



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

“ ESTUDIO DE LAS ECUACIONES DE LORENZ ”

T E S I S:

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

ING. J. JESÚS VENEGAS GARCÍA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. SILVIA REYES MORA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MARZO DEL 2019

Dedicatoria

A mi esposa Judith y
a mi hija Sophia Romina
por ser mis compañeras
y motivación en esta
aventura llamada vida.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Víctor Alberto Cruz Barrigueté por sugerirme este apasionante tema de estudio, a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por darme la oportunidad de estudiar el posgrado, también a todos mis maestros de la UTM porque sin su paciencia y enseñanzas no estaría en esta situación. Estoy muy agradecido con los miembros del jurado:

- Dr. Margarito José Hernández Morales.
- Dr. Salvador Sánchez Perales.
- Dr. Emmanuel Abdías Romano Castillo.
- Dr. Virgilio Vázquez Hipólito.

Por las observaciones realizadas a la tesis.

Pero principalmente quiero agradecer a la Dra. Silvia Reyes Mora por sus consejos y el gran apoyo que siempre me dio mientras escribía esta tesis.

Abstract

In this paper the deduction of the Lorenz model is presented; in which the behavior of the fluid confined in a two-dimensional cell is modeled, in this process intervene the flow of heat by convection and conduction, pressure, temperature and external forces.

This model is deduced from the second law of Newton, studying the forces that influence only one particle bidimensional fluid. The deduction of Lorenz system is explained in terms of partial differential equations; an explicit solution of the system is given, exposing the reduction of the system to a system of ordinary differential equations which are know as the Lorenz model. Finally, a study the Lorenz model is made, and the interpretation of solutions of this model is given in terms of the problem initially raised.

Índice general

Introducción	1
1. Descripción física del problema	5
1.1. Conceptos básicos de meteorología	5
1.1.1. Meteorología, estado del tiempo y clima	5
1.1.2. La atmósfera	6
1.1.3. Capas de la atmósfera	6
1.2. Dinámica vertical de la atmósfera	7
1.2.1. Presión atmosférica	8
1.2.2. Estabilidad vertical de la atmósfera	10
2. Deducción del modelo general de Lorenz	13
2.1. Suposiciones del modelo	13
2.2. Construcción del modelo	14
2.2.1. Masa y aceleración de la parcela de fluido	14
2.2.2. Fuerzas que actúan sobre la partícula de fluido	16
2.2.3. Fuerza de flotación	21
2.2.4. Función de corriente	22
2.2.5. Ecuación de Navier-Stokes en forma de vorticidad	23
2.3. Análisis de la influencia de temperatura	24
2.3.1. Transferencia de calor por conducción	24
2.3.2. Relación entre conducción y convección	25
3. Estabilidad del modelo general de Lorenz	29
3.1. Solución explícita de Θ y Ψ	30
3.2. Solución de Θ y Ψ cuando $\Omega(t) \neq \Omega^*(t)$	39
4. Deducción del modelo particular de Lorenz	45
4.1. Sistema de Lorenz	45
4.2. Análisis cualitativo del sistema de Lorenz	54

4.2.1. Puntos de equilibrio	54
A. Estabilidad de Liapunov	65
Bibliografía	67

Introducción

A lo largo de su paso por la tierra, el ser humano ha sentido la necesidad de entender y predecir lo que sucederá con el clima en un futuro; esto debido a que el clima influye en prácticamente todas las actividades humanas principalmente en la agricultura, la pesca, el transporte y muchas otras actividades económicas. Por estas y muchas otras razones es necesario conocer el estado del tiempo, ya que de ello depende cómo se actuará ante tales circunstancias.

El hombre, en su afán de entender y explicar el mundo que lo rodea, ha creado versiones simplificadas de su entorno llamadas modelos; que intentan dar información de manera aproximada de los eventos que ocurren en el planeta Tierra, con la firme intención de saber cuando ocurrirá dicho evento; es así como los modelos matemáticos también tratan de describir lo que sucede en la naturaleza, incluyendo el estado del tiempo.

Cuando se crea un modelo matemático, se trata de tomar en cuenta el mayor número de variables posibles que influyen en el fenómeno que se está estudiando, pensando que entre mayor sea el número de variables que intervienen en el modelo, este será más preciso; sin embargo, es bien sabido que a mayor número de variables el modelo es más complicado en su resolución. Así, el modelar el clima o el estado del tiempo¹ es un proceso en el cual se desea obtener un pronóstico del estado de la atmósfera, mediante la solución de un sistema de ecuaciones (modelo matemático) que describen la evolución del tiempo atmosférico, como la velocidad del viento, la presión atmosférica y la temperatura.

Predecir cómo será el estado del tiempo puede parecer algo sencillo, ya que si el cielo esta nublado, probablemente llueva y también se sabe que en verano, la temperatura es alta y en diciembre siempre hace frío al menos en el hemisferio norte; sin embargo, lo complicado está en predecir lo que sucederá con el clima o el tiempo en una fecha y lugar determinados. Ya que la atmósfera está en un incesante y continuo cambio; un estado atmosférico parece que nunca se repite, los vientos no dejan de fluir, la humedad, presión y temperatura están cambiando

¹En la sección 1.1.1 se explica la diferencia entre estado del tiempo y clima.

todo el tiempo, así que el estado del tiempo es un tanto determinista y en una gran mayoría caótico ya que predecir el futuro del estado atmosférico pareciera que depende del azar y del comportamiento de las variables que intervienen en el fenómeno. La atmósfera es un fluido, por lo que las ecuaciones utilizadas para tratar de predecir su comportamiento y por ende el estado del tiempo, son las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos, para el caso de una capa aislada de aire seco o con vapor de agua. La predicción del tiempo se lleva a cabo a partir de un modelo matemático formulado en la mayoría de las veces por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, las cuales traducen las leyes generales de la Física que rigen la atmósfera terrestre.

En esta tesis se estudió el modelo matemático del pronóstico del tiempo propuesto por Edward Lorenz en su famoso artículo “*Deterministic non periodic flows*” [17], este estudio se realizó desde la perspectiva de los sistemas dinámicos continuos con respecto a la tendencia original.

Desafortunadamente, en muchos de los artículos que explican la deducción del modelo de Lorenz, se da una deducción puramente teórica o se omiten detalles importantes de la física del sistema. Es por esto, que esta tesis tuvo como objetivo general, exponer la deducción del modelo de Lorenz de una forma detallada explicando los supuestos del mismo. Esto nace por la curiosidad de saber si las ecuaciones de Lorenz son capaces de predecir el estado del tiempo de una región en particular, así que era necesario entender cómo las ecuaciones de Lorenz se relacionan con el estado del tiempo.

Se estudió el fluido confinado en una celda y se consideró el flujo de calor, con el objetivo de simular el comportamiento de la atmósfera terrestre, a grandes rasgos se ha observado que el sol calienta la atmósfera y la superficie terrestre proporcionando una enorme fuente de energía térmica, el océano y el espacio sacan esa energía fuera de la atmósfera. A medida que tiene lugar este evento; el aire se eleva sobre el suelo caliente debido a la convección hasta alcanzar el punto de rocío² donde se condensa para formar nubes. Por otra parte, la temperatura de la tropósfera desciende con la altura, lo que provoca que el aire se enfríe, se vuelva mas denso y caiga. De esta manera se crean corrientes de convección provocando así el estado del tiempo.

Para deducir el sistema de Lorenz, primeramente se investigó cómo se dan los cambios climáticos en la atmósfera terrestre. Así, el capítulo uno contiene la descripción física del problema, particularmente, se describe la convección atmosférica, que es la responsable de los fenómenos meteorológicos en el planeta. Se explica la diferencia entre estado del tiempo y clima como objetos de estudio

²A la temperatura a la que se enfría una masa de aire para producir la condensación sin variar su contenido de vapor de agua, se le denomina punto de rocío.

de la meteorología y la climatología respectivamente, el medio donde ocurren los fenómenos meteorológicos y climáticos es la atmósfera; razón por la cual se hace una breve descripción de las capas que la conforman, dando especial importancia a la primera capa llamada tropósfera ya que en ella ocurren la mayoría de los cambios en el estado del tiempo. Finalmente, se describe el problema de estudio, es decir, la convección atmosférica y las variables que intervienen en este proceso como la presión atmosférica, la estabilidad vertical y las consecuencias que provoca la convección natural.

En el segundo capítulo, se realiza una deducción detallada de las ecuaciones de Lorenz partiendo de la segunda ley de Newton para explicar y predecir el comportamiento (movimiento) de un fluido, así como las fuerzas que actúan sobre él; estas fuerzas son la presión, la fricción y la fuerza de flotación. Con este proceso se llega a obtener la ecuación en derivadas parciales, llamadas ecuaciones de Navier-Stokes para el movimiento de fluidos, al introducir una función llamada de corriente, se obtiene la ecuación de Navier-Stokes en términos de la vorticidad. Se analiza cómo la temperatura afecta el transporte de calor por conducción y convección para obtener un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) que describen el movimiento de la partícula de fluido en términos de la función de corriente y la temperatura.

En el capítulo tres, se busca una solución explícita para el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, empleando el método de separación de variables.

En el capítulo cuatro, se linealiza el sistema y las soluciones encontradas se sustituyen en el sistema original de EDPs para obtener un sistema de dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs). Durante este proceso, se encuentra la temperatura a la cual se debe encontrar la placa inferior para iniciar la convección. Al estudiar la estabilidad del sistema se obtiene un sistema tridimensional de EDOs llamado sistema de Lorenz. Finalmente, se hace un análisis cualitativo del sistema de Lorenz donde se estudian los puntos de equilibrio, analizando la estabilidad del sistema en cada uno de ellos, empleando el teorema de Liapunov.

Para concluir se presentan los resultados de la tesis dando respuesta a los objetivos planteados al inicio del trabajo.

Capítulo 1

Descripción física del problema

1.1. Conceptos básicos de meteorología

1.1.1. Meteorología, estado del tiempo y clima

La *Meteorología* es la ciencia encargada del estudio de la atmósfera, de sus propiedades y de los fenómenos que en ella tienen lugar, los llamados meteoros. El estudio de la atmósfera se basa en el conocimiento de una serie de magnitudes, o variables meteorológicas, como la temperatura, la presión atmosférica o la humedad, las cuales varían tanto en el espacio como en el tiempo.

Cuando describimos las condiciones atmosféricas en un momento y lugar concretos, estamos hablando del *tiempo atmosférico*¹. Todos sabemos que el tiempo atmosférico es uno de los principales condicionantes de las actividades que realizamos, especialmente de aquellas que se realizan al aire libre ya que nos permite predecir si el tiempo será cálido, frío, lluvioso, seco, etc. ([23]).

Por otro lado, la Organización Meteorológica Mundial define al *clima* como las condiciones meteorológicas medias para el mes y el año, que tienen lugar en una región a lo largo del tiempo, calculadas sobre un período de 30 años. Los fenómenos de tipo meteorológico, se pueden clasificar en fenómenos térmicos como frío y calor, mecánicos como la velocidad del viento y acuosos entre los que se encuentran la formación de nubes y precipitaciones. El clima es el objeto de estudio de la *climatología*.

¹Estado del tiempo.

1.1.2. La atmósfera

La atmósfera es una capa gaseosa compuesta principalmente por nitrógeno, oxígeno y vapor de agua; todos ellos indispensables para la existencia de la vida en nuestro planeta. En la atmósfera se llevan a cabo los procesos de evaporación de los ríos, mares y lagos, esto hace posible la condensación en forma de nubes y la precipitación en forma de lluvia. La atmósfera también actúa como un filtro protector contra las radiaciones ultravioleta y otras radiaciones provenientes del sol. Además, regula la temperatura del planeta impidiendo que existan calentamientos o enfriamientos bruscos.

1.1.3. Capas de la atmósfera

Existen varios criterios para obtener las regiones verticales en que se divide la atmósfera; sin embargo, la que nos interesa en esta tesis es la partición de la atmósfera en función de la variación de la temperatura y la altura, en esta división se cuentan cuatro capas que se muestran en la Figura 1.1.

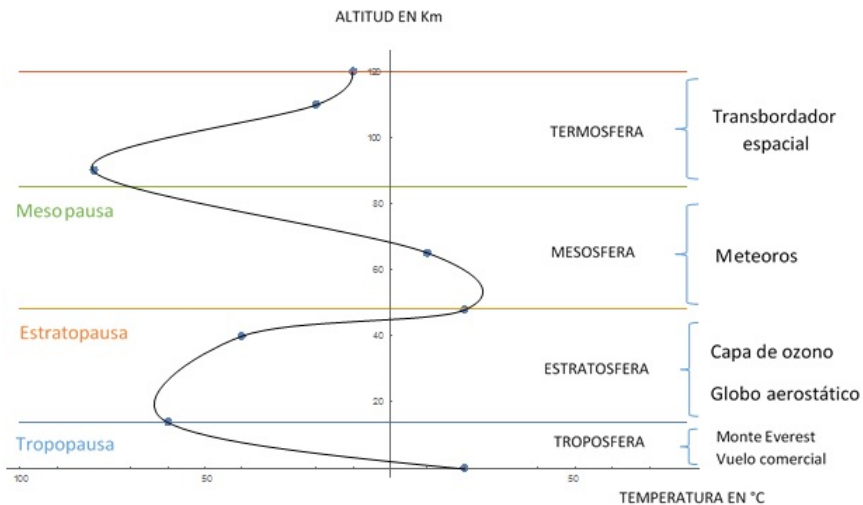


Figura 1.1: Capas de la atmósfera. La curva indica cómo cambia la temperatura en cada una de las capas de la atmósfera.

Como se detalla en [4] y [23], la *tropósfera*, es la capa que está en contacto con la superficie. Se extiende hasta unos 10 km de altura, a lo largo de los cuales la temperatura disminuye a razón de unos 6 ó 7 °C de media cada kilómetro.

Así, la temperatura en su límite superior, llamado tropopausa, llega a ser de unos -50°C . En esta capa tienen lugar la formación de nubes y la precipitación en forma de lluvia. Entre la superficie y los tres primeros kilómetros, se observan capas isotermas, en las que la temperatura se mantiene constante, y otras en las que la temperatura aumenta con la altura, llamadas inversiones térmicas, debido a estas variaciones en la temperatura se producen importantes movimientos convectivos horizontales y verticales de masas de aire.

La segunda capa es la llamada *estratósfera*, comienza a los 10 *km* de altura y tiene un límite superior de aproximadamente 45 *km*, aquí el aire se mueve solamente de manera horizontal, no existe vapor de agua y la temperatura va en aumento hasta alcanzar los 0°C en la *estratopausa*. La característica más importante de la *estratósfera* es que en su interior se encuentra la capa de ozono, que absorbe la mayor parte de las radiaciones ultravioleta que son muy peligrosas para la vida.

La *mesósfera*, es la zona entre 45 y 85 *km* en la cual la temperatura disminuye rápidamente con la altura hasta llegar a los -90°C en la *mesopausa* que es el punto más frío de la atmósfera. Aquí se producen las auroras boreales y se desintegran los meteoritos por la fricción con el oxígeno.

Finalmente, se encuentra la *termósfera* que se extiende desde los 85 *km* hasta los 1600 *km* y su temperatura puede exceder los 1000°C ; esto quiere decir que la temperatura aumenta con la altura, esta capa contiene poco aire predominando el hidrógeno y el helio.

