Universidad Tecnológica de la Mixteca

Lógicas Paraconsistentes Genuinas

Tesis que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas aplicadas

Presenta:

Yaretzi López Gómez

Directora de Tesis:

Dra. Verónica Borja Macías

Codirector de Tesis:

Dr. Jesús Alejandro Hernández Tello

Huajuapan de León, Oaxaca. Abril de 2019.

Dedicatoria

A mi madre,
Esperanza de mi corazón.

A mis hermanos,
fortaleza de mi ser.

Agradecimientos

Me sobran motivos para decir:
Todá Rabá Hashem.

Quiero agradecer a los seres que me dieron la vida Esperanza Gómez Velasco y Pedro López Sánchez, en especial a mi madre por colmarme de amor, apoyo incondicional y buenos ejemplos. Sobre todo, muchas gracias por ser una mujer que nunca cede ante las adversidades de la vida.

Agradezco a mis hermanos Jose Luis, Isaías e Iván por todo ese amor y cuidado que han tenido conmigo. Gracias por el apoyo incondicional y palabras de aliento para no desistir en el camino. Con su ejemplo me enseñaron que no importan los medios, el trabajo y la perseverancia logran que los sueños se hagan realidad.

A Norma Hernández, Sandra Martínez Martínez y Martha Natier González González les agradezco su cariño y comprensión. Su integración a la familia lleno de felicidad nuestros corazones.

A mis tíos: Santiago Gómez Velasco y Asunción Gómez Velasco por los bellos momentos de mi infancia, Sara Cruz Gómez y Anastacio Velasco García por amarme como a una hija. A todos los llevo siempre en mi corazón.

A todos mis amigos que han estado presentes en algún momento de mi vida, les agradezco los buenos momentos compartidos. En particular le doy gracias a Lissette García Santiago y Luis Noé Sánchez Valdez por sus cuidados y apoyo a lo largo de mi carrera, gracias por compartir conmigo

un poco de su amor y bella familia. También agradezco a Luis Daniel Sosa Ruiz por su confianza y palabras de aliento, a Yadira Cortés García por las muestras de cariño para mí y mi familia, a las matemáticas Diana Citlalli Castañeda Álvarez, Sonia Venancio Guzmán y Brenda Rosalía Policarpo Sibaja fue un placer ser su compañera y amiga, a Edgar Abidán Padilla Luis por ser un amigo incondicional, a Iván Vega Gutiérrez y Elide López Luna por su confianza y aprecio.

A la Dra. Verónica Borja Macías y al Dr. Jesús Alejandro Hernández Tello muchas gracias por haber dirigido esta tesis. Les agradezco su tiempo y comprensión durante todo el trabajo de investigación. Además, agradezco su amistad, cariño y apoyo incondicional que me brindaron durante la carrera. Sobre todo muchas gracias Prof. Alejandro por creer en mí, aún cuando yo misma dudaba. Gracias por enseñarme que las matemáticas son la mejor medicina para la vida, por transmitirme que el trabajo duro, la perseverancia y la paciencia son las mejores herramientas de un matemático.

Agradezco de manera especial al M.M. Vulfrano Tochihuitl Bueno, al Dr. Cuauhtemoc Héctor Castañeda Roldán y al Dr. Octavio Alberto Agustin, por su tiempo y valiosas observaciones que hicieron de este trabajo algo mejor.

A mis profesores de la Universidad Tecnológica de la Mixteca muchas gracias por su dedicación y valiosas enseñanzas. Agradezco principalmente a los profesores del Instituto de Física y Matemáticas, por su ardua labor de transmitir lo bello de la vida. De manera especial agradezco al Dr. Franco Barragán Mendoza, al Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide y a la Dra. Alicia Santiago Santos por sus buenos consejos. Además, de transmitir su pasión por las matemáticas. Para todos ustedes mi admiración y respeto.

Yaretzi López Gómez.

Abril de 2019.

Índice general

Introducción

La palabra lógica proviene de la raíz griega *logos*, en [9] se indica que *logos* tiene cuatro significados principales interrelacionados: **razón, ciencia, lenguaje** y **relación**. De modo que se pueden tener distintas concepciones de lógica, como indica Moravcsik "descubrimos relaciones necesarias entre elementos abstractos que pueden caracterizarse lingüística o conceptualmente" [23]. Eso indica que tenemos opciones sobre cómo caracterizar esas relaciones. Todavía más, las definiciones pueden no ser equivalentes.

Béziau considera que "la lógica como un arte de razonar y la lógica como un sistema lógico no necesariamente son lo mismo si consideramos por ejemplo, como Descartes lo hizo que no necesitamos un sistema para razonar en el buen sentido" [9]. Descartes estaba en contra de los silogismos, que fueron propuestos por Aristóteles como método para producir el buen razonamiento. "Los silogismos son tal vez el primer sistema de lógica" [9]. De modo que si se considera "a la lógica como un sistema de reglas de inferencia justificables, que demarca lo válido de lo inválido, entonces deberíamos decir que Aristóteles fue el creador de la lógica en la cultura occidental" [23].

Béziau también menciona que el *logos* se hizo presente en la cultura griega antes de Aristóteles, por medio de **la reducción al absurdo**. Desde su aparición la reducción al absurdo ha sido una poderosa forma de razonar, a tal grado que rompió la ideología de los pitagóricos, sobre los números naturales, cuando ellos utilizando reducción al absurdo logran demostrar que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional. Con eso los pitagóricos aceptarían la existencia de los números irracionales pues era producto de la razón. Más aún, esta prueba es "un resultado que se considera a veces como la primer prueba matemática, de ahí el verdadero nacimiento de las matemáticas” [9].

Durante 2000 años el estudio de la lógica se limitó a los silogismos, el sistema lógico propuesto por Aristóteles, pero “la racionalidad promovida por Aristóteles es bastante estrecha, es solo un aspecto del *logos*” [9]. Dentro de la ideología de Aristóteles se encuentra la afirmación de que el principio de no contradicción es la base de la racionalidad y la realidad. Idea que durante la segunda mitad del siglo XIX comenzó a ponerse en duda, surgiendo la lógica moderna.

Actualmente la lógica matemática está dividida en cuatro áreas importantes: *teoría de conjuntos, teoría de modelos o semántica, teoría de prueba* y *teoría de recursividad* [6]. En cada una de estas áreas se definen y emplean objetos matemáticos distintos para estudiar un sistema lógico. Sin importar cuáles sean estos objetos es necesario formalizar la teoría que se esté desarrollando, por medio de un método que nos garantice su correctez[1], estas herramientas de validación son teoría de prueba o demostración y teoría de modelos o semántica. En la teoría de prueba se estudia a las demostraciones como un objeto matemático, permitiendo ser analizadas con herramientas matemáticas. A grandes rasgos se encarga de estudiar la sintaxis de una lógica. Por otra parte, la semántica es el estudio de las interpretaciones de los lenguajes formales.

Las lógicas que nosotros estudiaremos serán analizadas con teoría de modelos, en particular emplearemos semánticas inducidas por matrices. Las matrices son una generalización natural de la teoría de modelos bivaluada, definida para la Lógica Clásica. En éstas se pueden tener más de dos valores de verdad, un número variable de valores designados y diversas interpretaciones para los conectivos que se empleen en la lógica. Así mismo se ha visto que el enfoque de matrices es adecuado para estudiar el concepto de paraconsistencia, en el último siglo se han definido diversas lógicas paraconsistentes por medio de matrices, por citar algunos ejemplos se tiene a la lógica PAC, la lógica de B3 y la lógica G3’. Para poder continuar es necesario contextualizar el surgimiento de la paraconsistencia.

[1] Correctez es el sustantivo abstracto generado del adjetivo correcto, a partir de la traducción de la palabra soundness. Se refiere a que la teoría demuestre todo lo que sea válido, es decir que la teoría sea “completa".

Introducción

Desde la época de Aristóteles hasta finales del siglo XIX la Lógica Clásica fue la lógica empleada por excelencia para el estudio del razonamiento. La Lógica Clásica se enfoca en el estudio de la veracidad de las proposiciones, es decir en determinar si una proposición es verdadera o falsa. Por otra parte, a mediados del siglo XIX se formaliza la lógica, dando lugar a lo que hoy conocemos como lógica matemática, estableciendo los términos bajo los cuales un *sistema lógico*[2] va a ser calificado como sistema formal. Este hecho originó que a principios del siglo XX la Lógica Clásica perdiera su cualidad de ser la única para el razonamiento; debido a que surgió una corriente, en lógica, que da lugar a los sistemas que actualmente son conocidos como lógicas no clásicas; por un lado se tiene a la familia de lógicas *alternativas* y por otra parte, las *extensiones* de la Lógica Clásica.

La Lógica Clásica se sustenta en los principios: *identidad, no contradicción* y *principio del tercer excluso*. Sin embargo, la lógica paraconsistente pertenece a la familia de las lógicas *alternativas* al rechazar el *Principio de no Contradicción*, el cual establece que ninguna cosas puede ser y no ser al mismo tiempo, es decir no es posible que A sea B y al mismo tiempo A no sea B. Estas lógicas fueron propuestas con el objetivo de estudiar teorías inconsistentes no triviales. Una teoría es *inconsistente* si dado un conjunto de fórmulas se tiene que existe al menos una fórmula α, tal que tanto $\neg\alpha$ como α son teoremas de la teoría. Una teoría se dice *trivial* si para cualquier fórmula α del lenguaje se cumple que la teoría deduce a α. Una teoría es *explosiva* si agregar una contradicción es suficiente para que sea trivial.

En la Lógica Clásica se tiene que de premisas contradictorias se deduce cualquier afirmación, por lo tanto es explosiva. Por su parte, las lógicas paraconsistentes establecen un marco para trabajar con contradicciones pero bajo ciertas condiciones a diferencia de la Lógica Clásica que lo hace de manera arbitraria.

La definición de lógica paraconsistente está basada en el *Principio de no Contradicción*. Sin embargo, esto depende de la formulación que se haga de este principio; debido a lo anterior, en la actualidad existen diferentes versiones de la definición de lógica paraconsistente. No obstante,

[2]Intuitivamente consideremos un sistema lógico como el conjunto de reglas y símbolos que permiten determinar cuándo una deducción es o no correcta.

existen dos principales formulaciones de dicho principio: *Negación por Contradicción* (**NC**) y *Explosión por Contradicción* (**EC**). **NC** establece que "una proposición y su negación no pueden ser ambas verdaderas" [8], mientras que **EC** dice que "de una contradicción es posible derivar o deducir cualquier proposición" [8].

Existen lógicas paraconsistentes que violan (no obedecen) únicamente una de las dos formulaciones antes mencionadas, por ejemplo la lógica PAC es paraconsistente al violar **EC**, aunque cumple **NC**. Caso contrario de la lógica de Bochvar que es paraconsistente debido a que viola **NC** pero satisface **EC**. A manera de unificar el estudio de la lógica paraconsistente Jean-Yves Béziau et al. en 2015 [12], definen a una *lógica paraconsistente genuina* como aquella que no satisface **NC** ni **EC**, es decir una lógica paraconsistente genuina es más estricta al violar ambas formulaciones. Más aún, señala los requisitos que debe cumplir una lógica trivaluada para satisfacer la definición de paraconsistencia genuina y presentan a las primeras lógicas trivaluadas paraconsistentes genuinas: **L3A** y **L3B**, con conjunto de valores de verdad finito.

Para definir a las lógicas **L3A** y **L3B** hacen uso de la teoría de modelos, en particular de semánticas inducidas por matrices multivaluadas y son definidas en un lenguaje que contiene únicamente un conectivo de conjunción, un conectivo de disyunción y un conectivo de negación. Posteriormente Hernández-Tello et al. en 2017 [19], analizaron cuáles son las propiedades que debe satisfacer un conectivo para considerarse implicación. Concluyen que hay un total de 4 opciones para ser una implicación de la lógica **L3A** y 16 posibles implicaciones para extender a la lógica **L3B**. Sin embargo, en su trabajo únicamente eligen una implicación en cada caso para extender a las lógicas **L3A** y **L3B**, obteniendo respectivamente a las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$. De modo que falta analizar el comportamiento de las extensiones de **L3A** y **L3B** restantes.

El que una lógica se defina en un lenguaje que contenga un conectivo de implicación es un punto crucial en el desarrollo y análisis de propiedades que satisface dicha lógica, permitiendo mayor expresividad. Debido a que si se desea estudiar el modo en que se puede razonar en esa lógica, es necesario emplear reglas de inferencia, que son los métodos que garantizan un correcto razonamiento. Una de ellas es *Modus Ponens*, el cuál se define con base en un conectivo de implicación y es ampliamente utilizado en matemáticas, computación, inteligencia artificial y sistemas expertos. Más aún, el conectivo de implicación en una lógica, facilita el desarrollo de teoría de prueba.

Es fundamental tener sistemas paraconsistentes genuinos que contengan los conectivos: negación, conjunción, disyunción e implicación porque esto nos permite hacer una comparación entre las lógicas paraconsistentes genuinas y cualquier otra lógica que tenga esos conectivos. En particular el extender a las lógicas **L3A** y **L3B**, mediante la adición de una implicación a su lenguaje, resulta relevante en la lógica ya que actualmente solo existen tres lógicas paraconsistentes genuinas que contienen a los conectivos mencionados, las lógicas $\mathbf{L3A_G}, \mathbf{L3B_G}$ y la lógica NH.

Motivados por todo lo anterior, en este trabajo se hace un análisis de las lógicas que se obtienen a partir de extender a las lógicas **L3A** y **L3B** con sus respectivas opciones de implicación, obtenidas en [19]. Con el objetivo de proporcionar un trabajo accesible para alumnos de la segunda mitad de la licenciatura, se desarrolla el Capítulo 1 de conceptos básicos con dos fines; el primero es establecer el marco de estudio bajo el cual se desarrolla el trabajo y el segundo es proporcionar todo lo necesario para aquel lector que desee explorar el área de lógica paraconsistente pueda construir lo expuesto.

Siguiendo el desarrollo cronológico de la lógica paraconsistente genuina, en el Capítulo 2 se da un resumen de cómo es que surge la lógica paraconsistente, cuál es su objetivo y se particulariza su estudio al caso de lógicas trivaluadas.

Como el objetivo principal del trabajo es analizar extensiones de lógicas mediante la adición de un conectivo de implicación a su matriz, es natural analizar la importancia de dicho conectivo así como algunas de las propiedades que se le solicitan para que sea adecuado para las lógicas **L3A** y **L3B**, esto se aborda en el Capítulo 3.

El análisis y la comparativa entre las extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B** con un conectivo de implicación, se realiza en el Capítulo 4. Para lo ello se ha hecho uso de programación declarativa, en particular se utilizo el lenguaje DLV. En el Apéndice A se muestran algunos de los programas que se realizaron para este estudio, los cuales permitieron obtener los principales aportes de este trabajo, mostrados en la Sección 4.4.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo además de presentar formalmente conceptos necesarios para desarrollar la teoría, se da la notación que se emplea a lo largo de la tesis. Las definiciones que se presentan en las Secciones 1.1, 1.2 y 1.3 pertenecen al área de *teoría de modelos o semántica* mientras que la Sección 1.4 contiene conceptos del área de *teoría de prueba.*

1.1. Lenguaje proposicional

Un concepto fundamental es el de *lenguaje* pues con base en este se definen muchos otros, principalmente el de *lógica.* Dado que en esta tesis únicamente se analizan lógicas proposicionales, enseguida se enuncia una definición adecuada para tales fines, la cual es más amplia de la que se presenta en [13].

Definición 1 *Un* **lenguaje proposicional** $\mathcal{L}$ *se define como una pareja* $\langle \mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \mathcal{S}_{\mathcal{L}} \rangle$ *formada por el* ***alfabeto*** $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *y la* ***sintaxis*** $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$*, donde:*

- *El alfabeto* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *está formado por la terna* $\langle P, C, A \rangle$*, con:*
  - P *un conjunto de letras proposicionales.*
  - C *un conjunto de conectivos.*
  - A *un conjunto de símbolos auxiliares.*

- *La sintaxis $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ es el conjunto de reglas que definen los objetos que llamaremos* ***fórmulas****, también nombradas* ***proposiciones****.*

Como se consideran lógicas proposicionales, la sintaxis está constituida por las reglas I-IV de la Definición 2, que de manera recursiva definen el concepto de fórmula.

Definición 2 *Una* **fórmula** *en el lenguaje $\mathcal{L}$ es una secuencia de símbolos del alfabeto que se construye recursivamente mediante las reglas:*

I. *Las letras proposicionales del alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ son fórmulas, habitualmente llamadas fórmulas atómicas*[1]*.*

II. *Si $\diamond$ es un conectivo del alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ y α_1, α_2 son fórmulas, entonces:*

   - *Si $\diamond$ es binario, $\alpha_1 \diamond \alpha_2$ también es una fórmula.*
   - *Si $\diamond$ es unario, $\diamond\alpha_1$ es una fórmula.*
   - *Si $\diamond$ es ceroario, entonces $\diamond$ es fórmula.*

III. *Toda secuencia de símbolos producida por la aplicación de los pasos I y II en cualquier orden, constituye una fórmula.*

IV. *Ninguna otra secuencia de símbolos es una fórmula.*

En la Definición 2 únicamente se hace mención a los tipos de conectivos que se emplean a lo largo de la tesis: ceroario, unario y binario. No obstante, existen conectivos de aridad mayor. Por lo que las definiciones y los resultados que se presentan en este capítulo pueden generalizarse.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, con $FORM(\mathcal{L})$ se denota el conjunto de fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$. Los elementos de $FORM(\mathcal{L})$ se denotan por letras minúsculas del alfabeto griego $\{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$. Los subconjuntos de $FORM(\mathcal{L})$, también denominados **teorías**, se representan por letras mayúsculas del alfabeto griego $\{\Gamma, \Delta, \Theta, ...\}$. Las letras proposicionales se denotan con letras minúsculas

[1] Es usual que a las fórmulas atómicas se les nombre átomos, en este trabajo los términos son indistintos.

del alfabeto $\{p, q, r, s, ...\}$ y el conjunto de fórmulas atómicas se representa por $ATOM(\mathcal{L})$. Notar que $ATOM(\mathcal{L}) \subseteq FORM(\mathcal{L})$, es decir, es una teoría.

En este trabajo se usan ocasionalmente subíndices para las letras proposicionales y para las fórmulas, se toma como conjunto de símbolos auxiliares a $\{(,),[,],\mathbf{,}\}$[2]. Además, todos los lenguajes que aquí se presentan tienen sintaxis establecida en la Definición 2. Así para que el lenguaje y las fórmulas generadas estén definidos basta establecer el conjunto de conectivos. Los conectivos a emplear son: conjunción, disyunción, implicación, negación y falso, respectivamente son denotados por $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ y $\perp$.

Ejemplo 1 (Lenguajes) *Sean $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ conectivos binarios, $\neg$ y $\perp$ conectivos unario y ceroario, respectivamente. Definimos los siguientes lenguajes:*

$$\mathcal{L}_1 \textit{ con } C = \{\wedge, \vee, \neg\},$$

$$\mathcal{L}_2 \textit{ con } C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\},$$

$$\mathcal{L}_3 \textit{ con } C = \{\rightarrow, \perp\}.$$

Ejemplo 2 (Fórmulas) *Considerando los lenguajes definidos en el ejemplo anterior y siguiendo la sintaxis establecida, podemos construir las siguientes fórmulas:*

$$\alpha_1 = (\neg p) \vee (q \rightarrow r),$$

$$\alpha_2 = (\neg p) \vee q,$$

$$\alpha_3 = (p \rightarrow \perp) \rightarrow p.$$

En la siguiente tabla se indica con ✓ que la fórmula pertenece al lenguaje, el caso contrario se denota con ✗.

	Lenguajes		
	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$
α_1	✗	✓	✗
α_2	✓	✓	✗
α_3	✗	✗	✓

[2]En algunos textos se emplean los símbolos $\top$ y $\perp$ como símbolos auxiliares, en la tesis se consideran como conectivos de aridad cero o funciones constantes y su interpretación corresponde a las constantes de verdad verdadero y falso respectivamente.

En el Ejemplo 1 podemos ver que el lenguaje $\mathcal{L}_2$ es más expresivo que los lenguajes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$, en el sentido que permite construir fórmulas de más tipos.

Otro concepto primordial para poder enunciar el concepto de lógica es el de sustitución, que permite manipular a los elementos de $FORM(\mathcal{L})$.

Definición 3 [15] *Una* **sustitución** σ *en un lenguaje* $\mathcal{L}$*, es un conjunto que tiene la forma* $\{p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \ldots, p_n/\beta_n\}$ *donde* $p_i \in ATOM(\mathcal{L})$*,* $p_i \neq p_j$ *si* $i \neq j$ *y* $\beta_i \in FORM(\mathcal{L})$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*. La sustitución* σ *aplicada a una fórmula* α*, denotada por* $\sigma(\alpha)$ *o por* $\alpha[p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \ldots, p_n/\beta_n]$*, es la fórmula que se obtiene al reemplazar cada ocurrencia de* p_i *en* α *por la fórmula* β_i *para toda* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *de manera simultánea. La sustitución* σ *aplicada a un conjunto de fórmulas* Γ *es el conjunto* $\sigma(\Gamma) = \{\sigma(\alpha) | \alpha \in \Gamma\}$*.*

Ejemplo 3 (Sustitución) *Sean* $\sigma = \{p_1/p_5 \vee p_3,\ p_2/\neg p_3,\ p_4/p_5 \rightarrow p_1\}$ *una sustitución y una fórmula* $\alpha = (p_1 \wedge p_2) \rightarrow (\neg p_1 \vee p_4)$ *del lenguaje* $\mathcal{L}_2$*, definido en el Ejemplo 1. Luego,*

$$\sigma(\alpha) = ((p_5 \vee p_3) \wedge (\neg p_3)) \rightarrow (\neg(p_5 \vee p_3) \vee (p_5 \rightarrow p_1)).$$

Note que en este caso $\sigma(\alpha)$ y α ambas son implicaciones, esta es una propiedad general de las sustituciones. A continuación se listan algunas propiedades importantes que cumplen las sustituciones.

Nota 1 *Si* σ *es una sustitución cualquiera en* $\mathcal{L}$ *y* $\alpha \in FORM(\mathcal{L})$*, entonces:*

I. *La sustitución no modifica la estructura de la fórmula, es decir* $\sigma(\alpha)$ *tiene la misma estructura que* α*, pero con longitud*[3] *mayor o igual a la de* α*.*

II. *Para cualquier conectivo* $\diamond$ *n-ario de* $\mathcal{L}$ *y cualesquiera* α_i *fórmulas, con* $0 \leq i \leq n$*, de* $\mathcal{L}$*. Se cumple que:* $\sigma(\diamond(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)) = \diamond(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3), \ldots, \sigma(\alpha_n))$*.*

III. *Cuando todos los* p_i *involucrados en los elementos* p_i/β_i *de la sustitución, son diferentes a los átomos presentes en* α*, la sustitución no modifica a la fórmula, es decir* $\sigma(\alpha) = \alpha$*.*

[3] La longitud de una fórmula es el número de conectivos presentes en la fórmula. Para $\alpha \in ATOM(\mathcal{L})$, su longitud es cero. Consideraremos que cualquier conectivo ceroario es de longitud cero, en particular $\perp$. Por ejemplo, las implicaciones $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \perp$ y $p_1 \rightarrow \perp$ son de longitud 2 y 1, respectivamente.

