UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

COMPACIDAD DINÁMICA Y SENSITIVIDAD

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:
IRMA LEÓN TORRES

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. ALICIA SANTIAGO SANTOS

CO-DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCO BARRAGÁN MENDOZA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA. DICIEMBRE DE 2018

A mi padre Juventino Léon Jimenez,
y a la memoria de mi madre Oliva Torres Fuentes.

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi madre por ser mi ejemplo a seguir. Hoy, aunque no esté sigue siendo mi pilar para seguir adelante. A mi padre, que todo lo que logre hacer será gracias a su fortaleza, virtudes y valores inculcados en mí. De igual manera, les doy gracias a mis hermanos; Gaby, Laura, Ceci y Cornelio, que nunca me dejaron sola a pesar de las etapas difíciles en nuestras vidas. Gracias por su apoyo incondicional.

Quiero agradecer infinitamente a Víctor Martín Muñoz López, que sin su ayuda esto no hubiera sido posible. Gracias por el amor y el apoyo inmenso recibido, en situaciones difíciles de mi vida.

Terminar este proyecto no hubiera sido posible sin el apoyo de la Dra. Alicia Santiago Santos, gracias por los ejemplos de perseverancia y constancia que la caracterizan y que me ha transmitido. De igual manera, agradezco al Dr. Franco Barragán Mendoza, gracias a su apoyo brindado. Sus observaciones han hecho de éste un mejor trabajo. Es un gusto trabajar con ustedes.

A mis sinodales, al Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide y al Dr. Adolfo Maceda Méndez, gracias por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis, ya que con ello hicieron que esto fuera un mejor trabajo.

Agradezco también a los profesores que me impartieron clases durante la carrera, ya que sus enseñanzas y consejos me hacen crecer profesionalmente, gracias por todo.

Finalmente, agradezco a PRODEP por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo, por medio del proyecto titulado: *propiedades dinámicas y topológicas sobre sistemas dinámicos inducidos* con folio UTMIX-PTC-064.

De igual manera, agradezco a la SEP por el apoyo económico concedido, mediante la *beca o apoyo para iniciar la titulación 2018*, lo cual también me sirvió para la realización de esta tesis.

Índice general

Introducción

La temática de esta tesis se encuentra dentro de las áreas de la matemática conocidas como Topología y Sistemas Dinámicos. La Topología es la más joven de las disciplinas consideradas como pilares fundamentales de la matemática contemporánea, y sin embargo, pensada como la rama de las matemáticas cuyo objeto de estudio es la continuidad [40], también, ha sido el más emocionante e influenciante campo de investigación en la matemática moderna. Aunque sus orígenes se remontan a varios años atrás, fue Poincaré quien, "dio alas a la Topología" en una serie de artículos publicados a principios del siglo pasado [24].

Por otro lado, la teoría de los Sistemas Dinámicos es una rama clásica de las matemáticas que comenzó con el trabajo de *Isaac Newton* en 1665, ésta proporciona modelos matemáticos para sistemas que evolucionan con el tiempo según una regla. Originalmente se expresaban en forma analítica como un sistema de ecuaciones ordinarias y a esos modelos se les llama Sistemas Dinámicos Continuos. En 1880, Poincaré estudió estos Sistemas Dinámicos, al analizar la estabilidad en el sistema solar. Él encontró conveniente reemplazar el flujo continuo de tiempo con un análogo discreto; estos sistemas ahora son llamados Sistemas Dinámicos Discretos. Así, desde hace más de un siglo los Sistemas Dinámicos se clasifican en Continuos y Discretos.

En los últimos 30 años los sistemas dinámicos discretos han obtenido un gran desarrollo, generando de esta manera un gran número de publicaciones, pues son muy útiles para modelar diversos problemas de otras ciencias, como: química, física, biología, medicina y economía, vea [13], [25], [7] y [8].

Al estudiar la dinámica discreta de los objetos no basta analizar sus propiedades numéricas, es necesario conocer sus propiedades cualitativas o de forma, tales como: su estabilidad, su comportamiento respecto a la cercanía o acumulación entre éstos o respecto a ciertos conjuntos, etc., interviniendo así la topología [28]. La parte de la topología que estudia las propiedades cualitativas o de forma de los sistemas dinámicos se llama Dinámica Topológica.

En el presente trabajo, se analizarán sistemas dinámicos discretos que se obtienen a partir de la iteración de funciones, compuesto por un espacio X, el conjunto de posibles estados que puede representar el sistema y por una función $f : X \to X$, una ley de evolución que relaciona el estado del sistema en un instante determinado con su comportamiento posterior. El espacio fase será un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto, además la variable t sólo tomará valores en los naturales unión el cero.

El uso de los sistemas dinámicos discretos, en varios casos, simplifica a un modelo continuo, además, éstos son los que con mayor frecuencia se encuentran en la naturaleza y por tal motivo han sido muy estudiados. Dependiendo de las propiedades del espacio X y de cómo esté definida la función f, se han definido y clasificado varios sistemas dinámicos discretos, entre los más conocidos tenemos: exactos, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivos, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos y minimales. Varios de estos sistemas han sido ampliamente estudiados (vea [3], [9], [25]).

Referente a los sistemas caóticos, cabe señalar que actualmente aún no hay una definición matemática que se acepte universalmente para el caos, sin embargo se sabe que dos de las nociones para entender un sistema caótico son la transitividad y la sensitividad [26]. Por tal motivo, a través del tiempo, han surgido nociones relacionadas con la transitividad y nociones relacionadas con la sensitividad.

Respecto al concepto de sistema dinámico discreto transitivo, actualmente conocido como transitividad topológica, fue introducido en el año 1920 por G. D. Birkhoff [9]. Desde entonces, este concepto ha sido estudiado ampliamente (ver [3] y [25]) y se han introducido otras definiciones muy similares, las cuales están relacionadas o son equivalentes a la transitividad topológica (ver [4] y [36]).

Por otro lado, en 1971, Ruelle introdujo la primera definición de sensitividad [42]. De forma intuitiva, un sistema dinámico es sensitivo si dado un punto inicial siempre es posible encontrar otro punto arbitrariamente cercano tal que en algún momento sus órbitas están significativamente separadas. Dada la importancia de los sistemas dinámicos sensitivos, empezaron a surgir otras nociones relacionadas con la sensitividad, como: sensitividad Li-Yorke [5], sensitividad thick sindética [34], sensitividad sindética [43], sensitividad cofinita [43] y multi-sensitividad [43].

Dada la importancia y utilidad de los sistemas transitivos y sensitivos para tratar de entender el caos, se buscan nociones relacionadas con este tipo de sistemas. Recientemente, en 2016, W. Huang, D. Khilko, S. Kolyada y G. Zhang en [20], estudian un tipo de sistemas dinámicos transitivos, a saber, los sistemas dinámicos compacto transitivos; analizan la relación de estos nuevos sistemas con los sistemas del tipo transitivos y con los sistemas del tipo sensitivos.

El objetivo principal de este trabajo de tesis es realizar un estudio detallado de los sistemas compacto transitivos y la relación que existe entre éstos y los diferentes tipos de sensitividad, basándonos en el trabajo realizado en [20].

Para lograr dicho objetivo, el trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1, además de dar la notación que será utilizada a lo largo de este trabajo, introducimos conceptos preliminares en continuos que son los espacios en los que se trabajará. Así como también, se muestran algunas propiedades de funciones continuas.

Posteriormente, en el Capítulo 2, se da una introducción a los sistemas dinámicos discretos, se mencionan también algunos tipos de sistemas transitivos y sensitivos y la relación que hay entre ellos.

En el Capítulo 3, se introducen los sistemas dinámicos compacto transitivos y se muestran las principales propiedades que cumplen estos sistemas, además de la relación que existe entre éstos y los sistemas transitivos.

En el Capítulo 4, se definen algunos sistemas de tipo sensitivo y se estudian las relaciones que existe entre ellos. Finalmente, se muestra la relación que existe entre los compacto transitivos y los de tipo sensitivo.

Para finalizar este trabajo, en el Capítulo 5, se realiza un estudio detallado de la función Logística, obteniendo de ello ejemplos de sistemas dinámicos que analizamos en capítulos anteriores.

1 Conceptos preliminares en continuos

La presente tesis requiere recordar definiciones y resultados necesarios para abordar los capítulos posteriores. Además, establecer convenciones acerca de los conceptos que serán utilizados para el desarrollo de la misma, razón por la cual iniciaremos este capítulo con la siguiente sección.

1.1. Notaciones y conceptos básicos

Como es usual denotamos por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números naturales, los números enteros no negativos, los números enteros, los números reales y los números racionales, respectivamente. Además, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de un conjunto X y por $|A|$ a la cardinalidad de un conjunto A.

Por otro lado para abordar el tema principal de este trabajo es necesario recordar algunas definiciones y resultados básicos que utilizamos comúnmente en el desarrollo de la tesis. Por lo cual, iniciamos esta sección recordando el concepto de función y algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.1. Sean X y Y conjuntos. Se define una *función* de X en Y como una correspondencia que asocia cada elemento de X un único elemento en Y y se denota como $f : X \to Y$. En tal caso, al conjunto X se le llama dominio de f y al conjunto Y se le conoce como contradominio de f.

A continuación mostramos algunos ejemplos de funciones.

Ejemplo 1.1.2. Sea X un conjunto. La correspondencia $id_X : X \to X$ dada por $id_X(x) = x$, para cada $x \in X$, es una función de X en X. Esta función es llamada la *función identidad* en X.

Ejemplo 1.1.3. Sean X y Y conjuntos y $y_0 \in Y$. Definimos $f : X \to Y$ dada por $f(x) = y_0$, para todo $x \in X$. Esta función es llamada *función constante* en X.

Ejemplo 1.1.4. Sean X y Y conjuntos, $f : X \to Y$ una función y $A \subset X$. Definimos la *restricción* de f a A, denotada por $f|_A : A \to Y$, como $f|_A(a) = f(a)$, para cada $a \in A$.

Ejemplo 1.1.5. Definimos la función valor absoluto $| \cdot | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si} \quad a \geq 0; \\ -a, & \text{si} \quad a < 0, \end{cases}$$

para cada $a \in \mathbb{R}$.

Conceptos asociados a funciones son los de imagen y preimagen de una función, los cuales definimos a continuación.

Definición 1.1.6. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Dado $A \subset X$, se denota y define la *imagen* de A bajo f como:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x), \text{ para algún } x \in A\}.$$

Para cualquier $B \subset Y$, se denota y define la *preimagen* de B bajo f, como:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Ejemplo 1.1.7. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función constante. Dado $A \subset X$, se tiene que la imagen de A bajo f es $f(A) = \{y_0\}$. Por otro lado, para todo $B \subset Y$, tal que $y_0 \in B$, se tiene que $f^{-1}(B) = X$.

Observación 1.1.8. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(1) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, para cada $B \subset Y$.

(2) $A \subset f^{-1}(f(A))$, para cada $A \subset X$.

Definición 1.1.9. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es:

(1) *Inyectiva* si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.

(2) *Sobreyectiva* si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(3) *Biyectiva* si f es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Se puede verificar que la función identidad dada en el Ejemplo 1.1.2, es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto, biyectiva. Por otro lado, la función definida en el Ejemplo 1.1.3, no es inyectiva ni sobreyectiva. Por lo tanto, no es biyectiva.

A continuación se muestra una observación relacionada con funciones sobreyectivas e inyectivas.

Observación 1.1.10. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(1) Si f es sobreyectiva, entonces $f(f^{-1}(B)) = B$, para cada $B \subset Y$.

(2) Si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(f(A)) = A$, para cada $A \subset X$.

(3) Se tiene que f es sobreyectiva si y sólo si para todo subconjunto no vacío B de Y, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

A continuación definimos la función composición y mostramos algunas propiedades que se cumplen en dichas funciones.

Definición 1.1.11. Sean X, Y y Z conjuntos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Se define la *función composición de f y g*, denotada por $g \circ f : X \to Z$, como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in X$.

Proposición 1.1.12. Sean X, Y y Z conjuntos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Las condiciones siguientes son verdaderas:

(1) Si las funciones f y g son inyectivas, entonces la función $g \circ f$ es inyectiva.

(2) Si las funciones f y g son sobreyectivas, entonces la función $g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración. (1) Supongamos que las funciones f y g son inyectivas. Probemos que $g \circ f$ es inyectiva. Para esto sean $x, y \in X$, tales que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Luego, $g(f(x)) = g(f(y))$. Como g es inyectiva, se obtiene que $f(x) = f(y)$. Además, dado que f es inyectiva, se concluye que $x = y$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.
(2) Supongamos que f y g son sobreyectivas y probemos que $g \circ f$ es sobreyectiva. Sea $z \in Z$. Veamos que existe $x \in X$, tal que $(g \circ f)(x) = z$. Como g es sobreyectiva, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Además, como f es sobreyectiva, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Notemos que $g(f(x)) = g(y) = z$. Así, $(g \circ f)(x) = z$. Por lo tanto, $g \circ f$ es sobreyectiva. ■

Ahora pasamos a definir la función producto y de igual manera mostramos algunas propiedades que se cumplen en estas funciones.

Definición 1.1.13. Sean X, Y, Z y W conjuntos, $f : X \to Y$ y $g : Z \to W$ funciones. Se denota la *función producto* como $f \times g : X \times Z \to Y \times W$ y se define por:

$$\big(f \times g\big)\big((x, z)\big) = (f(x), g(z)), \text{ para cada } (x, z) \in X \times Z.$$

Proposición 1.1.14. Sean X, Y y Z conjuntos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Las condiciones siguientes son verdaderas:

(1) Si las funciones f y g son inyectivas, entonces la función $f \times g$ es inyectiva.

(2) Si las funciones f y g son sobreyectivas, entonces la función $f \times g$ es sobreyectiva.

Demostración. (1) Supongamos que las funciones f y g son inyectivas. Veamos que la función $f \times g : X \times Z \to Y \times W$ es inyectiva. Para esto, sean $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in X \times Z$, de tal manera que $\big(f \times g\big)\big((x_1, z_1)\big) = \big(f \times g\big)\big((x_2, z_2)\big)$. Luego, $\big(f(x_1), g(z_1)\big) = \big(f(x_2), g(z_2)\big)$. De donde $f(x_1) = f(x_2) \quad$ y $\quad g(z_1) = g(z_2)$. Dado que f y g son inyectivas, se concluye que $x_1 = x_2$ y $z_1 = z_2$. Así, $(x_1, z_1) = (x_2, z_2)$. Por lo tanto, $f \times g$ es inyectiva.
(2) Supongamos que las funciones f y g son sobreyectivas. Probemos que la función $f \times g : X \times Z \to Y \times W$ es sobreyectiva. Sea $(y, w) \in Y \times W$. Como f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. De manera similar, como g es sobreyectiva, para $w \in W$, existe $z \in Z$ tal que $g(z) = w$. Luego, $(y, w) = (f(x), g(z)) = (f \times g)(x, z)$. Así, $(x, z) \in X \times Z$ y es tal que $(f \times g)(x, z) = (y, w)$. Por lo tanto, $f \times g$ es sobreyectiva. ■

1.2. Espacios métricos

Para poder definir los espacios en los cuales trabajamos, es necesario dar la definición de espacio métrico. Por tal razón, en esta sección presentamos dicha definición, algunos ejemplos y propiedades que se cumplen en estos espacios.

Definición 1.2.1. Una *métrica* en un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$, que asocia a cada par ordenado $(x, y) \in X \times X$ un número real $d(x, y)$, llamado la distancia de x a y, de modo que para cualesquiera $x, y, z \in X$, se satisfacen las condiciones siguientes:

(1) $d(x, x) = 0$.

(2) Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) > 0$.

(3) $d(x, y) = d(y, x)$.

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Las condiciones (1) y (2) dicen que $d(x, y) \geq 0$ y que $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, la condición (3) afirma que d es una función simétrica y la condición (4) se llama *desigualdad del triángulo* (vea la Figura 1.1).

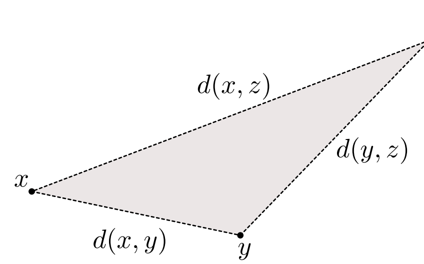


Figura 1.1: La desigualdad del triángulo.

Definición 1.2.2. Un *espacio métrico* es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una métrica en X.

De ahora en adelante, para referirnos al espacio métrico (X, d), escribimos simplemente X, quedando sobreentendido que se considera con una métrica d, a menos que se especifique lo contrario. A continuación damos ejemplos de algunos espacios métricos. El Ejemplo 1.2.3, muestra que todo conjunto no vacío puede proveerse de una métrica.

Ejemplo 1.2.3. Sean X un conjunto y consideremos la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x = y; \\ 1, & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Se puede verificar que d es una métrica sobre X. A esta métrica se le conoce como la *métrica cero-uno* o *métrica discreta*. Al espacio métrico (X, d) se le llama *espacio métrico discreto*.

Ejemplo 1.2.4. Consideremos $\mathbb{R}$ y $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por $d(x, y) = |x-y|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$. Se tiene que d es una métrica sobre $\mathbb{R}$. Al espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$, se le llama espacio euclidiano y cuando $\mathbb{R}$ es dotado de esta métrica algunas veces decimos que $\mathbb{R}$ tiene la métrica usual o euclidiana.

A continuación presentamos el concepto de bola abierta y de vecindad de un punto, los cuales son fundamentales en el estudio de espacios métricos.

Definición 1.2.5. Sean X un espacio métrico con métrica d, $a \in X$ y $r > 0$. Al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\},$$

se le llama *bola abierta* con centro en a y radio r. Decimos que $U \subset X$ es una *vecindad* de a si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset U$ (vea la Figura 1.2).

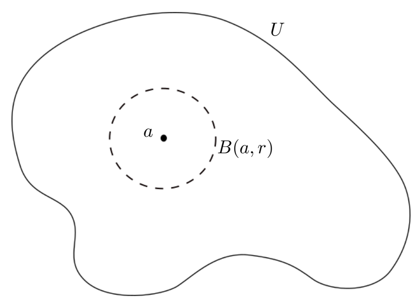


Figura 1.2: Vecindad de un punto.

Ejemplo 1.2.6. En un espacio métrico discreto todo conjunto de un solo punto es vecindad del mismo punto, ya que $B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$, para cada $x \in X$.

Las siguientes definiciones se refieren a puntos y subconjuntos de un espacio métrico.

Definición 1.2.7. Sean X un espacio métrico con métrica d, $A \subset X$ y $x \in X$. Se dice que:

(1) x es *punto interior de* A, si existe $r > 0$, tal que $B(x, r) \subset A$. Al conjunto

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in A : x \text{ es un punto interior de } A\},$$

se le llama *interior* del conjunto A.

(2) x es *punto clausura de* A, si para todo $r > 0$, se tiene que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto

$$\operatorname{cl}(A) = \{x \in X : x \text{ es un punto clausura de } A\},$$

se le llama *clausura* del conjunto A.

(3) x es *punto aislado* de A, si $x \in A$ y existe un subconjunto abierto U de X tal que $U \cap A = \{x\}$.

Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es un *conjunto abierto* en X, si para todo $x \in A$ se tiene que x es un punto interior de A. Se dice que A es un *conjunto cerrado* en X si $X \setminus A$ es abierto en X.

La Observación 1.2.8, se obtiene como consecuencia de la Definición 1.2.7.

Observación 1.2.8. Sean X un espacio métrico y $A, B \subset X$. Las condiciones siguientes son verdaderas:

(1) $\operatorname{int}(A) \subset A$.

(2) A es abierto en X si y sólo si $\operatorname{int}(A) = A$.

(3) $A \subset \operatorname{cl}(A)$.

(4) Si $A \subset B$, entonces $\operatorname{cl}(A) \subset \operatorname{cl}(B)$.

Proposición 1.2.9. Sean X un espacio métrico con métrica d y $x_0 \in X$. Se cumple que $X \setminus \{x_0\}$ es un subconjunto abierto en X.

Demostración. Para verificar que $X \setminus \{x_0\}$ es un subconjunto abierto en X, veamos que todos sus puntos son interiores. Para esto, sea $y \in X \setminus \{x_0\}$. Definamos $r = d(x_0, y)$. Veamos que $B(y, r) \subset X \setminus \{x_0\}$. Sea $z \in B(y, r)$. Luego, $d(z, y) < r$. De donde:

$$d(z, y) < d(x_0, y). \tag{1.1}$$

Por otro lado, por la desigualdad del triángulo, obtenemos que:

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, z) + d(z, y). \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2), se obtiene que:

$$0 < d(x_0, y) - d(z, y) \leq d(x_0, z).$$

Esto implica que $d(x_0, z) > 0$, es decir $x_0 \neq z$. Luego, $z \in X \setminus \{x_0\}$. Así, $B(y, r) \subset X \setminus \{x_0\}$. Por lo tanto, $X \setminus \{x_0\}$ es abierto en X. ■

A continuación se muestran resultados que son necesarios para abordar próximos capítulos, algunos resultados son conocidos por lo cual sólo indicamos dónde se puede encontrar una prueba para dicho resultado.

La prueba del Teorema 1.2.10, la puede consultar en [23, Teorema 3, Teorema 4, pág. 37].

Teorema 1.2.10. Sea X un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(1) Si $\{A_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$ y A_α es abierto en X, para cada $\alpha \in I$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto en X.

(2) Sea $k \in \mathbb{N}$. Si A_i es abierto en X, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ es abierto en X.

(3) Si $\{F_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$ y F_α es cerrado en X, para cada $\alpha \in I$, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ es cerrado en X.

(4) Sea $k \in \mathbb{N}$. Si F_i es cerrado en X, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{k} F_i$ es cerrado en X.

La prueba del Teorema 1.2.11, la puede consultar en [31, Proposición 7, pág. 74].

Teorema 1.2.11. Sean X un espacio métrico y $F \subset X$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(1) $\mathrm{cl}(F)$ es un subconjunto cerrado en X.

(2) F es cerrado en X si y sólo si $\mathrm{cl}(F) = F$.

La prueba del siguiente resultado la puede consultar en [23, Teorema 2, pág. 46].

Teorema 1.2.12. Sean X un espacio métrico con métrica d, un subconjunto A de X, con $\mathrm{cl}(A) \neq \emptyset$ y $x \in X$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

(1) $x \in \mathrm{cl}(A)$.

(2) Para toda vecindad U de x, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.

Proposición 1.2.13. Sean X un espacio métrico y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Si $U \cap V = \emptyset$, entonces $\mathrm{cl}(U) \cap V = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $U \cap V = \emptyset$. Luego, $U \subset X \setminus V$. De donde,

$$\mathrm{cl}(U) \subset \mathrm{cl}(X \setminus V). \tag{1.3}$$

Por otro lado, como V es abierto en X, se tiene que $X \setminus V$ es un subconjunto cerrado en X. Así, por el inciso (2) de Teorema 1.2.11, se obtiene que $\mathrm{cl}(X \setminus V) = X \setminus V$. En consecuencia, de (1.3), se tiene que $\mathrm{cl}(U) \subset X \setminus V$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}(U) \cap V = \emptyset$. ■

Proposición 1.2.14. Sea X un espacio métrico, con métrica d. Para cada $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$ y $y \notin \mathrm{cl}(U)$.

