

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

# Mecánica estadística fraccionaria de la radiación de cuerpo negro

Tesis para obtener el título de:  
**Ingeniero en Física Aplicada**

Presenta:  
**Iván Antonio Valeriano Tomás**

Director de Tesis:  
**Dr. Leonardo Flores Cano**

Huajuapán de León, Oaxaca  
Febrero 2019

*Dedicado a  
mi madre.*

# Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por permitirme ser parte de ella para estudiar mi carrera, así como también a todos los miembros del cuerpo académico que brindaron sus conocimientos y apoyo para culminar mis estudios. A mi director de tesis, el Dr. Leonardo Flores Cano por darme la oportunidad de recurrir a sus conocimientos científicos y haberme guiado durante toda la realización de la tesis. También al Dr. Hugo David Sánchez Chávez, al Dr. Salomón González Martínez y al M.C. Maxwell Jiménez Escamilla por su ayuda, asesoría y orientación en este trabajo desde el inicio de su desarrollo. A mis compañeros de clase y amigos ya que gracias a su compañerismo, amistad y apoyo moral hicieron que mi etapa universitataria fuera agradable. Finalmente, a mi madre y hermanos por su entendimiento y apoyo incondicional en todos los aspectos, pero especialmente para lograr culminar con éxito mis estudios.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Radiación de cuerpo negro estándar</b>	<b>1</b>
<b>2. Ley de radiación n-dimensional</b>	<b>4</b>
2.1. Cálculo de la ley de Stefan - Boltzmann n-dimensional . . . . .	4
<b>3. Fractales en la física</b>	<b>9</b>
3.1. Medida de Hausdorff . . . . .	9
3.2. Método por conteo de cajas . . . . .	10
3.3. Uso de los fractales en sistemas físicos . . . . .	13
<b>4. Radiación de cuerpo negro fractal</b>	<b>23</b>
4.1. Influencia de las condiciones de frontera en la distribución de estados cuánticos . . . . .	23
4.2. Densidad de estados cuánticos fraccionaria . . . . .	26
4.3. Mecánica estadística derivada de la densidad de estados cuánticos fraccionaria . . . . .	26
<b>5. Discusión</b>	<b>29</b>
5.1. Sobre la expresión obtenida . . . . .	29
5.2. Sobre la cavidad fractal . . . . .	32
<b>Conclusión</b>	<b>35</b>
<b>Apéndice A. Integral de Bose Einstein</b>	<b>36</b>

# Introducción

La teoría de la radiación de cuerpo negro jugó un papel muy importante a fines del siglo XIX en el estudio de la física teórica, ya que fue el primer sistema físico que no se comportaba de la forma en que las leyes de la física clásica predecía. Sumado a eso, también condujo a Planck en 1900 a introducir la idea de que la radiación electromagnética emitida por “emisores elementales” solo aparece en paquetes discretos múltiples enteros de la frecuencia, nombrados más tarde como fotones. Para concluir todo ese camino, Einstein en 1905 propone que la discretización en los modos de energía de un sistema no solo debería ser válida para el caso de la radiación, sino también para la materia, e hizo ver con toda claridad cómo las propiedades de muchos sistemas formados por partículas materiales, cuando están sujetos a condiciones externas, requieren de una modificación de las leyes de la mecánica clásica y visualizó la necesidad de crear otra mecánica hoy conocida como mecánica cuántica.

Los fractales han tomado relevancia en décadas recientes (en el análisis meteorológico de la Tierra, estudios geológicos en pozos, etc.). A pesar de que el término “fractal” fue acuñado en 1975 por el matemático Benoît Mandelbrot, estos conceptos ya eran bien conocidos en matemáticas desde principios del siglo XX. Se dice que un objeto geométrico es fractal cuando es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales y es autosimilar, su forma es hecha de copias más pequeñas de la misma figura. Los primeros acercamientos se tuvieron con los fractales naturales. Un fractal natural es un elemento de la naturaleza que puede ser descrito mediante la geometría fractal. Las nubes, las montañas, el sistema circulatorio, las líneas costeras o los copos de nieve son fractales naturales. Esta representación es aproximada, pues las propiedades atribuidas a los objetos fractales ideales, como el detalle infinito, tienen límites en el mundo natural.

La idea de un mundo fractal ha tenido como consecuencia la reconstrucción de las teorías clásicas de algunas disciplinas de la ciencia dando mejores respuestas a algunos problemas, como la conectividad en redes de fractura. Por su parte, la física se ha adaptado en ramas como la hidrodinámica y la física del estado sólido para la construcción de materiales con microestructuras aleatorias. Todo lo anterior lleva a la idea de tomar una teoría bien estudiada como lo es la radiación de cuerpo negro y analizarla tomando condiciones fractales con el objetivo de encontrar una ley de emisividad para objetos arrugados.

En el primer capítulo se hace una revisión del método estándar para la radiación de cuerpo negro estándar. Se desarrollan los cálculos necesarios para llegar a la ley

de Stefan-Boltzmann en tres dimensiones. En el segundo capítulo se muestra el resultado principal obtenido por Landsberg y De Vos en su análisis científico [1]. En este se encuentra una fórmula para la ley de Stefan-Boltzmann para un espacio de  $n$  dimensiones. Una breve descripción de las herramientas utilizadas por la teoría fractal es necesaria. Se revisan algunos conceptos y se dan ejemplos de estos. También, con el objetivo de mostrar la importancia de la física de fractales, el tercer capítulo contiene información sobre los trabajos realizados en diferentes ramas de la física con un enfoque fractal. Se puede ver que las investigaciones han ido abarcando más disciplinas como la geología. En el cuarto capítulo se analiza la relación entre las condiciones de frontera con la distribución de estados cuánticos. Esto con el propósito de ver que sí existe una dependencia entre la geometría de la cavidad y la solución de un sistema. Haciendo uso de la distribución de estados dada por Berry en su publicación [2] y el método de Landsberg y De Vos, se encuentra una expresión de la radiación para una cavidad fractal.

Finalmente se hace un análisis en el cual se obtiene una fórmula para la emisividad de una cavidad fractal. Se contrasta con resultados experimentales para la radiación de superficies arrugadas.

# Capítulo 1

## Radiación de cuerpo negro estándar

Se consideran las propiedades de radiación electromagnética encerrada en un volumen  $V$  a temperatura  $T$ , un sistema conocido como una “cavidad de cuerpo negro” el cual puede ser experimentalmente producido haciendo una cavidad a algún material, evacuando la cavidad completamente, y entonces calentando el material a una temperatura dada. Los átomos en las paredes de ésta cavidad emitirán constantemente y absorberán radiación electromagnética, así que en equilibrio habrá una cierta cantidad de radiación en la cavidad, y nada más. Si la cavidad es lo suficientemente grande, las propiedades termodinámicas de la radiación en la cavidad deberían ser independientes de la naturaleza de la pared. En consecuencia se puede imponer en el campo de radiación alguna condición de frontera que sea conveniente [3].

De acuerdo a la teoría cuántica de radiación, los fotones son bosones sin masa de espín  $\hbar$ . La falta de masa implica que un fotón siempre se mueve a la velocidad de la luz  $c$  en el espacio libre, y que su espín puede tener solo dos orientaciones independientes: paralelo o antiparalelo al momento. Para el análisis de la radiación de cuerpo negro, es suficiente conocer que un fotón de frecuencia  $\omega$  tiene las siguientes propiedades:

$$\text{Energía} = \hbar\omega$$

$$\text{Momento} = \hbar\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \tag{1.1}$$

$$\text{Vector de polarización} = \boldsymbol{\epsilon}, \quad |\boldsymbol{\epsilon}| = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$$

A tal fotón le corresponde una onda plana de radiación electromagnético cuyo vector de campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \tag{1.2}$$

La dirección de  $\boldsymbol{\epsilon}$  es la dirección del campo eléctrico. La condición  $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$  es una consecuencia de la transversalidad del campo eléctrico, es decir,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Así para

$\mathbf{k}$  dado hay dos y solo dos vectores de polarización independientes  $\epsilon$ . Si se imponen condiciones de frontera periódicas a  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  en un cubo de volumen  $V = L^3$ , se obtienen los siguientes valores permitidos para  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi\mathbf{n}}{L} \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector cuyos componentes son  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  así el número de valores de momentos permitidos entre  $k$  y  $k + dk$  es

$$\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \quad (1.4)$$

ya que cada átomo puede emitir y absorber fotones, el número total de fotones no es una cantidad conservada.

La energía total del estado del campo electromagnético en el cual hay  $n_{\mathbf{k},\epsilon}$  fotones de momento  $\mathbf{k}$  y polarización  $\epsilon$  está dada por

$$E\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\} = \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \hbar\omega n_{\mathbf{k},\epsilon} \quad (1.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega &= c|\mathbf{k}| \\ n_{\mathbf{k},\epsilon} &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Debido a que el número de fotones es indefinido, la función de partición es

$$Q = \sum_{\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}} e^{-\beta E\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}} \quad (1.7)$$

sin restricción en  $\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}$ . El cálculo de  $Q$  es elemental:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\{n_{\mathbf{k},\epsilon}\}} \exp\left(-\beta \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \hbar\omega n_{\mathbf{k},\epsilon}\right) = \prod_{\mathbf{k},\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = \prod_{\mathbf{k},\epsilon} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \\ \log Q &= - \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \log(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) = -2 \sum_{\mathbf{k}} \log(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

El número de ocupación promedio por fotones de momento  $\mathbf{k}$ , independientemente de su polarización es

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial(\hbar\omega)} \log Q = \frac{2}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (1.9)$$

donde el factor 2 viene de las dos polarizaciones posibles.

La energía interna es

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Q = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega \langle n_{\mathbf{k}} \rangle \quad (1.10)$$

Para encontrar la presión, se expresa  $Q$  en la forma

$$\log Q = -2 \sum_{\mathbf{n}} \log(1 - e^{-\beta\hbar c 2\pi|\mathbf{n}|V^{-1/3}}) \quad (1.11)$$

desde la cual se obtiene

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \log Q = \frac{1}{3V} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega \langle n_{\mathbf{k}} \rangle.$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1.10) conduce a la ecuación de estado

$$PV = \frac{1}{3}U \quad (1.12)$$

A partir de las ecuaciones (1.10), (1.9) y (1.3) se calcula  $U$  en el límite  $V \rightarrow \infty$ , es decir, una cavidad muy grande para que las propiedades termodinámicas de la radiación en la cavidad sean independientes de la naturaleza de la pared.

$$U = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk 4\pi k^2 \frac{\hbar ck}{e^{\beta \hbar ck} - 1} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Por lo tanto, la energía interna por unidad de volumen es

$$\frac{U}{V} = \int_0^\infty d\omega u(\omega, T) \quad (1.13)$$

donde

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad (1.14)$$

Esta es la ley de radiación de Planck, la cual da la densidad de energía debida a los fotones de frecuencia  $\omega$ , independientemente de la polarización y dirección del momento. La integral de la ecuación (1.13) puede ser evaluada explícitamente para dar

$$\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} \quad (1.15)$$

Se sigue que el calor específico por unidad de volumen es

$$c_v = \frac{4\pi^2 k^4 T^3}{15(\hbar c)^3} \quad (1.16)$$

El calor específico no es llevado al límite  $T \rightarrow \infty$ , porque el número de fotones en la cavidad no es cerrado.

Las ecuaciones (1.14) y (1.15) pueden ser verificadas experimentalmente abriendo la cavidad de cuerpo negro para el exterior a través de una ventana pequeña. La radiación escaparía entonces desde la cavidad con velocidad  $c$ . La cantidad de energía radiada por segundo por unidad de área de la abertura, en la forma de fotones de frecuencia  $\omega$ , es

$$I(\omega, T) = c \int \frac{d\Omega}{4\pi} u(\omega, T) \cos(\theta) = \frac{c}{4} u(\omega, T) \quad (1.17)$$

donde la integración angular se extiende solo sobre un hemisferio. Integrando sobre la frecuencia, se obtiene

$$I(T) = \int_0^\infty d\omega I(\omega, T) = \sigma T^4 \quad (1.18)$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

que es conocida como la ley de Stefan-Boltzmann, con  $\sigma$  como la constante de Stefan.

# Capítulo 2

## Ley de radiación n-dimensional

Como parte de los antecedentes, se muestra una parte del trabajo publicado por Peter Landsberg y Alexis De Vos. En ese estudio se deriva la constante de Stefan-Boltzmann para un espacio n-dimensional [1].