1.2. Teoría de modelos

La **teoría de modelos o semántica** se enfoca en el estudio de las relaciones entre lenguajes formales y sus interpretaciones en modelos adecuados.

Una manera de estudiar la semántica del lenguaje es mediante matrices multivaluadas. Las matrices multivaluadas son una herramienta de gran utilidad, pues permiten definir lógicas a través de ellas. Una matriz multivaluada es un mecanismo que permite describir el comportamiento de los conectivos.

Definición 4 [2] *Una* **matriz multivaluada** $\mathcal{M}$ *para el lenguaje* $\mathcal{L}$ *es una terna con la estructura* $\langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$*, donde*:

- $\mathcal{V}$ *es un conjunto no vacío, llamado conjunto de valores de verdad, denominado dominio.*
- $\mathcal{D}$ *es un subconjunto propio de* $\mathcal{V}$ *no vacío, conocido como conjunto de valores designados.*
- $\mathcal{O}$ *incluye una función n-aria* $\widehat{\diamond} : \mathcal{V}^n \to \mathcal{V}$ *por cada conectivo n-ario* $\diamond$ *de* $\mathcal{L}$*, denominada* ***interpretación del conectivo*** $\diamond$*. Donde* $\mathcal{V}^n = \underbrace{\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{nveces}$.

Dependiendo de la cardinalidad del dominio las matrices pueden ser *bivaluadas* cuando tienen dos elementos en el dominio o si el dominio tiene tres valores de verdad las matrices se denominan *trivaluadas.*

Por otra parte, los elementos del conjunto de valores designados $\mathcal{D}$ están asociados con la noción de verdadero, debido a que permiten definir cuando una fórmula es *válida* (ver Definición 9) y cuando se satisface. Con $\overline{\mathcal{D}}$ se denota al conjunto $\mathcal{V} \setminus \mathcal{D}$.

Ejemplo 4 (Matriz bivaluada) *Considerando el lenguaje* $\mathcal{L}_1$ *del Ejemplo 1, una matriz para él es* $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$*, donde* $\mathcal{V} = \{0, 1\}$*,* $\mathcal{D} = \{1\}$ *y* $\mathcal{O} = \{\widehat{\wedge}, \widehat{\vee}, \widehat{\neg}\}$*. Las funciones de* $\mathcal{O}$ *están definidas como sigue*:

$\widehat{\wedge} : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}$,

$$\widehat{\wedge}(v_1, v_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_1 = 0 \ o \ v_2 = 0; \\ 1, & \text{si } v_1 = 1 \ y \ v_2 = 1. \end{cases}$$

$\widehat{\vee} : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}$,

$$\widehat{\vee}(v_1, v_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_1 = 0 \ y \ v_2 = 0; \\ 1, & \text{si } v_1 = 1 \ o \ v_2 = 1. \end{cases}$$

$\widehat{\neg} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$,

$$\widehat{\neg}(v_1) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_1 = 1; \\ 1, & \text{si } v_2 = 0. \end{cases}$$

Observe que la interpretación $\widehat{\diamond}$ de los conectivos es arbitraria, de modo que si alguna de estas interpretaciones se cambia, la matriz que se obtiene es diferente a $\mathcal{M}_1$.

Ejemplo 5 (Matriz bivaluada) *Una matriz $\mathcal{M}_2$ para el lenguaje $\mathcal{L}_2$ del Ejemplo 1, es la matriz que se obtiene al añadir a $\mathcal{M}_1$ alguna interpretación $\widehat{\to}$ para el conectivo $\to$. En particular se puede elegir la función $\widehat{\to} : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}$, definida por*:

$$\widehat{\to}(v_1, v_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_1 = 1 \ y \ v_2 = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una forma simplificada de representar a las interpretaciones de los conectivos, y que usaremos en adelante, es mediante el uso de tablas de verdad. Enseguida se explica como es que estas se construyen.

Para un lenguaje $\mathcal{L}$, si $\diamond$ es algún conectivo y α, β son fórmulas de $\mathcal{L}$. Se pueden tener los siguientes tipos de tablas, donde $v_i,\ v_i^*,\ v_{i,j}^* \in \mathcal{V}$.

Si $\diamond$ es un conectivo binario se tiene la Tabla 1.1 que corresponde a $\diamond(\alpha, \beta)$, donde la primera columna corresponde a los valores de verdad v_i que puede tener α y el primer renglón tiene los valores de verdad v_j de β. Además $v_{i,j}^* = \widehat{\diamond}(v_i, v_j)$, es decir $v_{i,j}^*$ es el valor de verdad que asigna $\widehat{\diamond}$ cuando α y β toman el valor de verdad v_i y v_j, respectivamente.

La Tabla 1.2 muestra el caso cuando $\diamond$ es un conectivo unario y corresponde a $\diamond\alpha$. La primera columna indica los valores de verdad v_i de α y la segunda columna tiene el valor $v_i^* = \widehat{\diamond}(v_i)$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
\widehat{\diamond} & v_1 & v_2 & \cdots & v_{|\mathcal{V}|} \\
\hline
v_1 & v^*_{1,1} & v^*_{1,2} & \cdots & v^*_{1,|\mathcal{V}|} \\
v_2 & v^*_{2,1} & v^*_{2,2} & \cdots & v^*_{2,|\mathcal{V}|} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
v_{|\mathcal{V}|} & v^*_{|\mathcal{V}|,1} & v^*_{|\mathcal{V}|,2} & \cdots & v^*_{|\mathcal{V}|,|\mathcal{V}|}
\end{array}
$$

Tabla 1.1: Tabla conectivo binario.

Por último la Tabla 1.3 muestra el caso de tener un conectivo ceroario o constante, donde v^* representa un valor constante asociado a $\diamond$.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \widehat{\diamond} \\
\hline
v_1 & v^*_1 \\
v_2 & v^*_2 \\
\vdots & \vdots \\
v_{|\mathcal{V}|} & v^*_{|\mathcal{V}|}
\end{array}
$$

Tabla 1.2: Tabla conectivo unario.

$$
\begin{array}{|c}
\widehat{\diamond} \\
\hline
v^*
\end{array}
$$

Tabla 1.3: Tabla conectivo ceroario.

De los esquemas de tablas mostrados en las Tablas 1.1, 1.2 y 1.3 se observa que cada tabla de un conectivo ceroario tiene $|\mathcal{V}|^0$ elementos, en el caso de un conectivo unario tiene $|\mathcal{V}|^1$ elementos y si $\diamond$ es binario tiene $|\mathcal{V}|^2$ elementos.

Se debe notar que al emplear tablas de verdad para representar las interpretaciones de los conectivos, una matriz queda completamente definida si se especifica el conjunto de valores designados $\mathcal{D}$ y se muestran sus tablas de verdad. Por lo que en adelante cuando se presente una matriz únicamente se especificarán dichos elementos.

Ejemplo 6 (Matriz bivaluada) *Considerando $\mathcal{D} = \{1\}$, en la Tabla 1.4 se muestran las tablas de verdad de los conectivos de la matriz $\mathcal{M}_1$ del Ejemplo 4. Más aún, las tablas de verdad de la matriz $\mathcal{M}_2$ del Ejemplo 5 son las Tablas 1.4 y 1.5.*

$\widehat{\neg}$	
0	1
1	0

$\widehat{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\widehat{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 1.4: Tablas de $\mathcal{M}_1$.

$\widehat{\to}$	0	1
0	1	1
1	0	1

Tabla 1.5: Implicación de $\mathcal{M}_2$.

Definición 5 [16] *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz para él, una* **valuación** *es cualquier función $\mathbf{v} : ATOM(\mathcal{L}) \to \mathcal{V}$.*

Ejemplo 7 (Valuación) *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con $P = \{p, q\}$ y $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz para él, donde $\mathcal{V} = \{0, 1\}$. Una valuación es: $\mathbf{v_1}(p) = 0$, $\mathbf{v_1}(q) = 0$.*

En la Tabla 1.6 se encuentran todas las posibles valuaciones para el lenguaje $\mathcal{L}$. Observe que las valuaciones de la Tabla 1.6 se pueden abreviar gráficamente tal como se muestra en la Tabla 1.7. De manera similar la Tabla 1.8 muestra las valuaciones para el caso $P = \{p, q, r\}$. En ambas tablas las primeras filas muestran los átomos de $\mathcal{L}$, las primeras columnas corresponden al nombre de la valuación $\mathbf{v}$ y las columnas consecutivas tienen el valor del respectivo átomo bajo $\mathbf{v}$.

	p	q
$\mathbf{v}_1$	0	0

	p	q
$\mathbf{v}_2$	0	1

	p	q
$\mathbf{v}_3$	1	0

	p	q
$\mathbf{v}_4$	1	1

Tabla 1.6: Valuaciones para $\mathcal{L}$, con $P = \{p, q\}$.

	p	q
$\mathbf{v}_1$	0	0
$\mathbf{v}_2$	0	1
$\mathbf{v}_3$	1	0
$\mathbf{v}_4$	1	1

Tabla 1.7: Valuaciones para $\mathcal{L}$, con $P = \{p, q\}$.

	p	q	r
$\mathbf{v}'_1$	0	0	0
$\mathbf{v}'_2$	0	0	1
$\mathbf{v}'_3$	0	1	0
$\mathbf{v}'_4$	0	1	1
$\mathbf{v}'_5$	1	0	0
$\mathbf{v}'_6$	1	0	1
$\mathbf{v}'_7$	1	1	0
$\mathbf{v}'_8$	1	1	1

Tabla 1.8: Valuaciones para $\mathcal{L}$, con $P = \{p, q, r\}$.

En el Ejemplo 7 se tiene que $|\mathcal{V}| = 2$, luego para cualquier átomo α del lenguaje, $\mathbf{v}_1(\alpha)$ tiene dos opciones para ser definida. Por lo que en el caso $P = \{p, q\}$ se tienen 2^2 valuaciones, mientras que cuando $P = \{p, q, r\}$ hay $2^3 = 8$ valuaciones. Esta observación se cumple de manera general como más adelante lo indica la Nota 2.

Definición 6 *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathcal{M}$ una matriz para él y* $\mathbf{v}$ *una valuación. Una* **interpretación** *es cualquier función $[*]_{\mathbf{v}} : FORM(\mathcal{L}) \to \mathcal{V}$, del conjunto de fórmulas del lenguaje al conjunto $\mathcal{V}$ de valores de verdad, que se define recursivamente como:*

$$[\alpha]_{\mathbf{v}} = \begin{cases} \mathbf{v}(\alpha), & \text{si } \alpha \in ATOM(\mathcal{L}); \\ \widehat{\diamond}, & \text{si } \alpha = \diamond \text{ ceroario;} \\ \widehat{\diamond}([\gamma_1]_{\mathbf{v}}), & \text{si } \alpha = \diamond\gamma_1 \text{ y } \diamond \text{ unario;} \\ \widehat{\diamond}([\gamma_1]_{\mathbf{v}}, [\gamma_2]_{\mathbf{v}}), & \text{si } \alpha = \gamma_1 \diamond \gamma_2 \text{ y } \diamond \text{ binario;} \end{cases}$$

donde, $\gamma_1, \gamma_2 \in FORM(\mathcal{L})$.

Observe que una interpretación es la extensión de una función valuación al conjunto de fórmulas del lenguaje. Además una interpretación es el instrumento que permite evaluar a las fórmulas.

Ejemplo 8 (Interpretación) *Considere un lenguaje $\mathcal{L}$ con conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$ y cuya matriz es $\mathcal{M} = \langle\{0, 1\}, \{1\}, \mathcal{O}\rangle$, con las interpretaciones de los conectivos mostradas en la Tabla 1.9. Para la valuación $\mathbf{v}_3(p) = 1$ y $\mathbf{v}_3(q) = 0$, se define la interpretación $[*]_{\mathbf{v}_3}$, como $FORM(\mathcal{L}) \to \mathcal{V}$:*

$\widehat{\neg}$	
0	1
1	0

$\widehat{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\widehat{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 1.9: Tablas de $\mathcal{M}$.

$$[\alpha]_{\mathbf{v}_3} = \begin{cases} \mathbf{v}_3(\alpha) = 1, & \text{si } \alpha = p; \\ \mathbf{v}_3(\alpha) = 0, & \text{si } \alpha = q; \\ \widehat{\neg}([\gamma_1]_{\mathbf{v}_3}), & \text{si } \alpha = \neg\gamma_1; \\ \widehat{\wedge}([\gamma_1]_{\mathbf{v}_3}, [\gamma_2]_{\mathbf{v}_3}), & \text{si } \alpha = \gamma_1 \wedge \gamma_2; \\ \widehat{\vee}([\gamma_1]_{\mathbf{v}_3}, [\gamma_2]_{\mathbf{v}_3}), & \text{si } \alpha = \gamma_1 \vee \gamma_2. \end{cases}$$

Notemos que $[*]_{\mathbf{v}_3}$ *es una de las cuatro posibles interpretaciones para el lenguaje, debido a que hay* 4 *valuaciones.*

Tomando en cuenta los elementos del Ejemplo 8, la interpretación de la fórmula $\neg(p \vee q) \wedge p$ bajo $[*]_{\mathbf{v}_3}$ se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [\neg(p \vee q) \wedge p]_{\mathbf{v}_3} &= \widehat{\wedge}([\neg(p \vee q)]_{\mathbf{v}_3}, [p]_{\mathbf{v}_3}) \\ &= \widehat{\wedge}(\widehat{\neg}([p \vee q]_{\mathbf{v}_3}), \mathbf{v}_3(p)) \\ &= \widehat{\wedge}(\widehat{\neg}(\widehat{\vee}([p]_{\mathbf{v}_3}, [q]_{\mathbf{v}_3})), \mathbf{v}_3(p)) \\ &= \widehat{\wedge}(\widehat{\neg}(\widehat{\vee}(\mathbf{v}_3(p), \mathbf{v}_3(q))), \mathbf{v}_3(p)) \\ &= \widehat{\wedge}(\widehat{\neg}(\widehat{\vee}(1, 0)), 1) \\ &= \widehat{\wedge}(\widehat{\neg}(1), 1) \\ &= \widehat{\wedge}(0, 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, la interpretación de $\neg(p \vee q) \wedge p$ bajo $[*]_{\mathbf{v}_3}$ es 0.

Considerando el comentario final del Ejemplo 8, se debe observar que el valor de la interpretación de la fórmula $\neg(p \vee q) \wedge p$ depende de la interpretación $[*]_{\mathbf{v}_i}$ seleccionada.

Nota 2 *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{M}$ una matriz para $\mathcal{L}$, existen $|\mathcal{V}|^{|P|}$ valuaciones (e interpretaciones) para el lenguaje, donde $\mathcal{V}$ es el conjunto de valores de verdad y P el conjunto de letras proposicionales.*

Definición 7 *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{M}$ una matriz para él, se dice que las fórmulas α_1 y α_2, son* ***lógicamente equivalentes*** *si para toda interpretación $[*]_{\mathbf{v}}$ se cumple:*

$$[\alpha_1]_{\mathbf{v}} = [\alpha_2]_{\mathbf{v}}$$

Es decir, para cualquier interpretación las fórmulas tienen el mismo valor de verdad.

La equivalencia lógica cumple ser reflexiva, simétrica y transitiva es decir es una relación de equivalencia. De modo que cuando algunas fórmulas son lógicamente equivalentes, de manera coloquial, se dice que dichas fórmulas significan lo mismo o que tienen igual significado.

Nota 3 *Para analizar si algunas fórmulas son lógicamente equivalentes, únicamente son de interés aquellas interpretaciones, que al restringirlas al conjunto de letras que están presentes en las fórmulas resultan ser distintas.*

Ejemplo 9 (Fórmulas lógicamente equivalentes) *Considerando la matriz $\mathcal{M}_2$ del Ejemplo 5 y las valuaciones del Ejemplo 7. Se cumple que las fórmulas $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$ y $\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ son lógicamente equivalentes. En efecto, la Tabla 1.10 muestra las interpretaciones relevantes para las fórmulas $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$ y $\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, en donde se puede observar que en cada caso la tercera columna corresponde al valor de la interpretación $[p \to q]_{\mathbf{v}_i}$ y la quinta columna corresponde al de $[\neg p \vee q]_{\mathbf{v}_i}$. Más aún, en cada caso dichas columnas son iguales y por lo tanto las fórmulas son lógicamente equivalentes.*

La Tabla 1.10 se puede resumir como se muestra en la Tabla 1.11. En adelante siempre que se requiera mostrar las interpretaciones de fórmulas, se empleará una sola tabla que contenga a todas.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	1	1	1	1

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	0	0	0	0

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	0	0	0	0

Tabla 1.10: Interpretaciones de las fórmulas $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$ y $\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}$.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Tabla 1.11: Tabla de fórmulas lógicamente equivalentes.

Definición 8 *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathcal{M}$ una matriz para él y $[*]_{\mathbf{v}}$ una interpretación. Se dice que*:

I. *La interpretación $[*]_{\mathbf{v}}$ es* **modelo de una fórmula** *$\alpha \in FORM(\mathcal{L})$, si $[\alpha]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$; en tal caso se dice que $[*]_{\mathbf{v}}$ modela a α.*

II. *La interpretación $[*]_{\mathbf{v}}$ es un* **modelo de una teoría** *Γ, si para cada $\alpha \in \Gamma$ se cumple que $[*]_{\mathbf{v}}$ modela a α. Se denota por $[\Gamma]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$.*

Ejemplo 10 (Modelo de una fórmula) *Tomando la matriz $\mathcal{M}_1$ del Ejemplo 4 y las valuaciones del Ejemplo 7. Se sigue que la interpretación $[*]_{\mathbf{v}}$ que hace que $[p]_{\mathbf{v}} = 1$ y $[q]_{\mathbf{v}} = 0$ es modelo de $p \vee q$. En efecto, $[p \vee q]_{\mathbf{v}} = \widehat{\vee}([p]_{\mathbf{v}}, [q]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\vee}(1, 0) = 1 \in \mathcal{D}$, luego $[p \vee q]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$.*

Ejemplo 11 (Modelo de una teoría) *Considerando las hipótesis del Ejemplo 10, se tiene que la interpretación $[*]_{\mathbf{v}}$ que hace que $[p]_{\mathbf{v}} = 0$, $[q]_{\mathbf{v}} = 1$ y $[r]_{\mathbf{v}} = 1$ es modelo de la siguiente teoría, $\Gamma = \{\neg p, q, r, \neg p \wedge q, \neg p \wedge r, q \wedge r, \neg(p \wedge q), \neg(p \wedge r), p \vee q, p \vee r, q \vee r\}$. Se cumple que $[*]_{\mathbf{v}}$ es modelo de $\neg p, q$ y r pues $1 \in \mathcal{D}$, veamos que la interpretación es modelo del resto de los elementos de la teoría:*

- $[\neg p \wedge q]_{\mathbf{v}} = \widehat{\wedge}([\neg p]_{\mathbf{v}}, [q]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\wedge}(\widehat{\neg}([p]_{\mathbf{v}}), [q]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\wedge}(1,1) = 1.$

- $[\neg p \wedge r]_{\mathbf{v}} = \widehat{\wedge}([\neg p]_{\mathbf{v}}, [r]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\wedge}(\widehat{\neg}([p]_{\mathbf{v}}), [r]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\wedge}(1,1) = 1.$

- $[q \wedge r]_{\mathbf{v}} = \widehat{\wedge}([q]_{\mathbf{v}}, [r]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\wedge}(1,1) = 1.$

- $[\neg(p \wedge q)]_{\mathbf{v}} = \widehat{\neg}([p \wedge q]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\neg}(\widehat{\wedge}([p]_{\mathbf{v}}, [q]_{\mathbf{v}})) = \widehat{\neg}(\widehat{\wedge}(0,1)) = \widehat{\neg}(0) = 1.$

- $[\neg(p \wedge r)]_{\mathbf{v}} = \widehat{\neg}([p \wedge r]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\neg}(\widehat{\wedge}([p]_{\mathbf{v}}, [r]_{\mathbf{v}})) = \widehat{\neg}(\widehat{\wedge}(0,1)) = \widehat{\neg}(0) = 1.$

- $[p \vee q]_{\mathbf{v}} = \widehat{\vee}([p]_{\mathbf{v}}, [q]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\vee}(0,1) = 1.$

- $[p \vee r]_{\mathbf{v}} = \widehat{\vee}([p]_{\mathbf{v}}, [r]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\vee}(0,1) = 1.$

- $[q \vee r]_{\mathbf{v}} = \widehat{\vee}([q]_{\mathbf{v}}, [r]_{\mathbf{v}}) = \widehat{\vee}(1,1) = 1.$

De todo lo anterior se sigue que $[\Gamma]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$.

Definición 9 *Sean* $\mathcal{L}$ *un lenguaje,* $\mathcal{M}$ *una matriz para él y* $\alpha \in FORM(\mathcal{L})$, *se dice que* α *es* **válida** (*o que es una* ***tautología***) *en* $\mathcal{M}$ *si para toda valuación* $\mathbf{v}$ *se tiene que* $[\alpha]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$, *se denota por* $\models_{\mathcal{M}} \alpha$.

Ejemplo 12 (Tautología) *Sea* $\mathcal{M} = \langle \{0,1\}, \{1\}, \{\widehat{\wedge}, \widehat{\vee}, \widehat{\neg}\} \rangle$ *una matriz cuyas interpretaciones de conectivos se muestran en la Tabla 1.12; se cumple que la fórmula* $p \vee \neg p$ *es válida. Note que las únicas valuaciones relevantes para la fórmula son* $\mathbf{v}(p) = 0$ *y* $\mathbf{v}(p) = 1$, *y en cualquiera de ellas se satisface que* $\mathbf{v}(p \vee \neg p) = 1$. *Así, la fórmula es una tautología.*

$\widehat{\neg}$	
0	1
1	0

$\widehat{\wedge}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\widehat{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 1.12: Tablas de $\mathcal{M}$.

1.3. Lógica

El siguiente concepto es medular en la tesis, cabe señalar que este concepto depende del tipo de lenguaje que se utilice. Por el contexto de esta tesis se presenta la Definición 10, que es ampliamente utilizada por los principales exponentes del área de lógica. Además, hace posible la compatibilidad del enfoque de teoría de modelos con el de teoría de prueba; como lo refleja el Teorema 4. Por último, esta definición es adecuada para desarrollar el concepto de *paraconsistencia*.