Demostración. Sean $x, y \in X$, tales que $x \neq y$. Pongamos $\delta = d(x, y)$ y consideremos $U = B\left(x, \frac{\delta}{3}\right)$. Notemos que $x \in U$. Veamos que $y \notin \mathrm{cl}(U)$. Observemos que $U \cap B(y, \frac{\delta}{3}) = \emptyset$. Luego, por el inciso (1) del Teorema 1.2.12, se concluye que $y \notin \mathrm{cl}(U)$. ■

Definición 1.2.15. Sean X un espacio métrico con métrica d y $A \subset X$. Decimos que A es *acotado* si existe algún $M > 0$, tal que $d(x, y) \leq M$, para cualesquiera $x, y \in A$.

Como consecuencia de la Definición 1.2.15, se tiene que todo subconjunto de un conjunto acotado, es también acotado.

Observación 1.2.16. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se cumple que A es acotado si y sólo si $A \subset B(a, r)$, para algún $a \in X$ y para algún $r > 0$.

Definición 1.2.17. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$, con A acotado. Se define el *diámetro de* A, denotado por diám(A), como:

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Definición 1.2.18. Sean X un espacio métrico, $A \subset X$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{C}$ es una *cubierta* de A, si $A \subset \bigcup\{B : B \in \mathcal{C}\}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una *cubierta abierta* de A, si $\mathcal{C}$ es una cubierta de A y todos los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos abiertos de X. Una *subcubierta* de una cubierta $\mathcal{C}$ de A, es una colección $\mathcal{S}$ de elementos de $\mathcal{C}$ que es también una cubierta de A.

A continuación se muestran algunos ejemplos de la Definición 1.2.18.

Ejemplo 1.2.19. Sean X un espacio métrico con métrica d y $x_0 \in X$. Se tiene que $X \subset \bigcup\{B(x_0, r) : r > 0\}$, por lo que $\mathcal{C} = \{B(x_0, r) : r > 0\}$ es una cubierta de X.

Ejemplo 1.2.20. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica definida por $d(x, y) = |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. La colección de intervalos abiertos $\{(n-1, n+1) : n \in Z\}$ es una cubierta abierta para $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.21. Sean X un espacio métrico con métrica d y $x_0 \in X$. Observe que, si $\{B(x_0, r_i) : i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ es un subconjunto finito de $\{B(x_0, r) : r > 0\}$, entonces $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} B(x_0, r_i) = B(x_0, m)$, donde $m = \text{máx}\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Por lo tanto, la cubierta $\{B(x_0, r) : r > 0\}$ de X tiene subcubiertas finitas si y sólo si X es acotado.

Ahora, introducimos la definición de espacio métrico compacto y damos unos ejemplos.

Definición 1.2.22. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es *compacto* si toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita para A.

Ejemplo 1.2.23. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Si A es finito, entonces A es compacto.

Ejemplo 1.2.24. El espacio métrico $\mathbb{R}$ dado en la Definición 1.2.20, no es compacto, ya que la cubierta abierta $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ no tiene subcubiertas finitas.

Una prueba del Teorema 1.2.25, la puede consultar en [23, Pág. 96].

Teorema 1.2.25. Sean X un espacio métrico compacto y $A \subset X$. Si A es cerrado, entonces A es compacto.

Otro concepto importante en espacios métricos es el de conexidad, el cual damos a continuación.

Definición 1.2.26. Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *disconexo* si existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V en X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Decimos que X es *conexo* si X no es disconexo.

La prueba de la Proposición 1.2.27, la puede verificar en [31, pág. 96].

Proposición 1.2.27. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se tiene que A es conexo si y sólo si A es un intervalo.

Proposición 1.2.28. Sea X un espacio métrico, conexo y con más de un elemento. Para todo subconjunto abierto no vacío U de X, se cumple que $|U| \geq 2$.

Demostración. Hagamos la prueba por contradicción. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Supongamos que $|U| = 1$, es decir, existe $x_0 \in X$, tal que $U = \{x_0\}$. Por la Proposición 1.2.9, se obtiene que $X \setminus U$ es un subconjunto abierto en X. Notemos que, $X = (X \setminus U) \cup U$. Además, $(X \setminus U) \cap U = \emptyset$. Luego, X es disconexo. Lo cual es una contradicción. Ésta surgió de suponer que $|U| = 1$. Por lo tanto, $|U| \geq 2$. ■

En seguida mostramos la definición de conjunto denso y denso en ninguna parte en un espacio y presentamos algunos ejemplos.

Definición 1.2.29. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es:

(1) *Denso* en X si la clausura de A es X, es decir, $\mathrm{cl}(A) = X$.

(2) *Denso en ninguna parte* en X si el interior de la clausura de A es vacío, es decir, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.30. Ejemplos de conjuntos densos y densos en ninguna parte.

(1) Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son subconjuntos densos en $\mathbb{R}$.

(2) El conjunto vacío es denso en ninguna parte en X.

(3) Cualquier conjunto finito, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son subconjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$.

(4) Cualquier recta es un subconjunto denso en ninguna parte en $\mathbb{R}^2$.

Observación 1.2.31. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se puede probar que A es denso en X si y sólo si $A \cap U \neq \emptyset$, para cada subconjunto abierto no vacío U de X.

1.3. Funciones continuas en espacios métricos

En esta sección damos la definición de función continua entre espacios métricos ya que trabajamos con este tipo de funciones. Así como también, se muestran propiedades y resultados de dichas funciones, mismos que nos ayudarán a mostrar otros resultados en capítulos posteriores.

Definición 1.3.1. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, $f : X \to Y$ una función y $p \in X$. Se dice que f es *continua* en p, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$, si $d(x, p) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Decimos que f es continua, si f es continua en p, para toda $p \in X$.

A continuación se muestran ejemplos de funciones continuas.

Ejemplo 1.3.2. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como $f(x)=x^3$, para cada $x\in\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida como $g(x)=2x+1$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Se puede verificar que las funciones f y g son continuas.

Ejemplo 1.3.3. La función identidad y las funciones constantes, dadas en el Ejemplo 1.1.2 y en el Ejemplo 1.1.3, respectivamente, son continuas.

Ejemplo 1.3.4. Se puede verificar que la función valor absoluto definida en el Ejemplo 1.1.5 es continua.

La prueba de la Proposición 1.3.5, la puede consultar en [31, pág. 92].

Proposición 1.3.5. Sean X y Y espacios métricos, $f:X\to Y$ una función continua y $A\subset X$. Si A es conexo, entonces $f(A)$ es conexo.

Definición 1.3.6. Sean X y Y espacios métricos y $f:X\to Y$ una función. Decimos que f es:

(1) *Homeomorfismo* si f es biyectiva, f es continua y f^{-1} es continua.

(2) *Abierta* si para cada subconjunto abierto U en X, se tiene que $f(U)$ es un subconjunto abierto en Y.

(3) *Cerrada* si para cada subconjunto cerrado F en X, se tiene que $f(F)$ es un subconjunto cerrado en Y.

Dados X y Y espacios métricos, se dice que X y Y son homeomorfos si existe $h:X\to Y$ tal que h es un homeomorfismo.

Proposición 1.3.7. Sean X,Y y Z espacios métricos, $f:X\to Y$ y $g:Y\to Z$ funciones. Las proposiciones siguientes son verdaderas:

(1) Si las funciones f y g son abiertas, entonces la función $g\circ f:X\to Z$ es abierta.

(2) Si las funciones f y g son cerradas, entonces la función $g\circ f:X\to Z$ es cerrada.

Demostración. (1) Supongamos que f y g son funciones abiertas. Veamos que $g\circ f: X\to Z$ es abierta. Para esto, sea U un subconjunto abierto en X. Como f es abierta, se tiene que $f(U)$ es un subconjunto abierto en Y. Luego, como g es abierta, se tiene que $g(f(U))$ es un subconjunto abierto en Z. Por lo tanto, $g\circ f$ es una función abierta.
(2) Supongamos que f y g son funciones cerradas. Veamos que $g\circ f:X\to Z$ es una función cerrada. Para esto, sea U un subconjunto cerrado en X. Como f es cerrada, se tiene que $f(U)$ es un subconjunto cerrado en Y. Luego, como g es cerrada, se tiene que $g(f(U))$ es un subconjunto cerrado en Z. Por lo tanto, $g\circ f$ es una función cerrada. ■

Lema 1.3.8. Sean (X,d), (Y,d'), (Z,d'') espacios métricos y $p\in X$. Si $f:X\to Y$ es continua en p y $g:Y\to Z$ es continua en $f(p)$, entonces $g\circ f:X\to Z$ es continua en p.

Demostración. Supongamos que f es continua en p y que g es continua en $f(p)$. Veamos que $g \circ f$ es continua en p. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $f(p)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $y \in Y$,

$$\text{si } \ d'\big(y, f(p)\big) < \delta_1, \ \text{ entonces } \ d''\big(g(y), g(f(p))\big) < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Por otro lado, sea $\varepsilon_1 = \delta_1$. Como f es continua en p, existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in X$,

$$\text{si } \ d(x, p) < \delta_2, \ \text{ entonces } \ d'\big(f(x), f(p)\big) < \varepsilon_1. \tag{1.5}$$

Definamos $\delta = \delta_2$, note que $\delta > 0$. Sea $x \in X$, tal que $d(x, p) < \delta$. De (1.5), se tiene que $d'\big(f(x), f(p)\big) < \delta_1$. Luego, por (1.4), se concluye que

$$d''\big(g(f(x)), g(f(p))\big) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $g \circ f$ es continua en p. ■

Corolario 1.3.9. Sean X, Y y Z espacios métricos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Si las funciones f y g son continuas, entonces la función $g \circ f : X \to Z$ es continua.

La demostración del Teorema 1.3.10 la puede consultar en [12, pág. 79].

Teorema 1.3.10. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) f es continua.

(2) Para cualquier abierto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

(3) Para cualquier cerrado $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

(4) Para cualquier $U \subset X$, $f(\mathrm{cl}(U)) \subset \mathrm{cl}(f(U))$.

(5) Para cualquier $B \subset Y$, $\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$.

La prueba de la Proposición 1.3.11 la puede consultar en [23, pág. 165].

Proposición 1.3.11. Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si X es compacto, entonces f es una función cerrada.

En el resultado que mostramos a continuación, Teorema 1.3.12, se enuncian algunas equivalencias del concepto de homeomorfismo. La prueba de este resultado la puede consultar en [12, pág. 89].

Teorema 1.3.12. Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva. Las propiedades siguientes son equivalentes:

(1) f es un homeomorfismo.

(2) f es continua y abierta.

(3) f es continua y cerrada.

(4) $f(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(f(A))$, para cada $A \subset X$.

Una sucesión en un conjunto X es una función del conjunto de los números naturales en X. Ahora, una sucesión en un espacio métrico se define como sigue:

Definición 1.3.13. Sea X un espacio métrico. Una *sucesión* en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. El valor que la sucesión tome en el número n, será indicado por a_n en lugar de $f(n)$, y se llama el n-ésimo término de la sucesión. Usamos la notación $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ para representar una sucesión en X.

Definición 1.3.14. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en X. Se dice que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge* a $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, x) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$ y se denota como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Al punto x se le conoce como el *límite* de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Además, decimos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada si el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

A continuación se dan ejemplos de sucesiones convergentes.

Ejemplo 1.3.15. Consideremos las siguientes sucesiones en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada como $d(x, y) = |x - y|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) Se puede verificar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, dada por $a_n = \dfrac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, converge a 0.

(2) Se puede verificar que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, dada por $b_n = r^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y algún $r \in \mathbb{R}$, converge si $|r| < 1$.

Definición 1.3.16. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen: $\underline{a}_n = \inf\{a_i : i \geq n\}$ y $\overline{a}_n = \sup\{a_i : i \geq n\}$. El *límite inferior* y el *límite superior* de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se denotan y definen, respectivamente, como:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n.$$

Observemos que los límites dados en la Definición 1.3.16, existen ya que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Luego, $\{\underline{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ son acotadas. Además, $\{\underline{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es crieciente y $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. Por lo tanto, ambas convergentes.

Ejemplo 1.3.17. Consideremos la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $a_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la sucesión es acotada. Luego,

$$\underline{a}_n = \inf\{a_i : i \geq n\} = \inf\{-1, 1\} = -1.$$

Por otro lado,

$$\overline{a}_n = \sup\{a_i : i \geq n\} = \sup\{-1, 1\} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = -1 \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = 1.$$

A continuación mostramos un resultado que relaciona el límite de una sucesión y la continuidad de una función, el cual nos ayudará a mostrar resultados posteriores.

La prueba de la Proposición 1.3.18, la puede consultar en [31, pág. 126].

Proposición 1.3.18. Sean X y Y espacios métricos. Se tiene que $f : X \to Y$ es una función continua si y sólo si para cualquier sucesión convergente $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X, se tiene que la sucesión $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en Y. Más aún, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.

Para terminar esta sección y el capítulo daremos la definición de continuo, que son los espacios con los cuales trabajamos.

Definición 1.3.19. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto.

Ejemplo 1.3.20. A continuación se muestran algunos ejemplos de continuos:

(1) El intervalo cerrado $[0, 1]$ es un continuo. Un continuo homeomorfo a $[0, 1]$ se llama arco. Vea Figura 1.

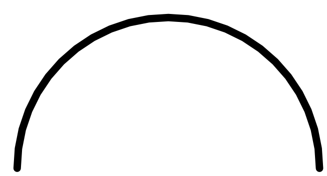


Figura 1.3: Arco.

(2) Una n-celda, se define como el producto cartesiano del intervalo $[0, 1]$, n veces y se denota por $[0, 1]^n$. La n-celda es un continuo. En la Figura 2, se muestra la 2-celda.

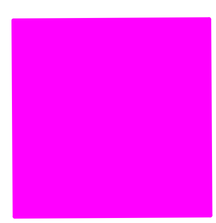


Figura 1.4: 2-celda.

(3) Los n-odos simples, que son la unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto, llamado el vértice del n-odo, dicho vértice tiene que ser el extremo de cada uno de los n arcos y los otros extremos de los arcos se llaman extremos del n-odo. Se puede verificar que los n-odos son continuos. Como caso particular en la Figura 3, se muestra el triodo simple.

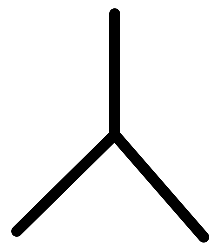
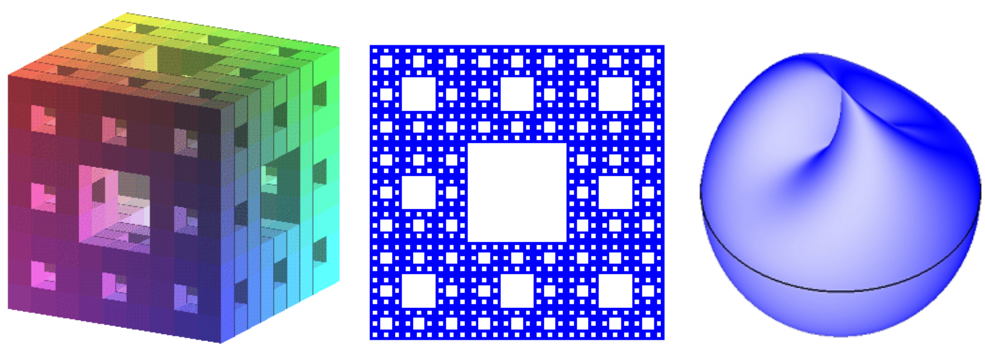


Figura 1.5: Triodo simple.

(4) Existen continuos más complicados de construir como lo son la esponja de Menger, la carpeta de Sierpiński y el plano proyectivo real, los cuales se observan en la Figura 1.6 (a), (b) y (c), respectivamente. Para consultar la construcción de dichos continuos puede revisar [22, pág. 8, 9], [35, pág. 264] y [35, pág. 265], respectivamente.



(a) Esponja de Menguer (b) Carpeta de Sierpiński (c) Plano proyectivo real

Figura 1.6: Ejemplos de Continuos.

2
Introducción a los sistemas dinámicos discretos

En este capítulo se exponen los preliminares necesarios para abordar el estudio de los sistemas dinámicos discretos, con los cuales trabajamos.

2.1. Iteración de funciones

Sean X un continuo, $f : X \to X$ una función continua y $k \in \mathbb{Z}_+$. La *k-ésima iteración* de f, se define como la composición de f consigo misma k veces y se denota por f^k, esto es:

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ veces}},$$

donde f^0 es la función identidad en X.

El siguiente concepto es la definición abstracta de sistema dinámico.

Definición 2.1.1. Sean X un espacio topológico y $(G, *)$ un semi-grupo topológico [1] con elemento neutro. Un *sistema dinámico* es una función continua $\phi : G \times X \to X$ que satisface lo siguiente:

(1) $\phi(e, x) = x$, para cada $x \in X$, donde e es el elemento neutro de G.

(2) $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s * t, x)$, para cada $s, t \in G$ y para cada $x \in X$.

Generalmente, un sistema dinámico se denota como (G, X, ϕ), donde al espacio X se le llama *espacio fase, de configuraciones* o *de estados*; al semi-grupo G se le llama *conjunto de parámetros* y a la función ϕ se le conoce como *regla de correspondencia* o *ley determinista*. Dependiendo del semi-grupo en el cual se trabaje, los sistemas dinámicos se clasifican en dos clases. Si $G = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ al sistema dinámico se le conoce como sistema dinámico continuo, y si $G = \mathbb{Z}_+$ al sistema dinámico se le conoce como sistema dinámico discreto. En este trabajo sólo nos enfocamos en los sistemas dinámicos discretos.

Proposición 2.1.2. Sean X un continuo, $f : X \to X$ una función continua y $\phi : \mathbb{Z}_+ \times X \to X$ la función definida por $\phi(n, x) = f^n(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ y para todo $x \in X$. Se tiene que $(\mathbb{Z}_+, X, \phi)$ es un sistema dinámico discreto.

[1] Un semi-grupo topológico es un semi-grupo con una topología.

Demostración. Primero veamos que ϕ es continua. Por el Teorema 1.3.10, basta verificar que para todo subconjunto abierto U en X, se cumple que $\phi^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en $\mathbb{Z}_+ \times X$. Sea U un subconjunto abierto en X. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(U) &= \{(n,x) : \phi(n,x) \in U\} \\
&= \{(n,x) : f^n(x) \in U\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \{(n,x) : f^n(x) \in U\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\{n\} \times f^{-n}(U)\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\{n\}$ es un subconjunto abierto en $\mathbb{Z}_+$ y, por la continuidad de f, del inciso (2) del Teorema 2.1.9 se deduce que $f^{-n}(U)$ es abierto en X. Luego, $\{n\} \times f^{-n}(U)$ es un abierto en $\mathbb{Z}_+ \times X$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Así, $\phi^{-1}(U)$ es un abierto en $\mathbb{Z}_+ \times X$. Por lo tanto, ϕ es continua.

Veamos ahora que ϕ cumple los incisos (1) y (2) de la Defininción 2.1.1. Notemos que:

$$\phi(0,x) = f^0(x) = x.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\phi(n,\phi(m,x)) &= f^n(\phi(m,x)) \\
&= f^n(f^m(x)) \\
&= f^{n+m}(x) \\
&= \phi(n+m,x).
\end{aligned}$$

Con todo, se obtiene que $(\mathbb{Z}_+, X, \phi)$ es un sistema dinámico discreto. ■

Así, el sistema dinámico $(\mathbb{Z}_+, X, \phi)$, definido en la Proposición 2.1.2, está determinado completamente por el espacio X y la función continua f. En esta tesis, vamos a considerar sistemas dinámicos construidos de esta forma. A este sistema dinámico discreto lo denotamos como (X, f) y para referirnos a él decimos solamente sistema dinámico.

Proposición 2.1.3. Sean (X, f) un sistema dinámico, $n, m \in \mathbb{N}$ y U y V subconjuntos de X. Se cumple que:

(1) $f^{-(n+m)}(U) = f^{-n}(f^{-m}(U))$.

(2) Si $U \subset f^{-n}(V)$, entonces $f^n(U) \subset V$.

Demostración. (1) Probemos la igualdad por contenciones. Verifiquemos primero que $f^{-(n+m)}(U) \subset f^{-n}(f^{-m}(U))$. Para eso, sea $x \in f^{-(n+m)}(U)$. Luego, $f^{n+m}(x) \in U$. De donde, $f^{m+n}(x) \in U$. Dado que $f^{m+n}(x) = f^m(f^n(x))$, obtenemos que $f^m(f^n(x)) \in U$. Así, $f^n(x) \in f^{-m}(U)$. Luego, $x \in f^{-n}(f^{-m}(U))$. Por lo tanto, $f^{-(n+m)}(U) \subset f^{-n}(f^{-m}(U))$.
Ahora veamos que $f^{-n}(f^{-m}(U)) \subset f^{-(n+m)}(U)$. Sea $x \in f^{-n}(f^{-m}(U))$. Luego, $f^n(x) \in f^{-m}(U)$. Esto implica que $f^m(f^n(x)) \in U$. Así, $f^{m+n}(x) \in U$. De donde, $x \in f^{-(m+n)}(U)$.
(2) Supongamos que $U \subset f^{-n}(V)$, veamos que $f^n(U) \subset V$. Para esto, sea $x \in f^n(U)$. Luego, existe $y \in U$ tal que $f^n(y) = x$. Por otro lado, como $y \in U$, por el supuesto, $y \in f^{-n}(V)$. Así, $x = f^n(y) \in V$. De donde, $x \in V$. Por lo tanto, $f^n(U) \subset V$. ■

Observación 2.1.4. Sean (X, f) un sistema dinámico, $A \subset X$ y $n \in \mathbb{N}$. Se satisface lo siguiente:

(1) $f^n(f^{-n}(A)) \subset A$.

(2) $A \subset f^{-n}(f^n(A))$.

La Observación 2.1.5, se obtiene de la Proposición 1.1.12.

Observación 2.1.5. Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que:

(1) Si f es inyectiva, entonces f^n es inyectiva.

(2) Si f es sobreyectiva, entonces f^n es sobreyectiva.

Definición 2.1.6. Sean (X, f) un sistema dinámico, $A \subset X$, $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$. La preimagen de A bajo f^k se denota por $f^{-k}(A)$ y la preimagen de $\{x\}$ bajo f se denota por $f^{-1}(x)$.

La Observación 2.1.7, se obtiene de la Observación 1.1.10 y de la Observación 2.1.5.

Observación 2.1.7. Sean (X, f) un sistema dinámico, $A \subset X$ y $n \in \mathbb{N}$. Se satisface que:

(1) Si f es sobreyectiva, entonces $f^n(f^{-n}(A)) = A$.

(2) Si f es inyectiva, entonces $f^{-n}(f^n(A)) = A$.

La Observación 2.1.8, se obtiene de la Proposición 1.3.7 y del Corolario 1.3.9.

Observación 2.1.8. Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que:

(1) Si f es continua, entonces f^n es continua.

(2) Si f es cerrada, entonces f^n es cerrada.

(3) Si f es abierta, entonces f^n es abierta.

El Teorema 2.1.9, se obtiene del Teorema 1.3.10.

Teorema 2.1.9. Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) f^n es continua.

(2) Para cualquier abierto $U \subset X$, $f^{-n}(U)$ es abierto en X.

(3) Para cualquier cerrado $F \subset Y$, $f^{-n}(F)$ es cerrado en X.