Se sabe que el flujo de energía de radiación  $\Psi$ , emitida por un cuerpo negro a temperatura  $T$ , está dado por la ley de Stefan-Boltzmann

$$\Phi = \sigma AT^4 \equiv \int \phi_\nu d\nu \quad (2.1)$$

donde  $A$  es el área de la superficie del cuerpo radiante y  $\sigma$  es la constante de Stefan, que expresada en términos de  $h$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} \quad (2.2)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $h$  es la constante de Planck y  $c$  es la velocidad de la luz. Se encontró que este resultado es influenciado por el hecho de que el espacio sea tridimensional. Landsberg y De Vos derivan la ley de Stefan-Boltzmann para un espacio euclídeo n-dimensional, en la cual la cuarta potencia de la temperatura, se reemplazará por una potencia de orden  $(n + 1)$

$$\Phi = \sigma_n AT^{n+1}. \quad (2.3)$$

### 2.1. Cálculo de la ley de Stefan - Boltzmann n-dimensional

Se considera una cavidad  $n$ -dimensional con la forma de un hipercubo de longitud  $a_i$  en la dirección  $x_i$ . Su volumen  $V$  es entonces  $\prod_i a_i$ . La resonancia electromagnética consiste de ondas estacionarias con un vector de onda que satisface la condición de frontera de paredes conductoras ideales

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{a_1}, \frac{m_2}{a_2}, \dots, \frac{m_n}{a_n} \right)$$

donde los  $m_i$  son números enteros positivos o cero.

Los eigenvectores  $k$  generan una red ortorrómbica  $n$ -dimensional en el espacio  $k$  (Figura 2.1). Usando la relación de De Broglie, la frecuencia

$$\nu = c|\mathbf{k}|$$

está asociada con un eigenmodo particular.

Así que el número de modos  $g$  con frecuencia menor que  $\nu$  es igual al número de puntos  $k$  de la red dentro de la hiperesfera de radio  $\nu/c$ . Esta esfera tiene un volumen igual a

$$W_1 = V_n(\nu/c)^n$$

donde  $V_n$  denota el volumen de la hiperesfera  $n$ -dimensional de radio 1. Por otro lado, cada punto de la red ocupa una celda unitaria con volumen igual a

$$W_0 = \frac{1}{2a_1} \frac{1}{2a_2} \cdots \frac{1}{2a_n} = \frac{1}{2^n V}.$$

Si

$$W_1 \gg W_0 \quad (2.4)$$

es decir, si los efectos de las esquinas son despreciables, entonces el número de tales celdas en la hiperesfera es

$$g = \frac{(1/2^n)W_1}{W_0} = V \frac{V_n}{c^n} \nu^n. \quad (2.5)$$

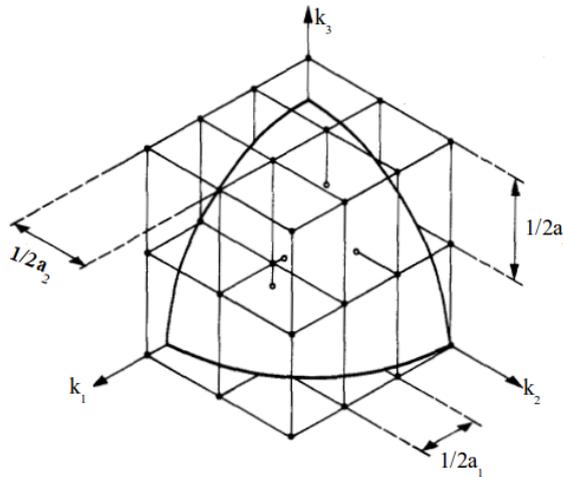


Figura 2.1: Red ortorrómbica y esfera en el espacio  $k$

El volumen  $W_1$  ha sido dividido por el factor  $2^n$  porque solo el hiperoctante con coordenadas positivas es ocupado por los puntos de la red.

Se debe multiplicar el resultado anterior por un factor 2, debido a las dos polarizaciones independientes de la radiación electromagnética. Por lo tanto, al diferenciar la expresión, se obtiene el número de modos por unidad de intervalo de frecuencia:

$$\frac{dg}{d\nu} = 2V \frac{nV_n}{c^n} \nu^{n-1}.$$

Usando la expresión para el volumen de una hiperesfera [4]

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)} \quad (2.6)$$

se obtiene

$$\frac{dg}{d\nu} = \frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{V}{c^n} \nu^{n-1} \quad (2.7)$$

donde  $\Gamma(x)$  es la función gamma.

Expresada como una función de la longitud de onda  $\lambda = c/\nu$ , se tiene

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{4\pi^{n/2}V}{\Gamma(n/2)} \lambda^{-n-1}.$$

Una vez obtenido el número de modos en una cavidad, con frecuencia entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ , se necesita encontrar el flujo de tales fotones monocromáticos, escapando de la cavidad a través de una superficie radiante  $(n - 1)$ -dimensional de área  $A$  (Figura 2.2).

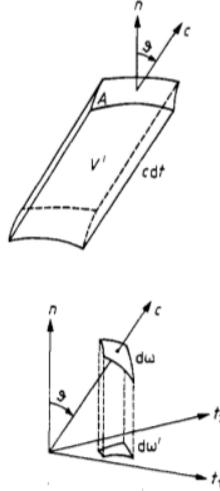


Figura 2.2: Flujo del fotón a través de la superficie de área  $A$ . El eje coordinado  $n$  es normal a la superficie, mientras los ejes  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  son tangentes a ella.

Ya que la radiación en la cavidad es isotrópica, es decir, uniformemente distribuida sobre todas las direcciones,

$$P = \frac{d\omega}{\int \int \dots \int d\omega}$$

es la probabilidad de que una partícula sea dirigida dentro del elemento de ángulo sólido  $d\omega$ . El número de fotones con tal dirección, que llegan a la superficie de área  $A$  en un intervalo de tiempo  $dt$ , es el producto de tres factores:

- (a) el número de modos por unidad de volumen, es decir, la expresión (2.7) dividido entre  $V$
- (b) la probabilidad  $P$ ; y
- (c) El volumen  $V'$  originalmente ocupado por los fotones, es decir, el hipercilindro de volumen  $Ac \cos \theta dt$ .

Por lo tanto, se debe multiplicar la ecuación (2.7) por

$$\frac{1}{V} Ac \cos \theta dt \frac{d\omega}{\int \int \dots \int d\omega}.$$

Después de la integración sobre todas las direcciones que apuntan hacia afuera de la superficie y después de dividir entre  $dt$ , se obtiene el factor

$$\int \int \dots \int \frac{Ac}{V} \cos \theta \frac{d\omega}{\int \int \dots \int d\omega} = \frac{Ac}{V} \frac{\int \int \dots \int \cos \theta d\omega}{\int \int \dots \int d\omega}.$$

En la última fórmula los símbolos  $\int \int \dots \int$  son para indicar una integración  $(n - 1)$ -dimensional, pero el denominador es una integración  $n$ -dimensional sobre la esfera unitaria, mientras que el numerador es una integración sobre un hemisferio unitario  $n$ -dimensional (integración sobre todas las direcciones apuntando fuera de la superficie).

Se remarca que

$$d\omega' = \cos \theta d\omega$$

es la proyección de  $d\omega$  sobre la superficie radiante, así que la integral  $\int \int \dots \int \cos \theta d\omega$  sobre el hiperhemisferio  $n$ -dimensional es igual al volumen de la hiperesfera unitaria  $(n - 1)$ -dimensional:

$$\int \int \dots \int \cos \theta d\omega = V_{n-1}.$$

Se observa finalmente que

$$\int \int \dots \int d\omega = S_{n-1}$$

donde  $S_n$  denota el área de la superficie de la hiperesfera con radio 1. No es difícil verificar que

$$S_n = nV_n \tag{2.8}$$

observando que el volumen de la hiperesfera iguala la integración de su superficie

$$V_n R^n = \int_0^R = S_n r^{n-1} dr.$$

Entonces, el factor por el cual se debe multiplicar la expresión (2.7) es

$$k_n = \frac{Ac}{V} \frac{V_{n-1}}{nV_n}$$

$$= \frac{Ac}{V} \frac{\Gamma(n/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma[(n+1)/2]}$$

el cual convierte el número de modos en la cavidad de volumen  $V$  en el número de modos penetrando la apertura  $A$  de la cavidad por unidad de tiempo.

Aplicando el factor a (2.7), se llega a

$$\frac{2A\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]} \frac{1}{c^{n-1}} \nu^{n-1}.$$

Después de multiplicar por la energía del fotón  $h\nu$  y por el factor de Bose-Einstein  $1/[\exp(h\nu/kT) - 1]$ , se obtiene la densidad espectral de Planck  $n$ -dimensional:

$$\Phi_\nu = \frac{2A\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]} \frac{h}{c^{n-1}} \frac{\nu^n}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (2.9)$$

Expresado en términos de la longitud de onda  $\lambda$ , el espectro es

$$\Phi_\lambda = \frac{2A\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]} hc^2 \frac{\lambda^{-n-2}}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}.$$

El máximo ocurre en la longitud de onda que obedece

$$\lambda = \frac{1}{x_n} \frac{hc}{kT} \quad (2.10)$$

con  $x_n$  la solución de la ecuación trascendental

$$[1 - x/(n-2)] \exp(x) = 1.$$

La fórmula (2.10) es la ley de desplazamiento de Wien  $n$ -dimensional.

Después de integrar sobre todas las frecuencias  $\nu$ , se obtiene la versión  $n$ -dimensional de la ley de Stefan-Boltzmann:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2A\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]} \frac{1}{c^{n-1}} \int_0^\infty \frac{\nu^n d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \\ &= \frac{2A\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]} \Gamma(n+1) \zeta(n+1) \frac{k^{n+1}}{h^n c^{n-1}} T^{n+1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

o

$$\Phi = \sigma_n A T^{n+1}$$

con

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]} \Gamma(n+1) \zeta(n+1) \frac{k^{n+1}}{h^n c^{n-1}}.$$

En la fórmula anterior  $\zeta(x)$  denota la función zeta de Riemann.

# Capítulo 3

## Fractales en la física

En el pasado, las matemáticas se han ocupado principalmente de los conjuntos y funciones a los que se pueden aplicar los métodos del cálculo clásico. Los conjuntos o funciones que no son lo suficientemente suaves o regulares han tendido a ser ignorados como “patológicos” y no dignos de estudio. Ciertamente, se los consideraba como curiosidades individuales y rara vez se los consideraba como una clase a la que podría aplicarse una teoría general. En los últimos años, esta actitud ha cambiado ya que se ha comprendido que se puede decir mucho, y vale la pena decirlo, sobre las matemáticas de los objetos no lisos. Además, los conjuntos irregulares proporcionan una representación mucho mejor de muchos fenómenos naturales que las figuras de la geometría clásica. La geometría fractal proporciona un marco general para el estudio de tales conjuntos irregulares.

### 3.1. Medida de Hausdorff

Una medida es una forma de atribuir un “tamaño” numérico a conjuntos, tal que si un conjunto es descompuesto en un número finito o numerable de partes de una manera razonable, entonces el tamaño de todo es la suma de los tamaños de las partes [5].

Se le conoce a  $\mu$  como una *medida* en  $\mathfrak{R}^n$  si  $\mu$  asigna un número no negativo, posiblemente  $\infty$ , para cada subconjunto de  $\mathfrak{R}^n$  tal que:

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

(b)  $\mu(A) \leq \mu(B)$  si  $A \subset B$ ;

(c) si  $A_1, A_2, \dots$  es una secuencia numerable (o finita) de subconjuntos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (3.1)$$

con igualdad en (3.1), i.e.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (3.2)$$

si los  $A_i$  son conjuntos de Borel disjuntos (un conjunto de Borel es cualquier conjunto obtenido mediante uniones e intersecciones numerables de conjuntos cerrados o abiertos en la topología considerada).

Se le llama a  $\mu(A)$  la *medida* del conjunto  $A$ , y se piensa a  $\mu(A)$  como el tamaño de  $A$  medido de alguna forma. La condición (a) dice que el conjunto vacío tiene medida cero, la condición (b) dice que “cuanto mayor sea el conjunto, mayor será la medida” y (c) dice que si un conjunto es la unión de un número finito de partes (las cuales pueden superponerse) entonces la suma de las medidas de las piezas es menor ó igual a la medida del todo. Si un conjunto es descompuesto en un número contable de conjuntos de Borel disjuntos entonces la medida total de las piezas es igual a la medida del todo [5].