1.2. Dinámica vertical de la atmósfera

La capa más importante de la atmósfera para el estudio del cambio atmosférico es la tropósfera, ya que aquí es donde suceden los fenómenos meteorológicos. La formación de nubes y precipitaciones en la atmósfera son producto de los movimientos verticales del aire es decir, corrientes convectivas. Los fenómenos convectivos son procesos de transporte principalmente de calor producidos por el movimiento de un fluido en la atmósfera; este fluido es aire húmedo formado por una mezcla de aire seco y vapor de agua. Existen tres formas de calentamiento en la atmósfera, una de ellas es la *radiación* donde el calor se transmite a través de ondas electromagnéticas, las cuales viajan a través del vacío. Otra es la *conducción* que se da cuando existe contacto directo, especialmente entre dos cuerpos sólidos; es despreciable en la atmósfera porque el aire es un mal conductor del calor pero es importante en el calentamiento del suelo. La *convección* es la forma

de transferencia de calor entre una superficie sólida y el líquido o gas adyacentes que están en movimiento. Comprende los efectos combinados de la conducción y el movimiento de fluidos.

Para realizar el análisis del movimiento vertical, haremos uso del concepto de *parcela de aire, partícula o burbuja* que es una porción teóricamente infinitesimal de aire que se utiliza para identificar movimientos verticales en la atmósfera, y consiste en analizar el desplazamiento vertical de la burbuja que se supone inicialmente en equilibrio con el aire circundante.

La dinámica atmosférica da inicio cuando el sol calienta la superficie de la tierra por radiación. El aire que está en contacto con el suelo, al calentarse genera una diferencia de temperatura entre la parcela y el aire vecino, ya que la parcela consigue tener mayor temperatura que el aire que la rodea; esto provoca que la parcela disminuya su densidad y comience a elevarse. Durante el ascenso, la burbuja es sometida a menor presión atmosférica, al disminuir la presión sobre la parcela de aire, aumentará su volumen. La partícula de aire que se eleva puede ser saturada²; recordemos que en la tropósfera, la temperatura desciende con la altitud, a la diferencia de temperatura entre dos puntos se le llama gradiente vertical de temperatura. Si la temperatura disminuye con la altura el gradiente de temperatura es negativo por el contrario si la temperatura aumenta con la altitud se tiene un gradiente positivo. A este fenómeno se le conoce como inversión térmica. Durante la elevación, la partícula de aire experimentará una disminución en su temperatura causada por el gradiente vertical de temperatura, esto tendrá como consecuencia que la burbuja alcance su altura máxima cuando su densidad sea igual a la del aire circundante. Al enfriarse, la partícula se condensa; es decir, disminuye su temperatura y volumen pero su densidad aumenta, esto genera que la parcela de aire descienda hasta llegar a la superficie donde nuevamente aumentará su temperatura para reiniciar el ciclo; obteniéndose así las corrientes convectivas, que son movimientos verticales de masas de aire (ver Figura 1.2).

Recordemos que por la ley de Arquímedes, un objeto (en este caso la parcela de aire) puede flotar o elevarse en un medio, si la densidad del objeto es menor que la densidad del medio, y se hundirá si la densidad del objeto es mayor que la densidad del medio; esto en la atmósfera, está relacionado con la llamada estabilidad vertical de la atmósfera.

1.2.1. Presión atmosférica

Antes de entrar con la descripción de la estabilidad atmosférica, hablaremos sobre la presión; ya que también es una variable que afecta la dinámica de la

²Se dice que una parcela de aire es saturada cuando contiene vapor de agua y no saturada cuando solamente es aire seco.

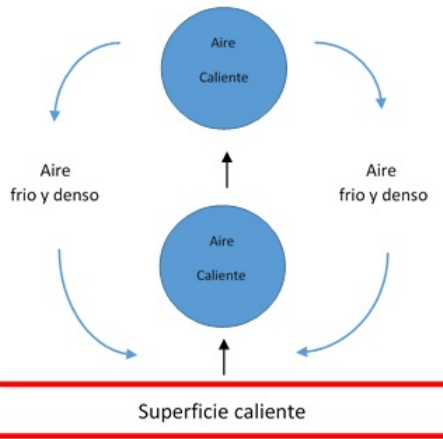


Figura 1.2: La burbuja de aire caliente se eleva debido a la disminución de su densidad y, el espacio que deja, es cubierto con aire frío.

atmósfera. Como se puede encontrar en [10], el aire que rodea a la burbuja tiene peso y por lo tanto, ejerce una fuerza sobre la partícula de aire debida a la acción de la gravedad. Esta fuerza por unidad de superficie es la denominada presión atmosférica, cuya unidad de medida en el Sistema Internacional es el Pascal³. La presión atmosférica depende de muchas variables, sobre todo de la altitud; cuanto más arriba en la atmósfera se encuentre la parcela de aire, la cantidad de aire por encima de ella será menor. Esta disminución no es directamente proporcional a la altitud ya que se reduce ampliamente en los primeros metros para luego descender con mayor suavidad. A la diferencia de presión entre dos puntos, se le llama gradiente de presión.

Una de las variables que mayor información nos proporciona a la hora de conocer una situación meteorológica, es la presión atmosférica; cuyos valores sobre la superficie terrestre quedan representados en los denominados mapas de isobaras. Las isobaras, o líneas que unen puntos de igual presión, nos dan idea de la intensidad del viento (a mayor proximidad entre isobaras, mayor intensidad), así como de su procedencia. Cuando en un mapa de isobaras existe una zona en la que la presión es más alta que a su alrededor, entonces aparece una “A” y decimos que hay un anticiclón. En esta zona, la estabilidad atmosférica será alta, puesto que el movimiento del aire es descendente evitando la formación de nubosidad, y difícil-

³1 Pascal = $\frac{N}{m^2}$, donde N es Newton y m es metro.

mente lloverá. Si por el contrario, la presión empieza a decrecer, en el punto en el que alcanzan su valor mínimo aparece una “B” y decimos que hay una zona de baja presión o depresión (ver Figura 1.3). En este caso, habrá mayor inestabilidad y podría llover fácilmente. Cuando una zona de bajas presiones va acompañada de tiempo muy lluvioso y con viento intenso podemos llamarla borrasca.

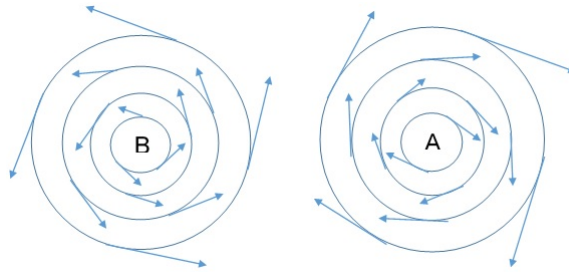


Figura 1.3: Ciclón (B) y anticiclón (A).

1.2.2. Estabilidad vertical de la atmósfera

La estabilidad, es una propiedad del aire que describe su tendencia a permanecer en su posición original (estable), o a elevarse; en tal caso se dice que el aire es inestable. La estabilidad de la atmósfera está regulada por la temperatura en diferentes niveles de la tropósfera; es decir, el gradiente vertical de temperatura. Wallace, en [29], distingue tres tipos de estabilidad, conocidas como estabilidad absoluta, inestabilidad absoluta e inestabilidad condicional, que se describen a continuación.

Estabilidad absoluta

La parcela de aire se eleva, por el aumento de temperatura y la diferencia de presión, desde la superficie dejando su estado de equilibrio; pero en su trayectoria vertical, encuentra una región donde la burbuja pierde calor rápidamente, lo que causa que se vuelva más densa y más fría que el aire circundante. Al ser la partícula de aire más pesada que el medio, la parcela de aire desciende para regresar a su posición original, donde se acumula mucho aire y se forma una zona de alta presión. El aire que desciende gira en forma de anticiclón y se escapa hacia el exterior, entonces se dice que la atmósfera es estable. Una atmósfera estable se considera como buen tiempo ya que no se generan vientos verticales, pues el aire, a medida que desciende, se va calentando y el agua que contiene se evapora, por lo que las nubes desaparecen o a lo sumo existen nubes bajas (ver Figura 1.4).

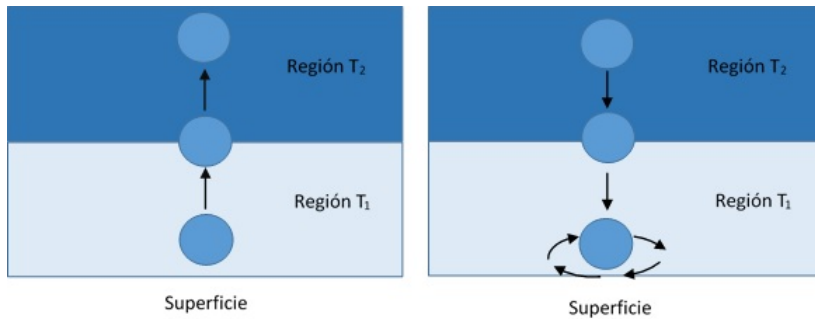


Figura 1.4: La burbuja de aire se eleva y cruza de una región de temperatura T_1 a T_2 donde $T_2 < T_1$, la partícula se enfría y regresa a la posición de salida.

Inestabilidad absoluta

Una parcela de aire tiene inestabilidad absoluta, cuando a lo largo de su ascenso, la temperatura de la parcela de aire disminuye más lentamente que la temperatura del aire circundante. Estas zonas son depresiones, borrascas o ciclones. Esta situación es de mal tiempo porque el aire, a medida que asciende, se va enfriando y, el vapor de agua se condensa favoreciendo la formación de nubes, que pueden dar lugar a precipitaciones (ver Figura 1.5).

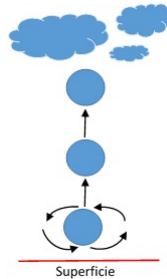


Figura 1.5: La parcela de aire asciende libremente originando un núcleo de baja presión en la superficie y la convergencia de aire circundante hacia el mismo.

Inestabilidad condicional

Se tiene inestabilidad absoluta cuando la parcela se hace más cálida que el ambiente, se vuelve inestable y continúa elevándose, formándose las nubes. La

inestabilidad condicional depende del tiempo presente y de si el aire está o no saturado. Una consecuencia importante de la inestabilidad condicional es la llamada *inversión térmica*, que se da cuando la temperatura en la tropósfera aumenta con la altura. Como ya se mencionó; este fenómeno depende de las condiciones del tiempo en ese momento, pero generalmente se presenta en una capa relativamente superficial. A medida que se enfría el suelo, también lo hace el aire situado sobre él, de manera que éste adquiere una temperatura inferior a la que existe en las capas superiores; en esta circunstancia; la parcela de aire queda atrapada cerca de la superficie impidiendo su ascenso a la región caliente superior, así que la parcela de aire saturada se condensa formando una nube baja que toca el suelo dando así origen a la niebla.

Para mayor información sobre los fenómenos meteorológicos que ocasiona la convección atmosférica como la formación y tipos de nubes, diferentes formas de precipitaciones y vientos recomendamos consultar [4], [9], [10], [23] y [29].

Una vez que se ha comprendido cómo funciona la dinámica atmosférica, en el capítulo siguiente estableceremos el modelo de Lorenz.

Capítulo 2

Deducción del modelo general de Lorenz

En 1963, en la revista *Journal of Atmospheric Science*, apareció un artículo titulado *Deterministic Nonperiodic Flow*, publicado por el Meteorólogo Edward N. Lorenz, de Massachusetts Institute of Technology; que presenta el análisis matemático y la solución numérica de un sistema de ecuaciones que buscaba modelar la circulación del aire, cuando éste es calentado por el agua del mar. Ya que Lorenz se preguntaba acerca de la posibilidad de predecir con un grado de fiabilidad aceptable el tiempo que habrá algunos días después, a partir del conocimiento de las condiciones de partida. Para tratar de responder esta pregunta, Lorenz simplificó considerablemente las ecuaciones que gobiernan la circulación atmosférica hasta llegar al sistema que lleva su nombre. Durante el desarrollo de este capítulo, se usa la referencia [2] como guía principal para la obtención del sistema de Lorenz.

2.1. Suposiciones del modelo

Lorenz parte del llamado *sistema de Bénard*, que modela el comportamiento de un fluido viscoso incompresible contenido entre dos placas horizontales, ya que este modelo simula el comportamiento de la tropósfera, y particularmente, de la dinámica vertical de la atmósfera. La placa horizontal x se extiende infinitamente hacia la derecha y la izquierda, para la coordenada vertical y se toman valores que van de 0 a π .

Para obtener el modelo se consideran las siguientes suposiciones:

- La placa inferior se mantiene caliente y la superior fría¹ con el fin de que, entre ellas, se produzca una diferencia de temperatura y así se genere el movimiento convectivo.
- La parcela de aire que se emplea para identificar las corrientes convectivas, es infinitesimal y bidimensional; esto causa que no existan movimientos ciclónicos o anticiclónicos en el modelo.
- En la realidad, el suelo obtiene su energía térmica por la radiación proveniente del sol; sin embargo, el modelo no toma en cuenta el calentamiento por radiación en la placa inferior.
- La parcela de aire es un sistema aislado que no intercambia calor con el fluido circundante; es decir, es un sistema adiabático.
- El coeficiente de viscosidad dinámica del fluido μ es constante y cuya unidad es $\frac{kg}{m.s}$.
- La densidad ρ de la partícula de fluido es constante. Esto quiere decir que no existen variaciones en la densidad, provocadas por las diferencias de presión o temperatura y por lo tanto, también es incompresible.
- El calor específico² c_p es constante.
- El coeficiente de conductividad térmica³ k es constante.

2.2. Construcción del modelo

2.2.1. Masa y aceleración de la parcela de fluido

Para simular la dinámica atmosférica y la estabilidad vertical de la atmósfera, Lorenz partió del modelo propuesto por Rayleigh - Bénard, donde se tiene un fluido confinado entre dos placas horizontales separadas una distancia de π unidades que se extienden infinitamente, la placa inferior tiene una temperatura T mayor que la placa superior. Se considera que el fluido es un medio continuo como se indica en [15], ya que sus átomos o moléculas están tan próximos unos de otros, que el conjunto puede considerarse macroscópicamente como una masa homogénea, cuyo comportamiento puede preverse sin tener en cuenta el movimiento de cada una de las partículas que lo componen; es decir, no se supone que existan vacíos o

¹En nuestro trabajo la placa inferior se encuentra a $0^{\circ}C$.

²Energía requerida para elevar un grado la temperatura de una unidad de masa de una sustancia con unidad de $\frac{m^2(^{\circ}C)}{s^2}$.

³Medida de la capacidad de un material para conducir calor con unidad de $\frac{(W)(^{\circ}C)}{m}$.

separación entre las moléculas. Así, el objetivo de esta sección es encontrar una ecuación que describa el comportamiento o movimiento del fluido contenido entre las placas; las ecuaciones que describen el movimiento para el flujo de fluidos se escriben para una masa fija, tomando una pequeña parcela de fluido a la cual también se le conoce como volumen de control o partícula de fluido con dimensiones Δx en la base, Δy en la altura y una profundidad Δz . Durante el desplazamiento de la parcela, ésta puede tener dos tipos de movimientos; el primero es el movimiento de traslación, el cual se da cuando la partícula, que se supone se comporta como un cuerpo rígido, se desplaza entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano xy . (ver Figura 2.1). Si la partícula gira en algún punto durante su trayectoria, entonces se dice que la partícula tiene movimiento de rotación.

