



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**“EL ESTADO DE CHERN-SIMONS Y EL  
NÚMERO DE ENLACE DE GAUSS EN LA  
TEORÍA CUÁNTICA DEL CAMPO  
ELECTROMAGNÉTICO”**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**INGENIERO EN FÍSICA APLICADA**

PRESENTA

**PEDRO FERNANDO OCAÑA GARCÍA**

DIRECTOR

**DR. RICARDO ROSAS RODRÍGUEZ**

Huajuapán de León, Oaxaca, Julio de 2019.



Dedico este trabajo a mi familia, que me ha dado todo.



# AGRADECIMIENTOS

Expreso el agradecimiento sincero que siento hacia mi padre **Pedro Ocaña Camarillo**, mi madre **Benedictina García Rivera**, por su *amor* y apoyo incondicional, y a mi director de tesis Dr. **Ricardo Rosas Rodríguez**, quien me ha brindado su conocimiento y apoyo personal mucho antes de empezar con este trabajo de tesis.

Agradezco también a quienes aceptaron este trabajo de tesis, mis sinodales: Dr. Adolfo Maceda Méndez, Dr. Hugo David Sánchez y especialmente al M. C. Juan Ramón Tijerina Gonzalez, quien me ha mostrado un camino de amor y respeto.

Y por último, a Alejandra Azucena Morán Acevedo quien con su asombro por el mundo a despertado el mio, al Ing. Iván Antonio Valeriano Tomás por su paciencia y apoyo constatante, a mis amigos, mis maestros, en particular al Dr. Víctor Alberto Cruz Barriguete, M.C. Juan Carlos Mendoza Santos y al Dr. Mario Lomeli Haro, por haberme acompañado y enseñado durante toda mi carrera, y a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios en ella, gracias.

*Pedro Fernando Ocaña García, Julio de 2019.*



# RESUMEN

En este trabajo de tesis se muestra la relación que existe entre el estado de Chern-Simons y el número de enlace de Gauss. El estado de Chern-Simons surge como solución a las ecuaciones de Yang-Mills y sorprendentemente también lo es a la ecuación de Wheeler-DeWitt de Relatividad General. Este se define a través de la acción de Chern-Simons que a su vez depende del grupo de norma de cada interacción fundamental. Utilizando el grupo de norma  $U(1)$ , que corresponde al campo electromagnético, se propone un estado de Chern-Simons y se comprueba que es una solución a las ecuaciones de Maxwell. Otra aportación de este trabajo de tesis es mostrar que la aplicación de la transformada de lazo a dicho estado conduce a una expresión relacionada con el número de enlace de Gauss.



# ÍNDICE GENERAL

<b>DEDICATORIA</b>	<b>III</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>V</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>VII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>XI</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>XIII</b>
<b>1 TEORÍA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO</b>	<b>1</b>
1.1 FORMULACIÓN LANGRANGIANA Y HAMILTONIANA . . . . .	3
1.2 REPRESENTACIÓN EN FORMAS DIFERENCIALES . . . . .	7
1.3 FORMULACIÓN EN HACES FIBRADOS . . . . .	8
<b>2 EL GRUPO DE LAZOS Y LA REPRESENTACIÓN DE LAZOS</b>	<b>21</b>
2.1 EL GRUPO DE LAZOS . . . . .	21
2.2 GENERADORES INFITESIMALES DEL GRUPO DE LAZOS . . . . .	26
2.2.1 LA DERIVADA DE LAZO . . . . .	26
2.2.2 PROPIEDADES DE LA DERIVADA DE LAZO . . . . .	28
2.2.3 DERIVADA DE CONEXIÓN . . . . .	31
2.3 EL GRUPO ABELIANO DE LAZOS . . . . .	33
2.4 REPRESENTACIÓN DEL GRUPO DE LAZOS . . . . .	34
2.5 REPRESENTACIÓN DE LAZOS DE TEORÍAS DE NORMA . . . . .	38
2.5.1 LAZOS DE WILSON . . . . .	38
2.5.2 REPRESENTACIÓN DE LAZOS . . . . .	38
2.5.3 LA TRANSFORMADA DE LAZO . . . . .	42
2.5.4 EL ÁLGEBRA NO CANÓNICA . . . . .	42

2.5.5	FUNCIONES DE ONDA EN LA REPRESENTACIÓN DE LAZO	43
<b>3</b>	<b>CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO</b>	<b>45</b>
3.1	CUANTIZACIÓN DE FOCK . . . . .	45
3.2	REPRESENTACIÓN EN CONEXIONES . . . . .	48
3.3	REPRESENTACIÓN EN LAZOS . . . . .	49
<b>4</b>	<b>EL NÚMERO DE ENLACE DE GAUSS Y EL ESTADO DE CHERN-SIMONS</b>	<b>53</b>
4.1	EL NÚMERO DE ENLACE DE GAUSS . . . . .	53
4.2	EL FUNCIONAL DE CHERN-SIMONS . . . . .	54
4.3	EL ESTADO DE CHERN-SIMONS . . . . .	55
4.3.1	REPRESENTACIÓN EN CONEXIONES . . . . .	56
4.3.2	REPRESENTACIÓN EN LAZOS . . . . .	58
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>61</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>63</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>FORMAS DIFERENCIALES</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>GRUPOS DE LIE Y ÁLGEBRAS DE LIE</b>	<b>71</b>
B.1	GRUPOS DE LIE . . . . .	71
B.2	EL ÁLGEBRA DE LIE DE UN GRUPO DE LIE . . . . .	72
B.3	EL MAPA EXPONENCIAL . . . . .	72
<b>C</b>	<b>VARIETADES, HACES Y CONEXIONES</b>	<b>75</b>
C.1	HACES VECTORIALES . . . . .	77
C.2	CONSTRUCCIÓN DE HACES VECTORIALES . . . . .	78
C.3	TRANSFORMACIONES DE NORMA . . . . .	79
<b>D</b>	<b>INTEGRALES GAUSSIANAS DE DIMENSIÓN FINITA</b>	<b>83</b>

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	.....	12
Figura 1.2	.....	13
Figura 2.1	.....	24
Figura 2.2	.....	26
Figura 5.1	.....	61
Figura C.1	.....	76



# INTRODUCCIÓN

A pesar de los notables desarrollos de la física en el siglo veinte, carecemos aún de una descripción consistente y unificada de todos los fenómenos físicos. Básicamente tenemos dos teorías fundamentales: la teoría general de la relatividad que describe los fenómenos a gran escala y la mecánica cuántica que explica los fenómenos a escala microscópica. Juntas describen la gran mayoría de los fenómenos conocidos, desde la escala atómica y molecular a las distancias astronómicas y cosmológicas. Átomos, núcleos, partículas elementales, materia condensada, láseres, semiconductores, o superfluidos son descritos por la mecánica cuántica. Estrellas, agujeros negros y el Universo en su conjunto son tratados por la relatividad general (RG), que contiene como aproximación a la mecánica newtoniana que usamos para estudiar buena parte de los fenómenos de escala intermedia. Además, existen sistemas como los agujeros negros cerca de su singularidad o el Universo en sus primeros instantes luego de la gran explosión inicial para los cuales no disponemos de descripción alguna. La búsqueda de la gravedad cuántica es por lo tanto una búsqueda de consistencia y completitud.

Todas las teorías existentes son incompletas y presentan signos de inconsistencias internas. Solo son adecuadas para tratar cierto tipo de fenómeons físicos. Veamos algunos ejemplos:

a) La teoría de la relatividad especial presenta una visión unificada de los fenómenos electromagnéticos y mecánicos, pero cuando involucra pequeñas distancias o grandes masas presenta importantes dificultades. Por ejemplo, si uno considera una partícula cargada aislada y calcula su energía electromagnética obtiene un valor infinito. Además, la interacción de una partícula puntual con su propio campo no está bien definida debido a la existencia de cantidades divergentes, por lo que presenta un comportamiento patológico en sus ecuaciones de movimiento llamado usualmente el “runaway”. Estas divergencias deben tomarse como signo de que hemos extrapolado la teoría más allá de su rango de validez. En primer lugar, partículas puntuales deben ser tratadas mecánico cuánticamente, en segundo lugar los ejemplos involucran den-

sidades de energía muy grandes y masas confinadas en regiones muy pequeñas por lo que la relatividad general también introducirá correcciones.

b) Uno de los logros más importantes de la física del siglo veinte es la unificación de la relatividad especial y la mecánica cuántica. La teoría resultante llamada teoría cuántica de campos describe la mayor parte de los fenómenos conocidos que involucran altas energías. La misma no está, sin embargo, libre de inconsistencias. Nuevamente ellas se manifiestan en la presencia de infinitos. La teoría cuántica de campos se describe en términos de operadores cuánticos distribucionales y conduce a dificultades cada vez que uno debe considerar campos en interacción debido a la presencia de productos de operadores distribucionales asociados a un mismo punto del espacio. Ello conduce a divergencias en varias cantidades de interés físico. Aunque en muchos casos cuando las teorías son renormalizables, estos infinitos se pueden extraer y se pueden derivar predicciones físicas no ambiguas de las mismas; las teorías de campo están, en la mayor parte de los casos de interés, matemáticamente mal definidas y solo son susceptibles a tratamientos perturbativos en términos de series asintóticas que no convergen. La fuente fundamental de las divergencias es producto de una idealización necesaria para simplificar el tratamiento: la que supone que los campos dependen de un continuo de puntos identificados con números reales. Es la descripción continua del espacio la que resulta inadecuada y hace necesario incluir a la relatividad general, que trata el espacio-tiempo dinámicamente si se desea tener la esperanza de eliminar estas divergencias. Nuevamente uno es conducido a considerar una teoría que incluya a la relatividad general y a los campos cuánticos, es decir la gravedad cuántica.

c) Finalmente la relatividad general, considerada por muchos como la más bella de las teorías científicas, proporciona un marco común para el tratamiento de todos los fenómenos clásicos, mecánicos, electromagnéticos y gravitacionales. Describe por lo tanto la dinámica de cualquier distribución autogravitante de campos y materia. Como en los ejemplos anteriores la teoría muestra signos de ser incompleta, los mismos se manifiestan en la aparición de infinitos y singularidades. En efecto, se puede probar que distribuciones muy generales de materia y campos desarrollan singularidades en su evolución debido a su atracción gravitacional. Las mismas se manifiestan en la aparición de regiones del espacio-tiempo con curvaturas infinitas. Los agujeros negros son típicos ejemplos de este tipo de situación. Aunque ellos existen en la naturaleza, sabemos que la descripción proporcionada por la relatividad general deja de ser válida muy cerca del punto central en que la curvatura adquiere valores arbitrariamente

grandes. Cuando la curvatura supera al inverso al cuadrado de la longitud Planck, se necesitan incluir efectos cuánticos.

Resumiendo, todas las teorías existentes son incompletas. Aparecen inconsistencias cuando uno trata de aplicarlas fuera de su rango de validez. Solo una teoría cuántica de la gravedad podría describir todos los sistemas físicos imaginables, no importa el valor de su velocidad, tamaño, masa o cualquier otra magnitud física. Esta es sin duda la razón principal para la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad. Como ha sido el caso en cada uno de los procesos previos de unificación, la gravedad cuántica transformará, sin dudas radicalmente, nuestra visión del mundo y conducirá a predicciones inesperadas [1].

Existen dos enfoques principales para cuantizar la gravedad; el primero, asociado a las llamadas supercuerdas; el segundo, basado en los trabajos de Dirac, Bergmann y DeWitt de principios de los sesenta, conocido como gravedad cuántica canónica. Luego de un periodo de estancamiento este enfoque tuvo avances importantes durante los ochenta debido a los dos desarrollos siguientes: a) la reformulación, debida a Abhay Ashtekar, de la relatividad general en términos de un nuevo conjunto de variables que permite describir a la gravedad en el mismo lenguaje utilizado para las otras interacciones fundamentales [2], y b) el desarrollo de una descripción no perturbativa y geométrica de las interacciones fundamentales en términos de lazos. Las técnicas de lazos fueron aplicadas por Rovelli y Lee Smolin al problema de la cuantización de la gravedad y condujeron a la creación de una nueva y muy activa área de investigación; la gravedad cuántica de lazos [3].

La intención de este trabajo de tesis *no* es estudiar el campo gravitacional, sino la teoría de Maxwell del campo electromagnético a nivel cuántico en la representación de conexiones y de lazos. Los motivos son varios. Uno de ellos es que el estudio de la RG tomaría más tiempo en desarrollarse, debido a la necesidad del estudio de geometría diferencial y teoría de nudos. Otro motivo es que la teoría de Maxwell cuántica tiene aplicaciones en láseres, materiales superconductores, computación cuántica, materia condensada, física de plasmas, etc. Esto encaja adecuadamente en la ingeniería física<sup>1</sup>.

La teoría cuántica de Maxwell puede atacarse con diferentes técnicas, por ejemplo, a nivel de conexiones cuando se cuantiza el campo electromagnético de manera canónica o a nivel de Lagrangianos, con integrales de trayectoria [4, 5]. Sin embargo,

---

<sup>1</sup>No queremos decir, desde luego, que la RG no es aplicable, ésta teoría de gravitación es aplicable ya en los modernos GPS.

se gana una mejor interpretación de los resultados cuando se usa el lenguaje de lazos. Por ejemplo, pueden evitarse las dificultades de regularización y los estados coherentes surgen naturalmente.

Los primeros en formular la teoría cuántica de Maxwell en el lenguaje de lazos fueron Gambini y Trias; Ashtekar y Rovelli obtuvieron una representación de lazos en términos de coordenadas complejas de Bargman para esta misma [6, 7].

Cuando uno promueve la Hamiltoniana de la RG, en términos de conexiones de Ashtekar, a un operador cuántico, se obtiene una ecuación análoga a la ecuación de Schrödinger, la cual se conoce como la ecuación de Wheeler-DeWitt ( $\hat{H}\Psi = 0$ ) [8]. Algo sorprendente en esta representación es que existe una solución no trivial (una función de onda) a esta ecuación, conocida como el estado de Chern-Simons o estado de Kodama [9]. Lo sorprendente es que esta solución surge de una teoría de Chern-Simon para conexiones de Yang-Mills y las constricciones de RG (las cuales conforman la Hamiltoniana) son mucho más complicadas, sin embargo, un cálculo directo muestra que, efectivamente, las constricciones de la RG aniquilan esta función de onda [10].

Ahora, cuando uno quiere ir a la representación de lazos de una teoría de norma se pueden tomar dos caminos. Uno es mediante una transformada de lazos, análoga a la transformada de Fourier para ir de la representación de posición a la de momentos en mecánica cuántica. El otro camino es tomar un álgebra de variables clásicas *no* canónica y promover estas a operadores.

En la representación de lazos de la RG existe una solución a la ecuación de Wheeler-DeWitt, la cual está relacionada con invariantes de nudos, se le conoce como el polinomio de Kauffman y es una generalización de otro polinomio conocido como el polinomio de Jones. Puede probarse que efectivamente el polinomio de Kauffman es una solución a dicha ecuación en esta representación aplicando las constricciones, pero es bastante complicado [11]. Una manera alternativa y mucho más simple para ver esto es notar que el polinomio de Kauffman no es más que la transformada de lazo del estado de Chern-Simons.

En el campo electromagnético, también existe un estado de Chern-Simons en la representación de conexiones, el cual debe ser una solución a la teoría cuántica de Maxwell, sin embargo es poco lo que se conoce en la literatura, pues no se tiene una interpretación física del mismo. La idea aquí es mostrar explícitamente que dicho estado es una solución de la teoría.

Por otro lado, muy a menudo se relaciona el número de enlace de Gauss (el cual es una función invariante de dos lazos) con el límite abeliano del polinomio de Kauffman [12, 13]. Es también nuestra intención verificar directamente, en la representación de lazos del campo de Maxwell, que dicho invariante está relacionado con una solución directa de la teoría cuántica (de este campo), lo cual no ha sido mostrado explícitamente, al menos para nuestro conocimiento. Esto lo haremos mediante la transformación de lazo del estado de Chern-Simons para la teoría de Maxwell.

Para lograr el objetivo de este trabajo, el estudio se distribuye en los capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo uno se exponen brevemente las ecuaciones de Maxwell y se hace un estudio del formalismo de haces fibrados y formas diferenciales para este caso.

El capítulo dos está destinado a la teoría de lazos, donde se introducen los conceptos de derivada de lazo y derivada de conexión. También se construye el grupo Abelian de lazos y se habla del método para hacer la representación de lazos de las teorías de norma, para esto se hace una analogía con la transformación de Fourier.

En el capítulo tres se cuantiza el campo electromagnético de tres formas que serán fundamentales para entender los resultados de este trabajo de tesis.

En el capítulo cuatro se define el estado de Chern-Simons para el campo electromagnético y se verifica su validez para luego aplicarle la transformación de lazo.

Por último, el capítulo cinco es destinado al análisis del estado de Chern-Simons en su representación de lazos. Finalmente, tomando en cuenta que para relatividad general no existe una interpretación física del estado de Chern-Simons, se esbozan posibles interpretaciones del mismo para este caso de electromagnetismo.



# Capítulo 1

## TEORÍA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

El trabajo de J. Clerk Maxwell y los desarrollos posteriores desde finales del siglo XIX pusieron de manifiesto que la luz tiene, con toda seguridad, naturaleza electromagnética. La electrodinámica clásica conduce invariablemente a la idea de una transferencia continua de energía por medio de ondas electromagnéticas. En cambio, el punto de vista más moderno de la electrodinámica cuántica describe las interacciones electromagnéticas y el transporte de energía en términos de “partículas” elementales sin masa, denominadas **fotones**. Maxwell demostró que dos fuerzas que parecían diferentes, la eléctrica y la magnética, son simplemente dos aspectos del campo electromagnético [14].

Como es bien conocido, las ecuaciones para el campo electromagnético en el vacío están dadas por<sup>1</sup>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (1.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga y  $\vec{J}$  es la densidad de corriente. Escribiremos ahora estas ecuaciones en notación de cuadvectores, por lo que adoptaremos la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos y usaremos la definición de producto vectorial de dos vectores ordinarios en notación de componentes,

---

<sup>1</sup>Como es común en física teórica usaremos unidades en donde  $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ .

1.0.

$$(\vec{A} \times \vec{B})^i = \epsilon^{ijk} A_j B_k, \quad (1.3)$$

donde la cantidad  $\epsilon^{ijk}$  es conocida como el símbolo de Levi-Civita y es igual a 1 si  $i, j, k$  son una permutación par de 1, 2, 3; es cero si dos índices se repiten y es  $-1$  en cualquier otro caso. Podemos escribir las ecuaciones de Maxwell como:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \partial_0 E^i = 4\pi J^i, \quad \partial_i E^i = J^0, \quad (1.4)$$

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0, \quad \partial_i B^i = 0. \quad (1.5)$$

La notación  $\partial_i$  quiere decir  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  y la notación  $\partial_0$  significa  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Nótese que hemos reemplazado la densidad de carga por  $J^0$ , así armamos un cuadvivector de densidad de corriente<sup>2</sup>

$$J^\mu = (\rho, J^1, J^2, J^3) \quad (1.6)$$

Procederemos ahora a definir el tensor de campo:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

y notamos que el mismo objeto con sus índices arriba se define como  $F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}$  donde  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  es conocida como la métrica de Minkowski. Es fácil ver que  $F_{\mu\nu}$  es anti-simétrico ( $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ). Con esta notación las primeras dos ecuaciones de Maxwell pueden ser reescritas como:

$$\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} = 4\pi J^i, \quad \partial_i F^{0i} = 4\pi J^0 \quad (1.8)$$

o, sorprendentemente, como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu. \quad (1.9)$$

Definimos un símbolo de Levi-Civita espacio-temporal,  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , de la misma forma que el símbolo anterior. Entonces podemos reescribir las otras dos ecuaciones de

---

<sup>2</sup>Con índices latinos etiquetamos las coordenadas el espacio y con griegos las coordenadas del espacio-tiempo con  $x^0 = t$ .

Maxwell como:

$$\epsilon^{\sigma\mu\nu\lambda}\partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (1.10)$$

En electromagnetismo se sabe que existe un potencial electrostático  $\phi$  y un potencial vectorial  $\vec{A}$  tales que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.12)$$

Para escribir estas ecuaciones en notación espacio-temporal, comenzamos por introducir un cuadrivector potencial,

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (1.13)$$

en términos del cual tenemos que,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.14)$$

Nótese que esta definición de  $F_{\mu\nu}$  en términos de  $A_\mu$  es invariante si uno re-escala  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\theta$  con  $\theta$  una función arbitraria. Dichas transformaciones son llamadas transformaciones de norma (*gauge en inglés*) y la teoría de Maxwell es invariante bajo las mismas.