Si  $U$  es algún subconjunto no vacío del espacio euclideo  $n$ -dimensional,  $\mathfrak{R}^n$ , el *diámetro* de  $U$  es definido como  $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ , i.e. la mayor distancia de separación de cada par de puntos en  $U$ . Si  $\{U_i\}$  es una colección numerable (o finita) de conjuntos de diámetro a lo sumo  $\delta$  que cubre a  $F$ , i.e.  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  con  $0 \leq |U_i| \leq \delta$  para cada  $i$ , se dice que  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -cover de  $F$ . Suponga que  $F$  es un subconjunto de  $\mathfrak{R}^n$  y  $s$  es un número no negativo. Para algún  $\delta > 0$  se define

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cover de } F \right\}. \quad (3.3)$$

Así, se ven todas las cubiertas de  $F$  por conjuntos de diámetro a lo sumo  $\delta$  y se busca minimizar la suma de las  $s$ -ésimas potencias de los diámetros. A medida que  $\delta$  disminuye, la clase de cubiertas permitidas de  $F$  en (3.3) es reducida. Por lo tanto, el ínfimo  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  aumenta, y así se acerca a un límite como  $\delta \rightarrow 0$ . Esto es

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad (3.4)$$

El límite existe para cualquier subconjunto  $F$  de  $\mathfrak{R}^n$ , aunque el valor límite puede ser (y usualmente es) 0 o  $\infty$ . Se le conoce a  $\mathcal{H}^s(F)$  como la *medida de Hausdorff  $s$ -dimensional* de  $F$ .

## 3.2. Método por conteo de cajas

La dimensión fractal es un exponente que da cuenta de cuán completamente parece llenar un fractal el espacio conforme se amplía el primero hacia escalas más y más finas. No existe una única dimensión fractal sino una serie de dimensiones que, frecuentemente, resultan equivalentes aunque no siempre. En la práctica algunas definiciones de dimensión fractal resultan más sencillas de calcular, y por eso son más ampliamente usadas, aunque no siempre tienen las propiedades matemáticas más deseables. Por ejemplo la dimensión de conteo de cajas o de dimensión Minkowski-Bouligand es ampliamente usada en la práctica, por su fácil implementación algorítmica. [6].

En la geometría fractal, la dimensión Minkowski-Bouligand, también conocida como dimensión de Minkowski o dimensión de conteo de cajas, es una forma de determinar la dimensión fractal de un conjunto  $F$  en un espacio Euclidiano  $\mathfrak{R}^n$ . Para calcular esta dimensión para un conjunto  $F$ , imagine este fractal sobre una cuadrícula uniformemente espaciada y cuente cuántas cajas se necesitan para cubrir el conjunto. La dimensión de conteo de cajas se calcula al ver cómo cambia este número a medida que hacemos la cuadrícula más fina aplicando un algoritmo de conteo de cajas [5].

Los conjuntos más estudiados son los fractales de Cantor (figura 3.1). El conjunto de Cantor, llamado así por ser aporte de Georg Cantor en 1883 [7], es un destacado subconjunto fractal del intervalo real  $[0, 1]$ , el cual se construye de forma recursiva de la siguiente forma:

- El primer paso es tomar el intervalo  $[0, 1]$ .
- El segundo paso es quitarle su tercio interior, es decir el intervalo abierto  $(1/3, 2/3)$ .
- El tercero es quitar a los dos segmentos restantes sus respectivos tercios interiores, es decir los intervalos abiertos  $(1/9, 2/9)$  y  $(7/9, 8/9)$ .
- Los pasos siguientes son idénticos: quitar el tercio de todos los intervalos que quedan.

A continuación se muestra la forma de obtener la dimensión por conteo de caja.



Figura 3.1: Conjunto de Cantor

La dimensión fractal se puede definir como

$$dim_F = - \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln N_d}{\ln d} \quad (3.5)$$

donde  $N_d$  es el número de conjuntos elementales necesarios para cubrir al conjunto total y  $d$  es el diámetro de los conjuntos elementales. Para hallar la dimensión fractal, es necesario ver, con cuántos conjuntos elementales de diámetro  $d$  puedo cubrir el conjunto completo. Esto se ilustra en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Método por conteo de cajas para el conjunto de Cantor.

Diámetro ( $d$ )	# de conjuntos elementales ( $N_d$ )
1	1
$1/3$	2
$1/9 = 1/3^2$	$4 = 2^2$
$1/3^3$	$2^3$
$\vdots$	$\vdots$
$1/3^n$	$2^n$

De la tabla anterior se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\ln d = -n \ln 3$$

$$\ln N_d = n \ln 2$$

de las cuales, no es difícil ver que

$$\dim_F = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,630929\dots$$

Otro fractal muy conocido es la curva de Koch (figura 3.2). El copo de nieve de Koch, también llamado estrella de Koch, es una curva cerrada continua pero no diferenciable en ningún punto, descrita por el matemático sueco Helge von Koch en 1904 en un artículo titulado “Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental” [8].

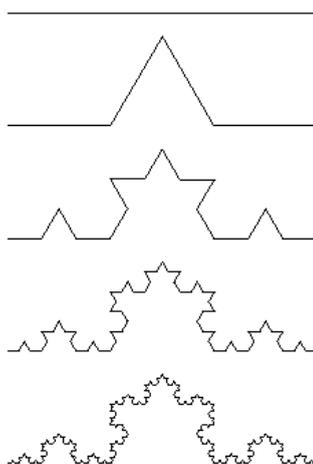


Figura 3.2: Construcción de la curva de Koch

La forma de construcción es la siguiente:

- Se toma un segmento de longitud 1.
- Se divide en 3 partes iguales y se quita el tercio interior.

- Sustituir el espacio por dos partes de igual longitud haciendo un ángulo de 60 grados.
- Con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera, lo que da lugar a 16 segmentos más pequeños en la segunda iteración. Y así sucesivamente.

Se procede de la misma forma para calcular la dimensión. La tabla 3.2 muestra el procedimiento para  $n$  iteraciones.

Tabla 3.2: Método por conteo de cajas para la curva de Koch.

Diámetro ( $d$ )	# de conjuntos elementales ( $N_d$ )
1	1
$1/3$	4
$1/9 = 1/3^2$	$16 = 4^2$
$1/3^3$	$4^3$
$\vdots$	$\vdots$
$1/3^n$	$4^n$

Ahora, es posible escribir las ecuaciones

$$\ln d = -n \ln 3$$

$$\ln N_d = n \ln 4$$

de las cuales, no es difícil ver que

$$\dim_F = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,261859\dots$$

El método por conteo de cajas para calcular la dimensión fractal es sencilla de aplicar en la mayoría de los fractales.

### 3.3. Uso de los fractales en sistemas físicos

El cálculo fraccionario es una teoría de integrales y derivadas de un orden arbitrario (o complejo). Tiene una larga historia desde 1695, cuando la derivada de orden  $1/2$  fue mencionada por Leibniz [9]. La diferenciación e integración fraccionaria remota a muchos grandes matemáticos tales como Leibniz, Liouville, Grünwald, Letnikov, Riemann, Abel, Riesz y Weyl. Las integrales y derivadas de orden no entero, y las ecuaciones fraccionarias integro-diferenciales han encontrado muchas aplicaciones en estudios recientes en física teórica, mecánica y en matemáticas aplicadas.

Benoît B. Mandelbrot fue uno de los iniciadores del estudio de los fractales. Fue el principal creador de la Geometría Fractal, al referirse al impacto de esta disciplina en la concepción e interpretación de los objetos que se encuentran en la naturaleza

[10]. En su artículo, *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension* [11], Mandelbrot menciona que la medición de una línea geográfica real (una costa, frontera, etc.) depende de la unidad de medida o escala mínima usada para medirla, ya que, cada vez que se disminuye esa unidad mínima, aparecen detalles cada vez más finos. También trata el tema de las curvas autosimilares que tienen dimensiones fractales entre 1 y 2. Tales curvas son ejemplos de curvas fractales, aunque Mandelbrot no emplea este término en su artículo, pues no lo acuñó hasta 1975 [12]. En 1982, escribió su libro *The Fractal Geometry of Nature* en el cual explica sus investigaciones en geometría fractal como los patrones por los que se rigen la rugosidad o las grietas y fracturas en la naturaleza. Mandelbrot sostuvo que los fractales, en muchos aspectos, aparecen de manera más natural, y por tanto el hombre interactúa con mayor frecuencia con ellos que con los objetos basados en la geometría euclidiana, que han sido suavizados artificialmente [13].

La resolución de problemas físicos utilizando un tratamiento fraccionario ya ha sido estudiada. Tarasov ha realizado una generalización de diversas partes de la física a su forma fraccionaria [9]. Él sostiene que, con ayuda del cálculo fraccionario, es posible obtener modelos dinámicos útiles, donde los operadores integro-diferenciales fraccionarios en las variables de tiempo y espacio, describen la memoria a largo plazo de las propiedades espaciales no locales de los medios y procesos complejos.

En la rama de la hidrodinámica, Tarasov deriva la generalización fractal de las ecuaciones de balance de densidad de masa, densidad de momento y energía interna. Considera las generalizaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler para un medio fractal. Así como también sugiere la ecuación de equilibrio para un medio fractal y la generalización de la integral de Bernoulli.

En esta misma rama, se ha estudiado el flujo continuo fractal obteniendo un modelo empleando operadores diferenciales fractales [14]. En el mismo trabajo, Balankin y Elizarraraz, sugieren la generalización para el teorema de la divergencia de Green-Gauss y el teorema de transporte de Reynolds para un continuo fractal. También se derivan las leyes de conservación y las ecuaciones hidrodinámicas para un flujo continuo fractal anisotrópico. La hidrodinámica de flujo continuo fractal desarrollado por Balankin y Elizarraraz permite mejorar el enfoque fractal para modelar la respuesta de presión del pozo de bombeo que es utilizado en la ingeniería petrolera. Esto requiere la definición de un análogo de la ley Darcy (la Ley de Darcy describe, con base en experimentos de laboratorio, las características del movimiento del agua a través de un medio poroso [15]) para el flujo continuo fractal, en lugar de la ley Darcy comúnmente utilizada con la permeabilidad espacial o/y dependiente del tiempo. También, se han hecho estudios en el análisis transitorio de presión en un depósito fractal [16]. En 1990, Chang y Yortsos desarrollaron un modelo matemático para describir el flujo monofásico de un fluido ligeramente compresible en un depósito fractal. Analizaron los casos donde solo participa la red de fracturas en el flujo y donde tanto la matriz como la red participan en el flujo. La figura (3.3) es un esquema simple del medio poroso. Se supone que la red indicada de líneas punteadas representa una red de fractura fractal que se caracterizará por un conjunto de exponentes fractales. El espacio restante está ocupado por la matriz euclidiana.

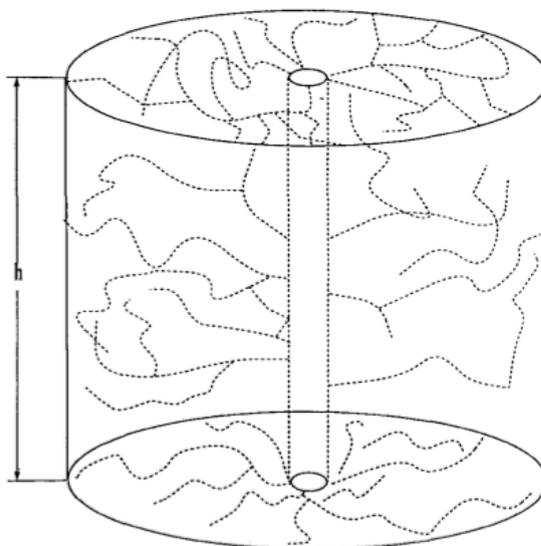


Figura 3.3: Esquema de un medio poroso.

Los resultados obtenidos extienden los métodos previos de transitorios de presión y de prueba de pozo a depósitos de dimensiones arbitrarias (fractales) y proporcionan una descripción unificada para sistemas de porosidad simple y doble. Los resultados pueden usarse para identificar y modelar depósitos naturalmente fracturados con escalas múltiples y propiedades fractales. El trabajo realizado por Chang y Yortsos, permite una descripción unificada de depósitos de una dimensión arbitraria (tanto número entero y fractal), generaliza anteriores resultados (tales como el modelo Warren-Root), y permite la identificación y descripción de depósitos con un alto desorden espacial, escasa conectividad y múltiples escalas de propiedades. Tales modelos pueden ser buenos candidatos para yacimientos o depósitos naturalmente fracturados con muchas escalas diferentes.

