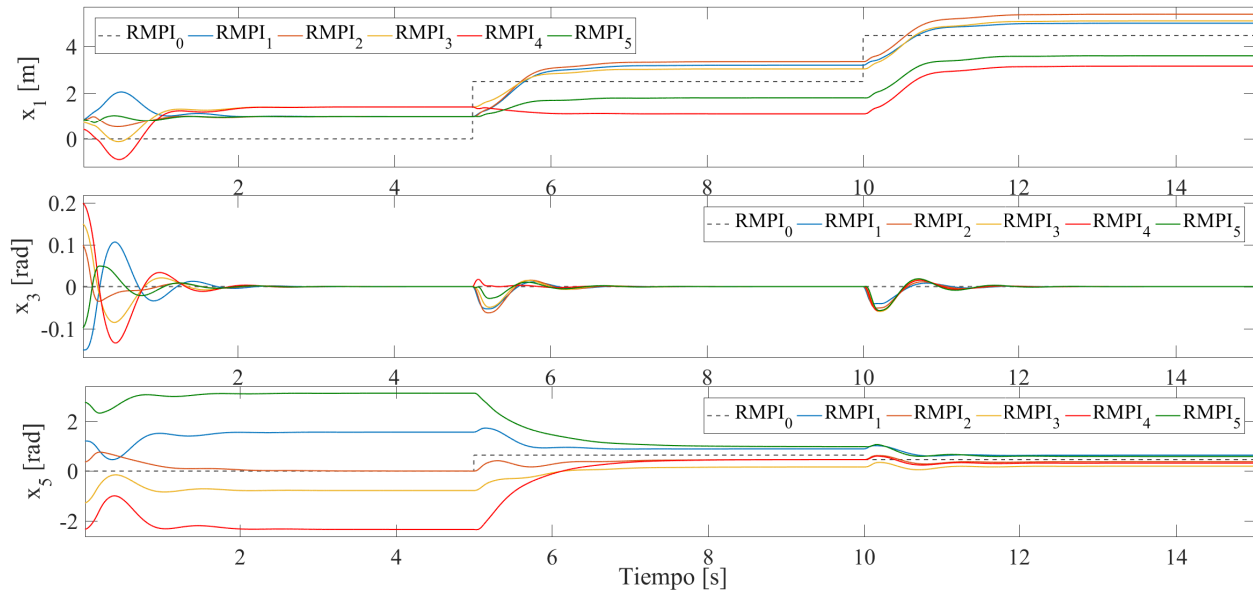


Figura 4.11: Respuesta de los estados x_1 , x_3 , x_5 de los 5 agentes con comunicación disparada por eventos.

realizaron 15000 solicitudes de transmisión, mientras que en una topología disparada por eventos, los agentes registraron $\text{RMPI}_1=7000$, $\text{RMPI}_2=7000$, $\text{RMPI}_3=7000$, $\text{RMPI}_4=7000$ y $\text{RMPI}_5=7000$ solicitudes de transmisión.

Por último, se muestra el comportamiento en el plano de los 5 RMPI y la formación que realizan en las 3 referencias deseadas dadas al líder (ver Figura 4.14). Se observa que cada uno de los RMPI inician en diferentes posiciones y con diferentes posturas ($t = 0$). Sin embargo, con el control propuesto los robots realizan una formación respetando la distribución con respecto al líder.

Análisis Energético de la formación de los RMPI

De manera similar como en el capítulo anterior, se lleva a cabo el análisis de energía consumida por cada uno de los RMPI, cuando se utiliza una comunicación basada en eventos en comparación de una transmisión continua o por un tiempo de muestreo establecido (comunicación síncrona), para la prueba anterior. Considerando nuevamente el uso del dispositivo ESP8266 en el modo "Light-Sleep", el cual consume aproximadamente 170 mA, cuando se

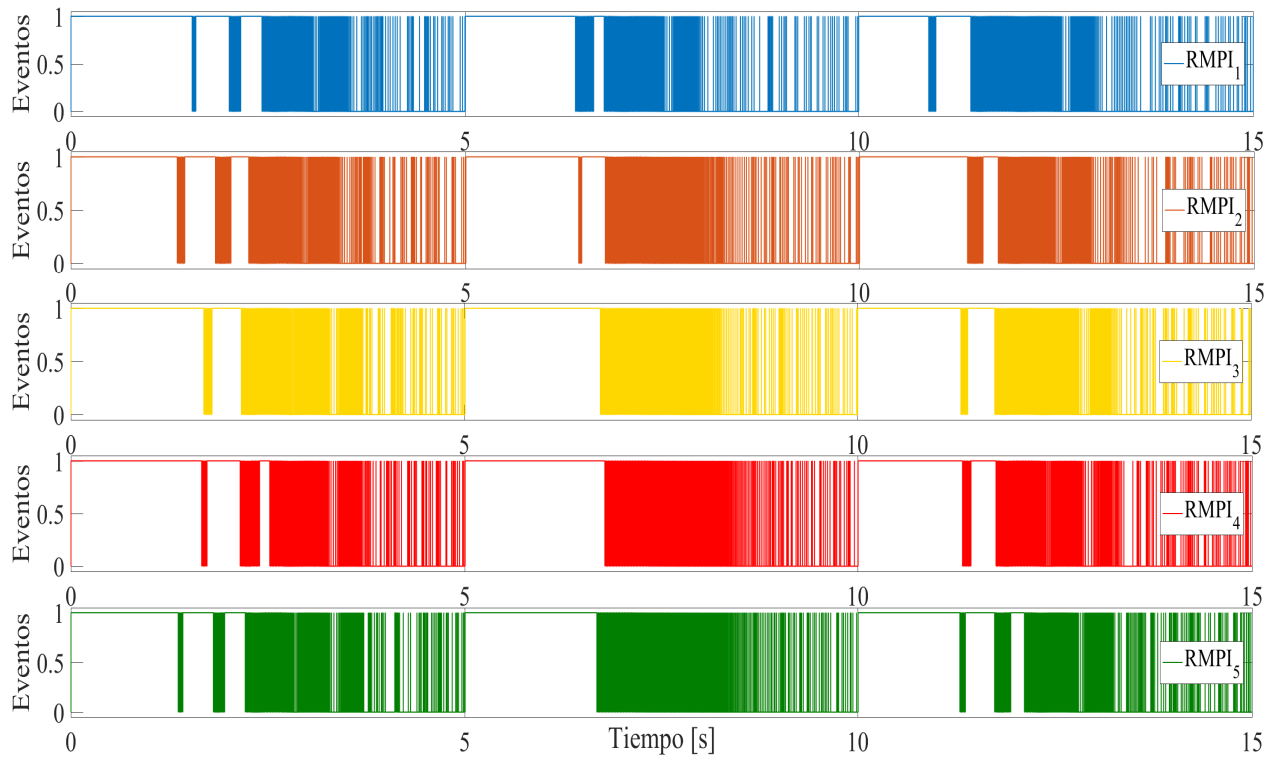


Figura 4.12: Eventos realizados por cada uno de los agentes.