## 1.1. FORMULACIÓN LANGRANGIANA Y HAMILTONIANA

Debido a la naturaleza de campo de la teoría de Maxwell, su lagrangiano está dado por

$$L = \frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

Las variables de configuración serán las cuatro componentes del vector potencial  $A_\mu$ . Recordemos que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , esto quiere decir que siempre que  $\mu$  sea igual a  $\nu$ ,  $F_{\mu\nu}$  se anula. Esto implica que la componente temporal del vector potencial,  $A_0$ , nunca va acompañada de una derivada temporal por lo que el momento canónico conjugado de esta componente se anula. Así, las variables de configuración son la parte espacial del vector potencial  $A_a$  y su momento canónico conjugado está dado

por  $\pi^a \equiv \delta L / \delta \dot{A}_a$ . La derivada funcional se define como

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{A}_a(x)} \equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(x)}{\partial \dot{A}_a(x)} - \partial_b \frac{\tilde{\mathcal{L}}(x)}{\partial (\partial_b \dot{A}_a(x))}, \quad (1.16)$$

donde  $\tilde{\mathcal{L}}$  es la densidad lagrangiana en términos de la cual el lagrangiano se define como  $L = \int d^3x \tilde{\mathcal{L}}$ . Formulemos ahora la teoría canónicamente. Calculando el momento canónico conjugado de la parte espacial del vector potencial encontramos que

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{A}_a} = \tilde{E}^a, \quad (1.17)$$

esto es, la densidad de campo eléctrico (por simplicidad, de ahora en adelante le llamaremos solo campo eléctrico). Los pares canónicos de variables son entonces  $A_a(x), \tilde{E}^a(x)$ , un par por punto del espacio. El corchete de Poisson de las variables está entonces dado por

$$\{A_a(x), \tilde{E}^a(y)\} = \delta_b^a \delta^3(x - y). \quad (1.18)$$

Nótese que el corchete de Poisson es cero a menos que estemos hablando de la misma componente del vector y los puntos del espacio de las dos variables son el mismo. Así uno puede pensar a la variable  $x$  como un índice continuo que etiqueta las variables en diferentes puntos del espacio. Además, diferentes puntos del espacio involucran variables que tienen corchetes de Poisson nulos entre sí. El corchete de Poisson de campos tiene la misma definición que el que se usa en mecánica, pero las derivadas son derivadas funcionales y hay una integral de la variable espacial. El hamiltoniano se construye vía la transformada de Legendre, al igual que en sistemas mecánicos, excepto por una integral espacial (que es como sumar sobre el índice continuo)

$$H \equiv \int d^3x [\tilde{E}^a(x) \dot{A}_a(x) - \tilde{\mathcal{L}}], \quad (1.19)$$

donde tenemos una suma sobre el índice repetido. En la transformada de Legendre se usa la definición del momento canónico para transformar el hamiltoniano en una expresión involucrando solamente los pares canónicos conjugados. El resultado es

$$H = \int \left( \frac{1}{2} [\tilde{E}^a(x) \tilde{E}^b(x) \eta_{ab} + \tilde{B}^a(x) \tilde{B}^b(x) \eta_{ab}] - A_0 \partial_a \tilde{E}^a \right) d^3x. \quad (1.20)$$

Aquí estamos ocupado solo la parte espacial de la métrica  $\eta^{\mu\nu}$ , además  $B^a = \epsilon^{abc} F_{bc}/2$  es el campo magnético que debe verse como una función de las derivadas espaciales de  $A_a$ . Nótese la presencia de  $A_0$ . Si deducimos la ecuación de movimiento para  $\pi^0$  simplemente nos da que

$$\dot{\pi}^0 = \{A_0, H\} = \partial_a \tilde{E}^a. \quad (1.21)$$

Pero dado que la acción no involucra  $\dot{A}_0$  entonces su momento canónico conjugado  $\pi^0$  se anula. Entonces su evolución temporal debe anularse también. Concluimos entonces que  $\partial_a \tilde{E}^a = 0$ , esto es, la ley de Gauss en el vacío. El conmutador del campo eléctrico y el vector potencial con el Hamiltoniano da la evolución de los campos en el tiempo. Estos junto con la ley de Gauss son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell. Así, expresaremos el hamiltoniano como

$$H = \int \frac{1}{2} \eta_{ab} (\tilde{E}^a(x) \tilde{E}^b(x) + \tilde{B}^a(x) \tilde{B}^b(x)) d^3x. \quad (1.22)$$

La ley de Gauss puede resolverse considerando solo campos eléctricos transversos,  $\tilde{E}_T^a(x)$ . La teoría canónica puede reformularse completamente en términos de campos transversos (la conexión transversa  $A_a^T(x)$  se define en términos de la métrica de fondo plana fija), el par canónico está dado entonces en términos de los paréntesis de Dirac por

$$\{A_b^T(y), \tilde{E}_T^a(x)\} = \delta_{Tb}^a(x-y), \quad (1.23)$$

donde la “delta de Dirac transversa” está definida por

$$\delta_{Tb}^a(x-y) = \delta_b^a \delta(x-y) - \Delta^{-1} \partial^a \partial_b (x-y), \quad (1.24)$$

donde  $\Delta^{-1}$  es el inverso del Laplaciano de la métrica de fondo sobre la tres-variedad.

Una simplificación usual es considerar las variables del espacio de momentos

$$A_a^T(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) [q_1(\vec{k}) e_a^1(\vec{k}) + q_2(\vec{k}) e_a^2(\vec{k})], \quad (1.25)$$

$$E_T^a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) [p^1(\vec{k}) e_1^a(\vec{k}) + p^2(\vec{k}) e_2^a(\vec{k})], \quad (1.26)$$

donde  $e_A^a$ ,  $e_a^A$  son vectores transversos y sus uno-formas duales en el espacio de momentos están normalizadas tal que  $k^a e_a^A = 0$ ,  $e_a^A(\vec{k}) e_a^B(\vec{k}) = \delta_A^B$ ,  $e_a^A(\vec{k}) = (e_a^A(\vec{k}))^* = e_a^A(-\vec{k})$ ; también  $q(-\vec{k}) = q^*(\vec{k})$  y  $p(-\vec{k}) = p^*(\vec{k})$ . Estas relaciones pueden invertirse

1.2.

FORMULACIÓN LANGRANGIANA Y HAMILTONIANA

y llevar a

$$q_A(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_A^a A_a^T(x), \quad (1.27)$$

$$p^A(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_a^A(\vec{k}) E_T^a(x), \quad (1.28)$$

con  $A = 1, 2$ .

Las  $q_A(\vec{k})$ ,  $p^A(\vec{k})$  capturan los dos grados de libertad del campo electromagnético y describen los modos radiativos correspondientes a las dos posibles helicidades del fotón. Uno puede reformular la teoría en términos de estas variables. Los paréntesis de Poisson son

$$\{q_A(\vec{k}), p^B(\vec{k}')\} = \delta_A^B \delta^3(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (1.29)$$

El Hamiltoniano, escrito en términos de estas variables básicas, adopta la forma de una colección infinita de osciladores armónicos, uno para cada  $\vec{k}$ ,

$$H = \int d^3k \left( p_A(\vec{k}) p^A(-\vec{k}) + |k|^2 q_A(\vec{k}) q^A(-\vec{k}) \right). \quad (1.30)$$

Vamos a introducir ahora las dos cantidades,

$$a_A(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{|k|} q_A(\vec{k}) + i \frac{1}{\sqrt{|k|}} p_A(\vec{k}) \right), \quad (1.31)$$

$$a_A^*(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{|k|} q_A(-\vec{k}) - i \frac{1}{\sqrt{|k|}} p_A(-\vec{k}) \right), \quad (1.32)$$

con paréntesis de Poisson

$$\{a_A(\vec{k}), a_B^*(\vec{k}')\} = -i \delta_{AB} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (1.33)$$

en términos de los cuales el Hamiltoniano clásico se lee

$$H = \int d^3k |k| a_C^*(\vec{k}) a^C(\vec{k}). \quad (1.34)$$

## 1.2. REPRESENTACIÓN EN FORMAS DIFERENCIALES

Podemos combinar todos los campos electromagnéticos en una 2-forma  $F$ :

$$F := -E_i dx^0 \wedge dx^i + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (1.35)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  se define en (1.7)

El cuadrivector de densidad de corriente (1.6) se usa para construir la 3-forma de densidad de corriente  $J$ :

$$J = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} J^\mu dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho. \quad (1.36)$$

Es natural asociar una 3-forma a la densidad de corriente y no una 1-forma ya que es un objeto que después de ser integrado sobre un volumen de tres dimensiones en el espacio-tiempo nos da la carga contenida en ese volumen.

Es fácil comprobar que las ecuaciones de Maxwell homogéneas (1.5) pueden escribirse como

$$dF = 0. \quad (1.37)$$

En esta forma, las ecuaciones son libres de coordenadas e incluso no involucran la métrica. Ya que  $F$  es cerrada, el teorema de Poincaré (ver Apéndice D) garantiza la existencia de un potencial 1-forma  $A$  tal que  $F$  puede ser escrita como

$$F = dA. \quad (1.38)$$

Por supuesto,  $F$  determina a  $A$  solo bajo transformaciones de norma: Para cualquier 0-forma  $\theta$ ,  $A$  y  $A + d\theta$  nos llevan al mismo campo  $F$  debido a la nilpotencia de la derivada exterior ( $d^2 = 0$ ).

$$d(A + d\theta) = dA + d^2\theta = dA. \quad (1.39)$$

Las ecuaciones no homogéneas (1.4) se obtienen de:

$$d \star F = J. \quad (1.40)$$

Para la definición del operador estrella de Hodge  $\star$  se necesita la métrica. Así

$$dJ = 0, \quad (1.41)$$

i.e., las ecuaciones de Maxwell son consistentes solo si (1.41) se satisface. Ya que

$$dJ = \partial_\mu J^\mu dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (1.42)$$

esto implica la conservación de la corriente  $\partial_\mu J^\mu = 0$

Considerando el caso sin fuentes (i.e.,  $J = 0$ ) la densidad Lagrangiana en términos de formas diferenciales es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F \wedge \star F \quad (1.43)$$

y usando la definición para  $\star F$  escribimos la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F^{\rho\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \star (dx^\rho \wedge dx^\lambda) \\ &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (1.44)$$

### 1.3. FORMULACIÓN EN HACES FIBRADOS

En 1919 el matemático alemán Felix Klein inauguró una formulación de las leyes físicas, las *teorías de norma*, que distingue entre el campo portador y los campos responsables de la “corriente” llamados campos materiales. Klein buscaba una unificación de la gravitación con el electromagnetismo (cosa que aún no se ha conseguido). El término utilizado por Klein es el de *Eichinvarianz*. La palabra alemana ‘Eich’ significa calibre, pero hoy en día casi todo el mundo usa la traducción de la palabra inglesa ‘gauge’.

En una teoría de norma existe un grupo de Lie  $G$  de simetría del sistema, este grupo opera de manera distinta en el campo portador y en las corrientes. El *campo portador* de la fuerza es característico de cada interacción y en su aspecto corpuscular es una partícula tipo Bose (es decir, de espín entero); los componentes de la *corriente* son los campos materiales que poseen propiedades sensibles al grupo de simetría. Las partículas elementales constitutivas de las corrientes son, genéricamente, de tipo Fermi, por tanto con espín semientero. Como ejemplo, en electromagnetismo el campo

portador está constituido por fotones, el campo material es cualquier partícula cargada y el grupo de Lie de simetría es  $U(1)$  (círculo unitario complejo).

Es de gran utilidad describir las teorías de norma con un formalismo lagrangiano, debido a las propiedades derivadas del teorema de Noether. La formulación matemática correcta y completa de las teorías de norma hace aparecer los fibrados a conexión. De hecho, se asocia la interacción, como hizo primeramente Einstein en la Teoría General de la Relatividad, a una *curvatura* particular, la cual se define en cada caso: la idea de asociar geoméricamente las fuerzas o interacciones con la *curvatura* en un cierto espacio es muy fértil: así se reducen, en principio, las fuerzas a la geometría.

Para introducir el formalismo de los haces fibrados, discutiremos algunas nociones básicas sobre la incorporación de campos escalares en la electrodinámica. Estos campos sirven para describir partículas escalares, es decir, de espín 0. A este estudio se le llama *Electrodinámica Escalar*.

En física, un campo escalar es un campo sobre el espacio-tiempo que es simplemente una función con valores en el campo de los escalares, típicamente los números reales  $\mathbb{R}$  (si estamos trabajando con partículas neutras) o números complejos  $\mathbb{C}$  (para partículas cargadas), a veces los cuaterniones. Por lo tanto, es un campo codificado por un haz fibrado que es un haz trivial de líneas. Un campo escalar fundamental (complejo, cargado) es el campo de Higgs, que es uno de los componentes del modelo estándar de la física de partículas.

En la naturaleza, existen partículas escalares que están cargadas y, por lo tanto, están acopladas al campo electromagnético. En tres dimensiones espaciales, los superconductores proporcionan un importante ejemplo no relativista. El fenómeno de resistencia cero a baja temperatura puede explicarse por la formación de los llamados pares de electrones Cooper de momento y espín opuestos. Estos se comportan como bosones de espín cero y de carga  $q = 2e$ , que se mantienen unidos en algunos metales por la interacción electrón-fonón. Muchas predicciones importantes de datos experimentales pueden derivarse de la teoría de la superconductividad de Ginzburg-Landau. La generalización relativista de esta teoría para cuatro dimensiones del espacio-tiempo es de gran importancia en la física de partículas elementales. En esa forma se conoce como *Electrodinámica Cuántica Escalar* (escalar QED).

Para discutir a la materia en un contexto cuántico, uno debe pensar en una partícula cargada como una “onda de probabilidad”, descrita por una *función de onda* de-

pendiente del tiempo.

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}. \quad (1.45)$$

No se puede decir con precisión dónde está la partícula en un tiempo dado  $t$ , pero se puede decir que la probabilidad de encontrar la partícula dentro de alguna región  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  en ese tiempo es

$$\int_{\mathcal{U}} |\psi(t, \mathbf{x})|^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (1.46)$$

Uno de los principios de la mecánica cuántica es que la función de onda  $\psi$  evoluciona a lo largo del tiempo de acuerdo con una ecuación en derivadas parciales, cuya elección exacta varía en las diferentes versiones de la teoría. La mecánica cuántica no relativista usa la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.47)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano espacial, y  $m > 0$  es la masa de la partícula. Una ecuación un poco más simple pero relativista (es decir, invariante bajo transformaciones de Lorentz) es la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (1.48)$$

la cual, en unidades  $\hbar = c = 1$  es

$$(\square + m^2)\psi = 0 \quad (1.49)$$

donde  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  es el operador D'Alembertiano.

La densidad de probabilidad de la ecuación de Schrödinger es

$$\rho = \psi^* \psi \quad (1.50)$$

y la corriente de probabilidad es

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (1.51)$$

Estas obedecen la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} &= \frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) - \frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) \\ &= \psi^* \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \psi \right) + \psi \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \psi^* \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Existe un problema con la ecuación de Klein-Gordon. Esto se debe a que su expresión para la densidad de probabilidad dada por

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \quad (1.53)$$

a diferencia de (1.50), no es definida positiva. En este caso  $\rho$  puede tomar valores negativos y de ese modo su interpretación como densidad de probabilidad se tiene que abandonar. Por lo tanto, la interpretación de la ecuación de Klein-Gordon como la ecuación para una única partícula, con función de onda  $\psi$ , es incorrecta. En lugar de eso, la reinterpretaremos como una *ecuación de campo* que, luego de ser cuantizada por segunda vez, dará una correcta interpretación como partícula de campo.

Dijimos arriba que la partícula representada por  $\psi$  tiene “carga” pero, ¿qué significa esto?. La idea básica del teorema de Noether es: cantidades conservadas surgen de simetrías. El ejemplo más simple de esto es ver que (1.48) es invariante bajo traslaciones espaciales y temporales, i.e. cambios de coordenadas que reemplazan  $x^\mu$  con  $x^\mu + a^\mu$  para cualquier constante  $a^\mu \in \mathbb{R}$ ; de este hecho se pueden derivar expresiones para energía y momento en términos de  $\psi$ , y probar que se conservan. Pero, ¿qué simetría da lugar a la conservación de la carga?. La respuesta depende del hecho de que elegimos que  $\psi$  tome valores en  $\mathbb{C}$  en lugar de  $\mathbb{R}$ .

Podemos decir que el campo  $\psi$  tiene dos componentes reales  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , de modo que

$$\psi = (\psi_1 + i\psi_2)/\sqrt{2}, \quad (1.54)$$

$$\psi^* = (\psi_1 - i\psi_2)/\sqrt{2}. \quad (1.55)$$

La ecuación de Klein-Gordon puede derivarse a través de la ecuación de Euler-Lagrange de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi^*) - m^2 \psi^* \psi. \quad (1.56)$$

### 1.3.

### FORMULACIÓN EN HACES FIBRADOS

Si consideramos a  $\psi$  y  $\psi^*$  como campos independientes, obtenemos dos ecuaciones de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\psi = 0, \quad (1.57)$$

$$(\square + m^2)\psi^* = 0. \quad (1.58)$$

El lagrangiano es claramente invariante bajo la transformación

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta}\psi, \quad \psi^* \rightarrow e^{i\theta}\psi^* \quad (1.59)$$

donde  $\theta$  es constante. Esta es conocida como una *transformación de norma de primer tipo*. Notemos que la simetría (1.59) no actúa sobre el espacio ambiente  $\mathbb{R}^4$  sino en el espacio en el cual  $\psi$  toma valores, el plano complejo también llamado ‘espacio interno’. Uno puede imaginar que hay una copia  $E_x$  del plano complejo  $\mathbb{C}$  asociado a cada punto  $x \in \mathbb{R}^4$ , y  $\psi$  asigna un punto en el plano  $E_x$  sobre cada  $x$ , representado en la figura 1.1 como un vector basado en el origen.

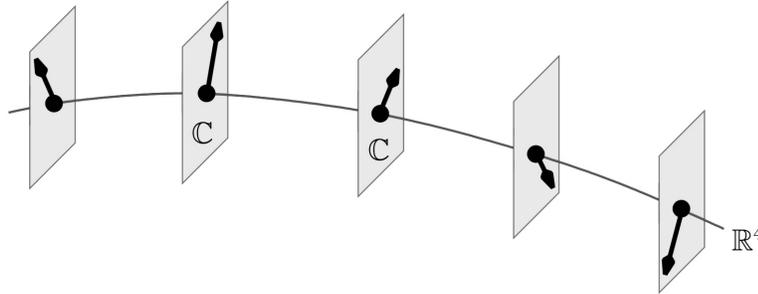


Figura 1.1: Una pieza de  $\mathbb{R}^4$  (representado por una curva unidimensional) con una copia del plano  $\mathbb{C}$  sujeta a cada punto, y una “sección”  $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  representada por vectores en los planos correspondientes.

El teorema de Noether nos da una corriente conservada para esta simetría:

$$J^\mu = i(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*), \quad (1.60)$$

que cumple la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.61)$$

y la correspondiente cantidad conservada

$$Q = \int J^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = i \int \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right). \quad (1.62)$$

Nos gustaría identificar esta cantidad (real) con la carga eléctrica pero presenta algunos problemas: no hace mención de la carga  $e$  del protón y no da indicios de ser múltiplos de esa cantidad. Abordaremos entonces el problema de una forma diferente. Hasta aquí, cada uno de los planos  $E_x$  está identificado canónicamente con  $\mathbb{C}$ , pero supongamos que abandonamos este supuesto: supongamos que la colección  $\{E_x\}_{x \in \mathbb{R}^4}$  es simplemente un conjunto de planos que “varía suavemente” en algún sentido cuando  $x$  se mueve sobre  $\mathbb{R}^4$ , pero sin ningún isomorfismo canónico entre  $E_x$  y  $E_y$  para  $x \neq y$  (ver figura 1.2). Esta es la esencia de un *haz vectorial*, y el mapa  $\psi$  que asocia a cada punto  $x$  un vector en  $E_x$  es llamado una *sección* del haz. Tal como el haz tangente de una variedad, tenemos una colección de espacios vectoriales que varían suavemente, pero ya no es obvio lo que significa llamar a una sección  $\psi$  “constante”, o como definir las derivadas parciales  $\partial_\mu \psi$  que aparecen en la ecuación de Klein-Gordon.

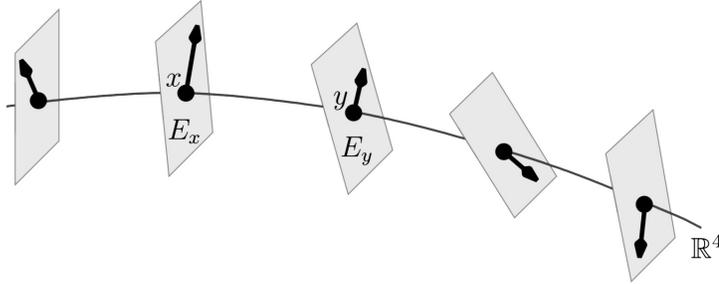


Figura 1.2: Un haz trivial que asocia a cada punto  $x \in \mathbb{R}^4$  un plano  $E_x$ . Aquí los planos distintos son espacios vectoriales isomorfos pero en general no hay un isomorfismo canónico  $E_x \rightarrow E_y$  para  $x \neq y$ .

Notemos también que las transformación (1.59) corresponde a una rotación unitaria de  $\psi$  en el plano complejo complejo:

$$e^{i\theta} (e^{i\theta})^* = 1. \quad (1.63)$$

Ya que  $\theta$  es constante, esta transformación de norma debe ser la misma en todos los puntos del espacio-tiempo; es una transformación global. Entonces, cuando realizamos una rotación en el espacio interno de  $\psi$  en un punto, debemos realizar la misma rotación en todos los demás puntos al mismo tiempo. Si tomamos esta interpretación física

seriamente, vemos que es imposible de satisfacer ya que contradice a la relatividad, la cual dice que no puede transferirse información en el espacio-tiempo de manera instantánea. Para solucionar este problema, simplemente abandonamos el requerimiento de que  $\theta$  sea constante, la escribiremos como una función arbitraria del espacio-tiempo,  $\theta(x^\mu)$ . Esta es llamada una ‘transformación local’, ya que difiere de punto a punto. También es llamada *transformación de norma de segundo tipo*.