En 1986, Gomes, investigó la geometría de las bolas de papel arrugado. Muestra que estos sistemas son fractales y estudia sus propiedades [17]. Los experimentos reflejaron que la dimensión  $D$  de bolas de papel arrugado formado por hojas de papel con área  $A$  en el intervalo  $64mm^2 \leq A \leq 10^6mm^2$  y densidad superficial entre  $60gm^{-2} \leq \sigma \leq 80gm^{-2}$  es  $D \simeq 5/2$ . También experimentalmente, encontró dependencia entre  $D$  con la densidad superficial  $\sigma$  en cierto intervalo de densidad. En 2013, Balankin *et al.*, investigaron las propiedades fractales de una red de arrugamiento en materia fina plegada aleatoriamente [18]. En ese trabajo se estudiaron las propiedades estáticas y dinámicas de las redes de pliegues arrugados formados en hojas de papel trituradas a mano. El procedimiento fue el siguiente. Se tomaron hojas cuadradas de longitud  $L = 5, 10, 15$  y  $20$  cm y fueron aplastadas a mano en pelotas aproximadamente esféricas de diámetro  $R$  con cuatro diferentes razones iniciales de confinamiento (se realizaron varias pruebas para cada tamaño de hoja). Después de completar la relajación de tensión durante 10 días, unas pelotas fueron cortadas a la mitad para obtener imágenes de las intersecciones de la pelota con los planos. El resto de pelotas fueron desplegadas y aplanadas para estudiar las impresiones de las arrugas. Al ser aplanadas, la red fue remarcada y digitalizada, esto se

muestra en la figura (3.4)

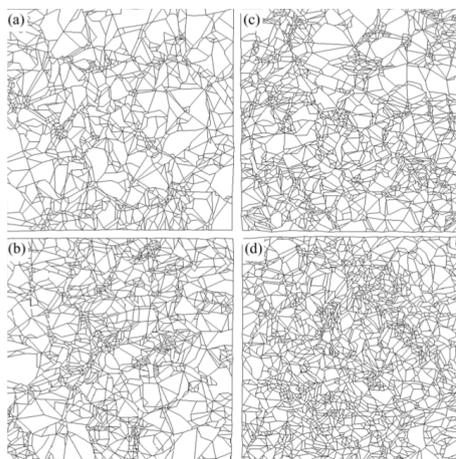


Figura 3.4: Imágenes digitalizadas de redes arrugadas estampadas en hojas desplegadas de largo  $L = 10$  cm desde pelotas dobladas con razones de confinamiento  $K =$  (a) 3.33, (b) 4, (c) 4.76 y (d) 5.6 respectivamente.

A partir de este trabajo se obtuvieron las dimensionalidades fractales de las redes de arrugamiento en las configuraciones desplegadas (planas) y dobladas. También se desarrolla la mecánica del aplastamiento de hojas bajo confinamiento externo. Se concluye que las dimensionalidades fractales de las redes de arrugamiento en las configuraciones planas y dobladas son universales, mientras que la longitud media y el número total de crestas arrugadas bajo la creciente razón de confinamiento dependen de la geometría arrugada. Se menciona que estos resultados proporcionan teoría física para estudiar los fenómenos de arrugamiento en sistemas que están fuera de la física, desde nanoláminas basadas en grafeno a formaciones geológicas.

Para 2015, Balankin y Flores Cano, estudiaron el arrugamiento de la materia delgada [19]. Se desarrolló la mecánica estadística de la red de arrugas formada en una hoja autoexcluyente con un módulo de flexión finito. Se deriva la distribución estadística de las longitudes de pliegues y se establece la relación entre la densidad de empaquetadura y la presión hidrostática. La importancia de este trabajo se refleja en el hecho de que las predicciones teóricas concuerdan con los datos experimentales disponibles y los resultados de las simulaciones numéricas. Los resultados obtenidos remarcan que todos los parámetros de ajuste del empaquetamiento a presión se pueden determinar mediante el estudio de redes de arrugamiento en láminas elastoplásticas desplegadas. Los hallazgos proporcionan una mayor comprensión de la física del arrugamiento y las propiedades mecánicas de la materia blanda arrugada.

Recientemente, en 2018, Sánchez Chávez y Flores Cano, estudiaron lo que sería, una aplicación a los trabajos realizados anteriormente. En ese trabajo realizaron un estudio de la dimensión fractal de ruta más corta en tres dimensiones para bolas de papel arrugadas al azar [20]. La parte experimental es muy similar a lo realizado por Balankin [18], pero en esta ocasión fue asignada, de manera arbitraria, una colección de puntos en la superficie de las pelotas hechas con la hoja. Se tomaron medidas entre todas las combinaciones posibles de pares de puntos en las configuraciones planas y arrugadas. Con los datos obtenidos, se encontró que existe una correlación entre

estas distancias, incluso, el valor experimental medio coincide casi numéricamente con la muy conocida dimensión fractal de ruta más corta en 3D para los sistemas de percolación informados en simulaciones computacionales. Lo más interesante es que el resultado es independiente del tamaño de la hoja. La relevancia del trabajo es que se postula que un sistema de bola de papel puede emular de alguna manera un subsistema como la percolación tridimensional.

La conectividad de red de fractura se ha estudiado previamente. Por ejemplo Berkowitz, en 1995 usó teoría de percolación para hacer un análisis sobre la conectividad en la red [21]. Una red de fracturas es un conjunto de patrones en múltiples fracturas que se intersectan entre sí. En el caso geológico, las fracturas se forman cuando la roca es sometida a esfuerzo o a deformación, como sucede con las fuerzas asociadas con la actividad tectónica de placas [22]. Las intersecciones de las fracturas, generan “caminos”. El conjunto de esos caminos en el sistema a través del cual puede fluir un fluido (agua, petróleo, etc.) se denomina la “red de conducción” del sistema. Por ejemplo, la figura (3.5) muestra en (a) una red de fractura. Aparentemente, hay muchos caminos que seguir para llegar de un lado a otro, sin embargo, hay muchos caminos que no salen al otro extremo. Esto se ve en (b), que corresponde a la red de conducción.

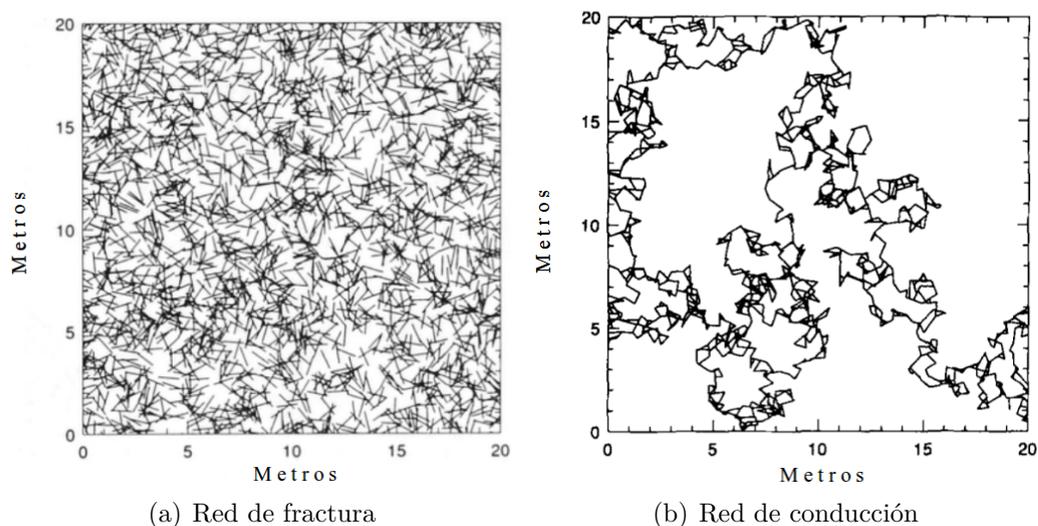


Figura 3.5: Red de fractura con densidad lineal de 5.6 fracturas por metro y su respectiva red de conducción hidráulica.

En su trabajo, Berkowitz, determinó relaciones para la densidad, las fracturas y el número promedio de intersecciones por fractura necesarias para garantizar la conectividad de la red, la probabilidad de que una formación fracturada esté conectada hidráulicamente y la probabilidad de que una fractura específica esté conectada a la fractura parte de conducción de la red. Estas relaciones pueden ser útiles para formular aproximaciones teóricamente tratables de redes de fracturas que describen las propiedades esenciales del sistema. Estos aspectos son de fundamental importancia en la caracterización, explotación y manejo de formaciones fracturadas.

En 2003, Darcel estudió redes de fractura fractales mediante un análisis este-

reológico. Con este análisis, le fue posible estudiar redes en tres dimensiones y dos dimensiones extrapolando la dimensión fractal [23]. En rocas fracturadas, la geometría compleja del patrón de fractura es un punto crítico para comprender las propiedades generales de flujo y transporte. Sin embargo, la caracterización de las redes de fracturas tridimensionales está severamente limitada por la imposibilidad virtual de localizar, medir y analizar conjuntos de datos fiables sobre fracturas. La solución a ese problema da como resultado la evaluación de las reglas estereológicas que vinculan las mediciones unidimensionales o bidimensionales con las tridimensionales (Figura 3.6).

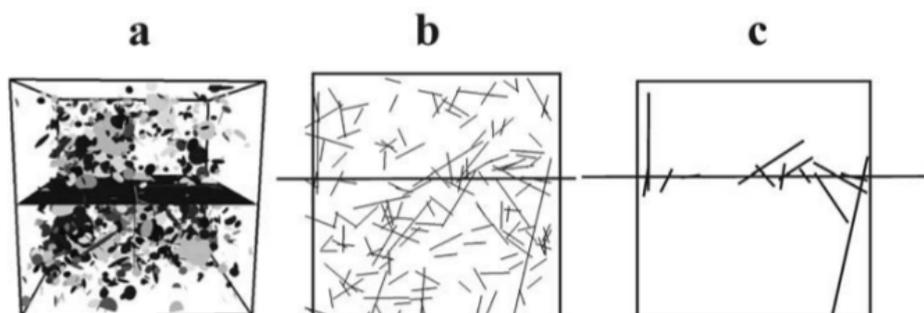


Figura 3.6: Esquema del análisis estereológico, (a) una red tridimensional de red de fracturas, (b) una red de trazas de fracturas 2-D que puede resultar de la intersección entre la red 3-D y el plano 2-D, y (c) una fractura 1-D red que intersecciona una línea de exploración de muestreo.

La teoría de los materiales con microestructura aleatoria (fractal o multifractal) se ha convertido en un tema atractivo en la mecánica y la física de los sólidos. Las propiedades estadísticas de tales microestructuras se caracterizan por el espectro de dimensiones generalizadas  $D$  (no entero). Balankin sugiere un nuevo tipo de elasticidad de estructuras aleatorias (multifractal) [24]. Los resultados pueden usarse para predicciones del comportamiento mecánico de materiales con microestructura multifractal, así como para la estimación de las dimensiones métricas, de información y de correlación utilizando datos experimentales sobre el comportamiento elástico de materiales con microestructura aleatoria.

Shiri *et al*, nos menciona que los datos geofísicos de registro de pozos a menudo muestran un patrón complejo debido a la condición multifractal. En su trabajo, realizaron análisis fractales de la densidad aparente, el tiempo de transmisión sónica, la impedancia acústica y la porosidad neutrónica de dos pozos de dos yacimientos petrolíferos iraníes [25]. Para el análisis de los pozos se obtienen columnas geológicas y registros de la porosidad de neutrones. Las columnas geológicas describen la ubicación vertical de unidades de roca en una área específica. Mientras que el registro de la porosidad de neutrones se utiliza principalmente para delinear las formaciones porosas y para determinar su porosidad [26]. La figura (3.7) muestra un ejemplo de los diagramas que se obtienen al hacer estos estudios. En esta se aprecia el porcentaje de porosidad que presenta el yacimiento dependiendo de la profundidad del pozo. Con esos datos, es posible diferenciar las secciones litológicas que existen en el yacimiento.

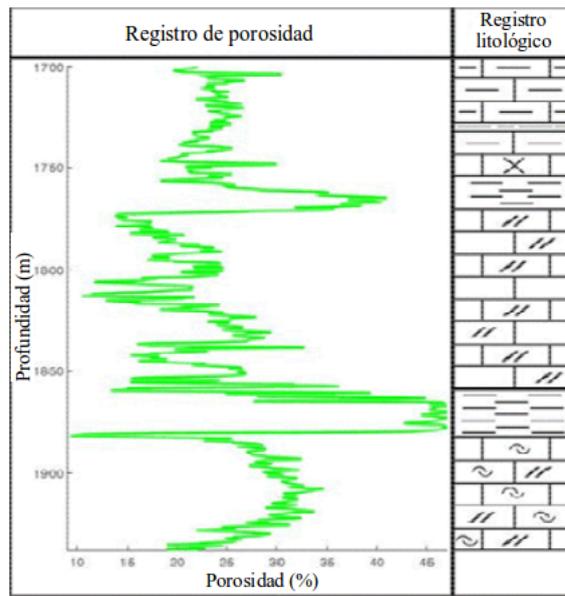


Figura 3.7: Diagrama esquemático de la toma de registros proveniente del campo petrolífero de Farour-B ubicado en el Golfo Pérsico, en la parte sur de Irán.