Definición 10 [10] *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, una* **lógica** *es un conjunto de fórmulas $\mathbf{L} \subset FORM(\mathcal{L})$ tal que:*

I. $\mathbf{L}$ *es cerrado bajo* Modus Ponens *es decir, si $\alpha \in \mathbf{L}$ y $\alpha \to \beta \in \mathbf{L}$, entonces $\beta \in \mathbf{L}$.*

II. $\mathbf{L}$ *es cerrado bajo* sustitución *es decir, si $\alpha \in \mathbf{L}$, entonces para cualquier sustitución σ se tiene que $\sigma(\alpha) \in \mathbf{L}$.*

A los elementos de $\mathbf{L}$ se les denomina ***teoremas****. Habitualmente la notación $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ se emplea para establecer que α es un teorema de $\mathbf{L}$ (es decir que $\alpha \in \mathbf{L}$). Cuando la lógica en cuestión quede clara por el contexto se puede omitir el subíndice $\mathbf{L}$ de $\vdash_{\mathbf{L}}$.*

Es importante notar que la Definición 10 no es restrictiva respecto a los conectivos de un lenguaje, pues no obliga a que el lenguaje tenga un conectivo $\to$. Si ese fuera el caso, la cerradura bajo *Modus Ponens* se cumpliría trivialmente.

Definición 11 *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ con una matriz $\mathcal{M}$, la* ***lógica inducida por la matriz*** *$\mathcal{M}$ es el conjunto $\mathbf{L}_{\mathcal{M}} := \{\alpha \in FORM(\mathcal{L}) | \models_{\mathcal{M}} \alpha\}$.*

En el Teorema 1 se demuestra que la lógica inducida por una matriz satisface la Definición 10. Para ello se necesitan algunos resultados auxiliares, presentados en la Definición 12 y las Proposiciones 1 y 2.

Definición 12 *Sea $\mathcal{M}$ una matriz para el lenguaje $\mathcal{L}$. Un conectivo $\to$ se denomina* **implicación** *si cumple que para toda valuación $\mathbf{v}$ y para cualesquiera $\alpha,\ \beta \in FORM(\mathcal{L})$, siempre que $[\alpha]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$ y $[\alpha \to \beta]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$ entonces $[\beta]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$.*

Proposición 1 *Para un lenguaje $\mathcal{L}$, si $\mathcal{M}$ es una matriz,* $\mathbf{v}$ *una valuación y σ una sustitución tal que $\sigma = \{p_1 \diagup \beta_1, p_2 \diagup \beta_2, ..., p_m \diagup \beta_m\}$ entonces, se puede construir una interpretación* $\mathbf{v}'$ *tal que para toda $\alpha \in FORM(\mathcal{L})$, se cumple que $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$.*

La Proposición 1 señala que dadas una valuación $\mathbf{v}$, una sustitución σ y una fórmula α, al conocer el valor de $[\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$ podemos encontrar una valuación $\mathbf{v}'$ de modo que, la interpretación de la fórmula sin la sustitución evaluada en $[*]_{\mathbf{v}'}$ coincida con $[\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$. Por ejemplo si consideramos la matriz $\mathcal{M}$ del Ejemplo 12, la fórmula $\alpha = p \wedge (\neg q \vee r)$, la valuación $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}(p) = 0$, $\mathbf{v}(q) = 1$, $\mathbf{v}(r) = 1$ y $\mathbf{v}(s) = 0$ y la sustitución $\sigma = \{p/\neg s,\ r/q \vee s\}$. Se define la valuación $\mathbf{v}' : ATOM(\mathcal{L}) \to \mathcal{V}$,

$$\mathbf{v}'(a) = \begin{cases} [\neg s]_{\mathbf{v}} & \text{si } a = p; \\ [q \vee s]_{\mathbf{v}} & \text{si } a = r; \\ \mathbf{v}(\mathrm{a}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $\sigma(\alpha) = \neg s \wedge (\neg q \vee (q \vee s))$, además se puede verificar que$[\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}} = 1$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} [\alpha]_{\mathbf{v}'} = [p \wedge (\neg q \vee r)]_{\mathbf{v}'} &= \widehat{\wedge}([p]_{\mathbf{v}'}, [\neg q \vee r]_{\mathbf{v}'}) \\ &= \widehat{\wedge}([\neg s]_{\mathbf{v}}, \widehat{\vee}([\neg q]_{\mathbf{v}'}, [r]_{\mathbf{v}'})) \\ &= \widehat{\wedge}(1, \widehat{\vee}(\widehat{\neg}([q]_{\mathbf{v}'}), [q \vee s]_{\mathbf{v}})) \\ &= \widehat{\wedge}(1, \widehat{\vee}(\widehat{\neg}([q]_{\mathbf{v}}), 1)) \\ &= \widehat{\wedge}(1, 1) = 1 \end{aligned}$$

Así $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$.

Para la prueba de la Proposición 1 se propone una valuación $\mathbf{v}'$ cuya definición depende de los elementos de σ, después se demuestra por inducción que para toda fórmula α se tiene $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$.

Demostración Considerando las hipótesis, se define la siguiente valuación $\mathbf{v}' : ATOM(\mathcal{L}) \to \mathcal{V}$,

$$\mathbf{v}'(a) = \begin{cases} [\beta_i]_{\mathbf{v}}, & \text{si } a = p_i,\ \textit{para un } i \in \{1, 2, \ldots, m\}; \\ \\ \mathbf{v}(a), & \text{si } a \neq p_i,\ \textit{para todo } i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \end{cases}$$

Sea $\alpha \in FORM(\mathcal{L})$, la prueba se hará por inducción sobre la longitud n de α.

Caso Base: Cuando $\boldsymbol{n = 0}$, α puede ser un átomo o un conectivo ceroario. Si α es un átomo se tienen dos posibilidades:

$[\boldsymbol{\alpha = p_i}]$ Si $\alpha = p_i$ para algún i, entonces $\sigma(\alpha) = \beta_i$, donde β_i es la correspondiente fórmula a sustituir. Así que $\mathbf{v}'(\alpha) = [\beta_i]_{\mathbf{v}} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$ y por la Definición 6 $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = \mathbf{v}'(\alpha)$, de donde se sigue que $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$.

$[\boldsymbol{\alpha \neq p_i}]$ Si $\alpha \neq p_i$ para todo i, entonces de la definición de $\mathbf{v}'$ se cumple que $\mathbf{v}'(\alpha) = \mathbf{v}(\alpha)$, luego $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\alpha]_{\mathbf{v}}$. Además, por la Nota 1 se tiene que $\sigma(\alpha) = \alpha$, así $[\alpha]_{\mathbf{v}} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$.
En ambos casos $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$.

Por otro lado, si $\boldsymbol{\alpha = \diamond}$ y $\diamond$ es un conectivo ceroario, entonces su valor $\widehat{\diamond}$ es constante. Luego $\sigma(\alpha) = \diamond$, por lo tanto $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = \widehat{\diamond} = [\diamond]_{\mathbf{v}} = [\sigma(\diamond)]_{\mathbf{v}}$.

***Hipótesis de inducción*:** Supongamos que para toda fórmula α de longitud menor o igual a n, se cumple que $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$.

***Paso inductivo*:** Supongamos que α tiene longitud $n+1$ se tienen los siguientes casos:

$[\boldsymbol{\alpha = \diamond\beta}]$ Supongamos que $\alpha = \diamond\beta$, con $\diamond$ algún conectivo unario y β una fórmula de longitud n. Por hipótesis de inducción $[\beta]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$. Además,

$$\begin{aligned}
[\alpha]_{\mathbf{v}'} &= [\diamond\beta]_{\mathbf{v}'}, && \textbf{pues } \boldsymbol{\alpha = \diamond\beta}\textbf{;}\\
&= \widehat{\diamond}[\beta]_{\mathbf{v}'}, && \textbf{Definición 6;}\\
&= \widehat{\diamond}[\sigma(\beta)_{\mathbf{v}}], && \textbf{hipótesis;}\\
&= [\diamond\sigma(\beta)]_{\mathbf{v}}, && \textbf{Definición 6;}\\
&= [\sigma(\diamond\beta)]_{\mathbf{v}}, && \textbf{punto II Nota 1;}\\
&= [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}.
\end{aligned}$$

$[\boldsymbol{\alpha = \beta_1 \diamond \beta_2}]$ Para $\alpha = \beta_1 \diamond \beta_2$, con $\diamond$ un conectivo binario y $\beta_1,\ \beta_2$ fórmulas tales que la suma de sus longitudes es n, se tiene que por hipótesis de inducción se cumple que $[\beta_1]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\beta_1)]_{\mathbf{v}}$ y $[\beta_2]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\beta_2)]_{\mathbf{v}}$. También,

$$
\begin{aligned}
[\alpha]_{\mathbf{v}'} =& [\beta_1 \diamond \beta_2]_{\mathbf{v}'}, & \textbf{pues } \boldsymbol{\alpha = \beta_1 \diamond \beta_2;}\\
&= \widehat{\diamond}([\beta_1]_{\mathbf{v}'}, [\beta_2]_{\mathbf{v}'}), & \textbf{Definición 6;}\\
&= \widehat{\diamond}([\sigma(\beta_1)]_{\mathbf{v}}, [\sigma(\beta_2)]_{\mathbf{v}}), & \textbf{hipótesis;}\\
&= [\sigma(\beta_1) \diamond \sigma(\beta_2)]_{\mathbf{v}}, & \textbf{Definición 6;}\\
&= [\sigma(\beta_1 \diamond \beta_2)]_{\mathbf{v}}, & \textbf{punto II Nota 1;}\\
&= [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}.
\end{aligned}
$$

con todo lo anterior queda demostrado que $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$. ■

La siguiente proposición establece que si una fórmula, α, es tautología y σ es cualquier sustitución, entonces $\sigma(\alpha)$ también es tautología.

Proposición 2 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{M}$ una matriz para él. Para cualquier $\alpha \in FORM(\mathcal{L})$, si $\models_{\mathcal{M}} \alpha$ entonces para toda sustitución σ se cumple que $\models_{\mathcal{M}} \sigma(\alpha)$.*

Demostración Sea $[*]_{\mathbf{v}}$ una interpretación arbitraria. Considerando las hipótesis se construye la interpretación $[*]_{\mathbf{v}'}$ como se indica en la demostración de la Proposición 1. Dado que $\models_{\mathcal{M}} \alpha$ entonces se cumple que para cualquier interpretación $[*]_{\mathbf{v}^*}$, la interpretación de α es designado, es decir $[\alpha]_{\mathbf{v}^*} \in \mathcal{D}$, en particular para $[*]_{\mathbf{v}'}$, luego $[\alpha]_{\mathbf{v}'} \in \mathcal{D}$. Pero $[\alpha]_{\mathbf{v}'} = [\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}}$, así que $[\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$. Como $[*]_{\mathbf{v}}$ se selecciona de manera arbitraria, entonces $\models_{\mathcal{M}} \sigma(\alpha)$. ■

Ya se tienen las herramientas necesarias para demostrar que las lógicas inducidas por matrices son lógicas.

Teorema 1 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{M}$ una matriz para él, se cumple que $\mathbf{L}_{\mathcal{M}}$ es una lógica.*

Demostración Por definición se tiene que $\mathbf{L}_{\mathcal{M}} = \{\alpha \in FORM(\mathcal{L}) | \models_{\mathcal{M}} \alpha\}$. Si la matriz $\mathcal{M}$ carece de un conectivo de implicación, trivialmente se cumple la cerradura bajo *Modus Ponens*. Supongamos que $\mathcal{M}$ contiene un conectivo de implicación. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}$ cualesquiera fórmulas y σ alguna sustitución en $\mathcal{L}$, se cumple:

Cerradura bajo *Modus Ponens* Supongamos que $\alpha,\ \alpha \to \beta \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}$. Eso significa que $\models_{\mathcal{M}} \alpha$ y también $\models_{\mathcal{M}} \alpha \to \beta$, luego por Definición 12 se sigue que $\models_{\mathcal{M}} \beta$, así $\beta \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}$.

Cerradura bajo sustitución Se tiene que $\models_{\mathcal{M}} \alpha$, de la Proposición 2 se sigue que $\models_{\mathcal{M}} \sigma(\alpha)$, así $\sigma(\alpha) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}$. ■

En el siguiente ejemplo se muestran algunas definiciones de Lógica Clásica empleando matrices multivaluadas. Si se emplea una herramienta diferente a teoría de modelos, para estudiar a la Lógica Clásica, la definición es diferente.

Ejemplo 13 (Definiciones de Lógica Clásica) *La Lógica Clásica se puede definir de las siguientes maneras:*

- *La lógica inducida por la matriz $\mathcal{M}_1$ en el lenguaje $\mathcal{L}_1$. Vea el Ejemplo 6.*
- *La lógica inducida por la matriz $\mathcal{M}_2$ en el lenguaje $\mathcal{L}_2$. Vea el Ejemplo 6.*
- *La lógica inducida por la matriz $\mathcal{M}_3$ en el lenguaje $\mathcal{L}_3$; donde, la matriz $\mathcal{M}_3 = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ con $\mathcal{V} = \{0, 1\}$, $\mathcal{D} = \{1\}$ y $\mathcal{O} = \{\widehat{\rightarrow}, \widehat{\bot}\}$; cuyas tablas de verdad se muestran en la Tabla 1.13.*

$$
\begin{array}{|c}
\multicolumn{1}{c}{\widehat{\bot}} \\ \hline
0 \\
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
\widehat{\rightarrow} & 0 & 1 \\ \hline
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Tabla 1.13: Tablas de $\mathcal{M}_3$.

El hecho de poder definir a la Lógica Clásica en más de un lenguaje, se debe a que considerando las matrices dadas es posible tener abreviaciones de unos conectivos en términos de otros. En las pruebas de los Teoremas 2 y 3 se muestran casos particulares de abreviaciones.

Los Teoremas 2 y 3 hacen referencia a traducciones, en el sentido de tomar una fórmula en el lenguaje $\mathcal{L}_*$ y aplicarle una función de traducción adecuada, que permita obtener la fórmula β del lenguaje $\mathcal{L}_{**}$, tal que α y β sean lógicamente equivalentes.

Para comparar[4] dos o más lenguajes ($\mathcal{L}_*$ *y* $\mathcal{L}_{**}$) estos deben coincidir en el conjunto de símbolos auxiliares y el de letras proposicionales. Es decir, se sobrentiende que $ATOM(\mathcal{L}_*) = ATOM(\mathcal{L}_{**})$. Más aún, los lenguajes necesitan tener la misma sintaxis.

Teorema 2 *Para el lenguaje $\mathcal{L}_2$, con la matriz $\mathcal{M}_2$, existe una traducción de sus fórmulas en fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}_3$, con la matriz $\mathcal{M}_3$.*

Demostración Se propone la siguiente función recursiva f como una traducción.
$f : FORM(\mathcal{L}_2) \to FORM(\mathcal{L}_3)$;

$$f(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in ATOM(\mathcal{L}_2); \\ f(\gamma) \to \bot, & \text{si } \alpha = \neg\gamma; \\ (f(\gamma_1) \to \bot) \to f(\gamma_2), & \text{si } \alpha = \gamma_1 \vee \gamma_2; \\ [[(f(\gamma_1) \to \bot) \to \bot] \to (f(\gamma_2) \to \bot)] \to \bot, & \text{si } \alpha = \gamma_1 \wedge \gamma_2. \end{cases}$$

Sea $\alpha \in FORM(\mathcal{L}_2)$. Ver que f es una función de traducción para $\mathcal{L}_2$, se resume a verificar que α y $f(\alpha)$ son lógicamente equivalentes. La prueba se hará por inducción sobre la longitud de la fórmula.

Caso Base: Si $n = 0$, entonces no hay conectivos en α; esto es $\alpha \in ATOM(\mathcal{L}_2)$. De modo que $f(\alpha) = \alpha$, por la definición de f. Luego, α y $f(\alpha)$ son lógicamente equivalentes.

Hipótesis de inducción: Supongamos que para toda fórmula α de longitud menor o igual a n se cumple que α es lógicamente equivalente a $f(\alpha)$.

Paso inductivo: Suponga que α tiene longitud $n+1$, se tienen los siguientes casos:

$[\boldsymbol{\alpha = \neg\beta}]$ Para $\alpha = \neg\beta$, con β una fórmula de longitud n. Se analiza la Tabla 1.14, donde hay que notar que debido a la hipótesis de inducción, las columnas que contienen los valores de β y $f(\beta)$ son idénticas. Por otra parte, se cumple que $f(\alpha) = f(\neg\beta) = f(\beta) \to \bot$. Así la comparación de las últimas columnas de cada tabla permite verificar que α y $f(\alpha)$ son lógicamente equivalentes.

[4] En el sentido de contención, que a su vez permite hablar de igualdad.

β	$\neg\beta$
0	1
1	0

$f(\beta)$	$\perp$	$f(\beta) \to \perp$
0	0	1
1	0	0

Tabla 1.14: Tabla de α en $\mathcal{L}_2$ y $f(\alpha)$ en $\mathcal{L}_3$, respectivamente.

β'	β	$\beta' \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f(\beta')$	$\perp$	$f(\beta)$	$f(\beta') \to \perp$	$(f(\beta') \to \perp) \to f(\beta)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1

Tabla 1.15: Tabla de α en $\mathcal{L}_2$ y $f(\alpha)$ en $\mathcal{L}_3$, respectivamente.

Para el resto de los casos suponemos que $\alpha = \beta' \diamond_{n+1} \beta$, donde β' y β son fórmulas tales que la suma de sus longitudes es n.

[$\boldsymbol{\alpha = \beta' \vee \beta}$] Para $\alpha = \beta' \vee \beta$ se construyen las tablas mostradas en la Tabla 1.15. Por hipótesis las longitudes de β' *y* β son menores que n, entonces se satisface que β' y β son lógicamente equivalentes a $f(\beta')$ y $f(\beta)$, respectivamente. Estos hechos se reflejan en las columnas correspondientes a las fórmulas mencionadas, pues los valores presentes en cada renglón son iguales. Por otra parte, $f(\alpha) = f(\beta' \wedge \beta) = (f(\beta') \to \perp) \to f(\beta)$. Comparando las últimas columnas de las tablas se verifica que α y $f(\alpha)$ son lógicamente equivalentes.

[$\boldsymbol{\alpha = \beta' \wedge \beta}$] Para $\alpha = \beta' \wedge \beta$ se consideran las Tablas 1.16 y 1.17. Por hipótesis de inducción las columnas correspondientes a β y β' son idénticas a las columnas de $f(\beta)$ y $f(\beta')$, respectivamente. Además, se cumple que $f(\alpha) = f(\beta' \wedge \beta) = [[(f(\beta') \to \perp) \to \perp] \to (f(\beta) \to \perp)] \to \perp$, por la definición de f. Analizando las últimas columnas de las tablas se verifica que α y $f(\alpha)$ son lógicamente equivalentes, ya que en cada renglón los valores son iguales.

Con todo lo anterior el teorema queda demostrado. ∎

β'	β	$\beta' \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 1.16: Tabla de α en $\mathcal{L}_2$.

$f(\beta')$	β	$\perp$	$(f(\beta') \to \perp) \to \perp$	$\beta \to \perp$	$[(\beta' \to \perp) \to \perp] \to (\beta \to \perp)$	$f(\alpha)$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1

Tabla 1.17: Tabla de $f(\alpha)$ en $\mathcal{L}_3$.

Cabe señalar que la función f de la prueba anterior, se puede expresar como una lista de abreviaciones. Para eso se establece que, si $\alpha \in FORM(\mathcal{L}_*)$ y $\beta \in FORM(\mathcal{L}_{**})$ con $\alpha := \beta$ se denota que la fórmula α es una abreviación de la fórmula β. Luego, para cualesquiera fórmulas $\alpha,\ \gamma \in FORM(\mathcal{L}_2)$ se cumple que:

a) $\neg\alpha := \ \alpha \to \perp$.

b) $\alpha \vee \gamma := \ (\alpha \to \perp) \to \gamma$.

c) $\alpha \wedge \gamma := \ [[(\alpha \to \perp) \to \perp] \to (\gamma \to \perp)] \to \perp$.

d) $\alpha \to \gamma := \alpha \to \gamma$.

Entonces la prueba del Teorema 2 se resume a verificar que las fórmulas involucradas en cada abreviación son lógicamente equivalentes.

Teorema 3 *Para el lenguaje $\mathcal{L}_3$ con matriz $\mathcal{M}_3$, existe una traducción de sus fórmulas en fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}_2$ con matriz $\mathcal{M}_2$.*

De manera similar a la prueba del Teorema 2, se puede verificar que la siguiente función g es una función de traducción de $\mathcal{L}_3$ a $\mathcal{L}_2$.

Sea $g : FORM(\mathcal{L}_3) \to FORM(\mathcal{L}_2)$, definida como:

$$g(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in ATOM(\mathcal{L}_3); \\ \beta \wedge \neg\beta, & \text{si } \alpha = \bot; \\ \neg g(\beta), & \text{si } \alpha = \beta \to \bot; \\ g(\beta) \to g(\gamma), & \text{si } \alpha = \beta \to \gamma \ y \ \gamma \neq \bot; \\ g(\beta) \vee g(\gamma), & \text{si } \alpha = (\beta \to \bot) \to \gamma \ y \ \gamma \neq \bot; \\ g(\beta) \wedge g(\gamma), & \text{si } \alpha = [[(\beta \to \bot) \to \bot] \to (\gamma \to \bot)] \to \bot. \end{cases}$$

Cuando se tiene un teorema de existencia surge de manera natural el preguntarse si se cumple unicidad. Para los teoremas anteriores no se cumple, el lector puede plantearse la tarea de encontrar sus propias abreviaciones.

En el Ejemplo 13 podemos observar que una misma lógica se puede definir en más de un lenguaje. Si es posible tener traducciones de un lenguaje a otro y viceversa, como en los Teoremas 2 y 3, entonces los lenguajes son equivalentes.

Definición 13 *Dados dos lenguajes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tales que el conjunto de conectivos de $\mathcal{L}_1$ está contenido en el conjunto de conectivos de $\mathcal{L}_2$ y dos lógicas $\mathbf{L}_1$ en $\mathcal{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ en $\mathcal{L}_2$, se dice que $\mathbf{L}_2$ es una* **extensión** *de $\mathbf{L}_1$, si $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$. Si $\mathbf{L}$ es una lógica con $Ext(\mathbf{L})$ se denota al conjunto de todas las lógicas que son extensiones de $\mathbf{L}$.*

Cuando $\mathbf{L}_1 \not\subset \mathbf{L}_2$ también se suele decir que $\mathbf{L}_1$ es más débil que $\mathbf{L}_2$ o a su vez que $\mathbf{L}_2$ es más fuerte que $\mathbf{L}_1$.