Vemos que para  $\theta \ll 1$

$$\psi \rightarrow \psi - i\theta\psi, \quad (1.64)$$

y así

$$\delta\psi = -i\theta\psi, \quad (1.65)$$

$$\partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu\psi - i(\partial_\mu\theta)\psi - i\theta(\partial_\mu\psi), \quad (1.66)$$

por lo tanto

$$\delta(\partial_\mu\psi) = -i\theta(\partial_\mu\psi) - i(\partial_\mu\theta)\psi, \quad (1.67)$$

y, similarmente

$$\delta\psi^* = i\theta\psi^*, \quad (1.68)$$

$$\delta(\partial_\mu\psi^*) = i\theta(\partial_\mu\psi^*) + i(\partial_\mu\theta)\psi^*. \quad (1.69)$$

Ahora veremos el efecto de estas transformaciones sobre el Lagrangiano. El cambio en el Lagrangiano es

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta[(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi^*)] - m^2\delta[\psi^*\psi] \\ &= [\delta(\partial_\mu\psi)]\partial^\mu\psi^* + (\partial_\mu\psi)[\delta(\partial^\mu\psi^*)] - m^2 \cdot 0 \\ &= [-i\theta(\partial_\mu\psi) - i(\partial_\mu\theta)\psi]\partial^\mu\psi^* + (\partial_\mu\psi)[i\theta(\partial^\mu\psi^*) + i(\partial^\mu\theta)\psi^*] \\ &= (\partial_\mu\theta)[-i\psi\partial^\mu\psi^* + i\psi^*\partial^\mu\psi] \\ &= (\partial_\mu\theta)J^\mu. \end{aligned} \quad (1.70)$$

El Lagrangiano ya no es invariante. Para restaurar la invarianza bajo transformaciones de segundo tipo, introducimos un nuevo 4-vector  $A_\mu$  el cual se acopla directamente a la corriente  $J^\mu$  dando un término extra en  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu = -ie(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*)A_\mu, \quad (1.71)$$

la constante de acoplamiento  $e$  es un número tal que  $eA_\mu$  tiene las mismas unidades que  $\partial/\partial x^\mu$ . También exigimos que, bajo transformación de norma de segundo tipo,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta, \quad (1.72)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_1 &= -e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu(\delta A_\mu) \\ &= -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu\partial_\mu\theta. \end{aligned} \quad (1.73)$$

El último término de arriba cancela  $\delta\mathcal{L}$  en (1.70), pero ahora debemos cancelar el primer término. Tenemos

$$\delta J^\mu = i\delta(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) = 2\psi^*\psi\partial^\mu\theta, \quad (1.74)$$

de modo que

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2eA_\mu(\partial^\mu\theta)\psi^*\psi. \quad (1.75)$$

Por lo tanto, agregamos otro término a  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}_2 = e^2A_\mu A^\mu\psi^*\psi. \quad (1.76)$$

Por virtud de (1.72), tenemos que

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e^2A_\mu\delta A^\mu\psi^*\psi = 2eA_\mu(\partial^\mu\theta)\psi^*\psi \quad (1.77)$$

así,

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0. \quad (1.78)$$

El Lagrangiano total  $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  ahora es invariante, consecuencia de haber introducido  $A_\mu$  el cual se acopla a la corriente  $J_\mu$  del campo complejo  $\psi$ . El campo  $A_\mu$ , sin embargo, debe contribuir por sí mismo al Lagrangiano. Ya que  $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  es invariante, necesitamos un  $\mathcal{L}_3$  que también sea invariante de norma, y para construirlo definimos el rotacional en 4 dimensiones de  $A_\mu$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.79)$$

o en términos de la 1-forma  $A = A_\mu dx^\mu$ ,

$$F = dA. \quad (1.80)$$

Es claro que (1.79) es invariante de norma. El Lagrangiano escalar  $\mathcal{L}_3$  es entonces

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (1.81)$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{tot} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \\ &= (\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi^*) - ie(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*)A_\mu \\ &\quad + e^2A_\mu A^\mu\psi^*\psi - m^2\psi^*\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

$$\mathcal{L}_{tot} = (\partial_\mu\psi + ieA_\mu\psi)(\partial^\mu\psi^* - ieA^\mu\psi^*) - m^2\psi^*\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (1.83)$$

Se reconocerá que  $F_{\mu\nu}$  como se define en (1.79) es el tensor de campo electromagnético. Lo que hemos hecho, por lo tanto, es mostrar como el campo electromagnético surge naturalmente exigiendo invarianza bajo la acción de la transformación de norma de segundo tipo, i.e. bajo rotaciones locales en el espacio interno del campo complejo  $\psi$ . El potencial  $A_\mu$  se acopla a la corriente  $J_\mu$  con fuerza de acoplamiento  $e$ , la cual es la carga del campo  $\psi$ .

Comparando el Lagrangiano (1.56) con (1.83), notamos que  $\partial_\mu$  se reemplaza por  $(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi$ . Esta se conoce como la ‘derivada covariante’  $D_\mu\psi$ ,

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi, \quad (1.84)$$

ya que a diferencia de  $\partial_\mu$ , se transforma covariantemente bajo transformaciones de norma, es decir, como  $\psi$

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\psi) &= \delta(\partial_\mu\psi) + ie(\delta A_\mu)\psi + ieA_\mu\delta\psi \\ &= -i\theta(\partial_\mu\psi + ieA_\mu\psi) \\ &= -i\theta(D_\mu\psi) \end{aligned} \quad (1.85)$$

El operador

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.86)$$

es llamado la ‘conexión’. Debido a la forma de esta última expresión, cuando se habla de conexiones en física, nos referimos al término  $ieA_\mu$  en lugar de a  $D_\mu$ . Es importante mencionar que este término es un elemento del álgebra de Lie  $\mathfrak{u}(1)$  del grupo de Lie  $U(1)$ , por eso se dice que la conexión toma valores en el álgebra de Lie del grupo de transformaciones de norma de la teoría.

Es valioso notar que las ecuaciones de Maxwell inhomogeneas se pueden obtener de (1.83) variando  $\mathcal{L}_{tot}$ . La ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{tot}}{\delta A_\mu} = 0 \quad (1.87)$$

da

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) + 2e^2 A^\mu |\psi|^2 \\ &= -ie(\psi^* D^\mu \psi - \psi D^\mu \psi^*) \\ &= -e\mathcal{J}^\mu, \end{aligned} \quad (1.88)$$

donde

$$\mathcal{J} = i(\psi^* D_\mu \psi - \psi D_\mu \psi^*) \quad (1.89)$$

que cumple

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0, \quad (1.90)$$

esta es la ‘corriente covariante’ que se conserva cuando el campo electromagnético está presente, no la corriente  $J^\mu$  de (1.60).

Tal como con las conexiones sobre variedades, podemos analizar el concepto de transporte paralelo de vectores en un haz alrededor de trayectorias cerradas y usarla para definir la noción de curvatura de un haz: esta curvatura resulta ser cero si y solo si  $dA = 0$ . En otras palabras, *el tensor de campo es la curvatura*. y las ecuaciones de Maxwell ahora juegan el papel para electrodinámica que la ecuación de Einstein lo hace en gravitación, relacionando la curvatura de nuestra conexión a las distribuciones de carga y corriente definidas por  $\psi$ .

Hagamos el concepto de transporte paralelo más preciso. Sea  $\gamma : [0, S] \rightarrow \mathbb{R}^4$  una trayectoria suave del punto  $p$  al punto  $q$ , y suponga que  $s \in [0, S]$ ,  $\psi(s)$  es un elemento en la fibra de  $E$  sobre  $\gamma(s)$ . Queremos escribir una ecuación diciendo que  $\psi(s)$  es transportado paralelamente a lo largo de  $\gamma$ . Esto debería decir de alguna manera que la derivada covariante de  $\psi(s)$  en la dirección  $\gamma$ , en concreto  $\gamma'(s)$ , es

igual a cero. Formalmente podemos escribir esto como

$$D_{\gamma'(s)}\psi(s) = 0. \quad (1.91)$$

Así,

$$D_{\gamma'(s)}\psi(s) = \frac{d}{ds}\psi(s) + ieA(\gamma'(s))\psi(s). \quad (1.92)$$

Entonces decimos que  $\psi(s)$  es ‘transportado paralelamente’ a lo largo de  $\gamma$  si  $D_{\gamma'(s)}\psi(s) = 0$  para todo  $s$ . De hecho, empezando con cualquier vector  $\psi \in E_p$ , podemos transportarlo paralelamente a lo largo de  $\gamma$ , esto es, podemos encontrar  $\psi(s) \in E_{\gamma(s)}$  tal que

$$\psi(0) = \psi, \quad D_{\gamma'(s)}\psi(s) = 0. \quad (1.93)$$

Para ver esto, es suficiente trabajar localmente y resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d}{ds}\psi(s) + ieA(\gamma'(s))\psi(s) = 0, \quad (1.94)$$

la cual tiene como solución

$$\psi(s) = \exp\left(-\int_{\gamma} ieA\right)\psi. \quad (1.95)$$

Para una trayectoria cerrada arbitraria, el resultado de un transporte paralelo en general depende de la elección de la curva. A cada curva cerrada  $\gamma$  con origen en  $p$ , el transporte paralelo asociará un elemento  $H$  del grupo de Lie  $U(1)$ . El resultado de transportar paralelamente  $\psi$  de  $p$  a  $p$  es obtenido por la acción de un elemento  $H$  del grupo, denotemos esto como  $H_A(\gamma)\psi$ . Ya que la ecuación que define el transporte paralelo es lineal, el mapa  $H_A(\gamma) : E_p \rightarrow E_q$  es lineal. Llamamos a esto la ‘holonomía’ a lo largo de  $\gamma$ . Por lo tanto,

$$\psi(S) = H_A(\gamma)\psi = \exp\left(-\oint_{\gamma} ieA\right)\psi(0). \quad (1.96)$$

Usando (1.80), podemos expresar esto como

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\oint_{\gamma} ieA\right)\psi(0) &= \exp\left(-ie\int_W dA\right)\psi(0) \\
&= \exp\left(-ie\int_W F\right)\psi(0) \\
&= \exp(-ie\Phi)\psi(0)
\end{aligned}
\tag{1.97}$$

donde  $W$  es la superficie delimitada por  $\gamma$  ( $\partial W = \gamma$ ). La curvatura está relacionada con la falla de un elemento de la fibra para volver a su valor original cuando se transporta paralelamente a lo largo de una trayectoria cerrada, en este caso vemos que esto depende de  $dA$  y consecuentemente del flujo del campo electromagnético  $\Phi$  a través de  $W$ . Como mencionamos antes, la curvatura es cero si y solo si  $dA = 0$  y el elemento  $\psi$  regresa a su valor original  $\psi(S) = \psi(0)$ .



## Capítulo 2

# EL GRUPO DE LAZOS Y LA REPRESENTACIÓN DE LAZOS

### 2.1. EL GRUPO DE LAZOS

El grupo de lazos es la estructura fundamental básica de todas las formulaciones no locales de las teorías de norma en términos de las holonomías. Cuando cuantizamos la teoría, las funciones de onda en la “representación de lazos” son funciones que dependen de los elementos del grupo de lazos. Esta es la razón física de por qué es importante entender la estructura del grupo de lazos, ya que es la “arena” donde la representación de lazos cuántica toma lugar.

A pesar de que el grupo de lazos no es un grupo de Lie, es posible definir sus generadores infinitesimales. Cuando estos generadores se representan en el espacio de funciones de lazos, dan lugar a operadores diferenciales en el espacio de lazos.

Consideremos un conjunto de curvas parametrizadas sobre una variedad  $M$  que son continuas y suaves. Una **curva**  $p$  es un mapeo

$$p : [0, s_1] \cup [s_1, s_2] \cdots [s_{n-1}, 1] \rightarrow M \quad (2.1)$$

suave en cada intervalo cerrado  $[s_i, s_{i+1}]$  y continuo en el dominio total. Hay una **composición** natural de curvas parametrizadas. Dadas dos curvas suaves  $p_1$  y  $p_2$  tales que el punto final de  $p_1$  es el mismo que el punto inicial de  $p_2$ , denotamos por

$p_1 \circ p_2$  a la curva:

$$p_1 \circ p_2(s) = \begin{cases} p_1(s), & \text{para } s \in [0, 1/2] \\ p_2(2(s - 1/2)), & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (2.2)$$

La curva en la dirección contraria (“**curva opuesta**”) está dada por

$$p^{-1}(s) := p(1 - s). \quad (2.3)$$

Estamos interesados en curvas no parametrizadas. Por tanto definiremos una relación de equivalencia identificando la curva  $p$  y  $p \circ \phi$  para toda orientación preservando reparametrizaciones diferenciables  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Es importante notar que la composición de curvas no parametrizadas está bien definida e independiente de los miembros de la clase de equivalencia usados en su definición.

Consideramos ahora **curvas cerradas**  $l, m, \dots$ , esto es, curvas que inician y terminan en el mismo punto  $o$ . Sea  $L_o$  el conjunto de todas estas curvas cerradas.  $L_o$  es un semi-grupo bajo la ley de composición  $(l, m) \rightarrow l \circ m$ . El elemento identidad (“**curva nula**”) está definido como la curva constante  $i(s) = o$  para cualquier  $s$  y cualquier parametrización. Sin embargo, no tenemos una estructura de grupo, ya que la curva opuesta  $l^{-1}$  no es una inversa de grupo en el sentido de que  $l \circ l^{-1} \neq i$ .

Las holonomías están asociadas con el transporte paralelo alrededor de curvas cerradas. En el caso de un haz trivial la conexión está dada por una 1-forma  $A_a$  sobre  $M$  con valores en el álgebra de Lie. El transporte paralelo alrededor de una curva cerrada  $l \in L_o$  es un mapeo de la fibra sobre  $o$  en sí misma dado por la exponencial ordenada de trayectoria,

$$H_A(l) = P \exp \int_l A_a(y) dy^a. \quad (2.4)$$

Para un haz fibrado principal  $P(M, G)$  con grupo  $G$  sobre  $M$  el mapeo de holonomía está definido como sigue. Elegimos un punto  $\hat{o}$  en la fibra sobre  $o$ , con la conexión  $A$  alzamos la curva cerrada  $l$  en  $M$  a una curva  $\hat{l}$  en  $P$  de tal forma que el punto inicial es

$$\hat{l}(0) = \hat{o} \quad (2.5)$$

y el punto final es

$$\hat{l}(1) = \hat{l}(0)H_A(l), \quad (2.6)$$

lo cual define a  $H_A(l)$ . La holonomía  $H_A$  es un elemento del grupo  $G$  y el producto denota la acción por la derecha de  $G$ . La propiedad principal de  $H_A$  es

$$H_A(l \circ m) = H_A(l)H_A(m). \quad (2.7)$$

Un cambio en la elección del punto en la fibra sobre  $o$  reemplazando  $\hat{o}$  por  $\hat{o}' = \hat{o}g$  induce la transformación

$$H'_A(l) = g^{-1}H_A(l)g. \quad (2.8)$$

Ahora introducimos una relación de equivalencia para transformar al conjunto  $L_o$  en un grupo. El razonamiento es identificar todas las curvas cerradas que conducen a la misma holonomía para todas las conexiones suaves, ya que las curvas con la misma holonomía tienen la misma información para construir las cantidades físicas de la teoría. Las clases de equivalencia bajo esta relación son lo que llamaremos **lazos** y los denotaremos con letras griegas.

*Definición 1*

Sea

$$H_A : L_o \rightarrow G \quad (2.9)$$

el mapeo holonomía de una conexión  $A$  definido sobre un haz  $P(M, G)$ . Dos curvas  $l, m \in L_o$  son equivalentes,  $l \sim m$ , si y sólo si

$$H_A(l) = H_A(m) \quad (2.10)$$

para cada haz  $P(M, G)$  y conexión suave  $A$ .

*Definición 2*

Comenzamos por definir los lazos que son equivalentes a la identidad. Una curva cerrada  $l$  es llamada un **árbol** si existe una homotopía de  $l$  a la curva nula en la cual la imagen de la homotopía está incluida en la imagen de  $l$ . Este tipo de curvas no “encierran área alguna” de  $M$ . Dos curvas cerradas  $l, m \in L_o$  son equivalentes  $l \sim m$  si y sólo si  $l \circ m^{-1}$  es un árbol.

*Definición 3*

Dadas dos curvas cerradas  $l$  y  $m$  y tres curvas abiertas  $p_1$ ,  $p_2$  y  $q$  tales que

$$l = p_1 \circ p_2 \quad (2.11)$$

$$m = p_1 \circ q \circ q^{-1} \circ p_2 \quad (2.12)$$

entonces  $l \sim m$ .

Con cualquiera de estas definiciones uno puede probar que la composición entre lazos está bien definida y es otra vez un lazo, i.e., si  $\alpha \equiv [l]$  y  $\beta \equiv [m]$  entonces  $\alpha \circ \beta = [l \circ m]$  donde  $[\ ]$  denota las clases de equivalencia.

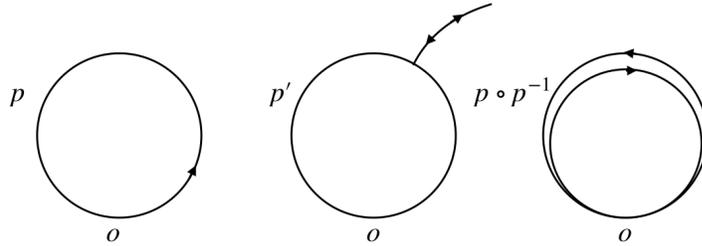


Figura 2.1: Las curvas  $p$  y  $p'$  difieren por un árbol. La composición de una curva con su inversa es un árbol.

Nótese que con la relación de equivalencia definida, tiene sentido definir el inverso de un lazo. Ya que la composición de una curva con su opuesta lleva a un árbol (ver figura 2.1), es natural, dado un lazo  $\alpha$ , definir su inversa  $\alpha^{-1}$  por  $\alpha \circ \alpha^{-1} = \iota$  donde  $\iota$  es el conjunto de curvas cerradas equivalentes a la curva nula (árboles).

Denotaremos al conjunto de lazos con punto base  $o$  por  $\mathcal{L}_o$ . Bajo la ley de composición dada por  $\circ$  este conjunto es un grupo *no* Abelian, el cual se llama el **grupo de lazos**. Los grupos correspondientes a diferentes puntos base son isomorfos.

Cualquier homomorfismo,

$$\mathcal{L}_o \rightarrow G, \quad (2.13)$$

donde  $G$  es un grupo de Lie, define una *holonomía* asociada con una conexión.

Imponiendo condiciones de suavidad sobre el homomorfismo, se puede asegurar que un haz fibrado principal diferenciable y una conexión están definidos de tal forma que  $H$  sea la holonomía de esta conexión. Bajo un homomorfismo, la composición del

grupo de lazos es mapeada sobreyectivamente a la composición del grupo de Lie  $G$ ,

$$H(\alpha \circ \beta) = H(\alpha)H(\beta), \quad (2.14)$$

y las inversas son mapeadas cada una a otra,

$$H(\alpha^{-1}) = (H(\alpha))^{-1}. \quad (2.15)$$

En lo que sigue usaremos funciones de lazos, tales como la holonomía. Obviamente, no cualquier función de las curvas es una función de lazos. Un ejemplo inmediato de esto es la longitud de una curva, la cual toma valores diferentes para las diferentes curvas que forman la clase de equivalencia que define un lazo.

Introducimos una noción de continuidad en el espacio de lazos. Definimos a dos lazos  $\alpha$  y  $\beta$  como **cercanos**, en el sentido de que  $\alpha$  en una vecindad  $U_\epsilon(\beta)$ , si existen al menos dos curvas parametrizadas  $a(s) \in \alpha$  y  $b(s) \in \beta$  tales que  $a(s) \in U_\epsilon(b(s))$  con la topología usual de curvas en la variedad. Con esta topología, el grupo de lazos es un grupo topológico.

Introducimos una relación de equivalencia para curvas abiertas. Llamaremos a las clases de equivalencia de curvas abiertas “**trayectorias**”. Dadas dos curvas abiertas  $p_o^x$  y  $q_o^x$  del punto base al punto  $x$  en la variedad, decimos que estas curvas son **equivalentes** si y sólo si  $p_o^x q^{-1x}_o$  es un árbol.

De ahora en adelante usaremos indistintamente las notaciones  $q^{-1x}_o$  y  $q_x^o$  para designar al mismo objeto, la curva  $q$  que va de  $x$  a  $o$ .

Denotaremos a las trayectorias con letras griegas como lo hacemos para lazos, pero indicando los puntos de origen y final, como en  $\alpha_o^x$ . Dadas dos diferentes trayectorias que inician y terminan en los mismos puntos, es inmediato ver que la composición de una con la opuesta de la otra es un lazo. De manera análoga uno puede componer lazos con trayectorias para producir nuevas trayectorias con los mismos puntos finales. Además, la noción de topología introducida para lazos puede generalizarse inmediatamente para trayectorias. Sin embargo, las trayectorias no pueden estructurarse en un grupo, ya que no es posible componer, en general, dos trayectorias para formar una nueva trayectoria (para hacerlo, el final de una de ellas debe coincidir con el inicio de la otra).

## 2.2. GENERADORES INFITESIMALES DEL GRUPO DE LAZOS

Consideraremos una representación del grupo de lazos dada por operadores que actúan sobre funciones continuas bajo la topología presentada en la sección anterior. Introduciremos un conjunto de operadores diferenciales que actúan sobre estas funciones que están relacionados con los generadores infinitesimales del grupo de lazos, en términos de los cuales pueden construirse los elementos del grupo. Estos operadores están relacionados a cantidades físicas de teorías de norma.