(4) Para cualquier $A \subset X$, $f^n(\mathrm{cl}(A)) \subset \mathrm{cl}(f^n(A))$.

(5) Para cualquier $A \subset X$, $\mathrm{cl}(f^{-n}(A)) \subset f^{-n}(\mathrm{cl}(A))$.

2.2. Órbitas

El objeto principal de estudio de los sistemas dinámicos son las órbitas de los puntos, ya que son éstas las que nos dan la información referente a las iteraciones de una función a través del tiempo.
En esta sección, damos la definición de órbita de un punto, además de otras definiciones y resultados que nos ayudan a analizar algunas propiedades de dichas órbitas.

Definición 2.2.1. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se define la *órbita* de x bajo f, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, como el conjunto:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}.$$

Una vez definido el concepto de órbita, lo primero que podríamos preguntarnos es cuándo este conjunto es finito o infinito.
A continuación damos algunos de los conceptos más importantes en sistemas dinámicos. Mismos que nos ayudarán a determinar cuándo la órbita de un punto es finita o no, entre otras propiedades y características de la órbita.

Definición 2.2.2. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un:

(1) *Punto fijo* si $f(x) = x$.

(2) *Punto periódico* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, al $\min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$ se le llama *periodo* de x.

(3) *Punto transitivo* si $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X.

(4) *Punto casi-periódico* si para cada vecindad U_x de x, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

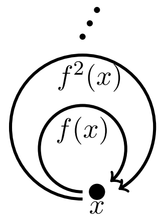
$$\{f^l(x), f^{l+1}(x), \ldots, f^{l+k}(x)\} \cap U_x \neq \emptyset,$$

para todo $l \in \mathbb{N}$.

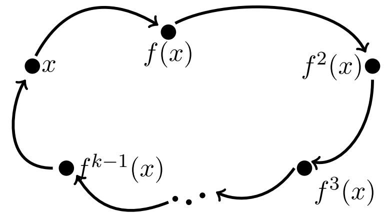
(5) *Punto pre-periódico* si existen $n, k \in \mathbb{N}$, tales que $f^k(f^n(x)) = f^n(x)$.

Denotamos como $\mathrm{Per}(f), \mathrm{Fix}(f)$ y $\mathrm{Tran}(X, f)$, al conjunto de los puntos periódicos de f, al conjunto de puntos fijos de f y al conjunto de los puntos transitivos de f, respectivamente.

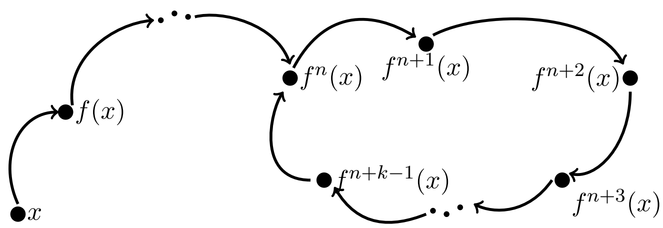
En la Figura 2.1 se muestra geométricamente, el comportamiento de un punto fijo, un punto periódico y un punto pre-periódico.



(a) Punto fijo



(b) Punto periódico



(c) Punto pre-periódico

Figura 2.1: Comportamiento geométrico.

Observación 2.2.3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua. Para obtener geométricamente los puntos fijos de f, se grafica la función f y la función identidad en A. Los puntos de intersección de ambas gráficas son los puntos fijos de f.

A continuación se muestra un ejemplo de como obtener puntos fijos geométricamente.

Ejemplo 2.2.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = x^2$, para cada $x \in \mathbb{R}$. En la Figura 2.2, se observa que los puntos fijos de f son 0 y 1.

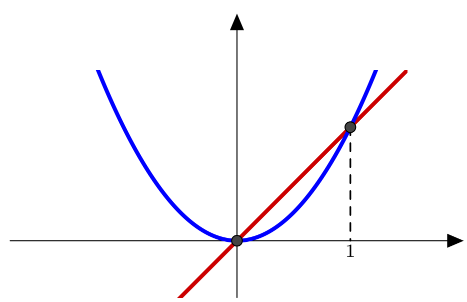


Figura 2.2: Función $f(x) = x^2$.

La siguiente observación se sigue inmediatamente de la Definición 2.2.2.

Observación 2.2.5. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$.

(1) Si x es un punto fijo de f, entonces la órbita de x consta de un único elemento, es decir $\mathcal{O}(x, f) = \{x\}$.

(2) Si x es un punto periódico de periodo k, entonces la órbita de x consta exactamente de k elementos. Además, $\mathcal{O}(x, f) = \{x, \ldots, f^{k-1}(x)\}$.

Ejemplo 2.2.6. Consideremos el sistema dinámico $([-1,1], f)$, donde $f : [-1,1] \to [-1,1]$ está dada por $f(x) = x^3$, para cada $x \in [-1,1]$.
En la Figura 2.3, por la Observación 2.2.3, podemos notar que el conjunto $\mathrm{Fix}(f) = \{-1, 0, 1\}$. Por el inciso (1) de la Definición 2.2.2, los puntos fijos de f, son los $x \in [-1,1]$ tales que $f(x) = x$. En este caso, $x^3 = x$ esto implica que $x(x^2 - 1) = 0$. Así, los puntos fijos de f son: $x_1 = 0, x_2 = 1$ y $x_3 = -1$.

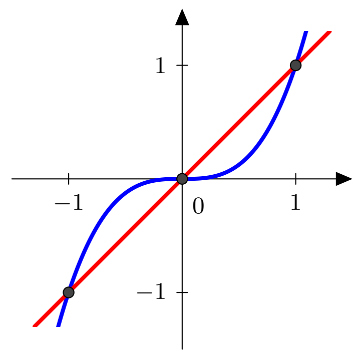


Figura 2.3: Función $f(x) = x^3$.

Al estudiar el comportamiento de las órbitas de los puntos, la primera relación que se puede notar de la Definición 2.2.1, es la siguiente:

Proposición 2.2.7. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x, y \in X$. Si $y \in \mathcal{O}(x, f)$, entonces $\mathcal{O}(y, f) \subset \mathcal{O}(x, f)$.

Demostración. Sea $z \in \mathcal{O}(y, f)$. Veamos que $z \in \mathcal{O}(x, f)$. Como $z \in \mathcal{O}(y, f)$, existe $s \in \mathbb{Z}_+$, tal que $f^s(y) = z$. Por otro lado, como $y \in \mathcal{O}(x, f)$, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^k(x) = y$. Luego,

$$z = f^s(y) = f^s(f^k(x)) = f^{s+k}(x).$$

Notemos que $s + k \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, $z \in \mathcal{O}(x, f)$. ■

El resultado que se muestra a continuación, nos dice cuándo las órbitas de dos puntos son iguales.

Proposición 2.2.8. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x, y \in X$. Si x es un punto periódico y $y \in \mathcal{O}(x, f)$, entonces $\mathcal{O}(y, f) = \mathcal{O}(x, f)$.

Demostración. Supongamos que x es un punto periódico de periodo k. Así, $f^k(x) = x$. Sea $y \in \mathcal{O}(x, f)$. Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que $f^n(x) = y$ y $n < k$. Si $n = 0$, entonces $x = y$ y se tiene el resultado. Supongamos que $n > 0$. Probemos que $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}(y, f)$. Hagamos la prueba por contenciones. Primero veamos que $\mathcal{O}(x, f) \subset \mathcal{O}(y, f)$. Para esto, sea $z \in \mathcal{O}(x, f)$ y veamos que $z \in \mathcal{O}(y, f)$. Como $z \in \mathcal{O}(x, f)$, existe $s \in \mathbb{Z}_+$, tal que $f^s(x) = z$ y $s < k$. Notemos que:

$$z = f^s(x) = f^s(f^k(x)) = f^{s+k}(x).$$

De donde,

$$z = f^{s+k}(x) = f^{s+k-n+n}(x) = f^{s+k-n}(f^n(x)).$$

Por otro lado, notemos que, $l = k - n > 0$, así $s + l \in \mathbb{Z}_+$ y $z = f^{s+l}(y)$. Por lo tanto, $z \in \mathcal{O}(y, f)$. La otra contención, se obtiene de la Proposición 2.2.7, es decir, $\mathcal{O}(y, f) \subset \mathcal{O}(x, f)$. Por ambas contenciones se obtiene la igualdad. ■

De la Definición 2.2.1, se puede notar que con los elementos de la órbita de un punto, podemos obtener una sucesión, la cual denotamos como $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Podríamos preguntarnos si esta sucesión converge o no, en caso de que sí, hacia dónde. Si no hay confusión, decimos que la órbita de un punto converge si la sucesión formada con los elementos de dicha órbita converge.

Proposición 2.2.9. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si la órbita de x converge a un punto $y \in X$, entonces y es un punto fijo de f.

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = y$. Notemos que:

$$f(y) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right).$$

Como f es continua, por la Proposición 1.3.18, se tiene que:

$$f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x).$$

Así, $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = y$. Luego, $f(y) = y$. Por lo tanto, y es un punto fijo de f. ■

Definición 2.2.10. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$ un punto fijo de f. Se dice que x es:

(1) *Atractor* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in X$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(y) = x$.

(2) *Repulsor* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in X$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, f^k(y)) > \varepsilon$.

A continuación se muestra un resultado que nos ayudará a determinar cuándo un punto fijo, en un sistema dinámico, es atractor o repulsor.

Teorema 2.2.11. Sean (I, f) un sistema dinámico, donde I es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y $x \in I$. Si f es derivable en I y x_0 es un punto fijo de f, entonces se cumple lo siguiente:

(1) Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.

(2) Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.

Demostración. (1) Supongamos que $|f'(x_0)| < 1$. Veamos que x_0 es un punto fijo atractor, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in I$ tal que $|y - x_0| < \varepsilon$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x_0$. Notemos que $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Luego, $\left|\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < 1$. Como $f(x_0) = x_0$, se obtiene que $\left|\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$. Además, como la función valor absoluto es continua, se sigue que $\lim_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < 1$. Sea c un número real tal que $\lim_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < c < 1$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $\left|\dfrac{f(x) - x_0}{x - x_0}\right| < c$. Equivalentemente,

$$\text{Si } |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - x_0| < c|x - x_0|. \tag{2.1}$$

Hagamos $\varepsilon = \delta$. Sea $y \in I$ tal que $|y - x_0| < \varepsilon$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x_0$. Por (2.1), se obtiene que:

$$|f(y) - x_0| < c|y - x_0|.$$

Por otro lado, como $c < 1$ y $|y - x_0| < \delta$ se tiene que:

$$|f(y) - x_0| < c|y - x_0| < |y - x_0| < \delta.$$

De donde $|f(y) - x_0| < \delta$. Así, por (2.1), se obtiene que:

$$|f^2(y) - x_0| \le c|f(y) - x_0| < c^2|y - x_0|.$$

Continuando con este proceso obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^n(y) - x_0| \le c^n|y - x_0|.$$

Como $0 < c < 1$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$. Luego, $\lim_{n\to\infty} |f^n(y) - x_0| = 0$. Así, $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x_0$. Por lo tanto, x_0 es un punto fijo atractor.
(2) Supongamos que $|f'(x_0)| > 1$. Veamos que x_0 es un punto fijo repulsor, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in X$ tal que si $|y - x_0| < \varepsilon$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f^k(y) - x_0| > \varepsilon$. Haciendo un análisis de forma similar al caso (1). Tomamos un número real c tal que $1 < c < |f'(x_0)|$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces, $|f(x) - x_0| > c|x - x_0|$. Hagamos $\varepsilon = \delta$. Sea $y \in X$. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f^k(y) - x_0| > \varepsilon$. Si suponemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $|f^i(y) - x_0| < \varepsilon$, entonces $c^n|y - x_0| < |f^n(y) - x_0|$. Como $c > 1$. Se tiene que $\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$. Así, este supuesto no siempre puede suceder, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f^k(y) - x_0| > \varepsilon$. Por lo tanto, x_0 es un punto fijo repulsor. ■

Definición 2.2.12. Sean X un conjunto, $f : X \to X$ una función y $A \subset X$. Se dice que A es:

(1) + *Invariante* bajo f si $f(A) \subset A$.

(2) $-$ *Invariante* bajo f si $f^{-1}(A) \subset A$.

(3) *Invariante* bajo f si $f(A) = A$.

Proposición 2.2.13. Sean (X, f) un sistema dinámico. Para todo $x \in X$, se cumple que $\mathcal{O}(x, f)$ es $+$ invariante bajo f.

Demostración. Sea $x \in X$. Demostraremos que $\mathcal{O}(x, f)$ es $+$ invariante bajo f. Para esto, sea $y \in \mathcal{O}(x, f)$, veamos que $f(y) \in \mathcal{O}(x, f)$. Como $y \in \mathcal{O}(x, f)$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^n(x) = y$. Luego,

$$f^{n+1}(x) = f\left(f^n(x)\right) = f(y).$$

Notemos que $f^{n+1}(x) \in \mathcal{O}(x, f)$. Así, $f(y) \in \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x, f)$ es $+$ invariante bajo f. ■

Proposición 2.2.14. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si x es un punto periódico, entonces $\mathcal{O}(x, f)$ es invariante bajo f.

Demostración. Supongamos que x es un punto periódico de periodo k, donde $k \in \mathbb{N}$. Luego,

$$f^k(x) = x. \tag{2.2}$$

Para probar que $\mathcal{O}(x, f)$ es invariante bajo f, tenemos que verificar que $f(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(x, f)$. Por la Proposición 2.2.13, se tiene que $\mathcal{O}(x, f)$ es $+$ invariante, es decir,

$$f(\mathcal{O}(x, f)) \subset \mathcal{O}(x, f). \tag{2.3}$$

Por lo cual, resta ver que $\mathcal{O}(x, f) \subset f(\mathcal{O}(x, f))$. Para esto, sea $y \in \mathcal{O}(x, f)$. Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^n(x) = y$ y $n < k$. Notemos que, por (2.2) y dado que $k \geq 1$, se obtiene que:

$$y = f^n(x) = f^n(f^k(x)) = f^{n+k}(x) = f(f^{n+k-1}(x)). \tag{2.4}$$

Observe que $l = n + k - 1 \in \mathbb{Z}_+$. Así, de (2.4), se obtiene que $y = f(f^l(x))$. Luego, $f^l(x) \in \mathcal{O}(x, f)$ y es tal que $f(f^l(x)) = y$. Así, $y \in f(\mathcal{O}(x, f))$. En consecuencia,

$$\mathcal{O}(x, f) \subset f(\mathcal{O}(x, f)) \tag{2.5}$$

De (2.3) y (2.5), se obtiene que $f(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto, se concluye que $\mathcal{O}(x, f)$ es invariante bajo f. ■

Proposición 2.2.15. Sea (X, f) un sistema dinámico. El conjunto $\operatorname{Per}(f)$ es $+$ invariante bajo f.

Demostración. Veamos que $f(\operatorname{Per}(f)) \subset \operatorname{Per}(f)$. Sea $x \in \operatorname{Per}(f)$. Veamos que $f(x) \in \operatorname{Per}(f)$. Puesto que $x \in \operatorname{Per}(f)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = f^k(x)$. Notemos que:

$$f(x) = f(f^k(x)) = f^k(f(x)).$$

Luego $f(x) \in \operatorname{Per}(f)$. Así, $f(\operatorname{Per}(f)) \subset \operatorname{Per}(f)$. Por lo tanto, $\operatorname{Per}(f)$ es $+$ invariante bajo f. ■

El siguiente resultado nos dice que si A es un conjunto + invariante bajo f, entonces A es + invariante bajo la función iterada f^n.

Proposición 2.2.16. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subset X$. Si A es + invariante bajo f, entonces $f^n(A) \subset A$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Hagamos la prueba por inducción matemática sobre n. El caso base $n = 1$, se cumple por el hecho de que A es + invariante bajo f, es decir, $f(A) \subset A$. Supongamos ahora, que se cumple para n, esto es, $f^n(A) \subset A$. Verifiquemos que se cumple para $n+1$. Puesto que $f^n(A) \subset A$, se tiene que $f^{n+1}(A) \subset f(A)$. Como A es + invariante bajo f, se concluye que $f^{n+1}(A) \subset f(A) \subset A$. Por lo tanto, $f^{n+1}(A) \subset A$. ■

Proposición 2.2.17. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subset X$. Si A es + invariante bajo f, entonces $\mathrm{cl}(A)$ es + invariante bajo f.

Demostración. Supongamos que $f(A) \subset A$. Veamos que $f(\mathrm{cl}(A)) \subset \mathrm{cl}(A)$. Por el inciso (4) del Teorema 1.3.10, se tiene que:

$$f(\mathrm{cl}(A)) \subset \mathrm{cl}(f(A)). \tag{2.6}$$

Además, por hipótesis se obtiene que:

$$\mathrm{cl}(f(A)) \subset \mathrm{cl}(A). \tag{2.7}$$

Así, por (2.6) y (2.7) se concluye que $f(\mathrm{cl}(A)) \subset \mathrm{cl}(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}(A)$ es + invariante bajo f. ■

El conjunto omega-límite de un punto es una noción básica en teoría de sistemas dinámicos y nos indica hacia dónde se dirige la órbita de dicho punto. A continuación damos este concepto.

Definición 2.2.18. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que $y \in X$ es un punto *ω-límite de x bajo f* si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cualquier vecindad $U \subset X$ de y, existe un natural $n \geq k$ tal que $f^n(x) \in U$. Al conjunto de todos los puntos ω-límite de x bajo f, se denota por $\omega(x, f)$ y se le llama *conjunto ω-límite de x*.

A continuación vemos algunas propiedades que cumple el conjunto ω-límite de un punto.

Proposición 2.2.19. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $x \in X$, se tiene que $\omega(x, f)$ es cerrado en X.

Demostración. Sea $x \in X$. Por el inciso (2) del Teorema 1.2.11, basta verificar que $\mathrm{cl}(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$ para tener probado que $\omega(x, f)$ es cerrado en X. Por el inciso (3) de la Observación 1.2.8, se sabe que $\omega(x, f) \subset \mathrm{cl}(\omega(x, f))$. Así, resta probar que $\mathrm{cl}(\omega(x, f)) \subset \omega(x, f)$. Sea $y \in \mathrm{cl}(\omega(x, f))$. Veamos que $y \in \omega(x, f)$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y V_y una vecindad de y. Puesto que $y \in \mathrm{cl}(\omega(x, f))$, por el Teorema 1.2.12, se obtiene que $V_y \cap \omega(x, f) \neq \emptyset$. Luego, existe $z \in X$ tal que:

$$z \in V_y \text{ y } z \in \omega(x, f).$$

Así, se tiene que V_y es una vecindad de z y además, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq k$ y $f^n(x) \in V_z$, para cualquier vecindad V_z de z, en particular para V_y, es decir, $f^n(x) \in V_y$, en consecuencia $y \in \omega(x, f)$. Luego $\mathrm{cl}(\omega(x, f)) \subset \omega(x, f)$. Por ambas contenciones $\omega(x, f)$ es cerrado en X. ■

Proposición 2.2.20. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $x \in X$, se tiene que $\omega(x, f)$ es + invariante bajo f.

Demostración. Sea $x \in X$. Probemos $f(\omega(x, f)) \subset \omega(x, f)$. Tomemos $y \in \omega(x, f)$ y veamos que $f(y) \in \omega(x, f)$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $V_{f(y)}$ una vecindad de $f(y)$, luego $f^{-1}(V_{f(y)})$ es vecindad de y. Puesto que $y \in \omega(x, f)$, existe $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq k$, tal que $f^n(x) \in f^{-1}(V_{f(y)})$, esto implica que $f^{n+1}(x) \in V_{f(y)}$. Así, $f(y) \in \omega(x, f)$. Por lo tanto, $f(\omega(x, f)) \subset \omega(x, f)$. ■

Lema 2.2.21. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si x es un punto periódico de f, entonces $\omega(x, f) = \mathcal{O}(x, f)$.

Demostración. Supongamos que x es un punto periódico de f de periodo k, luego, $f^k(x) = x$. Verifiquemos que $\omega(x, f) = \mathcal{O}(x, f)$. Veamos primero que $\omega(x, f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$. Sea $y \in \omega(x, f)$ y supongamos que $y \notin \mathcal{O}(x, f)$. Esto es, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, se tiene que $f^n(x) \neq y$. Luego, $d(y, f^n(x)) > 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Sea $r = \min\{d(y, f^n(x)) : n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}$. Notemos que $r > 0$. Sea $U = B(y, r)$. Observemos que U es una vecindad de y y puesto que $f^n(x) \neq y$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces $f^n(x) \notin U$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Por otro lado, como $y \in \omega(x, f)$, para k y U, existe $s \in \mathbb{N}$, con $s \geq k$, tal que $f^s(x) \in U$, lo cual es una contradicción, que surge de suponer que $y \notin \mathcal{O}(x, f)$. Así, $y \in \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto, $\omega(x, f) \subseteq \mathcal{O}(x, f)$.
Probemos ahora que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq \omega(x, f)$. Sea $y \in \mathcal{O}(x, f)$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) = y$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y U_y una vecindad de y. Notemos que $f^{nk}(x) = x$. Además,

$$y = f^m(x) = f^m(f^{nk}(x)) = f^{m+nk}(x).$$

Así, $f^{m+nk}(x) \in U_y$, además $m+nk \geq n$. Por lo tanto, $y \in \omega(x, f)$, luego $\mathcal{O}(x, f) \subseteq \omega(x, f)$. Por ambas contenciones se obtiene la igualdad. ■

Proposición 2.2.22. Sean (X, f) un sistema dinámico, U y V subconjuntos no vacíos de X y $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$ si y sólo si $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

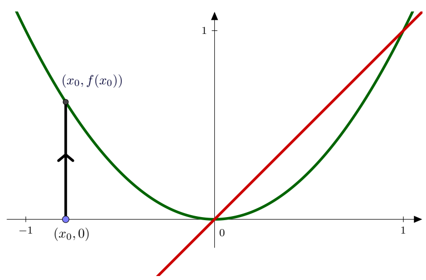
Demostración. Supongamos que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Luego, existe $x \in X$ tal que $x \in U$ y $x \in f^{-n}(V)$. Así, $f^n(x) \in f^n(U)$ y por el inciso (1) de la Observación 2.1.4, se tiene que $f^n(x) \in V$. Por lo tanto, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
Ahora, supongamos que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Luego, existe $y \in X$ tal que $y \in f^n(U)$ y $y \in V$. Es decir, existe $x \in U$ tal que $f^n(x) = y$. Luego, $f^n(x) \in V$, que por el inciso (2) de la Observación 2.1.4, se tiene que $x \in f^{-n}(V)$. Por lo tanto, $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. ■

2.3. Análisis gráfico de órbitas sobre la recta real

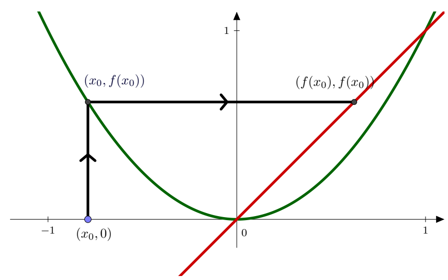
En esta sección introducimos un procedimiento para analizar gráficamente el comportamiento de la órbita de un punto bajo una función de valores reales.