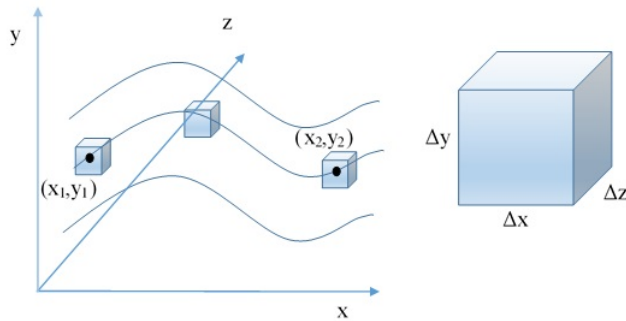


Figura 2.1: El volumen de control tiene movimiento traslacional, ya que se desplaza con el fluido entre dos puntos del plano xy .

Por otra parte, un fluido bidimensional en cualquier instante t , es descrito por el campo de velocidades que describe el valor de la velocidad para la parcela de fluido que ocupa el lugar (x, y) en el plano en el instante dado t . A esa posición se le otorgan coordenadas espacio-temporales e independientemente del enfoque (Euler o Lagrange) que se adopte se puede escribir⁴:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t),$$

que a su vez, en coordenadas cartesianas queda como:

$$\mathbf{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t)) = u(x, y, t)\hat{i} + v(x, y, t)\hat{j}$$

donde \hat{i} y \hat{j} son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^2 .

⁴En esta tesis, las literales escritas con negritas representan vectores.

Así, la parcela de fluido se moverá por medio de él con la velocidad \mathbf{v} y además, podemos encontrar su ecuación de movimiento utilizando la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{F} representa la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula de fluido, m es la masa de la partícula y \mathbf{a} es su aceleración.

Por un lado, se sabe que la variación con el tiempo de la velocidad de un punto material, representa la aceleración del fluido (contenido en un volumen material infinitesimal en el entorno de ese punto). Para indicar esta variación se utiliza la forma $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Así:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (2.2)$$

donde

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (2.3)$$

Como

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = v,$$

entonces la aceleración es:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}; \quad (2.4)$$

que equivale a:

$$\mathbf{a}(x, y, t) = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial v}, \quad (2.5)$$

donde

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial v} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2.2.2. Fuerzas que actúan sobre la partícula de fluido

Por otra parte, consideramos las fuerzas más significativas que se ejercen sobre la partícula, estas fuerzas son: la fuerza de presión superficial, la fricción en el fluido y una fuerza exterior que en nuestro caso es la fuerza de flotación. Iniciamos analizando la fuerza de presión superficial.

Fuerza de presión superficial

Según [5], la presión es la fuerza de compresión por unidad de área y la presión en cualquier punto de un fluido, es la misma en todas direcciones; es decir, tiene magnitud pero no una dirección específica y, en consecuencia, es una cantidad escalar. Ya que estamos interesados en conocer la fuerza de presión sobre la parcela de fluido, entonces debemos obtener relaciones para la variación de la presión en los fluidos que se mueven como un cuerpo sólido en ausencia de esfuerzos cortantes. Para esto, consideramos que la parcela de fluido corresponde a un paralelepípedo infinitesimal rectangular de fluido en el tiempo t y, un sistema de referencia con planos paralelos a las caras del elemento del fluido (ver Figura 2.2).

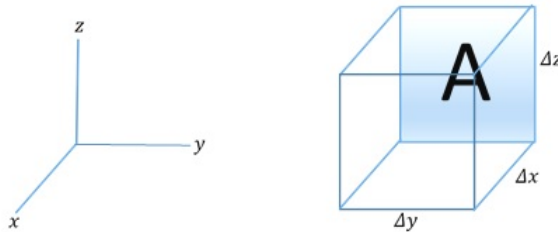


Figura 2.2: Sistema de referencia y volumen de control infinitesimal.

Consideremos sólo la cara A del paralelepípedo (ver Figura 2.3).

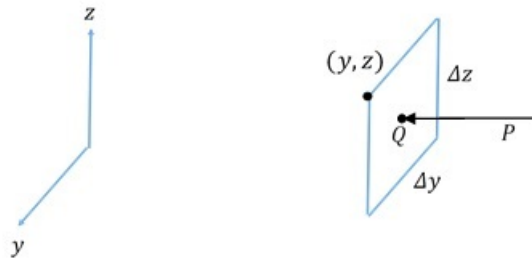


Figura 2.3: Presión P sobre el centro Q de la cara A .

La presión sobre el centro Q de esta cara, puede obtenerse considerando variaciones lineales de la presión en todas las direcciones cercanas. Esto es; si suponemos que la presión es una función dos veces derivable con respecto a la posición, entonces podemos desarrollar el polinomio de Taylor de grado dos alrededor del punto $Q = (\frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z)$.

El polinomio de Taylor que aproxima la presión P en el centro $Q = (\frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z)$ está dado por:

$$P(y, z) = P(Q) + \frac{\partial P}{\partial y} \left(y - \frac{1}{2}\Delta y \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(z - \frac{1}{2}\Delta z \right),$$

como:

$$y - \frac{1}{2}\Delta y = \frac{1}{2}\Delta y, \quad y \quad z - \frac{1}{2}\Delta z = \frac{1}{2}\Delta z;$$

entonces la presión sobre el centro de la cara A está dada por:

$$P_A = P(Q) + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z. \quad (2.6)$$

Si se considera la cara B localizada exactamente enfrente de la cara A , a una distancia Δx , entonces la presión en el centro Q^* de la cara B , al aproximarse mediante un polinomio de Taylor de segundo grado, centrado en Q^* es:

$$P_B = P(Q^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x. \quad (2.7)$$

Debido a que las presiones que actúan sobre las caras A y B en dirección del eje x deben ser iguales, entonces debe cumplirse que:

$$P_x = P_A - P_B = 0;$$

luego:

$$P_x = P(Q) + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z - P(Q^*) - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x;$$

entonces:

$$P_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x.$$

Como la fuerza superficial F_s se define como: $F_s = PA$, donde A es el área; entonces la fuerza superficial sobre el elemento del fluido en dirección del eje x es:

$$\mathbf{F}_{sx} = (P_x)A,$$

es decir:

$$\mathbf{F}_{sx} = (P_x)\Delta y\Delta z,$$

luego;

$$\mathbf{F}_{sx} = -\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

De manera análoga se pueden obtener las fuerzas superficiales \mathbf{F}_{sy} y \mathbf{F}_{sz} en las direcciones de y y z , respectivamente; así:

$$\mathbf{F}_{sy} = -\frac{\partial P}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z,$$

$$\mathbf{F}_{sz} = -\frac{\partial P}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Entonces la fuerza superficial \mathbf{F}_s o fuerza de presión que actúa sobre la parcela de fluido es:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_{sx}\hat{i} + \mathbf{F}_{sy}\hat{j} + \mathbf{F}_{sz}\hat{k}.$$

$$\mathbf{F}_s = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k} \right) \Delta x\Delta y\Delta z = -\nabla P\Delta x\Delta y\Delta z. \quad (2.8)$$

En adelante, analizaremos otra fuerza importante que actúa sobre el fluido que es la debida a la fricción.

Fuerza debida a la fricción

Se dice que un flujo de fluido tiene comportamiento laminar, si durante su movimiento, el fluido, se comporta como si estuviera formado por una serie de capas o láminas paralelas que se mueven uniformemente; la viscosidad representa la resistencia del fluido a la deformación y también es la responsable de las fuerzas de fricción entre las capas adyacentes del fluido. Estas fuerzas se denominan esfuerzo cortante que se denota por τ y dependen del gradiente de velocidad del fluido. Consideremos un fluido laminar contenido entre dos placas paralelas infinitas separadas una distancia h muy pequeña (ver Figura 2.4).

La placa inferior se encuentra fija, mientras que la placa superior se mueve en dirección paralela con una velocidad \mathbf{v} debida a la aplicación de una fuerza \mathbf{F} . En los bordes, las partículas de fluido se adhieren a las placas inferior y superior; como consecuencia, la velocidad del fluido en la placa fija tiene que ser cero, pero en la placa superior es \mathbf{v} , provocando así un perfil de velocidades lineal. Newton enunció que el esfuerzo cortante τ entre dos capas contiguas de fluido, es proporcional a

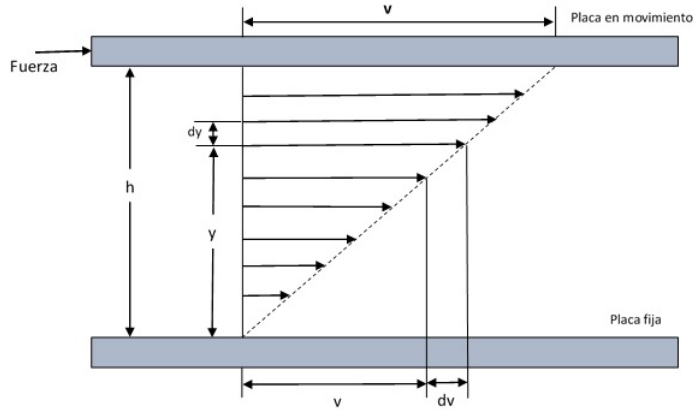


Figura 2.4: Movimiento entre dos placas originado por un esfuerzo tangencial.

la velocidad relativa entre capas o velocidades de deformación, y denominó a la constante de proporcionalidad viscosidad dinámica, μ , de forma que:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}.$$

Cuando el gradiente de presiones y las fuerzas másicas o gravitatorias son despreciables, y no hay efectos convectivos de velocidad, la variación de la cantidad de movimiento del fluido por unidad de masa y tiempo se relacionan con las fuerzas de origen viscoso mediante la expresión:

$$\mathbf{F}_{fric} = \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (2.9)$$

que representa la fuerza debida a la fricción en el fluido.

La tercera fuerza que actúa sobre la partícula de fluido es la fuerza de flotación, debida a la diferencia de temperatura entre las placas a la que denotaremos por \mathbf{F}_{flot} . Esta fuerza de flotación se obtendrá después de realizar el análisis de la influencia de la temperatura en el movimiento del fluido.

Así, la fuerza a la que está sometido el elemento de fluido es la suma de la \mathbf{F}_{flot} y las fuerzas mostradas en las ecuaciones (2.8) y (2.9). Luego, se cumple:

$$\mathbf{F} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}_{flot}. \quad (2.10)$$

Al sustituir las ecuaciones de la fuerza (2.10) y la aceleración (2.5) en la ecuación de la segunda ley de Newton (2.1) se obtiene:

$$-\nabla P + \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F}_{flot} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial v};$$

de donde:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial v} - \nabla P + \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F}_{flot}. \quad (2.11)$$

A la expresión (2.11) se le conoce como ecuación de Navier-Stokes y es la ecuación de movimiento para un fluido newtoniano incompresible.

Hasta aquí hemos encontrado una ecuación que indica el movimiento de una partícula que se mueve en el fluido newtoniano incompresible. Lo que haremos en la siguiente sección es encontrar e incorporar la fuerza de flotación o fuerza externa.

2.2.3. Fuerza de flotación

La partícula de fluido se encuentra sometida a la suma de las fuerzas de presión, fricción y fuerza de flotación. Las dos primeras fuerzas ya las hemos encontrado, así que ahora nos centraremos en analizar la fuerza de flotación. La fuerza vertical que el fluido ejerce sobre la parcela de fluido es:

$$\mathbf{F}_{flot} = \rho g V; \quad (2.12)$$

donde ρ representa la densidad del fluido, g es la gravedad y V indica el volumen de la partícula.

La partícula de fluido esta confinada entre dos placas horizontales con una diferencia de temperatura entre ellas, si la diferencia de temperatura entre las placas es muy pequeña, entonces la densidad del fluido se puede escribir como:

$$\rho = \rho_0 - c\tau, \quad (2.13)$$

para constantes positivas ρ_0 y c .

Al sustituir (2.13) en (2.12) se tiene:

$$\mathbf{F}_{flot} = -(\rho_0 - c\tau)gV;$$

que es la fuerza de flotación que está actuando sobre la partícula de fluido en sentido vertical. El signo negativo indica que está actuando en sentido contrario a la gravedad.

2.2.4. Función de corriente

El objetivo de esta sección es obtener una función $\Psi(x, y)$ que describa a la curva equipotencial, ya que sobre ella se encuentra la trayectoria de la partícula. En el instante t , la velocidad \mathbf{v} de cada elemento del fluido centrado en (x, y) , es una función vectorial de la forma:

$$\mathbf{v} = u(x, y, t)\hat{i} + v(x, y, t)\hat{j}.$$

Así, dado un campo de velocidades \mathbf{v} ; se denomina líneas de corriente, a las líneas que en todos sus puntos tienen por tangente a \mathbf{v} , en un instante determinado (ver Figura 2.5).

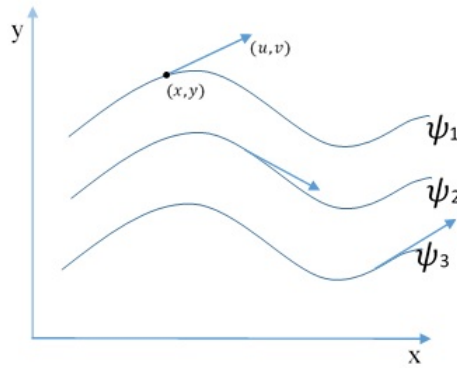


Figura 2.5: Campo de velocidades y curvas equipotenciales. Las líneas $\Psi = C$ representan líneas de corriente en el flujo.

En un punto arbitrario (x, y) el vector $\mathbf{v} = (u, v)$ donde $u = \frac{dx}{dt}$ y $v = \frac{dy}{dt}$ tiene pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u};$$

entonces:

$$u(x, y)dy - v(x, y)dx = 0. \quad (2.14)$$

es una ecuación diferencial exacta, ya que por la ecuación de continuidad se cumple que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Luego, existe una función $\Psi(x, y)$ que resuelve a la ecuación diferencial (2.14) y que cumple:

$$d\Psi(x, y) = \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy = 0. \quad (2.15)$$

Las soluciones de la ecuación (2.15) están dadas de manera implícita por las curvas de nivel $\Psi(x, y) = C$, así las componentes de la velocidad se pueden expresar en términos de la llamada función de corriente Ψ .

$$u = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

2.2.5. Ecuación de Navier-Stokes en forma de vorticidad

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, la partícula de fluido puede tener movimiento de rotación durante su trayectoria. Para que ocurra una rotación en la partícula de fluido, se requiere que existan esfuerzos cortantes sobre la superficie de la partícula, capaces de deformarla y obligarla a girar.