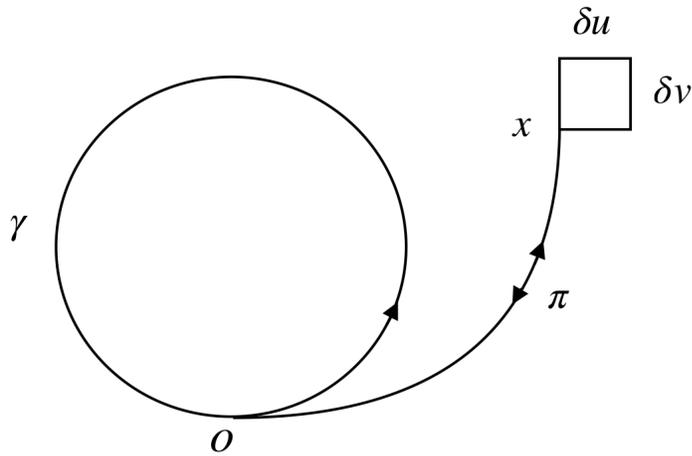


Figura 2.2: El lazo infinitesimal que define la derivada de lazo

### 2.2.1. LA DERIVADA DE LAZO

Sea  $\Psi(\gamma)$  una función de valores complejos, continua, con  $\gamma \in \mathcal{L}_o$ ; considere su variación cuando el lazo  $\gamma$  cambia por la adición de un lazo infinitesimal  $\delta\gamma$  con punto base en un punto  $x$  conectado por una trayectoria  $\pi_x^o$  al punto base de  $\gamma$  (ver figura 2.2), i.e., queremos evaluar el cambio en la función cuando su argumento cambia de  $\gamma$  a  $\pi_x^o \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma$ . Para esto, consideremos una familia con dos parámetros de lazos infinitesimales  $\delta\gamma$  que contienen, en una carta coordenada particular, la curva obtenida al atravesar el vector  $u^a$  de  $x^a$  a  $x^a + \epsilon_1 u^a$ , el vector  $v^a$  de  $x^a + \epsilon_1 u^a$  a  $x^a + \epsilon_1 u^a + \epsilon_2 v^a$ , el vector  $-u^a$  de  $x^a + \epsilon_1 u^a + \epsilon_2 v^a$  a  $x^a + \epsilon_2 v^a$  y el vector  $-v^a$  de  $x^a + \epsilon_2 v^a$  regresando a  $x^a$  como se muestra en la figura 2.2. Denotamos este tipo de curvas con la notación  $\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v}$ , donde  $\delta \bar{u} \equiv (\delta u)^{-1}$ .

Para  $\pi$  y  $\gamma$  dados, una función diferenciable de lazos depende sólo de los vectores infinitesimales  $\epsilon_1 u^a$  y  $\epsilon_2 v^a$ . Supondremos que esta tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \Psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) &= \Psi(\gamma) + \epsilon_1 u^a Q_a(\pi_o^x) \Psi(\gamma) + \epsilon_2 v^a P_a(\pi_o^x) \Psi(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b + v^a u^b) S_{ab}(\pi_o^x) \Psi(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b - v^a u^b) \Delta_{ab}(\pi_o^x) \Psi(\gamma), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $Q, P, S, \Delta$  son operadores diferenciales sobre el espacio de las funciones  $\Psi(\gamma)$ . Si  $\epsilon_1$  o  $\epsilon_2$  se anulan o si  $u$  es colineal con  $v$  entonces  $\delta\gamma$  es un árbol y todos los términos del lado derecho, excepto el primero, se anulan. Esto significa que  $Q = P = S = 0$ . Ya que la combinación antisimétrica  $(u^a v^b - v^a u^b)$  se anula,  $\Delta$  no es necesariamente cero. Esto es, una función es lazo diferenciable si para toda trayectoria  $\pi_o^x$  y vectores  $u, v$ , el efecto de una deformación infinitesimal está contenida completamente en el operador antisimétrico que depende de la trayectoria  $\Delta_{ab}(\pi_o^x)$ ,

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = \left( 1 + \frac{1}{2} \sigma^{ab}(x) \Delta_{ab}(\pi_o^x) \right) \Psi(\gamma), \quad (2.17)$$

donde  $\sigma^{ab}(x) = 2\epsilon_1 \epsilon_2 (u^{[a} v^{b]})$  es el elemento de área del lazo infinitesimal  $\delta\gamma$ . Llamaremos a este operador la **derivada de lazo**.

Si uno considera funciones de curvas en lugar de lazos, los términos  $Q, P, S$  estarán presentes en general (como en la función dada por la longitud de la curva).

Por otro lado, no toda función del espacio de lazos es diferenciable. Un ejemplo son los nudos invariantes –funcionales de lazos invariantes bajo deformaciones suaves de los lazos.

La idea de la derivada de lazo fue introducida originalmente por Mandelstam. El resultado de la aplicación de la derivada de lazo a una función de un lazo es también una función de un lazo.

Podemos extender la definición de la derivada de lazo para trayectorias abiertas como

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma_o^y) = \left( 1 + \frac{1}{2} \sigma^{ab}(x) \Delta_{ab}(\pi_o^x) \right) \Psi(\gamma_o^y), \quad (2.18)$$

siempre que se tenga un punto base, el cual proporciona un punto fijo para cualquier lazo sobre el cual pegar la trayectoria abierta.

### 2.2.2. PROPIEDADES DE LA DERIVADA DE LAZO

A continuación escribimos las propiedades más relevantes de la derivada de lazo. Las pruebas de estas pueden verse en el libro de Gambini y Pullin [11].

•**Carácter tensorial.** Por su definición, (2.17), la derivada de lazo debe comportarse como un tensor. Note que la derivada de lazo está contraída con el tensor  $\sigma^{ab}$ . Por tanto por la ley del cociente, debe ser un tensor. La derivada de lazo esta asociada a la superficie definida por  $du^a$  y  $dv^b$  y no con los vectores infinitesimales individualmente, siendo invariante bajo transformaciones que preserven el elemento de área.

•**Relaciones de conmutación.** Las derivadas de lazo son operadores no conmutativos. Esto está asociado naturalmente con el hecho de que corresponden a los generadores de un grupo no Abelian. Sus relaciones de conmutación pueden calcularse directamente a partir de las propiedades geométricas del grupo de lazos. Resulta que, para trayectorias abiertas uno tiene

$$[\Delta_{ab}(\pi_o^x), \Delta_{cd}(\chi_o^y)] = \Delta_{cd}(\chi_o^y)[\Delta_{ab}(\pi_o^x)], \quad (2.19)$$

de lo cual es inmediato mostrar que

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x)[\Delta_{cd}(\chi_o^y)] = -\Delta_{cd}(\chi_o^y)[\Delta_{ab}(\pi_o^x)]. \quad (2.20)$$

Estas expresiones resaltan la dependencia en la trayectoria de la derivada de lazo, en el sentido de que expresan la variación de la derivada cuando se varía la trayectoria. Estas expresiones pueden interpretarse como un conmutador de grupo si se ve a la derivada de lazo como un generador del grupo de lazos.

Estas relaciones de conmutación pueden verse en una forma diferente considerando su expresión integral. Para esto, introducimos un operador dependiente de lazos  $U(\alpha)$  sobre el espacio de funciones de lazos, el cual tiene el efecto de introducir una deformación finita en el argumento de la función,

$$U(\alpha)\Psi(\gamma) \equiv \Psi(\alpha \circ \gamma). \quad (2.21)$$

El operador tiene una inversa definida naturalmente

$$U(\alpha)^{-1} = U(\alpha^{-1}), \quad (2.22)$$

y tiene una ley de composición natural,

$$U(\alpha)U(\beta)\Psi(\gamma) = U(\alpha \circ \beta)\Psi(\gamma). \quad (2.23)$$

Ahora consideramos la acción de la derivada de lazo evaluada a lo largo de una trayectoria deformada sobre una función de lazos, y aplicando la definición de la derivada de lazo (2.17) obtenemos

$$\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\Delta_{ab}(\alpha \circ \pi_o^x)\right)\Psi(\gamma) = \Psi(\alpha \circ \pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \alpha^{-1} \circ \gamma), \quad (2.24)$$

donde  $\delta\gamma$  es el lazo infinitesimal asociado con el elemento de área  $\sigma^{ab}$ . Entonces usamos la definición del operador  $U$  (2.21) y obtenemos

$$\Psi(\alpha \circ \pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \alpha^{-1} \circ \gamma) = U(\alpha) \left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x)\right) U(\alpha)^{-1}\Psi(\gamma), \quad (2.25)$$

de lo cual tenemos la identidad,

$$\Delta_{ab}(\alpha \circ \pi_o^x) = U(\alpha)\Delta_{ab}(\pi_o^x)U(\alpha)^{-1}, \quad (2.26)$$

la cual expresa la propiedad de transformación de la derivada de lazo bajo deformaciones finitas de la trayectoria.

•**Identidades de Bianchi.** Puede obtenerse un segundo conjunto de relaciones a partir de las propiedades geométricas del grupo de lazos. Estas relaciones son un reflejo de las identidades de Bianchi usuales de las teorías de Yang-Mills. Para esto necesitamos introducir un nuevo operador diferencial, al cual llamaremos la derivada covariante de Mandelstam, que actúa sobre funciones de trayectorias abiertas.

Dada una función de una trayectoria abierta  $\Psi(\pi_o^x)$ , una carta de coordenadas local en el punto  $x$  y un vector en esa carta  $u^a$ , definimos la **derivada de Mandelstam** considerando el cambio en la función cuando la trayectoria se extiende de  $x$  a  $x + \epsilon u$  por la trayectoria infinitesimal  $\delta u$  como

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta u) = (1 + \epsilon u^a D_a)\Psi(\pi_o^x). \quad (2.27)$$

Denotamos a la nueva trayectoria como  $\pi_o^{x+\epsilon u}$ . Si uno lleva a cabo una transformación de coordenadas, notando que  $\epsilon u^a$  es un vector y aplicando la ley del cociente, es inmediato ver que  $D_a$  transforma como una 1-forma.

Con esta última definición puede probarse que se satisfacen las identidades de Bianchi:

$$D_a \Delta_{bc}(\pi_o^x) + D_b \Delta_{ca}(\pi_o^x) + D_c \Delta_{ab}(\pi_o^x) = 0. \quad (2.28)$$

•**La identidad de Ricci.** Considere la acción de cuatro derivadas covariantes de Mandelstam a lo largo de los vectores  $u, v$  sobre una función de una trayectoria abierta  $\Psi(\pi_o^x)$ . Manteniendo los términos de primer orden en  $\epsilon_1 \epsilon_2$  en el lado derecho de la siguiente expresión obtenemos

$$\begin{aligned} & (1 + \epsilon_1 u^a D_a)(1 + \epsilon_2 v^b D_b)(1 - \epsilon_1 u^c D_c)(1 - \epsilon_2 v^d D_d)\Psi(\pi_o^x) = \\ & (1 + \epsilon_1 \epsilon_2 u^a v^b [D_a, D_b])\Psi(\pi_o^x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

La acción de cuatro derivadas covariantes es equivalente a anexar un lazo infinitesimal al final de la trayectoria  $\pi_o^x$  y por lo tanto puede escribirse en términos de la derivada de lazo,

$$[D_a, D_b]\Psi(\pi_o^x) = \Delta_{ab}(\pi_o^x)\Psi(\pi_o^x). \quad (2.30)$$

La cual es el análogo en lazos de la expresión usual del conmutador de derivadas covariantes en términos de la curvatura.

•**La derivada de lazo como un generador del grupo de lazos.** Podemos mostrar, por superposición de derivadas de lazo, que puede generarse cualquier lazo finito homotópico a la identidad. Sea  $\gamma(s)$  una curva parametrizada perteneciente a la clase de equivalencia definida por el lazo  $\gamma$  con  $s \in [0, 1]$ . Consideremos una familia de lazos parametrizados por un solo parámetro, tal que  $\eta(s, 0)$  está en la clase de equivalencia del lazo identidad y  $\eta(s, 1) = \gamma(s)$ . Consideremos las curvas  $\eta(s, 1)$  y  $\eta(s, 1-\epsilon)$ . Estas curvas difieren por un elemento infinitesimal de área. La idea principal de la prueba es cubrir el área infinitesimal que separa estas dos curvas con un “tablero de ajedrez” de curvas cerradas infinitesimales tal que podamos definir una derivada de

lazo en cada una de ellas. El resultado final es

$$\Psi(\eta(1)) = T \exp \left( \int_0^1 dt \oint_0^1 ds \eta^a(t, s) \eta^b(t, s) \Delta_{ab}(\eta(t)_o^s) \Psi(\eta(0)) \right), \quad (2.31)$$

donde la integral exterior está ordenada en  $t$  (T-ordenada). Este resultado es la versión en lazos del teorema de Stokes no Abelian de teorías de norma y muestra que la derivada de lazo es un generador del espacio de lazos, i.e., nos permite generar cualquier lazo finito homotópico a la identidad.

Nótese que la expresión para el elemento finito del grupo implica una superposición de un número infinito de generadores asociado con diferentes trayectorias. Esta no es la situación usual que uno encuentra en grupos de Lie, donde es suficiente exponenciar un generador para obtener cualquier elemento del grupo. Esta es otra indicación de que el grupo de lazos se caracteriza por *no* ser un grupo de Lie.

Identificar a la derivada de lazo como un generador del grupo de lazos nos permite reescribir las relaciones de conmutación de las derivadas de lazo. Con la definición de la derivada de lazo, la ecuación (2.19) puede ponerse como

$$[\Delta_{ab}(\pi_o^x), \Delta_{cd}(\chi_o^y)] = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma^{ab}} (\Delta_{cd}(\delta\eta_1 \circ \chi_o^y) - \Delta_{cd}(\chi_o^y)), \quad (2.32)$$

la cual es la expresión usual del conmutador en términos de una combinación lineal de elementos del álgebra. Así, el grupo de lazos tiene relaciones de conmutación similares a las de un grupo de Lie.

### 2.2.3. DERIVADA DE CONEXIÓN

Ahora introducimos un operador diferencial con propiedades similares a las de la conexión o potencial vectorial de una teoría de norma. Consideremos una cubierta de la variedad con parches coordenados que se traslapan. Sujetamos a cada parche coordenado  $\mathcal{P}^i$  una trayectoria  $\pi_o^{y_0^i}$  que va del origen del lazo a un punto  $y_0^i$  en  $\mathcal{P}^i$ . Introducimos una función continua con soporte sobre los puntos en cada carta  $\mathcal{P}^i$  tal que asocia a cada punto  $x$  sobre el parche una trayectoria  $\pi_{y_0^i}^x$ . Dado un vector  $u$  en  $x$ , la **derivada de conexión** de una función continua de un lazo  $\Psi(\gamma)$  será obtenida al considerar la deformación del lazo dada por la trayectoria  $\pi_o^{y_0^i} \circ \pi_{y_0^i}^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^{y_0^i} \circ \pi_{y_0^i}^o$ . La trayectoria  $\delta u$  va de  $x$  a  $x + \epsilon u$ . Diremos que la derivada de conexión  $\delta_a$  existe y está bien definida si la función que depende del lazo deformado admite una expansión

en términos de  $\epsilon u^a$  dada por

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \gamma) = (1 + \epsilon u^a \delta_a(x)) \Psi(\gamma), \quad (2.33)$$

donde hemos escrito  $\pi_o^x$  para denotar la trayectoria  $\pi_o^{y_0^i} \circ \pi_{y_0^i}^x$  y similarmente para su inversa.

Podemos probar también que se cumple la siguiente relación

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x) = \partial_a \delta_b(x) - \partial_b \delta_a(x) + [\delta_a(x), \delta_b(x)]. \quad (2.34)$$

La idea de introducir la derivada de conexión fue para proporcionarnos en el lenguaje de lazos una noción de la conexión o potencial vectorial similar a la de las teorías de norma. Sin embargo, la conexión en una teoría de norma es dependiente de la norma. ¿Cómo se manifiesta esta dependencia misma en el lenguaje de lazos?. Lo hace a través de la elección de la prescripción de la trayectoria usada para calcular la derivada de conexión.

El cambio en la derivada de conexión debido a un cambio en la prescripción de la trayectoria está dado por

$$\delta_a^{(x)}(x) = U(x) \delta_a^{(x)}(x) U(x)^{-1} + U(x) \partial_a U(x)^{-1}. \quad (2.35)$$

y vemos que es totalmente análoga a la ley de transformación para una conexión de norma bajo cambios de norma.

La relación usual entre conexiones y holonomías en una carta local en una teoría de norma también puede escribirse en este lenguaje. Esta relación es sólo una expresión del hecho de que los generadores infinitesimales asociados con conexiones nos permiten construir lazos finitos. Podemos escribir la siguiente exponencial de trayectoria ordenada

$$U(\gamma) = \text{P exp} \left( \int_{\gamma} dy^a \delta_a(y) \right). \quad (2.36)$$

Esta es la expresión familiar para teorías de norma, las cuales conducen a la holonomía en términos de la exponencial de trayectoria ordenada de una conexión.

## 2.3. EL GRUPO ABELIANO DE LAZOS

Aunque se puede formular la teoría de Maxwell en términos de el grupo completo de lazos, resulta que un subgrupo de este es todo lo que necesitamos debido a la naturaleza Abelianas de la teoría. Empecemos considerando los elementos de un grupo de la siguiente naturaleza:

$$\kappa = \gamma \circ \eta \circ \gamma^{-1} \circ \eta^{-1}. \quad (2.37)$$

Genéricamente,  $\gamma$  y  $\eta$  pueden ser compuestos de un número arbitrario de lazos  $\gamma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_n$ ,  $\eta = \eta_1 \circ \dots \circ \eta_m$ . Este tipo de lazos usualmente son llamados conmutadores. Es fácil checar que el conjunto de todos estos lazos y sus productos forman un subgrupo del grupo de lazos. Lo denotaremos por  $\mathcal{L}_{comm}$ . Podemos ver inmediatamente que este forma un subgrupo normal, i.e., dado cualquier elemento  $\kappa$  de  $\mathcal{L}_{comm}$ ,

$$\gamma \circ \kappa \circ \gamma^{-1} \in \mathcal{L}_{comm} \quad \forall \gamma \in \mathcal{L}. \quad (2.38)$$

Cada vez que uno tiene un subgrupo normal, se puede definir el grupo cociente. Para hacer esto introducimos una relación de equivalencia,

$$\gamma \sim \eta \Leftrightarrow \gamma \circ \eta^{-1} = \kappa \in \mathcal{L}_{comm}. \quad (2.39)$$

Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva. Denotamos el grupo cociente como  $\mathcal{L}_{Abel} = \mathcal{L}/\mathcal{L}_{comm}$ . Sus elementos son las clases de equivalencia determinados por la relación (2.39). La interpretación intuitiva de la relación de equivalencia definida es que hemos identificado los conmutadores en el grupo de lazos con la identidad. Por lo tanto, si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  pertenecen a  $\mathcal{L}_{Abel}$ ,

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma_2 \circ \gamma_1, \quad (2.40)$$

y  $\mathcal{L}_{Abel}$  es un grupo Abelianas. Como hemos visto, las teorías de norma son simplemente representaciones del grupo de lazos. Consideremos ahora representaciones del subgrupo Abelianas que se ha construido. Por lo tanto necesitamos matrices  $H(\gamma)$ , tal que

$$H(\gamma_1)H(\gamma_2) = H(\gamma_1 \circ \gamma_2) = H(\gamma_2 \circ \gamma_1) = H(\gamma_2)H(\gamma_1) \quad (2.41)$$

para cualquier par de lazos  $\gamma_1, \gamma_2$ . Si se desean considerar las representaciones unitarias del grupo de lazos, la ecuación (2.41) solo puede mantenerse si  $H$  en un número

complejo unimodular, i.e., un elemento de  $U(1)$ . Como se ha visto, cualquier representación (suficientemente regular) puede ser escrita localmente como

$$H_A(\gamma) = \exp \left( i \oint_{\gamma} dy^a A_a(y) \right), \quad (2.42)$$

donde  $A_a(y)$  es solo un número real para el caso Abelian que estamos considerando y por lo tanto

$$H_A(\gamma) = W_A(\gamma). \quad (2.43)$$

$W_A$  es el lazo de Wilson y depende del lazo  $\gamma$  solamente a través de la circulación de  $A_a$ . Esto puede escribirse usando la más simple de las coordenadas de lazo, la coordenada de orden uno,

$$\oint_{\gamma} dy^a A_a(y) = \int d^3z A_a(z) X^{az}(\gamma). \quad (2.44)$$

Una propiedad notable es que en esta representación las derivadas de lazo no son mas dependientes de la trayectoria, solo dependientes del punto,

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x) \rightarrow \Delta_{ab}(x) \quad \forall \pi_o^x. \quad (2.45)$$

Como consecuencia, las derivadas de lazo en el caso Abelian conmutan,

$$[\Delta_{ab}(x), \Delta_{cd}(y)] = 0, \quad (2.46)$$

y la identidad de Bianchi se puede expresar en términos de derivadas ordinarias,

$$\partial_{[a} \Delta_{bc]}(x) = 0. \quad (2.47)$$

## 2.4. REPRESENTACIÓN DEL GRUPO DE LAZOS

Las relaciones entre los generadores del grupo de lazos son independientes de cualquier representación particular. Ahora estudiaremos su forma en el contexto de una representación particular en términos de un grupo de norma dado. A partir de ésta surge la estructura cinemática de las teorías de norma.

Las teorías de norma surgen como representaciones (homomorfismos  $\mathcal{H}$ ) del grupo de lazos sobre algún grupo de norma  $G$ ,

$$\mathcal{H} : \mathcal{L}_0 \rightarrow G, \quad (2.48)$$

i.e.,

$$\gamma \rightarrow H(\gamma), \quad (2.49)$$

de tal manera que  $H(\gamma_1)H(\gamma_2) = H(\gamma_1 \circ \gamma_2)$ .