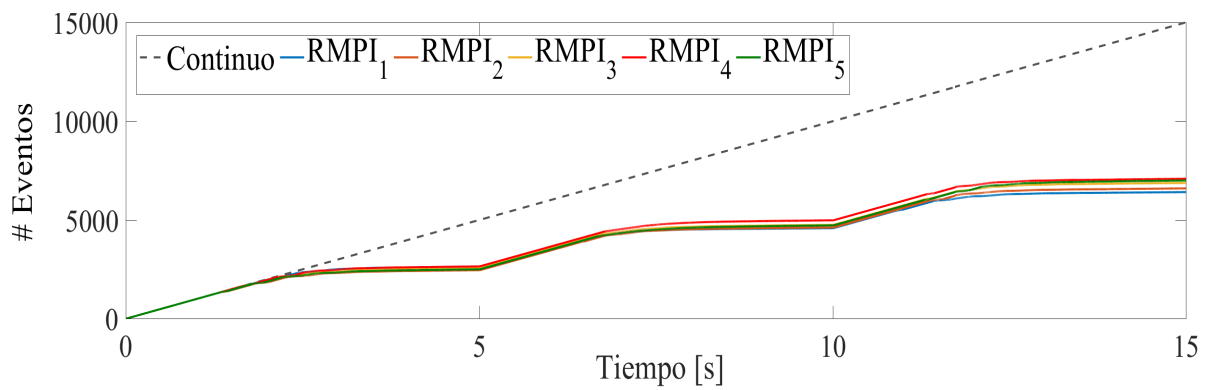


Figura 4.13: Conteo de los eventos realizados.

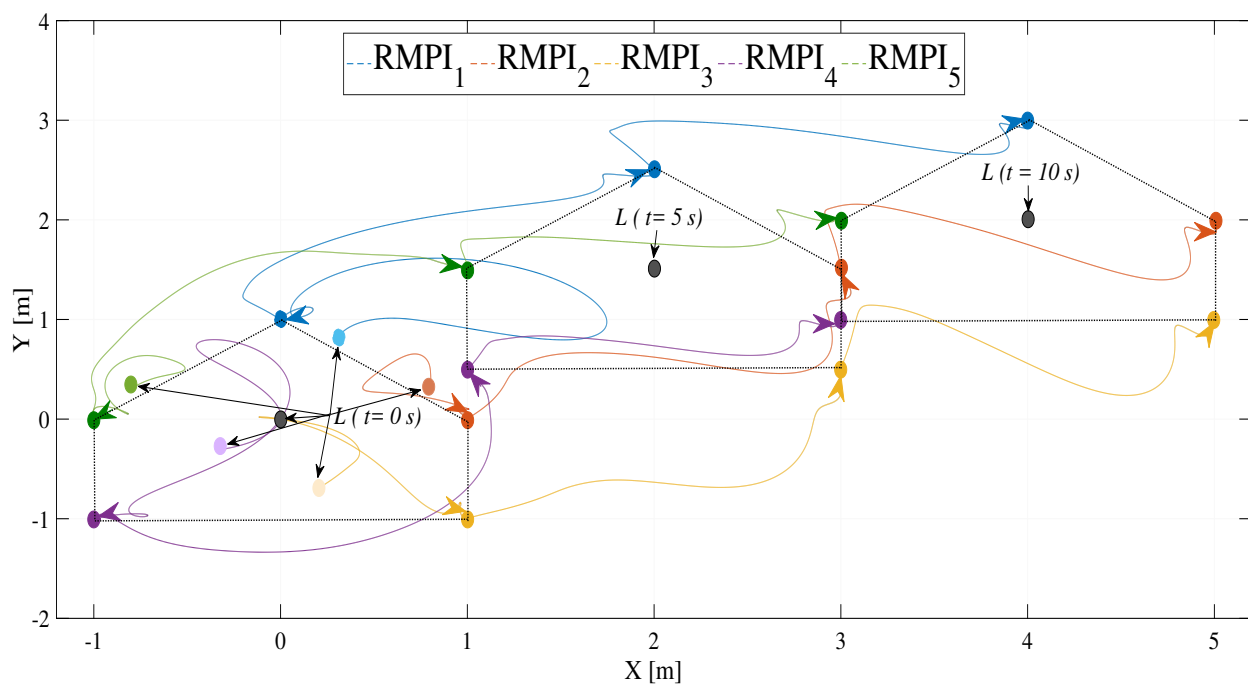


Figura 4.14: Formación realizada por el conjunto de RMPI en el plano (x, y) , con comunicación disparada por eventos.

<i>Continuo</i>	140.3 <i>mWh</i> \rightarrow 100 %	<i>RMPI₁</i>	60.36 <i>mWh</i> \rightarrow 43.02 %
<i>RMPI₂</i>	62.1 <i>mWh</i> \rightarrow 44.26 %	<i>RMPI₃</i>	64.66 <i>mWh</i> \rightarrow 46.08 %
<i>RMPI₄</i>	66.64 <i>mWh</i> \rightarrow 47.49 %	<i>RMPI₅</i>	65.83 <i>mWh</i> \rightarrow 46.92 %

Tabla 4.3: Consumo de Energía en la etapa de transmisión de datos.

envía información y 0.9 mA cuando no existe envío de datos. Nuevamente se utiliza el voltaje de alimentación del dispositivo (3.3 V) y los resultados se muestran en la Figura 4.13, obteniendo el consumo de energía en la transmisión de información de cada uno de los RMPI como se muestra en la Figura 4.15, y el porcentaje de consumo mostrado en la Tabla 4.3.

Se observa que con una comunicación basada en eventos se reduce el uso de energía en forma considerable, aumentándose así la autonomía de los agentes. Sin embargo, a pesar del ahorro energético el controlador propuesto realiza la formación y controla la postura de los robots, es decir, no se pierde el objetivo principal del control.

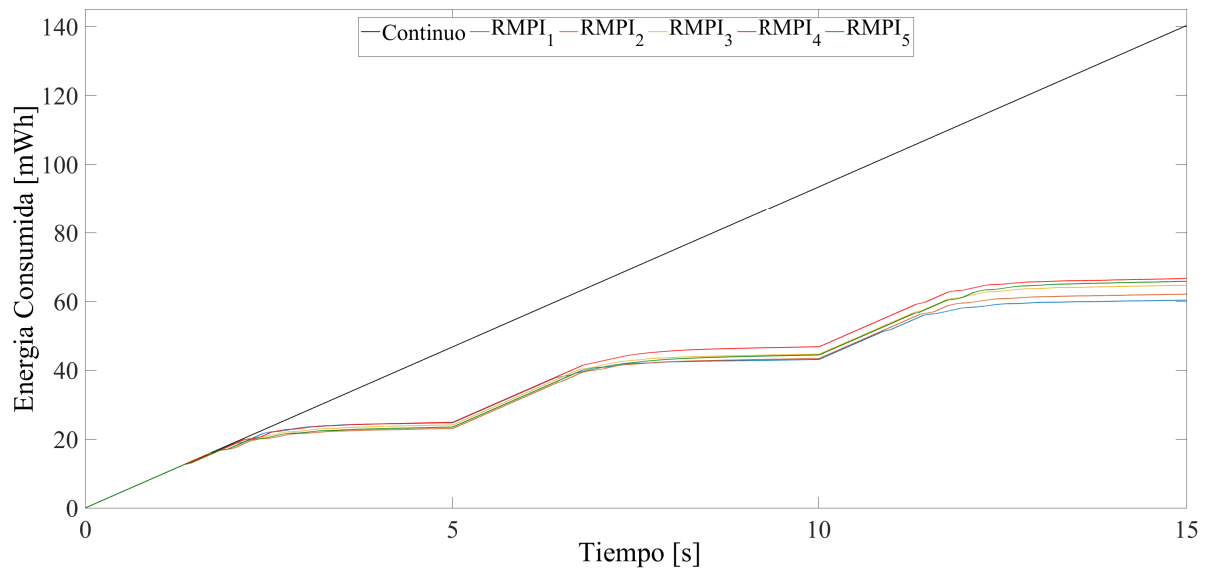


Figura 4.15: Energía consumida en la comunicación.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

El presente trabajo de tesis tiene como principal aportación el diseño e implementación de una estrategia de control basada en la propiedad de planitud diferencial para un sistema multi-RMPI en conjunto con una comunicación disparada por eventos.