Sean I un intervalo cerrado y $f : I \to I$ una función continua. Supongamos que tenemos la gráfica de f y queremos conocer el comportamiento de la órbita de un punto $x_0 \in I$. El procedimiento es de la siguiente manera: Primero dibujamos la gráfica de la función, posteriormente la gráfica de la función identidad sobre I. Luego, nos ubicamos en el punto $(x_0, 0)$, de este punto trazamos una recta que une este punto al punto $(x_0, f(x_0))$, después trazamos una recta horizontal, iniciando en este punto hasta tocar la recta identidad, donde estaremos en el punto $(f(x_0), f(x_0))$, luego de este punto trazamos una recta vertical para unir este último punto al punto $(f(x_0), f^2(x_0))$. Posteriormente, trazamos una recta horizontal hasta intersectar la recta identidad, para unir el punto $(f(x_0), f^2(x_0))$ al punto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$ y así, sucesivamente.

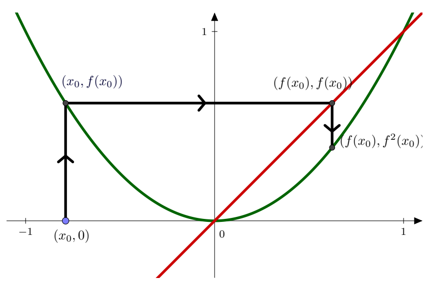
Continuando con este procedimiento, obtenemos el comportamiento de la órbita del punto x_0. En la Figura 2.4, se muestran gráficamente los primeros cuatro pasos.



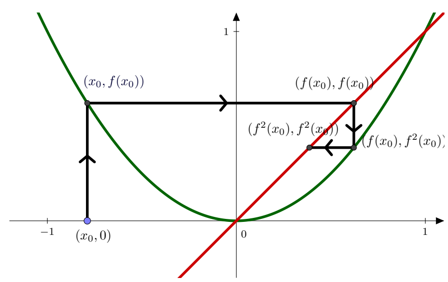
(a) Paso 1



(b) Paso 2



(c) Paso 3

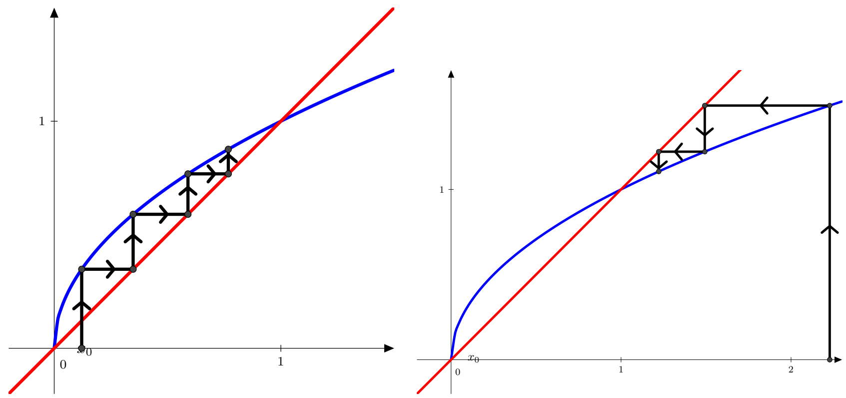


(d) Paso 4

Figura 2.4: Análisis gráfico de la órbita de un punto.

A continuación se muestra el análisis gráfico del comportamiento de las órbitas de algunas funciones, siguiendo el procedimiento indicado anteriormente. Además, se visualiza si ciertos puntos fijos son atractores o repulsores.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos la función $f : [0, 3] \to [0, 3]$, definida como $f(x) = \sqrt{x}$. Por la Observación 2.2.3, se puede notar que la función f tiene 2 puntos fijos los cuales son 0 y 1 (vea el inciso (a) de la Figura 2.5). Además, para cualquier punto positivo x_0 menor que 1, la trayectoria que sigue la órbita forma una escalera que se dirige al punto fijo $x = 1$. Por otro lado, en el inciso (b) de la Figura 2.5, se muestra que para los puntos mayores que 1, el comportamiento de la órbita forma una escalera que se dirige al punto fijo $x = 1$. Por lo tanto, se puede concluir geométricamente que el punto fijo $x = 1$ es un punto fijo atractor.



(a) Órbita de $0 < x_0 < 1$. (b) Órbita de $x_0 > 1$.

Figura 2.5: $f(x) = \sqrt{x}$.

Algunas veces el análisis gráfico nos permite describir el comportamiento de todas las órbitas de un sistema dinámico.

Ejemplo 2.3.2. Consideremos la función $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$, definida como $f(x) = x^3$. Por la Observación 2.2.3, se puede notar que la función tiene tres puntos fijos, los cuales son $-1, 0$ y 1 (vea la Figura 2.6). Además, muestra el comportamiento de la órbita de un punto que esté entre -1 y 1, y éstas tienden al punto fijo 0. Por lo tanto podemos observar geométricamente que el punto fijo 0 es un punto fijo atractor.

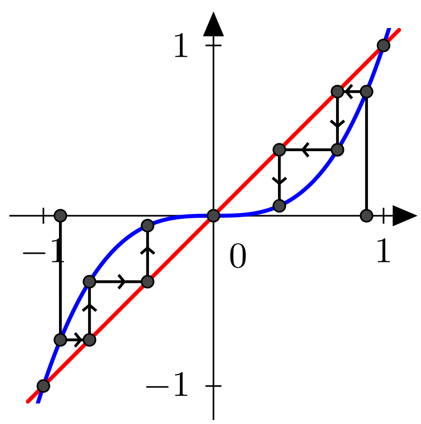


Figura 2.6: $f(x) = x^3$.

2.4. Tipos de sistemas dinámicos discretos

Algunos de los sistemas dinámicos más conocidos en esta área de la matemática y de nuestro interés son los que a continuación se mencionan:

Definición 2.4.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que (X, f) es:

(1) *Exacto* si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$.

(2) *Mezclante* si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos, no vacíos U, V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$, para todo $k \geq N$.

(3) *Débilmente mezclante* si para cualesquiera U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_1 \cap f^{-n}(V_1) \neq \emptyset$ y $U_2 \cap f^{-n}(V_2) \neq \emptyset$.

(4) *Transitivo* si para cualesquiera dos subconjuntos U, V abiertos no vacíos de X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$.

(5) *M-sistema* si el sistema es transitivo y el conjunto de los puntos casi-periódicos es denso en X.

(6) *Caótico* si (X, f) es transitivo y $Per(f)$ es denso en X.

(7) *Minimal* si no existe un subconjunto propio A de X el cuál es no vacío, cerrado y $f(A) \subset A$.

Es importante señalar que varios sistemas dinámicos están definidos o clasificados mediante propiedades específicas de la función que determina la dinámica del sistema, por tal motivo el nombre del sistema dinámico se le proporciona a la función y viceversa, por ejemplo: en lugar de mencionar que el sistema (X, f) es transitivo decimos que f es transitiva.

A continuación mostramos una equivalencia de sistema dinámico minimal, el cual nos ayuda a mostrar cuándo un sistema es de este tipo.

Teorema 2.4.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. El sistema dinámico (X, f) es minimal si y sólo si $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X, para todo $x \in X$.

Demostración. Supongamos que (X, f) es minimal. Sea $x \in X$. Veamos que $\mathcal{O}(x, f)$ es un subconjunto denso en X. Es decir, $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Notemos que $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) \neq \emptyset$. Por el inciso (1) del Teorema 1.2.11, se obtiene que $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es un subconjunto cerrado en X. Además, por la Proposición 2.2.13 y la Proposición 2.2.17, se tiene que $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es $+$ invariante bajo f. Como (X, f) es minimal, entonces $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Por lo tanto, $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es denso en X.
Recíprocamente, supongamos que $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es densa en X, para todo $x \in X$. Sea A un subconjunto de X, el cual es no vacío, cerrado y $+$ invariante. Para probar que (X, f) es minimal, basta verificar que $A = X$. Como $A \neq \emptyset$, existe $x \in X$, tal que $x \in A$. Luego, $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Notemos que $A \subset \text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$. Por otro lado, como A es $+$ invariante se cumple que $\mathcal{O}(x, f) \subset A$. Luego, $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) \subset \text{cl}(A)$. Como A es cerrado se concluye que $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) \subset A$. Luego, $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = A$. Así, $A = X$. Por lo tanto, (X, f) es minimal. ■

Definición 2.4.3. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subset X$. Se dice que A es un *subconjunto Minimal* de X si A es no vacío, A es cerrado en X, A es invariante y $(A, f|_A)$ es minimal. Un punto $x \in X$ es un *punto minimal* si existe un subconjunto minimal A de X tal que $x \in A$.

Lema 2.4.4. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si x es un punto periódico, entonces $\mathcal{O}(x, f)$ es un subconjunto minimal de X.

Demostración. Sea x un punto periódico. Veamos que $\mathcal{O}(x,f)$ es un subconjunto minimal de X. Por la Definición 2.4.3, basta verificar que $\mathcal{O}(x,f)$ es no vacío, cerrado en X, invariante y el sistema $(\mathcal{O}(x,f), f|_{\mathcal{O}(x,f)})$ es minimal. Claramente, $\mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$. Como x es un punto periódico, por el Lema 2.2.21, se tiene que $\mathcal{O}(x,f) = \omega(x,f)$. Luego, por la Proposición 2.2.19, se obtiene que $\mathcal{O}(x,f)$ es cerrado en X. Además, por la Proposición 2.2.14, se tiene que $\mathcal{O}(x,f)$ es invariante. Resta verificar que el sistema $(\mathcal{O}(x,f), f|_{\mathcal{O}(x,f)})$ es minimal. Por la Definición 2.4.1, basta verificar que $\mathcal{O}(y, f|_{\mathcal{O}(x,f)})$ es densa en $\mathcal{O}(x,f)$, para todo $y \in \mathcal{O}(x,f)$. Es decir, $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(y, f|_{\mathcal{O}(x,f)})) = \mathcal{O}(x,f)$. Como $\mathcal{O}(x,f)$ es un subconjunto cerrado en X, basta probar que $\mathcal{O}(y, f|_{\mathcal{O}(x,f)}) = \mathcal{O}(x,f)$. Por otro lado, como las funciones f y $f|_{\mathcal{O}(x,f)}$ coinciden en $\mathcal{O}(x,f)$, basta verificar que $\mathcal{O}(y,f) = \mathcal{O}(x,f)$. Luego, como x es un punto periódico y $y \in \mathcal{O}(x,f)$, por la Proposición 2.2.8, se tiene que $\mathcal{O}(x,f) = \mathcal{O}(y,f)$. En consecuencia, el sistema $(\mathcal{O}(x,f), f|_{\mathcal{O}(x,f)})$ es minimal. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x,f)$ es minimal. ∎

Proposición 2.4.5. Sean (X,f) un sistema dinámico transitivo y $E \subset X$. Si el subconjunto E es cerrado y $+$ invariante bajo f, entonces $E = X$ o E es denso en ninguna parte en X.

Demostración. Supongamos que E es cerrado y $+$ invariante bajo f. Si $E = X$, se tiene el resultado. Supongamos que $E \neq X$. Veamos que E es denso en ninguna parte en X. Por el inciso (2) de la Definición 1.2.29, se tiene que probar que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E)) = \emptyset$. Por el inciso (2) del Teorema 1.2.11, se tiene que $\mathrm{cl}(E) = E$. Luego, basta verificar que $\mathrm{int}(E) = \emptyset$. Supongamos que $\mathrm{int}(E) \neq \emptyset$. Notemos que $\mathrm{int}(E)$ y $X \setminus E$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X. Como (X,f) es transitivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathrm{int}(E) \cap f^{-n}(X \setminus E) \neq \emptyset.$$

Por la Proposición 2.2.22, se obtiene que:

$$f^n(\mathrm{int}(E)) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $y \in X$ tal que $y \in f^n(\mathrm{int}(E))$ y $y \in (X \setminus E)$. Por otro lado, por el inciso (1) de la Observación 1.2.8, se tiene que $\mathrm{int}(E) \subset E$. Luego, $f^n(\mathrm{int}(E)) \subset f^n(E)$. Como E es $+$ invariante bajo f, por la Proposición 2.2.16, se obtiene que $f^n(E) \subset E$. Así, $f^n(\mathrm{int}(E)) \subset E$. Esto implica que $y \in E$ y $y \in X \setminus E$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $\mathrm{int}(E) = \emptyset$. Por lo tanto, E es denso en ninguna parte. ∎

Proposición 2.4.6. Sea (X,f) un sistema dinámico. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) (X,f) es transitivo.

(2) Para todo subconjunto abierto no vacío U de X, se cumple que $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.

Demostración. Supongamos que (X,f) es transitivo. Sea U un subconjunto abierto y no vacío en X. Veamos que $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X. Para esto, sea W un subconjunto abierto no vacío en X. Por la Observación 1.2.31, basta verificar que $\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)\right) \cap W \neq \emptyset$. Como (X,f) es transitivo, para los subconjuntos U y W, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$W \cap f^{-k}(U) \neq \emptyset. \tag{2.8}$$

Note que, $f^{-k}(U) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$. Luego,

$$\left(W \cap f^{-k}(U)\right) \subset W \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)\right). \tag{2.9}$$

Así, por (2.8) y (2.9), se obtiene que $W \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es denso en X.

Supongamos que para todo subconjunto W abierto no vacío en X, se tiene que $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W)$ es denso en X. Probemos que (X,f) es transitivo. Sean U, V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por hipótesis se tiene que $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$ es denso en X. Luego, por la Observación 1.2.31, se obtiene que:

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)\right) \cap U \neq \emptyset.$$

De donde, existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$ y $x_0 \in U$. En consecuencia, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_0 \in f^{-k}(V)$. Así, $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X,f) es transitivo. ■

2.5. Conjugación Topológica

Debido a que hay una gran cantidad de sistemas dinámicos y muchas propiedades que estudiar en ellos, se ha optado por realizar clasificaciones de dichos sistemas. Por tal razón, debemos tener a la mano un criterio que permita establecer cuándo dos sistemas dinámicos son equivalentes, es decir, cuando dichos sistemas tienen un comportamiento similar. Una herramienta que nos ayuda a determinar ésto es la conjugación topológica cuya definición presentamos a continuación.

Definición 2.5.1. Sean (X,f) y (Y,g) sistemas dinámicos. Se dice que el sistema (X,f) es *topológicamente conjugado* al sistema (Y,g), si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que, para cada $x \in X$, se cumple:

$$h(f(x)) = g(h(x)).$$

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

En tal caso se dice que h conjuga a f con g. Al homeomorfismo h se le llama una *conjugación* entre f y g.

Ejemplo 2.5.2. Consideremos los sistemas dinámicos $\big([-1,1], f\big)$ y $\big([-2,2], g\big)$ donde, $f(x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x(x^2-1)$, para cada $x \in [-1,1]$ y $g(x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}x(x^2-4)$, para cada $x \in [-2,2]$. Los sistemas dinámicos son topológicamente conjugados. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} {[-1,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & {[-1,1]} \arrow[d, "h"] \\ {[-2,2]} \arrow[r, "g"'] & {[-2,2]} \end{tikzcd}$$

En efecto, consideremos la función $h : [-1,1] \to [-2,2]$ definida como $h(x) = 2x$, para cada $x \in [-1,1]$. Veamos que h es un homeomorfismo y que $h(f(x)) = g(h(x))$, para cada $x \in [-1,1]$. Notemos que

$$h(f(x)) = h\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x(x^2-1)\right) = 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x(x^2-1)\right) = 3\sqrt{3}x(x^2-1). \tag{2.10}$$

Por otro lado,

$$g(h(x)) = g(2x) = \frac{3\sqrt{3}}{8}(2x)((2x)^2-4) = \frac{3\sqrt{3}}{8}(2x)4(x^2-1) = 3\sqrt{3}x(x^2-1). \tag{2.11}$$

Así, por (2.10) y (2.11), se obtiene que $h(f(x)) = g(h(x))$, para cada $x \in [-1,1]$. Además, se puede verificar que h es continua, biyectiva y con inversa $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ continua. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

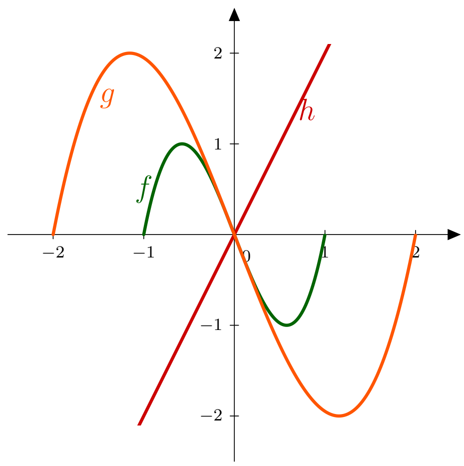


Figura 2.7: Gráfica de las funciones del Ejemplo 2.5.2.

Proposición 2.5.3. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados mediante la conjugación $h : X \to Y$, entonces (Y, g) y (X, f) son topológicamente conjugados mediante la función $h^{-1} : Y \to X$.

Demostración. Puesto que h es un homeomorfismo, se tiene que h^{-1} es también un homeomorfismo. Resta verificar que para cada $y \in Y$, se cumple que $f(h^{-1}(y)) = h^{-1}(g(y))$. Sea $y \in Y$. Utilizando el hecho de que h es un homeomorfismo, se tiene que:

$$g(y) = g(h(h^{-1}(y))) = h(f(h^{-1}(y))).$$

De donde:

$$h^{-1}(g(y)) = h^{-1}(h(f(h^{-1}(y)))) = f(h^{-1}(y)).$$

Por lo tanto, los sistemas (Y, g) y (X, f) son topológicamente conjugados. ■

Como mencionamos anteriormente, la importancia de la conjugación topológica radica en que ésta preserva ciertas propiedades entre sistemas. A continuación vemos algunas propiedades que se preservan bajo conjugación topológica. El inciso (1) de la Proposición 2.5.4, indica que si h es una conjugación entre f y g, entonces también lo es para las funciones f^k y g^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.5.4. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados, mediante la conjugación $h : X \to Y$. Las afirmaciones siguientes son verdaderas:

(1) $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

(2) $h(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(h(x), g)$.

Demostración. (1) Hagamos la prueba por inducción sobre k. Sea $k = 1$. Dado que f y g son conjugadas se cumple que $h(f(x)) = g(h(x))$, para cada $x \in X$. Supongamos ahora que se cumple para k, es decir, $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$, para cada $x \in X$. Veamos que se cumple para $k + 1$. Notemos que:

$$h(f^{k+1}(x)) = h(f^k(f(x)) = g^k(h(f(x))) = g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x)).$$

Por lo tanto, $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$, para toda $k \in \mathbb{N}$.
(2) Para obtener la igualdad deseada, notemos que:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{O}(x,f)) &= h(\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}) \\ &= \{h(x), h(f(x)), h(f^2(x)), h(f^3(x)), \ldots\} \end{aligned}$$

Dado que h es una conjugación, por el inciso (1) de este teorema, se tiene que:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{O}(x,f)) &= \{h(x), g(h(x)), g^2(h(x)), g^3(h(x)), \ldots\} \\ &= \mathcal{O}(h(x), g). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(\mathcal{O}(x,f)) = \mathcal{O}(h(x), g)$. ■

Proposición 2.5.5. Sean (X,f) y (Y,g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados mediante la conjugación $h : X \to Y$ y $U \subset X$. Las afirmaciones siguientes son verdaderas:

(1) $h(f(U)) = g(h(U))$.

(2) $f^{-1}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-1}(U))$.

Demostración. (1) Hagamos la prueba por contenciones. Veamos primero que $h(f(U)) \subset g(h(U))$. Para esto, sea $y \in h(f(U))$. Luego, existe

$$z \in f(U) \quad \text{tal que} \quad h(z) = y. \tag{2.12}$$

De donde, existe $x \in U$ tal que $f(x) = z$. Puesto que h es una conjugación para f y g, se tiene que:

$$y = h(z) = h(f(x)) = g(h(x)).$$

Por otro lado, como $x \in U$, se obtiene que $h(x) \in h(U)$. Luego, $y = g(h(x)) \in g(h(U))$, es decir, $y \in g(h(U))$. Así, $h(f(U)) \subset g(h(U))$. De manera similar se verifica que $g(h(U)) \subset h(f(U))$. Por ambas contenciones se obtiene la igualdad.

(2) Para verificar la igualdad, primero veamos que $f^{-1}(h^{-1}(U)) \subset h^{-1}(g^{-1}(U))$. Sea $y \in f^{-1}(h^{-1}(U))$. Luego $f(y) \in h^{-1}(U)$. De donde,

$$h(f(y)) \in U. \tag{2.13}$$

Como h es una conjugación de f y g, de (2.13), se tiene que $g(h(y)) \in U$. Luego, $h(y) \in g^{-1}(U)$. Así, $y \in h^{-1}(g^{-1}(U))$. Por lo tanto, $f^{-1}(h^{-1}(U)) \subset h^{-1}(g^{-1}(U))$. De manera similar, se verifica la otra contención. ■

Corolario 2.5.6. Sean (X,f) y (Y,g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados mediante la conjugación $h : X \to Y$ y $U \subset X$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(1) $h(f^n(U)) = g^n(h(U))$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(2) $f^{-n}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-n}(U))$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. (1) La prueba se realizará por inducción matemática sobre n. Para $n = 1$. Por el inciso (1) de la Proposición 2.5.5, se cumple que

$$h(f(U)) = g(h(U)). \tag{2.14}$$

Supongamos que se cumple para n, es decir:

$$h(f^n(U)) = g^n(h(U)). \tag{2.15}$$

Verifiquemos que se cumple para $n + 1$. Notemos que:

$$\begin{aligned} h(f^{n+1}(U)) &= h(f^n(f(U))) \\ &= g^n(h(f(U))) \qquad \text{Por (2.14).} \\ &= g^n(g(h(U))) \qquad \text{Por (2.15).} \\ &= g^{n+1}(h(U)). \end{aligned}$$

Luego, $h(f^{n+1}(U)) = g^{n+1}(h(U))$. Por lo tanto, se cumple $h(f^n(U)) = g^n(h(U))$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) La prueba se realizará por inducción matemática sobre n. Para $n = 1$, por el inciso (2) de la Proposición 2.5.5, se cumple que:

$$f^{-1}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{2.16}$$

Supongamos que se cumple para n, es decir:

$$f^{-n}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-n}(U)). \tag{2.17}$$

Probemos que se cumple para $n + 1$. Notemos que:

$$\begin{aligned} f^{-(n+1)}(h^{-1}(U)) &= f^{-n}(f^{-1}(h^{-1}(U))) \qquad \text{Por Proposición 2.1.3, inciso (1).} \\ &= f^{-n}(h^{-1}(g^{-1}(U))) \qquad \text{Por (2.16).} \\ &= h^{-1}(g^{-n}(g^{-1}(U))) \qquad \text{Por (2.17).} \\ &= h^{-1}(g^{-(n+1)}(U)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-n}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-n}(U))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposición 2.5.7. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados, mediante la conjugación $h : X \to Y$, entonces las proposiciones siguientes son verdaderas:

(1) (X, f) es transitivo si y sólo si (Y, g) es transitivo.

(2) x es un punto fijo de f si y sólo si $h(x)$ es un punto fijo de g.

(3) x es un punto periódico de f si y sólo si $h(x)$ es un punto periódico de g.

(4) El conjunto $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X si y sólo si $\mathrm{Per}(g)$ es denso en Y.