Suponemos que estamos considerando un grupo de Lie específico, por ejemplo  $SU(N)$ , con  $N^2 - 1$  generadores  $X^i$  tal que  $\text{Tr}X^i = 0$  y

$$[X^i, X^j] = C_k^{ij} X^k, \quad (2.50)$$

donde  $C_k^{ij}$  son las constantes de estructura del grupo en cuestión.

Calculemos la acción de la derivada de conexión en esta representación. Usamos las mismas prescripciones que en la sección previa

$$(1 + \epsilon u^a \delta_a(x))H(\gamma) = H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \gamma) = H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o)H(\gamma). \quad (2.51)$$

Ya que el lazo  $\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o$  es cercano al lazo identidad (con la topología del espacio de lazos) y ya que  $H$  es una representación continua diferenciable,

$$H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o) = 1 + i\epsilon u^a A_a(x), \quad (2.52)$$

donde  $A_a(x)$  es un elemento del álgebra del grupo, en nuestro ejemplo de  $SU(N)$ . Esto es  $A_a(x) = A_a^i X^i$ . Por tanto, vemos que mediante la acción de la derivada de conexión,

$$\delta_a(x)H(\gamma) = iA_a(x)H(\gamma). \quad (2.53)$$

Siguiendo pasos similares uno obtiene la acción de la derivada de lazo,

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x)H(\gamma) = iF_{ab}(x)H(\gamma), \quad (2.54)$$

donde  $F_{ab}$  es un campo tensorial antisimétrico con valores en el álgebra (tensor de Faraday).

Recuerde que  $\pi_o^x$  sólo se fija por la prescripción. Cambiar la prescripción para  $\pi_o^x$  es la manera de cambiar la norma. Suponga que cambiamos la prescripción por

$\pi_o^x \rightarrow \pi_o'^x \circ \pi_x^o \circ \pi_o^x$ . Entonces usamos simplemente la ecuación (2.26) que en términos del campo se lee

$$F'_{ab} = H(x)F_{ab}(x)H(x)^{-1}, \quad (2.55)$$

donde  $H(x)$  es una abreviatura para  $H(\pi_o'^x \circ \pi_x^o)$ .

A partir de la ecuación (2.34) obtenemos inmediatamente la relación usual que define la curvatura en términos del potencial,

$$F_{ab}(x) = \partial_a A_b(x) - \partial_b A_a(x) + i[A_a, A_b]. \quad (2.56)$$

Las transformaciones de norma en términos de la conexión son, a partir de la ecuación (2.35),

$$A'_a(x) = H(x)A_a(x)H(x)^{-1} - iH(x)\partial_a H(x)^{-1}. \quad (2.57)$$

Hacemos actuar el operador de deformación  $U(\eta)$  introducido en (2.21) sobre la representación  $H(\gamma)$ ,

$$U(\eta)H(\gamma) = H(\eta \circ \gamma) = H(\eta)H(\gamma). \quad (2.58)$$

Ahora, aplicando la fórmula (2.36),

$$U(\eta)H(\gamma) = \text{P exp} \left( \oint_{\eta} dy^a \delta_a(y) \right) H(\gamma), \quad (2.59)$$

y sustituyendo la ecuación (2.53) y comparando términos obtenemos

$$H(\eta) = \text{P exp} \left( i \oint_{\eta} dy^a A_a(y) \right), \quad (2.60)$$

lo cual muestra que la representación que estamos considerando está dada en términos de la expresión usual para la holonomía de la conexión  $A_a$ .

Hasta ahora, las trayectorias abiertas no han jugado rol físico relevante. Ahora mostramos que las trayectorias abiertas están relacionadas naturalmente a la inclusión de campos materiales acoplados a teorías de norma. Consideramos campos de materia que transforman bajo la representación fundamental de los grupos de norma considerados en nuestro ejemplo,  $SU(N)$ .

Describiremos el campo de materia en el punto  $x$  a través de un objeto que depende de la trayectoria  $\Psi(\pi_o^x)$ . La extensión natural de la representación introducida al inicio de esta sección al caso de trayectorias abiertas es considerar la composición de una

trayectoria abierta y un lazo, definida por

$$\Psi(\gamma \circ \pi_o^x) \equiv H(\gamma)\Psi(\pi_o^x). \quad (2.61)$$

Como en otros casos, el rol de la trayectoria elegida será fijar una elección de norma. Una descripción local en una norma fija se obtiene fijando una familia de trayectorias, cada una de las cuales está asociada con cada punto en la variedad. Las funciones  $\Psi$  ahora se convertirán en funciones de puntos etiquetadas por la prescripción fijada  $\pi$  usada para determinar las trayectorias  $\Psi^{(\pi)}(x)$ . La prescripción está dada por una función continua de los puntos de la variedad en las trayectorias  $f(x) = \pi_o^x$ . Nótese que si cambiamos la prescripción para la trayectoria  $\pi_o^x \rightarrow \pi_o^{\prime x} \circ \pi_x^o \circ \pi_o^x$  obtenemos

$$\Psi^{(\pi')}(x) = H(\pi_o^{\prime x} \circ \pi_x^o)\Psi^{(\pi)}(x). \quad (2.62)$$

La derivada de Mandelstam  $D_a$  se comporta como la derivada covariante usual de una teoría de norma. Considere su acción sobre una función de una trayectoria abierta,

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon u^a D_a)\Psi(\pi_o^x) &= \Psi(\pi_o^x \circ \delta u) = \Psi(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \pi_o^{x+\epsilon u}) \\ &= (1 + \epsilon u^a \delta_a(x))(1 + \epsilon u^b \partial_b)\Psi(\pi_o^x), \end{aligned} \quad (2.63)$$

expandiendo en  $\epsilon$  y manteniendo términos de primer orden, obtenemos

$$D_a \Psi(\pi_o^x) = \partial_a \Psi^{(\pi)}(x) + \delta_a(x)\Psi(\pi_o^x). \quad (2.64)$$

Usando la relación entre la función de una trayectoria deformada y la holonomía (2.61), obtenemos

$$D_a \Psi(\pi_o^x) = \partial_a \Psi^{(\pi)}(x) + iA_a(x)\Psi^{(\pi)}(x). \quad (2.65)$$

La forma usual de la identidad de Ricci,

$$[D_a, D_b] = iF_{ab}, \quad (2.66)$$

puede obtenerse directamente de la expresión de arriba o considerando la representación de la ecuación (2.30).

## 2.5. REPRESENTACIÓN DE LAZOS DE TEORÍAS DE NORMA

### 2.5.1. LAZOS DE WILSON

Las cantidades observables en teorías de norma necesitan ser invariantes de norma. Las funciones de onda en una representación cuántica también necesitan ser invariantes de norma. Por consiguiente será útil introducir un conjunto de cantidades que involucren a la conexión  $A_a$  en términos de la cual cualquier cantidad invariante pueda ser escrita. Estos objetos son llamados lazos de Wilson, son invariantes de norma bajo transformaciones de norma, tanto pequeñas como grandes y se construyen tomando trazas de la holonomía  $H_A(\gamma)$ ,

$$W_A(\gamma) = \text{Tr} [H_A(\gamma)] \quad (2.67)$$

En el caso de electromagnetismo en que  $A_a$  es una 1-forma que toma valores en el álgebra de Lie de  $U(1)$ , los lazos de Wilson son simplemente

$$W_A(\gamma) = H_A(\gamma) = \exp\left(i \oint_{\gamma} dy^a A_a\right) \quad (2.68)$$

Los lazos de Wilson tienen dos propiedades fundamentales, las identidades de Mandelstam y la propiedad de reconstrucción. Las identidades de Mandelstam son un conjunto de relaciones entre lazos de Wilson las cuales reflejan la estructura de un particular grupo de norma considerado. La propiedad de reconstrucción nos dice que dadas las funciones de lazo de Wilson evaluadas para todos los lazos posibles, podemos reconstruir toda la información invariante de norma presente en la conexión de norma. Ambas propiedades juntas implicarán que los lazos de Wilson constituyen una base sobrecompleta de soluciones de la constricción de Gauss.

### 2.5.2. REPRESENTACIÓN DE LAZOS

Cualquier función invariante de norma puede expresarse como una combinación de productos de lazos de Wilson. De ese modo es natural tratar de construir una representación cuántica en términos de lazos. Existen dos formas de hacer esto, en la primera, se define una transformada entre la conexión y las representaciones de lazos. Este procedimiento nos permite convertir cualquier operador invariante de norma o

función de onda en su correspondiente objeto en la representación de lazos. El segundo procedimiento consiste en introducir un álgebra de cantidades parametrizadas por lazos y tomarla para aplicar el método de Dirac de cuantización. La representación cuántica resultante es la representación de lazo.

Consideremos una analogía con un sistema de dimensión finita para clarificar nuestras ideas. Supongamos que estamos cuantizando la partícula libre no relativista en una dimensión. Clásicamente, el sistema está definido en términos de las coordenadas canónicas  $x$  y  $p$ , con paréntesis de Poisson  $\{x, p\} = 1$ . Cuánticamente, tomamos como el espacio de funciones de onda a las funciones  $x$ ,  $\Psi(x)$ . Construiremos ahora una nueva representación para el sistema aplicando las ideas que usamos para construir la representación de lazo.

Empecemos considerando una transformada con una base de estados  $W_k(x) = \exp(ikx)$ , parametrizada con una variable continua  $k$ . Cualquier función de onda puede ser expresada en términos de esta base. Introducimos una  $k$ -representación con funciones de onda  $\Psi(k)$  dadas por la integral

$$\Psi(k) \equiv \int dx W_k^*(x) \Psi(x). \quad (2.69)$$

Esta ecuación es solo la transformada de Fourier. La base de estados es una base impropia en el sentido de que no es normalizable. Cualquier operador en la representación de posición  $\hat{O}_x$  con un orden específico en las variables canónicas y que actúa sobre las funciones  $\Psi(x)$  puede ser trasladado a la  $k$ -representación por

$$\hat{O}_k \Psi(k) \equiv \int dx W_k^*(x) \hat{O}_x \Psi(x) = \int dx (\hat{O}_x^\dagger W_k(x))^* \Psi(x). \quad (2.70)$$

Como ejemplo del uso de la transformada, consideremos la transformada de un conjunto de cantidades que usaremos en lo que sigue. Estas cantidades se definen como  $T^0 = \exp(ikx)$  y  $T^1 = p \exp(ikx)$ . Es inmediato ver que podemos expresar cualquier cantidad clásica en términos de las  $T$ s. Ellas satisfacen una álgebra no canónica,

$$\{T^0(k_1), T^0(k_2)\} = 0, \quad (2.71)$$

$$\{T^1(k_1), T^0(k_2)\} = -ik_2 T^0(k_1 + k_2), \quad (2.72)$$

$$\{T^1(k_1), T^1(k_2)\} = i(k_1 - k_2) T^1(k_1 + k_2). \quad (2.73)$$

Introducimos una representación cuántica del álgebra vía la transformada de Fourier

$$\hat{T}^0(k_1)\Psi(k) = \int dx \exp(-ikx)\exp(ik_1\hat{x})\Psi(x) = \Psi(k - k_1), \quad (2.74)$$

$$\hat{T}^1(k_2)\Psi(k) = -i \int dx \exp(-ikx) \frac{d}{dx} (\exp(ik_2\hat{x})\Psi(x)) = k\Psi(k - k_2) \quad (2.75)$$

y puede verse que el álgebra clásica no canónica de Poisson se reproduce por el álgebra del conmutador cuántico. Nótese que  $k_1$  y  $k_2$  son parámetros arbitrarios.

Es importante notar que la acción de estos operadores puede ser trasladada a la acción sobre el espacio de kets  $|k\rangle$ ,

$$\hat{T}^0(k_1)\Psi(k) = \langle k | T^0(k_1) | \Psi \rangle = \langle k - k_1 | \Psi \rangle, \quad (2.76)$$

así

$$\hat{T}^{0\dagger}(k_1)|k\rangle = |k - k_1\rangle = \exp(-ik_1\hat{x})|k\rangle. \quad (2.77)$$

De ese modo,

$$\hat{T}^0(k_1)|k\rangle = \exp(ik_1\hat{x})|k\rangle = |k + k_1\rangle, \quad (2.78)$$

y análogamente encontramos

$$\hat{T}^1(k_2)|k\rangle = \exp(ik_2\hat{x})\hat{p}|k\rangle = k|k + k_2\rangle. \quad (2.79)$$

Ahora consideremos una teoría de norma en tres dimensiones descrita por coordenadas canónicas  $A_a$  y  $E^a$  con los usuales paréntesis de Poisson. Cuánticamente, consideramos funciones de onda de la conexión,  $\Psi[A]$ . Una base (sobrecompleta) de estados está dado por los lazos de Wilson  $W_\gamma[A]$ . Otra vez, la base es parametrizada por un parámetro continuo, en este caso el lazo  $\gamma$ . La representación de lazo es definida en términos de la transformada,

$$\Psi(\gamma) \equiv \int dA W_A^*(\gamma) \Psi[A]. \quad (2.80)$$

Podemos transformar cualquier operador usando la transformada. Notemos una importante diferencia. En el caso de partículas libres escogemos una base de funciones  $\exp(ikx)$  mientras que en el caso de teoría de norma escogemos una base de soluciones

de la ley de Gauss  $W_A(\gamma)$ . Esto es que, tomando la representación de lazos solucionamos automáticamente de ley de Gauss. Notemos otra crucial diferencia: mientras que la transformada usada en la partícula libre es la bien conocida transformada de Fourier, la que usamos en teoría de norma es solamente formal. Muy poco es conocido acerca de la integración en espacios de conexiones y la teoría de medida en este caso no está bien desarrollada.

La introducción de la transformada de lazo puede ser pensada como la aplicación de un producto interno en la representación de conexiones entre la función de onda  $|\Psi\rangle$  y elementos de la base  $\langle\gamma|$ . De ese modo podemos escribir

$$\Psi(\gamma) = \langle\gamma|\Psi\rangle = \int DA \langle\gamma|A\rangle \langle A|\Psi\rangle. \quad (2.81)$$

con la introducción de la identidad  $1 = \int DA |A\rangle \langle A|$  lo cual significa que tener una correcta definición de la transformada es equivalente a tener un producto interno en la representación de conexiones.

Exploremos ahora la segunda aproximación, es decir, cuantizando un álgebra no canónica de cantidades. Consideremos otra vez una partícula libre y sobre el espacio fase clásico definimos las cantidades  $T^0(k) = \exp(ikx)$  y  $T^1(k) = p \exp(ikx)$  las cuales satisfacen el álgebra no canónica discutida arriba. Es evidente que podemos expresar cualquier cantidad de interés en términos de esta álgebra. Si tenemos una transformada bien definida, como en el caso de la transformada de Fourier, podemos proceder como antes y encontrar una comprensión cuántica de esta álgebra no canónica usando la transformada. Es de ese modo evidente que la cuantización que habíamos logrado coincide con la que fue introducida via la transformada. Si no se tiene una transformada a la mano podemos proponer un procedimiento cuántico del álgebra y verificar que se reproduce el álgebra clásica a nivel del conmutador cuántico.

En este caso particular se propone

$$\hat{T}^0(k_1)\Psi(k) = \Psi(k - k_1), \quad (2.82)$$

$$\hat{T}^1(k_2)\Psi(k) = k\Psi(k - k_2), \quad (2.83)$$

los cuales reproducen el álgebra no canónica a través de los conmutadores cuánticos. Otra vez, una construcción similar puede llevarse a cabo para teorías de norma. Consideremos el conjunto de cantidades clásicas

$$T^0(\gamma) = W(\gamma), \quad (2.84)$$

$$T^a(\gamma_x^x) = \text{Tr}(H_A(\gamma_o^x) \tilde{E}^a(x) H_A(\gamma_x^o)), \quad (2.85)$$

donde  $W(\gamma)$  es el lazo de Wilson y  $H_A(\gamma_o^x)$  es la holonomía a lo largo del lazo  $\gamma$  desde el punto base  $o$  hasta  $x$ . Estas cantidades satisfacen una álgebra no canónica de Poisson cerrada y puede ser promovida a un álgebra cuántica de operadores. El resultado sería la representación de lazos.

### 2.5.3. LA TRANSFORMADA DE LAZO

Como se mencionó antes, la transformada de lazo involucra una integral funcional en el espacio de conexiones módulo transformaciones de norma. Esto la hace considerablemente más complicada desde un punto de vista técnico que la transformada entre representaciones de mecánica cuántica ordinaria. Poco es conocido acerca de la teoría de integración en espacios no lineales tanto desde el punto de vista matemático como físico.

### 2.5.4. EL ÁLGEBRA NO CANÓNICA

Existe un modo alternativo para introducir una representación de lazo. El camino es tomar en cuenta el primer paso de la cuantización canónica y escoger un álgebra diferente para cuantizar. Introducimos las siguientes cantidades sobre el espacio fase clásico de cualquier teoría de norma,

$$T(\gamma) \equiv \text{Tr}(H_A(\gamma)) = W_A(\gamma), \quad (2.86)$$

$$T^a(\gamma_x^x) \equiv \text{Tr}(H_A(\gamma_o^x) \tilde{E}^a(x) H_A(\gamma_x^o)), \quad (2.87)$$

$$T^{ab}(\gamma_x^y \gamma_y^x) \equiv \text{Tr}(H_A(\gamma_o^x) \tilde{E}^a(x) H_A(\gamma_x^y) \tilde{E}^b(y) H_A(\gamma_y^o)), \quad (2.88)$$

donde  $\gamma_x^x \equiv \gamma_o^x \circ \gamma_x^o$  y genéricamente

$$\begin{aligned} T^{a_1, \dots, a_n}(\gamma_{x_1}^{x_2}, \dots, \gamma_{x_n}^{x_1}) &\equiv \text{Tr}(H_A(\gamma_o^{x_1}) \tilde{E}^{a_1}(x_1) H_A(\gamma_{x_1}^{x_2}) \\ &\dots H_A(\gamma_{x_{n-1}}^{x_n}) \tilde{E}^{a_n}(x_n) H_A(\gamma_{x_n}^o)) \end{aligned} \quad (2.89)$$

donde  $\gamma \equiv \gamma_{x_o}^{x_1} \circ \dots \circ \gamma_{x_n}^o$ . Nótese que si el lazo tiene múltiples puntos las cantidades dependen de que tipo de partición del lazo consideramos.

Vemos que las cantidades  $T(\gamma)$  son los lazos de Wilson y las otras  $T$ 's consisten en romper la holonomía en los puntos  $x_i$ , insertando un campo eléctrico y continuando la holonomía hasta regresar al punto base. Puede ser corroborado que estas cantidades son invariantes de norma, es decir, ellas conmutan con la ley de Gauss. Genéricamente hablaremos de las  $T$ 's con  $k$  campos eléctricos insertados como " $T^k$ ". Las  $T^k$ s se comportan como densidades multivector sobre los índices  $a_1, \dots, a_k$  en los puntos de la variedad  $x_1, \dots, x_k$ . Éstas fueron introducidas primero por Gambini y Trias [15].

Como argumentamos anteriormente, los lazos de Wilson contienen suficiente información para construir cualquier función invariante de las conexiones. Introduciendo  $T$ 's de orden más alto se espera puedan construir cualquier cantidad dependiente de los campos eléctricos, y de ese modo obtener un álgebra de cantidades clásicas la cual sea suficientemente general para expresar cualquier cantidad física de interés en términos de ellas.

### 2.5.5. FUNCIONES DE ONDA EN LA REPRESENTACIÓN DE LAZO

Las funciones de onda en la representación de lazo pueden considerarse como transformaciones de funciones de conexiones pesadas por productos de lazos de Wilson.

$$\Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int dA W_A^*(\gamma_1) \dots W_A^*(\gamma_n) \Psi[A]. \quad (2.90)$$

Una propiedad inmediata se sigue del hecho de que los lazos de Wilson aparecen en la transformada como un producto: las funciones de onda son simétricas bajo intercambios de argumentos,

$$\Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_n) = \Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n). \quad (2.91)$$

Las funciones de onda en la representación de lazos heredarán una serie de propiedades de los lazos de Wilson. Para empezar, las funciones de onda son funciones con dominio en el grupo de lazos  $\mathcal{L}_o$ . Ya que los lazos de Wilson son las trazas de las holonomías, estos son funciones de clases de conjugación del grupo de lazos; por ejemplo, para una función de un único lazo,

**2.5.**

## REPRESENTACIÓN DE LAZOS DE TEORÍAS DE NORMA

$$\Psi(\gamma) = \Psi(\eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}) \quad \forall \eta. \quad (2.92)$$

Para funciones de varios lazos una expresión similar se mantiene en cada entrada. Es inmediato de la expresión anterior que

$$\Psi(\gamma \circ \eta) = \Psi(\eta \circ \gamma). \quad (2.93)$$

## Capítulo 3

# CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

### 3.1. CUANTIZACIÓN DE FOCK

La cuantización de Fock surge considerando la representación numérica para cada oscilador armónico del Hamiltoniano (1.32). Ya que existe un número infinito continuo de osciladores, uno para cada  $\vec{k}$ , es conveniente considerar la cuantización en una región finita del espacio (“una caja”) de modo que se tenga un infinito numerable de modos  $\vec{k}_j$ . Entonces, la relación canónica de conmutación se expresa como

$$\{a_A(\vec{k}_i), a_B^*(\vec{k}_j)\} = -i\delta_{AB}\delta_{ij}. \quad (3.1)$$

El Hamiltoniano se vuelve

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} |\vec{k}_i| a_C^*(\vec{k}_i) a^C(\vec{k}_i). \quad (3.2)$$

Podemos introducir la representación de Fock directamente considerando la representación cuántica del álgebra (2.1) en un espacio de funciones de infinitos pares de variables enteras  $\Phi(\dots, n_{i,C}, \dots)$ . Cada variable representa el estado de cada oscilador armónico para un  $\vec{k}_i$  y una polarización dada. La representación del álgebra es como sigue:

$$\hat{a}_C^*(\vec{k}_j)\Phi(\dots, n_{i,D}, \dots) = \sqrt{n_{j,C}}\Phi(\dots, n_{j,D} - \delta_{CD}, \dots), \quad (3.3)$$

$$\hat{a}_C(\vec{k}_j)\Phi(\dots, n_{i,C}, \dots) = \sqrt{n_{j,C} + 1}\Phi(\dots, n_{j,D} + \delta_{CD}, \dots), \quad (3.4)$$

donde las funciones de onda se anulan si cualquiera de sus argumentos son números negativos.