El trabajo se dividió en dos fases, la primera fase consistió en el consenso y estabilización de múltiples Robots móviles tipo péndulo invertido con la restricción de no poder girar sobre su propio eje. Lo anterior resultó en que cada RMPI se represente mediante una dinámica de cuarto orden. La segunda fase consistió en el consenso y formación de un conjunto de RMPI sin la restricción de girar sobre su propio eje, es decir, el sistema se modeló mediante una dinámica de sexto orden. Esto implicó una mayor complejidad, de manera que el sistema no sólo tenía que encargarse de mantener el péndulo del sistema de manera erguida, sino además debía desplazarse en un plano respetando las posiciones y estados de sus vecinos.

Se ha observado en la literatura que el sistema RMPI ha sido estudiado por diversos investigadores, pocos son los trabajos que se han presentado utilizando la propiedad de planitud diferencial. Además, a conocimiento del autor, un pequeño número de investigaciones han presentado resultados utilizando el modelo dinámico representado mediante un sistema de sexto orden, y donde en ninguno de esos trabajos exploran la propiedad de planitud

diferencial de dicho sistema, siendo esta una de las aportaciones del trabajo.

Por otro lado, desde el enfoque de control de consenso y formación de sistemas multi-agentes, no se ha reportado un trabajo donde se introdujeran el esquema de control por planitud diferencial. Esto es debido a la complejidad del sistema altamente no lineal que describe al RMPI. Lo planteado en este trabajo, dio como resultado, que partiendo del sistema linealizado y el esquema de planitud diferencial, se puede obtener una parametrización del modelo en una cadena de integradores de cuarto y sexto orden, según fuera el caso, y la incorporación de dicho esquema en la teoría de sistemas multi-agentes, generaliza el trabajo de [74] al caso de sistemas con dinámica lineal.

Ahora bien, utilizando una comunicación basada en eventos en un sistema multi-RMPI mediante una topología expresada por grafos dirigidos y un control basado en planitud diferencial para cada RMPI bajo un esquema líder-seguidor, se resuelve el problema de consenso y formación reduciendo de manera considerable el consumo de energía en la etapa de comunicación. Lo anterior proporciona una mayor autonomía para cada uno de los agentes.

Se realizó un prototipo experimental mediante diseño CAD y el uso de impresión 3D, con la finalidad de obtener replicas del RMPI con parámetros similares y que puedan ensamblarse rápidamente. Dicho prototipo servirá para futuras pruebas tanto del control del balanceo como para el control de consenso y formación. La tarjeta de desarrollo utilizado es de bajo costo, la cual contiene soporte en el software MATLAB/Simulink, permitió implementar la ley de control propuesto para el balanceo, desplazamiento consenso y formación.

5.2. Trabajo Futuro

Este trabajo de investigación es un preámbulo para desarrollar trabajos futuros experimentales bajo un esquema de planitud diferencial y una comunicación basada en eventos para la formación de diversos sistemas robóticos, con una dinámica simple o compleja. Alguno de los trabajos futuros a considerar se muestran a continuación

- Realizar de forma experimental el control de formación en el plano (x, y) , considerando el esquema presentado en el capítulo 4.
- Realizar el control del sistema multi-agente basado en planitud diferencial utilizando

observadores de orden extendido para la estimación de la dinámica no conocida del RMPI y para la estimación de perturbaciones.

- Realizar un esquema multiagente considerando diferente tipos de robots y analizarlos desde el enfoque de planitud diferencial planteado en este trabajo.
- Extender el trabajo presentado a un entorno no controlado, es decir, pruebas al aire libre, apoyándose de sistemas GPS para la ubicación de los robots.

Bibliografía

- [1] A. O. Baturone, *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2005.
- [2] J. Pulido Fentanes, “Exploración y reconstrucción tridimensional de entornos mediante robots móviles,” Ph.D. dissertation, Universidad de Valladolid, Valladolid, 2012.
- [3] A. G. Sieira and M. M. Molina, “Planificación de movimientos en robótica móvil utilizando retículas de estados,” Master’s thesis, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 2011.
- [4] K. Nozaki and T. Murakami, “A motion control of two-wheels driven mobile manipulator for human-robot cooperative transportation,” in *2009 35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*. IEEE, 2009, pp. 1574–1579.
- [5] I. Fantoni and R. Lozano, *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [6] Z. Li, C. Yang, and L. Fan, *Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems*. Springer-Verlag London, 2003.
- [7] A. Salerno and J. Angeles, “On the nonlinear controllability of a quasiholonomic mobile robot,” in *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 03CH37422)*, vol. 3, Sept 2003, pp. 3379–3384 vol.3.
- [8] T. L. Chung, T. H. Bui, T. T. Nguyen, and S. B. Kim, “Sliding mode control of two-wheeled welding mobile robot for tracking smooth curved welding path,” *KSME International Journal*, vol. 18, no. 7, pp. 1094–1106, Jul 2004.
- [9] K. Pathak, J. Franch, and S. K. Agrawal, “Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization,” *IEEE Transactions on robotics*, vol. 21, no. 3, pp. 505–513, June 2005.

- [10] R. Brisilla and V. Sankaranarayanan, “Nonlinear control of mobile inverted pendulum,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 70, pp. 145 – 155, 2015.
- [11] F. Grasser, A. D’Arrigo, S. Colombi, and A. C. Rufer, “Joe: a mobile, inverted pendulum,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 49, no. 1, pp. 107–114, Feb 2002.
- [12] O. O. G. Frías, “Estabilización del péndulo invertido sobre dos ruedas mediante el método de lyapunov,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 10, no. 1, pp. 30 – 36, 2013.
- [13] D. Schinstock, K. McGahee, and S. Smith, “Engaging students in control systems using a balancing robot in a mechatronics course,” in *2016 American Control Conference (ACC)*, July 2016, pp. 6658–6663.
- [14] Segway. (2018) Segway human transporter. [Online]. Available: <http://www.segway.com>
- [15] M. Clark, J. Field, S. McMahon, P. Philps, and B. Cazzolato, “Edgar: A self balancing scooter,” *Project Final Report. University of Adelaide, Australia*, 2005.
- [16] N. Baker, C. Brown, D. Dowling, J. Modra, and D. Tootell, “Son of edgar: State-space control of electro-drive gravity-aware ride,” in *Engineering Final Year Project*, 2006.
- [17] A. M. C., “Diseño de un vehículo eléctrico de dos ruedas basado en el principio del péndulo invertido,” Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [18] R. V. L., “Implementación de un controlador para un vehículo eléctrico de péndulo invertido,” Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2012.
- [19] M. U. Draz, M. S. Ali, M. Majeed, U. Ejaz, and U. Izhar, “Segway electric vehicle,” in *2012 International Conference of Robotics and Artificial Intelligence*. IEEE, 2012, pp. 34–39.
- [20] M. H. Khan, M. Chaudhry, T. Tariq, U. Izhar *et al.*, “Fabrication and modelling of segway,” in *2014 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. IEEE, 2014, pp. 280–285.
- [21] P. Bethke, R. Dlugosz, and T. Talaška, “Project and realization of a two-wheels balancing vehicle,” in *Proceedings of the 20th International Conference Mixed Design of Integrated Circuits and Systems-MIXDES 2013*. IEEE, 2013, pp. 621–624.
- [22] A. M. Mohtasib and M. H. Shawar, “Self-balancing two-wheel electric vehicle (steve),” in *2013 9th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA)*. IEEE, 2013, pp. 1–8.