Definición 14 *Dados dos lenguajes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tales que el conjunto de conectivos de $\mathcal{L}_1$ está contenido en el conjunto de conectivos de $\mathcal{L}_2$ y dos lógicas $\mathbf{L}_1$ en $\mathcal{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ en $\mathcal{L}_2$, se dice que $\mathbf{L}_2$ es una* **extensión conservativa** *de $\mathbf{L}_1$ si $\mathbf{L}_2$ es una extensión de $\mathbf{L}_1$ y cualquier teorema de $\mathbf{L}_2$ en el lenguaje $\mathcal{L}_1$ es un teorema en $\mathbf{L}_1$.*

1.4. Teoría de prueba

La **teoría de prueba o teoría de la demostración** es un área que se basa en la construcción de "demostraciones formales", es decir sucesiones de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, donde cada uno de sus elementos son axiomas, hipótesis o se obtienen mediante la aplicación de reglas de inferencia a elementos previos. De modo que no se requiere de una interpretación del lenguaje, esta se basa simplemente en la sintaxis. La teoría de prueba trata a las demostraciones como objetos matemáticos, permitiendo el uso de técnicas matemáticas para su estudio.

El concepto de relación de consecuencia fue propuesto por el lógico, matemático y filósofo Alfred Tarski con la finalidad de formalizar la noción de consecuencia lógica. Esta noción dice que una fórmula α y una teoría Γ están relacionadas si y solo si α se deduce lógicamente de Γ, es decir si existe una demostración de la fórmula α a partir de suponer Γ. La Definición 15 es una relación de consecuencia particular.

Definición 15 [2] *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, una* **relación de consecuencia tarskiana (TCR[5])** *es una relación binaria[6] $\vdash$ entre teorías y fórmulas, tal que si Γ es una teoría y α es una fórmula, la relación $\vdash$ satisface las siguientes tres condiciones* :

Reflexividad: *Si* $\alpha \in \Gamma,$ *entonces* $\Gamma \vdash \alpha.$

Monotonía: *Si* $\Gamma \vdash \alpha$ *y* $\Gamma \subseteq \Gamma',$ *entonces* $\Gamma' \vdash \alpha.$

Transitividad: *Si* $\Gamma \vdash \alpha$ *y* $\Gamma', \ \alpha \vdash \gamma,$ *entonces* $\Gamma, \ \Gamma' \vdash \gamma.$

En la definición previa los símbolos $\Gamma \vdash \alpha$ se leen como "la teoría Γ deduce a α". Cabe señalar que "$\Gamma', \ \Gamma$" es abreviación de "$\Gamma' \cup \Gamma$", mientras que "$\Gamma, \ \alpha$" denota "$\Gamma \cup \{\alpha\}$". Además, "$\alpha \vdash \beta$" es equivalente a "$\{\alpha\} \vdash \beta$".

En [29] podemos encontrar ejemplos de relaciones de consecuencia tarskiana, así como el siguiente comentario.

[5] Por sus siglas en inglés.

[6] Una relación R entre los conjuntos A y B es un subconjunto no vacío del producto cartesiano $A \times B$. Una *relación* es un objeto matemático que vincula a los objetos de dos conjuntos.

> "Que una TCR sea reflexiva se puede interpretar diciendo que cualquier teoría debe concluir al menos las hipótesis que la conforman. La propiedad de monotonía indica que si con un conjunto de hipótesis podemos obtener alguna conclusión, entonces al agregarle más fórmulas seguiremos obteniendo la misma conclusión. La transitividad de TCR hace evidente su nombre si hacemos $\Gamma = \emptyset$, la teoría vacía. Esta propiedad también se conoce como corte" [29].

Definición 16 *Sea $\vdash$ una relación de consecuencia tarskiana para $\mathcal{L}$, entonces $\vdash$ es* **estructural** *si para cualquier sustitución σ y cualquier teoría Γ, si $\Gamma \vdash \psi$ implica que $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\psi)$.*

Definición 17 *La* **relación de consecuencia inducida por una matriz** *$\mathcal{M}$, denotada por $\models_{\mathcal{M}}$, se define del siguiente modo*:

$$\Gamma \models_{\mathcal{M}} \alpha, \textit{ si para toda interpretación } [*]_{\mathbf{v}} \textit{ tal que } [\Gamma]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}, \textit{ entonces } [\alpha]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}.$$

La relación de consecuencia inducida por una matriz, $\models_{\mathcal{M}}$, establece que una teoría Γ y una fórmula α están relacionadas, si cualquier interpretación que modele a la teoría, $[\Gamma]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$, en $\mathcal{M}$; debe modelar a α, $[\alpha]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$.

Teorema 4 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{M}$ una matriz para él. Si $\models_{\mathcal{M}}$ es una relación de consecuencia inducida por la matriz $\mathcal{M}$, entonces $\models_{\mathcal{M}}$ es una relación de consecuencia estructural tarskiana.*

Demostración Sean $\models_{\mathcal{M}}$ una relación de consecuencia inducida por $\mathcal{M}$ y Γ una teoría de $\mathcal{L}$. Primero se va a demostrar que $\models_{\mathcal{M}}$ es una TCR.

I. Sean la fórmula $\alpha \in \Gamma$ y la interpretación $[*]_{\mathbf{v}}$ un modelo de Γ. Por definición de modelo de una teoría, se cumple $[\alpha]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$. Luego, $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \alpha$ y así $\models_{\mathcal{M}}$ es reflexiva.

II. Supongamos que $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \alpha$ y que Γ' es una teoría tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Sea $[*]_{\mathbf{v}}$ un modelo de Γ', es decir $[\Gamma']_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$. Dado que $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \alpha$, toda interpretación que modela a Γ modela a α. Por definición de modelo de una teoría e hipótesis, se sigue que $[\Gamma]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$ y así $[\alpha]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$. Luego, $\Gamma' \models_{\mathcal{M}} \alpha$ y por lo tanto $\models_{\mathcal{M}}$ es monótona.

III. Supongamos que $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \alpha$ y $\Gamma',\ \alpha \models_{\mathcal{M}} \gamma$. Sea $[*]_{\mathbf{v}}$ un modelo para $\Gamma,\ \Gamma'$. Dado que $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Gamma'$, se sigue que $[*]_{\mathbf{v}}$ es modelo de Γ y por lo tanto modela a α. También $[*]_{\mathbf{v}}$ es modelo de Γ'. Luego, por hipótesis se cumple que $[\gamma]_{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}$. Por lo tanto $\Gamma,\ \Gamma' \models \gamma$ y así $\models_{\mathcal{M}}$ es transitiva.

De I, II y III se cumple que $\models_{\mathcal{M}}$ es una TCR.

Note que si se conoce una interpretación $[*]_{\mathbf{w}}$, es posible determinar la definición de la valuación $\mathbf{w}$ a partir de la cuál se construyó $[*]_{\mathbf{w}}$.

Supongamos que $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \alpha$. Sean $\sigma = \{p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \ldots, p_n/\beta_n\}$ una sustitución en $\mathcal{L}$ y $[*]_{\mathbf{v}_\sigma}$ una interpretación, tal que $[\sigma(\Gamma)]_{\mathbf{v}_\sigma} \in \mathcal{D}$. Por demostrar que $[*]_{\mathbf{v}_\sigma}$ modela a $\sigma(\alpha)$. Recuerde que la teoría que resulta de aplicar σ a la teoría Γ es $\sigma(\Gamma) = \{\sigma(\beta) |\ \beta \in \Gamma\}$.

Sea $\mathbf{v}_\sigma$ la valuación de $[*]_{\mathbf{v}_\sigma}$, por Proposición 1, existe $\mathbf{v}'_\sigma$ tal que para todo $\varphi \in FORM(\mathcal{L})$, $[\varphi]_{\mathbf{v}_\sigma} = [\sigma(\varphi)]_{\mathbf{v}_\sigma}$, en particular si $\gamma \in \Gamma$, se cumple que

$$[\gamma]_{\mathbf{v}'_\sigma} = [\sigma(\gamma)]_{\mathbf{v}_\sigma} \tag{1.1}$$

Luego, $[\Gamma]_{\mathbf{v}'_\sigma} \in \mathcal{D}$. Además por hipótesis $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \alpha$, entonces se sigue que $[\alpha]_{\mathbf{v}'_\sigma} \in \mathcal{D}$. Finalmente por 1.1 se cumple que $[\sigma(\alpha)]_{\mathbf{v}_\sigma} \in \mathcal{D}$, luego $\sigma(\Gamma) \models_{\mathcal{M}} \sigma(\alpha)$. ■

Considerando la notación de la Definición 16 y el Teorema 4, las notaciones $\models_{\mathcal{M}}$ y $\vdash_{\mathcal{M}}$ son indistintas para denotar a una relación de consecuencia inducida por la matriz $\mathcal{M}$.

Capítulo 2

Lógicas trivaluadas paraconsistentes

En este capítulo se hace una breve reseña de la lógica paraconsistente, mostrando como es que la noción de la paraconsistencia se puede estudiar en un tipo particular de lógicas, las lógicas trivaluadas. Además, se expone la transición de lógica paraconsistente a lógica paraconsistente genuina. Los conceptos mostrados en las Secciones 2.4 y 2.5 se tomaron de [28].

2.1. Reseña histórica

La idea de las lógicas paraconsistentes surge como respuesta al problema que se tiene en Lógica Clásica, sobre el hecho que a partir de una contradicción se puede deducir cualquier proposición, lo que ocasiona que la teoría se convierta en una *teoría trivial*, es decir que toda fórmula de la teoría sea teorema. La solución más ingenua a dicho problema sería tratar de erradicar las contradicciones. Sin embargo, la realidad es que las contradicciones se encuentran presentes en cualquier contexto realista, por lo que la única opción es aprender a hacer deducciones correctas con ellas.

Newton C.A. da Costa et al. en [14] indican que el periodo de gestación de la lógica paraconsistente data de 1910; cuando el matemático, lógico y filósofo polaco Jan Łukasiewicz publica su trabajo titulado *O Zasadzie Sprzecznosci u Arystotelesa*; en donde habla de lo que significaba el *Principio de no Contradicción* para Aristóteles. "De acuerdo a Łukasiewicz, el mismo Aristóteles no creía fundamentalmente en el valor absoluto del *Principio de no Contradicción*" [14].

Los lógicos da Costa et al. también señalan que de manera contemporánea al trabajo de Łukasiewicz, el lógico, filósofo, psicólogo y poeta ruso Nikolái Vasieliev contempla la idea de una lógica imaginaria no aristotélica, haciendo analogía a la geometría no euclidiana de Lobachevski. Después, el lógico polaco Stanisław Jaśkowski desarrolló la lógica discursiva, con la finalidad de considerar debates contradictorios [14].

> "Jan Łukasiewicz y Nikolái Vasiliev son los precursores de la paraconsistencia pero no son los primeros en construir sistemas lógicos paraconsistentes, Stanisław Jaśkowski y da Costa son los primeros en hacerlo." [28]

A finales de los años 50 casi nadie había hablado de la paraconsistencia de manera formal, de hecho el adjetivo *paraconsistente* para hacer referencia a los nuevos sistemas fue acuñado hasta 1976 por Francisco Miro Quesada [14]. En 1963 de manera ajena al trabajo de Jaśkowski, el matemático, lógico y filósofo brasileño da Costa después de haber presentado su tesis sobre lógica paraconsistente, de manera conjunta con Marcel Guillaume y otros matemáticos franceses publica una serie de notas al respecto en *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de París* [14].

El trabajo de da Costa es ampliamente reconocido y distinguido por eruditos como Graham Priest y Richard Routley por haber formulado infinitas lógicas paraconsistentes, ahora conocidas como sistemas C_n para $1 \leq n \leq \omega$[1]. Cada sistema C_n no valida el *Principio de no Contradicción* enunciado como $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$. Además, no permiten que a partir de premisas contradictorias sea posible deducir cualquier fórmula [28], es decir que cada uno de estos sistemas cumple la Definición 25 de lógica paraconsistente genuina.

El desarrollo de la teoría de lógica paraconsistente se vio estancado hacia mediados del siglo pasado. No obstante, su estudio se ha retomado debido a sus aplicaciones en diversas áreas de estudio que van desde Biología, Ingeniería, Ciencias de la Computación, Economía hasta Lingüística, como lo menciona el mismo da Costa en el prefacio del libro Towards Paraconsistent Engineering, ver [1].

[1] ω representa la cardinalidad de $\mathbb{N}$.

2.2. Lógica paraconsistente

La lógica paraconsistente se puede considerar como una familia de sistemas lógicos, en los cuales el *Principio de no Contradicción* no se cumple por alguno de sus conectivos, generalmente llamado *negación paraconsistente* [8]. El *Principio de no Contradicción* establece que "ninguna cosa puede ser y no ser", es decir "φ no puede ser γ y al mismo tiempo no ser γ"; equivalentemente se enuncia como "dos proposiciones contradictorias no pueden ser las dos verdaderas". El problema surge al llevar el *Principio de no Contradicción* al lenguaje matemático como más adelante se muestra. En [11] podemos encontrar las siguientes definiciones:

Definición 18 *Una* **negación** *es* **paraconsistente** *si viola el Principio de no Contradicción.*

Definición 19 *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ y* $\mathbf{L}$ *una lógica. Si* $\mathbf{L}$ *tiene una negación paraconsistente entonces* $\mathbf{L}$ *es llamada* **lógica paraconsistente** *de $\mathcal{L}$.*

Una lógica paraconsistente permite estudiar teorías inconsistentes no triviales. Una teoría es inconsistente si contiene una fórmula tal que ella y su negación son teoremas [28]. La negación de Lógica Clásica no es paraconsistente, por tal motivo en Lógica Clásica la inconsistencia y la trivialidad son equivalentes, en el sentido que suponer una implica la otra [28]. A modo de modificar ese comportamiento se plantearon las lógicas paraconsistentes, en ellas suponer inconsistencia no conduce a trivialidad.

Actualmente existen diversas formulaciones del *Principio de no Contradicción*. Dos de ellas ampliamente aceptadas, mencionadas en [7, 8], son *Ex contradictione quodlibet o Explosión por Contradicción* y *Law of Non-Contradiction o Negación por Contradicción*. De manera informal el principio *Explosión por Contradicción* dice que de una contradicción es posible derivar o deducir cualquier proposición, de igual forma el principio *Negación por Contradicción* indica que una proposición y su negación no pueden ser ambas verdaderas [8]. El modo formal de los principios es:

$\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \gamma,$ **Explosión por Contradicción (EC)**;

$\Gamma \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha),$ **Negación por Contradicción (NC)**.

Donde, $\vdash$ es una relación de consecuencia estructural tarskiana, Γ es cualquier teoría y α, γ cualesquiera fórmulas.

Formalmente **EC** indica que para cualquier teoría Γ, dada una interpretación $[*]_{\mathbf{v}}$ tal que modela a las fórmulas α y $\neg\alpha$, entonces cualquier fórmula $\gamma \in FORM(\mathcal{L})$ es tautología, permitiendo que las fórmulas α y γ tengan ningún tipo de relación. Mientras que **NC** establece que en cualquier teoría Γ, se puede demostrar que la fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ es una tautología.

Resultado de las Definiciones 18, 19 y de las posibles formulaciones del *Principio de no Contradicción*, en [8] se indica que una lógica es paraconsistente si su negación rechaza **EC** o si rechaza **NC**. Más todavía, en la Sección 2.3.1 se mostrará que los principios **EC** y **NC** son independientes, en el sentido que el incumplimiento de uno no implica ni excluye el cumplimiento del otro. Estos hechos eliminan la posibilidad de comparación entre lógicas paraconsistentes, motivando el surgimiento de la lógica paraconsistente genuina.

2.3. Lógicas trivaluadas

Los expertos de la lógica se han percatado de lo conveniente que resulta emplear lógicas trivaluadas para estudiar la paraconsistencia. Más aún, afirman que una manera adecuada de construir lógicas trivaluadas paraconsistentes es emplear matrices multivaluadas ver [3, 2]. En el Capítulo 1 mediante el Teorema 1 se desarrolló una herramienta que permite construir lógicas en un lenguaje dado: la lógica inducida por una matriz, en adelante siempre que sea necesario determinar una lógica se hace uso de dicha herramienta.

Las lógicas trivaluadas son una generalización natural y sencilla de la Lógica Clásica o bivaluada. Estas lógicas se comenzaron a estudiar desde inicios del siglo XX [24]. En 1902 Charles Peirce hizo notar que la Lógica Clásica, con sus dos valores de verdad constituye apenas "la hipótesis más simple". Para muchas situaciones, tanto cotidianas como técnicas, es necesario considerar más valores de verdad e incluso tomar a $\mathcal{D}$ con infinitos valores [24]. Con esa motivación se comenzaron a plantear lógicas con tres valores de verdad.

2.3. Lógicas trivaluadas

Arnold Ostra en [24] indica que los precursores del estudio de las lógicas trivaluadas fueron Jan Łukasiewicz, Emil Post y Charles S. Pierce. En 1920 Łukasiewicz presenta el primer sistema trivaluado, mostrado en la Tabla 2.1. En la misma época pero de manera independiente, el matemático y lógico Emil Post propuso otra lógica trivaluada que contiene únicamente un conectivo de negación y un conectivo de disyunción. Por su parte el filósofo y lógico Pierce realizó estudios respecto a las lógicas trivaluadas que se encuentran en su "*cuaderno de lógica*" [24], en el cuál presenta varios conectivos trivaluados: cuatro negaciones, tres conjunciones y tres disyunciones. A pesar de que Pierce no presento un sistema lógico completo, un punto importante es su análisis sobre simetría de los conectivos trivaluados como hace notar Ostra, en esta tesis se habla al respecto en la Sección 2.3.2.

> "Los apuntes de Pierce, además, sugieren interesantes simetrías, descubiertas por los primeros investigadores y cuya generalización puede conducir en un futuro al análisis exhaustivo de la simetría en la lógica proposicional trivaluada." [24]

Para lograr los fines de esta tesis únicamente se presentaran algunas de las lógicas trivaluadas de mayor trascendencia ya sea histórica o de mayor aplicación, la mayoría de ellas son paraconsistentes. En adelante se emplean matrices multivaluadas que tienen la siguiente estructura:

- Conjunto de valores de verdad $\mathcal{V} = \{0, 1, 2\}$ donde el 0 y 2 representan el valor de verdad no designado (0) y el valor de verdad designado (1) de la Lógica Clásica, respectivamente.[2]

- Los conjuntos $\mathcal{D}$ y $\mathcal{O}$ se definen en cada caso.

De manera general los sistemas trivaluados se diferencian por los conectivos que se eligen como conectivos básicos y los valores de verdad que se toman como designados, esto es, los elementos que forman al conjunto $\mathcal{D}$. Respecto al último punto Avron en [4] aclara que existen dos direcciones marcadas para el tercer valor de verdad 1, que corresponden a tomar el valor como designado

[2]Algunos autores prefieren utilizar $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ o $\mathcal{V} = \{F, \perp, V\}$, donde V y 1 representan el valor de verdad designado y F y 0 representan el valor de verdad no designado, mientras que el tercer valor de verdad se representa en cada caso por $\frac{1}{2}$ o $\perp$. Sin importar los símbolos que se empleen la teoría desarrollada es la misma.

o como no designado. Por supuesto, la decisión depende de la interpretación intuitiva del valor de verdad 1. Si esta corresponde a una noción de *información incompleta* como "indefinido" o "desconocido", entonces generalmente $1 \in \overline{\mathcal{D}}$, es decir 1 es no designado. Si por otra parte la interpretación corresponde a *información inconsistente*, particularmente 1 es designado.

Ejemplo 14 (*Lógicas trivaluadas*) *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, en $\mathcal{L}$ se definen las siguientes matrices trivaluadas* [19]*:*

- $\mathcal{M}_{Ł}$ *con $\mathcal{D} = \{2\}$ y tablas de interpretaciones de conectivos las mostradas por la Tabla 2.1.*
- $\mathcal{M}_P$ *con conjunto de valores designados $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, cuyas tablas de interpretaciones de conectivos se muestran en la Tabla 2.2.*
- $\mathcal{M}_G$ *con $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ y tablas de interpretaciones de conectivos mostradas en la Tabla 2.3.*
- $\mathcal{M}_B$ *con $\mathcal{D} = \{2\}$ y sus tablas de interpretaciones de conectivos se observan en la Tabla 2.4.*

Se cumple que las lógicas Ł3 de Łukasiewicz, PAC*,* G3' *y la lógica de* Bochvar B3 *son las lógicas inducidas por las matrices $\mathcal{M}_{Ł}$, $\mathcal{M}_P$, $\mathcal{M}_G$ y $\mathcal{M}_B$, respectivamente.*

	$\widehat{\neg}$
0	2
1	1
2	0

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\widehat{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	0	1	2

Tabla 2.1: Tablas de $\mathcal{M}_{Ł}$

	$\widehat{\neg}$
0	2
1	1
2	0

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\widehat{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

Tabla 2.2: Tablas de $\mathcal{M}_P$

$\widehat{\neg}$	
0	2
1	2
2	0

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\widehat{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

Tabla 2.3: Tablas de $\mathcal{M}_G$

$\widehat{\neg}$	
0	2
1	1
2	0

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

$\widehat{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

Tabla 2.4: Tablas de $\mathcal{M}_B$

Proposición 3 *Las lógicas* Ł3, PAC *y* B3 *son paraconsistentes.*

Demostración Sean $\Gamma \subset FORM(\mathcal{L})$, $\alpha, \gamma \in FORM(\mathcal{L})$ y $\models$ la relación de consecuencia inducida por la matriz en cuestión. Se tienen los siguientes casos:

[**Ł3**] Considerando la matriz $\mathcal{M}_{Ł} = \langle \mathcal{V}, \{2\}, \mathcal{O}_{Ł} \rangle$, se construye la Tabla 2.5 para analizar el principio **NC** en la lógica Ł3. En la tabla se puede observar que existe una valuación **v** tal que la fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ es *no designada*, esto es $\mathbf{v}(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = 1 \in \overline{\mathcal{D}}$. Luego, la fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ no es una tautología en Ł3. De modo que Ł3 viola el principio **NC** ($\Gamma \not\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$). Por lo tanto Ł3 es paraconsistente.

α	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
0	2	0	2
1	1	1	1
2	0	0	2

Tabla 2.5: NC en Ł3

α	$\neg\alpha$
0	2
1	1
2	0

Tabla 2.6: EC en Ł3

Por otra parte en la Tabla 2.6 se puede notar que en Ł3 por vacuidad se cumple el principio **EC**, es decir no existe una valuación que haga designadas de manera simultánea a las fórmulas α y $\neg\alpha$.

[***PAC***] Tomando en cuenta la matriz $\mathcal{M}_P = \langle \mathcal{V}, \{1,2\}, \mathcal{O}_P \rangle$ se construye la Tabla 2.7, para estudiar el principio **EC** en la lógica PAC. La tabla muestra que existe una valuación $\mathbf{v}$ bajo la cuál las fórmulas α y $\neg\alpha$ son designadas, $\mathbf{v}(\alpha) = \mathbf{v}(\neg\alpha) = 1$. El principio **EC** permite relacionar a las fórmulas α y $\neg\alpha$ con cualquier fórmula γ_0, si en particular se elige a la fórmula γ_0 de tal forma que bajo $\mathbf{v}$ sea *no designada*, entonces se tendría que $\mathbf{v}(\alpha) = 1,\ \mathbf{v}(\neg\alpha) = 1$ y $\mathbf{v}(\gamma_0) = 0$ de donde $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nvdash \gamma_0$ Así PAC viola **EC** y por lo tanto es paraconsistente.