Como el campo vectorial \mathbf{v} representa el flujo del fluido, si $rot\mathbf{v} = 0$, significa que el fluido no tiene rotaciones o es irrotacional, si expresamos el rotacional de la velocidad del fluido en términos de la función de corriente se obtiene que

$$\begin{aligned} rot\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}, \\ rot\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

Si expresamos las componentes de la velocidad u y v en términos de la función de corriente tenemos:

$$rot\mathbf{v} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2},$$

$$rot\mathbf{v} = \Delta\Psi,$$

y como la ecuación de Navier-Stokes (2.11) describe el movimiento de traslación del fluido, entonces esta ecuación en forma de vorticidad es:

$$\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\mathbf{v}} + \mu\Delta^2\Psi + rot\mathbf{F}_{flot}. \quad (2.16)$$

2.3. Análisis de la influencia de temperatura

El modelo de Lorenz describe el movimiento de un fluido incompresible contenido en una larga y delgada celda acotada arriba y abajo por placas paralelas. La placa inferior se mantiene a una temperatura T en grados Celcius y la placa superior se mantiene a 0 grados; creando así la diferencia de temperatura ΔT (ver Figura 2.6).

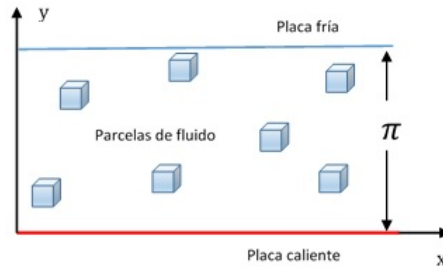


Figura 2.6: Representación de la celda bidimensional que contiene a un fluido incompresible.

2.3.1. Transferencia de calor por conducción

Si la diferencia de temperatura ΔT entre las placas es muy pequeña; entonces no hay movimiento del fluido y el calor es transmitido únicamente por conducción; es decir, la pared bidimensional está formada por las propias partículas de fluido que se encuentran quietas y el calor se propaga a través de ellas. La densidad de una pequeña parcela de fluido disminuye a medida que se calienta el fluido, por lo que ésta experimentará una fuerza de flotación que la empujará hacia arriba. Así, cuando la celda está en un estado de conducción, la parcela de fluido pierde calor a las parcelas vecinas antes de que tenga tiempo de elevarse. En tal situación la temperatura en la celda cae linealmente con la posición vertical de T , en la parte inferior, a 0 en la parte superior, esta relación se muestra en la Figura 2.7.

De lo anteriormente expuesto, podemos obtener la ecuación de recta a la que denotaremos por τ_{cond} que pasa por los puntos $(0, T)$ y $(\pi, 0)$. Luego; mientras el fluido está en un estado de conducción y donde no hay movimiento, la temperatura τ_{cond} en cualquier punto de la celda, se puede expresar por la función:

$$\tau_{cond}(y) = T - \frac{T}{\pi}y; \quad (2.17)$$

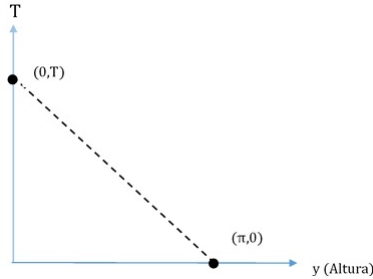


Figura 2.7: Relación entre la temperatura y la altura.

donde T es la temperatura de la placa inferior y la variable y representa la altura de la celda entre 0 y π .

Debido a que la celda es delgada, el movimiento es prácticamente bidimensional, por lo que no hay componente de profundidad en las funciones que describen el flujo del fluido. La temperatura se asume constante para todos los valores de profundidad z , de la placa.

Notemos que podemos obtener información de la función τ_{cond} dada en (2.17); en los puntos de la frontera de la celda, estas condiciones son:

$$\tau_{cond}(x, 0, t) = T, \quad (2.18)$$

$$\tau_{cond}(x, \pi, t) = 0. \quad (2.19)$$

Además, la temperatura entre las placas superior e inferior se puede considerar como $\tau_{cond}(x, \frac{\pi}{2}, t)$.

2.3.2. Relación entre conducción y convección

Cuando la diferencia de temperatura crece y rebasa un valor umbral⁵, la parcela del fluido comienza a elevarse antes de que pierda una cantidad considerable de energía térmica por conducción. Así, una vez que el fluido ha subido a una región de menor temperatura y mayor densidad; la fuerza de flotación aumentará porque la parcela es menos densa que las parcelas vecinas. Si la fuerza ascendente es lo suficientemente grande, la parcela de fluido continúa subiendo más rápido de lo que tarda en enfriarse.

⁵Este valor umbral o temperatura crítica se obtiene en la sección 3.1.

De esta manera, las parcelas de fluido más caliente se mueven hacia la placa superior de la celda, empujando a las parcelas de fluido más frías, las cuales son más densas y por lo tanto se mueven hacia la placa inferior de la celda. Este proceso se repite provocando la aparición de los llamados rollos de convección en la celda. Cuando la celda se encuentra en esta fase se dice que está en estado convectivo.

Denotemos por $\tau(x, y, t)$ a la temperatura del fluido cuando se encuentra en un estado convectivo. Podemos definir a la función de temperatura que mide la diferencia entre la temperatura en estado convectivo $\tau(x, y, t)$ y la temperatura en estado conductivo $\tau_{cond}(x, y, t)$. Esta función está definida y denotada como:

$$\Theta(x, y, t) = \tau(x, y, t) - \tau_{cond}(x, y, t). \quad (2.20)$$

Debido a que, en las placas superior e inferior, las temperaturas son fijas, se debe cumplir:

$$\tau(x, 0, t) = T \quad \text{y} \quad \tau(x, \pi, t) = 0.$$

Por lo tanto; la función de la diferencia de temperatura satisface:

$$\Theta(x, 0, t) = \Theta(x, \pi, t) = 0. \quad (2.21)$$

De la ecuación (2.21), se observa que la temperatura del fluido en la parte superior e inferior de la celda, es la misma para la conducción y la convección, estas condiciones son descritas por la ecuación de difusión térmica:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \tau = k \Delta \tau, \quad (2.22)$$

por la ecuación (2.20), podemos escribir:

$$\frac{\partial(\Theta + \tau_{cond})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\Theta + \tau_{cond}) = k \Delta(\Theta + \tau_{cond}),$$

como τ_{cond} es independiente de x y de t se tiene:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (u + v) \left(\frac{\partial(\Theta + \tau_{cond})}{\partial x} + \frac{\partial(\Theta + \tau_{cond})}{\partial y} \right) = k \Delta(\Theta + \tau_{cond}),$$

y por la ecuación (2.17) resulta:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = k \Delta \Theta + v \frac{T}{\pi} - u \frac{\partial \Theta}{\partial x} - v \frac{\partial \Theta}{\partial y}.$$

Como la función de corriente satisface:

$$u = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

entonces se tiene:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{T}{\pi} \frac{\partial\Psi}{\partial x} + k\Delta\Theta,$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x, y)} + \frac{T}{\pi} \frac{\partial\Psi}{\partial x} + k\Delta\Theta, \quad (2.23)$$

donde:

$$\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\Theta}{\partial x}.$$

Como en la ecuación (2.16) la fuerza de flotación \mathbf{F}_{flot} está afectada por el rotacional, entonces:

$$rot \mathbf{F}_{flot} = -gV \left(\frac{\partial\rho_0}{\partial x} - \frac{\partial c\tau}{\partial x} \right);$$

y debido a que la gravedad, volumen y la densidad inicial son constantes, se tiene que:

$$rot \mathbf{F}_{flot} = gVc \frac{\partial\tau}{\partial x}. \quad (2.24)$$

Además como se cumple:

$$\tau(x, y, t) = \Theta(x, y, t) + \tau_{cond}(x, y, t);$$

al sustituir la ecuación anterior en (2.24) obtenemos:

$$rot \mathbf{F}_{flot} = gVc \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{cond}}{\partial x} \right).$$

Más aún, como la τ_{cond} no varía con respecto a x , entonces $\frac{\partial\tau_{cond}}{\partial x} = 0$ y, si agrupamos las constantes en c_1 , se llega a:

$$rot \mathbf{F}_{flot} = c_1 \frac{\partial\Theta}{\partial x};$$

al sustituir en la ecuación de Navier-Stokes en forma de vorticidad (2.16) obtenemos:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \mathbf{v}} + \mu \Delta^2 \Psi + c_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x};$$

así la expresión anterior queda de la forma:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(x, y)} + \mu \Delta^2 \Psi + c_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x}. \quad (2.25)$$

Finalmente, escribimos el sistema de ecuaciones formado por (2.23) y (2.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} &= -\frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(x, y)} + \mu \Delta^2 \Psi + c_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x, y)} + \frac{T}{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + k \Delta \Theta. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales parciales, que hemos llamado Modelo General de Lorenz, describen simultáneamente, el movimiento de un fluido generado por la diferencia de temperaturas en una celda convectiva, donde x y y son coordenadas espaciales, t es el tiempo y las variables dependientes son Ψ y Θ que se interpretan como sigue:

- $\Psi(x, y, t)$ es la función de corriente: el movimiento ocurre a lo largo de las curvas de nivel de Ψ , con campo de velocidades $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, -\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)$.
- $\Theta(x, y, t) = \tau(x, y, t) - \tau_{cond}(x, y, t)$ representa la diferencia entre la temperatura del fluido en estado convectivo y la temperatura cuando el fluido se encuentra estático; es decir, en estado conductivo.

Capítulo 3

Estabilidad del modelo general de Lorenz

El sistema formado por (2.23) y (2.25) puede ser linealizado si omitimos los términos que contienen el Jacobiano en ambas ecuaciones y así obtenemos el sistema:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = \mu \Delta^2 \Psi + c_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{T}{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + k \Delta \Theta. \quad (3.2)$$

En los gases, los coeficientes μ y k dependen exclusivamente de la temperatura y aumentan con ella, por las propiedades particulares de los gases se considera que μ y k son diferentes. Ya que uno de los supuestos para el análisis del modelo de Lorenz es que el fluido sólo se mueve en el plano xy ; la teoría de convección de Rayleigh Bénard ([22]), indica que el fluido se moverá en forma circular, debido a las diferencias de temperatura entre las placas, que aumentan o disminuyen la densidad del fluido. Dado que el fluido se supone incompresible, el cambio de densidades se verá reflejado en el movimiento del fluido, el cual puede ocurrir formando círculos que giran en el sentido positivo (\odot) o en sentido negativo (\ominus); esto ocurre cuando la diferencia de temperatura entre las placas, no es demasiado grande (ver Figura 3.1).

Es claro que las ecuaciones (3.1) y (3.2) tienen una solución trivial cuando $\Psi = 0$ y $\Theta = 0$; es decir, cuando el fluido está en reposo y la conducción de calor

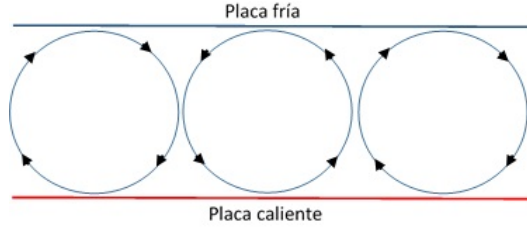


Figura 3.1: Movimiento del fluido en la celda de convección debido a la diferencia de temperatura entre las placas.

ocurre exclusivamente por difusión¹, el sistema también se satisface cuando las variables Ψ y Θ son constantes.

3.1. Solución explícita de Θ y Ψ

Buscaremos soluciones no triviales, para el sistema de ecuaciones diferenciales parciales formado por (3.1) y (3.2) por el método de separación de variables y proponemos soluciones de la forma:

$$\Theta(x, y, t) = X(x)Y(y)\Omega(t),$$

$$\Psi(x, y, t) = X^*(x)Y^*(y)\Omega^*(t);$$

para la temperatura y la función de corriente respectivamente.

Primeramente, consideramos el problema de flujo de calor en la región bidimensional, donde se encuentra contenido el fluido con lados $x = 0$, $x = L$, $y = 0$ y $y = \pi$. Los lados $y = 0$, $y = \pi$ se mantienen a temperatura constante en la parte superior de 0 y en la parte inferior de T , para generar una diferencia de temperatura; los lados $x = 0$ y $x = L$ están perfectamente aislados (ver Figura 3.2).

Se requiere encontrar una solución $\Theta(x, y, t)$ para el problema de flujo de calor descrito por la ecuación:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{T}{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2},$$

¹El término difusión expresa que no existe generación de calor, en otras palabras, las placas siempre están a la misma temperatura.

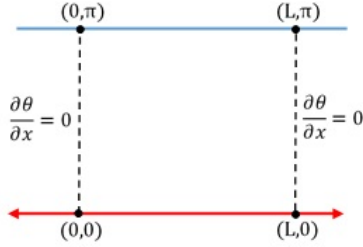


Figura 3.2: Placa con lados aislados.

con valores en la frontera:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial x}(L, y, t) = 0, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0; \quad (3.3)$$

$$\Theta(x, 0, t) = 0, \quad \Theta(x, \pi, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \quad (3.4)$$

$$\Theta(x, y, 0) = \tau - \tau_{cond}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < \pi. \quad (3.5)$$

Derivamos Θ y Ψ para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= Y\Omega X', & \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= X\Omega Y', & \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= XY\Omega', \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= Y\Omega X'', & \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= X\Omega Y'', & \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= XY\Omega'', \\ & & \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= Y^*\Omega^*X^{*'} & & \end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (3.2), tenemos:

$$XY\Omega' = \frac{T}{\pi}X^*Y^*X^{*'} + kY\Omega X'' + kX\Omega Y'';$$

dividiendo por $XY\Omega$ tenemos:

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{TY^*\Omega^*X^{*'}}{\pi XY\Omega} + k\frac{X''}{X} + k\frac{Y''}{Y}. \quad (3.6)$$

Observamos que si ocurre que $X = X^*$, $Y = Y^*$, $\Omega = \Omega^*$, tendremos:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{\Omega'}{k\Omega} - \frac{T}{k\pi}.$$

Igualamos ambos miembros con la constante de separación λ y quedan las siguientes ecuaciones:

$$X'' - \lambda X = 0, \tag{3.7}$$

$$-\frac{T}{\pi} + \frac{\Omega'}{k\Omega} - \frac{Y''}{Y} = \lambda. \tag{3.8}$$

Introducimos v como nueva variable de separación para la expresión (3.8) y tenemos:

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{\Omega'}{k\Omega} - \frac{T}{k\pi} - \lambda = v;$$

al separar variables se obtienen las ecuaciones:

$$Y'' - vY = 0, \tag{3.9}$$

$$\Omega' - \left(k\lambda + kv + \frac{T}{\pi}\right)\Omega = 0. \tag{3.10}$$

De (3.7), (3.9) y (3.10) obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X'' - \lambda X = 0,$$

$$Y'' - vY = 0,$$

$$\Omega' - \left(k\lambda + kv + \frac{T}{\pi}\right)\Omega = 0.$$

Observamos que las condiciones de frontera dadas en (3.3) equivalen a:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big|_{x=L} = X'(0)Y(y)\Omega(t) = X'(L)Y(y)\Omega(t) = 0,$$

$$0 < y < \pi, \quad t > 0.$$

Luego, $X'(0) = X'(L) = 0$.

De lo anterior, resolveremos el problema:

$$X'' - \lambda X = 0,$$

$$X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0.$$

Notamos que (3.7) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes, entonces para resolverla la buscamos en la forma:

$$X(x) = e^{rx}.$$

Del polinomio característico $r^2 - \lambda = 0$, analizamos tres casos:

Caso 1. $\lambda > 0$.