Las relaciones de conmutación pueden ser inmediatamente derivadas:

$$\{\hat{a}_B(\vec{k}_i), \hat{a}_B^*(\vec{k}_j)\} = \delta_{AB}\delta_{ij}. \quad (3.5)$$

El siguiente paso en el programa de cuantización es introducir un producto interno. Esto puede hacerse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \Psi \rangle = & \sum_{n_{1,1}=1}^{\infty} \sum_{n_{1,2}=1}^{\infty} \dots \sum_{n_{j,1}=1}^{\infty} \sum_{n_{j,2}=1}^{\infty} \dots \Phi(n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots)^* \times \\ & \times \Psi(n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots). \end{aligned} \quad (3.6)$$

En términos de este producto interno los operadores  $\hat{a}_C^*(\vec{k}_i)$  y  $\hat{a}_C(\vec{k}_i)$  satisfacen las relaciones

$$\hat{a}_C^\dagger(\vec{k}_j) = \hat{a}_C^*(\vec{k}_j), \quad (3.7)$$

donde  $\dagger$  significa adjunto en el contexto de operadores. Podemos definir el operador Hermitiano  $\hat{N}(\vec{k}_j, C)$  por

$$\hat{N}(\vec{k}_j, C) = \hat{a}_C^\dagger(\vec{k}_j)\hat{a}_C(\vec{k}_j) \quad (3.8)$$

sin suma sobre  $C$ .

La acción explícita del operador  $\hat{N}(\vec{k}_j, A)$  está dada por

$$\hat{N}(\vec{k}_j, C)\Phi(n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{l,1}, n_{l,2}, \dots) = n_{j,A}\Phi(n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{l,1}, n_{l,2}, \dots). \quad (3.9)$$

Podemos notar inmediatamente la analogía con el oscilador armónico usual:  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son operadores de creación y aniquilación y  $\hat{N}$  es el operador número. Las relaciones de conmutación usuales son:

$$[\hat{N}(\vec{k}_i, C), \hat{a}_D^\dagger(\vec{k}_j)] = \delta_{i,j}\delta_{C,D}\hat{a}_D^\dagger(\vec{k}_j), \quad (3.10)$$

$$[\hat{N}(\vec{k}_i, C), \hat{a}_D(\vec{k}_j)] = -\delta_{i,j}\delta_{C,D}\hat{a}_D(\vec{k}_j). \quad (3.11)$$

Reescribiendo (1.30) en términos de los operadores de creación y aniquilación, obtenemos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} |\vec{k}_j| \left( \hat{a}_C^\dagger(\vec{k}_j)\hat{a}_C(\vec{k}_j) + \frac{1}{2} \right) \quad (3.12)$$

y debe tenerse en cuenta que esto corresponde a un ordenamiento de factores diferente al natural que habríamos deducido de la expresión clásica (1.34). Esta expresión diverge incluso para el caso que estamos trabajando (“una caja finita”) ya que estamos sumamos el punto cero de energía para cada uno de los infinitos modos excitados. Para hacer esta expresión finita es usual extraer los modos del estado cero a través del procedimiento llamado “ordenamiento normal” (que se denota encerrando la expresión entre dos puntos a cada lado)

$$: \hat{H} := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} |\vec{k}_j| (\hat{a}_C^\dagger(\vec{k}_j) \hat{a}^C(\vec{k}_j)). \quad (3.13)$$

Ya que  $\hat{H}$  conmuta con  $\hat{N}(\vec{k}_i, C)$ ,  $\forall i, C$ , ambos operadores pueden ser diagonalizados simultáneamente. En la representación que estamos considerando, esto puede llevarse a cabo sencillamente determinando el estado del vacío. Este es el estado con mínima energía y tal estado  $\Phi_0$  satisface

$$\hat{a}_C(\vec{K}_j) \Phi_0 = 0 \quad \forall k, C. \quad (3.14)$$

Una vez dado este estado, se puede obtener el espacio completo aplicando el operador de creación. Podemos interpretar esta construcción en términos de partículas: la aplicación del operador  $\hat{a}_C^\dagger(\vec{k}_i)$  crea un fotón con polarización  $C$  y momento tridimensional  $\vec{k}_i$ .

Para diagonalizar el Hamiltoniano y el operador número introducimos una base de estados etiquetados como  $|n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots\rangle$ , definidos por

$$|n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots\rangle = \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{C=1}^2 \frac{1}{\sqrt{n_{j,C}!}} (\hat{a}_C^\dagger(\vec{K}_j))^{n_{j,C}} |0, \dots, 0\rangle, \quad (3.15)$$

donde  $|0, \dots, 0\rangle$  es el vacío. Por lo tanto

$$\hat{H} |n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{C=1}^2 n_{j,C} |\vec{k}_i| |n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots\rangle \quad (3.16)$$

$$\hat{N}(\vec{k}_j, C) |n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots\rangle = n_{j,C} |n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots\rangle \quad (3.17)$$

y esto es por lo que usualmente es llamada la base de Fock.

Es útil introducir la base dual de Fock por medio de la relación,

$$\langle n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{j,1}, n_{j,2}, \dots | m_{1,1}, m_{1,2}, \dots, m_{j,1}, m_{j,2}, \dots \rangle = \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{C=1}^2 \delta_{m_{j,c}; n_{j,C}} \quad (3.18)$$

La base de Fock describe naturalmente estados con un número definido de fotones incoherentes de momento y energía definida. Estos estados tienen valores esperados que se desvanecen para los operadores de campo  $\hat{E}^c$  y  $\hat{A}_c$ . Por lo tanto, estos operadores presentan una descripción del electromagnetismo que no esta naturalmente asociada con la clásica. Para acercarnos al límite clásico es conveniente introducir una base de estados en términos de estos valores de expectación que no se anulan. Los elementos de esta base son llamados estados coherentes.

Los estados coherentes forman una base etiquetada por números complejos  $\alpha_{i,c}$  asociados a cada modo. Su definición es

$$\hat{a}_C(\vec{k}_j) |\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{j,1}, \alpha_{j,2}, \dots \rangle = \alpha_{j,C} |\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{j,1}, \alpha_{j,2}, \dots \rangle \quad (3.19)$$

y puede ser escrito en términos del vacío como

$$|\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{j,1}, \alpha_{j,2}, \dots \rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{C=1}^2 \exp(-\frac{1}{2} |\alpha_{i,C}|^2) \exp(-\frac{1}{2} \alpha_{i,C}^2 \hat{a}_C^\dagger(\vec{k}_i)) |0, \dots, 0\rangle. \quad (3.20)$$

Debe notarse que los estados que introdujimos no pertenecen estrictamente al espacio de Fock pero sí a su cerradura, debido a la suma infinita.

## 3.2. REPRESENTACIÓN EN CONEXIONES

La representación de conexiones es la cuantización mas natural ya que está basada en la cuantización del álgebra canónica de las conexiones y campos eléctricos, tomando una polarización basada en funcionales de onda de la conexión  $\Psi[A]$  y promoviendo la conexión y campo eléctrico a operadores cuánticos,

$$\hat{E}^a \Psi[A] = -i \frac{\delta}{\delta A_a} \Psi[A], \quad (3.21)$$

$$\hat{A}^a \Psi[A] = A_a \Psi[A], \quad (3.22)$$

Nótese que se están considerando funcionales de la conexión completa, por lo tanto respetaremos la ley de Gauss como una constricción cuántica,

$$\hat{\mathcal{G}}\Psi[A] = \partial_a \frac{\delta}{\delta A_a} \Psi[A] = 0 \quad (3.23)$$

lo cual nos dice que  $\Psi[A]$  tiene que ser una función invariante de norma de  $A$ . Esto es diferente de lo que se hizo en la sección anterior donde se resolvieron las constricciones a un nivel clásico.

Podemos escribir ahora formalmente el Hamiltoniano cuántico,

$$\mathcal{H}\Psi[A] = \int d^3x \left( \eta^{ab} \frac{\delta}{\delta A_a} \frac{\delta}{\delta A_b} + \frac{1}{2} \eta^{ab} \eta^{cd} F_{ac} F_{bd} \right) \Psi[A]. \quad (3.24)$$

Se puede resolver el problema de valores propios para este Hamiltoniano (en términos de funciones invariantes de norma para satisfacer la ley de Gauss) y determinar el estado fundamental y los estados excitados.

### 3.3. REPRESENTACIÓN EN LAZOS

Para empezar, se introducen los operadores

$$T(\eta) = W(\eta), \quad (3.25)$$

$$T^a(\eta_x^x) = \tilde{E}^a(x)W(\eta), \quad (3.26)$$

los cuales satisfacen el álgebra no-canónica

$$\{T(\eta), T(\gamma)\} = 0, \quad (3.27)$$

$$\{T^a(\gamma_x^x), T(\eta)\} = -iX^{ax}(\eta)W(\eta \circ \gamma), \quad (3.28)$$

$$\{T^a(\gamma_x^x), T^b(\eta_y^y)\} = -iX^{ax}(\eta)T^b(\gamma \circ \eta) + iX^{by}(\gamma)T^a(\eta \circ \gamma). \quad (3.29)$$

Una comprensión de esta álgebra en un espacio de funciones dependientes de lazos es

$$\hat{T}(\eta)\Psi(\gamma) = \Psi(\eta^{-1} \circ \gamma), \quad (3.30)$$

$$\hat{T}^a(\eta_x^x)\Psi(\gamma) = X^{ax}(\gamma)\Psi(\eta^{-1} \circ \gamma). \quad (3.31)$$

La transformada de lazo está dada por

$$\Psi(\gamma) = \int DA \exp \left( -i \int d^3z X^{az}(\gamma) A_a(z) \right) \Psi[A] \quad (3.32)$$

y debido a la naturaleza Abelian de la conexión la integral puede ser rigurosamente definida. Si consideramos operadores  $\hat{T}(\gamma)$ ,  $\hat{T}^a(\gamma_x^x)$  en la representación de conexiones definidos por

$$\hat{T}(\gamma)\Psi[A] \equiv W_A(\gamma)\Psi[A], \quad (3.33)$$

$$\hat{T}^a(\gamma_x^x)\Psi[A] \equiv \hat{E}^a W_A(\gamma)\Psi[A], \quad (3.34)$$

y se puede verificar que aplicando la transformada (3.32) se obtienen los operadores introducidos en (3.30) y (3.31). En términos del álgebra no canónica se puede expresar el campo eléctrico y el tensor de campo de la siguiente manera

$$\hat{F}_{ab}(x) = -i\Delta_{ab}(x)T(\gamma)|_{\gamma=\iota}, \quad (3.35)$$

$$\hat{E}^a(x) = T^a(\gamma_x^x)|_{\gamma=\iota}, \quad (3.36)$$

donde  $\iota$  es el lazo identidad. Esto permite que una representación de lazo se encuentre naturalmente a través de las ecuaciones (3.30), (3.31),

$$\hat{F}_{ab}(x)\Psi(\gamma) = -i\Delta_{ab}(x)\Psi(\gamma), \quad (3.37)$$

$$\hat{E}^a(x)\Psi(\gamma) = X^{ax}(\gamma)\Psi(\gamma). \quad (3.38)$$

Por lo tanto existe una interpretación de lazos como líneas del flujo eléctrico en esta representación.

Se podría llegar a estas expresiones usando la transformada de lazo (4.32), integrando por partes y considerando la acción de los campos sobre los lazos de Wilson en la representación de conexiones,

$$\hat{F}_{ab}(x)W(\gamma) = F_{ab}(x)W(\gamma) = -i\Delta_{ab}(x)W(\gamma), \quad (3.39)$$

$$\hat{E}^a(x)W(\gamma) = X^{ax}(\gamma)W(\gamma) = \oint_{\gamma} dy^a \delta(x-y)W(\gamma). \quad (3.40)$$

La última expresión asegura que la ley de Gauss se satisface automáticamente en la representación de lazo (debido a la naturaleza transversa del multitangente de primer orden  $X^{ax}(\gamma)$ ). Esta es una consecuencia natural del hecho de que la representación

de lazos esta basada sobre la cuantización de un álgebra de objetos invariantes de norma. Solamente objetos invariantes de norma se pueden realizar naturalmente en la representación de lazos. Objetos dependientes de norma pueden ser introducidos por medio de la derivada de la conexión definida en el capítulo 2.

La relación de conmutación de  $E$  y  $F$ ,

$$[\hat{F}_{cd}(y), \hat{E}^a(x)] = -i\delta_{[c}^a \partial_{d]} \delta(x - y). \quad (3.41)$$

Ahora expresemos el Hamiltoniano en términos de lazos. La parte del campo magnético esta dado simplemente de términos de la derivada de lazo,

$$\eta_{ab} \hat{B}^a(x) \hat{B}^b(x) \Psi(\gamma) = -\frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \Delta_{ab}(x) \Delta_{cd}(x) \Psi(\gamma). \quad (3.42)$$

La parte del campo eléctrico esta dado en términos de integrales de dos lazos, el cual se puede reexpresar como

$$\eta_{ab} \hat{E}^a(x) \hat{E}^b(x) \Psi(\gamma) = \eta_{ab} X^{ax} X^{bx} \Psi(\gamma). \quad (3.43)$$

La ecuación Hamiltoniana de valores propios es entonces

$$\hat{H} \Psi(\gamma) \equiv \int d^3x \left( -\frac{1}{4} \eta^{ac} \eta^{bd} \Delta_{ab}(x) \Delta_{cb}(x) + \frac{1}{2} \eta_{ab} X^{ax}(\gamma) X^{bx}(\gamma) \right) \Psi(\gamma) = E \Psi(\gamma) \quad (3.44)$$



## Capítulo 4

# EL NÚMERO DE ENLACE DE GAUSS Y EL ESTADO DE CHERN-SIMONS

### 4.1. EL NÚMERO DE ENLACE DE GAUSS

Una de las principales consecuencias de la representación de lazos de gravedad cuántica es la descripción radicalmente nueva de una de las simetrías de la teoría: debido a la invarianza ante difeomorfismos las funciones de onda en la representación de lazos deben ser invariantes bajo deformaciones de los lazos, deben ser *invariantes de nudos*. El estudio de invariantes de curvas cerradas bajo deformaciones suaves es muy viejo. Uno de los primeros ejemplos fue la introducción por Gauss (en 1820) del *número de enlace* (linking number)[16]. Este número es un invariante de dos curvas cerradas que mide el número de veces que una de las curvas se enrolla alrededor de la otra. Este es obviamente un invariante ya que la única manera de cambiar tal número es cortar una de las curvas cerradas y por tanto no es una deformación suave. Aunque dicho invariante puede parecer muy trivial, juega un rol importante en teorías de campo topológicas y gravedad cuántica.

Para definirlo, consideremos  $M$  una variedad simplemente conexa y  $\gamma_1, \gamma_2$  dos curvas cerradas que no se intersectan en  $M$ . Ya que la variedad  $M$  es simplemente conexa, podemos tomar una superficie orientada  $D_1 \subset M$  de manera que esté delimitada por la curva  $\gamma_1$  y tal que  $D_1$  y  $\gamma_2$  se intersectan transversalmente. Podemos definir ahora el número de enlace  $lk(\gamma_1, \gamma_2)$  como el número de intersecciones de la superficie  $D_1$  y

la curva  $\gamma_2$ .

$$lk(\gamma_1, \gamma_2) = \#(D_1, \gamma_2) \quad (4.1)$$

Para nuestros propósitos, necesitaremos escribir el número de enlace de una forma específica. Sea  $\Delta \subset M \times M$  la diagonal y sea  $\delta \in H_3(M \times M, \mathbb{R})$  su dual de Poincaré. Podemos entonces escribir

$$lk(\gamma_1, \gamma_2) = \#(\Delta, D_1 \times \gamma_2) = \int_{x \in D_1} \int_{y \in \gamma_2} \delta(x, y). \quad (4.2)$$

Podemos separar la 3-forma  $\delta$  en

$$\delta = \delta^{3,0} + \delta^{2,1} + \delta^{1,2} + \delta^{0,3} \quad (4.3)$$

donde  $\delta^{i,j}$  denota la componente que es una  $i$ -forma sobre el primer factor de  $M \times M$ , y una  $j$ -forma sobre el segundo factor. Notese que con esta formulación solo se necesita integrar sobre la componente  $\delta^{2,1}$  ya que las demás se anulan.

El número de enlace fué considerado por Maxwell en conexión con la teoría electromagnética [17]. Si uno construye un solenoide delgado con la forma de cada lazo la integral anterior mide el flujo magnético producido por cada solenoide a través del otro en unidades apropiadas. En particular, Maxwell da una buena explicación de por qué tal expresión da uno o cero como resultado. Mide el ángulo sólido que uno de los lazos subtiende desde el punto de vista del otro conforme uno lo atraviesa a lo largo del último. Por tanto el resultado es un múltiplo entero de  $4\pi$  o 0 dependiendo de cómo estén enlazados los lazos.

## 4.2. EL FUNCIONAL DE CHERN-SIMONS

Para definir formalmente el funcional de Chern-Simons consideremos  $M$  una variedad compacta tridimensional con frontera  $\partial M = \Sigma$ . Además, sea  $G$  un grupo de Lie compacto con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y sea  $tr(\cdot, \cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal invariante no degenerada sobre  $\mathfrak{g}$  (la forma de Killing). Se fija un  $G$ -haz  $E \rightarrow M$  sobre  $M$  y sea  $\mathcal{A}$  el espacio de las conexiones sobre el haz  $E$ . La acción de Chern-Simons es un funcional  $S_{CS} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  el cual se define como

$$S_{CS}(A) = \int_M \text{tr}(A \wedge dA) + \frac{2}{3} \int_M \text{tr}(A \wedge A \wedge A). \quad (4.4)$$

El conjunto de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange para el funcional de Chern-Simons es el espacio de las conexiones planas del  $G$ -haz  $E$  sobre la variedad  $M$ . Para ver esto, consideremos  $\delta A \in T_A \mathcal{A}$  un vector tangente al espacio  $\mathcal{A}$  en el punto  $A$ . Esto es,  $\delta A$  es un 1-forma que toma valores en el álgebra de Lie sobre la variedad  $M$ . Entonces calculamos

$$\begin{aligned} \delta S_{CS}(A) &= \int_M \text{tr}(\delta A \wedge dA) + \int_M \text{tr}(A \wedge d\delta A) + 2 \int_M \text{tr}(\delta A \wedge A \wedge A) \\ &= \int_M d \text{tr}(A \wedge \delta A) + 2 \int_M \text{tr}(\delta A \wedge (dA + A \wedge A)) \\ &= \int_{\partial M} \text{tr}(A \wedge \delta A) + 2 \int_M \text{tr}(\delta A \wedge (dA + A \wedge A)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde se ha usado el teorema de Stokes en el último paso.

Imponiendo la condición de frontera  $\delta A|_{\partial M} = 0$  sobre las variaciones  $\delta A$ , obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange

$$dA + A \wedge A = 0 \quad (4.6)$$

i.e., la ecuación de curvatura nula  $F(A) = 0$  sobre  $M$ . De ahí que el espacio de soluciones de la ecuación (4.6) es exactamente el espacio de las conexiones planas sobre  $M$ .

En el caso de un  $U(1)$ -haz, dado que el grupo  $U(1)$  es abeliano, el término  $A \wedge A \wedge A$  en (4.4) se anula. Entonces el funcional de Chern-Simons es

$$S_{CS}(A) = \frac{1}{2} \int_M A \wedge dA, \quad (4.7)$$

y la ecuación de curvatura nula es

$$F(A) = dA = 0. \quad (4.8)$$

### 4.3. EL ESTADO DE CHERN-SIMONS

Alrededor de 1980, Abhay Ashtekar y otros desarrollaron “nuevas variables” para describir a la relatividad general en términos de las cuales, las constricciones de la teoría se simplificaban radicalmente. Estas nuevas variables conocidas como ‘conexiones de Ashtekar’ también llevaban la estructura matemática de la relatividad general más cerca a la de las teorías de Yang-Mills que como se ha visto, involucran el concep-

to de ‘conexión’. Como resultado, podemos aplicar las técnicas de teoría de norma a gravedad cuántica. En particular, considerando el estado de Chern-Simons  $\Psi_{CS}$  como la siguiente función sobre  $A$ :

$$\Psi_{CS}(A) = e^{-\frac{6}{\lambda}S_{CS}(A)}. \quad (4.9)$$

obtenemos una solución a la ecuación de Wheeler-DeWitt,

$$\hat{H}\Psi_{CS} = 0, \quad (4.10)$$

donde  $\hat{H}$  es la constricción Hamiltoniana en el caso de gravedad cuántica con constante cosmológica diferente de cero. El significado físico de este “estado de Chern-Simons” está todavía en investigación.