α	$\neg\alpha$
0	2
1	1
2	0

Tabla 2.7: EC en PAC

α	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
0	2	0	2
1	1	1	1
2	0	0	2

Tabla 2.8: NC en PAC

Notemos que a pesar del comportamiento anterior, la Tabla 2.8 aclara que en PAC la fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ es una tautología y por lo tanto se cumple **NC** .

[***B*3**] Considerando la matriz $\mathcal{M}_B = \langle \mathcal{V}, \{2\}, \mathcal{O}_B \rangle$ se construyen las Tablas 2.9 y 2.10. En ellas se puede observar que la lógica $B3$ es paraconsistente al comportarse de manera similar al caso **Ł3**, donde la negación viola el principio **NC** y satisface le principio **EC**.

α	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
0	2	0	2
1	1	1	1
2	0	0	2

Tabla 2.9: NC en Bochvar

α	$\neg\alpha$
0	2
1	1
2	0

Tabla 2.10: EC en Bochvar

■

2.3. Lógicas trivaluadas

En la prueba de la Proposición 3 podemos notar que los principios **NC** y **EC** son independientes, el hecho de que uno se cumpla o se rechace no es garantía de que algo similar suceda con el otro principio. Ese comportamiento se cumple de manera general como se indica en la Proposición 4.

2.3.1. Independencia de NC y EC

Béziau et al. en [12] demuestran empleando matrices trivaluadas que las formulaciones **EC** y **NC** del *Principio de no Contradicción* son independientes, a continuación se analiza ese resultado.

Proposición 4 *Se cumple que los principios Ex contradictione quodlibet (**EC**) y Law of Non-Contradiction (**NC**) son independientes.*

	$\widehat{\neg}$
0	2
1	1
2	0

Tabla 2.11: Tabla de negación de la matriz $\mathcal{M}^*$.

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

Tabla 2.12: Tabla de conjunción de la matriz $\mathcal{M}^*$.

Demostración Sea $\mathbf{L}_{\mathcal{M}^*}$ una lógica inducida por la matriz trivaluada $\mathcal{M}^*$, tal que al menos contiene el conectivo de negación y el conectivo de conjunción definidos por las Tablas 2.11 y 2.12, respectivamente. Sea además $\alpha \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}^*}$, considerando la matriz $\mathcal{M}^*$ se construyen las Tablas 2.13 y 2.14 que permiten analizar los principios **EC** y **NC**, respectivamente.

α	$\neg\alpha$
0	2
1	1
2	0

Tabla 2.13: EC en una matriz trivaluada.

α	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
0	2	0	2
1	1	1	1
2	0	0	2

Tabla 2.14: NC en una matriz trivaluada.

Sobre la base del conjunto de valores designados se tienen los siguientes casos:

[$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{\mathbf{2}\}$] Si el único valor designado es 2, entonces la Tabla 2.13 indica que no existe una valuación que haga designadas a las fórmulas α y $\neg\alpha$ y por lo tanto por vacuidad **EC** se cumple. Por otra parte de la Tabla 2.14 se observa que existe una valuación $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}(\alpha) = 1 \in \overline{\mathcal{D}}$ y $\mathbf{v}(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = 1 \in \overline{\mathcal{D}}$, es decir que la fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ no es una tautología y por lo tanto **NC** no se cumple.

[$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$] Si los valores designados son 1 y 2, la Tabla 2.13 muestra que existe una valuación $\mathbf{v}$ tal que las fórmulas α y $\neg\alpha$ bajo esa valuación son designadas, $\mathbf{v}(\alpha) = \mathbf{v}(\neg\alpha) = 1$, luego si se elige una fórmula γ tal que $\mathbf{v}(\gamma) = 0$ entonces, $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nvDash \gamma$, así **EC** no se cumple. Sin embargo, de la Tabla 2.14 se observa que la fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ es una tautología, por lo tanto **NC** se cumple. ■

Se puede notar que las lógicas trivaluadas que incluyan a $\mathcal{M}^*$ no rechazan a ambos principios **EC** y **NC**, como es el caso de las lógicas PAC y Ł3. Esto indica que es necesario buscar nuevos conectivos de negación y conjunción que permitan rechazar los dos principios.

2.3.2. Conectivos trivaluados

En una lógica trivaluada no solamente se amplía el conjunto $\mathcal{V}$, sino que se busca preservar características importantes de la Lógica Clásica y al estudiar la paraconsistencia no se hace excepción. Por tal motivo Béziau et al. en [12] indican que para construir una lógica con una negación que rechace los principios **EC** y **NC**, se considera que los conectivos $\wedge, \vee$ *y* $\neg$ sean extensiones conservativas de los conectivos de negación clásica, conjunción clásica y disyunción clásica, respectivamente. En esta sección se presentan las definiciones que condicionan a los conectivos para ser considerados de cierto tipo. Las Definiciones 20 y 21 lo hacen desde el punto de vista de teoría de prueba, mientras que en la Definición 22 se emplea teoría de modelos, estas definiciones son tomadas de [28].

Definición 20 *Sea* $\mathbf{L}$ *una lógica proposicional en el lenguaje* $\mathcal{L}$ *con conectivos binarios* $\wedge$, $\vee$ *y* $\rightarrow$. *Si* $\vdash_{\mathcal{L}}$ *es una relación de consecuencia estructural tarskiana decimos que:*

- $\wedge$ *es una* ***conjunción*** *para* $\mathcal{L}$*, cuando:* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$ *si y solo si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ *y* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

- $\vee$ *es una* ***disyunción*** *para* $\mathcal{L}$*, cuando:* $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ *si y solo si* $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ *y* $\Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$*.*

- $\rightarrow$ *es una* ***implicación*** *para* $\mathcal{L}$*, cuando:* $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ *si y solo si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$*.*

Decimos que $\mathbf{L}$ *es una lógica* ***seminormal*** *si tiene al menos uno de estos conectivos, si tiene los tres conectivos se llama* ***normal*** *.*

Definición 21 *Sea* $\mathbf{L}$ *una lógica proposicional en el lenguaje* $\mathcal{L}$ *con conectivos binarios* $\wedge$*,* $\vee$*,* $\rightarrow$*, y un conectivo unario* $\neg$*. Si* $\vdash$ *es una relación de consecuencia estructural tarskiana decimos que:*

- $\neg$ *es una* ***negación clásica****, si* $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ *y* $\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi$ *implican que* $\Gamma \vdash \varphi$*.*

- $\wedge$ *es una* ***conjunción clásica*** *si satisface:*

  I. $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \varphi$

  II. $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \psi$

  III. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$

- $\vee$ *es una* ***disyunción clásica*** *si satisface:*

  I. $\Gamma, \varphi \vdash \varphi \vee \psi$

  II. $\Gamma, \psi \vdash \varphi \vee \psi$

  III. $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ *y* $\Gamma, \psi \vdash \sigma$ *implica que* $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma$

- $\rightarrow$ *es una* ***implicación clásica*** *si satisface:*

  I. $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

  II. $\Gamma \vdash \varphi$ *y* $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ *implica que* $\Gamma \vdash \psi$

  III. $\Gamma \vdash \Big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)\Big) \rightarrow \Big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)\Big)$

Las Definiciones 20 y 21 se relacionan mediante la Proposición 5, la demostración se puede consultar en [28].

Proposición 5 *Sea* $\mathbf{L}$ *una lógica proposicional en el lenguaje* $\mathcal{L}$*, con una relación de consecuencia estructural tarskiana, entonces:*

- *Un conectivo* $\wedge$ *es una conjunción si y solo si es una conjunción clásica.*
- *Un conectivo* $\vee$ *es una disyunción si y solo si es una disyunción clásica.*
- *Si un conectivo* $\to$ *es una implicación, entonces es una implicación clásica.*

La Definición 22 da condiciones para los conectivos de lógicas inducidas por una matriz multivaluada.

Definición 22 *Sea* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ *una matriz para el lenguaje* $\mathcal{L}$*.*

- *Un conectivo unario* $\neg$ *es una* ***negación neoclásica****, si* $\widehat{\neg}(v_i) \in \overline{\mathcal{D}}$ *si y solo si* $v_i \in \mathcal{D}$*, es decir que la interpretación de* $\neg\alpha$ *es no designado si y solo si la interpretación de* α *es designado.*
- *Un conectivo binario* $\wedge$ *es una* ***conjunción neoclásica****, si y solo si se tiene que la interpretación de una conjunción es designada si y solo si las interpretaciones de ambos conjuntandos lo son.*
- *Un conectivo binario* $\vee$ *es una* ***disyunción neoclásica****, si y solo si se tiene que la interpretación de una disyunción es no designada si y solo si la interpretación de cada disyuntando es no designado.*
- *Un conectivo* $\to$ *es una* ***implicación neoclásica****, cuando* $\widehat{\to}(v_i, v_j) \in \mathcal{D}$ *si y solo si* $v_i \in \overline{\mathcal{D}}$ *o* $v_j \in \mathcal{D}$*. Equivalentemente, el único caso en que la interpretación de una implicación es no designada es cuando la interpretación del antecedente es designado y la interpretación del consecuente no lo es.*

Abusando de la notación en adelante las expresiones $\widehat{\diamond}(\alpha)$ y $\widehat{\diamond}(\alpha, \beta)$ se representan respectivamente por $\diamond\alpha$ y $\alpha \diamond \beta$, entendiendo que en ambos casos el conectivo trabaja con la interpretación de las fórmulas.

Al estudiar alguna lógica se eligen las herramientas a emplear para el análisis. Las herramientas están determinadas por el área de la lógica que se emplee, teoría de prueba o teoría de modelos. En ocasiones se desea vincular las áreas para preservar propiedades, por ejemplo la Proposición 6 relaciona los conectivos clásicos con neoclásicos, su demostración se puede consultar en [28].

Proposición 6 *Negaciones, conjunciones, disyunciones e implicaciones neoclásicas definen respectivamente negaciones, conjunciones, disyunciones e implicaciones clásicas para la relación* $\models$.

Definición 23 [12] *Un conectivo multivaluado* $\circledast$ *es una* ***extensión conservativa*** *de un conectivo bivaluado si la restricción del conectivo multivaluado* $\circledast$ *a los valores del conectivo bivaluado coinciden.*

Definición 24 [12] *Un conectivo binario* $\circledast$ *es* ***simétrico*** *si* $\circledast(\varphi, \psi) = \circledast(\psi, \varphi)$ *para cualesquiera fórmulas* φ *y* ψ.

Los conectivos de las lógicas del Ejemplo 14 satisfacen la Definición 23, sin embargo solo algunos conectivos cumplen la Definición 24, esto se puede verificar observando las tablas de los conectivos.

2.4. Paraconsistencia genuina

Los creadores de la *lógica paraconsistente genuina* son Jean Yves Béziau y Anna Franceschetto, primero presentaron estas lógicas en el *5th World Congress of Paraconsistency* que tuvo lugar en Calcuta, India en febrero de 2014 [28]. En las memorias del congreso, publicadas en 2015, y en el artículo *Strong Three-valued Paraconsistent Logics*, se definen a las lógicas paraconsistentes genuinas aunque bajo el nombre de lógicas paraconsistentes fuertes [28]. Posteriormente se cambiaría el adjetivo fuerte por genuino, al considerar que en lógica el termino fuerte ya era utilizado para denotar otra idea.

En 2016 Béziau en su artículo *Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics*, analiza como deben ser los conectivos para construir lógicas paraconsistentes genuinas [28]. Béziau concluyo que en el marco de una matriz trivaluada con una negación, una conjunción y una disyunción “solo hay dos lógicas paraconsistentes genuinas trivaluadas de interés" [28]. En las Definiciones 26 y 27 se presentan estas lógicas.

Definición 25 *Sea $\mathcal{M}$ una matriz con conjunto de valores de verdad finito, la lógica $\models_{\mathcal{M}}$ en la que para algunas fórmulas φ y ψ en el lenguaje se cumplen las condiciones siguientes:*

I. $\not\models_{\mathcal{M}} \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

II. $\varphi, \neg\varphi \not\models_{\mathcal{M}} \psi$

se denomina ***lógica paraconsistente genuina****.*

Definición 26 *Sea $\mathcal{M} = \langle\{0,1,2\},\{1,2\},\mathcal{O}\rangle$ una matriz multivaluada, con conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$, entonces la* ***lógica paraconsistente genuina trivaluada L3A*** *está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

$\widehat{\neg}$	
0	2
1	2
2	0

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\widehat{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Tabla 2.15: **L3A**

Definición 27 *Sea $\mathcal{M} = \langle\{0,1,2\},\{1,2\},\mathcal{O}\rangle$ una matriz multivaluada, con conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$, entonces la* ***lógica paraconsistente genuina trivaluada L3B*** *está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

$\widehat{\neg}$	
0	2
1	1
2	0

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\widehat{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Tabla 2.16: **L3B**

2.5. Propiedades de L3A y L3B

Las lógicas **L3A** y **L3B** fueron las primeras lógicas trivaluadas paraconsistentes genuinas, con conjunto de valores de verdad finito, en ser estudiadas. En seguida se listan algunas de las propiedades que cumplen estas lógicas y que son de interés para nuestro estudio.

Los conectivos de las lógicas **L3A** y **L3B** satisfacen que:

I. El conectivo $\neg$ es una extensión conservativa de la negación para Lógica Clásica.

II. Los conectivos binarios, $\wedge$ y $\vee$ cumplen las siguientes propiedades:

   a) Son operadores neoclásicos.

   b) Son operadores simétricos.

   c) Son extensiones conservativas de sus correspondientes operadores bivaluados en Lógica Clásica.

Proposición 7 *Si $\models_{L3A}$ y $\models_{L3B}$ son las lógicas paraconsistentes genuinas trivaluadas de la Definiciones 26 y 27, entonces:*

I. $\models_{L3A} \varphi \vee \neg\varphi$.

II. $\models_{L3B} \varphi \vee \neg\varphi$.

III. $\neg\neg\varphi \models_{L3A} \varphi$.

IV. $\varphi \not\models_{L3A} \neg\neg\varphi$.

V. $\neg\neg\varphi \models_{L3B} \varphi$.

VI. $\varphi \models_{L3B} \neg\neg\varphi$.

La demostración de la Proposición 7 se sigue de la definición de los conectivos de cada lógica.

En lógica es importante poder manipular los conectivos, por ejemplo, distribuir o asociar negaciones sobre las conjunciones y disyunciones, a esto se conoce como leyes de De Morgan [28].

La Tabla 2.17 muestra las leyes de De Morgan para la conjunción, disyunción y negación. En las Proposiciones 8 y 9 se indican cuales de estas propiedades cumplen las lógicas **L3A** y **L3B**.

D1a:	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\models$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	**D1b:**	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	$\models$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$
D2a:	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\models$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	**D2b:**	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	$\models$	$\neg(\varphi \vee \psi)$
D3a:	$\neg(\neg\varphi \wedge \psi)$	$\models$	$\varphi \vee \neg\psi$	**D3b:**	$\varphi \vee \neg\psi$	$\models$	$\neg(\neg\varphi \wedge \psi)$
D4a:	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	$\models$	$\neg\varphi \vee \psi$	**D4b:**	$\neg\varphi \vee \psi$	$\models$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
D5a:	$\neg(\neg\varphi \vee \psi)$	$\models$	$\varphi \wedge \neg\psi$	**D5b:**	$\varphi \wedge \neg\psi$	$\models$	$\neg(\neg\varphi \vee \psi)$
D6a:	$\neg(\varphi \vee \neg\psi)$	$\models$	$\neg\varphi \wedge \psi$	**D6b:**	$\neg\varphi \wedge \psi$	$\models$	$\neg(\varphi \vee \neg\psi)$
D7a:	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\models$	$\varphi \vee \psi$	**D7b:**	$\varphi \vee \psi$	$\models$	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
D8a:	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\models$	$\varphi \wedge \psi$	**D8b:**	$\varphi \wedge \psi$	$\models$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Tabla 2.17: Leyes de De Morgan

Proposición 8 *En la lógica* **L3A** *solo se satisfacen las fórmulas:* $D1a$, $D2a$, $D2b$, $D3a$, $D4a$, $D5a$, $D6a$, $D7a$ *y* $D8a$.

Proposición 9 *En la lógica* **L3B** *solo se satisfacen las fórmulas:* $D1a$, $D2a$, $D2b$, $D3a$, $D4a$, $D5a$, $D5b$, $D6a, D6b, D7a, D8a$ *y* $D8b$.

Las pruebas de las Proposiciones 8 y 9 se siguen de las tablas de verdad de las fórmulas, considerando que $\varphi \models \psi$ se cumple si y soló si cada modelo de φ es modelo de ψ.

Capítulo 3

La implicación en las lógicas L3A y L3B

La utilidad de una lógica recae en los conectivos que tenga, ya que estos son los encargados de desarrollar el nivel de expresividad de la lógica. Una lógica con solo un conectivo de negación es menos expresiva que una que tenga conectivos de negación y disyunción, pues la última tiene más posibilidades de lograr una mejor abstracción de la realidad.

Los conectivos implicación, conjunción, disyunción y negación son considerados importantes. Por tal motivo Hernández-Tello et al. en [19] estudian las propiedades que debe cumplir un conectivo para llamarse implicación. En este capítulo se realiza un desarrollo de ese trabajo.

3.1. Conectivo de implicación

El conectivo de implicación, denotado en este trabajo como $\to$, es el conectivo que permite representar oraciones condicionales. Una oración condicional es del tipo "Si A entonces C" o "C si A", por lo tanto está formado por dos oraciones o cláusulas [17]. Formalmente ese tipo de oraciones se representan por $\alpha \to \beta$, donde α se llama antecedente y β consecuente.

Existen diferentes tipos de condicionales y por ende diversas teorías para su estudio. Para los fines del trabajo se considera el enfoque que se sustenta en el *principio de verdad funcional* del condicional, el cuál consiste en definir el valor de verdad de una proposición compleja en términos de los valores de verdad de sus partes [17].

El significado de la implicación se encuentra en el corazón de la teoría de prueba, ya que tiene el rasgo característico de estar ligado al concepto de consecuencia lógica. Se puede ver como una consecuencia expresiva a nivel proposicional debido a *Modus Ponens* y a lo que en [27] con sistemas de tipo Hilbert se denomina *Teorema de la Deducción*[1], el cuál establece la equivalencia entre $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ [27].

Una interpretación natural de la implicación $\alpha \to \beta$ es leerla expresando la regla de inferencia *Modus Ponens*, que sobre la base de tener α y $\alpha \to \beta$ permite pasar de α a β. El Teorema de la Deducción puede verse como el medio para establecer la regla: "el hecho de haber demostrado que β puede deducirse de α, justifica la regla que establece que de α se puede pasar a β" [27].

Considerando la relevancia del conectivo de implicación en una lógica, Hernández-Tello et al. en [19] buscaron una implicación adecuada para las lógicas $L3A$ y $L3B$. Con la finalidad de seguir preservando el comportamiento de la implicación en lógica Clásica, se exige que el conectivo de implicación sea una *extensión conservativa* y *neoclásica*. Se debe observar que para tal conectivo la propiedad de simetría es inadecuada y poco frecuente, por tal motivo es descartada. Además de las condiciones anteriores, se busca que "algunas fórmulas que consideramos importantes como $\neg\neg(\varphi \to \varphi)$ y la fórmula $\neg\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$ sean tautologías" [28].

Dado que las lógicas estudiadas son trivaluadas la tabla de un conectivo binario tiene nueve espacios, que deben ser ocupados por alguno de los tres valores de verdad. Esto genera un total de $3^9 = 19683$ operadores binarios diferentes, de los cuales se han empleado dos; uno para conjunción y otro para disyunción. En particular la implicación es un conectivo binario, por lo que restan 19681

[1]El Teorema de la Deducción enunciado en [27] es más general que el enunciado por otros autores donde no se pide que sea una equivalencia, por mencionar ver [22].

opciones diferentes para el conectivo de implicaciones en cada lógica.

En las Secciones 3.2 y 3.3 se detalla el análisis realizado sobre el conjunto de implicaciones, que permitió determinar que para la lógica **L3A** solo hay 4 implicaciones aceptables, mientras que para la lógica **L3B** existen 16 implicaciones adecuadas.

3.2. Implicación en L3A

La condición sobre la implicación de ser una *Extensión Conservativa*, hace que los valores de $v_i \to v_j$ queden fijos para $(v_i, v_j) \in \{0,2\} \times \{0,2\}$, como lo muestra la Tabla 3.1. Por otra parte, como se requiere que la implicación sea *neoclásica*, se debe cumplir que la interpretación de una implicación sea no designada si y solo si el antecedente es designado y el consecuente no lo es, de manera formal esto se expresa como: $\varphi \to \psi \in \overline{\mathcal{D}}$ si y solo si $\varphi \in \mathcal{D}$ y $\psi \in \overline{\mathcal{D}}$.

De manera equivalente, la condición de neoclasicidad indica que el valor de una implicación es designado por alguno de los siguientes motivos: o el antecedente es no designado o el consecuente es designado, es decir: $\varphi \to \psi \in \mathcal{D}$ si y solo si $\varphi \in \overline{\mathcal{D}}$ o $\psi \in \mathcal{D}$. Esta condición establece el valor de $v_i \to 0$ como 0 para $v_i \in \{1, 2\}$. Esto se muestra en la Tabla 3.2, donde cada d_i representa un valor designado.

$\widehat{\to}$	0	1	2
0	2		2
1			
2	0		2

Tabla 3.1: Extensión Conservativa.

$\widehat{\to}$	0	1	2
0	d_1	d_2	d_3
1	0	d_4	d_5
2	0	d_6	d_7

Tabla 3.2: Implicación neoclásica.

Combinando las condiciones mostradas en las Tablas 3.1 y 3.2, se tiene una tabla parcial de la implicación, mostrada en la Tabla 3.3. Se debe notar que de la gama de posibles implicaciones, las condiciones hasta el momento analizadas la han reducido de manera sustancial quedando solo $2^4 = 16$ posibilidades.

$$\begin{array}{c|ccc} \widehat{\rightarrow} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & d_2 & 2 \\ 1 & 0 & d_4 & d_5 \\ 2 & 0 & d_6 & 2 \end{array}$$

Tabla 3.3: Implicación tipo extensión conservativa y neoclásica.

Como se desea que las fórmulas $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ y $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ sean tautologías, a continuación se analizan sus tablas de verdad. En la Tabla 3.4 se muestra que, si d_4 es 1 entonces $\neg(\varphi \rightarrow \varphi) = 2$ y por lo tanto la fórmula no es tautología ya que $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi) = 0$. Mientras que si d_4 es 2, entonces $\neg(\varphi \rightarrow \varphi) = 0$ y así $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi) = 2$. Por lo tanto se concluye que $d_4 = 2$.

φ	$\varphi \rightarrow \varphi$	$\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	$\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$
0	2	2	2
1	d_4	2/0	0/2
2	2	2	2

Tabla 3.4: Tabla de $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$.