Demostración. (1) Supongamos que (X, f) es transitivo y veamos que (Y, g) es transitivo. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Notemos que $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X. Puesto que (X, f) es transitivo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$h^{-1}(U) \cap f^{-k}(h^{-1}(V)) \neq \emptyset.$$

Por la Proposición 2.2.22, se sigue que $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$. Luego, existe $x_0 \in h^{-1}(U)$ tal que $f^k(x_0) \in h^{-1}(V)$, esto implica que:

$$h(x_0) \in U \quad \text{y} \quad h(f^k(x_0)) \in V.$$

Además, por ser h una conjugación entre f y g, del inciso (1) de la Proposición 2.5.4, se tiene que $h(f^k(x_0)) = g^k(h(x_0))$. Así, $g^k(h(x_0)) \in V$. Luego, $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Además, por la Proposición 2.2.22, se obtiene que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (Y, g) es transitivo.
Recíprocamente, supongamos que (Y, g) es transitivo y veamos que (X, f) es transitivo. Sean U, V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como h es un homeomorfismo, por el inciso (2) del Teorema 1.3.12, se tiene que $h(U)$ y $h(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Puesto que (Y, g) es transitivo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$h(U) \cap g^{-k}(h(V)) \neq \emptyset.$$

Nuevamente, aplicando la Proposición 2.2.22, se tiene que:

$$g^k(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset.$$

Por otro lado, por el inciso (1) del Corolario 2.5.6, se obtiene que $h(f^k(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Luego,

$$h(f^k(U)) \cap h(V) = h(f^k(U) \cap h(V)) \neq \emptyset.$$

Así, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.2.22, se concluye que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es transitivo.
(2) Supongamos que x es un punto fijo de f, es decir, $f(x) = x$. Luego, como $g(h(x)) = h(f(x))$, se obtiene que $g(h(x)) = h(x)$. Así, $h(x)$ es un punto fijo de g.
Recíprocamente, supongamos que $h(x)$ es un punto fijo de g, es decir, $g(h(x)) = h(x)$. Notemos que:

$$f(x) = f(h^{-1}(h(x))). \tag{2.18}$$

Por la Proposición 2.5.3 y de (2.18), se tiene que $f(x) = h^{-1}(g(h(x)))$. Puesto que $h(x)$ es un punto fijo de g, se tiene que $f(x) = h^{-1}(h(x)) = x$. Por lo tanto x es un punto fijo de f.
(3) Supongamos que x es un punto periódico de f, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(x) = x$. Notemos que, por el inciso (1) de la Proposición 2.5.4, se sigue que:

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x).$$

Luego $h(x)$ es un punto periódico de g.
Recíprocamente, supongamos que $h(x)$ es un punto periódico de g, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $g^n(h(x)) = h(x)$. De la Proposición 2.5.3, se deduce que

$$f^n(x) = f^n(h^{-1}(h(x))) = h^{-1}(g^n(h(x))). \tag{2.19}$$

Puesto que $h(x)$, es un punto periódico de g, de (2.19), se tiene que $f^n(x) = h^{-1}(h(x)) = x$. Así, x es un punto periodico de f.
(4) Supongamos que $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X, veamos que $\mathrm{Per}(g)$ es denso en Y. Sea U subconjunto abierto no vacío en Y, luego $h^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto no vacío en X. Por hipótesis se tiene que:

$$h^{-1}(U) \cap \mathrm{Per}(f) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $x_0 \in X$, tal que

$$x_0 \in \mathrm{Per}(f) \tag{2.20}$$

y

$$x_0 \in h^{-1}(U). \tag{2.21}$$

Por inciso (3) de este teorema, de (2.20), se tiene que $h(x_0) \in \mathrm{Per}(g)$. Por otro lado, de (2.21), se concluye que $h(x_0) \in U$. Así, $U \cap \mathrm{Per}(g) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathrm{Per}(g)$ es denso en Y.
Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Per}(g)$ es denso en Y y probemos que $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X. Sea U un subconjunto abierto no vacío en X. Por el inciso (2) de la Proposición 1.3.12, se obtiene que $h(U)$ es un subconjunto abierto no vacío en Y. Dado que $\mathrm{Per}(g)$ es denso en Y, se tiene que $h(U) \cap \mathrm{Per}(g) \neq \emptyset$. Luego, existe $y_0 \in Y$, tal que

$$y_0 \in \mathrm{Per}(g) \tag{2.22}$$

y

$$y_0 \in h(U). \tag{2.23}$$

Por el inciso (3), de este teorema, de (2.22) obtenemos que $h^{-1}(y_0) \in \mathrm{Per}(f)$. Por otro lado, de (2.23), se concluye que $h^{-1}(y_0) \in U$. Así, $\mathrm{Per}(f) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X. ■

2.6. Funciones Tienda y Logística

En la dinámica topológica, existen funciones que determinan sistemas dinámicos muy interesantes y que ayudan a entender de alguna manera la dinámica que se puede generar, además tales funciones son útiles para comprender la dinámica de otras funciones más complicadas. En esta última sección del capítulo nos enfocamos en presentar dos ejemplos clásicos de funciones dinámicas.

(1) La *función tienda*, $T : [0,1] \to [0,1]$, definida como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2 - 2x, & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$.

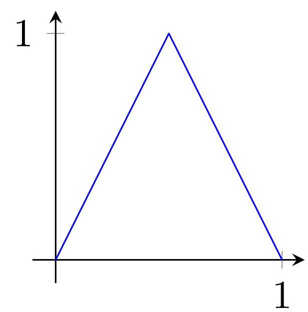


Figura 2.8: Gráfica de la función tienda.

Obtengamos los puntos fijos de la función T, es decir, los puntos $x \in [0,1]$ tales que $T(x) = x$. Para eso consideremos los siguientes casos:

1) Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, entonces $T(x) = 2x$. Luego, $2x = x$ esto implica que $x = 0$.
2) Si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces $T(x) = 2 - 2x$. Luego, $2 - 2x = x$, esto implica que $2 = 3x$, de donde $x = \frac{2}{3}$.

Por lo tanto, los puntos fijos de la función T, son $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$.

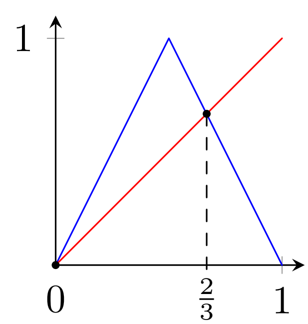


Figura 2.9: Puntos fijos de la función tienda.

A continuación mostramos algunas propiedades de la función tienda, las cuales puede encontrar en [41, pág. 39] y [25, pág. 20].

Ejemplo 2.6.1. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], T)$. Se cumple que:

(a) $([0,1], T)$ es exacto.
(b) $([0,1], T)$ es mezclante.
(c) $([0,1], T)$ es caótico.

(2) La *función logística* $L_4 : [0,1] \to [0,1]$, dada por:

$$L_4(x) = 4x(1-x), \text{ para cada } x \in [0,1].$$

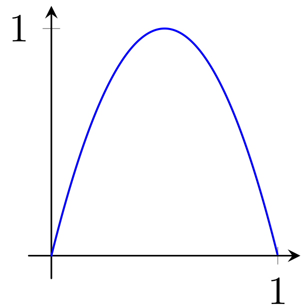


Figura 2.10: Gráfica de la función logística.

Determinemos los puntos fijos de la función L. Notemos que $L(x) = 4x(1-x)$. Luego,

$$\begin{aligned} 4x(1-x) &= x \\ 4x - 4x^2 &= x \\ 3x - 4x^2 &= 0 \\ x(3-4x) &= 0 \end{aligned}$$

Así, se obtiene que $x = 0$ o $x = \frac{3}{4}$. Por lo tanto, los puntos fijos de L, son $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$.

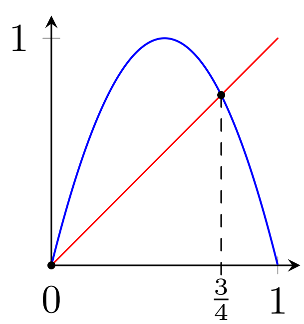


Figura 2.11: Puntos fijos de la función logística.

En la Figura 2.11, se realiza un análisis gráfico de la función logística. Esta función tiene dos puntos fijos. Se muestra también, en la Figura 2.12, el análisis gráfico de la órbita de un punto $x_0 = 0.4$. En este caso es muy complicado ver su comportamiento, se dice x_0 muestra un comportamiento caótico.

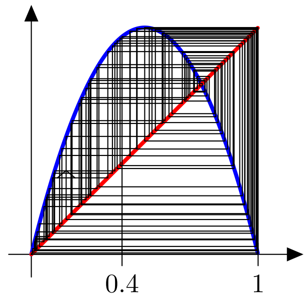


Figura 2.12: Análisis gráfico del punto $x_0 = 0.4$.

En el capítulo 5, se estudian otras propiedades de la función logística. Por ejemplo, en la sección 5.1 se prueba que los sistemas dinámicos $([0,1],T)$ y $([0,1],L_4)$ son topológicamente conjugados. Dicho resultado nos permite mostrar ejemplos de sistemas dinámicos con los cuales trabajamos en la tesis, tales como sensitivos, mezclantes, débilmente mezclantes, etc.

3
Compacto Transitividad

El objetivo de este capítulo es estudiar los sistemas dinámicos compacto transitivos. Por esta razón, comenzamos definiendo algunos conjuntos, analizando propiedades de los mismos, para finalmente introducir los sistemas compacto transitivos.
Recordemos que un sistema dinámico es una pareja (X, f) donde X es un continuo y $f : X \to X$ una función continua. En lo que sigue, X será siempre considerado con la métrica d, a menos que se especifique lo contrario.

3.1. Consideraciones generales

Para poder definir y estudiar propiedades de los sistemas dinámicos compacto transitivos, iniciamos esta sección dando las definiciones necesarias para poder abordar dicho concepto.

Definición 3.1.1. Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$, U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $\delta > 0$. Se definen los siguientes conjuntos:

(1) $N_f(x, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : f^n(x) \in V\}$.

(2) $N_f(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset\}$.

(3) $N_f(U, \delta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{ existen } x, y \in U \text{ tales que } d(f^n(x), f^n(y)) > \delta\}$.

A continuación, se muestra de manera gráfica los conjuntos dados en la Definición 3.1.1. Para esto, sean $x \in X$, U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $\delta > 0$.

En la Figura 3.1 se muestra el conjunto $N_f(x, V)$. Suponiendo que la órbita de x tiene un comportamiento como el que se muestra en la Figura 3.1, se obtiene que $\{3, 4, 6\} \subset N_f(x, V)$.

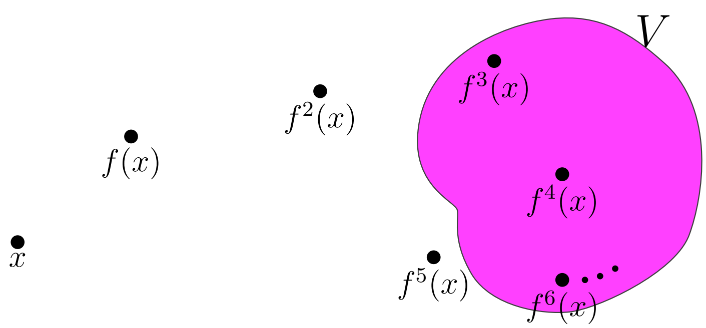


Figura 3.1: Conjunto $N_f(x, V)$.

Por otro lado, en la Figura 3.2 se visualiza el conjunto $N_f(U,V)$. Por la Proposición 2.2.22, el conjunto $N_f(U,V)=\{n\in\mathbb{Z}_+ : f^n(U)\cap V\neq\emptyset\}$. Supongamos que las iteraciones de U se comportan como en la Figura 3.2. Por lo tanto, podemos concluir que al menos $\{2,3\}\subset N_f(U,V)$.

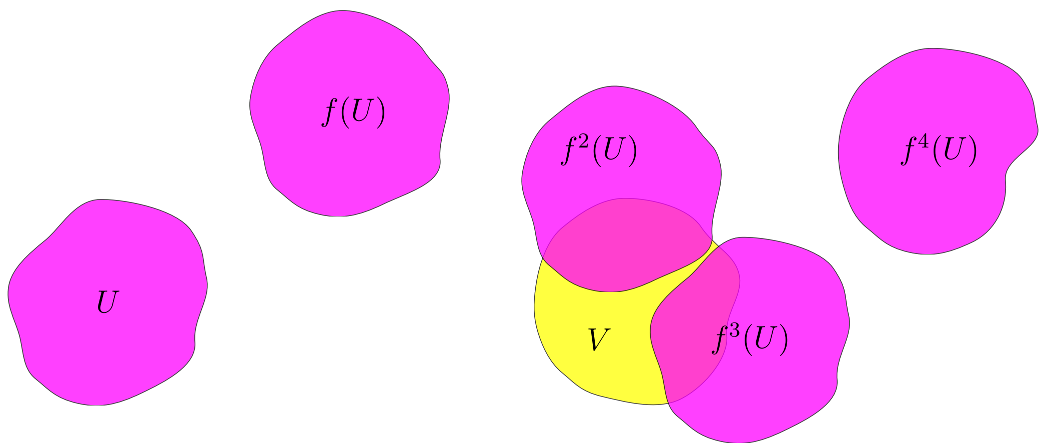


Figura 3.2: Conjunto $N_f(U,V)$.

Finalmente, en la Figura 3.3, se observa que $2\in N_f(U,\delta)$, pues existen x y y en el conjunto U tales que $d(f^2(x),f^2(y))>\delta$.

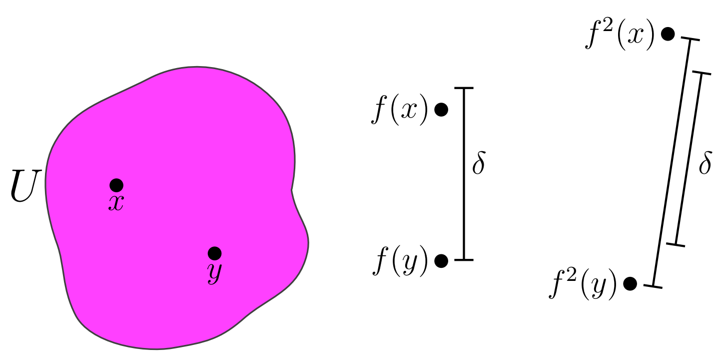


Figura 3.3: Conjunto $N_f(U,\delta)$.

A continuación enunciamos algunas observaciones que se obtienen inmediatamente de la Definición 3.1.1.

Observación 3.1.2. Sean (X,f) un sistema dinámico, U,U_1,V y V_1, subconjuntos abiertos no vacíos de X y $\delta>0$.

(1) Si $U\subset V$, entonces $N_f(U,\delta)\subset N_f(V,\delta)$.

(2) Si $U\subset U_1$ y $V\subset V_1$, entonces $N_f(U,V)\subset N_f(U_1,V_1)$.

Proposición 3.1.3. Sean (X,f) un sistema dinámico, U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X y $n,m\in\mathbb{Z}_+$. Si $n\in N_f(f^{-m}(U),f^{-m}(V))$, entonces $n\in N_f(U,V)$,

Demostración. Supongamos que $n \in N_f(f^{-k}(U), f^{-k}(V))$. Luego,

$$f^{-k}(U) \cap f^{-n}(f^{-k}(V)) \neq \emptyset.$$

De donde, por el inciso (1) de la Proposición 2.1.3, se obtiene que $f^{-k}(U) \cap f^{-(n+k)}(V) \neq \emptyset$. Además, $f^{-k}(U) \cap f^{-(n+k)}(V) = f^{-k}(U \cap f^{-n}(V)) \neq \emptyset$. Esto implica que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $n \in N_f(U, V)$. ■

Proposición 3.1.4. Sean (X, f) un sistema dinámico, U subconjunto abierto no vacío en X, $n, m \in \mathbb{Z}_+$ y $\delta > 0$. Si $m + n \in N_f(f^{-n}(U), \delta)$, entonces $m \in N_f(U, \delta)$.

Demostración. Supongamos que $n+m \in N_f(f^{-n}(U), \delta)$. Esto implica que existen $x, y \in f^{-n}(U)$ tales que:

$$d(f^{m+n}(x), f^{m+n}(y)) > \delta,$$

equivalentemente,

$$d(f^m(f^n(x)), f^m(f^n(y))) > \delta. \tag{3.1}$$

Por otro lado, como $x, y \in f^{-n}(U)$ se tiene que $f^n(x), f^n(y) \in U$. Por lo tanto, de (3.1), se concluye que $m \in N_f(U, \delta)$. ■

En el Ejemplo 3.1.5, calculamos los conjuntos dados en la Definición 3.1.1 para un sistema dinámico en particular.

Ejemplo 3.1.5. Consideremos el sistema dinámico $([-1, 1], f)$, donde f está dada como $f(x) = x^3$, para cada $x \in [-1, 1]$.

Sean $x_0 = \dfrac{1}{2}$ y $W = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}\right)$. Determinemos $N_f(x_0, W)$. Notemos que:

$$\begin{aligned} f^0\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ f^1\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \\ f^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{8^3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N_f(x_0, W) = \{0\}$. Ahora, consideremos los subconjuntos $U = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ y $V = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ de $[-1, 1]$. Determinemos $N_f(U, V)$. Por la Proposición 2.2.22, se tiene que $N_f(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$. Razón por la cual, calculamos $f^n(U)$, para todo

$n \in \mathbb{Z}_+$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
f^0(U) &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\
f^1(U) &= U^3 = \left(\frac{1}{4^3}, \frac{1}{2^3}\right) \\
f^2(U) &= f(f(U)) = f\left(U^3\right) = (U^3)^3 = \left(\frac{1}{4^9}, \frac{1}{2^9}\right) \\
f^3(U) &= f(f^2(U)) = f\left(U^9\right) = (U^9)^3 = \left(\frac{1}{4^{27}}, \frac{1}{2^{27}}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Luego, $N_f(U, V) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Definición 3.1.6. Sea $A \subset \mathbb{Z}_+$. Se dice que el conjunto A es:

(1) *Cofinito* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{k, k+1, k+2 \ldots\} \subset A$.

(2) *Thick* si para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subset A$.

(3) *Sindético* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l \in \mathbb{N}$ se cumple que $\{l, l+1, \ldots, l+m\} \cap A \neq \emptyset$.

(4) *Thickly sindético* si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \colon \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\}$ es sindético.

La Observación 3.1.7, se obtiene inmediatamente de la Definición 3.1.6.

Observación 3.1.7. Sea $A \subset \mathbb{Z}_+$. Las siguientes condiciones son verdaderas.

(1) Si A es thick, entonces $A \neq \emptyset$.

(2) Si A es cofinito, entonces $A \neq \emptyset$.

(3) Si A es sindético, entonces $A \neq \emptyset$.

(4) Si A es thickly sindético, entonces $A \neq \emptyset$.

En el Ejemplo 3.1.8 se muestran algunos ejemplos de los conjuntos dados en la Definición 3.1.6.

Ejemplo 3.1.8. Sean $m \in \mathbb{Z}_+$ y $B \subset \mathbb{Z}_+$. Se cumple que el conjunto:

(a) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ es cofinito.

(b) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ no es divisor de } m\}$ es cofinito.

(c) Si B es tal que $|B| < \infty$, entonces el conjunto $A = \mathbb{N} \setminus B$ es cofinito.

(d) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es un número par}\}$ es sindético.

(e) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es un número impar}\}$ es sindético.

(f) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es un múltiplo de } m\}$ es sindético.

A continuación mostraremos algunas relaciones que se tienen entre los conjuntos thick, cofinito, sindético y thickly sindético.

Proposición 3.1.9. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$ tales que $A \subset B$. Si A es thick, entonces B es thick.

Demostración. Supongamos que A es thick y sea $p \in \mathbb{N}$. Como A es thick, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subset A.$$

Puesto que $A \subset B$, se concluye que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subset B$. Por lo tanto, B es thick. ■

Proposición 3.1.10. Sea $A \subset \mathbb{Z}_+$. Si A es cofinito, entonces A es thick.

Demostración. Supongamos que A es cofinito. Demostremos que A es thick. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, n+2, \ldots\} \subset A$. Luego, $\{n, n+1, \ldots, n+k\} \subset A$. Por lo tanto, A es thick. ■

Proposición 3.1.11. Sea $A \subset \mathbb{Z}_+$. Si A es cofinito, entonces A es thickly sindético.

Demostración. Supongamos que A es cofinito. Demostremos que A es thickly sindético. Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\}$ es sindético. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{k, k+1, k+2, \ldots\} \subset A. \tag{3.2}$$

Sea $l \in \mathbb{N}$. Veamos que:

$$\{l, l+1, \ldots, l+k\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\} \neq \emptyset.$$

De (3.2), se tiene que:

$$\{k, k+1, \ldots\} \subset \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\}. \tag{3.3}$$

Además,

$$l+k \in \{l, l+1, \ldots, l+k\} \quad \text{y} \quad l+k \in \{k, k+1, \ldots\}.$$

Así, $\{l, l+1, \ldots, l+k\} \cap \{k, k+1, \ldots\} \neq \emptyset$. Luego, por (3.3), se obtiene que:

$$\{l, l+1, \ldots, l+k\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, A es thickly sindético. ■

Proposición 3.1.12. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$. Si A es sindético y B es thick, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que A es sindético y B es thick. Como A es sindético, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\{m, m+1, \ldots, m+l_0\} \cap A \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

Por otro lado, como B es thick y $l_0 \in \mathbb{N}$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\{m_0, m_0+1, \ldots, m_0+l_0\} \subset B. \tag{3.5}$$

De (3.4), aplicado a m_0 se cumple que:

$$\{m_0, m_0+1, \ldots, m_0+l_0\} \cap A \neq \emptyset. \tag{3.6}$$

Así, de (3.5), se obtiene que:

$$\{m_0, m_0+1, \ldots, m_0+l_0\} \cap A \subset B \cap A.$$

Por lo tanto, de (3.6) se concluye que $B \cap A \neq \emptyset$. ■

Ejemplo 3.1.13. Por la Proposición 3.1.10 se obtiene que los incisos (a), (b) y (c) del Ejemplo 3.1.8, son conjuntos thick y conjuntos thickly sindético.

Proposición 3.1.14. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$. Si A y B son thickly sindéticos, entonces $A \cap B$ es thickly sindético.