Cuando resolvemos la ecuación auxiliar, con $\lambda > 0$, se encontramos que las raíces $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ son reales y distintas, en consecuencia la solución de (3.7) es:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Como $X'(0)$ y $X'(L)$ son iguales a cero, entonces:

$$X'(x) = \sqrt{\lambda}c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - \sqrt{\lambda}c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x};$$

y

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}c_1 - \sqrt{\lambda}c_2 = 0;$$

encontramos que $c_1 = c_2$, por otra parte,

$$X'(L) = \sqrt{\lambda}c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} - \sqrt{\lambda}c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0,$$

como $c_1 = c_2$ entonces:

$$c_1 \sqrt{\lambda} \left(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} \right) = 0,$$

así encontramos que $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, por lo tanto tenemos soluciones triviales de la ecuación (3.7).

Caso 2. $\lambda = 0$.

La solución de la ecuación auxiliar $r^2 = 0$ son raíces iguales y además son cero, así la solución de (3.7) es de la forma:

$$X(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx};$$

como $r = 0$ se tiene:

$$X(x) = c_1 + c_2 x,$$

por ello:

$$X'(x) = c_2,$$

Luego $X(x) = c_1$, y así hemos encontrado una solución constante.

Caso 3. $\lambda < 0$.

Al resolver la ecuación auxiliar con valores negativos para λ , hallamos las raíces $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, que son raíces complejas, entonces la solución de (3.7) se escribe como:

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x),$$

por lo tanto su derivada es:

$$X'(x) = c_2 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}x) - c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x),$$

al evaluarla en cero tenemos:

$$X'(0) = c_2 \sqrt{-\lambda} = 0,$$

por lo tanto $c_2 = 0$ y al evaluarla en L llegamos a:

$$X'(L) = c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0,$$

este producto es cero cuando $c_1 = 0$, $\lambda = 0$ ó $\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0$, no queremos que $c_1 = 0$ ya que tendríamos una solución trivial y hemos encontrado que λ es negativo por lo tanto:

$$\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0,$$

esto sucede cuando $\sqrt{-\lambda}L = m\pi$ así que $\lambda = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$. Así encontramos que la solución $X(x)$ está dada por:

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x);$$

pero $\lambda = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$ por lo que la solución se escribe como:

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \quad (3.11)$$

pero también hemos encontrado que $X(x)$ es igual a una constante a la que nombraremos c_0 , entonces la solución puede escribirse de la forma:

$$X(x) = c_0 + c_1 \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right),$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$. La solución también se puede expresar como:

$$X(x) = c_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \quad (3.12)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$, y donde c_m son constantes arbitrarias no nulas.

Para encontrar a $Y(y)$ hacemos uso de las condiciones de contorno dadas en (3.4) y obtenemos que:

$$\Theta(x, 0, t) = \Theta(x, \pi, t) = X(x)Y(0)\Omega(t) = X(x)Y(\pi)\Omega(t) = 0.$$

Luego,

$$Y(0) = Y(\pi) = 0.$$

De lo anterior, resolveremos el problema:

$$Y'' - vY = 0,$$

con condiciones de frontera:

$$Y(0) = 0, \quad Y(\pi) = 0.$$

Buscaremos soluciones no triviales para $Y(y)$ así como lo hicimos para $X(x)$ a partir de la ecuación auxiliar $r^2 - v = 0$.

Caso 1. $v > 0$.

Cuando $v > 0$ las raíces son $r_{1,2} = \pm\sqrt{v}$ por lo tanto la solución para (3.9) se puede escribir como

$$Y(y) = c_1 e^{\sqrt{v}y} + c_2 e^{-\sqrt{v}y};$$

al sustituir las condiciones en la frontera tenemos:

$$Y(0) = c_1 + c_2 = 0,$$

y encontramos que $c_1 = -c_2$.

Como

$$Y(\pi) = c_2 e^{\sqrt{v}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{v}\pi} = 0;$$

entonces:

$$c_2 \left(e^{-\sqrt{v}\pi} - e^{\sqrt{v}\pi} \right) = 0.$$

Luego $c_2 = 0$ y como $c_1 = -c_2$, obtenemos soluciones triviales.

Caso 2. $v = 0$.

Si $v = 0$, las raíces son $r_1 = r_2 = 0$; ya que se tienen raíces repetidas, la solución es:

$$Y(y) = c_1 e^{ry} + c_2 y e^{ry},$$

que al evaluar en cero y π , obtenemos:

$$Y(0) = c_1 = 0,$$

y

$$Y(\pi) = c_2 \pi e^{r\pi} = 0,$$

por lo que $c_2 = 0$; con lo que obtenemos nuevamente soluciones triviales.

Caso 3. $v < 0$.

Como obtenemos raíces complejas $r_{1,2} = \pm i\sqrt{v}$ cuando v es negativa, entonces la solución para (3.9) es de la forma:

$$Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{-v}y) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-v}y);$$

al sustituir las condiciones de contorno tenemos:

$$Y(0) = c_1 \cos \sqrt{-v}(0) + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{-v}(0) = 0,$$

$$Y(0) = c_1 = 0,$$

y al evaluarla en π obtenemos:

$$Y(\pi) = c_2 \operatorname{sen} \sqrt{-v}\pi = 0;$$

como $\sin \sqrt{-v\pi} = 0$ cuando $\sqrt{-v} = n$, con $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto la solución general para el problema (3.9) con valores en la frontera $Y(0) = 0$ y $Y(\pi) = 0$ es:

$$Y(y) = c_2 \sin(ny), \quad (3.13)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ positivos.

Debido a que buscamos a Θ de la forma:

$$\Theta(x, y, t) = X(x)Y(y)\Omega(t),$$

de las ecuaciones dadas en (3.12) y (3.13) obtenemos que:

$$\Theta(x, y, t) = c_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) c_2 \sin(ny)\Omega(t);$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$ positivos.

Para encontrar a $\Omega(t)$ resolvemos a (3.10) por separación de variables:

$$\int \frac{\Omega'(t)}{\Omega(t)} dt = \int \left(k\lambda + kv + \frac{T}{\pi} \right) dt,$$

$$e^{\ln \Omega(t)} = e^{[t(k\lambda + kv + \frac{T}{\pi}) + c]},$$

$$\Omega(t) = ce^{(k\lambda + kv + \frac{T}{\pi})t},$$

como $\lambda = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$ y $v = -n^2$ tenemos que:

$$\Omega(t) = c_3 e^{(-k\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - kn^2 + \frac{T}{\pi})t}.$$

Al sustituir $X(x)$, $Y(y)$ y $\Omega(t)$ en la solución propuesta, tenemos que la solución explícita para la función de temperatura es:

$$\Theta(x, y, t) = c_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin(ny) e^{t\left(-k\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 - kn^2 + \frac{T}{\pi}\right)}, \quad (3.14)$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$ positivos.

Para encontrar la solución de la función de corriente Ψ partimos de la suposición que:

$$X = X^*, \quad Y = Y^*, \quad y \quad \Omega = \Omega^*.$$

Como la solución se propuso de la forma $\Psi(x, y, t) = X^*(x)Y^*(y)\Omega^*(t)$ entonces se tiene que:

$$X^{*'} = X = c_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right),$$

para encontrar a $X^*(x)$ integramos la ecuación anterior con respecto a x , y obtenemos:

$$c_m \int \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = c_m \frac{L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m x}{L}\right)}{\pi m} + K,$$

luego:

$$X^*(x) = \frac{c_m L}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + K;$$

como $Y(y) = Y^*(y)$ entonces:

$$Y^*(y) = c_2 \operatorname{sen}(ny),$$

y como también $\Omega(t) = \Omega^*(t)$ entonces:

$$\Omega^*(t) = c_3 e^{(-k(\frac{m\pi}{L}) - kn^2 + \frac{T}{\pi})t}.$$

Así, la solución para la función de corriente es:

$$\Psi(x, y, t) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}(ny) e^{(-k(\frac{m\pi}{L}) - kn^2 + \frac{T}{\pi})t}. \quad (3.15)$$

Teorema 3.1.1. *Teorema de JJVenegas*

Si la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x, y)} + \frac{T}{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + k\Delta\Theta, \\ \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} &= -\frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(x, y)} + \mu \Delta^2 \Psi + c_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x}; \end{aligned}$$

se busca en forma de variables separables:

$$\begin{aligned} \Theta(x, y, t) &= X(x)Y(y)\Omega(t), \\ \Psi(x, y, t) &= X^*(x)Y^*(y)\Omega^*(t); \end{aligned}$$

en la que también se cumpla: $X(x) = X^{'}(x)$, $Y(y) = Y^*(y)$ y $\Omega(t) = \Omega^*(t)$, entonces el sistema tiene la siguiente solución explícita:*

$$\Theta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{t\left(-k\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 - kn^2 - \frac{r}{\pi}\right)} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \text{sen}(ny),$$

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} e^{t\left(-k\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 - kn^2 - \frac{r}{\pi}\right)} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \text{sen}(ny).$$

Hasta aquí hemos encontrado una forma explícita para $\Theta(x, y, t)$ y $\Psi(x, y, t)$, bajo los supuestos que Θ y Ψ son de la forma:

$$\Theta(x, y, t) = X(x)Y(y)\Omega(t),$$

$$\Psi(x, y, t) = X^*(x)Y^*(y)\Omega^*(t),$$

y se cumplen las condiciones:

$$X(x) = X^*(x), Y(y) = Y^*(y) \text{ y } \Omega(t) = \Omega^*(t).$$

3.2. Solución de Θ y Ψ cuando $\Omega(t) \neq \Omega^*(t)$

En lo que resta del capítulo vamos a continuar buscando las soluciones en la forma de separación de variables, y supondremos que se cumple que $X(x) = X^*(x)$, $Y(y) = Y^*(y)$ pero que $\Omega(t) \neq \Omega^*(t)$. Así, buscaremos la forma de encontrar las soluciones para $\Omega(t)$ y $\Omega^*(t)$.

Ya que las soluciones del sistema de ecuaciones parciales linealizado son de la forma:

$$\Psi(x, y, t) = \Omega(t) \text{sen}(ax) \text{sen}(ny), \quad (3.16)$$

$$\Theta(x, y, t) = \Omega^*(t) \cos(ax) \text{sen}(ny), \quad (3.17)$$

donde a pertenece a los números reales y n a los enteros positivos. Ahora se sustituyen estas soluciones (3.16) y (3.17) en el sistema linealizado formado por (3.1) y (3.2) para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de $\Omega^*(t)$ y $\Omega(t)$. Para realizar este proceso necesitaremos las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = a\Omega(t) \cos(ax) \text{sen}(ny),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -a^2 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= n \Omega(t) \cos(ny) \operatorname{sen}(ax), \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= -n^2 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial \Theta}{\partial x} &= -a \Omega^*(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -a^2 \Omega^*(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial \Theta}{\partial y} &= n \Omega^*(t) \cos(ax) \cos(ny), \\
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -n^2 \Omega^*(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \Omega'^*(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} &= a^4 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} &= n^4 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x \partial y^2 \partial x} &= a^2 n^2 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny), \\
\frac{\partial^4 \Psi}{\partial y \partial x^2 \partial y} &= a^2 n^2 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny),
\end{aligned}$$

al sustituir la solución y sus derivadas en (3.1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(-a^2 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) - n^2 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) \right) = \\
\mu [a^4 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) + n^4 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) + \\
a^2 n^2 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) + a^2 n^2 \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny)] - \\
c_1 a \Omega^*(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny);
\end{aligned}$$

al resolver la derivada en el primer miembro y factorizando tenemos:

$$\begin{aligned}
-a^2 \Omega'(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) - n^2 \Omega'(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) = \\
\mu [\Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) (a^2 + n^2)^2] - c_1 a \Omega^*(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny);
\end{aligned}$$

luego:

$$[-(a^2 + n^2)\Omega'(t) - \mu\Omega(t)(a^2 + n^2)^2 + c_1a\Omega^*(t)] \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) = 0,$$

como $\operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny) \neq 0$, entonces tenemos:

$$\Omega'(t) = -\mu(a^2 + n^2)\Omega(t) + \frac{c_1a}{a^2 + n^2}\Omega^*(t). \quad (3.18)$$

Ahora, sustituimos las soluciones y sus derivadas en (3.2) y vemos que se cumple:

$$\Omega^*(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ny) = \frac{T}{\pi}a\Omega(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ny) +$$

$$k(-a^2\Omega^*(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ny) - n^2\Omega^*(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ny));$$

luego:

$$\left[\Omega^{*'}(t) - \frac{T}{\pi}\Omega(t) + \Omega^*(t)(a^2 + n^2)k \right] \cos(ax) \operatorname{sen}(ny) = 0.$$

Como $\cos(ax) \operatorname{sen}(ny) \neq 0$, entonces se tiene:

$$\Omega^{*'}(t) = \frac{T}{\pi}a\Omega(t) - k(a^2 + n^2)\Omega^*(t). \quad (3.19)$$

Así, tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias formado por (3.18) y (3.19):

$$\Omega'(t) = -\mu(a^2 + n^2)\Omega(t) + \frac{c_1a}{a^2 + n^2}\Omega^*(t),$$

$$\Omega^{*'}(t) = \frac{T}{\pi}a\Omega(t) - k(a^2 + n^2)\Omega^*(t).$$

Recordemos que este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias surge de la necesidad de encontrar a $\Omega(t)$ y $\Omega^*(t)$ en (3.16) y (3.17), que a su vez son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales parciales linealizado, (3.1)-(3.2). En lo que sigue, analizaremos la estabilidad local del sistema (3.18)-(3.19).

Este es un sistema lineal cuya matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} -\mu(a^2 + n^2) & c_1a(a^2 + n^2)^{-1} \\ \frac{T}{\pi}a & -k(a^2 + n^2) \end{pmatrix}.$$

Para asegurarnos de que $(0, 0)$ es el único punto crítico, supondremos que el $\det A = \mu k(a^2 + n^2)^2 - \frac{a^2 c_1 T}{\pi(a^2 + n^2)}$ es distinto de cero.

Si $\operatorname{tr} A = -\mu(a^2 + n^2) - k(a^2 + n^2) = -(a^2 + n^2)(\mu + k)$, entonces la ecuación característica puede escribirse como:

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + \det A = 0,$$

cuyos valores propios están dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A}}{2}.$$

Observamos que el determinante de A depende de la temperatura T , ya que:

$$\det A = \mu k(a^2 + n^2)^2 - \frac{a^2 c_1 T}{\pi(a^2 + n^2)}.$$

Notemos que si $T = 0$, entonces $\det A > 0$, pero conforme T aumenta, $\det A$ decrece hasta volverse negativo. Físicamente significa que si $T = 0$, el origen será estable, pero conforme se incrementa la temperatura, habrá un valor umbral $T_{n,a}$ de temperatura, en el cual el origen dejará de ser estable para volverse inestable. Este valor $T_{n,a}$, se alcanzará cuando $\det A = 0$; es decir, cuando:

$$\mu k(a^2 + n^2)^2 = \frac{T_{n,a} a^2 c_1}{\pi(a^2 + n^2)},$$

esto es; cuando:

$$T_{n,a} = \frac{\mu k \pi (a^2 + n^2)^3}{a^2 c_1}.$$

Así, si $T > T_{n,a}$, entonces:

$$\mu k(a^2 + n^2)^2 = \frac{T_{n,a} a^2 c_1}{\pi(a^2 + n^2)} < \frac{T a^2 c_1}{\pi(a^2 + n^2)},$$

luego:

$$\det A = \mu k(a^2 + n^2)^2 - \frac{T a^2 c_1}{\pi(a^2 + n^2)} < 0,$$

por lo que el origen sería inestable.