φ	ψ	$\neg\neg\varphi$	$\neg\neg\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	$\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	$\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$
0	0	0	0	2	0	2	2
0	1	0	0	d_2	2/0	0/2	2
0	2	0	2	2	0	2	2
1	0	0	0	0	2	0	2
1	1	0	0	2	0	2	2
1	2	0	2	d_5	2/0	0/2	2
2	0	2	0	0	2	0	0
2	1	2	0	d_6	2/0	0/2	0
2	2	2	2	2	0	2	2

Tabla 3.5: Análisis de antecedente y consecuente de la fórmula $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$.

Por la condición de neoclasicidad para que $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ sea tautología, como se observa en la Tabla 3.5, resta garantizar que el valor de $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ sea 0 cuando se tiene el caso $\varphi = 2$ y $\psi = 1$, esto fuerza a que $d_6 = 1$. Así $\neg(\varphi \rightarrow \psi) = 2$ y $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) = 0$. Finalmente se tiene que $d_2, d_5 \in \mathcal{D}$ son cualesquiera elementos, lo que da lugar a cuatro implicaciones adecuadas para **L3A**. Estas son mostradas en la Tabla 3.6.

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$I1$

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$I2$

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	1
2	0	1	2

$I3$

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	1
2	0	1	2

$I4$

Tabla 3.6: Posibles implicaciones para **L3A**.

En el estudio realizado en [19], los autores eligieron la implicación $I1$ o implicación de Gödel [5] para extender la lógica **L3A**, obteniendo la Definición 28. Respecto a su elección los autores indican lo siguiente:

> "Con esta implicación la lógica obtenida queda cercana a lógicas paraconsistentes interesantes tales como la lógica de da Costa [26] y particularmente con dos de sus extensiones, las lógicas $G3'$ y $CG3'$ [18]"

Definición 28 *La lógica obtenida a partir de* **L3A** *agregando el conectivo de implicación de la lógica* $G3$ *se denota como* $\mathbf{L3A_G}$ *y sus tablas de verdad se muestran enseguida.*

	$\widehat{\neg}$
0	2
1	2
2	0

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\widehat{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

Tabla 3.7: $L3A_G$.

3.3. Implicación en L3B

Para analizar las posibles implicaciones para la lógica **L3B** se procede de manera similar al caso de la lógica **L3A**, mostrado en la Sección 3.2. Se debe notar que las condiciones de ser conectivo *neoclásico* y una *extensión conservativa* únicamente dependen del conjunto de valores designados. Hay que recordar que las lógicas **L3A** y **L3B** tienen el mismo conjunto $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, entonces al aplicar las restricciones mencionadas se obtiene la Tabla 3.8 como un posible conectivo de implicación para la lógica **L3B**. Más aún, cada d_i de la Tabla 3.8 representa un valor designado, por lo que hay 2^4 posibles implicaciones.

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	d_2	2
1	0	d_4	d_5
2	0	d_6	2

Tabla 3.8: Implicación tipo extensión conservativa y neoclásica.

Siguiendo el procedimiento de la Sección 3.2 lo siguiente sería obtener las condiciones, sobre la implicación, que garantizan que las fórmulas $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ y $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ sean tautologías. No obstante, considerando la tabla de la negación de la lógica **L3B**, se puede verificar que para cualquier fórmula, se cumple que φ y $\neg\neg\varphi$ son fórmulas lógicamente equivalentes, en particular las fórmulas $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ y $\varphi \rightarrow \varphi$ son lógicamente equivalentes. Luego, la neoclasicidad de la implicación garantiza que $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ sea tautología. Un fenómeno similar ocurre cuando se analiza la tabla de verdad de la fórmula $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$. Por consiguiente ese análisis no disminuye las posibilidades, “este fenómeno se explica principalmente por la forma de la negación de **L3B**, que no es molecular como en **L3A**” [28]. *Grosso modo*, lo que indica la molecularidad es la perdida de un valor de verdad al aplicar un conectivo. En la Tabla 3.9 se muestran las posibilidades para un conectivo de implicación para la lógica **L3B**. Se debe observar que las implicaciones para la lógica **L3A**, mostradas en la Tabla 3.6, están contenidas en el conjunto de implicaciones de la lógica **L3B**.

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$I1$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$I2$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	1
2	0	1	2

$I3$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	1
2	0	1	2

$I4$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	2	2

$I5$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	1	1
2	0	2	2

$I6$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	1
2	0	2	2

$I7$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	1
2	0	2	2

$I8$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	2	2
2	0	2	2

$I9$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	1	2
2	0	1	2

$I10$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	1
2	0	1	2

$I11$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	1	2
2	0	2	2

$I12$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

$I13$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	1	2
1	0	1	1
2	0	1	2

$I14$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	2	2

$I15$

$\widehat{\Rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	1
2	0	2	2

$I16$

Tabla 3.9: Posibles implicaciones para **L3B**

En [19] los autores eligieron la implicación $I1$ para extender la lógica **L3B**, obteniendo la Definición 29. Las propiedades del nuevo sistema lógico, que a continuación se presenta, son abordadas en el Capítulo 4.

Definición 29 *La lógica obtenida a partir de* **L3B** *agregando el conectivo de implicación de la lógica* $G3$ *será denotada por* $\mathbf{L3B_G}$ *y sus tablas de verdad son las mostradas en la Tabla 3.10.*

$\widehat{\neg}$	
0	2
1	1
2	0

$\widehat{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\widehat{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\widehat{\rightarrow}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

Tabla 3.10: $\mathbf{L3B_G}$

Capítulo 4

Análisis y comparativa de extensiones de L3A y L3B con un conectivo de implicación

En [28], Hernández-Tello estudió de manera general las propiedades que satisfacen las extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B**, al dotarlas de alguna de las implicaciones mostradas en las Tablas 3.6 y 3.9. En particular, extiende las lógicas **L3A** y **L3B** con la implicación de Gödel y define a las extensiones como las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$, respectivamente. El autor centra su estudio en las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$, dejando pendiente el análisis del resto de extensiones. Más aún, su análisis le permitió obtener una gama de axiomas que definen a $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$, así como algunas de sus propiedades.

En este capítulo se hace un análisis de las propiedades que cumplen las extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B** restantes, con base en los resultados obtenidos por Hernández-Tello. En la Sección 4.4 se realiza una comparación a pares entre las extensiones.

4.1. Extensiones de L3A

Debido al método utilizado para obtener las implicaciones de la Tabla 3.6, existen propiedades comunes que satisfacen las extensiones de la lógica **L3A**, a continuación se citan de [28] las más relevantes.

Proposición 10 *Si extendemos* **L3A** *con cualquiera de las implicaciones de la Tabla 3.6, la lógica que se obtiene satisface Modus Ponens, es decir si φ y $\varphi \to \psi$ son tautologías, entonces ψ también lo es.*

Demostración Sean $\varphi, \varphi \to \psi$ fórmulas tales que son tautologías y supongamos que la fórmula ψ no es tautología. Luego, la única opción que garantiza que $\varphi \to \psi$ sea tautología es que $\varphi \in \overline{\mathcal{D}}$, es decir que para cualquier valuación se tenga que $v(\varphi) = 0$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto ψ es tautología. ■

Las propiedades **Pos1** a **Pos8** de la Proposición 11 son aquellas que definen de manera axiomática al fragmento positivo de la Lógica Intuicionista [28].

Proposición 11 *Si extendemos* **L3A** *con alguna de las implicaciones de la Tabla 3.6, la lógica que se obtiene tiene como tautologías a las siguientes fórmulas:*

Pos1 $:= \varphi \to (\psi \to \varphi)$

Pos2 $:= \Big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\Big) \to \Big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)\Big)$

Pos3 $:= (\varphi \land \psi) \to \varphi$

Pos4 $:= (\varphi \land \psi) \to \psi$

Pos5 $:= \varphi \to \Big(\psi \to (\varphi \land \psi)\Big)$

Pos6 $:= \varphi \to (\varphi \lor \psi)$

Pos7 $:= \psi \to (\varphi \lor \psi)$

Pos8 $:= (\varphi \to \sigma) \to \Big((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \lor \psi) \to \sigma)\Big)$

CW2 $:= \neg\neg\varphi \to \varphi$

Pierce $:= \Big((\varphi \to \psi) \to \varphi\Big) \to \varphi$

NI $:= \neg\neg(\varphi \to \varphi)$

DNI $:= \neg\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$

WE $:= \neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$

WC1 $:= (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$

WC2 $:= (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$

AZ2 $:= \Big((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\psi)\Big) \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$

TAUT1 $:= (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \to \psi$

La prueba de la Proposición 11 se sigue de las tablas de verdad que definen a la lógica **L3A**. Mientras que para demostrar que en las extensiones no se satisfacen las fórmulas **DNI2** y **DNC1**, mencionadas en la Proposición 12, es suficiente tomar respectivamente las valuaciones v y v', tales que $v(\varphi) = 1$, $v(\psi) = 0$, y $v'(\varphi) = 1$, $v'(\psi) = 2$.

Proposición 12 *Ninguna de las extensiones de* **L3A** *con alguna de las implicaciones de la Tabla 3.6 satisface:*

DNI2 $:= (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

DNC1 $:= \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$

En la Sección 3.1 se ha comentado el vinculo que existe entre el Teorema de la Deducción y el conectivo de implicación, en las extensiones de **L3A** se satisface tan importante teorema. En el Teorema 5 se enuncia y su demostración se puede consultar en [28].

Teorema 5 *Si* **L** *es alguna extensión de* **L3A** *con* $I1, I2, I3$ *o* $I4$*, entonces se cumple que:*

$$\varphi \models_{\mathbf{L}} \psi \textit{ si y solo si } \models_{\mathbf{L}} \varphi \to \psi.$$

Proposición 13 *Si* **L** *es cualquier extensión de la lógica* **L3A** *al agregar alguna de las implicaciones de la Tabla 3.6, entonces* **L** *es una extensión conservativa de* **L3A**.

Demostración Es claro que cualquier lógica **L** obtenida a partir de agregar alguna de las implicaciones de la Tabla 3.6, a la matriz multivaluada de la lógica **L3A**, es una extensión de **L3A**. Resta verificar que cualquier tautología de **L** en el lenguaje que tiene al conjunto de conectivos $C = \{\wedge, \vee, \neg\}$ es una tautología de la lógica **L3A**. Lo cuál resulta evidente al notar que el conjunto $\mathcal{D}$ de **L** y **L3A** es el mismo, además el conjunto C es el empleado para definir a la lógica **L3A**. ■

Como consecuencia de las Proposiciones 7 y 13 se sigue el siguiente resultado.

Proposición 14 *Si* **L** *es cualquier extensión de la lógica* **L3A** *al agregar alguna de las implicaciones de la Tabla 3.6, entonces:*

I. $\models_{\mathbf{L}} \varphi \vee \neg\varphi$.

II. $\neg\neg\varphi \models_{\mathbf{L}} \varphi$.

III. $\varphi \not\models_{\mathbf{L}} \neg\neg\varphi$.

Se debe notar que el primer punto de la Proposición 14 se refiere a la fórmula **Cw1** que aparece en la axiomática de la lógica $\mathbf{L3A_G}$, definida en la Sección 4.3.

4.2. Extensiones de L3B

Las extensiones de la lógica **L3B** tienen propiedades en común con las extensiones de la lógica **L3A**, como *Modus Ponens* y los axiomas del fragmento positivo de la Lógica Intuicionista. Sin embargo, las extensiones de **L3B** tienen como tautologías a las fórmulas **DNI2** y **DNC1**, como lo muestra la Proposición 16, lo cual no sucede en las extensiones de **L3A** como se indica en la Proposición 12. Lo anterior muestra que las extensiones de **L3B** no están contenidas en las extensiones de **L3A**.

En seguida se citan de [28] los resultados respecto a las extensiones de **L3B**, que resultan relevantes para los fines de este trabajo.

4.2. Extensiones de L3B

Proposición 15 *Si extendemos* **L3B** *con cualquiera de las implicaciones de la Tabla 3.9, la lógica que se obtiene satisface Modus Ponens, es decir si* φ *y* $\varphi \to \psi$ *son tautologías, entonces* ψ *también lo es.*

La demostración de la Proposición 15 es análoga a la prueba de la Proposición 10, mientras que la demostración de las Proposiciones 16 y 17 se siguen de las tablas de verdad de las fórmulas.

Proposición 16 *Si extendemos* **L3B** *con alguna de las implicaciones de la Tabla 3.9, la lógica que se obtiene tiene como tautologías a las siguientes fórmulas:*

$\mathbf{Pos1} := \varphi \to (\psi \to \varphi)$

$\mathbf{Pos2} := \Big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\Big) \to \Big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)\Big)$

$\mathbf{Pos3} := (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

$\mathbf{Pos4} := (\varphi \wedge \psi) \to \psi$

$\mathbf{Pos5} := \varphi \to \Big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\Big)$

$\mathbf{Pos6} := \varphi \to (\varphi \vee \psi)$

$\mathbf{Pos7} := \psi \to (\varphi \vee \psi)$

$\mathbf{Pos8} := (\varphi \to \sigma) \to \Big((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \sigma)\Big)$

$\mathbf{CW2} := \neg\neg\varphi \to \varphi$

$\mathbf{Pierce} := \Big((\varphi \to \psi) \to \varphi\Big) \to \varphi$

$\mathbf{NI} := \neg\neg(\varphi \to \varphi)$

$\mathbf{DNI} := \neg\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$

$\mathbf{DNI2} := (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

$\mathbf{DNC1} := \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$

Proposición 17 *En ninguna de las extensiones de* **L3B** *con alguna de las implicaciones de la Tabla 3.9 son tautologías las fórmulas siguientes:*

$\mathbf{WE} := \neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$

$\mathbf{WC1} := (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$

$\mathbf{WC2} := (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$

$\mathbf{AZ2} := \big((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\psi)\big) \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$

$\mathbf{TAUT1} := (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \to \psi$

Al igual que sucede en las extensiones de la lógica **L3A**, en las extensiones de la lógica **L3B** se satisface el Teorema de la Deducción, como lo indica el Teorema 6.

Teorema 6 *Si* **L** *es cualquier extensión de la lógica paraconsistente genuina* **L3B** *al agregar alguna de las implicaciones de la Tabla 3.9, entonces se cumple:*

$$\varphi \models_{\mathbf{L}} \psi \textit{ si y solo si } \models_{\mathbf{L}} \varphi \to \psi.$$

Proposición 18 *Si* **L** *es cualquier extensión de la lógica* **L3B** *al agregar alguna de las implicaciones de la Tabla 3.9, entonces* **L** *es una extensión conservativa de* **L3B**.

La demostración de la Proposición 18 es similar a la demostración de la Proposición 13. Por otra parte, la siguiente proposición se sigue de las Proposiciones 7 y 18.

Proposición 19 *Si* **L** *es cualquier extensión de la lógica* **L3B** *al agregar alguna de las implicaciones de la Tabla 3.9, entonces:*

I. $\models_{\mathbf{L}} \varphi \vee \neg\varphi$.

II. $\neg\neg\varphi \models_{\mathbf{L}} \varphi$.

III. $\varphi \models_{\mathbf{L}} \neg\neg\varphi$.

Note que el primer punto de la Proposición 19 se refiere a la fórmula **Cw1**, de la axiomática de la lógica $\mathbf{L3B_G}$ presentada en la Sección 4.3.

4.3. Axiomática de las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$

En esta sección se muestra el estudio de las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$ desde la perspectiva de teoría de prueba. En [28] se presenta un sistema axiomático tipo Hilbert para las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$, es por eso que se introducen las siguientes definiciones de [21].

Definición 30 *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ y una fórmula cualquiera $\alpha \in FORM(\mathcal{L})$, una* **instancia** *de α es cualquier fórmula $\sigma(\alpha) \in FORM(\mathcal{L})$ donde σ es una sustitución en $\mathcal{L}$.*

Definición 31 *Dados un lenguaje $\mathcal{L}$ y dos conjuntos finitos $\Gamma, \Delta \subset FORM(\mathcal{L})$ una* **regla de inferencia** *R es una relación $R \subset \mathcal{P}(FORM(\mathcal{L})) \times \mathcal{P}(FORM(\mathcal{L}))$, tal que $(\Gamma, \Delta) \in R$ y para cualquier sustitución σ se tiene que $(\sigma(\Gamma), \sigma(\Delta)) \in R$. Si $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ y $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ habitualmente la regla R se denota por $\dfrac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{\delta_1 \ldots \delta_m}R$.*

Los sistemas de Hilbert son un tipo de sistemas de deducción formal, que se caracterizan por tener un gran número de esquemas de axiomas lógicos y pocas reglas de inferencia [21].

Definición 32 *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, una* **axiomática** *o un* **sistema de prueba tipo Hilbert** *o simplemente un* **sistema de Hilbert** *es una pareja $A = \langle \Lambda, \mathcal{R} \rangle$ donde $\Lambda \subset FORM(\mathcal{L})$ es un conjunto de fórmulas bien formadas denominadas esquemas de axioma y $\mathcal{R}$ es un conjunto de reglas de inferencia.*

Definición 33 *Una fórmula α es* **consecuencia lógica** *de un conjunto de fórmulas Γ en una axiomática A si existe una sucesión finita de fórmulas $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ donde $\beta_n = \alpha$ y cada β_i es una instancia de un esquema de axioma, es una instancia de una fórmula en Γ o es consecuencia de fórmulas previas aplicando alguna regla de inferencia en A y lo denotamos por $\Gamma \vdash_A \alpha$.*

Los siguientes sistemas de Hilbert se presentan con la finalidad de formar un compendio de fórmulas, que permita analizar el comportamiento del resto de extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B**. Conocer que axiomas se satisfacen y cuales no, es un primer paso en la búsqueda de un sistema axiomático para cada una de las extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B**, dando lugar al desarrollo de teoría de prueba en dichas lógicas. Los resultados obtenidos se presentan en la Sección 4.4.

Sea una teoría formal axiomática $\mathbb{L}$ para la lógica $\mathbf{L3A_G}$ formada por los conectivos primitivos: $\neg$, $\to$, $\vee$ y $\wedge$. Las fórmulas se construyen de la manera usual, y los esquemas de axiomas son [28]:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{Pos1}: & \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \\
\mathbf{Pos2}: & \vdash \Big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\Big) \to \Big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)\Big) \\
\mathbf{Pos3}: & \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi \\
\mathbf{Pos4}: & \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi \\
\mathbf{Pos5}: & \vdash \varphi \to \Big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\Big) \\
\mathbf{Pos6}: & \vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi) \\
\mathbf{Pos7}: & \vdash \psi \to (\varphi \vee \psi) \\
\mathbf{Pos8}: & \vdash \Big(\varphi \to \sigma\Big) \to \Big((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \sigma)\Big) \\
\mathbf{Cw1}: & \vdash \varphi \vee \neg\varphi \\
\mathbf{WE}: & \vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \psi) \\
\mathbf{L3A1}: & \vdash ((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)) \to \neg\neg(\varphi \to \psi) \\
\mathbf{L3A2}: & \vdash \neg\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \\
\mathbf{L3A3}: & \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi) \\
\mathbf{L3A4}: & \vdash (\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \\
\mathbf{L3A5}: & \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi \\
\mathbf{L3A6}: & \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi) \\
\mathbf{L3A7}: & \vdash \neg(\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \neg\psi)
\end{array}
$$

Además, se considera a *Modus Ponens* como la única regla de inferencia.

En los axiomas anteriores la notación $\Lambda \vdash \lambda$ indica que existe una deducción de λ en $\mathbb{L}$ con hipótesis las fórmulas del conjunto Λ. Cuando $\Lambda = \emptyset$ simplemente se escribe $\vdash \lambda$, para indicar que es posible demostrar λ sin hipótesis. Además, se emplea $\Lambda, \varphi \vdash \psi$ para representar que $\Lambda \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ [28].

Nota 4 *En cualquier extensión de la lógica* **L3A** *con alguna de las implicaciones de la Tabla 3.6, la fórmula* ***WE:*** $\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$*, de la Proposición 11, y la fórmula* ***WE:*** $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$*, axioma de la lógica* $\mathbf{L3A_G}$*, son lógicamente equivalentes.*

La prueba de la nota se sigue de las tablas de verdad de las fórmulas **WE**.

4.3. Axiomática de las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$

Sea $\mathbb{L}_1$, una teoría formal axiomática para $\mathbf{L3B_G}$ constituida por los conectivos primitivos: $\neg$, $\to$, $\vee$ y $\wedge$ y dos conectivos definidos en términos de los primitivos G y N definidos como: $G(\varphi) := \varphi \to (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi))$ y $N(\varphi) := \varphi \wedge \neg\varphi$ [28]. Las fórmulas bien formadas se construyen de la manera usual y los esquemas de axioma son los siguientes:

Pos1 $:\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$

Pos2 $:\vdash \Big(\varphi \to (\psi \to \sigma)\Big) \to \Big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)\Big)$

Pos3 $:\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

Pos4 $:\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi$

Pos5 $:\vdash \varphi \to \Big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\Big)$

Pos6 $:\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$

Pos7 $:\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$

Pos8 $:\vdash (\varphi \to \sigma) \to \Big((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \sigma)\Big)$

Cw1 $: \vdash \varphi \vee \neg\varphi$

Cw2 $: \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

SWE $: \vdash \neg\neg\varphi \to \big(\neg(\varphi \wedge \varphi) \to \psi\big)$

L3B1 $: \vdash N(\varphi \wedge \psi) \to G(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

L3B2 $: \vdash \neg(\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \neg\psi)$

L3B3 $: \vdash \neg N(\varphi) \to G(N(\varphi))$

L3B4 $: \vdash \big(\neg\varphi \wedge \neg N(\psi)\big) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

L3B5 $: \vdash N(\varphi \to \psi) \to G(N(\varphi))$

L3B6 $: \vdash \big((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg N(\varphi)\big) \to \neg(\varphi \to \psi)$

L3B7 : $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi$

L3B8 : $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$

La única regla de inferencia es *Modus Ponens* (**MP**).

4.4. Comparación de extensiones

En esta sección se hace una comparación de las extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B**, mediante la verificación de qué fórmulas de los sistemas axiomáticos mostrados en la Sección 4.3 se satisfacen en ellas.

Considerando que las Tablas 3.6 y 3.9 muestran las implicaciones adecuadas para extender a las lógicas **L3A** y **L3B**, respectivamente. Se denota por $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ a la extensión de la lógica **L3A** obtenida al incorporar, a la matriz multivaluada de **L3A**, la implicación $\mathbb{I}\mathbf{k}$ con $\mathbf{k} \in \{2, 3, 4\}$. De manera similar, se representa con $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ a la extensión de la lógica **L3B** obtenida al agregar la implicación $\mathbb{I}\mathbf{k}$, para $\mathbf{k} \in \{2, 3, \ldots, 16\}$.

Para estudiar a las extensiones $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}}$ se utilizaron los axiomas presentados en la Sección 4.3, salvo aquellos de los que ya se mostraron resultados en las Secciones 4.1 y 4.2. Cabe señalar que en las Proposiciones 11 y 16 se menciona la fórmula **CW2** :$\neg\neg\varphi \to \varphi$. Mientras que en el conjunto de axiomas de $\mathbf{L3B}_{\mathbf{G}}$ está **Cw2** :$\varphi \to \neg\neg\varphi$, el lector debe tener cuidado con el uso de la letra **W** en mayúscula o minúscula.