Demostración. Supongamos que A y B son thickly sindéticos. Probemos que $A \cap B$ es thickly sindético. Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que el conjunto

$$\{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A \cap B\}$$

es sindético. Como A es thickly sindético, se tiene que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\}$ es sindético. Luego, existe $m_1 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $l \in \mathbb{N}$, se satisface que:

$$\{l, l+1, \ldots, l+m_1\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\} \neq \emptyset. \tag{3.7}$$

De manera similar, como B es thickly sindético, para $n+m_1$ se tiene que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n+m_1\} \subset B\}$ es sindético. Por lo tanto, existe $m_2 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $l' \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\{l', l'+1, \ldots, l'+m_2\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n+m_1\} \subset B\} \neq \emptyset. \tag{3.8}$$

Definamos $m = m_1 + m_2$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Veamos que:

$$\{k, k+1, \ldots, k+m\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A \cap B\} \neq \emptyset.$$

De (3.8) aplicado a k, se obtiene que:

$$\{k, k+1, \ldots, k+m_2\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n+m_1\} \subset B\} \neq \emptyset.$$

Es decir, existe $k+j$ con $j \in \{0, 1, \ldots, m_2\}$ tal que $k+j \in \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n+m_1\} \subset B\}$. Luego,

$$\{k+j, k+j+1, \ldots, k+j+n+m_1\} \subset B. \tag{3.9}$$

Por otro lado, de (3.7) aplicado a $k+j$, se obtiene que

$$\{k+j, k+j+1, \ldots, k+j+m_1\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\} \neq \emptyset.$$

Es decir, existe $k+j+s$, con $s \in \{0, 1, \ldots, m_1\}$ tal que $k+j+s \in \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A\}$. Luego,

$$\{k+j+s, k+j+s+1, \ldots, k+j+s+n\} \subset A. \tag{3.10}$$

Ahora, como $s \in \{0, 1, \ldots, m_1\}$, obtenemos que:

$$\{k+j+s, k+j+s+1, \ldots, k+j+s+n\} \subset \{k+j, k+j+1, \ldots, k+j+n+m_1\}.$$

De donde, por (3.9), se tiene que:

$$\{k+j+s, k+j+s+1, \ldots, k+j+s+n\} \subset B.$$

Así, de (3.10), se sigue que, $\{k+j+s, k+j+s+1, \ldots, k+j+s+n\} \subset A \cap B$. Esto implica que $k+j+s \in \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subset A \cap B\}$. Además, $k+j+s \in \{k, k+1, \ldots, k+m\}$. Luego,

$$\{k, k+1, \ldots, k+m\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \{i, i+1, \ldots, i+n+m_1\} \subset A \cap B\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $A \cap B$ es thickly sindético. ■

Como consecuencia de la Proposición 3.1.14, se obtiene el Corolario 3.1.15.

Corolario 3.1.15. Si para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $A_i \subset \mathbb{Z}_+$ es thickly sindético, entonces $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ es thickly sindético.

3.2. Compacto transitividad

En esta sección se introduce la noción del conjunto omega-límite de un punto con respecto a una familia de Furstenberg. Dicho conjunto nos ayudará a definir los sistemas dinámicos compacto transitivo. Antes de definir estos conceptos damos definiciones que nos ayudan a definir este tipo de sistemas.

Definición 3.2.1. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ es una *familia de Furstenberg*, si para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $F_1 \subset F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F}$ implica que $F_2 \in \mathcal{F}$.

Para ilustrar la Definición 3.2.1 veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2.2. Sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $A \neq \emptyset$. La familia

$$\mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : A \subset F\},$$

es una familia de Furstenberg. En efecto, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ de tal manera que $F_1 \subset F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F}_A$. Luego $A \subset F_1 \subset F_2$. Así, $A \subset F_2$. Por lo tanto, $F_2 \in \mathcal{F}_A$.

Definición 3.2.3. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se define la familia $\mathcal{N}_f$ como sigue:

$$\mathcal{N}_f = \{A \subset \mathbb{Z}_+ : \text{ existen } U, V \subset X \text{ abiertos no vacíos, tales que } N_f(U, V) \subset A\}.$$

Observación 3.2.4. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cualesquiera U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X, se tiene que $N_f(U, V) \in \mathcal{N}_f$. De donde, $\mathcal{N}_f \neq \emptyset$.

Ejemplo 3.2.5. La familia $\mathcal{N}_f$ dada en la Definición 3.2.3, es de Furstenberg.
En efecto, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{N}_f$ tales que $F_1 \subset F_2$ y $F_1 \in \mathcal{N}_f$. Luego, existen U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X tales que $N_f(U, V) \subset F_1$. Como $F_1 \subset F_2$, $N_f(U, V) \subset F_2$. Por lo tanto, $F_2 \in \mathcal{N}_f$.

Proposición 3.2.6. Sea $F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Se cumple que $F \cap F' \neq \emptyset$, para todo $F' \in \mathcal{N}_f$ si y sólo si $F \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para todo U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X.

Demostración. Supongamos que $F \cap F' \neq \emptyset$, para todo $F' \in \mathcal{N}_f$. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacío de X. Por la Observación 3.2.4, se tiene que $N_f(U, V) \in \mathcal{N}_f$. Así, por el supuesto, se tiene que $F \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que $F \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para todo U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Sea $F' \in \mathcal{N}_f$. Por la Definición 3.2.3, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, tales que $N_f(U, V) \subset F'$. Luego $N_f(U, V) \cap F \subset F' \cap F$. Por hipótesis $N_f(U, V) \cap F \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F' \cap F \neq \emptyset$. ■

Definición 3.2.7. Sean $\mathcal{F}$ una familia Furstenberg. La *familia dual* de $\mathcal{F}$, denotada por $k\mathcal{F}$, se define como:

$$k\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \cap F' \neq \emptyset, \text{ para cualquier } F' \in \mathcal{F}\}.$$

Ilustramos el concepto dado en la Definición 3.2.7 mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.2.8. La familia dual de la familia $\mathcal{F}_A$ dada en el Ejemplo 3.2.2 es:

$$\begin{aligned} k\mathcal{F}_A &= \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \cap F' \neq \emptyset, \text{ para todo } F' \in \mathcal{F}_A\} \\ &= \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \cap A \neq \emptyset\} \\ &= \{F \subset \mathbb{Z}_+ : \text{ existe } a \in F \text{ y } a \in A\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.9. La familia dual de la familia $\mathcal{N}_f$ dada en la Definición 3.2.3, es:

$$k\mathcal{N}_f = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \cap F' \neq \emptyset, \text{ para cualquier } F' \in \mathcal{N}_f\}.$$

Por la Proposición 3.2.6, se tiene que:

$$k\mathcal{N}_f = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \text{para todo } U, V \subset X, \text{abiertos no vacíos}\}. \quad (3.11)$$

Definición 3.2.10. Sean (X, f) un sistema dinámico, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg y $x \in X$. El conjunto ω-*límite* de x con respecto a la familia $\mathcal{F}$, denotado por $\omega_{\mathcal{F}}(x)$, se define como:

$$\omega_{\mathcal{F}}(x) = \{z \in X : N_f(x, G) \in k\mathcal{F}, \text{ para cada vecindad } G \text{ de } z\}.$$

Ejemplo 3.2.11. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Por la Definición 3.2.10 y la Definición 3.2.3, se tiene que:

$$\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \{z \in X : N_f(x, G) \in k\mathcal{N}_f, \text{ para cada vecindad } G \text{ de } z\}.$$

Ocupando (3.11) del ejemplo 3.2.9 y el Ejemplo 3.2.11, se obtiene la siguiente observación.

Observación 3.2.12. El conjunto ω-límite de x, respecto a la familia $\mathcal{N}_f$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \{z \in X : N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, &\text{ para cada vecindad } G \text{ de } z \\ &\text{y para cualesquiera } U, V \subset X \text{ abiertos no vacíos}\}.\end{aligned}$$

Terminamos esta sección dando el concepto de sistema dinámico compacto transitivo y mostrando una equivalencia del mismo.

Definición 3.2.13. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que (X, f) es *compacto transitivo* si para cada $x \in X$, existe $z \in X$ tal que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z y para cualesquiera abiertos no vacíos U y V de X.

En la Figura 3.4, se muestra de manera geométrica el concepto dado en la Definición 3.2.13. Básicamente nos dice que, dado un punto $x \in X$, existe un punto $z \in X$, tal que para cualquier vecindad de z, digamos G como se muestra en la Figura 3.4, y cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos en X, digamos U y V, existe un momento en el cual, al mismo tiempo que $f^n(U)$ intersecta al conjunto V, se cumple que $f^n(x) \in G$.

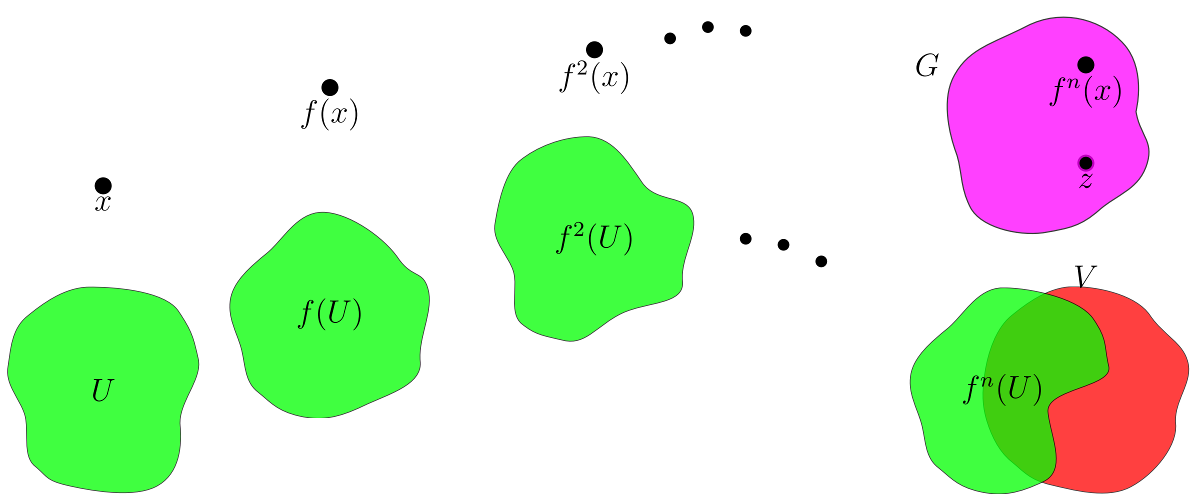


Figura 3.4: Representación gráfica de un sistema dinámico compacto transitivo.

De la Observación 3.2.12 y la Definición 3.2.13, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.14. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que (X, f) es compacto transitivo si y sólo si $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$, para cada $x \in X$.

Demostración. Supongamos que (X, f) es compacto transitivo. Sea $x \in X$. Luego, existe $z \in X$ tal que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X. Así, por la Observación 3.2.12, se tiene que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$. Por la Observación 3.2.12, existe $z \in X$, tal que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X. Por Definición 3.2.13, se concluye que (X, f) es compacto transitivo. ■

3.3. Propiedades principales de los sistemas dinámicos compacto transitivos

Hemos definido un sistema dinámico compacto transitivo y mostrado una equivalencia de éstos, pasamos a verificar propiedades que cumplen estos sistemas dinámicos. Algunas son relacionadas con el conjunto omega límite de un punto.

Cabe mencionar que la Proposición 3.3.1, es propia y no fue extraída de alguna otra fuente.

Proposición 3.3.1. Sean (X, f) un sistema dinámico y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Si $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset N_f(U, V)$, entonces existe un subconjunto abierto no vacío U_1 en X tal que $U_1 \subset U$ y $V_1 = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))$ es un subconjunto abierto no vacío en X.

Demostración. Hagamos la prueba utilizando inducción matemática sobre sobre k. Para el caso base tomemos $k = 1$. Esto es, supongamos que $\{n_1\} \subset N_f(U, V)$. Luego $n_1 \in N_f(U, V)$. Es decir, $U \cap f^{-n_1}(V) \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.2.22, se tiene que $f^{n_1}(U) \cap V \neq \emptyset$. De donde, existe $x \in V$ tal que $x \in f^{n_1}(U)$.
Por otro lado, por la Proposición 1.2.28, existe $y \in V$ tal que $x \neq y$. Utilizando la Proposición 1.2.14, existe un subconjunto abierto no vacío W de X, tal que:

$$x \in W \text{ y } y \notin \mathrm{cl}(W). \tag{3.12}$$

Definamos

$$U_1 = f^{-n_1}(W) \cap U \text{ y } V_1 = V \setminus f^{n_1}(\mathrm{cl}(U_1)). \tag{3.13}$$

Probemos que U_1 y V_1 son subconjuntos abiertos no vacíos en X y que $U_1 \subset U$. Notemos que U es abierto en X. Además, por la continuidad de f, por el inciso (1) de la Observación 2.1.8, se sigue que f^n es continua y por el inciso (2) de la Observación 2.1.9 se tiene que $f^{-n_1}(W)$ también es abierto en X. Luego, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se obtiene que $U_1 = f^{-n_1}(W) \cap U$ es un subconjunto abierto en X.
Por otro lado, como $x \in f^{n_1}(U)$ y $x \in W$, $f^{n_1}(U) \cap W \neq \emptyset$. Luego, por la Proposición 2.2.22, se tiene que $U_1 = U \cap f^{-n_1}(W) \neq \emptyset$. Por lo tanto, U_1 es no vacío. Además, de

(3.13), se deduce que $U_1 \subset U$. Resta verificar que V_1 es un subconjunto abierto no vacío en X. Nuevamente, de (3.13), se verifica que $U_1 \subset f^{-n_1}(W)$. Luego,

$$\mathrm{cl}(U_1) \subset \mathrm{cl}(f^{-n_1}(W)). \tag{3.14}$$

Por otra parte, por el inciso (5) del Teorema 2.1.9, se obtiene que:

$$\mathrm{cl}(f^{-n_1}(W)) \subset f^{-n_1}(\mathrm{cl}(W)).$$

Luego, de (3.14), se sigue que $\mathrm{cl}(U_1) \subset f^{-n_1}(\mathrm{cl}(W))$. Así,

$$f^{n_1}(\mathrm{cl}(U_1)) \subset f^{n_1}(f^{-n_1}(\mathrm{cl}(W)))$$

De donde, por el inciso (1) de la Observación 2.1.4, se obtiene que $f^{n_1}(f^{-n_1}(\mathrm{cl}(W))) \subset \mathrm{cl}(W)$. En consecuencia, $f^{n_1}(\mathrm{cl}(U_1)) \subset \mathrm{cl}(W)$. Así,

$$V \setminus \mathrm{cl}(W) \subseteq V \setminus f^{n_1}(\mathrm{cl}(U_1)). \tag{3.15}$$

De (3.12), resulta que $y \in V \setminus \mathrm{cl}(W)$ y por (3.15) se obtiene que $y \in V \setminus f^{n_1}(\mathrm{cl}(U_1)) = V_1$. Por lo tanto, $V_1 \neq \emptyset$. Finalmente, por la Proposición 1.3.11, se satisface que f es una función cerrada. Luego, por el inciso (2) de la Observación 2.1.8, se deduce que f^{n_1} es una función cerrada. Así, $f^{n_1}(\mathrm{cl}(U_1))$ es un subconjunto cerrado en X. Por lo tanto, $V_1 = V \setminus f^{n_1}(\mathrm{cl}(U_1))$ es un subconjunto abierto en X.

Supongamos ahora que el resultado es verdadero para cuando $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset N_f(U, V)$. Probemos que se cumple para $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}\} \subset N_f(U, V)$.

Notemos que $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset N_f(U, V)$. Por hipótesis de inducción, existe un subconjunto abierto no vacío U_0 en X tal que $U_0 \subseteq U$ y $V_0 = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_0))$ es un subconjunto abierto no vacío en X. Luego, como V_0 es abierto no vacío, por la Proposición 1.2.28, existen $x, y \in V_0$ tales que $x \neq y$. Así, por la Proposición 1.2.14, existe un subconjunto abierto no vacío W en X tal que:

$$x \in W \text{ y } y \notin \mathrm{cl}(W). \tag{3.16}$$

Consideremos los siguientes casos:

(a) $U_0 \cap f^{-n_{k+1}}(W) = \emptyset$. Definamos $U_1 = U_0$ y $V_1 = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_0))$. Por hipótesis de inducción, se tiene que U_1 es abierto no vacío en X y $U_1 \subset U$. Veamos que V_1 es abierto no vacío en X. Notemos que:

$$\begin{aligned} V_1 &= V \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_0)) \\ &= \left(V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_0)) \right) \cap (V \setminus f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_0))) \\ &= V_0 \cap (V \setminus f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_0))) \,. \end{aligned}$$

Luego, como $U_0 \cap f^{-n_{k+1}}(W) = \emptyset$, por la Proposición 1.2.13, se obtiene que $\mathrm{cl}(U_0) \cap f^{-n_{k+1}}(W) = \emptyset$. De donde, por la Proposición 2.2.22, se cumple que $f^{n_{k+1}}\big(\mathrm{cl}(U_0)\big) \cap$

$W = \emptyset$. Además, como $x \in W$, se tiene que $x \notin f^{n_{k+1}}\big(\mathrm{cl}(U_0)\big)$. Luego, $x \in V \setminus f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_0))$. Así, como $x \in V_0$, se concluye que $x \in V_0 \cap \big(V \setminus f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_0))\big) = V_1$. Por lo tanto, V_1 es no vacío.
Por otro lado, de la Proposición 1.3.11, se deduce que f es una función cerrada. Luego, por el inciso (1) de la Observación 2.1.8, se obtiene que $f^{n_{k+1}}$, es una función cerrada. Así, $f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_0))$ es un subconjunto cerrado en X. En consecuencia, $V \setminus f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_0))$ es abierto en X. Además, como V_0 es abierto en X, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se concluye que V_1 es abierto en X.

(b) $U_0 \cap f^{-n_{k+1}}(W) \neq \emptyset$. Definamos

$$U_1 = U_0 \cap f^{-n_{k+1}}(W) \text{ y } V_1 = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1)). \tag{3.17}$$

Veamos que U_1 y V_1 son subconjuntos abiertos no vacíos en X y que $U_1 \subset U$. Notemos que U_0 es un subconjunto abierto en X. Además, como W es un subconjunto abierto en X, por la continuidad de f, se tiene que $f^{-n_{k+1}}(W)$ es un subconjunto abierto en X. Luego, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se obtiene que $U_1 = U_0 \cap f^{-n_{k+1}}(W)$ es un subconjunto abierto en X. Y por el supuesto se concluye que U_1 es no vacío. Por otro lado, de (3.17), se deduce que $U_1 \subset U_0$. Además, por hipótesis de inducción, se satisface que $U_0 \subset U$. Por lo tanto, $U_1 \subset U$. En lo que resta de la prueba verifiquemos que V_1 es un subconjunto abierto no vacío en X. Notemos que,

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1)) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))\right) \cup f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_1)) \tag{3.18}$$

Luego, por (3.17) se tiene que $U_1 \subset f^{-n_{k+1}}(W)$, en consecuencia

$$\mathrm{cl}(U_1) \subset \mathrm{cl}(f^{-n_{k+1}}(W)). \tag{3.19}$$

Por otro lado, por el inciso (5) del Teorema 2.1.9, se obtiene que $\mathrm{cl}(f^{-n_{k+1}}(W)) \subset f^{-n_{k+1}}(\mathrm{cl}(W))$. Así, por (3.19), se concluye que $\mathrm{cl}(U_1) \subset f^{-n_{k+1}}(\mathrm{cl}(W))$. De donde, $f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_1)) \subset f^{n_{k+1}}(f^{-n_{k+1}}(\mathrm{cl}(W)))$. Luego, por el inciso (1) de la Observación 2.1.4, se sigue que $f^{n_{k+1}}(f^{-n_{k+1}}(\mathrm{cl}(W))) \subset \mathrm{cl}(W)$. Por lo tanto,

$$f^{n_{k+1}}(\mathrm{cl}(U_1)) \subset \mathrm{cl}(W). \tag{3.20}$$

De (3.18) y (3.20) se deduce que:

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1)) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))\right) \cup \mathrm{cl}(W).$$

De donde:

$$V \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1)) \cup \mathrm{cl}(W)\right] \subset V \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1)) = V_1.$$

O bien,

$$\left(V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))\right) \cap (V \setminus \mathrm{cl}(W)) \subset V_1. \tag{3.21}$$

Por otro lado, por (3.17) se cumple que $U_1 \subset U_0$, luego $\mathrm{cl}(U_1) \subset \mathrm{cl}(U_0)$. Así,

$$\bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_0)).$$

En consecuencia,

$$V_0 = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_0)) \subset V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1)). \tag{3.22}$$

Además, como $y \in V_0$, se obtiene que $y \in V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))$. Así, por (3.16), se deduce que $y \in V \setminus \mathrm{cl}(W)$. Lo anterior implica que, $y \in \left(V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))\right) \cap (V \setminus \mathrm{cl}(W))$. Así, de (3.21), se obtiene que $y \in V_1$. Por lo tanto, V_1 es un subconjunto no vacío de X. Además, por la Proposición 1.3.11, obtenemos que f es una función cerrada. Luego, por el inciso (1) de la Observación 2.1.8, se tiene que f^{n_i}, con $i \in \{i, 2, \ldots, k+1\}$, es una función cerrada. Así, $f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))$, con $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$, son subconjuntos cerrados en X. Por el inciso (4) del Teorema 1.2.10, se concluye que $\bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))$ es cerrado en X. Por lo tanto, V_1 es un subconjunto abierto en X.

Con todo, se cumple el resultado. ■

A continuación se muestra un resultado que indica propiedades principales del conjunto omega límite de un punto con respecto a la familia $\mathcal{N}_f$.

Lema 3.3.2. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. El conjunto $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es un subconjunto cerrado en X y + invariante bajo f.

Demostración. Primero probaremos que el conjunto $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es + invariante bajo f, es decir $f(\omega_{\mathcal{N}_f}(x)) \subset \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Para esto, sea $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ y veamos que $f(y) \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.2.12, basta verificar que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad G de $f(y)$ y para cualesquiera subconjuntos abiertos U y V no vacíos en X. Sean $G_{f(y)}$ una vecindad de $f(y)$ y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Veamos que $N_f(x, G_{f(y)}) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Como $G_{f(y)}$ es una vecindad de $f(y)$, existe $W \subset X$ abierto tal que:

$$f(y) \in W \subset G_{f(y)}.$$

En consecuencia,

$$y \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(G_{f(y)}).$$

Dado que f es continua, $f^{-1}(W)$ es un conjunto abierto. Luego, $f^{-1}(G_{f(y)})$ es una vecindad de y. Puesto que $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$, por la Observación 3.2.12, aplicada a los conjuntos U, $f^{-1}(V)$ y a la vecindad $f^{-1}(G_{f(y)})$ se obtiene que:

$$N_f(x, f^{-1}(G_{f(y)})) \cap N_f(U, f^{-1}(V)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$n \in N_f(x, f^{-1}(G_{f(y)})) \quad \text{y} \quad n \in N_f(U, f^{-1}(V)). \tag{3.23}$$

De (3.23), se obtiene que $f^n(x) \in f^{-1}(G_{f(y)})$. Por el inciso (2) de la Proposición 2.1.3, se tiene que $f^{n+1}(x) \in G_{f(y)}$. En consecuencia

$$n + 1 \in N_f(x, G_{f(y)}) \tag{3.24}$$

Por otro lado, aplicando nuevamente (3.23), se obtiene que $U \cap f^{-n}(f^{-1}(V)) \neq \emptyset$. Por el inciso (2) de la Proposición 2.1.3, se tiene que $U \cap f^{-(n+1)}(V) \neq \emptyset$. Esto implica que:

$$n + 1 \in N_f(U, V). \tag{3.25}$$

Así, por (3.24) y (3.25), se deduce que:

$$n + 1 \in N_f(x, G_{f(y)}) \cap N_f(U, V).$$

Luego, $N_f(x, G_{f(y)}) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(y) \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$.
En el resto de la prueba veremos que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es un conjunto cerrado en X. Por el inciso (2) del Teorema 1.2.11, basta verificar que $\mathrm{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x)) = \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Ahora, por el inciso (3) de la Observación 1.2.8, se tiene que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \subset \mathrm{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x))$, por lo cual sólo falta probar la otra contención para obtener lo deseado. Sea $z \in \mathrm{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x))$ y veamos que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.2.12, basta verificar que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad G de z y para cualesquiera U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Para esto, sean G_z una vecindad de z y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Veamos que $N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Como $z \in \mathrm{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x))$ y G_z es una vecindad de z, por el Teorema 1.2.12, se satisface que:

$$\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap G_z \neq \emptyset.$$

Luego, existe $y \in X$ tal que:

$$y \in G_z \text{ y } y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x). \tag{3.26}$$

Así, por (3.26), se tiene que G_z es una vecindad de y. Nuevamente, aplicando (3.26) resulta que $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.2.12, aplicado a los conjuntos G_z, U y V se cumple que:

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x)) \subset \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por ambas contenciones se tiene la igualdad. ■

Lema 3.3.3. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si (X, f) es compacto transitivo, entonces el conjunto $N_f(x, G_y) \cap N_f(U, V)$ es infinito para cualquier $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$, para cada vecindad G_y de y y cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X.