Se han realizado estudios para obtener la mecánica del medio continuo pero desde un enfoque fractal [27]. Sobre una base de geometría fractal, Jun y Ostoja, presentan un marco de mecánica continua de medios fractales y estudian un ejemplo particular de ondas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales en sólidos elásticos lineales fractales, que muestran que el enfoque de la mecánica continua es consistente con el obtenido a través de los principios de energía variacional.

Los fractales se pueden extender al estudio de superficies rugosas. Diversos artículos sobre el estudio de la dinámica de superficies fractales han sido agrupados por Fereydoon y Vicsek [28]. En ese conjunto de artículos, es posible encontrar a quienes hablan de los aspectos matemáticos de superficies rugosas, dinámica de crecimiento de interfaces, su aplicación y artículos experimentales. La importancia de estos estudios, cae en el hecho de que, en muchos casos, las superficies rugosas son generadas por una interfaz en crecimiento que avanza a medida que se agregan nuevas partes de acuerdo con algún proceso dinámico. Los ejemplos incluyen crecimiento de cristales, deposición de vapor, electrodeposición, revestimiento, y crecimiento biológico. Se pueden obtener esta clase de superficies durante la eliminación de material como en la corrosión por disolución química, la molienda, la erosión, el desgaste y muchos tipos de pulido. También existe una tercera clase de procesos en los que las interfaces aproximadas se forman espontáneamente sin adición o eliminación de material. La fractura y las interfaces entre los diferentes estados de la materia son ejemplos de tales superficies.

Otra aplicación en desarrollo se observa en las geociencias. Una amplia gama de observaciones en geología y geofísica de tierra sólida se puede explicar en términos de distribuciones fractales (como los pozos de los que se ha hablado anteriormente). V.P. Dimri, presenta una colección de artículos que consideran el comportamiento fractal de la corteza continental de la Tierra [29]. En estos artículos consideran la corteza

continental de la Tierra como un fractal. Del mismo modo, abordan la sismología, modelando las corrientes electrocinéticas que pueden asociarse con señales eléctricas sísmicas utilizando un medio poroso fractal [30]. Incluye un artículo en el cual se redefine la ecuación de conducción de calor tradicional para el cálculo de geotermas mediante la incorporación de la distribución fractal de la conductividad térmica [31]. Además, el estudio sugiere la distribución fractal de la tasa de producción de calor radiogénico dentro de la Tierra, frente a los modelos utilizados popularmente, que deben incorporarse en la ecuación de conducción de calor. El tema central del libro es el uso de técnicas fractales para comprender mejor la geofísica de la corteza continental. Los documentos incluidos son importantes por contener teoría de fractales y aplicaciones.

En ciencia de materiales, durante la deposición de películas en un sustrato, se generan superficies arrugadas, como muestra el trabajo de Campos-Silva y Balankin [32]. Aquí, analizan las interfaces existentes en un depósito de  $FeB$  y  $Fe_2B$  sobre un sustrato de acero AISI M2. La muestra fue seccionada transversalmente y escaneada, con lo cual se obtuvieron imágenes del perfil generado durante el proceso del depósito de las interfaces. Mediante el uso de un software se binarizó la imagen y después se digitalizó. Estas imágenes se muestran en la figura (3.8)

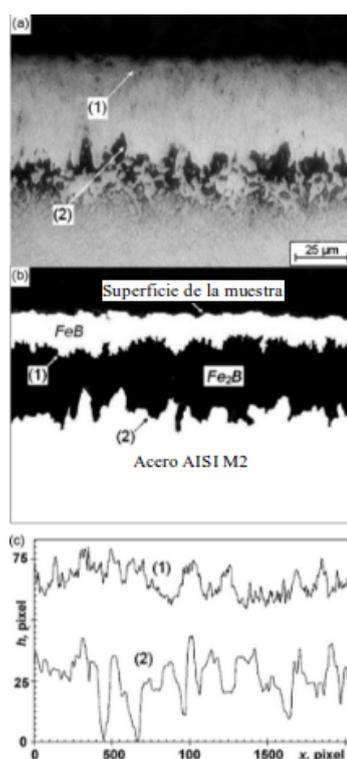


Figura 3.8: Procesamiento de imagen: (a) vista transversal con 400 aumentos de acero AISI M2 después del tratamiento; (b) imagen binarizada de interfaces, y (c) gráficos digitalizados de interfaces entre las fases  $FeB$  y  $Fe_2B$  (1) y entre la capa  $Fe_2B$  y el acero AISI M2 (2).

Se estudió la rugosidad de las interfaces entre las capas  $FeB$  y  $Fe_2B$  y entre la capa  $Fe_2B$  y el sustrato (acero) formado durante el depósito en el acero AISI

M2. Se encontró que mientras que el ancho de las capas  $FeB$  y  $Fe_2B$ , así como el ancho de las interfaces, dependen fuertemente de los parámetros de tratamiento, como el espesor, la temperatura y el tiempo pero ambas interfaces muestran las propiedades de escala que obedecen el comportamiento de escalamiento multifractal.

Para mostrar que los conceptos fractales generales pueden cambiar la forma en que percibimos procesos físicos y diversos fenómenos, Smirnov, considera ejemplos de la formación de estructuras fractales en los procesos físicos. La radiación de la llama de una vela, en el cual se encontró que la formación de agregados fractales de carbono en una llama de vela explica sus parámetros radiativos observados, mientras que si se consideran a las partículas de hollín como esferas sólidas, conduce a valores diferentes a lo que se observa en las propiedades de una vela. La radiación de las descargas de gas resultantes de la formación de agregados fractales y las propiedades de un enredo fractal como la estructura de una esfera de relámpagos. Como resultado de este estudio, se obtuvo un nuevo objeto físico, una maraña (enredo) fractal, que es de interés tanto para la ciencia fundamental como para las aplicaciones [33].

El electromagnetismo también tiene un tratamiento fractal. Las distribuciones de carga lineales, superficiales o volumétricas de las partículas pueden describirse por la cantidad de carga eléctrica en una línea, superficie o volumen, respectivamente. En general, estas distribuciones pueden ser fractales, es decir, las partículas cargadas de un conjunto con dimensión no entera. Por lo tanto, deben describirse los campos eléctricos y magnéticos de la distribución fractal de las partículas cargadas y el campo. En el caso general, la distribución fractal de partículas no puede considerarse como una distribución continua. Hay puntos y dominios que no tienen carga. Tarasov [34] desarrolla densidades de carga eléctrica y corriente para una distribución fractal, partiendo de las definiciones usuales. Sugiere las leyes de Coulombs y Gauss, la ley de Biot-Savart y Ampere para la distribución fractal en el marco del modelo continuo fractal y considera la generalización fractal para la ecuación de Maxwell integral. Con estas herramientas, Tarasov, analiza los ejemplos clásicos como el dipolo y cuadrupolo eléctrico.

Ostojca-Starzewski [35], basados en los trabajos hechos por Tarasov, determinó las ecuaciones que gobiernan los campos electromagnéticos en medios fractales anisotrópicos utilizando tres direcciones cartesianas del espacio euclidiano en el que está incrustado un fractal anisotrópico. En todos los casos, las ecuaciones derivadas para medios fractales dependen explícitamente de las dimensiones fractales y se reducen a formas convencionales para medios continuos con geometrías euclidianas al establecer las dimensiones en números enteros. Sin embargo, sus ecuaciones de Maxwell modificadas no coinciden con las de Tarasov debido a la métrica usada al definir sus derivadas

En 1987, Svozil, sugiere que el espacio-tiempo se modela como un subconjunto fractal de  $\mathfrak{R}^n$  [36]. Con este estudio, él concluye que es fuertemente necesario un cálculo generalizado basado en espacios topológicos dimensionales no enteros. Afirmó que este tipo de herramientas no solo beneficiaría a la física, algo que se comprueba con las diversas aplicaciones en las diferentes ramas de la ciencia. Más

tarde, Nottale [37], elabora un libro en el cual, describe un nuevo enfoque no solo para los problemas de la física cuántica, sino también para los múltiples problemas que se encuentran en la física moderna, desde el dominio de la dinámica caótica hasta el de la cosmología.

Debido a la importancia que han alcanzado los fractales en las ciencias básicas y aplicadas, específicamente en la física y el trabajo realizado por Landsberg y De Vos sobre la radiación de cuerpo negro en un espacio  $n$ -dimensional, se tiene el interés de estudiar la radiación de una cavidad cuyo espacio interior fuese fractal.

# Capítulo 4

## Radiación de cuerpo negro fractal

### 4.1. Influencia de las condiciones de frontera en la distribución de estados cuánticos

Se considera un recinto en forma de cubo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Las soluciones admisibles de la ecuación de Schrodinger de partícula libre

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad (\mathbf{k} = \mathbf{p}\hbar^{-1}) \quad (4.1)$$

la cual satisface las condiciones de frontera de Dirichlet (es decir,  $\psi = 0$  en todos lados de la frontera), están dadas por

$$\psi_{lmn}(\mathbf{r}) \propto \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \quad (4.2)$$

con

$$k = \pi \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right)^{1/2} ; \quad l, m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

En este caso, ninguno de los número cuánticos  $l$ ,  $m$  o  $n$  pueden ser cero, ya que eso haría cero a la función de onda. Ahora, por el otro lado, si se imponen condiciones de frontera de Neumann (es decir,  $\partial\psi/\partial n = 0$  por todos lados de la frontera), las soluciones buscadas resultan ser

$$\psi_{lmn}(\mathbf{r}) \propto \cos\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \quad (4.4)$$

con

$$l, m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

claramente, el valor cero de los números cuánticos es permitido ahora. En cada caso, sin embargo, los valores negativos-integrales de los número cuánticos no conducen a alguna nueva función de onda.

El número total  $g(K)$  de distintas funciones de onda  $\psi$ , con número de onda  $k$  sin exceder un valor dado  $K$ , puede ser escrito como

$$g(K) = \sum'_{l,m,n} f(l, m, n), \quad (4.6)$$

donde  $f(l, m, n) = 1$  para los números  $(l, m, n)$  perteneciendo al conjunto (4.3) o (4.5), según cada caso. La suma  $\sum'$  en cada caso está restringida por la condición

$$\left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \leq \frac{K^2}{\pi^2}. \quad (4.7)$$

Ahora se define una suma

$$G(K) = \sum'_{l,m,n} f^*(l, m, n), \quad (4.8)$$

donde  $f^*(l, m, n) = 1$  para todos los valores integrales de  $l$ ,  $m$  y  $n$  (positivos, negativos y cero), la restricción en los números  $(l, m, n)$  son las mismos que los escritos en (4.7). Por correspondencia de términos, se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \sum'_{l,m,n} f(l, m, n) &= \frac{1}{8} \sum'_{l,m,n} f^*(l, m, n) \mp \left\{ \sum'_{l,m} f^*(l, m, 0) + \sum'_{l,n} f^*(l, 0, n) + \sum'_{m,n} f^*(0, m, n) \right\} \\ &\quad (4.9) \\ &\quad + \left\{ \sum'_l f^*(l, 0, 0) + \sum'_m f^*(0, m, 0) + \sum'_n f^*(0, 0, n) \right\} \mp 1; \end{aligned}$$

El signo  $\mp$  corresponde a las condiciones de frontera de Dirichlet (positivo) y de Neumann (negativo).

Desde luego, la primera suma del lado derecho de (4.9) denota el número de puntos de red en el elipsoide  $X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = K^2/\pi^2$ , las siguientes tres sumas denotan los números en los puntos de red en las elipses, las cuales son secciones transversales de este elipsoide con los planos  $Z$ ,  $Y$  y  $X$ , mientras que las últimas tres sumas denotas los números de puntos de red en los ejes principales del elipsoide. Ahora, si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son suficientemente grandes en comparación con  $\pi/K$ , se puede reemplazar estos números por el correspondiente volumen, áreas y longitudes, respectivamente, resultando

$$g(K) = \frac{K^3}{6\pi^2}(abc) \mp \frac{K^2}{8\pi}(ab + ca + bc) + \frac{K}{4\pi}(a + b + c) \mp \frac{1}{8} + E(K); \quad (4.10)$$

el término  $E(K)$  denota el error neto cometido al hacer el reemplazo ya mencionado. Por lo tanto, se encontró que el primer término del resultado es directamente proporcional al volumen del recinto mientras que el primer término de corrección es proporcional a su área de superficie (y, por consiguiente, representa un “efecto de superficie”); los términos siguientes aparecen naturalmente como un “efecto de borde” y un “efecto de esquinas”.