Ahora bien, como el valor $T_{n,a}$ depende de n y a , entonces buscaremos los valores de n y de a en el que $T_{n,a}$ alcance su valor mínimo.

Es claro que $n = 1$ es el valor mínimo para $T_{n,a}$, como función de n . Así, para $n = 1$, se tiene que el mínimo de $T_{1,a}$, como función de a , es:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}};$$

ya que:

$$T'(a) = \frac{mk\pi}{c_1} \left[\frac{6a^3(a^2 + 1)^2 - 2a(a^2 + 1)^3}{a^4} \right],$$

se anula en $a_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$; pero como $a > 0$, entonces tomamos $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

De esta forma, la temperatura crítica T_c es:

$$T_c = T_{1, \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{27\mu k\pi}{4c_1}. \quad (3.20)$$

Así, mientras T sea menor que T_c , tendremos que el origen $(\Omega(0), \Omega^*(0)) = (0, 0)$ será estable; esto es, si damos una condición inicial $(\Omega_1(t_0), \Omega_2(t_0))$ cercana al origen, la solución $(\Omega(t), \Omega^*(t)) \rightarrow (0, 0)$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Por el contrario, si $T > T_c$; al dar la condición inicial cercana al origen, la solución $(\Omega(t), \Omega^*(t))$ se alejará del origen.

Teorema 3.2.1. *Temperatura crítica y estabilidad.*

Si se tiene un fluido bidimensional incompresible contenido entre dos placas, donde T es la temperatura de la placa inferior, entonces el sistema (3.18)-(3.19) es:

- *Estable en $(\Omega(0), \Omega^*(0)) = (0, 0)$ si $T < T_c$.*
- *Inestable en $(\Omega(0), \Omega^*(0)) = (0, 0)$ si $T > T_c$.*

donde T_c es la temperatura crítica y esta dada por:

$$T_c = T_{1, \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{27\mu k\pi}{4c_1}.$$

Hasta aquí, aunque hemos expresado de manera explícita las formas de las soluciones $(\Omega(t), \Omega^*(t))$, hemos logrado analizar cualitativamente el comportamiento de las soluciones:

$$\Psi(x, y, t) = \Omega(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny),$$

$$\Theta(x, y, t) = \Omega^*(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ax),$$

ya que si $T < T_c$ se tendrá que $\Psi(x, y, t) \rightarrow 0$ y $\Theta(x, y, t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Mientras que si $T > T_c$, la solución es inestable ya que las soluciones del sistema linealizado pueden crecer exponencialmente.

Capítulo 4

Deducción del modelo particular de Lorenz

En el capítulo anterior, obtuvimos la solución explícita del sistema formado por (3.1) y (3.2):

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = \mu \Delta^2 \Psi + c_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{T}{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + k \Delta \Theta;$$

cuando buscamos a la solución como:

$$\Theta(x, y, t) = X(x)Y(y)\Omega(t),$$

$$\Psi(x, y, t) = X^*(x)Y^*(y)\Omega^*(t);$$

y bajo la suposición que $X = X^*$, $Y = Y^*$ y $\Omega = \Omega^*$.

Además, hemos analizado la estabilidad del sistema linealizado (3.1)-(3.2), cuando consideramos que $X = X^*$, $Y = Y^*$ y $\Omega \neq \Omega^*$; encontrando el valor de la temperatura a la cual el sistema se vuelve inestable.

4.1. Sistema de Lorenz

En este capítulo, consideramos el sistema completo no linealizado dado por:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(x, y)} + \mu \Delta^2 \Psi + c_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x}; \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x, y)} + \frac{T}{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + k \Delta \Theta, \quad (4.2)$$

y buscaremos su solución en variables separables.

Como las funciones:

$$\Psi(x, y, t) = \Omega^*(t) \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny),$$

$$\Theta(x, y, t) = \Omega(t) \cos(ax) \operatorname{sen}(ny),$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, son soluciones del sistema linealizado (3.1)-(3.2), entonces tiene sentido buscar a las soluciones Θ y Ψ , del sistema no lineal (4.1)-(4.2), como funciones de variables separables y en las que aparezcan $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$ y $\operatorname{sen}(ny)$.

Denotemos por:

$$\Psi_{n,a} = \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(ny),$$

$$\Theta_{n,a} = \cos(ax) \operatorname{sen}(ny),$$

donde $n \in \mathbb{Z}$.

Como hemos encontrado que, para $n = 1$ y $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$, la temperatura alcanza su nivel crítico T_c , en el que surge la inestabilidad; entonces, consideramos a las funciones:

$$\Psi_{1,a} = \operatorname{sen}(ax) \operatorname{sen}(y),$$

y

$$\Theta_{1,a} = \cos(ax) \operatorname{sen}(y).$$

Estas funciones $\Psi_{1,a}$ y $\Theta_{1,a}$, deberán aparecer en las soluciones del sistema no linealizado (4.1)-(4.2); por ello, ahora calcularemos los términos:

$$\frac{\partial(\Psi_{1,a}, \Delta \Psi_{1,a})}{\partial(x, y)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial(\Psi_{1,a}, \Theta_{1,a})}{\partial(x, y)}.$$

Para el caso del primer término tenemos:

$$\frac{\partial(\Psi_{1,a}, \Delta\Psi_{1,a})}{\partial(x, y)} = \frac{\partial\Psi_{1,a}}{\partial x} \frac{\partial\Delta\Psi_{1,a}}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_{1,a}}{\partial y} \frac{\partial\Delta\Psi_{1,a}}{\partial x} = A - B,$$

donde:

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \text{sen}(ax) \text{sen}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2\Psi_{1,a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_{1,a}}{\partial y^2} \right)$$

y

$$B = \frac{\partial}{\partial y} \text{sen}(ax) \text{sen}(y) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2\Psi_{1,a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_{1,a}}{\partial y^2} \right).$$

Resolvemos primero para A :

$$\begin{aligned} A &= a \text{sen}(y) \cos(ax) \frac{\partial}{\partial y} (-a^2 \text{sen}(y) \text{sen}(ax) - \text{sen}(y) \text{sen}(ax)) = \\ &= -a \cos(ax) \text{sen}(ax) \cos(y) \text{sen}(y) - a^3 \cos(ax) \text{sen}(ax) \cos(y) \text{sen}(y). \end{aligned}$$

Ahora resolvemos para B :

$$\begin{aligned} B &= \cos(y) \text{sen}(ax) \frac{\partial}{\partial x} (-a^2 \text{sen}(y) \text{sen}(ax) - \text{sen}(y) \text{sen}(ax)) = \\ &= -a \cos(ax) \text{sen}(ax) \cos(y) \text{sen}(y) - a^3 \cos(ax) \text{sen}(ax) \cos(y) \text{sen}(y). \end{aligned}$$

y encontramos que $A - B = 0$.

Ahora calculamos el segundo término y nos resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Psi_{1,a}, \Theta_{1,a})}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\Psi_{1,a}}{\partial x} \frac{\partial\Theta_{1,a}}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_{1,a}}{\partial y} \frac{\partial\Theta_{1,a}}{\partial x} = \\ &= a \cos(ax) \text{sen}(y) \cos(ax) \cos(y) - \cos(y) \text{sen}(ax) (-a \text{sen}(ax) \text{sen}(y)) = \\ &= a \cos^2(ax) \text{sen}(y) \cos(y) + a \text{sen}^2(ax) \cos(y) \text{sen}(y) = \\ &= a \text{sen}(y) \cos(y) = \frac{1}{2} a \text{sen}(2y). \end{aligned}$$

Este análisis nos permite buscar a las soluciones del sistema no linealizado (4.1)-(4.2) en la forma:

$$\Psi(x, y, t) = \alpha(t) \Psi_{1,a} = \alpha(t) \text{sen}(ax) \text{sen}(y). \quad (4.3)$$

$$\Theta(x, y, t) = \beta(t) \Theta_{1,a} - \gamma(t) \text{sen}(2y) = \beta(t) \cos(ax) \text{sen}(y) - \gamma(t) \text{sen}(2y). \quad (4.4)$$

De esta manera, lo que resta por hacer es encontrar las expresiones de $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$; o en su defecto, hallar información al respecto de cada una de ellas.

Como Ψ y Θ , deben satisfacer al sistema (4.1)-(4.2); entonces, las debemos sustituir en él para hallar información acerca de $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$. Para realizar este paso necesitamos contar con las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= a\alpha(t) \operatorname{sen}(y) \cos(ax), \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -a^2\alpha(t) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \alpha(t) \cos(y) \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= -\alpha(t) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} &= a^4\alpha(t) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} &= \alpha(t) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x \partial y^2 \partial x} &= a^2\alpha(t) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y \partial x^2 \partial y} &= a^2\alpha(t) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= -a\beta(t) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax), \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -a^2\beta(t) \operatorname{sen}(y) \cos(ax),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Theta}{\partial y} &= \beta(t) \cos(y) \cos(ax) - 2\gamma(t) \cos(2y), \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 4\gamma(t) \operatorname{sen}(2y) - \beta(t) \operatorname{sen}(y) \cos(ax), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \operatorname{sen}(y) \cos(ax) \beta'(t) - \operatorname{sen}(2y) \gamma'(t), \\ \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} &= -a^2 \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax) \alpha'(t) - \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(ax) \alpha'(t), \\ \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} &= -a^3 \alpha(t) \operatorname{sen}(y) \cos(ax) - a\alpha(t) \operatorname{sen}(y) \cos(ax),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} = -a^2 \alpha(t) \cos(y) \sin(ax) - \alpha(t) \cos(y) \sin(ax).$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación (4.1), se tiene:

$$\begin{aligned} \beta'(t) \cos(ax) \sin(y) - \gamma'(t) \sin(2y) &= -a\alpha(t)\beta(t) \cos^2(ax) \sin(y) \cos(y) + \\ 2a\alpha(t)\gamma(t) \sin(y) \cos(2y) \cos(ax) - a\alpha(t)\beta(t) \sin^2(ax) \sin(y) \cos(y) + \\ a\frac{T}{\pi}\alpha(t) \sin(y) \cos(ax) - a^2k\beta(t) \cos(ax) \sin(y) - \\ k\beta(t) \cos(ax) \sin(y) + 4k\gamma(t) \sin(2y). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como $\sin(y) \cos(y) = \frac{\sin(2y)}{2}$ entonces la igualdad dada en (4.5) nos lleva a:

$$\begin{aligned} \beta'(t) \cos(ax) \sin(y) - \gamma'(t) \sin(2y) - 4k\gamma(t) \sin(2y) - \\ a\frac{T}{\pi}\alpha(t) \sin(y) \cos(ax) + a^2k\beta(t) \cos(ax) \sin(y) + \\ k\beta(t) \cos(ax) \sin(y) + \frac{a\alpha(t)\beta(t) \sin(2y)}{2} = \\ 2a\alpha(t)\gamma(t) \sin(y) \cos(2y) \cos(ax). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Observamos que:

$$2a\alpha(t)\gamma(t) \sin(y) \cos(2y) \cos(ax) = a\alpha(t)\gamma(t) \cos(ax) [2 \sin(y) \cos(2y)],$$

donde:

$$\begin{aligned} 2 \sin(y) \cos(2y) &= \sin(y) [2(\cos^2(y) - \sin^2(y))] \\ &= \sin(y) [1 - 2 \sin^2(y) - 1 + 2 \cos^2(y)] = \sin(y) [\cos(2y) - 1 + 2 \cos^2(y)] \\ &= \cos(2y) \sin(y) - \sin(y) + \cos(y) [2 \sin(y) \cos(y)] \\ &= \sin(2y) \cos(y) + \cos(2y) \sin(y) - \sin(y) \\ &= \sin(2y + y) - \sin(y) = \sin(3y) - \sin(y). \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$2 \sin(y) \cos(2y) = \sin(3y) - \sin(y).$$

Así que:

$$2a\alpha(t)\gamma(t)\operatorname{sen}(y)\cos(2y)\cos(ax) = a\alpha(t)\gamma(t)\cos(ax)(\operatorname{sen}(3y) - \operatorname{sen}(y)).$$

Luego; la ecuación (4.6) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \beta'(t)\cos(ax)\operatorname{sen}(y) - \gamma'(t)\operatorname{sen}(2y) - 4k\gamma'(t)\operatorname{sen}(2y) \\ & - \frac{T}{\pi}a\alpha(t)\cos(ax)\operatorname{sen}(y) + ka^2\beta(t)\cos(ax)\operatorname{sen}(y) \\ & + k\gamma(t)\cos(ax)\operatorname{sen}(y) + \frac{a\alpha(t)\beta(t)}{2}\operatorname{sen}(2y) \\ & - a\alpha(t)\gamma(t)\cos(ax)\operatorname{sen}(3y) + a\alpha(t)\gamma(t)\cos(ax)\operatorname{sen}(y) = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como el conjunto $\{\operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(2y), \operatorname{sen}(3y)\}$ es linealmente independiente, entonces se debe de cumplir:

$$\begin{aligned} & \beta'(t)\cos(ax) - \frac{T}{\pi}a\alpha(t)\cos(ax) + a^2k\beta(t)\cos(ax) \\ & + k\beta(t)\cos(ax) + a\alpha(t)\gamma(t)\cos(ax) = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\gamma'(t)(t) + 4k\gamma(t) - \frac{a\alpha(t)\beta(t)}{2} = 0. \quad (4.9)$$

y

$$a\alpha(t)\gamma(t)\cos(ax) = 0. \quad (4.10)$$

De lo anterior; como $\cos(ax) \neq 0$ ¹; entonces las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) resultan:

$$\beta'(t) = \frac{T}{\pi}a\alpha(t) - k\beta(t)(a^2 + 1) - a\alpha(t)\gamma(t), \quad (4.11)$$

$$\gamma'(t) = \frac{a}{2}\alpha(t)\beta(t) - 4k\gamma(t), \quad (4.12)$$

$$a\alpha(t)\gamma(t) = 0. \quad (4.13)$$

De la ecuación (4.13) podemos concluir que: $\alpha(t) = 0$ ó $\gamma(t) = 0$.

¹Si $\cos(ax) = 0$, se tendría la solución trivial.