- [23] R. A. G. G., “Desarrollo de un robot tipo ballbot para aplicaciones de control,” Master’s thesis, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México, 2014.
- [24] N. Kushida, S. Yamashita, J. Kimura, and F. Dai, “The embedded educational system using nxt wheeled inverted pendulum robot in ocmt,” in *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*. IEEE, 2012, pp. 5640–5644.
- [25] Q. Correa and S. Marlene, “Aplicación del controlador pid en un segway controlado de modo local y remoto mediante bluetooth implementado en la plataforma lego nxt 2.0.” B.S. thesis, QUITO/EPN/2013, 2013.
- [26] A. A. Duarte, “Control de un robot autónomo tipo péndulo invertido,” Master’s thesis, Instituto Tecnológico de la Paz, Baja California Sur, México, August 2016.
- [27] O. Diaz-Hernandez, “Experimentación con una configuración de robot móvil de llantas frontales independientes en su direccionabilidad,” Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2010.
- [28] G. C. Olivares, *Diseño y construcción del sistema de tracción eléctrica basado en motores de cd sin escobillas para un vehículo de dos ruedas*. Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2019.
- [29] A. Wasif, D. Raza, W. Rasheed, Z. Farooq, and S. Q. Ali, “Design and implementation of a two wheel self balancing robot with a two level adaptive control,” in *Eighth International Conference on Digital Information Management (ICDIM 2013)*. IEEE, 2013, pp. 187–193.
- [30] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- [31] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*. Springer, 2008.
- [32] F. Bullo, J. Cortés, and S. Martinez, *Distributed Control of Robotic Networks: A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms: A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms*. Princeton University Press, 2009.
- [33] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric, and A. Das, *Cooperative control of multi-agent systems: optimal and adaptive design approaches*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [34] N. Ahmed, J. Cortes, and S. Martinez, “Distributed control and estimation of robotic vehicle networks: Overview of the special issue,” *IEEE Control Systems*, vol. 36, no. 2, pp. 36–40, 2016.

- [35] —, “Distributed control and estimation of robotic vehicle networks: Overview of the special issue-part II,” *IEEE Control Systems*, vol. 36, no. 4, pp. 18–21, 2016.
- [36] C. Wang, Z. Ding, and J. Sheng, “Consensus control of network connected mobile robots with input delay,” in *Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation*. IEEE, 2014, pp. 232–237.
- [37] S. R. Martínez, “Control cooperativo basado en eventos para sistemas multiagentes,” Master’s thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, September 2015.
- [38] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, “Novel type of phase transition in a system of self-driven particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 1226–1229, Aug 1995. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1226>
- [39] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, “Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules,” *Departmental Papers (ESE)*, p. 29, 2003.
- [40] L. Moreau, “Stability of multiagent systems with time-dependent communication links,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 50, no. 2, pp. 169–182, 2005.
- [41] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [42] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, “Information consensus in multivehicle cooperative control,” *IEEE Control systems magazine*, vol. 27, no. 2, pp. 71–82, 2007.
- [43] R. M. Murray, “Recent research in cooperative control of multivehicle systems,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 129, no. 5, pp. 571–583, 2007.
- [44] H. Terelius, G. Shi, and K. H. Johansson, “Consensus control for multi-agent systems with a faulty node,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 27, pp. 425–432, 2013.
- [45] H.-x. Hu, L. Yu, W.-A. Zhang, and H. Song, “Group consensus in multi-agent systems with hybrid protocol,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 3, pp. 575–597, 2013.
- [46] W. Ren and R. W. Beard, “Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 50, no. 5, pp. 655–661, 2005.
- [47] W. Ren and E. Atkins, “Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, vol. 17, no. 10-11, pp. 1002–1033, 2007.

- [48] W. Ren and R. W. Beard, “Consensus algorithms for double-integrator dynamics,” *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*, pp. 77–104, 2008.
- [49] J. Hu and Y. Lin, “Consensus control for multi-agent systems with double-integrator dynamics and time delays,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 1, pp. 109–118, 2010.
- [50] Z. Meng, W. Ren, Y. Cao, and Z. You, “Leaderless and leader-following consensus with communication and input delays under a directed network topology,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 41, no. 1, pp. 75–88, 2010.
- [51] A. Abdessameud and A. Tayebi, “A unified approach to the velocity-free consensus algorithms design for double integrator dynamics with input saturations,” in *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. IEEE, 2011, pp. 4903–4908.
- [52] J. Qin, W. X. Zheng, and H. Gao, “Consensus of multiple second-order vehicles with a time-varying reference signal under directed topology,” *Automatica*, vol. 47, no. 9, pp. 1983–1991, 2011.
- [53] G. Wen, Z. Duan, W. Yu, and G. Chen, “Consensus in multi-agent systems with communication constraints,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, no. 2, pp. 170–182, 2012.
- [54] Y. Feng, S. Xu, F. L. Lewis, and B. Zhang, “Consensus of heterogeneous first-and second-order multi-agent systems with directed communication topologies,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 3, pp. 362–375, 2015.
- [55] A. Rodriguez-Angeles and H. Nijmeijer, “Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: a cooperative approach,” *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 12, no. 4, pp. 542–554, 2004.
- [56] E. Nuno, R. Ortega, L. Basanez, and D. Hill, “Synchronization of networks of non-identical euler-lagrange systems with uncertain parameters and communication delays,” *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 56, no. 4, pp. 935–941, 2011.
- [57] E. Nuno, I. Sarras, E. Panteley, and L. Basañez, “Consensus in networks of nonidentical euler-lagrange systems with variable time-delays,” in *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2012, pp. 4721–4726.
- [58] E. Nuno, I. Sarras, and L. Basanez, “Consensus in networks of nonidentical euler-lagrange systems using p+ d controllers,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 29, no. 6, pp. 1503–1508, 2013.

- [59] S. Khoo, L. Xie, and Z. Man, “Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems,” *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, vol. 14, no. 2, pp. 219–228, 2009.
- [60] B. Lei, H. Chen, L. Zeng, and Q. Gao, “Consensus algorithm with input constraints for swarm robots formation control,” in *2015 IEEE 12th International Conference on Networking, Sensing and Control*. IEEE, 2015, pp. 157–162.
- [61] A. Baranzadeh and V. Nazarzehi, “A decentralized formation building algorithm with obstacle avoidance for multi-robot systems,” in *2015 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. IEEE, 2015, pp. 2513–2518.
- [62] C. C. Tsai, H. C. Huang, and S. C. Lin, “Adaptive neural network control of a self-balancing two-wheeled scooter,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 57, no. 4, pp. 1420–1428, April 2010.
- [63] J. Cook, G. Hu, and Z. Feng, “Cooperative state estimation in vision-based robot formation control via a consensus method,” in *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*. IEEE, 2012, pp. 6461–6466.
- [64] G. Montemayor and J. T. Wen, “Decentralized collaborative load transport by multiple robots,” in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2005, pp. 372–377.
- [65] A. V. Alonzo, “Control de formación de vehículos aéreos no tripulados mediante control colaborativo disparado por eventos,” Master’s thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, November 2016.
- [66] W. Hu, L. Liu, and G. Feng, “Consensus of linear multi-agent systems by distributed event-triggered strategy,” *IEEE transactions on cybernetics*, vol. 46, no. 1, pp. 148–157, 2015.
- [67] P. Tabuada, “Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1680–1685, 2007.
- [68] S. Durand and N. Marchand, “Further results on event-based pid controller,” in *Control Conference (ECC), 2009 European*, Aug 2009, pp. 1979–1984.
- [69] J. Sánchez, M. Guarnes, and S. Dormido, “On the application of different event-based sampling strategies to the control of a simple industrial process,” *Sensors*, vol. 9, pp. 6795–6818, 2009.
- [70] M. Velasco, P. Martí, and E. Bini, “On lyapunov sampling for event-driven controllers,” in *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*. IEEE, 2009, pp. 6238–6243.