No se tiene registro de una definición para el estado de Chern-Simons en la teoría de Maxwell, por lo que postulamos sea una función de la forma

$$\Psi_{CS}(A) = e^{\alpha S_{CS}(A)}, \quad (4.11)$$

donde  $S_{CS}$  esta dada por (4.7) y  $\alpha$  es una constante por determinar.

### 4.3.1. REPRESENTACIÓN EN CONEXIONES

En analogía al caso de relatividad general, buscamos evaluar el estado de Chern-Simons en el Hamiltoniano escrito en la representación de conexiones de la teoría de Maxwell. En el capítulo anterior vimos que este Hamiltoniano está dado por

$$\mathcal{H}\Psi[A] = \int d^3x \left( \eta^{ab} \frac{\delta}{\delta A_a} \frac{\delta}{\delta A_b} + \frac{1}{2} \eta^{ab} \eta^{cd} F_{ac} F_{bd} \right) \Psi[A]. \quad (4.12)$$

Para llevar a cabo la evaluación, calcularemos primero la variación del funcional de Chern-Simons:

$$\begin{aligned} \delta S_{CS}(A) &= \delta \left( \frac{1}{2} \int_M A \wedge dA \right) = \frac{1}{2} \int_M \delta A \wedge dA + A \wedge d\delta A \\ &= \frac{1}{2} \int_M \delta A \wedge dA - dA \wedge \delta A = \int_M dA \wedge \delta A, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde se usó integración por partes en el segundo término. En términos de la dos-forma  $F$  se escribe como

$$\begin{aligned}\delta S_{CS}(A) &= \int_M F \wedge \delta A = \frac{1}{2} \int_M F_{ij} dx^i \wedge dx^j \wedge \delta A_k dx^k \\ &= \frac{1}{2} \int_M F_{ij} \delta A_k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= \frac{1}{2} \int_M \epsilon^{ijk} F_{ij} \delta A_k dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.\end{aligned}$$

En notación de derivada funcional, la ecuación anterior es

$$\frac{\delta}{\delta A_k} S_{CS}(A) = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ij} \quad (4.14)$$

Por lo tanto

$$\frac{\delta}{\delta A_k} \Psi_{CS}(A) = \frac{\delta}{\delta A_k} e^{\alpha S_{CS}(A)} = \frac{1}{2} \alpha \epsilon^{ijk} F_{ij} e^{\alpha S_{CS}(A)} = \frac{1}{2} \alpha \epsilon^{ijk} F_{ij} \Psi_{CS}(A) \quad (4.15)$$

Para llevar a cabo la evaluación necesitamos derivar funcionalmente una vez más la expresión anterior

$$\frac{\delta^2}{\delta A_k^2} \Psi_{CS}(A) = \frac{\delta}{\delta A_k} \alpha \epsilon^{ijk} F_{ij} \Psi_{CS}(A) = \frac{1}{4} \alpha^2 \epsilon_{pqk} \epsilon^{ijk} F_{ij} F^{pq} \Psi_{CS}(A), \quad (4.16)$$

donde se ha usado el hecho de que estamos trabajando con la métrica euclidea usual para subir y bajar índices. Así

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2}{\delta A_k^2} \Psi_{CS}(A) &= \frac{1}{4} \alpha^2 (\delta_p^i \delta_q^j - \delta_q^i \delta_p^j) F_{ij} F^{pq} \Psi_{CS}(A) \\ &= \frac{1}{4} \alpha^2 (F_{pq} - F_{qp}) F^{pq} \\ &= \frac{1}{2} \alpha^2 F_{pq} F^{pq} \Psi_{CS}(A).\end{aligned} \quad (4.17)$$

Haciendo uso de la métrica, podemos expresar el Hamiltoniano de la ecuación (4.12) como

$$\mathcal{H}\Psi[A] = \int d^3x \left( \frac{\delta^2}{\delta A_a^2} + \frac{1}{2} F^{bd} F_{bd} \right) \Psi[A]. \quad (4.18)$$

Por lo que al hacer la evaluación obtenemos

$$\mathcal{H}\Psi[A] = \int d^3x \frac{1}{2} (\alpha^2 F^{pq} F_{pq} + F^{bd} F_{bd}) \Psi_{SC}[A] \quad (4.19)$$

que es idénticamente a cero si  $\alpha = i$ . Por lo tanto, el estado de Chern-Simons en la representación de conexiones de la teoría de Maxwell es

$$\Psi_{CS}(A) = e^{iS_{CS}(A)}. \quad (4.20)$$

### 4.3.2. REPRESENTACIÓN EN LAZOS

Apliquemos ahora la transformada de lazo para funciones de múltiples lazos al estado de Chern-Simons. Esto es

$$\Psi_{CS}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int dA \exp \left( -i \sum_i \oint_{\gamma_i} A \right) \Psi_{CS}[A] \quad (4.21)$$

Sustituyendo la expresión para  $\Psi_{CS}[A]$  tenemos que

$$\Psi_{CS}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int dA \exp \left( -i \sum_j \oint_{\gamma_j} A \right) \exp \left( \frac{i}{2} \int_M A \wedge dA \right) \quad (4.22)$$

La expresión anterior puede escribirse también como

$$\Psi_{CS}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int dA \exp \left( i \int_M A \wedge Z \right) \exp \left( \frac{i}{2} \int_M A \wedge dA \right) \quad (4.23)$$

donde  $Z = -\sum_j \delta_{\gamma_j}$ . Lo que hemos hecho es cambiar el dominio de integración a toda  $M$  en lugar de solo  $\gamma_j$ . Para dejar la integral sin cambios, multiplicamos la integral por una 2-forma  $\delta_\gamma$  la cual tiene soporte solo sobre el lazo  $\gamma$ . Así

$$\Psi_{CS}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int dA \exp \left( i \int_M A \wedge Z + \frac{i}{2} \int_M A \wedge dA \right) \quad (4.24)$$

Podemos usar el método de integrales gaussianas que se explica en el apéndice D para resolver la integral anterior, por lo tanto

$$\Psi_{CS}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = C \exp \left( -\frac{1}{2} \int_M A_0 \wedge \sum_j \delta_{\gamma_j} \right) \quad (4.25)$$

donde  $A_0$  es una solución de  $dA + Z = 0$ . Procederemos ahora a realizar la conexión entre el estado de Chern-Simons y el número de enlace. Para hacerlo, consideremos  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  curvas cerradas que no se intersectan en la variedad  $M$  y sea  $\delta_{\gamma_i}$  la delta de Dirac tipo 2-forma sobre  $M$  soportada sobre la curva  $\gamma_i$ . Denotando las coordenadas del primer factor de  $M \times M$  por  $x$  y las componentes del segundo factor por  $y$ , podemos escribir

$$\delta_{\gamma_i}(x) = \int_{y \in \gamma_i} \delta^{2,1}(x, y). \quad (4.26)$$

Ya que la variedad  $M$  es simplemente conexa, podemos escoger  $D_i \subset M$  tal que  $\partial D_i = \gamma_i$ . Definamos una delta 1-forma soportada sobre la superficie  $D_i$  por

$$\delta_{D_i}(x) = \int_{y \in D_i} \delta^{1,2}(x, y). \quad (4.27)$$

Entonces por el teorema de Stokes tenemos:

$$d_x \delta_{D_i} = \delta_{\gamma_i}(x), \quad (4.28)$$

o más explícitamente,

$$\delta_{\gamma_i}(x) = \int_{y \in D_i} d_x(\delta^{1,2})(x, y) \quad (4.29)$$

donde  $d_x$  denota la derivada exterior aplicada solamente a la coordenada  $x$ . Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos curvas cerradas que no se intersectan, tenemos que

$$lk(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{x \in D_1} \delta_{\gamma_2}(x) = \int_M \delta_{D_1}(x) \wedge \delta_{\gamma_2}(x) = \int_M \delta_{D_1} \wedge d\delta_{D_2}, \quad (4.30)$$

donde  $\partial D_2 = \gamma_2$ . Ahora podemos usar el cálculo de  $\delta$ -formas expuesto aquí para reescribir (4.25) como:

$$\begin{aligned}
\Psi_{CS}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= C \exp \left( \frac{1}{2} \int_M -A_0 \wedge \sum_j \int_{y \in \gamma_j} \delta^{2,1}(x, y) \right) \\
&= C \exp \left( \frac{1}{2} \int_M -A_0 \wedge \sum_j \int_{y \in D_j} d_x \delta^{1,2}(x, y) \right)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Integrando por partes de modo que la derivada exterior quede sobre  $A_0$

$$\Psi_{CS}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = C \exp \left( \frac{1}{2} \int_M dA_0 \wedge \sum_j \int_{y \in D_j} \delta^{1,2}(x, y) \right) \tag{4.32}$$

Pero recordando que, por definición,  $dA_0 = \sum_k \delta_k$  entonces:

$$\begin{aligned}
\Psi_{CS}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= C \exp \left( -\frac{1}{2} \int_M \left( \sum_k \int_{z \in \gamma_k} \delta^{2,1}(x, z) \right) \wedge \left( \sum_j \int_{y \in D_j} \delta^{1,2}(x, y) \right) \right) \\
&= C \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k,j} \int_M \delta_{\gamma_k} \wedge \delta_{D_j}(x) \right) \\
&= C \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k,j} lk(\gamma_k, \gamma_j) \right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

# Capítulo 5

## CONCLUSIONES

En el capítulo anterior se expusieron los cálculos matemáticos que nos muestran la relación entre el estado de Chern-Simons y el número de enlace de Gauss. Como se ha mencionado antes, no existe una interpretación física de dicho estado en relatividad general por lo que solo esbozaremos una posible interpretación en el caso de electromagnetismo. Esta interpretación está relacionada con un fenómeno bien estudiado en física, el efecto Aharonov-Bohm. En este efecto se produce un desplazamiento del patrón de interferencia cuántico cuando los electrones se mueven en una región libre de campo magnético y, por lo tanto, en ausencia de fuerzas. La conclusión que se extrae es que el potencial vectorial es más fundamental que el campo magnético. Los experimentos definitivos se realizaron a mediados de la década de 1980 [18].

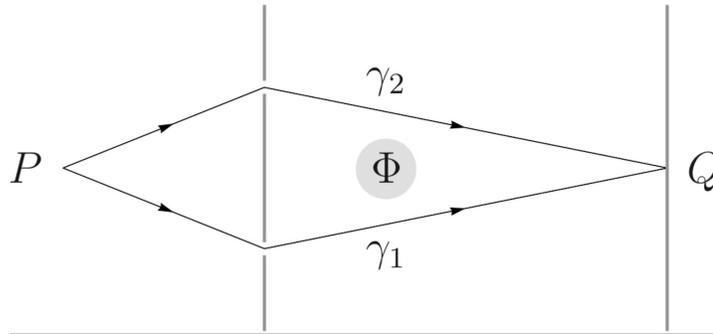


Figura 5.1: Una proyección plana del aparato de efecto magnético estándar Aharonov Bohm.

Consideremos un solenoide que lleva una corriente  $i$ . Es bien sabido que solo existe flujo magnético  $\Phi$  dentro de la región encerrada por el solenoide y va en dirección perpendicular a la página. Fuera del solenoide el campo magnético se anula pero el potencial vectorial  $A$  no. El efecto sobre la función de onda de un electrón al recorrer

## 5.0.

la trayectoria  $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$  está dado, como vimos en el capítulo 1, por la ecuación (1.97):

$$\psi(S) = \exp\left(-\oint_{\gamma} ieA\right) \psi = \exp(-ie\Phi) \psi(0). \quad (5.1)$$

La trayectoria  $\gamma$  de interferencia del electrón y el solenoide son copias de  $S^1$  que combinadas forman el enlace Hopf, cuya topología está descrita por el grupo fundamental  $\pi_1(S^3 - S^1) = \mathbb{Z}$ . Lo importante de remarcar en este efecto es que  $\psi(S)$  y  $\psi(0)$  difieren por un factor de fase que está relacionado con el flujo magnético a través de un lazo. Por otra parte, recordemos que estamos trabajando el campo electromagnético libre de fuentes, por lo tanto, la acción de Chern-Simons puede verse como

$$S_{CS} = \frac{1}{2} \int_M A \wedge dA = \frac{1}{2} \int_M A \wedge B. \quad (5.2)$$

La cantidad  $H = \int_M A \wedge B$  es conocida como ‘helicidad’ y está relacionada con el flujo magnético y el número de enlace [19].

En el capítulo anterior obtuvimos que  $\mathcal{H}\Psi_{CS} = 0$ . Consideremos ahora una función propia de este Hamiltoniano

$$\mathcal{H}\Psi_i = E_i\Psi_i \quad (5.3)$$

Queremos interpretar al estado de Chern-Simons como un factor de fase. Para esto, veamos lo que ocurre a la energía de esta función si le aplicamos este factor de fase, esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Psi_{CS}\Psi_i &= \Psi_{CS}\mathcal{H}\Psi_i + (\mathcal{H}\Psi_{CS})\Psi_i = \Psi_{CS}\mathcal{H}\Psi_i \\ &= \Psi_{CS}E_i\Psi_i = E_i\Psi_{CS}\Psi_i \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde se ha utilizado la regla del producto para derivadas funcionales. Por lo tanto, concluimos que  $\Psi_{CS}\Psi_i$  es también una función propia del Hamiltoniano con la misma energía.

Como demostramos en el capítulo anterior, el estado de Chern-Simons es solución a la ecuación de Wheeler-DeWitt en la representación de conexiones. Como trabajo a futuro, se pretende mostrar explícitamente que la transformada de lazo que realizamos es también solución a la ecuación de Wheeler-DeWitt en la representación de conexiones.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. Gambini. Gravedad cuántica de lazos: origen, evolución y problemas actuales. *Anales Acad. Nac. de Cs. Ex, Fís. y Nat*, 57(2):103–109, 2017.
- [2] R. Rosas-Rodriguez. Alternative variables for the dynamics of general relativity. *International Journal of Modern Physics A*, 23(06):895–908, 2008.
- [3] C. Rovelli and L. Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nuclear Physics B*, 331(1):80–152, 1990.
- [4] S. Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] R. P. Feynman. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Physical Review*, 76(6):769, 1949.
- [6] R. Gambini and A. Trias. Second quantization of the free electromagnetic field as quantum mechanics in the loop space. *Physical Review D*, 22(6):1380, 1980.
- [7] A. Ashtekar and C. Rovelli. A loop representation for the quantum Maxwell field. *Classical and Quantum Gravity*, 9(5):1121, 1992.
- [8] Bryce S. DeWitt. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Physical Review*, 162(5):1195, 1967.
- [9] H. Kodama. Quantum gravity by the complex canonical formulation. *International Journal of Modern Physics D*, 1(03n04):439–523, 1992.
- [10] J. Baez and J. Muniain. *Gauge fields, knots and gravity*, volume 4. World Scientific Publishing Company, 1994.
- [11] R. Gambini and J. Pullin. *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity*. Cambridge University Press, 2000.

- [12] B. Khesin and R. Wendt. *The geometry of infinite-dimensional groups*, volume 51. Springer Science & Business Media, 2008.
- [13] M. Atiyah. *The geometry and physics of knots*. Cambridge University Press, 1990.
- [14] J. Gabàs. *La naturaleza de la luz: Maxwell*, 2012.
- [15] R. Gambini and A. Trias. Gauge dynamics in the c-representation. *Nuclear Physics B*, 278(2):436–448, 1986.
- [16] C. F. Gauss. *Werke*, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1833, Vol.
- [17] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Oxford: Clarendon Press, 1873.
- [18] A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano, and H. Yamada. Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Physical Review Letters*, 56(8):792, 1986.
- [19] M. A. Berger. Magnetic helicity in space physics. *Geophysical Monograph-American Geophysical Union*, 111:1–10, 1999.
- [20] C. Di Bartolo, F. Nori, R. Gambini, and A. Trias. Loop-space quantum formulation of free electromagnetism. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, 38(15):497–502, 1983.

# Apéndices



# Apéndice A

## FORMAS DIFERENCIALES

Para introducirnos a las formas diferenciales, trabajaremos inicialmente con el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $p$  un punto de  $\mathbb{R}^3$ , el conjunto de vectores  $q - p$ ,  $q \in \mathbb{R}^3$  (que tienen origen en  $p$ ) será llamado el *espacio tangente de  $\mathbb{R}^3$  en  $p$*  y se denotará por  $\mathbb{R}_p^3$ . Los vectores  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  de la base canónica de  $\mathbb{R}_0^3$  serán identificados de sus trasladados  $(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p$  en el punto  $p$ .

A cada espacio tangente  $\mathbb{R}_p^3$  podemos asociar su *espacio dual*  $(\mathbb{R}_p^3)^*$  el cual es el conjunto de mapas lineales  $\varphi : \mathbb{R}_p^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Una base para  $(\mathbb{R}_p^3)^*$  se obtiene tomando  $(dx_i)_p, i = 1, 2, 3$ , donde  $x_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es el mapa que asigna a cada punto su  $i$ -ésima coordenada. El conjunto

$$\{(dx_i)_p; i = 1, 2, 3\}$$

es de hecho la base dual de  $\{(e_i)_p\}$ .

**Definición 1.** Un *campo de formas lineales* (o una *forma exterior de grado 1*) en  $\mathbb{R}^3$  es un mapa  $w$  que asocia a cada punto  $p \in \mathbb{R}^3$  un elemento  $w(p) \in (\mathbb{R}_p^3)^*$ ;  $w$  puede ser escrito como

$$w(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

ó

$$w = \sum_{i=1}^3 a_i dx_i,$$

donde  $a_i$  son funciones reales en  $\mathbb{R}^3$ . Si las funciones  $a_i$  son diferenciables,  $w$  es llamada *forma diferencial de grado 1*.

Ahora sea  $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$  el conjunto de mapas  $\varphi : \mathbb{R}_p^3 \times \mathbb{R}_p^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que son bilineales (i.e.,  $\varphi$  es

## A.0.

lineal en cada variable) y alternantes (i.e.,  $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$ ). Con la operación usual de funciones, el conjunto  $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$  se vuelve un espacio vectorial.

Cuando  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  pertenecen a  $(\mathbb{R}_p^3)^*$ , podemos obtener un elemento  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$  por medio de

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

El elemento  $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$  se denotará por  $(dx_i \wedge dx_j)$ . Es fácil ver que el conjunto  $\{(dx_i \wedge dx_j)_p : i < j\}$  es una base para  $\Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$ . Además

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p$$

y

$$(dx_i \wedge dx_i)_p = 0.$$

**Definición 2.** Un *campo de formas bilineales alternantes* o *una forma exterior de grado 2* en  $\mathbb{R}^3$  es una correspondencia  $w$  que asocia a cada punto  $p \in \mathbb{R}^3$  un elemento  $w(p) \in \Lambda^2(\mathbb{R}_p^3)^*$ ;  $w$  puede ser escrita en la forma

$$w(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

ó

$$w = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

donde  $a_{ij}$  son funciones reales en  $\mathbb{R}^3$ . Cuando las funciones son diferenciables,  $w$  es una *forma diferencial de grado 2*.

Ahora generalizaremos la noción de forma diferencial a  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}_p^n$  el espacio tangente de  $\mathbb{R}^n$  en  $p$  y  $(\mathbb{R}_p^n)^*$  su espacio dual. Sea  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$  el conjunto de todos los mapas alternantes  $k$ -lineales

$$\varphi : \mathbb{R}_p^n \times \dots \times \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$$

(alternante significa que  $\varphi$  cambia de signo con el intercambio de dos argumentos consecutivos). Con las operaciones usuales,  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$  es un espacio vectorial. Dadas  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in (\mathbb{R}_p^n)^*$ , podemos obtener un elemento  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  de  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$  por medio de

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j = 1, \dots, k.$$

**Definición 3.** Una  $k$ -forma exterior en  $\mathbb{R}^n$  es un mapa que asocia a cada  $p \in \mathbb{R}^n$  un elemento  $w(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ ;  $w$  puede escribirse como

$$w(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, \dots, n\},$$

donde  $a_{i_1 \dots i_k}$  son funciones reales en  $\mathbb{R}^n$ . Cuando las  $a_{i_1 \dots i_k}$  son diferenciables,  $w$  es llamada  $k$ -forma diferencial.

Una de las características más importantes de las formas diferenciales es el modo en que se comportan bajo mapas diferenciables. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un mapa diferenciable. Entonces  $f$  induce un mapa  $f^*$  que toma  $k$ -formas en  $\mathbb{R}^m$  en  $k$ -formas en  $\mathbb{R}^n$  y se define como sigue. Sea  $w$  una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^m$ . Por definición,  $f^*w$  es la  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^n$  dada por

$$(f^*w)(p)(v_1, \dots, v_k) = w(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)).$$

Aquí  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}_p^n$ , y  $df_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$  es la diferencial del mapa  $f$  en  $p$ . Establecemos la convención que si  $g$  es una 0-forma,

$$f^*g = g \circ f.$$

La operación  $f^*$  es equivalente a “sustitución de variables”.

Ahora vamos a definir una operación sobre las formas diferenciales que generaliza la diferenciación de funciones. Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una 0-forma (i.e., una función diferenciable). Entonces la diferencial

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

es una 1-forma. Queremos generalizar este proceso definiendo una operación que toma  $k$ -formas en  $(k+1)$ -formas.

**Definición 4.** Sea  $w = \sum a_I dx_I$  una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^n$ . La *diferencial exterior*  $dw$  se define por

$$dw = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Algunas propiedades de la diferenciación exterior son

1.  $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$ , donde  $w_1$  y  $w_2$  son  $k$ -formas
2.  $d(w \wedge \varphi) = dw \wedge \varphi + (-1)^k w \wedge d\varphi$ , donde  $w$  es una  $k$ -forma y  $\varphi$  es una  $s$ -forma

## A.0.

3.  $d(dw) = d^2w = 0$ .