En [28] se muestra que cualquier extensión de **L3A** es incomparable con cualquier extensión de **L3B**. Esto se logra viendo que en cualquier lógica $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ se cumple que $\varphi \to \neg\neg\varphi$ es tautología, mientras que en toda lógica $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ no. Por otro lado para cualquier lógica $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, la fórmula $\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$ es tautología. Sin embargo, para toda lógica $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ eso no sucede. No obstante, el autor no analizó si algunas lógicas $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ a pares son comparables y tampoco analizó a pares las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$. Con la finalidad de atender esa carencia, en cada extensión se estudia cuales de los axiomas de $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$ se satisfacen, es decir cuales son tautologías. Para proporcionar una mejor especificación de las propiedades de las extensiones se propone la Definición 34.

Definición 34 *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, $\mathcal{M}$ una matriz para él y $\varphi \in FORM(\mathcal{L})$, se dice que φ es* **2-tautología** *si φ es tautología y además cumple que para cualquier valuación, la fórmula obtiene únicamente el valor 2.*

La demostración de la Proposición 20 a la Proposición 25 se sigue de las tablas de verdad de las fórmulas, las cuales se pueden consultar en el Apéndice B. Las Proposiciones 20 y 21 se resumen en las Tablas 4.2 y 4.3, mientras que las Proposiciones 22 a 25 se resumen en las Tablas 4.4 y 4.5. En las Tablas 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 la primera columna corresponde al nombre de la lógica que se analiza y el primer renglón tiene el nombre del axioma estudiado. Con ✓✓se indica que la fórmula es 2-tautología, mientras que una tautología se representa con ✓, para señalar que un axioma no se satisface se emplea ✗.

Proposición 20 *En cualquier lógica* $\mathbf{L3A_{\mathbb{I}k}}$ *se cumple que:*

I. *Las fórmulas* **L3A2***,* **L3A3***,* **L3A4***,* **L3A5***,* **L3A6***,* **L3B3***,* **L3B6***,* **L3B7** *y* **L3B8** *son 2-tautologías.*

II. *La fórmula* **SWE** *es tautología, más aún en la lógica* $\mathbf{L3A_{\mathbb{I}3}}$ *la fórmula es 2-tautología.*

III. *Las fórmulas* **L3A1***,* **L3A7***,* **L3B1***,* **L3B2** *y* **L3B4** *no se satisfacen.*

Proposición 21 *En la lógica* $\mathbf{L3A_{\mathbb{I}2}}$ *la fórmula* **L3B5** *es 2-tautología.*

Proposición 22 *En cualquier lógica* $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}k}}$ *se tiene que:*

I. *La fórmula* **L3A1** *es tautología. Más aún, en las lógicas* $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}5}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}6}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}7}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}8}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}9}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}12}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}15}}$ *y* $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}16}}$ *la fórmula es 2-tautología.*

II. *Las fórmulas* **L3A2** *y* **L3A4** *son tautologías. Inclusive en las lógicas* $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}2}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}3}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}4}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}5}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}7}}$, $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}8}}$ *y* $\mathbf{L3B_{\mathbb{I}9}}$ *las fórmulas son 2-tautologías.*

III. *Las fórmulas* **L3A5**, **L3B4** *y* **L3B7** *son tautologías. Podemos decir más, en la lógica* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_5}$ *las fórmulas son 2-tautología.*

IV. *Las fórmulas* **L3A6** *y* **L3B8** *son tautologías. Más aún, en las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_5}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_7}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_8}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_9}$ *las fórmulas son 2-tautologías.*

V. *La fórmula* **SWE** *es tautología. Más aún, en las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_5}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_9}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_{13}}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_{15}}$ *la fórmula es 2-tautología.*

VI. *Las fórmulas* **L3B1** *y* **L3B3** *son 2-tautología.*

VII. *La fórmula* **L3A3** *no se satisface.*

Proposición 23 *Sólo en las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_5}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_{13}}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_{15}}$ *las fórmulas* **L3A7** *y* **L3B2** *son tautologías. Inclusive, en* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_5}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_{15}}$ *las fórmulas son 2-tautologías.*

Proposición 24 *Sólo en las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_2}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_5}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_9}$, *la fórmula* **L3B5** *es tautología, inclusive en* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_5}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_9}$ *es 2-tautología.*

Proposición 25 *Únicamente en las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_2}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_3}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_4}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_{10}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_{11}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_3}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_{14}}$, *la fórmula* **L3B6** *es tautología.Además, en la lógica* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}_3}$ *es 2-tautología.*

	Axiomas							
	L3A1	**L3A2**	**L3A3**	**L3A4**	**L3A5**	**L3A6**	**L3A7**	**SWE**
$\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}_2}$	✗	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✗	✓
$\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}_3}$	✗	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✗	✓✓
$\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}_4}$	✗	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✗	✓

Tabla 4.2: Análisis de axiomas de $\mathbf{L3A_G}$ en las lógicas $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}_k}$.

	Axiomas							
	L3B1	**L3B2**	**L3B3**	**L3B4**	**L3B5**	**L3B6**	**L3B7**	**L3B8**
$\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}2}$	✗	✗	✓✓	✗	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓
$\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}3}$	✗	✗	✓✓	✗	✗	✓✓	✓✓	✓✓
$\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}4}$	✗	✗	✓✓	✗	✗	✓✓	✓✓	✓✓

Tabla 4.3: Análisis de axiomas de $\mathbf{L3A_G}$ en las lógicas $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$.

	Axiomas							
	L3A1	**L3A2**	**L3A3**	**L3A4**	**L3A5**	**L3A6**	**L3A7**	**SWE**
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}2}$	✓	✓✓	✗	✓✓	✓	✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}3}$	✓	✓✓	✗	✓✓	✓	✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}4}$	✓	✓✓	✗	✓✓	✓	✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}5}$	✓✓	✓✓	✗	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}6}$	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}7}$	✓✓	✓✓	✗	✓✓	✓	✓✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}8}$	✓✓	✓✓	✗	✓✓	✓	✓✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}9}$	✓✓	✓✓	✗	✓✓	✓	✓✓	✗	✓✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}10}$	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}11}$	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}12}$	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}13}$	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}14}$	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}$	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓✓	✓✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}16}$	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓

Tabla 4.4: Análisis de axiomas de $\mathbf{L3A_G}$ en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$.

	Axiomas							
	L3B1	**L3B2**	**L3B3**	**L3B4**	**L3B5**	**L3B6**	**L3B7**	**L3B8**
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{2}}$	✓✓	✗	✓✓	✓✓	✓	✓	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{3}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✓✓	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{4}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{5}}$	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✓✓	✗	✓✓	✓✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{6}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✗	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{7}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✗	✓	✓✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{8}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✗	✓	✓✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✓✓	✗	✓	✓✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{10}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{11}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{12}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✗	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{13}}$	✓✓	✓	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{14}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✓	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{15}}$	✓✓	✓✓	✓✓	✓	✗	✗	✓	✓
$\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{16}}$	✓✓	✗	✓✓	✓	✗	✗	✓	✓

Tabla 4.5: Análisis de axiomas de $\mathbf{L3B_G}$ en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$.

Comparar dos lógicas permite determinar si alguna de ellas es extensión de la otra, de no ser así se dice que las lógicas son incomparables. En teoría de modelos, comparar las lógicas **L1** y **L2** significa encontrar fórmulas, α y β, de modo que para una de ellas se tenga un modelo en una lógica pero no en la otra y viceversa [28], es decir:

$$\models_{\mathbf{L1}} \alpha \quad \text{pero} \quad \not\models_{\mathbf{L2}} \alpha$$

y

$$\models_{\mathbf{L2}} \beta \quad \text{pero} \quad \not\models_{\mathbf{L1}} \beta$$

Las Tablas 4.2 y 4.3 permiten demostrar las comparaciones a pares de las lógicas $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$. Por ejemplo, se tiene que $\models_{\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}2}}$ **L3B5** sin embargo $\not\models_{\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}3}}$ **L3B5** y $\not\models_{\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}4}}$ **L3B5**, así se tiene la siguiente proposición.

Proposición 26 *La lógica* $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{2}}$ *no está contenida en las lógicas* $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{3}}$ *y* $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{4}}$.

Con el análisis realizado no se encontró alguna fórmula que permita determinar si las lógicas $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ son incomparables a pares.

Las Tablas 4.4 y 4.5 dan lugar a las comparaciones a pares entre las extensiones $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$.

Proposición 27 *En las extensiones de* **L3B** *mediante algún conectivo de implicación se tiene:*

I. $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{2}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, *con* $k \in \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16\}$.

II. $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, *con* $j \in \{3, 4, 10, 11, 14\}$ *y* $k \in \{6, 7, 8, 12, 16\}$.

III. $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{13}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, *con* $k \in \{3, 4, 10, 11, 14, 15, 16\}$.

IV. $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{5}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, *con* $k \in \{6, 7, 8, 9, 12, 15, 16\}$.

V. $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, *con* $j \in \{6, 7, 8, 12, 16\}$ *y* $k \in \{9, 10, 11, 13, 14, 15\}$.

VI. $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, *con* $k \in \{12, 16\}$.

VII. $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{15}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{16}}$.

Demostración I. En la Tabla 4.5 se verifica que $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{2}}}$ **L3B5**, a diferencia de las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{3}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{4}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{6}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{7}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{8}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{10}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{11}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{12}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{13}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{14}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{16}}$ en donde la fórmula **L3B5** no es tautología. También se cumple que $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{2}}}$ **L3B6**, contrario a lo que sucede en la lógica $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}}$, donde la fórmula no es tautología.

II. Dado que una 2-tautología en particular es tautología, las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{3}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{4}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{10}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{11}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{14}}$ validan las mismas fórmulas, en particular **L3B6** es tautología en dichas lógicas. Por otra parte, en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{6}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{7}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{8}}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{12}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{16}}$ la fórmula **L3B6** no es tautología.

III. En las Tablas 4.4 y 4.5 se puede verificar que $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}13}}$ **L3A7** y $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}13}}$ **L3B6**. También se observa que en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}3}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}4}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}10}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}11}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}14}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}16}$ la fórmula **L3A7** no es tautología. Además $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}}$ **L3B6**.

IV. En la Tabla 4.4 se puede observar que $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}5}}$ **L3A7**. Sin embargo, en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, con $k \in \{6, 7, 8, 9, 12, 16\}$ no sucede que la fórmula **L3A7** sea tautología. Por otra parte se tiene que $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}5}}$ **L3B5** y $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}}$ **L3B5**.

V. Las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}}$, con $j \in \{6, 7, 8, 12, 16\}$ no se satisfacen las mismas fórmulas, en particular las fórmulas **L3B5**, **L3B6** y **L3A7** no son tautologías. A diferencia de las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ para $k \in \{9, 10, 11, 13, 14, 15\}$, donde se tiene $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}9}}$ **L3B5**, $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}10}}$ **L3B6**, $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}11}}$ **L3B6**, $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}13}}$ **L3A7**, $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}14}}$ **L3B6** y $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}}$ **L3A7**. Así $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$.

VI. Observe que la fórmula **L3B5** es tautología en la lógica $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}9}$, no obstante en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, con $k \in \{12, 16\}$, la fórmula no se satisface.

VII. Se tiene que $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}}$ **L3A7** y $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}16}}$ **L3A7**.

■

Proposición 28 *La lógica* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}2}$ *es incomparable con las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}5}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}13}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}$*.*

Demostración Basta observar que en $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}2}$ las fórmulas **L3B5** y **L3B6** son tautologías, mientras que $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}13}}$ **L3B5**, $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}5}}$ **L3B6** y $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}}$ **L3B6**, luego $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}2} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, con $k \in \{5, 13, 15\}$. Por otra parte, se tiene que $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}2}}$ **L3A7** de manera contraria a lo que sucede en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}5}$, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}13}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}$ donde la fórmula es tautología. Así $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}2}$, con $k \in \{5, 13, 15\}$. ■

Proposición 29 *Las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}3}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}4}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}10}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}11}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}14}$ *no son comparables con las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}5}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}9}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}$*.*

Demostración En la Tabla 4.5 se verifica que $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}}}$ **L3B6**, para $j \in \{3, 4, 10, 11, 14\}$. Sin embargo en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, para $k \in \{5, 9, 15\}$, la fórmula **L3B6** no es tautología. Luego $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$. Por otra parte, la fórmula **L3A7** es tautología en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}5}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}15}$, mientras que $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}}}$ **L3A7**. Además $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}9}}$ **L3B5** y $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}}}$ **L3B5**. Así $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{j}}$. ■

Proposición 30 *Las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{10}}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{11}}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{13}}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{14}}$ *no son comparables con la lógica* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{5}}$*.*

Demostración La Tabla 4.5 muestra que en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, con $k \in \{10, 11, 13, 14\}$ la fórmula **L3B6** es tautología, además se tiene que $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{5}}}$ **L3B6**, luego $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{5}}$. Por otra parte, la fórmula **L3A7** es tautología en $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{5}}$, sin embargo en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ eso no sucede. Luego, $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{5}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$. ■

Proposición 31 *Las lógicas* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{10}}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{11}}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{13}}$*,* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{14}}$ *y* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{15}}$ *son incomparables con la lógica* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}}$*.*

Demostración Se tiene que $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}}}$ **L3B5**, sin embargo en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, con $k \in \{10, 11, 13, 14, 15\}$, la fórmula **L3B5** no se satisface, luego $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$. Por otra parte, en las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ la fórmula **L3B6** es tautología. Sin embargo se tiene que $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}}}$ **L3B6**. Además, $\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{15}}}$ **L3B2** y $\not\models_{\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}}}$ **L3B2**. Así $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}} \subsetneq \mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{9}}$. ■

Las Proposiciones 28, 29, 30 y 31 son de especial relevancia, debido a que si dos lógicas son incomparables entonces los axiomas que las definen son diferentes. Por lo tanto si se tiene una axiomática para alguna de las lógicas, automáticamente dichos axiomas son descartados al momento de buscar la axiomática que define a la otra lógica. Por consiguiente la incomparabilidad de las lógicas indica que el razonamiento que se modela es distinto.

4.5. Leyes de De Morgan

En la Sección 2.5 se mencionan propiedades de las lógicas **L3A** y **L3B**, en particular las Proposiciones 8 y 9 se refieren a las leyes de De Morgan que se cumplen en **L3A** y **L3B**, respectivamente. Cabe mencionar que las leyes de De Morgan presentadas en la Tabla 2.17, son las correspondientes a la conjunción, disyunción y negación, debido a que las lógicas **L3A** y **L3B** carecen del conectivo de implicación. De modo que continuando con la notación de la Tabla 2.17, en las extensiones las leyes de De Morgan se enuncian, incluyendo el conectivo de implicación, como a continuación se muestra.

D1a: $\models_{\mathbf{L}} \neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$

D1b: $\models_{\mathbf{L}} \neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

D2a: $\models_{\mathbf{L}} \neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi \wedge \neg\psi$

D2b: $\models_{\mathbf{L}} \neg\varphi \wedge \neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)$

D3a: $\models_{\mathbf{L}} \neg(\neg\varphi \wedge \psi) \to \varphi \vee \neg\psi$

D3b: $\models_{\mathbf{L}} \varphi \vee \neg\psi \to \neg(\neg\varphi \wedge \psi)$

D4a: $\models_{\mathbf{L}} \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg\varphi \vee \psi$

D4b: $\models_{\mathbf{L}} \neg\varphi \vee \psi \to \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

D5a: $\models_{\mathbf{L}} \neg(\neg\varphi \vee \psi) \to \varphi \wedge \neg\psi$

D5b: $\models_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\psi \to \neg(\neg\varphi \vee \psi)$

D6a: $\models_{\mathbf{L}} \neg(\varphi \vee \neg\psi) \to \neg\varphi \wedge \psi$

D6b: $\models_{\mathbf{L}} \neg\varphi \wedge \psi \to \neg(\varphi \vee \neg\psi)$

D7a: $\models_{\mathbf{L}} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi$

D7b: $\models_{\mathbf{L}} \varphi \vee \psi \to \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

D8a: $\models_{\mathbf{L}} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi$

D8b: $\models_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Por otra parte, los Teoremas 5 y 6 indican que en las extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B** se cumple el Teorema de la Deducción, más aún las Proposiciones 13 y 18 señalan que las extensiones, son extensiones conservativas de **L3A** y **L3B**, respectivamente. Así se siguen los siguientes resultados.

Proposición 32 *Si* $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ *es cualquier extensión de la lógica* **L3A***, entonces en* $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ *solo se cumplen las siguientes leyes de De Morgan:* $D1a, D2a, D2b, D3a, D4a, D5a, D6a, D7a$ *y* $D8a$.

Proposición 33 *Si* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ *es cualquier extensión de la lógica* **L3B***, entonces en* $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ *solo se cumplen las siguientes leyes de De Morgan:* $D1a, D2a, D2b, D3a, D4a, D5a, D5b, D6a, D6b, D7a, D8a$ *y* $D8b$.

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo fue estudiar algunas de las extensiones, que se obtienen al agregar un conectivo de implicación a las lógicas paraconsistentes genuinas **L3A** y **L3B**. El interés de realizar este estudio fue que actualmente se conocen pocas lógicas paraconsistentes genuinas que tengan los conectivos de negación, conjunción, disyunción e implicación. Por ejemplo las lógicas $\mathbf{L3A_G}$, $\mathbf{L3B_G}$ y **NH**.

En 2014 Jean Yves Béziau y Anna Franceschetto definieron a las lógicas paraconsistentes genuinas, como aquellas que rechazan **NC** y **EC**. Además, presentan las primeras lógicas trivaluadas paraconsistentes genuinas, con conjunto de valores de verdad finito, **L3A** y **L3B**. Pero estas lógicas solo tienen los conectivos de negación, conjunción y disyunción. El conjunto de conectivos es un elemento importante, ya que la expresividad de una lógica se basa en él. Por tal motivo en 2017 Hernández-Tello determina las implicaciones adecuadas para extender a las lógicas **L3A** y **L3B**. Más aún, utiliza una de ellas para definir a las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$. Además las dota de un sistema axiomático tipo Hilbert. Quedando pendiente el estudio de algunas extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B**, respectivamente 3 y 15.

Por otra parte, se planteó realizar un documento que fuera accesible para estudiantes de la segunda mitad de licenciatura, por lo cual se presentó un desarrollo teórico gradual. Por tal motivo para las definiciones del Capítulo 1 se construyeron ejemplos que facilitarán su comprensión. Además, se demostraron resultados que en libros especializados se omiten sus pruebas.

Conclusiones

Para señalar el desarrollo de la paraconsistencia, en el Capítulo 2, fue necesario estudiar lógicas no clásicas como las lógicas multivaluadas, trivaluadas y paraconsistentes. Particularmente se estudiaron las lógicas Ł3, PAC, G3' y B3. Además se demostró que los principios **NC** y **EC** son independientes, en el sentido que el incumplimiento de uno no implica ni excluye el cumplimiento del otro. En este hecho radica la necesidad de desarrollar la paraconsistencia genuina. También se analizaron los requisitos que deben cumplir los conectivos de las lógicas trivaluadas, para que se pueda tener una lógica paraconsistente genuina. Esto permitió presentar a las lógicas paraconsistentes trivaluadas genuinas **L3A** y **L3B**, así como algunas de sus propiedades más relevantes.

Para lograr el objetivo principal del trabajo fue necesario estudiar la importancia del conectivo de implicación en una lógica. Más aún, señalar las condiciones que se le piden al conectivo de implicación, de ser extensión conservativa, neoclásica, para ser adecuada para las lógicas **L3A** y **L3B**. Este trabajo ya había sido realizado en [28] y [19] por Hernández-Tello et al. Sin embargo en el Capítulo 3 se hizo un análisis completo sobre ese estudio, observando que las implicaciones para **L3A** están contenidas en el conjunto de implicaciones para **L3B**.

Una vez conocidas las implicaciones que permitirían extender a las lógicas **L3A** y **L3B**. Se procedió a estudiar a las extensiones $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$. Entre los aportes de esta tesis está la codificación de las extensiones $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, así como el conjunto de axiomas de las lógicas $\mathbf{L3A}_{\mathbf{G}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbf{G}}$. Para eso fue necesario aprender el lenguaje de programación DLV. Otro aporte es que se obtuvieron algunas comparaciones entre las lógicas $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ y comparaciones entre las lógicas $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$, en concreto las Proposiciones 28, 29, 30 y 31, cabe señalar que los resultados presentados en la Sección 4.4 son originales.

Como trabajo a futuro se plantea el estudio de las extensiones $\mathbf{L3A}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{k}}$ desde la perspectiva de teoría de prueba. En 2017 solo una extensión de **L3A** y una extensión de **L3B** contaban con un sistema axiomático tipo Hilbert, las lógicas $\mathbf{L3A}_{\mathbf{G}}$ y $\mathbf{L3B}_{\mathbf{G}}$. Recientemente en [25] han presentado a la lógica NH, la cual corresponde a la lógica $\mathbf{L3B}_{\mathbb{I}\mathbf{5}}$ con un sistema axiomático tipo Hilbert. De modo que faltan varias extensiones por dotar de un sistema axiomático tipo Hilbert.

Apéndice A

DLV

Para analizar los axiomas de las lógicas $\mathbf{L3A_G}$ y $\mathbf{L3B_G}$ en las extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B** con un conectivo de implicación, se hizo uso de programación declarativa. Para lo cuál se utilizó el lenguaje DLV. En este apéndice se da una breve noción sobre la programación declarativa y DLV. Además se presenta el código de algunos programas empleados.

"Existen distintas escuelas de pensamiento sobre las formas de ver a la programación llamadas paradigmas. Un *paradigma de programación* provee (y determina) la visión y métodos que un programador utiliza en la construcción de un programa. Diferentes paradigmas resultan en diferentes estilos de programación y en diferentes formas de pensar la solución de los problemas." [25]

Por su parte los lenguajes de programación proveen implementaciones para las herramientas conceptuales descritas por los paradigmas. "Por lenguajes de programación entenderemos medios eficientes de comunicación computadora-humano, tales lenguajes difieren de acuerdo al tipo de información que se desee comunicar a la computadora; hay dos tipos básicos de lenguajes, algorítmico y declarativo" [20].

"Los *lenguajes declarativos* son lo más parecido al idioma en su potencia expresiva y funcionalidad, están en el nivel más alto respecto a otros. Son fundamentalmente lenguajes de órdenes, dominados por sentencias que expresan lo que hay que hacer en vez de como hacerlo" [20].

DLV Es un sistema de base de datos deductivas basado en programación lógica.