- [71] N. Marchand, S. Durand, and J. F. Guerrero-Castellanos, “A general formula for event-based stabilization of nonlinear systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 5, pp. 1332–1337, 2013.
- [72] D. Xie, S. Xu, B. Zhang, Y. Li, and Y. Chu, “Consensus for multi-agent systems with distributed adaptive control and an event-triggered communication strategy,” *IET Control Theory Applications*, vol. 10, no. 13, pp. 1547–1555, 2016.
- [73] D. V. Dimarogonas, E. Frazzoli, and K. H. Johansson, “Distributed event-triggered control for multi-agent systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1291–1297, 2012.
- [74] G. S. Seyboth, D. V. Dimarogonas, and K. H. Johansson, “Event-based broadcasting for multi-agent average consensus,” *Automatica*, vol. 49, no. 1, pp. 245–252, 2013.
- [75] D. Yang, W. Ren, and X. Liu, “Decentralized consensus for linear multi-agent systems under general directed graphs based on event-triggered/self-triggered strategy,” in *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, Dec 2014, pp. 1983–1988.
- [76] E. Garcia, Y. Cao, X. Wang, and D. W. Casbeer, “Decentralized event-triggered consensus of linear multi-agent systems under directed graphs,” in *2015 American Control Conference (ACC)*, July 2015, pp. 5764–5769.
- [77] F. Zhou, Z. Huang, Y. Yang, J. Wang, L. Li, and J. Peng, “Decentralized event-triggered cooperative control for multi-agent systems with uncertain dynamics using local estimators,” *Neurocomputing*, vol. 237, pp. 388 – 396, 2017.
- [78] X. Ge and Q. L. Han, “Distributed formation control of networked multi-agent systems using a dynamic event-triggered communication mechanism,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2017.
- [79] D. Liang, N. Sun, Y. Wu, and Y. Fang, “Differential flatness-based robust control of self-balanced robots,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 31, pp. 949–954, 2018.
- [80] A. Abdessameud and A. Tayebi, “Attitude synchronization of a group of spacecraft without velocity measurements,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 11, pp. 2642–2648, 2009.
- [81] C. C. Tsai, Y. X. Li, and F. C. Tai, “Backstepping sliding-mode leader-follower consensus formation control of uncertain networked heterogeneous nonholonomic wheeled mobile multirobots,” in *2017 56th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*, Sept 2017, pp. 1407–1412.
- [82] H. Sira-Ramírez and S. K. Agrawal, *Differentially Flat Systems*, F. L. Lewis, Ed. Marcel Dekker, Inc., 2004.

- [83] O. Ramírez-Cárdenas, J. Guerrero-Castellanos, J. Linares-Flores, and S. Durand, “Control distribuido asíncrono de múltiples robots tipo péndulo invertido vía una estrategia basada en eventos,” in *Congreso Nacional de Control Automático*, 2018.
- [84] O. Ramírez-Cárdenas, J. Guerrero-Castellanos, and J. Linares-Flores, “Control de formación de múltiples robots móviles de auto-balanceo vía una comunicación disparada por eventos,” in *Congreso Nacional de Control Automático*, 2019.
- [85] O. D. R. Cardenas, J. F. G. Castellanos, J. L. Flores, S. Durand, and W. F. G. Sánchez, “Control descentralizado basado en eventos para el consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido en el esquema líder-seguidor; decentralized event-based leader-following consensus for a group of two-wheeled self-balancing robots.” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 2019.
- [86] H. Rezaee and F. Abdollahi, “A decentralized cooperative control scheme with obstacle avoidance for a team of mobile robots,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 1, pp. 347–354, 2013.
- [87] Z. Peng, G. Wen, and A. Rahmani, “Leader-follower formation control of multiple nonholonomic robots based on backstepping,” in *Proceedings of the 28th annual ACM symposium on applied computing*. ACM, 2013, pp. 211–216.
- [88] H. Lin, Q. Wei, and D. Liu, “Adaptive tracking control of leader-following multi-agent systems,” in *2015 5th International Conference on Information Science and Technology (ICIST)*. IEEE, 2015, pp. 147–153.
- [89] H. Rezaee and F. Abdollahi, “Motion synchronization in unmanned aircrafts formation control with communication delays,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 3, pp. 744–756, 2013.
- [90] S. Avila-Becerril, G. Espinosa-Pérez, E. Panteley, and R. Ortega, “Consensus control of flexible-joint robots,” *International Journal of Control*, vol. 88, no. 6, pp. 1201–1208, 2015.
- [91] D. Tolić, I. Palunko, A. Ivanović, M. Car, and S. Bogdan, “Multi-agent control in degraded communication environments,” in *2015 European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2015, pp. 404–409.
- [92] P. Muniganti and A. O. Pujol, “Y-pod formation of swarm robots using amber force fields,” in *2015 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)*, vol. 2. IEEE, 2015, pp. 320–327.
- [93] S. Sarkar and I. N. Kar, “Formation control of multiple groups of nonholonomic wheeled mobile robots,” in *Proceedings of Conference on Advances In Robotics*. ACM, 2013, pp. 1–6.

- [94] J. Ghommam, H. Mehrjerdi, M. Saad, and F. Mnif, “Formation path following control of unicycle-type mobile robots,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 58, no. 5, pp. 727–736, 2010.
- [95] P. Martin, R. M. Murray, and P. Rouchon, “Flat systems, equivalence and trajectory generation,” California Institute of Technology, Tech. Rep., 2003.
- [96] H. Sira-Ramirez and S. K. Agrawal, *Differentially flat systems*. Crc Press, 2004.
- [97] S. Dormido, J. Sánchez, and E. Kofman, “Muestreo, control y comunicación basados en eventos,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial {RIAI}*, vol. 5, no. 1, pp. 5 – 26, 2008. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1697791208701201>
- [98] J. F. Guerrero Castellanos, “Estabilidad y estabilización de sistemas no lineales mediante estrategias de control asíncrono,” Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Tech. Rep., 2012.
- [99] P. Tabuada, “Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 9, pp. 1680–1685, 2007.
- [100] S. Durand and N. Marchand, “An event-based pid controller with low computational cost,” in *8th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA’09)*, 2009, pp. Special-session.
- [101] J. Sánchez-Santana, J. Guerrero-Castellanos, M. Villarreal-Cervantes, and S. Ramírez-Martínez, “Control distribuido y disparado por eventos para la formación de robots móviles tipo (3, 0),” *Congreso Nacional de Control Automático 2018 (CNCA 2018)*, 2017.
- [102] Y. Yamamoto, “Nxtway-gs model-based design-control of self-balancing two-wheeled robot built with lego mindstorms nxt,” *Cybernet Systems Co., Ltd*, 2008.
- [103] K. J. Aström and R. M. Murray, *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton university press, 2010.
- [104] M. R.-N. E.-W. Z.-B. Hebertt Sira-Ramírez, Alberto Luviano-Juárez, *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems*. Butterworth-Heinemann, 2017.
- [105] P. Müllhaupt, *Introduction à l’analyse et à la commande des systèmes non linéaires*. PPUR Presses polytechniques, 2009.

Apéndice A

Publicaciones

En esta sección, se presentan las portadas de los artículos aceptados y presentados, resultado del presente trabajo de tesis. Los artículos de congreso, se expusieron ante parte de la comunidad científica en el marco de referencia del Control Automático y Sistemas Multiagentes y Robótica. Se anexan los reconocimientos y constancias de los eventos asistidos.