Si $\gamma(t) = 0$, nos conduciría a que la forma de $\Theta(t)$ coincide con la propuesta para el sistema lineal; y si $\alpha(t) = 0$; nos llevaría a la solución trivial. Por lo anterior, vamos a considerar al conjunto $\{\text{sen}(y), \text{sen}(2y)\}$ que genera un subespacio del espacio generado por $\{\text{sen}(y), \text{sen}(2y), \text{sen}(3y)\}$. En este caso estaremos trabajando con las ecuaciones (4.11) y (4.12) y despreciamos la información:

$$a\alpha(t)\gamma(t)\text{sen}(3y) = 0.$$

Hasta aquí hemos trabajado únicamente con la ecuación (4.2). Ahora analizaremos la ecuación (4.1), sustituyendo las soluciones aproximadas (4.3) y (4.4) en la (4.1):

$$\begin{aligned} -\alpha'(t)\text{sen}(ax)\text{sen}(y)(1+a^2) &= -a\text{sen}(ax)\text{sen}(y)\beta'(t)c_1 \\ -a\cos(ax)\text{sen}(y)\alpha(t) &(-\cos(y)\text{sen}(ax)\alpha(t) - a^2\cos(y)\text{sen}(ax)\alpha(t)) \\ +\alpha(t)\cos(y)\text{sen}(ax) &(-a\alpha(t)\cos(ax)\text{sen}(y) - a^3\cos(ax)\text{sen}(y)\alpha(t)) \\ +\mu(a^4\text{sen}(ax)\text{sen}(y)\alpha(t) &+ \text{sen}(ax)\text{sen}(y)\alpha(t) + 2a^2\text{sen}(ax)\text{sen}(y)\alpha(t)). \end{aligned}$$

Al dividir por $\text{sen}(ax)\text{sen}(y)$:

$$\begin{aligned} -\alpha'(t)(1+a^2) &= \mu(a^4 + 1 + 2a^2)\alpha(t) - a\beta(t)c_1 \\ a\cos(ax)\cos(y)\alpha^2(t) &+ a^3\cos(ax)\cos(y)\alpha^2(t) \\ -a\cos(ax)\cos(y)\alpha^2(t) &- a^3\cos(ax)\cos(y)\alpha^2(t); \end{aligned}$$

y al dividir por $-(1+a^2)$ se obtiene:

$$\alpha'(t) = -\mu(1+a^2)\alpha(t) + \frac{ac_1}{1+a^2}\beta(t). \quad (4.14)$$

Así (4.11), (4.12) y (4.14) forman el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -\mu(1+a^2)\alpha + \frac{a}{1+a^2}\beta, \\ \beta'(t) &= -a\alpha\gamma + \frac{aT}{\pi}\alpha - k(a^2+1)\beta, \\ \gamma'(t) &= \frac{1}{2}a\alpha\beta - 4k\gamma. \end{aligned}$$

Para deducir el sistema particular de Lorenz, primeramente dividimos las tres ecuaciones por $k(a^2+1)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha'(t)}{k(a^2+1)} &= -\frac{\mu}{k}\alpha + \frac{ac_1}{k(a^2+1)^2}\beta; \\ \frac{\beta'(t)}{k(a^2+1)} &= -\frac{a}{k(a^2+1)}\alpha\gamma + \frac{aT}{k\pi(a^2+1)}\alpha - \beta; \\ \frac{\gamma'(t)}{k(a^2+1)} &= \frac{a}{2k(a^2+1)}\alpha\beta - \frac{4}{(a^2+1)}\gamma.\end{aligned}$$

Si ahora hacemos un cambio de variable en el tiempo, introduciendo la nueva variable $t^* = k(a^2+1)t$, se obtiene que $t = \frac{t^*}{k(a^2+1)}$; luego:

$$\alpha'(t^*) = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{\alpha'(t)}{k(a^2+1)}, \quad \beta'(t^*) = \frac{\beta'(t)}{k(a^2+1)} \quad \text{y} \quad \gamma'(t^*) = \frac{\gamma'(t)}{k(a^2+1)}.$$

Si además hacemos los siguientes cambios de variable:

$$\alpha'(t^*) = Ax(t^*), \quad \beta'(t^*) = By(t^*), \quad \gamma'(t^*) = Cz(t^*);$$

las ecuaciones anteriores quedan:

$$\begin{aligned}Ax' &= -\frac{\mu}{k}Ax + \frac{ac_1}{k(a^2+1)^2}By, \\ By' &= \frac{-aAx Cz}{k(a^2+1)} + \frac{aTAx}{k\pi(a^2+1)} - By, \\ Cz' &= \frac{aAxBy}{2k(a^2+1)} - \frac{4}{a^2+1}Cz.\end{aligned}$$

Al simplificar obtenemos:

$$x' = -\frac{\mu}{k}x + \frac{ac_1B}{k(a^2+1)^2A}y, \quad (4.15)$$

$$y' = \frac{-aAC}{k(a^2+1)B}xz + \frac{aTA}{k\pi(a^2+1)B}x - y, \quad (4.16)$$

$$z' = \frac{aAB}{2k(a^2+1)C}xy - \frac{4}{a^2+1}z. \quad (4.17)$$

En lo que sigue, consideraremos que existen parámetros físicos que intervienen en el proceso físico y que se espera que aparezcan en el modelo; estos parámetros son: El número de Prandtl y el número de Rayleigh.

El número de Prandtl $\sigma = \frac{\mu}{k}$ es un número adimensional que es igual al cociente entre la viscosidad dinámica μ y la conducción térmica k del fluido, r es el número de Rayleigh, también adimensional y está dado por el cociente de la temperatura de la placa inferior T , entre la temperatura mínima $T_{1,a}$ de la placa inferior, para que el sistema se vuelva inestable.

Por lo anterior, la elección de $A = ac_1$ y $B = \mu(a^2 + 1)^2$, permiten reducir la ecuación (4.15) en:

$$x' = -\sigma x + \sigma y. \quad (4.18)$$

Ahora bien, si sustituimos a $\frac{B}{A}$, en el segundo término del lado derecho de (4.16), obtenemos:

$$\frac{aTA}{k\pi(a^2 + 1)B} = \frac{a^2 T c_1}{\mu k \pi (a^2 + 1)^3};$$

como $T_{1,a} = \frac{\mu k \pi (a^2 + 1)^3}{a^2 c_1}$, entonces:

$$\frac{aTA}{k\pi(a^2 + 1)B} = \frac{T}{T_{1,a}} = r.$$

Por su parte, la elección de $C = \frac{\mu k \pi (a^2 + 1)^3}{a^2 c_1}$, permite reducir la ecuación (4.16) en:

$$y' = -xz + rx - y. \quad (4.19)$$

Finalmente, la ecuación (4.17), nos indica que:

$$z' = \frac{a^2 C \mu (a^2 + 1)^2}{\frac{1}{2k^2 \mu (a^2 + 1)^4} a^2 C} xy - \frac{4}{a^2 + 1} z.$$

Y nombrando a $b = \frac{4}{a^2 + 1}$ se llega a:

$$z' = -bz + xy. \quad (4.20)$$

Las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20) corresponden al famoso sistema de Edward Lorenz, formulado en [17], en el año de 1963 y dado por:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x), \\ y' &= rx - y - xz, \\ z' &= xy - bz, \end{aligned}$$

donde los parámetros σ , r , y b son positivos.

En esta sección, encontramos que $b = \frac{4}{a^2+1}$; recordemos que, al principio de la sección (3.1), vimos que la primera solución que hacía inestable al sistema de ecuaciones diferenciales parciales linealizado se da cuando $a^2 = \frac{1}{2}$, así que $b = \frac{8}{3}$ que es el valor generalmente dado a este coeficiente; valores para $b < \frac{8}{3}$, hacen que el sistema sea estable, mientras que valores de $b > \frac{8}{3}$ vuelven al sistema inestable.

4.2. Análisis cualitativo del sistema de Lorenz

El modelo de Lorenz está basado en una simplificación de la ecuación de Navier-Stokes como se demostró anteriormente. El movimiento del fluido es el resultado de la diferencia de temperaturas entre las placas superior e inferior de la celda, este movimiento puede ser expresado en términos de tres variables $x(t^*)$, $y(t^*)$ y $z(t^*)$, donde $x(t^*)$ describe la dependencia de la función de corriente del fluido con el tiempo (t^*). Las variables $y(t^*)$ y $z(t^*)$ están relacionadas con la dependencia de la diferencia de temperatura del estado convectivo y conductivo respectivamente. De manera particular $y(t^*)$ es proporcional a la diferencia de temperatura entre las partes del fluido que suben y caen por la densidad de las partículas que lo conforman.

4.2.1. Puntos de equilibrio

Como el sistema es no lineal, analizaremos el comportamiento del flujo de fluido cerca de los puntos de equilibrio, para el sistema formado por (4.18), (4.19) y (4.20):

$$x' = \sigma(y - x),$$

$$y' = rx - y - xz,$$

$$z' = xy - bz.$$

donde los parámetros $\sigma > 0$, $r > 0$ y $b > 0$, σ es el número de Prandtl y r es el número de Rayleigh.

Los puntos de equilibrio se obtienen cuando:

$$\sigma(x - y) = 0, \tag{4.21}$$

$$rx - y - xz = 0, \tag{4.22}$$

$$xy - bz = 0. \tag{4.23}$$

Un punto de equilibrio de las ecuaciones anteriores es $(0, 0, 0)$.

Más aún, de (4.21) tenemos que $x = y$, al sustituir en (4.22) tenemos que:

$$x(r - 1 - z) = 0,$$

luego, $z = r - 1$.

Al sustituir $x = y$ y $z = r - 1$ en (4.23) encontramos que:

$$x^2 - b(r - 1) = 0,$$

esto es; encontramos que:

$$x = \pm\sqrt{b(r - 1)} \quad \text{y} \quad y = \pm\sqrt{b(r - 1)}.$$

El análisis anterior se resume en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1. *Puntos de equilibrio no triviales del Sistema de Lorenz.*

Si $r > 1$, además del origen, existen dos puntos críticos para el sistema de Lorenz dados por:

$$P_1 = \left(\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1 \right),$$

$$P_2 = \left(-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1 \right).$$

Análisis de estabilidad en el origen.

Para establecer el comportamiento cualitativo de las curvas solución localmente se estudia el primer punto de equilibrio $(0, 0, 0)$, linealizamos alrededor del origen. La linealización del sistema es:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

donde \mathbf{A} es la matriz jacobiana.

Calculamos los elementos de la matriz \mathbf{A} , los cuales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma y - \sigma x) \Big|_{(0,0,0)} &= -\sigma, & \frac{\partial}{\partial y}(\sigma y - \sigma x) \Big|_{(0,0,0)} &= \sigma, \\ \frac{\partial}{\partial z}(\sigma y - \sigma x) \Big|_{(0,0,0)} &= 0, & \frac{\partial}{\partial x}(rx - y - xz) \Big|_{(0,0,0)} &= r, \\ \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - xz) \Big|_{(0,0,0)} &= -1, & \frac{\partial}{\partial z}(rx - y - xz) \Big|_{(0,0,0)} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(xy - bz) \Big|_{(0,0,0)} &= 0, & \frac{\partial}{\partial y}(xy - bz) \Big|_{(0,0,0)} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}(xy - bz) \Big|_{(0,0,0)} &= -b. \end{aligned}$$

Entonces, la matriz \mathbf{A} es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Por lo que el sistema de Lorenz linealizado alrededor del origen es:

$$x' = -\sigma x + \sigma y, \quad (4.24)$$

$$y' = rx - y, \quad (4.25)$$

$$z' = -bz. \quad (4.26)$$

Calculamos los eigenvalores de la matriz $(\mathbf{A} - \lambda I)$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = (-b - \lambda)(\lambda^2 + \lambda\sigma + \lambda - r\sigma + \sigma),$$

al resolver el polinomio característico, los valores propios son:

$$\lambda_1 = -b,$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2}.$$

Es claro que λ_1 siempre es negativo, ya que el parámetro $b > 0$.

Analizaremos los eigenvalores λ_2 y λ_3 , para distintas posibilidades de r , que garanticen que el origen es un atractor.

Caso 1. $r = 0$.

Si $r = 0$ y $\sigma < 1$, entonces $\lambda_2 = -\sigma$.

Si $r = 0$ y $\sigma = 1$, entonces $\lambda_2 = -1$, y $\lambda_3 = -1$.

Si $r = 0$ y $\sigma > 1$, entonces $\lambda_3 = -1$.

Así, se tiene que $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$.

Como $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$, entonces el origen es un punto atractor o sumidero.

Caso 2. $r > 0$.

Si $r > 0$, entonces λ_2 es un eigenvalor real y negativo al igual que λ_1 ; para conseguir la estabilidad del sistema, λ_3 debe ser también negativo y esto lo logramos cuando:

$$-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma} < 0,$$

equivalentemente:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma} < \sigma + 1, \\ \Leftrightarrow & (\sigma - 1)^2 + 4r\sigma < (\sigma + 1)^2, \\ \Leftrightarrow & \sigma^2 - 2\sigma + 1 + 4r\sigma < \sigma^2 + 2\sigma + 1, \\ \Leftrightarrow & 4r\sigma < 4\sigma, \\ \Leftrightarrow & r < 1. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que cuando $0 < r < 1$, se tiene estabilidad asintótica en el origen, la interpretación física es que se anula la convección al pasar el tiempo.

El eje z representa la función del tiempo de la temperatura por conducción; es decir, la temperatura con relación a la altura de la celda de fluido y, la temperatura de la placa de fluido tiende a cero, ya que esa es la temperatura de la placa superior; esto se puede corroborar ya que la ecuación (4.20) tiene como solución:

$$z(t^*) = z_0 e^{-bt^*},$$

donde z_0 es la temperatura de la placa inferior, que siempre es positiva.

Observación: Cuando $0 < r < 1$ y $\sigma = 1$, el origen es un atractor. La interpretación física, es que el radio de los rollos convectivos se degenera en un punto y la temperatura por convección tiende a cero grados.

Análisis de estabilidad por función de Liapunov

En [7], se expone que un método que ayuda a decidir cuando un punto de equilibrio es estable, asintóticamente estable o inestable. Este método fue dado por Liapunov en 1892. La idea es encontrar una función escalar v positiva, tal que su derivada v' a lo largo de las trayectorias del sistema sea negativa, ya que esto implica que el origen del sistema estudiado es estable².

Para corroborar que el origen es asintóticamente estable propondremos la función:

$$v(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2.$$

La idea es mostrar que si $r < 1$ y $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, entonces $v' < 0$ a lo largo de las trayectorias, esto implicará que a medida que el tiempo avanza, las trayectorias irán quedando en regiones restringidas de Liapunov o elipsoides cada vez más pequeñas, razón por la cual el valor de la función de Liapunov irá decreciendo al pasar al tiempo.

Calculamos:

$$v' = \frac{2}{\sigma}xx' + 2yy' + 2zz',$$

y al sustituir x' , y' y z' tenemos:

$$v' = \frac{2}{\sigma}x(-\sigma x + \sigma y) + 2y(rx - y) + 2z(-bz),$$

luego:

$$\frac{1}{2}v' = -x^2 + xy(r + 1) - y^2 - bz^2,$$

completamos cuadrados en los dos primeros términos del lado derecho para obtener:

$$\frac{1}{2}v' = -\left[x - \frac{r+1}{2}y\right]^2 + y^2\left(\frac{r+1}{2}\right)^2 - y^2 - bz^2,$$

²Para más detalles sobre el método de Liapunov consultar el apéndice o la referencia dada.

luego:

$$\frac{1}{2}v' = - \left[x - \frac{r+1}{2}y \right]^2 - y^2 \left[1 - \left(\frac{r+1}{2} \right)^2 \right] - bz^2.$$

En el lado derecho de la expresión anterior, el primer y tercer término siempre son negativos, entonces para asegurar que la expresión anterior sea menor que cero, y se cumplan las condiciones del teorema de Liapunov, se requiere que el segundo término del lado derecho sea positivo; es decir:

$$1 - \left(\frac{r+1}{2} \right)^2 > 0,$$

lo cual se cumple si y sólo si:

$$(r+1)^2 < 4,$$

o equivalentemente:

$$r < 1,$$

donde $r \in (0, 1)$.