- Hechos: cláusulas aceptadas como verdaderas.

```
valor_de_verdad(0).
```

- Reglas: cláusulas formadas por una cabeza y un cuerpo.

```
conj(0, X,0):-v(X).
```

- Restricciones: son reglas en forma negativa.

```
:- impl(X,Y,Z), des(X), des(Z), v(Y), not des(Y).
```

Sintaxis de DLV

- **Constantes:** letras minúsculas, guión bajo y dígitos.
- **Variables:** letras mayúsculas y combinación de letras mayúsculas seguidas de guión bajo o dígitos.
- **Términos:** una constante o una variable.

A.1. Código extensiones de L3A

El siguiente código es un machote de los programas para analizar las diferentes extensiones de la lógica **L3A**, lo único que se debe cambiar es la definición del conectivo de implicación, adecuando la etiqueta de los hechos. En el apartado A.3 de este apéndice, se presenta el código de las implicaciones para extender a las lógicas **L3A** y **L3B**.

% Este programa contiene una lista de axiomas para analizar las extensiones de la lógica **L3A**
% con una implicación.
% Fecha de elaboración: Diciembre 2018.
% Autor: Yaretzi López Gómez, J. Alejandro Hernández-Tello.

% Corre en DLV.

% Se requiere que el ejecutable dlv.bin y el archivo axiomas.txt se encuentre en la misma dirección.

% El archivo de salida (respuesta.txt) se crea con el operador “>”.

% Antes de ejecutar, en la terminal se ubica en la dirección de los archivos.

% Comando para ejecución: ./dlv.bin axiomas.txt >respuesta.txt

% Se pueden agregar modificadores de salida como silent"para eliminar titulo y espacios en el

% archivo de salida o “-filter=nombreDelHecho” ;

% Por ejemplo ./dlv.bin axiomas.txt - silent -filter=impl axiomas.txt >respuesta.txt

%Definición de los valores de verdad:

```
v(0).
v(1).
v(2).
```

%Definición de valores designados:

```
des(X):- v(X), X!=0.
```

% Definición de los conectivos primitivos de la lógica **L3A***:*

% Negación:

```
neg(0,2).
neg(1,2).
neg(2,0).
```

% Conjunción:

```
conj(0,X,0) :- v(X).
conj(1,X,X) :- v(X).
conj(X,X,X) :- v(X).
conj(Y,X,Z):-conj(X,Y,Z).
```

```
% Disyunción:

dis(X,X,X) :- v(X).
dis(X,Y,Y) :- v(X), v(Y), X < Y.
dis(X,Y,X) :- v(X), v(Y), Y < X.

% Implicación IX
```

% →	0	1	2
%0	2	1	2
%1	0	2	2
%2	0	1	2

```
impl(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl(X,X,2):- v(X).
impl(X,2,2):- v(X).
impl(X,1,1):- v(X), X!=1.

% Otros Conectivos
% Doble negación

nneg(X,Z):- v(X), neg(X,Z1), neg(Z1, Z).

% G

g(0,2).
g(1,0).

% N

n(0,0).
n(1,2).
n(2,0).
```

% *Regla de inferencia: Modus ponens*

```
:- impl(X,Y,Z), des(X), des(Z), v(Y), not des(Y).
MP(Y):- impl(X,Y,Z), des(X), des(Z), v(Y).
```

% *Axiomas*

% **Cw1**

```
cw1(X,R):-neg(X,N),    dis(X,N,R).
```

%**Cw2**

```
cw2(X,R):- v(X), nneg(X,Z1),impl(Z1,X,R).
```

% **WE**

```
we(X,Y,R):- v(X), v(Y), neg(X,Z1), neg(Z1,Z2),impl(Z1,Y,W),impl(Z2,W,R).
```

% **L3A1**

```
l3a1(X,Y,R):-impl(X,Y,Z1), nneg(X, N1), nneg(Y, N2), impl(N1,N2,Z2),
             conj(Z1, Z2, W1), nneg(Z1,W2), impl(W1,W2,R).
```

% **L3A2**

```
l3a2(X,Y,R):- impl(X,Y,Z), nneg(Z,W1), nneg(X,N1), nneg(Y,N2),impl(N1,N2,W),
              impl(W1,W,R).
```

% **L3A3**

```
l3a3(X,Y,R):- neg(X,N1), neg(Y,N2), conj(N1,N2,Z), conj(X,Y, Z2), neg(Z2,N),
              impl(Z,N,R).
```

% **L3A4**

```
l3a4(X,Y,R):- nneg(Y,N), conj(X,N,A1), conj(X,Y,A2), nneg(A2,N1),
              impl(A1,N1, R).
```

% **L3A5**

```
l3a5(X,Y,R):- dis(X,Y,A1), neg(A1,N), neg(X,N1), impl(N,N1,R).
```

% **L3A6**

```
l3a6(X,Y,R):- neg(X,N1), neg(Y,N2), conj(N1,N2,A), dis(X,Y,O), neg(O,N),
              impl(A,N,R).
```

% **L3A7**

```
l3a7(X,Y,R):- impl(X,Y, I), neg(I,N), neg(Y,N1), conj(X,N1,A), impl(N,A,R).
```

% **SWE**

```
swe(X,Y,R):-nneg(X,N1), conj(X,X,A), neg(A,N), impl(N,Y,Z), impl(N1,Z,R).
```

% **L3B1**

```
l3b1(X,Y,R):-conj(X,Y,A), n(A,N), neg(X,N1), neg(Y,N2), conj(N1,N2, A2),
        g(A2,G), impl(N,G,R).
```

% **L3B2**

```
l3b2(X,Y,R):-impl(X,Y,I), neg(I,N1), neg(Y,N), conj(X,N,A), impl(N1,A,R).
```

% **L3B3**

```
l3b3(X,R):-n(X,N), neg(N,Z), g(N,G), impl(Z,G,R).
```

%**L3B4**

```
l3b4(X,Y,R):-neg(X,N1), n(Y,N), neg(N,N2), conj(N1,N2,A), conj(X,Y,A2),
        neg(A2,N3), impl(A,N3,R).
```

%**L3B5**

```
l3b5(X,Y,R):-impl(X,Y,I), n(I,N), n(X,Z), g(Z,G), impl(N,G,R).
```

% **L3B6**

```
l3b6(X,Y,R):-neg(Y,N1), conj(X,N1,A), n(X,N), neg(N,N2), conj(A,N2,A3),
             impl(X,Y,I), neg(I,Z), impl(A3,Z,R).
```

%**L3B7**

```
l3b7(X,Y,R):-dis(X,Y,Z), neg(Z,N), neg(X,Z1), impl(N, Z1,R).
```

% **L3B8**

```
l3b8(X,Y,R):- neg(X,N1), neg(Y,N2), and(N1,N2,A), or(X,Y,Z), neg(Z,N),
             impl(A,N,R).
```

A.2. Código extensiones de L3B

Para analizar las extensiones de las lógicas **L3A** y **L3B** se emplean los mismos elementos: conjunto de axiomas, conectivos extras y regla de inferencia. De los cuales el código se encuentra en la parte A.1, entonces a continuación únicamente se muestra el código que define a los conectivos de **L3B**. El programa queda completo con el código correspondiente a los axiomas, conectivos extra y regla de inferencia.

% Este programa contiene los conectivos que definen a la lógica **L3B**.
% Fecha de elaboración: Diciembre 2018.
% Autor: Yaretzi López Gómez, J. Alejandro Hernández-Tello.
% Corre en DLV.
% Se requiere que el ejecutable dlv.bin y el archivo axiomas.txt se encuentre en la misma dirección.
% El archivo de salida (respuesta.txt) se crea con el operador “>”.
% Antes de ejecutar, en la terminal se ubica en la dirección de los archivos.
% Comando para ejecución: ./dlv.bin axiomas.txt >respuesta.txt

```
%Definición de los valores de verdad:

v(0).
v(1).
v(2).

%Definición de los valores de verdad:

des(X):- v(X), X!=0.

% Definición de los conectivos primitivos de la lógica L3B:
% Negación:

neg(0,2).
neg(1,1).
neg(2,0).

% Conjunción:

conj(0,X,0) :- v(X).
conj(X,X,2) :- v(X), X!=0.
conj(Y,X,Z):-conj(X,Y,Z).
conj(1,2,1).

% Disyunción:

dis(X,X,X) :- v(X).
dis(X,Y,Y) :- v(X), v(Y), X < Y.
dis(Y,X,R):- dis(X,Y,R).
```

A.3. Código implicaciones

% Este programa contiene las implicaciones aceptables para extender a la lógica **L3A** y **L3B**.

% Fecha de elaboración: Diciembre 2018.

A.3. Código implicaciones

% Autor: Yaretzi López Gómez, J. Alejandro Hernández-Tello.

% Corre en DLV.

% Se requiere que el ejecutable dlv.bin y el archivo axiomas.txt se encuentre en la misma dirección.

% El archivo de salida (respuesta.txt) se crea con el operador “>”.

% Antes de ejecutar, en la terminal se ubica en la dirección de los archivos.

% Comando para ejecución: ./dlv.bin axiomas.txt >respuesta.txt

% Implicación Gödel:

% $\rightarrow$	0	1	2
%0	2	2	2
%1	0	2	2
%2	0	1	2

```
implg(X,0,0):- v(X), X!=0.
implg(X,Y,2):- v(X), v(Y), X<=Y.
implg(2,1,1).
```

% Implicación I2:

% $\rightarrow$	0	1	2
%0	2	1	2
%1	0	2	2
%2	0	1	2

```
impl2(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl2(X,X,2):- v(X).
impl2(X,2,2):- v(X).
impl2(X,1,1):- v(X), X!=1.
```

```
% Implicación I3:
% → 0 1 2
%0 | 2 2 2
%1 | 0 2 1
%2 | 0 1 2

impl3(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl3(0,Y,2):- v(Y).
impl3(X,X,2):- v(X).
impl3(2,Y,Y):- v(Y).
impl3(1,2,1).

% Implicación I4:
% → 0 1 2
%0 | 2 1 2
%1 | 0 2 1
%2 | 0 1 2

impl4(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl4(X,X,2):- v(X).
impl4(X,2,2):- v(X), X!=1.
impl4(X,1,1):- v(X), X!=1.
impl4(1,2,1).

% Implicación I5:
% → 0 1 2
%0 | 2 2 2
%1 | 0 2 2
%2 | 0 2 2

impl5(X,Y,2):- v(X), v(Y), Y!=0.
impl5(X,0,0):- v(X), X!=0.
```

```
impl5(0,0,2).

% Implicación I6:
% → 0 1 2
%0 | 2 1 2
%1 | 0 1 1
%2 | 0 2 2

impl6(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl6(0,Y,2):- v(Y), Y!=1.
impl6(X,1,X):- v(X), X!=0.
impl6(X,2,X):- v(X), X!=0.
impl6(0,1,1).

% Implicación I7:
% → 0 1 2
%0 | 2 2 2
%1 | 0 2 1
%2 | 0 2 2

impl7(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl7(0,Y,2):- v(Y).
impl7(X,1,2):- v(X).
impl7(X,2,X):-  v(X), X!=0.

% Implicación I8:
% → 0 1 2
%0 | 2 1 2
%1 | 0 2 1
%2 | 0 2 2

impl8(X,0,0):- v(X), X!=0.
```

```
impl8(0,Y,2):- v(Y), Y!=1.
impl8(X,2,X):- v(X), X!=0.
impl8(X,1,2):- v(X), X!=0.
impl8(0,1,1).


% Implicación I9:
% →  0 1 2
%0 | 2 1 2
%1 | 0 2 2
%2 | 0 2 2

impl9(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl9(0,Y,2):- v(Y), Y!=1.
impl9(X,2,2):- v(X).
impl9(X,1,2):- v(X), X!=0.
impl9(0,1,1).


% Implicación I10:
% →  0 1 2
%0 | 2 1 2
%1 | 0 1 2
%2 | 0 1 2

impl10(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl10(X,1,1):- v(X).
impl10(X,2,2):- v(X).
impl10(0,0,2).
```

A.3. Código implicaciones

```
% Implicación I11:
%  →  0  1  2
%0 |  2  2  2
%1 |  0  1  1
%2 |  0  1  2

impl11(X,0,0):-v(X), X!=0.
impl11(0,Y,2):- v(Y).
impl11(X,1,1):- v(X), X!=0.
impl11(X,2,X):- v(X), X!=0.

% Implicación I12:
%  →  0  1  2
%0 |  2  1  2
%1 |  0  1  2
%2 |  0  2  2

impl12(X,X,2):- v(X), X!=1.
impl12(1,Y,Y):- v(Y).
impl12(0,Y,Y):- v(Y), Y!=0.
impl12(2,Y,2):- v(Y), Y!=0.
impl12(2,0,0).

% Implicación I13:
%  →  0  1  2
%0 |  2  2  2
%1 |  0  1  2
%2 |  0  1  2

impl13(0,Y,2):- v(Y).
impl13(1,Y,Y):- v(Y).
impl13(2,Y,Y):- v(Y).
```

```
% Implicación I14:
% →  0  1  2
%0 | 2  1  2
%1 | 0  1  1
%2 | 0  1  2

impl14(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl14(0,X,2):- v(X), X!=1.
impl14(Y,1,1):- v(Y).
impl14(Y,2,Y):- v(Y), Y!=0.

% Implicación I15:
% →  0  1  2
%0 | 2  2  2
%1 | 0  1  2
%2 | 0  2  2

impl15(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl15(0,Y,2):- v(Y).
impl15(X,2,2):- v(X).
impl15(X,1,X):- v(X), X!=0.

% Implicación I16:
% →  0  1  2
%0 | 2  2  2
%1 | 0  1  1
%2 | 0  2  2

impl16(X,0,0):- v(X), X!=0.
impl16(0,Y,2):- v(Y).
impl16(1,Y,1):- v(Y), Y!=0.
impl16(2,Y,2):- v(Y), Y!=0.
```

Apéndice B

Tablas de verdad de axiomas

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	1	0	2	2	2	2	2	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.1: Axiomas L3A con I2

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	0	2	2	2	2	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	0	2	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.2: Axiomas L3A con I2

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	0	2	2	2	2	2	0
2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.3: Axiomas L3A con I3

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	0	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	0	2	0	0	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.4: Axiomas L3A con I3

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	1	0	2	2	2	2	2	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	1	2	0	2	2	2	2	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.5: Axiomas L3A con I4

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	0	2	2	2	2	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	0	2	0	0	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.6: Axiomas L3A con I4

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	0	2	2	2	2	2	2	1
1	1	1	2	2	2	2	0	2	2	1	2
1	2	1	2	2	2	2	1	2	1	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.7: Axiomas L3B con I2

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	0	2	2	2	1	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	1	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1
1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.8: Axiomas L3B con I2

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	1	2	1	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	0	2	2	1	2	2	2	1
1	1	1	2	1	2	2	0	2	2	1	2
1	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.9: Axiomas L3B con I3

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	1	2	1	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1
1	2	1	2	0	2	2	0	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.10: Axiomas L3B con I3

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	1	1	2	1	2	1	2	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	0	2	2	1	2	2	2	1
1	1	1	2	1	2	2	0	2	2	1	2
1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	1	2	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.11: Axiomas L3B con I4

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	0	2	2	2	1	1	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	1	2	1	2	2	2	2
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1
1	2	1	2	0	2	2	0	1	1	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.12: Axiomas L3B con I4

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	0	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2	0	2	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.13: Axiomas L3B con I5

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	0	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.14: Axiomas L3B con I5

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	1	1	2	1	1	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	1	0	2	2	1	2	1	1	2
1	1	1	1	1	2	1	0	2	1	2	1
1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.15: Axiomas L3B con I6

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	0	2	2	2	1	1	1
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	2	2	1	2	2	1	1
1	1	1	2	1	2	2	0	1	1	2
1	2	1	2	0	2	1	0	1	1	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	1	2	0	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.16: Axiomas L3B con I6

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	1	2	1	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	0	2	2	1	2	2	2	2
1	1	1	2	1	2	2	0	2	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.17: Axiomas L3B con I7

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	2	2	1	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	1	2	0	2	2	0	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	0	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.18: Axiomas L3B con I7

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	1	2	1	2	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	0	2	2	1	2	2	2	2
1	1	1	2	1	2	2	0	2	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2	1	2	1	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.19: Axiomas L3B con I8

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	0	2	2	2	1	1	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	2	2	1	2	2	2	2
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	1	2	0	2	2	0	1	1	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	1	2	0	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.20: Axiomas L3B con I8

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	0	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2	0	2	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2	1	2	1	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.21: Axiomas L3B con I9

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	0	2	2	2	1	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	1	2	0	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.22: Axiomas L3B con I9

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	1	0	2	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	1	2
1	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.23: Axiomas L3B con I10

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	0	2	2	2	1	2	1
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	1	2	2	2	2	1	1
1	1	1	2	2	2	2	0	1	1	1
1	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.24: Axiomas L3B con I10

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	1	2	1	1	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	1	0	2	2	1	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.25: Axiomas L3B con I11

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	1	2	1	2	2	1	1
1	1	1	2	1	2	2	0	2	1	1
1	2	1	2	0	2	1	0	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	2	2	1	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.26: Axiomas L3B con I11

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	1	0	2	2	2	2	1	1	2
1	1	1	1	1	2	1	0	2	1	2	2
1	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.27: Axiomas L3B con I12

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	0	2	2	2	1	2	1
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2	2	2	1	1
1	1	1	2	2	2	2	0	1	1	2
1	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	1	2	0	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.28: Axiomas L3B con I12

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	1	0	2	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	1	2
1	2	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.29: Axiomas L3B con I13

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	1	2	2	2	2	1	1
1	1	2	2	2	2	2	0	2	1	1
1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	2	2	2	1	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.30: Axiomas L3B con I13

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	0
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	1	0	2	2	1	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.31: Axiomas L3B con I14

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	1	2	0	2	2	2	1	1	1
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	1	2	1	2	2	1	1
1	1	1	2	1	2	2	0	1	1	1
1	2	1	2	0	2	1	0	1	1	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.32: Axiomas L3B con I14

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	1	0	2	2	2	2	1	1	2
1	1	1	1	1	2	1	0	2	1	2	2
1	2	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.33: Axiomas L3B con I15

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2	2	2	1	1
1	1	2	2	2	2	2	0	2	1	2
1	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	0	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.34: Axiomas L3B con I15

φ	ψ	Cw1	Cw2	WE	L3A1	L3A2	L3A3	L3A4	L3A5	L3A6	L3A7
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	1	2	1	1	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	1	0	2	2	1	2	1	1	2
1	1	1	1	1	2	1	0	2	1	2	1
1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	2	0
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.35: Axiomas L3B con I16

φ	ψ	SWE	L3B1	L3B2	L3B3	L3B4	L3B5	L3B6	L3B7	L3B8
0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	2	2	2	1	2	2	1	1
1	1	1	2	1	2	2	0	2	1	2
1	2	1	2	0	2	1	0	2	2	2
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2	0	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Tabla B.36: Axiomas L3B con I16

Bibliografía

[1] Seiki Akama et al. *Towards paraconsistent engineering.* Springer, 2016.

[2] Ofer Arieli and Arnon Avron. Three-valued paraconsistent propositional logics. In *New Directions in Paraconsistent Logic*, pages 91–129. Springer, 2015.

[3] Ofer Arieli, Arnon Avron, and Anna Zamansky. Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics. *Studia Logica*, 97:31–60, 2011.

[4] Arnon Avron. Natural 3-valued logics - characterization and proof theory. *J. Symb. Log.*, 56(1):276–294, 1991.

[5] Matthias Baaz et al. Infinite-valued gödel logics with 0-1-projections and relativizations. In *Gödel'96: Logical foundations of mathematics, computer science and physics—Kurt Gödel's legacy, Brno, Czech Republic, August 1996, proceedings*, pages 23–33. Association for Symbolic Logic, 1996.

[6] Jon Barwise. *Handbook of mathematical logic*, volume 90. Elsevier, 1982.

[7] J-Y Béziau. Are paraconsistent negations negations? *Lecture notes in pure and applied mathemathics*, pages 465–486, 2002.

[8] Jean-Yves Béziau. What is paraconsistent logic? In *Frontiers of Paraconsistent Logics*, pages 95–112. Research Studies Press, Baldock, 2000.

[9] Jean-Yves Beziau. What is a logic? towards axiomatic emptiness. *Logical Investigations*, 16:272–279, 2010.

[10] Jean-Yves Beziau. Constructive negation and paraconsistency. *Studia Logica*, 100(3):653–657, 2012.

[11] Jean-Yves Beziau. Round squares are no contradictions (tutorial on negation contradiction and opposition). In *New Directions in Paraconsistent Logic*, pages 39–55. Springer, 2015.

[12] Jean-Yves Beziau and Anna Franceschetto. Strong three-valued paraconsistent logics. In *New directions in paraconsistent logic*, pages 131–145. Springer, 2015.

[13] Alexander Chagrov and M. Zakharyaschev. *Modal Logic*. Oxford logic guides. Clarendon Press, 1997.

[14] Newton CA Da Costa, Jean-Yves Beziau, and Otavio Bueno. Paraconsistent logic in a historical perspective. *Logique et Analyse*, 38(150/152):111–125, 1995.

[15] Dirk Van Dalen. *Logic and Structure*. Universitext (1979). Springer, 2004.

[16] Gabbay Dov and Woods John. The many valued and nonmonotonic turn in logic, 2007.

[17] Dorothy Edgington. Indicative conditionals. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2014 edition, 2014.

[18] Mauricio Osorio Galindo, Verónica Borja Macías, and José Ramón Enrique Arrazola Ramírez. Revisiting da costa logic. *Journal of Applied Logic*, 16:111–127, 2016.

[19] Alejandro Hernández-Tello, José Arrazola Ramírez, and Mauricio Osorio Galindo. The pursuit of an implication for the logics l3a and l3b. *Logica Universalis*, 11(4):507–524, 2017.

[20] Jesús Alejandro Hernández-Tello. Desarollo de un motor de inferencia para aset-prolog, Marzo Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,Marzo, 2004.

[21] Verónica Borja Macías. *Extensiones de la Lógica Intuicionista, extensiones de la Lógica de da Costa y su relación*. Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Julio 2017.

[22] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic, Fourth Edition*. Discrete Mathematics and Its Applications. Taylor & Francis, 1997.

[23] Julius Moravcsik. Logic Before Aristotle: Development or Birth? In Dov M. Gabbay and John Woods, editors, *Greek, Indian and Arabic Logic*, volume 1 of *Handbook of the History of Logic*, page 1–25. North-Holland, 2004.

[24] Arnold Oostra. La lógica triádica de charles s. peirce. 2008.

[25] Yanina Paola Pérez and Lidia Marina López. Multiparadigma en la enseñanza de la programación. In *IX Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*, 2007.

[26] Graham Priest. Dualising intuitionictic negation. *Principia*, 13(2):165, 2009.

[27] Peter Schroeder-Heister. Proof-theoretic semantics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2018 edition, 2018.

[28] Jesús Alejandro Hernández Tello. *Lógicas Paraconsistentes Genuinas*. Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Julio 2018.

[29] José Ramón Santiago Vargas. Una Caracterización de las Lógicas Paraconsistentes Ideales, Septiembre Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca,Septiembre, 2015.