El primero lleva por nombre ” *Estimación y control de la postura del vehículo de auto balanceo: LoboMixCi*”, presentado en Noviembre del 2017 en Mazatlan, Sinaloa, México. El trabajo consiste en los resultados experimentales obtenidos del control de la postura del robot móvil de autobalanceo de dos ruedas.

El Segundo titulado ” *Control distribuido asíncrono de múltiples robots tipo péndulo invertido vía una estrategia basada en eventos*”, presentado en Octubre del 2018 en la ciudad de San Luis Potosí, México. El Tercero se sometió a la Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI) titulado *Control descentralizado basado en eventos para el consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido en el esquema líder-seguidor* el cual fue aceptado y publicado en el 2019. Ambos trabajos se basan en los primeros resultados obtenidos de la tesis sobre el consenso de múltiples RMPI bajo un modelo dinámico de cuarto orden.

El cuarto trabajo se sometió en el Congreso Nacional de Control Automático y fue aceptado y presentado en Octubre del 2019. En este trabajo titulado *Control de formación de múltiples robots móviles de auto-balanceo vía una comunicación disparada por eventos* se presenta resultados basado en el control cooperativo de sistemas RMPI con una dinámica de sexto orden.

Estimación y control de la postura del vehículo de auto balanceo: LoboMixCi*

J. F. Guerrero-Castellanos¹, A. Osorio-Orduña¹, O. D. Ramírez-Cárdenas², J. Linares-Flores², G. Curiel-Olivares¹, A.M. García-de-Dionisio¹, G. Mino-Aguilar¹, V. González-Díaz¹, H. Sira-Ramírez³, M. Contreras-Ordaz²

Abstract—El presente trabajo muestra el diseño de los algoritmos de estimación y del control de la postura de un vehículo de auto-balanceo de dos ruedas. El trabajo comprende la descripción del modelo matemático, la síntesis de una ley de control, así como la descripción e implementación de un Filtro de Kalman para la obtención de la postura a partir de sensores inerciales de bajo costo. Finalmente, una descripción de la implementación de los algoritmos en una computadora de placa reducida (SBC) *Raspberry Pi 3* es presentada y los resultados experimentales son mostrados.

I. INTRODUCTION

El péndulo invertido sobre base móvil es uno de los sistemas no-lineales más conocidos y estudiados por la comunidad de robótica y control automático ya que además de ser un sistema no lineal, es un sistema subactuado y con restricciones holónomas [1], [2], [3]. Desde las distintas aproximaciones para la obtención de un modelo matemático, hasta la aplicación de diferentes técnicas de control, los péndulos invertidos y péndulos invertidos móviles constituyen un banco de pruebas valioso para la ingeniería de control [4], [5] y una inspiración para científicos y tecnólogos [1], [6].

En los últimos años el vehículo de auto-balanceo en dos ruedas ha atraído la atención no solo de la comunidad científica, sino también de emprendedores e inversionistas, resultando algunos conceptos comerciales y aplicaciones atractivas. En [7] un abanico de modelos y tecnologías son propuestos tanto al público general como especializado. El vehículo de auto-balanceo consiste en una plataforma que gira libremente al rededor de un eje sobre el cual están acopladas dos pares de ruedas motorizadas. Es un sistema inestable, ya que requiere de una fuerza (o par) de control para mantener la plataforma en posición vertical. El interés reside en la estabilización del sistema en lazo cerrado, partiendo de una posición cercana al equilibrio (inestable) pero afectada por perturbaciones externas. Esto constituye

un problema de control notable. Dicho problema puede ser abordado proponiendo una estrategia de control no lineal o lineal como el bien conocido *LQR*, el cual se sintetiza para el modelo linealizado del sistema y posteriormente aplicado al sistema original, el cual es de naturaleza no lineal.

En el presente trabajo se aborda el modelado y control de un vehículo de auto-balanceo sobre dos ruedas con fines didácticos y de investigación y representa uno de los productos de la red temática de colaboración académica "Automatización y control de sistemas mecatrónicos" apoyada por PRODEP-SEP. El objetivo de esta colaboración, es desarrollar una plataforma que reúna cualidades para el estudio de modelado matemático de sistemas mecánicos, diseño de sistemas electrónicos de instrumentación y navegación, sistemas de potencia y aprovechamiento de recursos renovables, diseño de leyes de control lineales y no lineales y su implementación en sistemas computacionales basados en microcontroladores, DSP o en computadoras de placa reducida (SBC) como es el caso del presente artículo (ver Fig. 1).



Fig. 1. Vehículo LoboMixCi en la arena de navegación del Laboratorio de Control Avanzado y Sistemas Ciberfísicos, FCE-BUAP.

*Este trabajo fue financiado por PRODEP-SEP en el marco la Integración de Redes Temáticas de colaboración Académica: BUAP-CA-248, UTMIX-CA-24, CINVESTAV

¹Dichos Autores están adscritos a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Av. San Claudio y 18 Sur, Cd. Universitaria, C.P. 72570, Puebla, México. fermi.guerrero@correo.buap.mx

²Dichos Autores están adscritos al Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, C.P. 69000, Huajuapán de León, Oaxaca, México. jlinares@mixteco.utm.mx

³Dicho Autor está adscrito al departamento de ingeniería Eléctrica, sección Mecatrónica, del CINVESTAV-IPN, C.P. 07360, Ciudad de México, México. hsira@cinvestav.mx

El modelo matemático es relativamente clásico y se desarrolla mediante un formalismo de Euler-Lagrange. Dicho modelo contiene la dinámica de los actuadores (Motores DC) lo cual permite tener como entrada los voltajes de los mismos. El modelo es posteriormente descrito en espacio de estados, así como su linealización aproximada o tangente al rededor del equilibrio inestable. Todo este proceso es descrito en la Sección II. En la Sección III el diseño del



Control distribuido asíncrono de múltiples robots tipo péndulo invertido vía una estrategia basada en eventos

O. D. Ramírez-Cárdenas* J.F. Guerrero-Castellanos**
J. Linares-Flores* S. Durand***

* *Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México, (e-mail: oscar6ri@hotmail.com, jlinares@mixteco.utm.mx).*

** *Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México (e-mail: fermi.guerrero@correo.buap.mx)*

*** *ICube, INSA Strasbourg, Univ. Strasbourg, CNRS (UMR 7357), Strasbourg, France (e-mail: sylvain@durandchamontin.fr)*

Resumen

Este artículo presenta la síntesis de una estrategia de control distribuido que resuelve el problema de consenso líder-seguidor para una red de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI). Para ello, se presenta el modelo matemático no lineal de los RMPI que incluye la dinámica de los actuadores, así como el modelo alrededor de un punto de funcionamiento. De ahí, mediante un adecuado cambio de coordenadas basado en planitud diferencial se parametriza el sistema en función de la salida plana. Entonces, asumiendo que la red de vehículos se forma mediante un grafo no dirigido y fuertemente conectado, se diseña una ley de control distribuido y se desarrolla un algoritmo disparado por eventos, donde la función de evento indica el instante en el que el vehículo i debe transmitir su información (estado) a sus vecinos. El análisis de estabilidad del sistema completo es llevado a cabo en el sentido ISS (Input-to-State Stability). Los resultados en simulación numérica muestran las ventajas en términos de intercambio de información entre RMPI, así como el buen desempeño en la estabilización de la postura de cada RMPI y del consenso del sistema multi-RMPI.