Demostración. Supongamos que (X, f) es compacto transitivo y que existen $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$, una vecindad G_z de z y U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X tales que $N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V)$ es finito. Sin perder generalidad supongamos que,

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V) = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}. \tag{3.27}$$

Luego, $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset N_f(U, V)$. Así, por la Proposición 3.3.1, existe un subconjunto U_1 abierto no vacío de X tal que $U_1 \subset U$ y $V_1 = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))$ es abierto y no vacío en X. Notemos que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned} f^{n_i}(U_1) \cap V_1 &= f^{n_i}(U_1) \cap \left[V \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^{k} f^{n_j}(\mathrm{cl}(U_1))\right] \\ &= f^{n_i}(U_1) \cap \left[\textstyle\bigcap_{j=1}^{k} V \setminus f^{n_j}(\mathrm{cl}(U_1))\right] \\ &\subset f^{n_i}(U_1) \cap [V \setminus f^{n_i}(\mathrm{cl}(U_1))] = \emptyset. \end{aligned}$$

Esto implica que $f^{n_i}(U_1) \cap V_1 = \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Por la Proposición 2.2.22, se tiene que $U_1 \cap f^{-n_i}(V_1) = \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, $N_f(U_1, V_1) \cap \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = \emptyset$. Así,

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) \cap \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = \emptyset. \tag{3.28}$$

Por otro lado, notemos que $U_1 \subset U$ y $V_1 \subset V$. Así, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, se satisface que $N_f(U_1, V_1) \subset N_f(U, V)$. Esto implica que:

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) \subset N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V). \tag{3.29}$$

Luego, de (3.27) y (3.29), se concluye que:

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) \subset \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}. \tag{3.30}$$

Por otra parte, por (3.28) y (3.30), se concluye que $N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) = N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) \cap \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = \emptyset$. Así, $N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) = \emptyset$. Lo cual es una contradicción al hecho de que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por lo tanto, $N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V)$ es infinito. ■

Corolario 3.3.4. Sean (X, f) un sistema dinámico compacto transitivo y $x \in X$. Si x es un punto minimal y M es un conjunto minimal tal que $x \in M$, entonces $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \omega(x, f) = M$.

Demostración. Supongamos que x es un punto minimal y M un subconjunto minimal tal que $x \in M$. Demostramos que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \omega(x, f)$. Primero verifiquemos que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \subset \omega(x, f)$. Para esto, sea $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ y veamos que $y \in \omega(f, x)$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y B una vecindad de y. Como $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$, por la Observación 3.2.12, se tiene que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \tag{3.31}$$

para cualquier vecindad G de y y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X. De (3.31), aplicado a la vecindad B se deduce que:

$$N_f(x, B) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset.$$

Luego, por el Lema 3.3.3, se obtiene que $N_f(x,B) \cap N_f(U,V) \neq \emptyset$ es infinito. Así, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in N_f(x,B) \cap N_f(U,V)$ y $n \geq k$. Esto implica que, $f^n(x) \in B$. En consecuencia, $y \in \omega(x,f)$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \subset \omega(x,f)$.
Ahora, veamos que $\omega(x,f) \subset M$. Sea $y \in \omega(x,f)$ y B una vecindad de y. Por hipótesis se cumple que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$ y:

$$f^n(x) \in B. \tag{3.32}$$

Por otro lado, como M es minimal, se tiene que M es + invariante. Además, puesto que $x \in M$ se cumple que:

$$f^n(x) \in M. \tag{3.33}$$

Luego, por (3.32) y (3.33), se deduce que $B \cap M \neq \emptyset$. Esto implica que $y \in \mathrm{cl}(M) = M$. Por lo tanto $\omega(x,f) \subset M$. Así, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \subset \omega(x,f) \subset M$. Por el Lema 3.3.2, se sabe que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es cerrado y + invariante, dado que M es minimal resulta que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = M$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \omega(x,f) = M$. ■

Lema 3.3.5. Sea (X,f) un sistema dinámico. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) (X,f) es mezclante.

(2) Para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, se cumple que $N_f(U,V)$ es cofinito.

Demostración. Supongamos que (X,f) es mezclante y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Demostraremos que $N_f(U,V)$ es cofinito. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$, para todo $k \geq n$. Así,

$$\{n, n+1, \ldots\} \subset N_f(U,V).$$

Por lo tanto, $N_f(U,V)$ es cofinito.
Recíprocamente, supongamos (2) y veamos que (X,f) es mezclante. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por hipótesis, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{m, m+1, \ldots\} \subset N_f(U,V)$. Luego $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$, para todo $k \geq m$. Por lo tanto, (X,f) es mezclante. ■

Observación 3.3.6. Si (X,f) es un sistema dinámico débilmente mezclante, entonces por el Lema 3.3.5 y la Observación 3.1.7, se obtiene que $N_f(U,V) \neq \emptyset$, para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X.

A continuación mostramos un resultado el cual relaciona a los sistemas dinámicos débilmente mezclante con los conjuntos thick, dándonos una alternativa para verificar cuando un sistema dinámico es de este tipo, además de ayudarnos a probar otros resultados.

Cabe resaltar que el Teorema 3.3.7 fue tomado como referencia de [14] y fue adaptado para nuestros fines.

Teorema 3.3.7. Sea (X,f) un sistema dinámico. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) (X, f) es débilmente mezclante.

(2) Para cada U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos en X, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V, en X tales que:

$$N_f(U, V) \subset N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2) \ \text{ y } \ N_f(U, V) \neq \emptyset.$$

(3) Para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_k$ y $V_1, \ldots, V_k$ de X, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \in \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i)$.

(4) Para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, se cumple que el conjunto $N_f(U, V)$ es thick.

(5) Para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset \text{ y } U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset.$$

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X. Como (X, f) es débilmente mezclante, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$U_1 \cap f^{-k}(U_1) \neq \emptyset \quad \text{ y } \quad V_1 \cap f^{-k}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.34}$$

Sean

$$U = U_1 \cap f^{-k}(U_2) \quad \text{ y } \quad V = V_1 \cap f^{-k}(V_2). \tag{3.35}$$

Note que U_1 es abierto en X, y por la continuidad de f, $f^{-k}(U_2)$ es también abierto en X. Luego, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se obtiene que $U = U_1 \cap f^{-k}(U_2)$ es un subconjunto abierto en X. Análogamente, se verifica que $V = V_1 \cap f^{-k}(V_2)$ es un subconjunto abierto en X. Además, de (3.34), se deduce que U y V son no vacíos. Veamos que $N_f(U, V) \neq \emptyset$ y que $N_f(U, V) \subset N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$. Como (X, f) es débilmente mezclante, por la Observación 3.3.6, se satisface que $N_f(U, V) \neq \emptyset$. Ahora veamos que $N_f(U, V) \subset N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$. Para esto, sea

$$n \in N_f(U, V). \tag{3.36}$$

Veamos que $n \in N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$. Notemos que, de (3.35), se obtiene que $U \subset U_1$ y que $V \subset V_1$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, resulta que:

$$N_f(U, V) \subset N_f(U_1, V_1) \tag{3.37}$$

Así, de (3.36) y (3.37), se sigue que:

$$n \in N_f(U_1, V_1). \tag{3.38}$$

Nuevamente, aplicando (3.35), se tiene que $U \subset f^{-k}(U_2)$ y $V \subset f^{-k}(V_2)$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, se obtiene que:

$$N_f(U, V) \subset N_f(f^{-k}(U_2), f^{-k}(V_2)). \tag{3.39}$$

Así, por (3.36) y (3.39), $n \in N_f(f^{-k}(U_2), f^{-k}(V_2))$. Luego, por la Proposición 3.1.3, se sigue que

$$n \in N_f(U_2, V_2). \tag{3.40}$$

En consecuencia, de (3.38) y (3.40) resulta que:

$$n \in N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2). \tag{3.41}$$

Por lo tanto, de (3.36) y (3.41) se concluye que $N_f(U, V) \subset N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$.
Ahora veamos que (2) implica (3). Hagamos la prueba por inducción sobre k. Para el caso base tomemos $k = 2$. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, tales que:

$$N_f(U, V) \subset N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2) \quad \text{y} \quad N_f(U, V) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que $n \in N_f(U, V)$ y $n \in N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$.
Supongamos ahora que se cumple para k y probemos que se cumple para $k+1$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, sean U_i y V_i subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por el caso base, para los subconjuntos U_1, U_2, V_1 y V_2, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$U_1 \cap f^{-n_0}(U_2) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad V_1 \cap f^{-n_0}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.42}$$

Definamos

$$U = U_1 \cap f^{-n_0}(U_2) \quad \text{y} \quad V = V_1 \cap f^{-n_0}(V_2). \tag{3.43}$$

Note que U_1 es un abierto en X, además por la continuidad de f, resulta que $f^{-n_0}(U_2)$ es también abierto en X. Así, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se deduce que U es un subconjunto abierto en X. Análogamente, se verifica que V es abierto en X. Además, por (3.42) y (3.43), se obtiene que U y V son no vacíos. Aplicando hipótesis de inducción a los conjuntos U, V, U_i y V_i, con $i \in \{3, \ldots, k+1\}$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset \;\text{ y }\; U_i \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset, \;\text{ para } i \in \{3, \ldots, k+1\}. \tag{3.44}$$

De (3.44), se sigue que

$$n \in N_f(U, V). \tag{3.45}$$

Por otro lado, de (3.43), se satisface que $U \subset U_1$ y $V \subset V_1$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, se deduce que:

$$N_f(U, V) \subset N_f(U_1, V_1). \tag{3.46}$$

Así, de (3.45) y (3.46), obtenemos que $n \in N_f(U_1, V_1)$. De donde,

$$U_1 \cap f^{-n}(V_1) \neq \emptyset. \tag{3.47}$$

Nuevamente, de (3.43), resulta que $U \subset f^{-n_0}(U_2)$ y $V \subset f^{-n_0}(V_2)$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, se obtiene que:

$$N_f(U, V) \subset N_f(f^{-n_0}(U_2), f^{-n_0}(V_2)). \tag{3.48}$$

Así, por (3.45) y (3.48), se satisface que:

$$n \in N_f(f^{-n_0}(U_2), f^{-n_0}(V_2)).$$

Luego, por la Proposición 3.1.3, se cumple que $n \in N_f(U_2, V_2)$. En consecuencia

$$U_2 \cap f^{-n}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.49}$$

Por lo tanto, de (3.44), (3.47) y (3.49) se concluye que $U_i \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \ldots, k+1\}$.
Ahora veamos que (3) implica (4). Para esto sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Veamos que $N_f(U, V)$ es thick. Sea $p \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, p+1\}$, definamos $U_i = U$ y $V_i = f^{-i}(V)$. Por la continuidad de f, se tiene que $f^{-i}(V)$ es abierto en X, para todo $i \in \{1, \ldots, p+1\}$. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $U_i \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \ldots, p+1\}$. Luego, por el inciso (1) de la Proposición 2.1.3, se obtiene que:

$$U \cap f^{-n}(f^{-i}(V)) = U \cap f^{-(n+i)}(V) \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, p+1\}.$$

Así, $n+i \in N_f(U, V)$, para cada $i \in \{1, \ldots, p+1\}$, es decir, $\{n+1, n+2, \ldots, n+p+1\} \subset N_f(U, V)$. Por lo tanto $N_f(U, V)$ es thick.
Probemos que (4) implica (5). Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por hipótesis, $N_f(U, V)$ es thick. Así, por el inciso (1) de la Observación 3.1.7, se deduce que $N_f(U, V) \neq \emptyset$. Luego, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset. \tag{3.50}$$

Sea

$$W = U \cap f^{-k}(V). \tag{3.51}$$

Note que U es un abierto en X. Además, por la continuidad de f resulta que $f^{-k}(V)$ es un abierto en X. Así, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se obtiene que W es un subconjunto abierto en X. Por (3.50), W es no vacío. Nuevamente, por hipótesis, se deduce que $N_f(W, W)$ es thick. Luego, para k, existe $n \in N$ tal que:

$$\{n, n+1, \ldots, n+k\} \subset N_f(W, W). \tag{3.52}$$

Por otro lado, de (3.51), se verifica que $W \subset U$ y $W \subset f^{-k}(V)$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, obtenemos que:

$$N_f(W, W) \subset N_f(U, f^{-k}(V)). \tag{3.53}$$

De (3.52) y de (3.53), se deduce que $n \in N_f(U, f^{-k}(V))$. Luego, $U \cap f^{-n}(f^{-k}(V)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, por el inciso (1) de la Proposición 2.1.3, resulta que:

$$U \cap f^{-(n+k)}(V) \neq \emptyset. \tag{3.54}$$

Nuevamente, de (3.51), se deduce que $W \subset U$. Así, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, resulta que

$$N_f(W, W) \subset N_f(U, U). \tag{3.55}$$

Luego, por (3.52) y (3.55), se satisface que $n + k \in N_f(U,U)$. Así,

$$U \cap f^{-(n+k)}(U) \neq \emptyset. \tag{3.56}$$

Por lo tanto, de (3.54) y (3.56), se concluye lo deseado.
Finalmente, probemos que (5) implica (1). Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos de X abiertos y no vacíos. Por hipótesis, existe $k_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$U_1 \cap f^{-k_1}(U_2) \neq \emptyset. \tag{3.57}$$

Definamos

$$A = U_1 \cap f^{-k_1}(U_2). \tag{3.58}$$

Observe que U_1 es abierto en X. Además, por la continuidad de f, resulta que $f^{-k_1}(U_2)$ es también abierto en X. Luego, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se obtiene que A es un abierto en X. Además, por (3.57), A es no vacío. Por otro lado, notemos que A y $f^{-k_1}(V_2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X. Nuevamente, por hipótesis, aplicado a los conjuntos A y $f^{-k_1}(V_2)$, existe $k_2 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $A \cap f^{-k_2}(f^{-k_1}(V_2)) \neq \emptyset$, luego por el inciso (1) de la Proposición 2.1.3, se satisface que:

$$A \cap f^{-(k_1+k_2)}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.59}$$

Ahora, sea

$$B = A \cap f^{-(k_1+k_2)}(V_2). \tag{3.60}$$

Note que por la continuidad de f, resulta que $f^{-(k_1+k_2)}(V_2)$ es abierto en X. Además, A es abierto. Así, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se deduce que B es un subconjunto abierto en X. Luego, de (3.59), se tiene que B es no vacío. Observe que B y $f^{-k_2}(V_1)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X. Nuevamente, aplicando la hipótesis a los conjuntos B y $f^{-k_2}(V)$, existe $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$B \cap f^{-k_3}(B) \neq \emptyset \text{ y } B \cap f^{-k_3}(f^{-k_2}(V_1)) \neq \emptyset.$$

De donde:

$$k_3 \in N_f(B,B) \tag{3.61}$$

y por el inciso (1) de la Proposición 2.1.3, obtenemos que $B \cap f^{-(k_2+k_3)}(V_1) \neq \emptyset$. Así,

$$k_2 + k_3 \in N_f(B, V_1). \tag{3.62}$$

Por otro lado, por (3.60) y (3.58), se satisface que $B \subset A \subset f^{-k_1}(U_2)$. Nuevamente de (3.60), se deduce que $B \subset f^{-(k_1+k_2)}(V_2)$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, se cumple que

$$N_f(B,B) \subset N_f(f^{-k_1}(U_2), f^{-(k_1+k_2)}(V_2). \tag{3.63}$$

Luego, de (3.61) y (3.63), se satisface que $k_3 \in N_f(f^{-k_1}(U_2), f^{-(k_1+k_2)}(V_2))$. Así,

$$f^{-k_1}(U_2) \cap f^{-k_3}(f^{-(k_1+k_2)}(V_2)) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $f^{-k_1}(U_2 \cap f^{-(k_2+k_3)}(V_2)) \neq \emptyset$. Por lo tanto,

$$U_2 \cap f^{-(k_2+k_3)}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.64}$$

Por otro lado, de (3.60) y (3.58), resulta que $B \subset A \subset U_1$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, se cumple que

$$N_f(B, V_1) \subset N_f(U_1, V_1). \tag{3.65}$$

Así, de (3.62) y (3.65), se deduce que $k_2 + k_3 \in N_f(U_1, V_1)$. De donde,

$$U_1 \cap f^{-(k_2+k_3)}(V_1) \neq \emptyset. \tag{3.66}$$

Por lo tanto, de (3.64) y (3.66), se concluye que (X, f) es débilmente mezclante. ■

Lema 3.3.8. Sean (X, f) un sistema dinámico débilmente mezclante y $k \in \mathbb{N}$. Para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_k$ y $V_1, \ldots, V_k$ de X, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X tales que $N_f(U, V) \neq \emptyset$ y $N_f(U, V) \subset \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i)$.

Demostración. Hagamos la prueba utilizando inducción matemática sobre k. Para $k = 2$. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X. Como (X, f) es débilmente mezclante, por el inciso (2) del Teorema 3.3.7, existen subconjuntos abiertos no vacíos U' y V' de X tales que $N_f(U', V') \neq \emptyset$ y $N_f(U', V') \subset N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$. Supongamos que el resultado es verdadero para k y probemos que se cumple para $k+1$. Sean $U_1, \ldots, U_{k+1}$ y $V_1, \ldots, V_{k+1}$ subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por hipótesis de inducción, para los subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_k$ y $V_1, \ldots, V_k$ de X, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_0 y V_0 de X, tales que $N_f(U_0, V_0) \neq \emptyset$ y además

$$N_f(U_0, V_0) \subset \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i).$$

De donde, se obtiene que:

$$N_f(U_0, V_0) \cap N_f(U_{k+1}, V_{k+1}) \subset \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i) \cap N_f(U_{k+1}, V_{k+1}) = \bigcap_{i=1}^{k+1} N_f(U_i, V_i). \tag{3.67}$$

Luego, por el caso base, para los subconjuntos $N_f(U_0, V_0)$ y $N_f(U_{k+1}, V_{k+1})$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, tales que $N_f(U, V) \neq \emptyset$ y

$$N_f(U, V) \subset N_f(U_0, V_0) \cap N_f(U_{k+1}, V_{k+1}). \tag{3.68}$$

Por lo tanto, por (3.67) y (3.68), se concluye que $N_f(U, V) \subset \bigcap_{i=1}^{k+1} N_f(U_i, V_i)$. ■

Proposición 3.3.9. Sean (X, f) un sistema dinámico débilmente mezclante y $k \in \mathbb{N}$. Si $N_f(U_i, V_i)$ es thick, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i)$ es thick.

Demostración. Supongamos que $N_f(U_i, V_i)$ es thick, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Por el Lema 3.3.8, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, tales que:

$$N_f(U, V) \subset \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i). \tag{3.69}$$

Además, como (X, f) es débilmente mezclante, por el inciso (4) del Teorema 3.3.7, se tiene que $N_f(U, V)$ es thick. Finalmente, por la Proposición 3.1.9, de (3.69), se concluye que $\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i)$ es thick. ■

Teorema 3.3.10. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es mezclante, entonces (X, f) es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que (X, f) es mezclante. Probemos que (X, f) es débilmente mezclante. Por el inciso (4) del Teorema 3.3.7, basta verificar que para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, se cumple que $N_f(U, V)$ es thick. Para eso, sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Puesto que (X, f) es mezclante, por el Lema 3.3.5, se tiene que $N_f(U, V)$ es cofinito. Luego, de la Proposición 3.1.10, se tiene que $N_f(U, V)$ es thick. Por lo tanto, (X, f) es débilmente mezclante. ■

Lema 3.3.11. Sean (X, f) un sistema dinámico débilmente mezclante, W un subconjunto cerrado y no vacío en X y $x \in X$. Si $N_f(x, W)$ es sindético, entonces $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap W \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $N_f(x, W)$ es sindético y que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap W = \emptyset$, es decir, para todo $y \in W$ se tiene que $y \notin \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.2.12, se tiene que para cada $y \in W$, existe una vecindad G_y de y y subconjuntos abiertos no vacíos U_y y V_y de X, tales que:

$$N_f(x, G_y) \cap N_f(U_y, V_y) = \emptyset. \tag{3.70}$$

Sea $\mathcal{C} = \{\mathrm{int}(G_y) \subset X : y \in W\}$. Notemos que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta para W. Como X es compacto y W es cerrado en X, por el Teorema 1.2.25, se tiene que W es compacto. Así, existen $y_1, \ldots, y_k$ en W tales que $\mathcal{C}' = \{\mathrm{int}(G_{y_1}), \mathrm{int}(G_{y_2}), \ldots, \mathrm{int}(G_{y_k})\}$ es una subcubierta para W. Por otro lado, como (X, f) es débilmente mezclante, por el inciso (4) del Teorema 3.3.7, se tiene que $N_f(U_{y_i}, V_{y_i})$ es thick, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, por la Proposición 3.3.9, se obtiene que $\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_{y_i}, V_{y_i})$ es thick. Además, por hipótesis, se tiene que $N_f(x, W)$ es sindético. Así, por la Proposición 3.1.12, se sigue que:

$$\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_{y_i}, V_{y_i}) \cap N_f(x, W) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \in \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_{y_i}, V_{y_i})$ y $n \in N_f(x, W)$. En consecuencia, $f^n(x) \in W$. Dado que $\mathcal{C}'$ es una subcubierta para W, existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $f^n(x) \in \mathrm{int}(G_{y_j})$, lo cual implica que $f^n(x) \in G_{y_j}$. De donde:

$$n \in N_f(x, G_{y_j}) \tag{3.71}$$

Por otra parte, como $n \in \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_{y_i}, V_{y_i})$, resulta que:

$$n \in N_f(U_{y_j}, V_{y_j}) \tag{3.72}$$

En consecuencia, de (3.71) y (3.72), se concluye que $n \in N_f(x, G_{y_j}) \cap N_f(U_{y_j}, V_{y_j})$, lo cual es una contradicción a (3.70). Esta surgió de suponer que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap W = \emptyset$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap W \neq \emptyset$. ■

Del Lema 3.3.11 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.12. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces (X, f) es compacto transitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es débilmente mezclante. Para verificar que (X, f) es compacto transitivo, por la Proposición 3.2.14, basta verificar que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$, para cada $x \in X$. Para esto, sea $x \in X$. Notemos que $X \subset X$ y es cerrado en sí mismo, además $N_f(x, X)$ es sindético. Por el Lema 3.3.11, se tiene que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap X = \omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es compacto transitivo. ■

El Ejemplo 3.3.13 fue probado en [41, Proposición 1.6.5, pág. 44].

Ejemplo 3.3.13. La función tienda es débilmente mezclante en el intervalo $[0, 1]$.

Como consecuencia del Ejemplo 3.3.13 y del Teorema 3.3.12, se obtiene el siguiente resultado.

Ejemplo 3.3.14. La función tienda es compacto transitiva en el intervalo $[0, 1]$.