Así, si $r < 1$ y $(x, y, z) \neq 0$, el lado derecho de la expresión anterior es estrictamente negativo y por lo tanto el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Teorema 4.2.2.

Si $r < 1$. Entonces todas las soluciones del sistema de Lorenz tienden al origen.

En conclusión; para pequeños valores del parámetro r , el modelo predice que no habrá convección ya que el estado del sistema es estable en el origen.

Análisis de estabilidad para P_1 y P_2

Ahora supondremos que $r > 1$ y consideramos los puntos de equilibrio

$$P_1 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \text{ y } P_2 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right).$$

Linealizamos el sistema formado por (4.18), (4.19) y (4.20) alrededor de P_1 . Posteriormente, transformaremos el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ en el sistema equivalente

$\mathbf{u}' = \mathbf{G}(\mathbf{u})$ que tiene a $\mathbf{0}$ como punto de equilibrio; para ello, hacemos el cambio de variable $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ y $\mathbf{w} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$ para obtener:

$$u = x - \sqrt{b(r-1)}, \text{ esto lleva a que: } x = u + \sqrt{b(r-1)};$$

$$v = y - \sqrt{b(r-1)}, \text{ esto lleva a que: } y = v + \sqrt{b(r-1)};$$

$$w = z - (r-1), \text{ luego } z = w + r - 1.$$

Al derivar, tenemos que $u' = x'$, $v' = y'$ y $w' = z'$. Sustituimos las nuevas variables y sus derivadas en el sistema de Lorenz y obtenemos:

$$u' = \sigma(v - u), \quad (4.27)$$

$$v' = -v + u - w\sqrt{b(r-1)} - uw, \quad (4.28)$$

$$w' = u\sqrt{b(r-1)} + v\sqrt{b(r-1)} + uv - bw. \quad (4.29)$$

Así, hemos obtenido el sistema equivalente (4.27)-(4.29) que tiene al $(0, 0, 0)$ como punto de equilibrio.

Linealizamos este sistema, calculando la derivada parcial del sistema equivalente con respecto a las componentes u , v y w en el punto de equilibrio $(0, 0, 0)$ para formar la matriz jacobiana; así:

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial u} \right|_{(0,0)} = -\sigma, \quad \left. \frac{\partial u'}{\partial v} \right|_{(0,0)} = \sigma, \quad \left. \frac{\partial u'}{\partial w} \right|_{(0,0)} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial v'}{\partial u} \right|_{(0,0)} = 1, \quad \left. \frac{\partial v'}{\partial v} \right|_{(0,0)} = -1, \quad \left. \frac{\partial v'}{\partial w} \right|_{(0,0)} = -\sqrt{b(r-1)},$$

$$\left. \frac{\partial w'}{\partial u} \right|_{(0,0)} = \sqrt{b(r-1)}, \quad \left. \frac{\partial w'}{\partial v} \right|_{(0,0)} = \sqrt{b(r-1)}, \quad \left. \frac{\partial w'}{\partial w} \right|_{(0,0)} = -b,$$

por lo que la matriz asociada es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix};$$

y la ecuación característica es:

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + \sigma + 1) + b\lambda(r + \sigma) + 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (4.30)$$

Por simetría, la ecuación característica de P_1 es la misma para P_2 , por lo que ambos puntos pueden ser asintóticamente estables o inestables.

Buscaremos soluciones de la forma $\lambda = iw$, donde w es un número real. Al sustituir en la ecuación característica se tiene:

$$(iw)^3 + (\sigma + b + 1)(iw)^2 + (r + \sigma)b(iw) + 2b\sigma(r - 1) = 0,$$

$$-iw^3 - (\sigma + b + 1)w^2 + (r + \sigma)biw + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

Se requiere que la parte real y la parte imaginaria sean iguales con cero para satisfacer la igualdad. La parte imaginaria es cero cuando:

$$-w^3 + (r + \sigma)bw = 0,$$

o equivalentemente:

$$w^2 = (r + \sigma)b. \quad (4.31)$$

La parte real es cero cuando:

$$-(\sigma + b + 1)w^2 + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

Al sustituir el valor de $w^2 = (r + \sigma)b$ en la expresión anterior tenemos:

$$3\sigma - r\sigma + \sigma^2 + br + b\sigma + r = 0.$$

Factorizando a r y σ , hallamos que si r satisface:

$$r = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}, \quad (4.32)$$

tendremos dos raíces imaginarias puras λ_1 y λ_2 . Para obtener λ_3 , basta calcular la traza de la matriz jacobiana y encontramos que $\lambda_3 = -(\sigma + b + 1)$. Así, los eigenvalores son:

$$\lambda_1 = \sqrt{(r + \sigma)bi},$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{(r + \sigma)bi},$$

$$\lambda_3 = -(\sigma + b + 1).$$

Se puede concluir que cuando $r > 1$, la ecuación característica (4.30) posee dos raíces imaginarias puras y una raíz negativa.

Teorema 4.2.3. *Puntos de equilibrio atractores*

Los puntos de equilibrio:

$$P_1 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right),$$

$$P_2 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right);$$

son sumideros o atractores cuando:

$$1 < r < \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}.$$

La inestabilidad del estado convección se da cuando $r = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$. Así, si $\sigma > b+1$, el sistema es inestable para un número de Rayleigh lo suficientemente grande.

Este resultado sólo se aplica a la convección idealizada gobernada por (4.18), (4.19) y (4.20) y no a las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales (2.23) y (2.25).

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue exponer la deducción del modelo de Lorenz de una forma detallada, exponiendo los supuestos del modelo, a partir de simular el comportamiento de la atmósfera terrestre por medio de un fluido bidimensional confinado entre dos placas horizontales con una diferencia de temperatura entre ellas. A partir de este modelo se encontró la ecuación de Navier-Stokes que describe el movimiento de traslación del fluido contenido entre las placas. Se obtuvo una ecuación que describe a la curva equipotencial ya que sobre ella se encuentra la trayectoria de la partícula, que es la ecuación de Navier-Stokes en forma de vorticidad.

Al realizar el análisis de la influencia de temperatura se obtuvo el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Lorenz, que describen simultáneamente, el movimiento de un fluido a lo largo de las curvas de nivel Ψ , generado por la diferencia de temperatura entre las placas. La partícula de fluido tiende a flotar por el efecto de la temperatura.

Buscamos una solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales, linealizamos el sistema y aplicando el método de separación de variables, encontramos una solución explícita para Θ y Ψ . Encontramos una forma explícita para la función temperatura y la función de corriente del sistema linealizado, bajo el supuesto que $\Omega^*(t) = \Omega(t)$, que es un aporte original del trabajo de tesis.

Buscamos soluciones para $\Theta(x, y, t)$ y $\Psi(x, y, t)$ bajo la suposición que $\Omega(t) \neq \Omega^*(t)$, sustituyendo las soluciones en el sistema linealizado para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por $\Omega'(t)$ y $\Omega^{*'}(t)$.

Al analizar la estabilidad del sistema formado por $\Omega'(t)$ y $\Omega^{*'}(t)$, encontramos la temperatura mínima a la que se debe de encontrar la placa inferior para que el sistema se vuelva inestable, es decir la temperatura mínima requerida para iniciar la convección.

Se buscaron soluciones para el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales de Lorenz, por el método de separación de variables y durante el proceso

encontramos que cuando $n = 1$ y $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$, la temperatura alcanza su nivel crítico para que se inicie la inestabilidad.

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Lorenz, sigue siendo un problema abierto.

Así, al realizar los cambios de variable: $t = \frac{t^*}{k(a^2+1)}$, $\alpha'(t^*) = Ax(t^*)$, $\beta'(t^*) = By(t^*)$, $\gamma'(t^*) = Cz(t^*)$, y algunas simplificaciones obtuvimos la deducción del sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x), \\y' &= rx - y - xz, \\z' &= xy - bz.\end{aligned}$$

Al efectuar un análisis cualitativo del sistema de Lorenz encontramos que el sistema de Lorenz es estable cuando $r \in (0, 1)$, la inestabilidad o el estado de convección inicia cuando $r = \sigma \frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}$ y $\sigma > b + 1$. Este resultado sólo se aplica al sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de Lorenz, pero no se aplica para el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Lorenz.

Apéndice A

Estabilidad de Liapunov

En [7] encontramos que, tanto en sistemas lineales como en los no lineales, una de las propiedades fundamentales es la estabilidad del sistema. En un sistema lineal, la estabilidad puede interpretarse como la trayectoria resultante de una partícula que se coloca inicialmente en una posición arbitraria $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$. Si \mathbf{X}_0 es un punto crítico del sistema, entonces la partícula permanece en estado estacionario.

En un sistema no lineal de la forma:

$$x' = f(x, y),$$

$$y' = g(x, y).$$

el análisis de estabilidad es más complejo y, una herramienta para determinar la estabilidad del sistema fue propuesta por Liapunov en 1892. El método de Liapunov establece que debe existir una función escalar v positiva, tal que su derivada v' a lo largo de las trayectorias del sistema sea negativa, ya que esto implica que el origen del sistema estudiado es estable.

Teorema de Liapunov

Consideremos el sistema autónomo:

$$x' = f(x, y), \tag{A.1}$$

$$y' = g(x, y), \tag{A.2}$$

y supongamos que tiene un punto crítico aislado $(0, 0)$. Sea $D(x(t), y(t))$ una trayectoria del sistema (A.1)-(A.2) y consideremos la función $v(x, y)$ continua con primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene a la trayectoria. Si un punto (x, y) se mueve a lo largo de las trayectorias de acuerdo a las ecuaciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$, entonces:

$$v'(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} x' + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} y'. \quad (\text{A.3})$$

Esto significa que si $v'(x, y) < 0$, entonces v decrece a lo largo de las trayectorias solución que cruzan las curvas $v(x, y) = C$.

Asumimos que; dada una función continua v definida en alguna vecindad de (x_0, y_0) con derivadas parciales continuas en D , $v(x, y) = 0$, $v(x, y) > 0$ para toda (x, y) en D con $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ y los puntos (x, y) satisfacen la ecuación $v(x, y) = C$ de una curva cerrada alrededor de (x_0, y_0) para la constante C para las cuales estas curvas están en D ; luego:

- Si $v'(x, y) = 0$ para toda (x, y) en D , entonces (x_0, y_0) es estable.
- Si $v'(x, y) < 0$ para toda (x, y) en D , entonces (x_0, y_0) es asintóticamente estable.
- Si $v'(x, y) > 0$ para toda (x, y) en D , entonces (x_0, y_0) es inestable.

Una función v con propiedades de la hipótesis y que satisfaga el teorema anterior es llamada función de Liapunov.

Bibliografía

- [1] Alligood Kathleen T., Sauer Tim D. And Yorke James A., Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Springer, Third ed, 2000.
- [2] Broer Henk and Taken Floris, Dynamical Systems and Chaos, Springer, First ed, 2011.
- [3] Calderon Emilio Pablo, Descripción del Modelo de Lorenz con Aplicaciones, Tesis de Maestría en Matemáticas Aplicadas, Universidad de Medellín, 2007.
- [4] Casas C. y Alarcón M., Meteorología y clima, Universitat Politècnica de Catalunya, Primera ed, 1999.
- [5] Cengel A. Yunus and Cimbala M. Jhon, Fluid Mechanics Fundamentals and applications, Mc Graw Hill, First ed, 2006.
- [6] Cengel A. Yunus, Heat and Mass Transfer. A Practical Approach, Mc Graw Hill, Third ed, 2007.
- [7] Diacu Florin, An Introduction to Differential Equations: Order and Chaos, W. H. Freeman, First ed, 2000.
- [8] Drazin P. G. and Reid W. H., Hidrodinamic Stability, Cambdridge University Press, Second ed, 2004.
- [9] Fisure L. Ramón, Meteorología y oceanografía, Vitoria-Gasteiz: Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco, First ed, 2006.
- [10] Herrera Roberto, Meteorología y fenómenos meteorológicos, Facultad de ingeniería de la UNAM, 1996.
- [11] Hilborn Robert C., Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers, Oxford University Press, Second ed, 2005.

- [12] Hirsh Morris W., Male Stephen and Devaney Robert L., *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*, Elsevier, Second ed, 2004.
- [13] Holman J. P., *Heat Transfer*, Mc Graw Hill, Octave ed, 1998.
- [14] Holton James R. and Hakim Gregory J., *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Elsevier, Fifth ed, 2013.
- [15] Ira M. Cohen and Pijush K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Elsevier Academic Press, Third ed, 2004.
- [16] Kalnay Eugenia, *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and predictability*, Cambridge University Press, First ed, 2003.
- [17] Lorenz Edward, *Deterministic Nonperiodic Flow*, *Journal of the Atmospheric Science*, Vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [18] Marsden Jerrold E. y Tromba Anthony J., *Cálculo Vectorial*, Addison Wesley, Quinta ed, 2004.
- [19] Miramontes Pedro, *Navegación, Convección y Caos*, *Miscelánea Matemática UNAM*, Vol. 58, pp. 1-13, 2014.
- [20] Palmer Tim and Hagedorn, *Predictability of Weather and Climate*, Cambridge University Press, First ed, 2006.
- [21] Perko Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, Third ed, 2001.
- [22] Rayleigh Lord, *On convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid, When the Higher Temperature is on Under Side*, *Philosophical Magazine and Journal Science*, Vol. 32, Sixth Series, pp. 1261-1309, 1916.
- [23] Rodríguez Rosa María, Benito Agueda y Portela L. Adelaida, *Meteorología y Climatología*, Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología, Primera ed, 2004.
- [24] Salazar Diego Israel, *Ecuaciones de Lorenz de Fluidos Determinísticos no Periódicos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Escuela Politécnica Nacional Ecuador, 2014.
- [25] Saltzman Barry, *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem*, *Journal of the Atmospheric Science*, Vol. 19, pp. 329-341, 1962.

- [26] Slingo Julia and Palmer Tim, Uncertainty in Weather and climate Prediction, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 369, pp. 4751-4767, 2011.
- [27] Sparrow Colin, The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors, Springer-Verlag, First ed, 1982.
- [28] Strogatz Steven H., Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison Wesley, Second ed, 1994.
- [29] Wallace Jhon M. and Hobbs Peter, Atmospheric Science: An Introductory Survey, Elsevier Academic Press, Second ed, 2006.
- [30] Walter A. Robinson, Modeling Dynamic Climate Systems, Springer, First ed, 2001.
- [31] Welty James R. y Wick Charles E, Fundamentos de Transferencia de momento, calor y masa, Limusa, Primera ed.
- [32] Wilson García Ed Scott, Aspectos Cualitativos de las Ecuaciones de Lorenz y Sistema Sincronizado, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 1996.
- [33] Yu-Kai Ting, Jia-Ying Tu, Chung-Chun Hsiao, New Insight into Fluid Mechanics of Lorenz Equations, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, Vol. 9, No:4, 2015.