Keywords: Robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI), consenso, sistema multi-agente, control disparado por eventos, Control por planitud diferencial.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el control descentralizado para sistemas multi-vehículos también llamados sistemas multi-agentes, ha emergido como un nuevo reto para los investigadores en el área de control y robótica. Esto ha originado el interés de investigadores en un ámbito multidisciplinario que incluye la física, la biofísica, la neurología, la biología de sistemas, la matemática aplicada, la mecánica, la informática y la teoría del control. Las aplicaciones de los sistemas multi-agentes (SMA) son diversas, tales como el control cooperativo de vehículos aéreos no tripulados, el control de la formación de robots móviles, el control de las redes de comunicación, el diseño de redes de sensores, agrupamiento de insectos, entre otros (Xie and Wang (2005)). Para realizar las diferentes aplicaciones cooperativas es necesario utilizar técnicas de control que involucren el intercambio de información entre los agentes. Por lo anterior, el control cooperativo de un SMA debe permitir que los agentes interactúen entre sí y se comuniquen entre ellos de manera común, basándose en el uso racional de los recursos y la coordinación adecuada de su propio comportamiento. Recientemente,

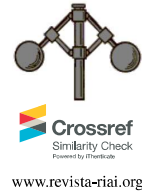
se han reportado diversos trabajos sobre los problemas de formación cooperativa (Kuriki and Namerikawa (2013); Dong et al. (2015)). Sin embargo, existen pocos trabajos reportados donde se apliquen estas metodologías en sistemas multivariables y de naturaleza inestable, como vehículos de dos ruedas y de auto-balanceo o ruedas giratorias (Tsai et al. (2017)).

El control de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI) ha sido estudiado por diversos investigadores (ver Tsai et al. (2017); Grasser et al. (2002); Tsai et al. (2010)). Sin embargo el enfoque propuesto por Grasser et al. (2002) y Tsai et al. (2010) no se han aplicado al enfoque de control cooperativo para la formación de multi-RMPI. Esto debido a la dificultad que existe en controlar tanto el desplazamiento de cada uno de los robots, como el de la correcta postura de cada uno de ellos. Uno de los trabajos donde se ha comenzado a resolver el problema de consenso, donde se emplean sistemas RMPI es en Tsai et al. (2017), en este trabajo se realiza un control cooperativo tipo líder seguidor virtual para la formación de dos robots móviles de dos ruedas y un RMPI mediante un control backstepping y un control por modos deslizantes. Si bien es cierto que la metodología propuesta realiza la formación de los robots,



Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial

Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 16 (2019) 435-446



Control descentralizado basado en eventos para el consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido en el esquema líder-seguidor

O. D. Ramírez-Cárdenas^a, J.F. Guerrero-Castellanos^{b,*}, J. Linares-Flores^a, S. Durand^c, W.F. Guerrero-Sánchez^d

^aInstituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

^bFacultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México.

^cICube, INSA Strasbourg, Univ. Strasbourg, CNRS (UMR 7357), Strasbourg, France.

^dFacultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México.

Resumen

El trabajo presenta el diseño de una estrategia de control distribuido con comunicación activada por eventos, que resuelve el problema de consenso líder-seguidor, de un conjunto de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI). La linealización de las ecuaciones de movimiento de los RMPI, alrededor del punto de equilibrio, permiten explotar las propiedades de planitud diferencial, dando lugar a una reparametrización del sistema mediante la salida plana. Asumiendo que los vehículos se comunican mediante una red, cuya topología es representada por un grafo no dirigido y fuertemente conectado, se diseña una ley de control distribuido y una función de evento que indica el instante en el que el i -ésimo vehículo debe transmitir información (su estado) a sus vecinos. El resultado es un intercambio asíncrono de información entre vehículos y donde el tiempo entre eventos no es equidistante. El análisis de estabilidad se lleva a cabo en el sentido de Lyapunov y en el sentido entrada-estado ISS (Input-to-State Stability). Los resultados en simulación numérica muestran el buen desempeño del consenso de la red de vehículos en dos escenarios representativos: regulación y seguimiento de trayectoria.

Palabras Clave: Control basado en eventos, Agentes, Control de consenso, Sistemas de transporte y vehículos, Robots móviles y vehículos autónomos inteligentes, Teoría de control automático.

Decentralized event-based leader-following consensus for a group of two-wheeled self-balancing robots

Abstract

This paper deals with the development of a decentralized event-based control strategy applied to the leader-following consensus problem of a group of two-wheeled self-balancing robots so called mobile inverted pendulum (MIP). The MIP's nonlinear mathematical model which includes the dynamics of the actuators is presented. Then, the model around an operating point is considered which allows to exploit the differential flatness property of the system, permitting a complete parametrization in terms of the flat output. Assuming that the vehicle network exchange information through a directed and strongly connected graph, a decentralized control law is designed, and an event-based algorithm is developed. Then each MIP decides, based on the difference of its current state and its latest broadcast state, when it has to send a new value to its neighbors. The stability of the complete system is carried out in the Lyapunov sense together with the ISS (Input-to-State Stability) approach. Numerical results show the advantages *wrt* information exchange between MIPs, as well as a good performance in the angular stabilization under two scenarios: regulation and tracking problem.

Keywords: Event-based control, Agents, Leader-following consensus, Transport systems and vehicles, Mobile robots and autonomous vehicles, Control Theory.

* Autor para correspondencia: fermi.guerrero@correo.buap.mx,

To cite this article: O.D. Ramírez-Cárdenas, J.F. Guerrero-Castellanos, J. Linares-Flores, S. Durand, W.F. Guerrero-Sánchez. 2019. Decentralized event-based leader-following consensus for a group of two-wheeled self-balancing robots. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 16, 435-446. <https://doi.org/10.4995/riai.2019.11113>

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)



Control de formación de múltiples robots móviles de auto-balanceo vía una comunicación disparada por eventos

O. D. Ramírez-Cárdenas* J.F. Guerrero-Castellanos**
J. Linares-Flores*

* *Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México, (e-mail: oscar6ri@hotmail.com, jlinares@mixteco.utm.mx).*

** *Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México (e-mail: fermi.guerrero@correo.buap.mx)*

Resumen: Este artículo presenta el desarrollo de un control distribuido mediante una comunicación asíncrona disparada por eventos aplicado al problema de formación en el plano de un grupo de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI). Se presenta el modelo matemático no lineal de los RMPI que incluye la dinámica de los actuadores, así como el modelo lineal alrededor de un punto de operación. De ahí, mediante la parametrización diferencial proporcionada a través de la salida plana, se propone una ley de control distribuida tipo descentralizada, y se desarrolla un algoritmo disparado por eventos que permite decidir si es necesario que el agente i -ésimo comunique su estado a sus vecinos. La estrategia propuesta resuelve el problema de consenso en su configuración líder-seguidor. La topología de comunicación se basa en grafos direccionados y fuertemente conectados. Simulaciones computacionales validan la capacidad de la estrategia propuesta.

Keywords: Robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI), consenso, sistema multi-agente, control disparado por eventos, Control por planitud diferencial.

1. INTRODUCCIÓN

El control descentralizado para sistemas multi-vehículos ha surgido como un nuevo reto para los investigadores en el área de control y robótica en los últimos años. Esto es por que los sistemas multi-agentes se aplican en diferentes ámbitos, tales como el control cooperativo de vehículos aéreos no tripulados, el control de la formación de robots móviles, el control de las redes de comunicación, el diseño de redes de sensores, agrupamiento de insectos, entre otros (Xie and Wang (2005)). Para realizar tareas coordinadas se utilizan técnicas de control que involucren el intercambio de información entre los agentes. Por lo anterior, el control cooperativo de un sistema multi-agente (SMA) debe permitir que los agentes interactúen entre sí para cumplir un objetivo en común, basándose en el uso racional de los recursos. Recientemente, se han reportado trabajos sobre los problemas de formación cooperativa (Kuriki and Namerikawa (2013); Dong et al. (2015)). Sin embargo, existen pocos trabajos reportados donde se apliquen estas metodologías en sistemas multivariables y de naturaleza inestable, como vehículos de dos ruedas y de auto-balanceo o ruedas giratorias (Tsai et al. (2017)).