4.  $d(f^*w) = f^*(dw)$ , donde  $w$  es una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^m$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un mapa diferenciable.

Ahora veremos un operador al cual se recurre frecuentemente en física.

**Definición 5.** Operador estrella de Hodge. Dada una  $k$ -forma  $w$  en  $\mathbb{R}^n$  definiremos una  $(n - k)$ -forma  $\star w$  por

$$\star(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = (-1)^\sigma(dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}})$$

y extendiendola linealmente, donde  $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{n-k}, (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$  es una permutación de  $(1, 2, \dots, n)$ , y  $\sigma$  es 1 ó 0 acorde a si la permutación es par o impar, respectivamente.

Diremos que  $w$  es cerrada si  $dw = 0$ , y que  $w$  es exacta en  $V \subset U$  si existe una función diferenciable  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $w = df$  en  $V$ . Notese que si  $w$  es exacta en  $V$ , y  $c : [a, b] \rightarrow V$  es una curva,

$$\int_c w = \int_c df = \int_a^b c^*(df) = f(c(b)) - f(c(a)),$$

esto es,  $\int_c w$  solo depende de los puntos finales de  $c$ . Se sigue también que si  $w$  es exacta en  $V$  y  $c$  es una curva cerrada en  $V$ , entonces  $\int_c w = 0$ .

Un importante resultado es el teorema de Poincaré el cual resume algunos teoremas importantes del cálculo tradicional.

### Teorema de Poincaré para 1-formas

Sea  $w = \sum a_i dx_i$  una 1-forma definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $dw = 0$  si y solo si para cada punto  $p \in U$  existe una vecindad  $V \subset U$  de  $p$  y una función diferenciable  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  con  $df = w$ .

# Apéndice B

## GRUPOS DE LIE Y ÁLGEBRAS DE LIE

### B.1. GRUPOS DE LIE

La definición más básica será la de un grupo (de transformación).

**Definición 1.** Una colección no vacía  $G$  de transformaciones de algún conjunto es llamado un *grupo* (de transformación) si junto con cada dos transformaciones  $g, h \in G$  pertenecientes a la colección, la composición  $g \circ h$  y la transformación inversa  $g^{-1}$  pertenecen a la misma colección  $G$ .

Se sigue directamente de esta definición que cada grupo contiene la transformación identidad  $e$ . También, la composición de transformaciones es una operación asociativa.

Los grupos que nos conciernen en este trabajo de tesis son los llamados grupos de Lie. Además de ser un grupo, llevan la estructura de una variedad suave de modo que tanto la multiplicación como la inversión respetan esta estructura.

**Definición 2.** Un *grupo de Lie* es una variedad suave  $G$  con una estructura de grupo tal que la multiplicación  $G \times G$  y la inversión  $G \rightarrow G$  son mapas suaves.

## B.2. EL ÁLGEBRA DE LIE DE UN GRUPO DE LIE

**Definición 3.** Sea  $G$  un grupo de lie con el elemento identidad  $e \in G$ . El espacio tangente al grupo  $G$  en su elemento identidad es (el espacio vectorial de) el *álgebra de Lie*  $\mathfrak{g}$  con la siguiente operación bilineal  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , llamada el *bracket de Lie* sobre  $\mathfrak{g}$ .

Nótese que el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se puede identificar con el conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre el grupo  $G$ . Concretamente, a un vector dado  $X \in \mathfrak{g}$ , podemos asociar un campo vectorial  $\tilde{X}$  sobre  $G$  por traslación izquierda:  $\tilde{X}(g) = l_{g*}X$ , donde  $l_g : G \rightarrow G$  denota la multiplicación por un elemento de grupo  $g$  desde la izquierda,  $h \in G \rightarrow gh$ . Obviamente, tal campo vectorial  $\tilde{X}$  es invariante bajo traslaciones izquierdas por elementos de  $G$ . Esto es,  $l_{g*}\tilde{X} = \tilde{X}$  para todo  $g \in G$ . Por otra parte, cualquier campo vectorial invariante por la izquierda  $\tilde{X}$  sobre el grupo  $G$  define un elemento único  $\tilde{X}(e) \in \mathfrak{g}$ .

El usual bracket de Lie (o conmutador)  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  de dos campos vectoriales invariantes por la izquierda  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  sobre el grupo es de nuevo un campo vectorial invariante por la izquierda sobre  $G$ . De ahí, podemos escribir  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \tilde{Z}$  para algún  $Z \in \mathfrak{g}$ . Definimos el bracket de Lie  $[X, Y]$  de dos elementos  $X, Y$  del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo  $G$  por  $[X, Y] := Z$ . El bracket de Lie le da al espacio  $\mathfrak{g}$  la *estructura de un álgebra de Lie*.

## B.3. EL MAPA EXPONENCIAL

**Definición 4.** El *mapa exponencial* de un álgebra de Lie al correspondiente grupo de Lie  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  se define como sigue: Fijemos algún  $X \in \mathfrak{g}$  y sea  $\tilde{X}$  el correspondiente campo vectorial invariante por la izquierda. El flujo del campo  $\tilde{X}$  es un mapa  $\phi_X : G \times \mathbb{R} \rightarrow G$  tal que  $\frac{d}{dt}\phi_X(g, t) = \tilde{X}(\phi_X(g, t))$  para toda  $t$  y  $\phi_X(g, 0) = g$ . El flujo  $\phi_X$  es la solución de una ecuación diferencial ordinaria, la cual, si existe, es única. En el caso que el subgrupo de flujo  $\phi_X(e, \cdot)$  existe para todo  $X \in \mathfrak{g}$ , definimos el mapa exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  como el mapa en el tiempo uno  $X \rightarrow \phi_X(e, 1)$ .

Para cada grupo de Lie de dimensión finita, el mapa exponencial está dado por el usual mapa exponencial para matrices

$$\exp : A \rightarrow \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \quad (\text{B.1})$$

Ahora consideremos un elemento del álgebra de Lie  $X \in \mathfrak{g}$ . Por definición del mapa exponencial, la curva  $\phi(t) = \exp(tX)$  satisface la ecuación diferencial  $\phi' = \phi(t)X$  con la condición inicial  $\phi(0) = e$ .



# Apéndice C

## VARIEDADES, HACES Y CONEXIONES

Para poder hacer física moderna necesitamos ser capaces de manejar espacios y espacios-tiempo que son más generales que  $\mathbb{R}^n$ . El tipo de espacios que nos conciernen serán aquellos que se ven *localmente* como  $\mathbb{R}^n$  pero quizá no *globalmente*.

Primero que todo, recordemos que un **espacio topológico** es un conjunto  $X$  junto con una familia de subconjuntos de  $X$  llamados **conjuntos abiertos**, que satisfacen las condiciones:

1. El conjunto vacío y  $X$  mismo son abiertos.
2. Si  $U, V \subseteq X$  son abiertos, entonces  $U \cap V$  también lo es.
3. Si los conjuntos  $U_\alpha \subseteq X$  son abiertos, la union  $\cup U_\alpha$  también lo es.

La colección de conjuntos tomados para ser abiertos es llamada la **topología** de  $X$ . Un conjunto abierto que contiene al punto  $x \in X$  es llamado una **vecindad** de  $x$ . El complemento de un conjunto abierto es llamado **cerrado**.

El uso de una topología nos permite definir funciones continuas. Una función  $f : X \rightarrow Y$  de un espacio topológico a otro es continua si, dado cualquier conjunto  $U \subseteq Y$ , la imagen inversa  $f^{-1}U \subseteq X$  es abierta.

La idea de una variedad es que, como el globo, podemos cubrirla con parches que se ven como  $\mathbb{R}^n$ . Más precisamente, decimos que una colección  $U_\alpha$  de conjuntos abiertos **cubren** un espacio topológico  $X$  si la union de ellos es  $X$ . Dado un espacio topológico  $X$  y un conjunto abierto  $U \subseteq X$ , definimos una *carta* como una función continua  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  con inversa continua. Mientras trabajemos “en la carta  $\varphi$ ” se pretenderá

## C.0.

estar trabajando en  $\mathbb{R}^n$ . Por ejemplo, si tenemos una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  podemos convertirla en una función sobre  $\mathbb{R}^n$  por medio de  $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Finalmente, decimos que una **variedad n-dimensional**, o **n-variedad**, es un espacio topológico  $M$  equipado con cartas  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde los  $U_\alpha$  son conjuntos abiertos que cubren a  $M$ , tal que la **función de transición**  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  es suave. Tal colección de cartas es llamado **atlas**. Prosigamos ahora a la definición de haz.

Un **haz** es una estructura que consiste de una variedad  $E$ , una variedad  $M$ , y un mapa sobreyectivo  $\pi : E \rightarrow M$ . Un haz simple se muestra en la figura (C.1), donde  $M$  es la recta real,  $E$  es el plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $\pi : E \rightarrow M$  es la proyección estándar del plano al eje  $x$ .

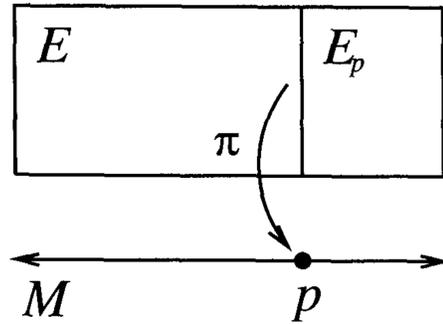


Figura C.1: Un haz  $\pi : E \rightarrow M$

En general la variedad  $E$  es llamada **espacio total**, la variedad  $M$  es llamada **espacio base**, y  $\pi$  es llamada **proyección**. Para cada punto  $p \in M$ , el espacio

$$E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\} \quad (\text{C.1})$$

es llamado **fibra sobre  $p$** . Nótese que el espacio total  $E$  es la unión de todas las fibras:

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p. \quad (\text{C.2})$$

Es por esto que se dice un *haz de fibras*. En física, el caso de interés es cuando  $M$  es algún espacio físico o el espacio-tiempo y cada fibra  $E_p$  es un espacio vectorial. El **haz tangente** de una variedad  $M$  es un buen ejemplo. Aquí, el espacio total, denotado por  $TM$ , es simplemente la unión de todos los espacios tangentes de  $M$ :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (\text{C.3})$$

La proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  mapea cada vextor tangente  $v \in T_pM$  al punto  $p \in M$ . La fibra sobre cualquier punto  $p \in M$  es el espacio tangente  $T_pM$ .

Otro tipo de haces de interes son los **haces triviales**. Dadas las variedad  $M$  y  $F$ , el haz trivial sobre  $M$  con fibra estandar  $F$  es simplemente el producto Cartesiano  $E = M \times F$ , con la proyección dada por

$$\pi(p, f) = p \tag{C.4}$$

para todo  $(p, f) \in M \times F$ . Decimos que un haz es **localmente trivial** con fibra estandar  $F$  si para cada punto  $p \in M$ , existe una vecindad  $U$  de  $p$  y un isomorfismo

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times F \tag{C.5}$$

mandando cada fibra  $E_p$  a la fibra  $p \times F$ . Llamaremos a  $\phi$  una **trivialización local**.

## C.1. HACES VECTORIALES

Un **haz vectorial real**  $n$ -dimensional es un haz localmente trivial  $\pi : E \rightarrow M$  tal que cada fibra  $E_p$  es un espacio vectorial  $n$ -dimensional.

Un concepto de suma importancia en física es el secciones. Una **sección** de un haz  $\pi : E \rightarrow M$  es una función  $s : M \rightarrow E$  tal que para cualquier  $p \in M$ ,  $s(p) \in E_p$ . En otras palabras, la sección asigna a cada punto en el espacio base un vector en la fibra sobre ese punto. Otra forma de decir esto es que  $\pi \circ s$  es el mapa identidad. Denotamos el espacio de todas las secciones de  $E$  por  $\Gamma(E)$ . Cuando se hacen cálculos con haces vectoriales, es muy práctico trabajar con una *base de secciones*. Dado un haz vectorial  $E$ , decimos que las secciones  $e_1, \dots, e_n$  de  $E$  forman una **base de secciones** de  $E$  si cualquier sección  $s \in \Gamma(E)$  puede escribirse de forma única como

$$s = s^i e_i \tag{C.6}$$

(usando la convención de suma de Einstein), donde  $s_i \in C^\infty(M)$ .

## C.2. CONSTRUCCIÓN DE HACES VECTORIALES

Sea  $M$  una variedad y  $U_\alpha$  una cubierta de  $M$  de conjuntos abiertos. Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $\rho$  una representación de algún grupo  $G$  sobre  $V$ . Pegaremos juntos los haces triviales  $U_\alpha \times V$  para obtener un haz vectorial  $\pi : E \rightarrow M$  usando las **funciones de transición**  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ . Para obtener  $E$ , empezamos con la unión disjunta

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \times V, \quad (\text{C.7})$$

y entonces consideramos dos puntos  $(p, v) \in U_\alpha \times V$  y  $(p, v') \in U_\beta \times V$  como iguales (los identificamos) si

$$v = \rho(g_{\alpha\beta}(p))v'. \quad (\text{C.8})$$

Escribiremos usualmente la expresión anterior como

$$v = g_{\alpha\beta}v'. \quad (\text{C.9})$$

Llamaremos a este tipo de haz vectorial  $G$ -haz. El grupo  $G$  es llamado el **grupo de norma** del haz y  $V$  es la **fibra estandar**. En teoría de norma, los campos estan descritos por secciones de  $G$ -haces con diferentes elecciones de grupo de norma para las diferentes fuerzas.

Ya que cada fibra  $E_p$  realmente se parece a  $V$ , aunque no canónicamente, y  $G$  tiene una representación  $\rho$  sobre  $V$ , tiene sentido preguntar si una transformación lineal  $T : E_p \rightarrow E_p$  es de la forma  $\rho(g)$ . Más precisamente, suponga que  $p \in U_\alpha$ . Entonces decimos que  $T$  **vive en  $G$**  si es de la forma

$$[p, v]_{\alpha} \mapsto [p, gv]_{\alpha} \quad (\text{C.10})$$

para algún  $g \in G$ . El punto es que esta definición es independiente de la elección de  $\alpha$ . Por ejemplo suponga  $p \in U_\beta$  : entonces

$$[p, v]_{\alpha} = [p, g_{\beta\alpha}]_{\beta} \quad (\text{C.11})$$

ya que los hemos identificado, y similarmente

$$[p, gv]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta \quad (\text{C.12})$$

entonces  $T$  está dado también sobre  $U_\alpha \cap U_\beta$  por

$$[p, g_{\beta\alpha}v]_\beta \mapsto [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta \quad (\text{C.13})$$

donde se ha hecho el cambio de variables  $v' = g_{\beta\alpha}v$ ,  $g' = g_{\beta\alpha}gg_{\beta\alpha}^{-1}$ .

Lo mismo se mantiene para el álgebra de Lie de  $G$ . A saber, decimos que  $T : E_p \rightarrow E_p$  **vive en  $\mathfrak{g}$**  si es de la forma

$$[p, v]_\alpha \mapsto [p, d\rho(x)v]_\alpha \quad (\text{C.14})$$

para algún  $x \in \mathfrak{g}$ .

### C.3. TRANSFORMACIONES DE NORMA

Suponga que se tiene un haz vectorial  $\pi : E \rightarrow M$ . Una transformación de norma es una transformación lineal biyectiva de la fibra  $E_p$  la cual varía suavemente con el punto  $p \in M$ . Sin embargo, si  $E$  es un  $G$ -haz, se demanda que estas transformaciones vivan en  $G$ .

Dado un espacio vectorial  $V$ , las funciones lineales de  $V$  sobre sí mismo son llamados **endomorfismos** y el conjunto de todos los endomorfismos de  $V$  es denotado por  $\text{End}(V)$ , este es un espacio vectorial en sí mismo.  $\text{End}(V)$  también es un álgebra, con el producto definido como

$$(ST)(v) = S(T(v)). \quad (\text{C.15})$$

En general, si tomamos una base  $e_i$  de  $V$  y sea  $e^j$  la base dual de  $V^*$ , una base conveniente para  $\text{End}(V)$  está dada por los elementos  $e_j^i$ , donde

$$e_j^i e_k = \delta_k^i e_j, \quad (\text{C.16})$$

Cuando  $V$  es  $\mathbb{R}^n$  y  $e_i$  es la base estandar, las matrices  $e_j^i$  son llamadas **matrices unitarias**.

Nótese que hay un isomorfismo

$$V \otimes V^* \cong \text{End}(V) \quad (\text{C.17})$$

que toma el elemento  $v \otimes F \in V^*$  a la función lineal dada por

$$x \mapsto f(x)v \quad (\text{C.18})$$

para todo  $x \in V$ . Así, dado un haz vectorial  $E$  sobre una variedad  $M$ , sea  $\text{End}(E)$  el haz endomorfismo de  $E$ , que denota el haz  $E \otimes E^*$ . La fibra de  $\text{End}(E)$  sobre cualquier punto  $p \in M$  es  $\text{End}(E_p)$ , los endomorfismos de  $E_p$ . Como resultado, cualquier sección  $T$  de  $\text{End}(E)$  define un mapa de  $E$  a sí mismo mandando  $v \in E_p$  a  $T(p)v \in E_p$ , el cual es un morfismo del haz vectorial. Cualquier sección  $T$  de  $\text{End}(E)$  actúa sobre cualquier sección  $s$  de  $E$  puntualmente, dando una nueva sección  $Ts$  de  $E$ , como sigue:

$$(Ts)(p) = T(p)s(p). \quad (\text{C.19})$$

Así,  $T$  determina una función  $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ . Esta función es  $C^\infty(M)$  lineal. Ahora suponga que  $\pi : E \rightarrow M$  es un  $G$ -haz, donde  $G$  es algún grupo de Lie. Recordar que esto significa que existe una cubierta abierta  $U_\alpha$  de  $M$  tal que  $E$  se construye pegando juntos los haces triviales  $U_\alpha \times V$ , donde  $V$  es un espacio vectorial sobre el cual  $G$  tiene una representación  $\rho$ . Suponga también que  $T \in \text{End}(E)$ . Vimos en el sección anterior que hay una noción bien definida de  $T(p) \in \text{End}(E_p)$  que vive en el grupo de norma  $G$  o en álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si  $T(p)$  vive en  $\mathfrak{g}$  para todo  $p \in M$ , decimos simplemente que  $T$  **vive en  $\mathfrak{g}$** . Si  $T(p)$  vive en  $G$  para todo  $p \in M$ , decimos que  $T$  es una transformación de norma. El conjunto de todas las transformaciones, las cuales llamaremos  $\mathcal{G}$ , es de hecho un grupo, con el producto e inversa dados por

$$\begin{aligned} (gh)(p) &= g(p)h(p), \\ g^{-1}(p) &= g(p)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

El principio de teoría de norma es que los campos deben ser secciones de  $G$ -haces, y que las leyes de la física deben ser ecuaciones diferenciales tal que si  $s$  es una solución, también lo es  $gs$  para cualquier  $g \in \mathcal{G}$ . Tales ecuaciones diferenciales

se dicen **invariantes de norma**. No es tan fácil escribir ecuaciones diferenciales que sean invariantes de norma. El problema es que la derivada de  $gs$  puede ser diferente de la de  $s$ , ya que  $g(p)$  depende del punto  $p$ . Sin embargo, el truco ya había sido resuelto por los matemáticos, se llama *conexión*. [20]



## Apéndice D

# INTEGRALES GAUSSIANAS DE DIMENSIÓN FINITA

Sea  $(x, Qx)$  una forma simétrica definida negativa en el espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . La integral de Gauss clásica

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-qx^2) dx = \sqrt{2\pi/q} \quad (\text{D.1})$$

tiene un análogo multidimensional

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}(x, Qx)} d^n x = \left( \frac{(2\pi)^n}{\det(-Q)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{D.2})$$

Ahora se fija un vector  $J \in \mathbb{R}^n$  y consideramos la integral

$$Z_Q(J) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}(x, Qx) + (x, J)} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{S_J(x)} d^n x \quad (\text{D.3})$$

correspondiente a  $S_J(x) = \frac{1}{2}(x, Qx) + (x, J)$ . (La integral inicial es  $Z_Q(0)$ ). Esta integral puede ser fácilmente resuelta completando el cuadrado. En efecto, sea  $x_0$  una solución de la ecuación  $Qx_0 + J = 0$ , i.e.,  $x_0 = -Q^{-1}J$ . Introduciendo una nueva

**D.0.**

variable  $\tilde{x} = x - x_0$  y usando la invarianza de traslación de la medida  $d^n x$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
Z_Q(J) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{S_J(\tilde{x}+x_0)} d^n x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{1}{2}(\tilde{x} + x_0, Q(\tilde{x} + x_0)) + (\tilde{x} + x_0, J)\right) d^n x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{1}{2}(\tilde{x}, Q\tilde{x}) + \frac{1}{2}(x_0, Q_0) + (x_0, J)^n \tilde{x}\right) d^n \tilde{x} \\
&= e^{S_J(x_0)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}(\tilde{x}, Q\tilde{x})} d^n \tilde{x} = e^{\frac{1}{2}(x_0, J)} Z_Q(0).
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Así, tenemos

$$\frac{Z_Q(J)}{Z_Q(0)} = e^{S_J(x_0)} = e^{\frac{1}{2}(x_0, J)} = e^{-\frac{1}{2}(Q^{-1}J, J)}. \tag{D.5}$$

Cuando el espacio  $\mathbb{R}^n$  es reemplazado por algún espacio vectorial de dimensión infinita, las integrales  $Z_Q(0)$  y  $Z_Q(J)$  usualmente no tienen sentido. Sin embargo, podemos calcular su razón, lo que a menudo resulta estar bien definida.