Tomando en cuenta la determinación del número de puntos de la red en un dominio dado, se puede ver que la expresión (4.10) para  $g(K)$  es confiable solo hasta el término superficial. Entonces, se puede escribir como

$$g(K) = \frac{K^3}{6\pi^2}V \mp \frac{K^2}{16\pi}S + \textit{término de orden menor}; \quad (4.11)$$

En términos de  $\epsilon^*$ , donde

$$\epsilon^* = \frac{8mL^2}{h^2}\epsilon = \frac{4L^2}{h^2}p^2 = \frac{L^2}{\pi^2}K^2, \quad (4.12)$$

la ecuación (4.11) se reduce a

$$\sum_1(\epsilon^*) \approx \frac{\pi}{6}\epsilon^{*3/2} \mp \frac{3\pi}{8}\epsilon^*;$$

que representa el número de microestados para el gas ideal (para un desarrollo detallado consulte [4]).

En el caso de condiciones de frontera periódicas, es decir

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + a, y, z) = \psi(x, y + b, z) = \psi(x, y, z + c), \quad (4.13)$$

Las funciones de onda apropiadas son

$$\psi_{lmn}(\mathbf{r}) \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (4.14)$$

con

$$\mathbf{k} = 2\pi \left( \frac{l}{a}, \frac{m}{b}, \frac{n}{c} \right); \quad l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.15)$$

El número de estados de la partícula libre  $g(K)$  está dado ahora por

$$g(K) = \sum' f^*(l, m, n), \quad (4.16)$$

tal que

$$\left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \leq \frac{K^2}{4\pi^2}. \quad (4.17)$$

Este es el número de puntos de red en el elipsoide con semiejes  $Ka/2\pi$ ,  $Kb/2\pi$  y  $Kc/2\pi$ , el cual, permitiendo la aproximación hecha en los casos anteriores, es igual al término volumétrico en (4.11). Así, en el caso de condiciones de frontera periódicas, no se obtiene un término superficial en la expresión para la densidad de estados. Este caso no se aborda en el presente trabajo ya que, como se verá más adelante, se obtendrá un término superficial.

## 4.2. Densidad de estados cuánticos fraccionaria

Se considera una región  $R$  en el espacio  $D$ -dimensional, con una frontera  $\partial R$  la cual es  $d$ -dimensional, donde  $d = D - 1$ . Sean las eigenfunciones  $\psi_n$  y los eigenvalores  $k_n$  en  $R$ , que satisfacen

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_n^2)\psi_n &= 0 \quad \text{en } R \\ \psi_n &= 0 \quad \text{en } \partial R \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sea  $M_D$  la medida de  $R$  (por ejemplo, el volumen si  $D = 3$ ) y sea  $m_d$  la medida de  $\partial R$  (por ejemplo, el área si  $D = 2$ ). Entonces es conocido [38, 39, 40] que el número de modos asintóticos  $N(K)$ , es definido como el número de modos con  $k_n < k$  (donde  $k \rightarrow \infty$ ) está dado por

$$N(k) = \frac{M_D k^D}{(D/2)!(4\pi)^{D/2}} - \frac{m_d k^d}{4(d/2)!(4\pi)^{d/2}} + \dots \quad (4.19)$$

La conjetura de Berry [2] es como sigue: la fórmula (4.19) sigue siendo válida cuando el resonador  $R$  y/o su frontera  $\partial R$  son fractales, (esto es,  $D$  y/o  $\partial R$  no son enteros) siempre y cuando  $D$  y  $d$  sean interpretadas como las dimensiones fractales de  $R$  y  $\partial R$ , y  $M_D$  y  $m_d$  son las medidas de Hausdorff de  $R$  y  $\partial R$ .

Lo anterior fue desmentido por J. Brossard y R. A. Carmona [41], quienes luego sugirieron que se debe reemplazar la dimensión de Hausdorff por la dimensión de la caja.

En el plano, esto se demostró si la frontera tiene la dimensión 1 [42, 43], pero en su mayoría no se refrendó para dimensiones más altas [44]; ambos resultados son por Lapidus y Pomerance.

## 4.3. Mecánica estadística derivada de la densidad de estados cuánticos fraccionaria

Según Berry [2], el número de modos dentro de una cavidad fractal, se escribe como

$$N(k) = \frac{M_D k^D}{(D/2)!(4\pi)^{D/2}} - \frac{m_d k^d}{4(d/2)!(4\pi)^{d/2}}$$

el cual, en términos de la frecuencia  $\nu$ , se expresa

$$N(\nu) = \frac{M_D \nu^D}{(D/2)!(4\pi)^{D/2} c^D} - \frac{m_d \nu^d}{4(d/2)!(4\pi)^{d/2} c^d}$$

Al diferenciar se obtiene el número de modos por unidad de intervalo de frecuencia

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{M_D D \nu^{D-1}}{\Gamma(D/2 + 1)(4\pi)^{D/2} c^D} - \frac{m_d d \nu^{d-1}}{4\Gamma(d/2 + 1)(4\pi)^{d/2} c^d} \quad (4.20)$$

De la misma forma que en el caso entero, el número de fotones con cierta dirección que llegan a una superficie  $A$  en un intervalo de tiempo  $dt$  es la expresión anterior multiplicada por el factor

$$k_n = \frac{Ac}{V} \frac{\Gamma(D/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma[(D+1)/2]}$$

Multiplicando  $k_n$  por la ecuación (4.20), se llega a

$$\frac{A}{V\sqrt{\pi}\Gamma[(D+1)/2]} \left\{ \frac{M_D\nu^{D-1}}{(4\pi)^{D/2}c^{D-1}} - \frac{m_d\Gamma(D/2)\nu^{d-1}}{4\Gamma(d/2)(4\pi)^{d/2}c^{d-1}} \right\}$$

Se deben considerar ambas polarizaciones de la radiación, por lo que se requiere multiplicar por un factor 2. Finalmente se multiplica por la energía del fotón y el factor de Bose-Einstein para obtener la densidad espectral de Planck  $\Phi_\nu$ .

$$\Phi_\nu = \frac{2Ah}{V\sqrt{\pi}\Gamma[(D+1)/2]} \left\{ \frac{M_D\nu^D}{(4\pi)^{D/2}c^{D-1}} - \frac{m_d\Gamma(D/2)\nu^d}{4\Gamma(d/2)(4\pi)^{d/2}c^{d-1}} \right\} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \Phi_\nu &= \frac{2AM_D}{V\sqrt{\pi}\Gamma[(D+1)/2](4\pi)^{D/2}} \frac{h}{c^{D-1}} \frac{\nu^D}{\exp(h\nu/kT) - 1} \\ &- \frac{2Am_d\Gamma(D/2)}{4V\sqrt{\pi}\Gamma[(D+1)/2]\Gamma(d/2)(4\pi)^{d/2}} \frac{h}{c^{d-1}} \frac{\nu^d}{\exp(h\nu/kT) - 1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Integrando (4.22) sobre todas las frecuencias

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi_1 \frac{h}{c^{D-1}} \int_0^\infty \frac{\nu^D d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} - \varphi_2 \frac{h}{c^{d-1}} \int_0^\infty \frac{\nu^d d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \\ &= \varphi_1 \frac{(kT)^{D+1}}{c^{D-1}h^D} \Gamma(D+1)\zeta(D+1) - \varphi_2 \frac{(kT)^{d+1}}{c^{d-1}h^d} \Gamma(d+1)\zeta(d+1) \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2AM_D}{V\sqrt{\pi}\Gamma[(D+1)/2](4\pi)^{D/2}} \\ \varphi_2 &= \frac{2Am_d\Gamma(D/2)}{4V\sqrt{\pi}\Gamma[(D+1)/2]\Gamma(d/2)(4\pi)^{d/2}} \end{aligned}$$

La expresión (4.23) se puede escribir como

$$\Phi = \sigma_D AT^{D+1} - \sigma_d AT^{d+1} \quad (4.24)$$

con

$$\sigma_D = \frac{2M_D}{V\sqrt{\pi}\Gamma[(D+1)/2](4\pi)^{D/2}} \Gamma(D+1)\zeta(D+1) \frac{k^{D+1}}{h^D c^{D-1}}$$

$$\sigma_d = \frac{2m_D \Gamma(D/2)}{4V \sqrt{\pi} \Gamma[(D+1)/2] \Gamma(d/2) (4\pi)^{d/2}} \Gamma(d+1) \zeta(d+1) \frac{k^{d+1}}{c^{d-1} h^d}$$

La ecuación (4.24) representa la radiación emitida por un cuerpo fractal, en función de la temperatura del cuerpo, la dimensión de la cavidad y de la frontera.

# Capítulo 5

## Discusión

### 5.1. Sobre la expresión obtenida

A partir de la fórmula (4.24) se puede encontrar una expresión para la emisividad  $\varepsilon$  reacomodando los términos de la función original.

$$\begin{aligned}\Phi/A &= \sigma_D T^{D+1} - \sigma_d T^{d+1} \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_d T^{d+1}}{\sigma_D T^{D+1}}\right) \sigma_D T^{D+1} \\ \Phi/A &= \varepsilon(T; D, d) \sigma_D T^{D+1}\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde

$$\varepsilon(T; D, d) = 1 - \frac{\sigma_d}{\sigma_D} \frac{1}{T^{D-d}}.\tag{5.2}$$

es la emisividad del cuerpo, la cual se define como la razón entre la radiación emitida por la superficie a una temperatura dada y la radiación emitida por un cuerpo negro a la misma temperatura [45]. La emisividad tiene un valor entre 0 y 1, lo que desprende dos condiciones

$$T^{D-d} \geq \frac{\sigma_d}{\sigma_D}\tag{5.3}$$

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_D} \frac{1}{T^{D-d}} \geq 0\tag{5.4}$$

La condición (5.4) implica que la temperatura  $T$  no puede ser cero o menor. Las constantes, como se definen en la ecuación (4.24), tampoco pueden ser cero. La condición (5.3) proporciona una restricción para la temperatura. Despejando  $T$  (5.3) en el límite inferior (donde  $T^{D-d} = \sigma_d/\sigma_D$ ), se establece una temperatura mínima permitida para aplicar la ecuación obtenida

$$T_{min} = \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_D}\right)^{1/(D-d)}\tag{5.5}$$

la cuál es válida porque  $D - d > 0$ .

El comportamiento de función de emisividad es creciente respecto a  $T$ , esto es, mientras  $T$  aumenta,  $\varepsilon$  también lo hace hasta el valor límite de 1.

La emisión de radiación en superficies rugosas se ha abordado en artículos experimentales. Chang e Issam exploran la relación entre la emisividad y la rugosidad de la superficie [46]. Para esto, utilizan dos métodos. En el primero se utiliza un modelo matemático de termometría de radiación multiespectral (MRT) para la emisividad y determinar tanto la temperatura de la superficie como las constantes empíricas en el modelo de emisividad a partir de mediciones de radiancia. En el otro, se determinan las características de emisividad de una superficie de referencia única, mostrada en la figura (5.1) e inferir la emisividad de cualquier otra superficie rugosa del mismo material relacionando una función de rugosidad de la superficie rugosa. Esto es, se genera una función de rugosidad que describa a la superficie rugosa para utilizarla en la función de emisividad, obteniendo así una función de emisividad exclusiva para la superficie.

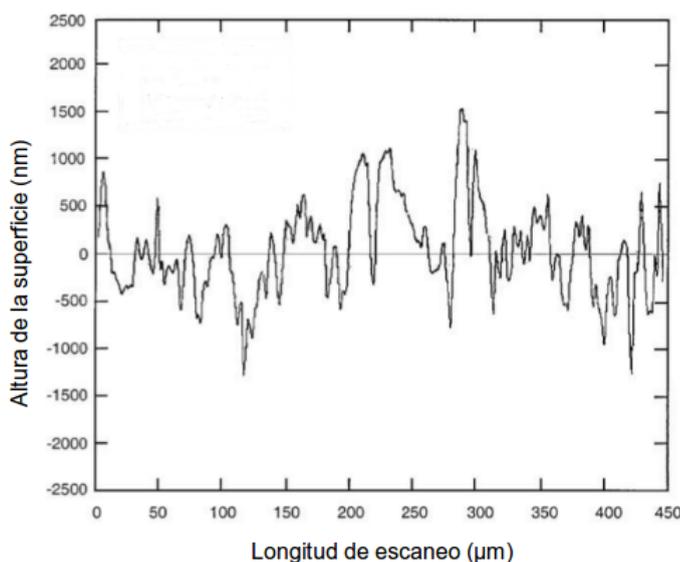


Figura 5.1: Perfil de la muestra de aluminio rugosa.