El control de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI) ha sido estudiado por diversos investigadores (ver Tsai et al. (2017); Grasser et al. (2002); Tsai et al.

(2010)). Sin embargo el enfoque propuesto por Grasser et al. (2002) y Tsai et al. (2010), se aplican para el control del balanceo del sistema y no se estudia el enfoque de control cooperativo para la formación de multi-RMPI. En Tsai et al. (2017) introducen el problema de consenso para móviles donde se emplean sistemas RMPI, la idea que proponen es un control cooperativo tipo líder seguidor virtual para la formación de dos robots (2,0) y un RMPI, mediante un control backstepping y un control por modos deslizantes. Si bien es cierto que la metodología propuesta realiza la formación de los robots, solo se preocupa por la postura de uno de ellos. Como se puede apreciar, los SMA están equipados con sistemas de computo embebidos, actuadores mecánicos, sensores, sistemas de comunicación, entre otros, y con una capacidad de energía limitada. Además, en diferentes esquemas de control un agente debe medir su estado, enviarlo a los vecinos y actualizar la señal de control continuamente o por un tiempo de muestreo especificado. Tal que las leyes de control pudieran ser poco prácticas en diferentes aplicaciones por el excesivo consumo de energía. Por lo anterior, es deseable diseñar esquemas de control, tal que el consumo de energía producido por la comunicación entre agentes, sea reducida de manera significativa. De esta manera, los recursos energéticos limitados de los agentes se pueden ahorrar en gran medida y la vida



La Asociación Mexicana de Robótica e Industria A.C.

Otorga el presente

Reconocimiento

a:

**José Fermi Guerrero-Castellanos, Alan Osorio-Orduña, Oscar Ramírez-Cárdenas,
Jesus Linares-Flores, Alfonso Mateos, Aparicio Garcia de Dionisio, Gonzalo Curiel-
Olivares, Victor Rodolfo González Díaz, Gerardo Mino-Aguilar, Hebertt Sira-
Ramírez y Marco Antonio Contreras-Ordaz**

Por haber impartido la ponencia:

***Estimación y control de la postura del vehículo de auto balanceo:
LoboMixCi***

En el XIX Congreso Mexicano de Robótica, celebrado en Mazatlán, Sinaloa del 8 al 10 de
noviembre de 2017



Dr. Ulises Zaldívar Colado
Presidente de la AMRob





Congreso Nacional de Control Automático 2018

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ingeniería

otorga la presente

CONSTANCIA

a

Oscar David Ramírez Cárdenas

por su participación como **asistente** en el **Congreso Nacional de Control Automático 2018**, que se llevó a cabo del 10 al 12 de octubre de 2018 en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México.

R. Alvarez A

Dr. Ricardo Álvarez Salas
Presidente del Congreso

MVA

Dr. Martín Velasco Villa
Presidente de la AMCA



Cinvestav



Multion



VOGAR



eAutelsa



Congreso Nacional de Control Automático

2019



No. Folio: CNCA2019/Jue3T3.4

Se otorga el presente

Certificado

a

Oscar Ramirez Cardenas, J. Fermi GUERRERO-CASTELLANOS, Jesús Linares-Flores

Por su invaluable presentación del artículo "*Control De Formación De Múltiples Robots Móviles De Auto-Balaceo Vía Una Comunicación Disparada Por Eventos*" en el **Congreso Nacional de Control Automático 2019**, llevado a cabo del 23 al 25 de octubre, en el Centro de Convenciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.


Ciudad Universitaria, octubre 2019


Dr. José Fermi Guerrero Castellanos


Dra. Luz del Carmen Gómez Pavón

Presidentes del Congreso


Dr. Jesús Manuel Muñoz Padheco


Dr. Martín Velasco Villa

Presidente de la AMCA



Apéndice B

Estancia Nacional

Con el propósito de completar y reforzar los conocimientos obtenidos durante el doctorado y el trabajo de tesis, se realizó dos estancias de investigación en las instalaciones de la facultad de electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. La estancia tuvo la colaboración y asesoría del profesor-investigador Dr. José Fermi Guerrero Castellanos. Las asesorías y las instalaciones permitieron realizar el desarrollo de la investigación presentada y realizar pruebas experimentales necesarias para validar y verificar las estrategias de control multi-agente desarrolladas en el presente trabajo tesis.

Las dos cartas de aceptación firmadas por el asesor de la estancia y emitidas por la institución se muestran a continuación. Los objetivos planteados en ambas cartas se cumplieron de manera satisfactoria y se formó una relación para la investigación de futuros proyectos.



CARTA ACEPTACIÓN

Dr. José Aníbal Arias Aguilar
 Jefe de la División de Estudios de Postgrado
 Universidad Tecnológica de la Mixteca
 PRESENTE


Por este medio me permito comunicarle que el C. Oscar David Ramírez Cárdenas alumno del programa de Doctorado en Robótica (DGP: DORO111311), que oferta la Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, ha sido aceptado para realizar una estancia de investigación en "Control cooperativo de multi-vehículos" bajo la dirección del Dr. José Fermi Guerrero Castellanos, Profesor-Investigador de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, dicha estancia se realizará del 2 de abril de 2018 al 28 de septiembre de 2018.

Las actividades que realizará el estudiante durante su estancia son las siguientes:

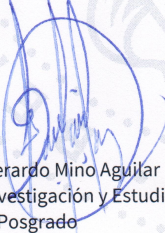
- Realizar pruebas de adquisición mediante el equipo de captura de movimiento de alta resolución OptiTrack.
- Simular e implementar un control cinemático de un robot móvil tipo diferencial.
- Diseñar, simular e implementar el control de consenso de múltiples robots.

Sin otro asunto en particular, nos despedimos de usted

Atentamente
 "Pensar bien, para Vivir mejor"
 H. Puebla de Z. a 23 de Marzo de 2018


 Dr. José Fermi Guerrero Castellanos
 Profesor Investigador




 M.Bo. Dr. Gerardo Mino Aguilar
 Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado

c.c.p. Archivo
 DR. GMA/rrm



CARTA DE ACEPTACIÓN

Dr. José Anibal Arias Aguilar
 Jefe de la División de Estudios de Posgrados
 Universidad Tecnológica de la Mixteca
 PRESENTE

Por este medio me permito comunicarle que el C. Oscar David Ramírez Cárdenas alumno del programa de Doctorado en Robótica (DGP:DOR00111311), que oferta la Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, ha sido aceptado para realizar una estancia investigación en "Control cooperativo de múltiples vehículos" bajo la dirección del Dr. José Fermi Guerrero Castellanos, Profesor-Investigador de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, dicha estancia se realizará del 2 de abril de 2019 al 28 de septiembre de 2019.

Las actividades que realizará el estudiante durante su estadía son las siguientes:

- Diseñar un controlador para la postura y rumbo de un robot móvil tipo péndulo invertido.
- Diseñar y simular el control de consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido en el plano (x, y).
- Diseñar y simular el control de consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido mediante una comunicación basada en eventos.

Sin otro asunto en particular, nos despedimos de usted.

Atentamente
 "Pensar bien, para vivir mejor"
 H. Puebla de Z. a 1 de Abril del 2019

Dr. José Fermi Guerrero Castellanos
 Profesor Investigador



Vo. Bo. Dr. Gerardo Mino Aguilar
 Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado
 Líder del CA-BUAP-248

c.c.p. Archivo
 DR. GMA/rrm