De este estudio, se desprenden distintas funciones de emisividad, que dependen de la rugosidad (dimensión) de la superficie y de la temperatura. Se mencionan tres funciones de emisividad de la forma

$$\varepsilon_{\lambda} = \exp(a_0/T_{\lambda}) \quad (5.6)$$

donde  $a_0$  es un parámetro que ajusta los valores experimentales al modelo. Para  $a_0 < 0$  se obtiene una función de emisividad con un comportamiento muy similar a la expresión de la ecuación (5.2), tal y como se muestra en la figura 5.2. En esa gráfica, no se realizó ningún ajuste, lo único que se quiere es hacer visible la semejanza entre el modelo experimental con el modelo que se ha obtenido en la tesis, por lo cual, fue suficiente con una comparación cualitativa.

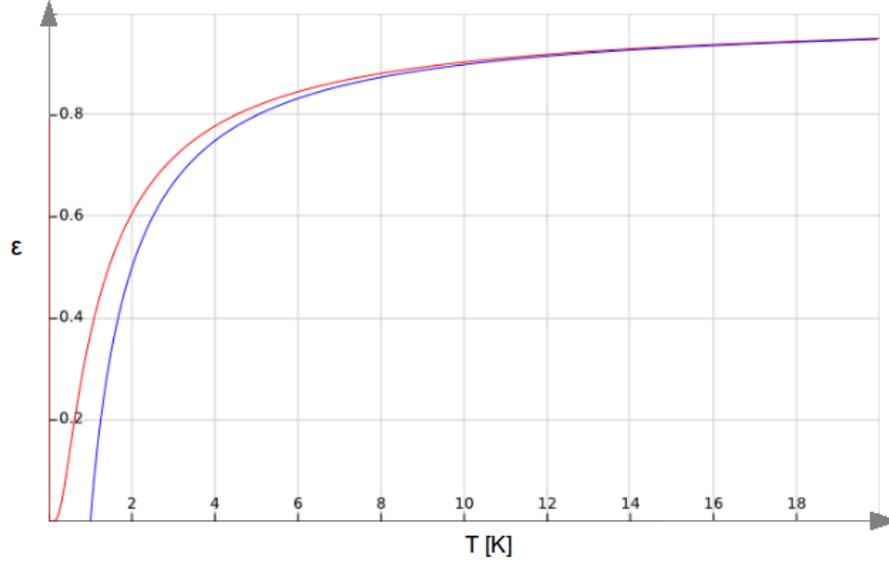


Figura 5.2: Comparación entre la función de emisividad obtenida en este trabajo (azul) y la propuesta en [46] por Chang e Issam (roja).

A temperaturas bajas (cercasas al cero absoluto), las funciones de emisividad pueden tener diferencias considerables (dependiendo del valor  $D - d$ ). Sin embargo, para temperaturas altas, ambas funciones convergen a 1 como se observa en la figura (5.2). De hecho, haciendo la expansión en series de Taylor para (5.6) se tiene

$$\exp(a_0/T_\lambda) = 1 + \frac{a_0}{T_\lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{T_\lambda} \right)^2 + \dots$$

que se reduce a

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{|a_0|}{T_\lambda} \quad (5.7)$$

para valores grandes de  $T$  y  $a_0 < 0$ , la cual es una expresión muy parecida a (5.2). La potencia de  $T$  en (5.2) marca diferencias significativas con (5.6) para valores cercanos al cero absoluto.

Para el caso tridimensional, se puede ver

$$\frac{a_0}{T^{D-d}} = \frac{a_0}{T}$$

ya que la dimensión del espacio es  $D = 3$  y de la frontera (superficie)  $d = 2$ . La expresión (5.2) tiene el mismo comportamiento que la aproximación (5.7).

A partir de la ecuación (4.24) y utilizando la ley de Stefan-Boltzmann usual, se llega a

$$\Phi/A = \left( \frac{\sigma_D T^{D+1} - \sigma_d T^{d+1}}{\sigma_3 T^4} \right) \sigma_3 T^4 = \varepsilon_3 \sigma_3 T^4$$

donde se ha renombrado como  $\sigma_3$  a la constante de Stefan  $\sigma$ . A partir de la expresión anterior, se desprende una para la emisividad en 3 dimensiones

$$\varepsilon_3 = \left( 1 - \frac{\sigma_d}{\sigma_D} \frac{1}{T^{D-d}} \right) \frac{\sigma_D}{\sigma_3} \frac{1}{T^{3-D}} \quad (5.8)$$

A partir de la ecuación (4.22) es posible obtener la intensidad de radiación espectral para el caso particular donde  $D = 3$  y, por consecuencia,  $M_D = V$ . Con esas condiciones y tomando en cuenta solo la contribución volumétrica, la expresión (4.22) se reduce a

$$\Phi_\nu/A = I(\nu, T) = \frac{h}{4\pi^2 c^2} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (5.9)$$

Se grafica el espectro de la ecuación (4.22) (azul) y el descrito en (1.17) (roja), que es el espectro descrito por la ley de Planck usual, para comparar su comportamiento (figura 5.3).

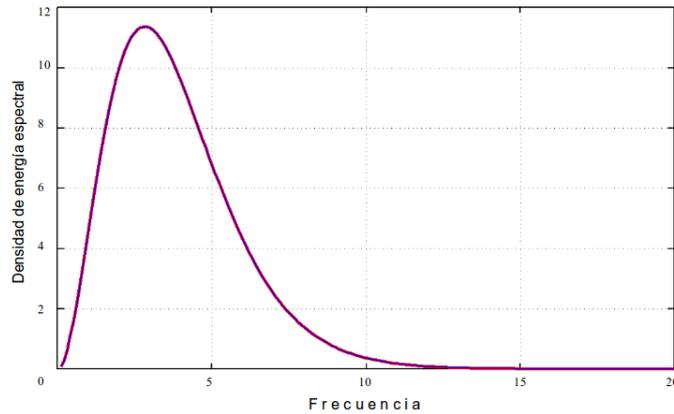


Figura 5.3: La expresión para la densidad de energía espectral tridimensional es un caso particular para la obtenida en este trabajo.

con la cual se concluye que, el miembro volumétrico de la expresión (4.22) recupera el caso tridimensional cuando  $D = 3$ .

## 5.2. Sobre la cavidad fractal

Si se consideran dos cavidades aisladas (una de pared arrugada y la otra de pared lisa) a la misma temperatura  $T$  (Figura 5.4).

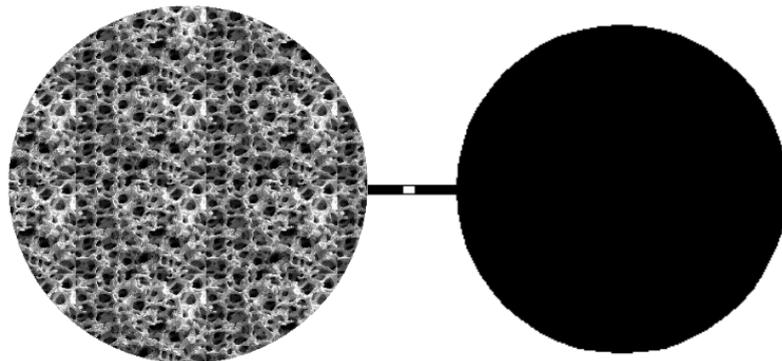


Figura 5.4: Cavidades aisladas a temperatura  $T$ .

Al momento de conectar las cavidades, comenzarán a intercambiar radiación. La radiación que intercambian dependerá del espectro (densidad de radiación). Debido a la naturaleza de la cavidad (su geometría), los espectros son diferentes. Es decir, no se puede entender la cavidad fractal como un cuerpo negro, por lo que la reflectividad puede estar involucrada.

Por otro lado, el equilibrio térmico ante pequeños desbalances se alcanza rápidamente. Después de un tiempo  $\tau$ , las cavidades llegarán al equilibrio. Ese tiempo, depende del diámetro  $L$  de las cavidades, la velocidad de la luz  $c$  y el coeficiente de absorción de las paredes  $\alpha$ .

$$\tau \sim \frac{1}{\alpha} \frac{L}{c} \quad (5.10)$$

Se observa que mientras mayor es  $\alpha$ , menor es el tiempo de absorción. Lo cual es coherente, ya que un coeficiente de absorción alto indica que en cada choque con las paredes, se refleja menos radiación.

Al hacer la conexión entre las cavidades, la cavidad resultante es fractal. Entonces, al llegar al equilibrio se obtendrá una densidad de radiación fractal. Como se mencionó, los espectros no son iguales, esto es porque la distribución de los modos depende de las condiciones de frontera (y por consecuencia, de la geometría), esto es

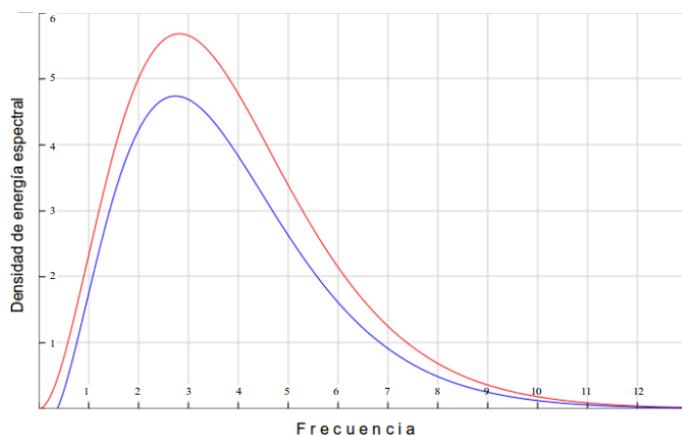
$$k \propto \frac{1}{L} \quad (5.11)$$

como se trató en la sección 4.1. Incluso en la formulación entera convencional, se sabe que la longitud de la cavidad influye en la distribución de estados cuánticos. En efecto, para dos cavidades de diámetros  $L_1$  y  $L_2$  con  $L_1 > L_2$  los modos de vibración en  $L_1$  tienen una tendencia a valores menores que  $L_2$ . El comportamiento de las funciones de densidad de radiación es igual ( $k$  es asintótico), pero a detalle no son iguales. Dicho de otra forma, para el modelo descrito en este trabajo y el modelo ya conocido de radiación estándar que aparece en los libros, las aproximaciones no son la excepción.

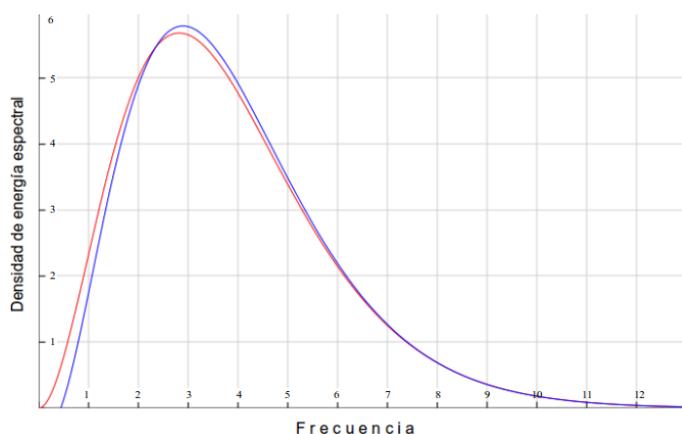
Comparando el comportamiento de la densidad de energía espectral de la cavidad, expresada en la ecuación (4.22), con el espectro de energía usual es posible observar tendencias muy similares tal y como muestra en las gráficas de la figura (5.5) donde se graficaron las versiones adimensionales de las ecuaciones (1.14) y (4.22). Ambas tienen un máximo y tienden a cero cuando  $x$  (frecuencia) tiende a infinito.

$$y = B_1 \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad B_2 \frac{x^D}{e^x - 1} - B_3 \frac{x^d}{e^x - 1} \quad (5.12)$$

donde  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$  son las constantes resultantes de hacer adimensional las funciones,  $y$  representa la densidad de energía espectral y  $x$  la frecuencia.



(a) Densidad de energía espectral usual vs fractal ( $D=2.7$ )



(b) Densidad de energía espectral usual vs fractal ( $D=2.85$ )

Figura 5.5: Comparación en el comportamiento de la densidad de energía espectral usual (roja) y la fractal (azul) con dimensión superficial  $d=2$  para ambos casos y dos valores de dimensión espacial fractal a)  $D=2.7$  y b)  $D=2.85$

Según la ley de Kirchhoff, se espera que dos cavidades vacías de cualquier geometría con paredes opacas y en equilibrio tengan espectros de frecuencias iguales. Si esto no sucediera, se tendría una diferencia de temperaturas lo que ocasionaría un trabajo, violando la segunda ley de la termodinámica. Sin embargo, esto no sucede porque se está tratando con un cuerpo que no se puede entender como la cavidad de cuerpo negro vacía (por su geometría espacial). Al hacer  $D \neq 3$  se dice que en el interior ocurren otros procesos ya que la cavidad “no es vacía”, las ondas están en un medio de dimensión fraccionario por lo que no se tiene que esperar un espectro idéntico. En el equilibrio, el cuerpo fractal debe emitir y absorber en cantidades iguales (al igual que en la cavidad vacía). Se puede pensar en el interior de la cavidad como un espacio parcialmente lleno con una distribución de materia fractal (un medio poroso, por ejemplo), como se puede ver en la figura 5.4 o incluso una cavidad con paredes rugosas fractales.

# Conclusión

Se generalizó la ley de Stefan-Boltzmann a partir del estudio de radiación de cavidad cuya geometría es fractal. De esta nueva ley se obtiene una función de emisividad que considera la geometría del medio y que se cree que puede ser aplicable al caso de las superficies rugosas, dada la proximidad entre las expresiones experimentales descritas en [46] con el resultado aquí propuesto.

Con ayuda del estudio realizado por Peter T. Landsberg y Alexis De Vos sobre la radiación de cuerpo negro en un espacio  $n$ -dimensional y el resultado obtenido por Michael V. Berry para la distribución de modos en un espacio fractal, fue posible desarrollar una ley de radiación para un cavidad fractal. También se encontró una expresión para la emisividad de este cuerpo, la cual se contrastó cualitativamente con el trabajo de Chang Da Wan e Issam Mudawar quienes, de manera experimental obtuvieron expresiones de emisividad para superficies arrugadas. Como punto de partida se considera, a priori, que así como hay una ley para la emisión fraccionaria en el equilibrio, existe una ley correspondiente de absorción. En otras palabras, se dice que el cuerpo absorbe y emite en la misma cantidad en el equilibrio, respetando la ley de Kirchhoff.

Los resultados obtenidos pueden ser útiles en otras ramas de la física como la cosmología, ya que, como se mencionó anteriormente, Svozil plantea la idea de que el espacio-tiempo se pueda modelar mediante un subconjunto fractal, es decir, que esté arrugado [36]. En este tipo de estudios son necesarias herramientas que estén generalizadas para espacios con dimensiones no enteras. De igual forma Nottale habla sobre estos enfoques en la física moderna [37], lo cual muestra que la generalización de la física para espacios dimensionales fractales, como también lo ha hecho Tarasov [9], es necesaria porque provee de nuevas herramientas para modelar los fenómenos que ocurren en nuestro entorno.

Así mismo, se espera que lo obtenido sirva para la generalización de reglas para encontrar funciones de emisividad para sistemas con geometría cercana a la fractal. A futuro se pueden hacer generalizaciones más profundas en las cuales la emisividad dependa de la longitud de onda  $\lambda$  o más exactas utilizando más términos de la ecuación (4.10) que representa el número de modos dentro de la cavidad.

En resumen, se generalizó la ley de Stefan-Boltzmann y su posible uso en la generación de funciones de emisividad, lo cual es producto de las consideraciones geométricas del medio. Dicho de otra forma, se establece una conexión entre el carácter geométrico de un medio y sus propiedades radiativas.

# Apéndice A

## Integral de Bose Einstein

Los desarrollos presentados en este trabajo incluyen la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x - 1} dx \quad (\text{A.1})$$

A continuación se presenta la solución para justificar su uso en el desarrollo del trabajo.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} x^s \left( \frac{1}{e^x - 1} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x} \left( \frac{1}{1 - (1/e^x)} \right) dx$$

Se sabe que la serie geométrica  $1 + r + r^2 + \dots$  cumple

$$\sum_{N=0}^{\infty} r^N = \frac{1}{1 - r} \quad (\text{A.2})$$

Entonces, para  $r = 1/e^x$  se tiene que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x} \left[ \sum_{N=0}^{\infty} \left( \frac{1}{e^x} \right)^N \right] dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x} \left[ \sum_{N=0}^{\infty} e^{-Nx} \right] dx = \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x^s e^{-Nx} e^{-x} dx = \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x^s e^{-(N+1)x} dx$$

Ahora, se define el siguiente cambio de variable

$$U = (N + 1)x ; \quad dU = (N + 1)dx \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo A.3 se obtiene

$$\sum_{N=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{U}{N + 1} \right)^s e^{-U} \frac{dU}{N + 1}$$

la cual se puede reagrupar para encontrar expresiones ya conocidas.

$$\sum_{N=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(N + 1)^{s+1}} U^s e^{-U} dU = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(N + 1)^{s+1}} \left( \int_0^{\infty} U^s e^{-U} dU \right)$$

$$\left(\int_0^\infty U^s e^{-U} dU\right) \left(\sum_{N=0}^\infty \frac{1}{(N+1)^{s+1}}\right) = \left(\int_0^\infty U^{(s+1)-1} e^{-U} dU\right) \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{s+1}}\right)$$

donde  $k = N + 1$ .

La función Gamma y Zeta de Riemman se definen como

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.4})$$

$$\zeta(s) = \sum_{N=1}^\infty \frac{1}{N^s} \quad (\text{A.5})$$

respectivamente.

Finalmente

$$\left(\int_0^\infty U^{(s+1)-1} e^{-U} dU\right) \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{s+1}}\right) = \Gamma(s+1)\zeta(s+1)$$

Entonces

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{e^x - 1} dx = \Gamma(s+1)\zeta(s+1) \quad (\text{A.6})$$

que es la expresión utilizada en los desarrollos de este trabajo.

# Bibliografía

- [1] Peter T Landsberg and Alexis De Vos. The Stefan-Boltzmann constant in n-dimensional space. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22(8):1073, 1989.
- [2] Michael V Berry. Distribution of modes in fractal resonators. In *Structural stability in physics*, pages 51–53. Springer, 1979.
- [3] Kerson Huang. *Statistical Mechanics, 2nd*. Edition (New York: John Wiley & Sons), 1987.
- [4] R.K. Pathria and Paul D. Beale. *Statistical Mechanics, third edition*. Butterworth-Heinemann (Elsevier), 2011.
- [5] Kenneth Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [6] Witold Hurewicz and Henry Wallman. *Dimension theory*, volume 1969. Princeton university press Princeton, 1948.
- [7] Georg Cantor and GA Edgar. On the power of perfect sets of points. *Classics on Fractals (Westview Press, 2004)* pp, 11:23, 1993.
- [8] HV Koch. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik*, 1:681–704, 1904.
- [9] Vasily E Tarasov. *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [10] Jascha Hoffman. Benoît mandelbrot, novel mathematician, dies at 85. *New York Times A*, 28, 2010.
- [11] Benoit Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *science*, 156(3775):636–638, 1967.
- [12] Benoit B Mandelbrot. Stochastic models for the earth’s relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72(10):3825–3828, 1975.

- [13] Benoit B Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*, volume 1. WH freeman New York, 1982.
- [14] Alexander S Balankin and Benjamin Espinoza Elizarraraz. Hydrodynamics of fractal continuum flow. *Physical Review E*, 85(2):025302, 2012.
- [15] Robert V Whitman and T William Lambe. *Mecánica de suelos*. Limusa, 2002.
- [16] Jincal Chang, Yanis C Yortsos, et al. Pressure transient analysis of fractal reservoirs. *SPE Formation Evaluation*, 5(01):31–38, 1990.
- [17] MAF Gomes. Paper crushes fractally. *J. Phys. A*, 20:L283, 1987.
- [18] Alexander S Balankin, Antonio Horta Rangel, Gregorio García Pérez, Felipe Gayosso Martinez, Hugo Sanchez Chavez, and Claudia L Martinez-Gonzalez. Fractal features of a crumpling network in randomly folded thin matter and mechanics of sheet crushing. *Physical Review E*, 87(5):052806, 2013.
- [19] Alexander S Balankin and Leonardo Flores-Cano. Edwards’s statistical mechanics of crumpling networks in crushed self-avoiding sheets with finite bending rigidity. *Physical Review E*, 91(3):032109, 2015.
- [20] Hugo David Sánchez Chávez and Leonardo Flores Cano. Shortest path fractal dimension for randomly crumpled thin paper sheets. *Revista Mexicana de Física*, 64(4):415–419, 2018.
- [21] Brian Berkowitz. Analysis of fracture network connectivity using percolation theory. *Mathematical Geology*, 27(4):467–483, 1995.
- [22] Tom Bratton, Dao Viet Canh, Nguyen Van Que, Nguyen V Duc, Paul Gillespie, David Hunt, Bingjian Li, Richard Marcinew, Satyaki Ray, Bernard Montaron, et al. The nature of naturally fractured reservoirs. *Oilfield Review*, 18(2):4–23, 2006.
- [23] C Darcel, O Bour, and P Davy. Stereological analysis of fractal fracture networks. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 108(B9), 2003.
- [24] Alexander S Balankin. The concept of multifractal elasticity. *Physics Letters A*, 210(1-2):51–59, 1996.
- [25] Y Shiri, B Tokhmechi, Z Zarei, and M Koneshloo. Multifractality nature and multifractal detrended fluctuation analysis of well logging data. *International Research Journal of Geology and Mining*, 2:148–154, 2012.
- [26] Robert L Bates and Julia A Jackson. Glossary of geology: American geological institute. *Alexandria, Virginia*, 788, 1987.
- [27] Jun Li and Martin Ostojca-Starzewski. Fractal solids, product measures and fractional wave equations. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 465, pages 2521–2536. The Royal Society, 2009.

- [28] Fereydoon Family and Tamás Vicsek. *Dynamics of fractal surfaces*. World Scientific, 1991.
- [29] Vijay Prasad Dimri. Fractals in geophysics and seismology: an introduction. In *Fractal Behaviour of the Earth System*, pages 1–22. Springer, 2005.
- [30] VV Surkov and H Tanaka. Electrokinetic effect in fractal pore media as seismoelectric phenomena. In *Fractal Behaviour of the Earth System*, pages 83–96. Springer, 2005.
- [31] VP Dimri and Nimisha Vedanti. Scaling evidences of thermal properties in earth’s crust and its implications. In *Fractal behaviour of the earth system*, pages 119–131. Springer, 2005.
- [32] I Campos-Silva, AS Balankin, AH Sierra, N Lopez-Perrusquia, R Escobar-Galindo, and D Morales-Matamoros. Characterization of rough interfaces obtained by boriding. *Applied Surface Science*, 255(5):2596–2602, 2008.
- [33] BM Smirnov. Radiation of some fractal structures. *International journal of theoretical physics*, 32(8):1453–1464, 1993.
- [34] Vasily E Tarasov. Electrodynamics of fractal distributions of charges and fields. In *Fractional Dynamics*, pages 89–113. Springer, 2010.
- [35] Ostoja-Starzewski Martin. Electromagnetism on anisotropic fractals. *Eprint ArXiv*, 1106, 2011.
- [36] Karl Svozil. Quantum field theory on fractal spacetime: a new regularisation method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20(12):3861, 1987.
- [37] Laurent Nottale. *Fractal space-time and microphysics: towards a theory of scale relativity*. World Scientific, 1993.
- [38] Heinrich P Baltes and Eberhard R Hilf. *Spectra of finite systems*. BI-Wissenschaftsverlag Mannheim, 1976.
- [39] R Balian and C Bloch. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain: I. three-dimensional problem with smooth boundary surface. *Annals of Physics*, 60(2):401–447, 1970.
- [40] R Balian and C Bloch. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. ii. electromagnetic field. riemannian spaces. *Annals of Physics*, 64(1):271–307, 1971.
- [41] Jean Brossard and René Carmona. Can one hear the dimension of a fractal? *Communications in Mathematical Physics*, 104(1):103–122, 1986.
- [42] Michel L Lapidus. Vibrations of fractal drums, the riemann hypothesis, waves in fractal media and the weyl-berry conjecture. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, pages 126–126, 1993.

- [43] Michel L Lapidus and Carl Pomerance. The riemann zeta-function and the one-dimensional weyl-berry conjecture for fractal drums. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):41–69, 1993.
- [44] Michel L Lapidus and Carl Pomerance. Counterexamples to the modified weyl-berry conjecture on fractal drums. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 119, pages 167–178. Cambridge University Press, 1996.
- [45] Yunus A Cengel and Afshin J Ghajar. *Transferencia de calor y masa*. McGraw-Hill Interamericana, 2007.
- [46] Chang-Da Wen and Issam Mudawar. Modeling the effects of surface roughness on the emissivity of aluminum alloys. *International journal of heat and mass transfer*, 49(23-24):4279–4289, 2006.