3.4. Compacto transitividad y su relación con tipos de transitividad

En esta sección se muestra una equivalencia más de sistema dinámico compacto transitivo. Se estudia también la relación entre estos sistemas y los de tipo transitivo.

Lema 3.4.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) (X, f) es compacto transitivo.

(2) (X, f) es transitivo y para todo $x \in X$ existe un punto $z \in X$, tal que $N_f(x, G) \cap N_f(W, f^{-k}(W)) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad G de z, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ y para cualquier subconjunto W abierto no vacío en X.

Demostración. Supongamos que (X, f) es compacto transitivo. Veamos que se cumple (2). Para esto, primero probemos que (X, f) es transitivo. Sean $x \in X$ y U_1 y V_1 abiertos no vacíos en X. Por hipótesis, existe $z \in X$ tal que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \tag{3.73}$$

para cada vecindad G de z y para cualesquiera U y V abiertos no vacíos en X. Aplicando (3.73) a los conjuntos U_1 y V_1 se tiene que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U_1, V_1) \neq \emptyset.$$

Así, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \in N_f(x, G)$ y $n \in N_f(U_1, V_1)$. Luego, $f^n(x) \in G$ y $U_1 \cap f^{-n}(V_1) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es transitivo.
Ahora probemos la segunda parte de (2), es decir, que para cualquier punto $x \in X$ existe un punto $z \in X$, tal que $N_f(x, G) \cap N_f(W, f^{-k}(W)) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z, para cualquier W subconjunto abierto no vacío en X y para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Para esto, sea $x \in X$. Como (X, f) es compacto transitivo, para x, existe $z_1 \in X$ tal que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \tag{3.74}$$

para cada vecindad G de z_1 y para cualesquiera abiertos no vacíos U y V en X. Definamos $z = z_1$. Sean Z una vecindad de z, W un subconjunto abierto no vacío en X y $k \in \mathbb{Z}_+$. Notemos que W es abierto en X. Además, por la continuidad de f, $f^{-k}(W)$, también es abierto en X. Aplicando (3.74) a los conjuntos Z, W y $f^{-k}(W)$, se tiene que:

$$N_f(x, Z) \cap N_f(W, f^{-k}(W)) \neq \emptyset.$$

Dado que Z, W y k son arbitrarios se prueba lo deseado.
Ahora probemos que (2) implica (1), es decir, veamos que (X, f) es compacto transitivo. Para esto, sea $x \in X$. Por el supuesto, existe $z_1 \in X$ tal que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(W, f^{-k}(W)) \neq \emptyset, \tag{3.75}$$

para cualquier vecindad G de z_1, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ y para cualquier subconjunto W abierto no vacío en X. Definamos $z = z_1$. Sean G_z una vecindad de z y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en x. Note que V es abierto en X. Además, por la continuidad de f, $f^{-m}(U)$ también es abierto en X. Así, como (X, f) es transitivo, existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$V \cap f^{-m}(U) \neq \emptyset. \tag{3.76}$$

Definamos

$$W = V \cap f^{-m}(U). \tag{3.77}$$

Por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se obtiene que W es un subconjunto abierto. Además, por (3.76), W es no vacío en X. Así, aplicando (3.75) a W y a m se cumple que:

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(W, f^{-m}(W)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$s \in N_f(x, G_z) \quad \text{y} \quad s \in N_f(W, f^{-m}(W)). \tag{3.78}$$

Por otro lado, de (3.77), se tiene que $W \subset V$, luego $f^{-m}(W) \subset f^{-m}(V)$. Nuevamente de (3.77), se deduce que $W \subset f^{-m}(U)$. Así, por el inciso (2) de la Observación 3.1.2, se obtiene que :

$$N_f(W, f^{-m}(W)) \subset N_f(f^{-m}(U), f^{-m}(V)). \tag{3.79}$$

Luego, de (3.78) y de (3.79), se satisface que $s \in N_f(f^{-m}(U), f^{-m}(V))$. De donde, por la Proposición 3.1.3, se concluye que:

$$s \in N_f(U, V). \tag{3.80}$$

Luego, de (3.78) y (3.80), $N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es compacto transitivo. ■

Del Lema 3.4.1 se obtiene el Corolario 3.4.2.

Corolario 3.4.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es compacto transitivo, entonces (X, f) es transitivo.

Una consecuencia del Corolario 3.4.2, es el Corolario 3.4.3.

Corolario 3.4.3. Sean (X, f) un sistema dinámico compacto transitivo. Para cada $x \in X$, se cumple que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = X$ o $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es denso en ninguna parte en X.

Demostración. Sea $x \in X$. Por el Corolario 3.4.2, se obtiene que (X, f) es transitivo. Además por el Lema 3.3.2, se tiene que el conjunto $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es cerrado y + invariante bajo f. Por lo tanto, por la Proposición 2.4.5, se concluye que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = X$ o $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es denso en ninguna parte en X. ■

A continuación se muestran otras propiedades que se heredan bajo conjugación topológica, relacionadas con los sistemas débilmente mezclante y compacto transitivo. Esto con el fin de dar ejemplos de estos tipos de sistemas.

Teorema 3.4.4. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados, mediante la conjugación $h : X \to Y$. El sistema dinámico (X, f) es débilmente mezclante si y sólo si el sistema dinámico (Y, g) es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que (X, f) es débilmente mezclante. Probemos que (Y, g) es débilmente mezclante. Para esto, sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en Y. Por el inciso (5) del Teorema 3.3.7, basta verificar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap g^{-n}(U) \neq \emptyset$ y $U \cap g^{-n}(V) \neq \emptyset$. Notemos que $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X. Puesto que (X, f) es débilmente mezclante, por el inciso (5) del Teorema 3.3.7, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$h^{-1}(U) \cap f^{-n}(h^{-1}(U)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad h^{-1}(U) \cap f^{-n}(h^{-1}(V)) \neq \emptyset.$$

De donde, por el inciso (2) del Corolario 2.5.5, se obtiene que:

$$h^{-1}(U) \cap h^{-1}(g^{-n}(U)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad h^{-1}(U) \cap h^{-1}(g^{-n}(V)) \neq \emptyset.$$

Luego, $h^{-1}(U \cap g^{-n}(U)) \neq \emptyset$ y $h^{-1}(U \cap g^{-n}(V)) \neq \emptyset$. Así,

$$U \cap g^{-n}(U) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad U \cap g^{-n}(V) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, (Y, g) es débilmente mezclante.
Recíprocamente, supongamos que (Y, g) es débilmente mezclante. Probemos que (X, f) es

débilmente mezclante. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por el inciso (5) del Teorema 3.3.7, basta verificar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$ y $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Por el inciso (2) del Teorema 1.3.12, se tiene que $h(U)$ y $h(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$h(U) \cap g^{-n}(h(U)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad h(U) \cap g^{-n}(h(V)) \neq \emptyset. \tag{3.81}$$

Por la Proposición 2.2.22, de (3.81) se obtiene que $g^n(h(U)) \cap h(U) \neq \emptyset$. Luego, por el inciso (1) del Corolario 2.5.6, se tiene que $h(f^n(U)) \cap h(U) \neq \emptyset$. Como h es inyectiva, $h(f^n(U) \cap U) = h(f^n(U)) \cap h(U)$. Esto implica que, $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Así, por la Proposición 2.2.22, se obtiene que $U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$. Análogamente se verifica que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es débilmente mezclante. ■

Teorema 3.4.5. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados, mediante conjugación $h : X \to Y$ y $x, z \in X$. Se tiene que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ si y sólo si $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$.

Demostración. Supongamos que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Probemos que $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$. Por la Observación 3.2.12, basta verificar que $N_g(h(x), G) \cap N_g(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de $h(z)$ y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V en Y. Para esto, sean G una vecindad de $h(z)$ y U y V subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Notemos que $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X y $h^{-1}(G)$ es una vecindad de z. Por hipótesis, se tiene que:

$$N_f(x, h^{-1}(G)) \cap N_f(h^{-1}(U), h^{-1}(V)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^n(x) \in h^{-1}(G). \tag{3.82}$$

y

$$h^{-1}(U) \cap f^{-n}(h^{-1}(V)) \neq \emptyset. \tag{3.83}$$

De (3.82), se tiene que $h(f^n(x)) \in G$. Puesto que h es una conjugación entre f y g, y por el inciso (1) del Corolario 2.5.6, se deduce que $g^n(h(x)) \in G$. Así,

$$n \in N_g(h(x), G) \tag{3.84}$$

Por otro lado, por el inciso (2) del Corolario 2.5.6 y por (3.83) resulta que $h^{-1}(U) \cap h^{-1}(g^{-n}(V)) \neq \emptyset$. Esto implica que, $U \cap g^{-n}(V) \neq \emptyset$. En consecuencia,

$$n \in N_g(U, V). \tag{3.85}$$

Así, por (3.84) y (3.85), se satisface que:

$$N_g(h(x), G) \cap N_g(U, V) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$.
Recíprocamente, supongamos que $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$. Probemos que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.2.12, basta verificar que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad

G de z y para cualesquiera subconjuntos U y V abiertos no vacíos en X. Para esto, sean G una vecindad de z y U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por el Teorema 1.3.12, resulta que $h(U)$ y $h(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Además, $h(G)$ es una vecindad de $h(z)$. Por hipótesis, obtenemos que:

$$N_g(h(x), h(G)) \cap N_g(h(U), h(V)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$g^n(h(x)) \in h(G). \tag{3.86}$$

y

$$h(U) \cap g^{-n}(h(V)) \neq \emptyset. \tag{3.87}$$

Luego, por el inciso (1) de la Proposición 2.5.5 y por (3.86), se satisface que $h(f^n(x)) \in h(G)$. Luego, $f^n(x) \in G$. Esto implica que,

$$n \in N_f(x, G). \tag{3.88}$$

Por otro lado, por la Proposición 2.5.6 y de (3.87), resulta que $g^n(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Así, por el inciso (1) del Corolario 2.5.6, se cumple que $h(f^n(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Luego, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Nuevamente, aplicando la Proposición (2.2.22), se obtiene que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Luego,

$$n \in N_f(U, V). \tag{3.89}$$

Así, de (3.88) y (3.89), se concluye que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. ■

Corolario 3.4.6. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, topológicamente conjugados, mediante la conjugación $h : X \to Y$. El sistema dinámico (X, f) es compacto transitivo si y sólo si el sistema dinámico (Y, g) es compacto transitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es compacto transitivo. Probemos que (Y, g) es compacto transitivo. Por la Proposición 3.2.14, basta verificar que $\omega_{\mathcal{N}_g}(y) \neq \emptyset$, para cada $y \in Y$. Sea $y \in Y$. Como h es sobreyectiva, existe $x \in X$, tal que $h(x) = y$. Puesto que (X, f) es compacto transitivo, existe $z \in X$ tal que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por el Teorema 3.4.5, se tiene que $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$, es decir $\omega_{\mathcal{N}_g}(y) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (Y, g) es compacto transitivo.
Recíprocamente, supongamos que (Y, g) es compacto transitivo y veamos que (X, f) es compacto transitivo. Por la Proposición 3.2.14, basta verificar que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Sea $x \in X$. Note que, $h(x) \in Y$. Puesto que (Y, g) es compacto transitivo, existe $y \in Y$, tal que $y \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$. Por el Teorema 3.4.5, existe $z \in X$, tal que $z = h^{-1}(y)$ y $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Luego, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es compacto transitivo. ■

Tipos de Sensitividad

4

La dependencia sensible a las condiciones iniciales de una función o sensibilidad de una función, para abreviar, es un ingrediente clave del caos para sistemas dinámicos (vea [11]). En este capítulo nos enfocamos en analizar varios conceptos relacionados con la sensibilidad sobre un sistema dinámico.

4.1. Definiciones y ejemplos

Definición 4.1.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que el sistema dinámico (X, f) es:

(1) *Sensitivo o sensible a las condiciones iniciales* si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo abierto U en X con $x \in U$, existen $y \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$. A la constante δ se le llama constante de sensibilidad.

(2) *Li-Yorke sensitivo* si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo abierto U en X con $x \in U$, existe $y \in U$ tal que:

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta.$$

(3) *Multi-sensitivo* si existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_k$ no vacíos en X se tiene que $\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, \delta) \neq \emptyset$.

(4) *Cofinitamente sensitivo* si existe $\delta > 0$ tal que para cada abierto no vacío U en X, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es cofinito.

(5) *Thick sensitivo* si existe $\delta > 0$ tal que para cada abierto no vacío U en X, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es thick.

(6) *Sindéticamente sensitivo* si existe $\delta > 0$ tal que para cada abierto no vacío U en X, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es sindético.

(7) *Thickly sindéticamente sensitivo (TSS)* si existe $\delta > 0$ tal que para cada abierto no vacío U en X, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es thickly sindético.

Observación 4.1.2. En términos prácticos, una función sensitiva implica que si estamos utilizando una función iterada para modelar el comportamiento a largo plazo, entonces cualquier variación de las condiciones iniciales puede dar lugar a grandes diferencias entre el comportamiento previsto.

Ejemplo 4.1.3. Sean X un continuo y consideremos $id_X : X \to X$ la función identidad. Se tiene que (X, id_X) no es sensitivo.

La Proposición 4.1.4, muestra una equivalencia de sistema dinámico sensitivo. La cual nos ayudará a mostrar otros resultados.

Proposición 4.1.4. Sea (X, f) un sistema dinámico. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) (X, f) es sensitivo.

(2) Existe $\delta > 0$, tal que para todo subconjunto abierto no vacío U de X, el conjunto $N_f(U, \delta) \neq \emptyset$.

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Supongamos que (X, f) es sensitivo, con constante de sensitividad δ_1. Sea $\delta = \delta_1$. Veamos que para todo subconjunto abierto no vacío U de X, el conjunto $N_f(U, \delta) \neq \emptyset$. Para esto, sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Como U es no vacío, existe $x \in X$ tal que $x \in U$. Por hipótesis, existen $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Así, $n \in N_f(U, \delta)$. Por lo tanto, $N_f(U, \delta) \neq \emptyset$.
La prueba de (2) implica (1), la haremos por contrarecíproco. Es decir, supongamos que no se cumple (1) y probaremos que no se cumple (2). Para esto, sean (1') y (2') como sigue:

(1') Para todo $\delta > 0$, existen $x \in X$ y un subconjunto abierto no vacío U de X con $x \in U$, tales que para todo $y \in U$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta$.

(2') Para todo $\delta > 0$, existe un subconjunto abierto no vacío U de X tal que el conjunto $N_f(U, \delta) = \emptyset$, es decir, para todo $x, y \in U$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta$.

Así, sólo basta verificar que (1') implica (2'). Supongamos que se cumple (1') y veamos que se cumple (2'). Para eso, sea $\delta > 0$. Por hipótesis, para $\frac{\delta}{2}$, existen $x \in X$ y un subconjunto abierto no vacío U de X con $x \in U$, tal que para todo $y \in U$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \frac{\delta}{2}. \tag{4.1}$$

Veamos que $N_f(U, \delta) = \emptyset$. Para eso, sean $z, w \in U$ y $k \in \mathbb{N}$. Aplicando (4.1), a los puntos z, w resulta que:

$$d(f^k(x), f^k(z)) \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad d(f^k(x), f^k(w)) \leq \frac{\delta}{2}. \tag{4.2}$$

Luego,

$$d(f^k(z), f^k(w)) \leq d(f^k(z), f^k(x)) + d(f^k(x), f^k(w)).$$

Así, por (4.2), se satisface que:

$$d(f^k(z), f^k(w)) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Con todo, se cumple (2'). Por lo tanto, (2) implica (1). ■

4.2. Relaciones en general

En esta sección mostramos las relaciones que se tienen entre los sistemas dinámicos de tipo sensitivo. Así como también se dan condiciones para que algunos de estos tipos de sistemas sean equivalentes. Lo cual nos ayuda a verificar las relaciones entre éstos y los sistemas de tipo compacto transitivo.

Proposición 4.2.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es cofinitamente sensitivo, entonces (X, f) es thickly sindéticamente sensitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es cofinitamente sensitivo. Veamos que (X, f) es tickly sindéticamente sensitivo. Para esto, sea U un subconjunto abierto no vacío en X. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $N_f(U, \delta)$ es cofinito. Luego, por la Proposición 3.1.11, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es thickly sindético. Por lo tanto, (X, f) es thickly sindéticamente sensitivo. ■

Proposición 4.2.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es thick sensitivo, entonces (X, f) es sensitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es thick sensitivo con constante de sensitividad $\delta > 0$. Sea U un subconjunto abierto no vacío en X. Por hipótesis $N_f(U, \delta)$ es thick. Luego, por el inciso (1) de la Observación 3.1.7, se tiene que $N_f(U, \delta) \neq \emptyset$. Finalmente, por la Proposición 4.1.4, se concluye que (X, f) es sensitivo. ■

Teorema 4.2.3. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces (X, f) es thick sensitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es débilmente mezclante. Probemos que (X, f) es thick sensitivo. Sean $\delta \in (0, \text{diám}(X)/4)$ y W un abierto en X. Veamos que $N_f(W, \delta)$ es thick. Como $\delta > 0$, existen $x_0, y_0 \in X$ tales que:

$$\text{diám}(X) - \delta < d(x_0, y_0).$$

Dado que $\delta < \frac{\text{diám(X)}}{4}$, se tiene que $4\delta - \delta < \text{diám}(X) - \delta < d(x_0, y_0)$. Luego,

$$3\delta < d(x_0, y_0). \tag{4.3}$$

Sean $U = B(x_0, \delta)$ y $V = B(y_0, \delta)$. Sean $x \in U$ y $y \in V$. Por la desigualdad del triángulo se tiene que:

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x) + d(x, y) + d(y, y_0).$$

Así, por (4.3), resulta que:

$$3\delta < d(x_0, y_0) \leq \delta + d(x, y) + \delta.$$

Esto implica que $\delta < d(x, y)$. Dado que x y y son puntos arbitrarios de U y V, respectivamente, se concluye que para todo $x \in U$ y para todo $y \in V$,

$$\delta < d(x, y). \tag{4.4}$$

Ahora, puesto que (X, f) es débilmente mezclante por el inciso (2) del Teorema 3.3.7, para los conjuntos abiertos U, V y W, existen abiertos U' y V' no vacíos en X tales que:

$$N_f(U', V') \neq \emptyset \text{ y } N_f(U', V') \subset N_f(W, U) \cap N_f(W, V). \tag{4.5}$$

Probemos ahora que $N_f(W, U) \cap N_f(W, V) \subset N_f(W, \delta)$. Para esto sea $n \in N_f(W, U) \cap N_f(W, V)$. Demostraremos que $n \in N_f(W, \delta)$. Es decir, veamos que $n \in \mathbb{Z}_+$ y existen $x, y \in U$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Como $n \in N_f(W, U) \cap N_f(W, V)$ se tiene que $W \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$ y $W \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Luego, de la Proposición 2.2.22, obtenemos que:

$$f^n(W) \cap U \neq \emptyset \text{ y } f^n(W) \cap V \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existen $x, y \in W$ tales que:

$$f^n(x) \in U \text{ y } f^n(y) \in V.$$

De (4.4), obtenemos que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. En consecuencia, $n \in N_f(W, \delta)$. Por lo tanto,

$$N_f(W, U) \cap N_f(W, V) \subset N_f(W, \delta). \tag{4.6}$$

Finalmente, por (4.5) y (4.6) se satisface que:

$$N_f(U', V') \subset N_f(W, \delta).$$

Como (X, f) es débilmente mezclante aplicando nuevamente el inciso (4) del Teorema 3.3.7, a los conjuntos abiertos U' y V' resulta que $N_f(U', V')$ es thick. Luego, por la Proposición 3.1.9, se concluye que $N_f(W, \delta)$ es thick. ■

De la Proposición 4.2.2 y del Teorema 4.2.3, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.2.4. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces (X, f) es sensitivo.

Teorema 4.2.5. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es thickly sindéticamente sensitivo, entonces (X, f) es multi-sensitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es thickly sindéticamente sensitivo con constante de sensitividad $\delta > 0$. Veamos que (X, f) es multi-sensitivo. Sea $k \in \mathbb{N}$. Para $i \in \{1, 2 \ldots, k\}$, sea U_i un subconjunto abierto no vacío en X. Veamos que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, \delta) \neq \emptyset$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $N_f(U_i, \delta)$ es thickly sindético. En consecuencia, por el Corolario 3.1.15, se deduce que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, \delta)$ es tickly sindético. Así, por el inciso (4) de la Observación 3.1.7, se concluye que:

$$\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, \delta) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, (X, f) es multi-sensitivo. ■

Teorema 4.2.6. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es multi-sensitivo, entonces (X, f) es thick sensitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es multi-sensitivo con constante de sensitividad δ. Verifiquemos que (X, f) es thick sensitivo. Sea U un subconjunto abierto y no vacío en X. Veamos que $N_f(U, \delta)$ es thick. Sea $k \in \mathbb{N}$. Veamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, \ldots, n+k\} \subset N_f(U, \delta)$. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ sea

$$U_i \subset f^{-i}(U) \text{ tal que diám}(f^j(U_i)) < \delta, \text{ para cada } j \in \{0, 1, \ldots, k\}. \tag{4.7}$$

Como (X, f) es multi-sensitivo, se tiene que $\bigcap\limits_{i=0}^{k} N_f(U_i, \delta) \neq \emptyset$. Luego, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \in \bigcap_{i=0}^{k} N_f(U_i, \delta)$. Así,

$$l \in N_f(U_i, \delta), \text{ para todo } i \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Luego, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, existen $x_i, y_i \in U_i$ tales que $d(f^l(x_i), f^l(y_i)) > \delta$. Por el inciso (3) de la Observación 3.1.2 y de (4.7), se obtiene que:

$$l \in \bigcap_{i=0}^{k} N_f(f^{-i}(U), \delta). \tag{4.8}$$

Nuevamente de (4.7), se deduce que $l > k$. Luego, $l - i + i \in N_f(f^{-i}(U), \delta)$. Por la Proposición 3.1.4 y (4.8), resulta que $l - i \in N_f(U_i, \delta)$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Luego,

$$\{l, l-1, \ldots, l-k\} \subset N_f(U, \delta).$$

Así, haciendo $n = l - k > 0$, se concluye que $\{n, n+1, \ldots, n+k\} \subset N_f(U, \delta)$. Por lo tanto, $N_f(U, \delta)$ es thick. ■

Del la Proposición 4.2.2 y del Teorema 4.2.6, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.2.7. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es multi-sensitivo, entonces (X, f) es sensitivo.

Una prueba alternativa del Corolario 4.2.7, que puede servir al lector es la siguiente.

Teorema 4.2.8. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es multi-sensitivo, entonces (X, f) es sensitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es multi-sensitivo, con constante de sensitividad $\delta > 0$. Demostremos que (X, f) es sensitivo aplicando la Proposición 4.1.4. Sea U un subconjunto abierto y no vacío en X. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_i = U$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Por hipótesis

$$\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, \delta) \neq \emptyset.$$

Esto implica que, $N_f(U, \delta) \neq \emptyset$. Así, se tiene que (X, f) es sensitivo. ■

En la Figura 4.1 se muestran relaciones que se cumplen entre los sistemas dinámicos de tipo sensitivo, más adelante se muestran resultados que indican cuándo se dan equivalencias entre estos tipos de sistemas.

$$\begin{tikzcd}
\text{Cofinitamente sensitivo} \arrow[d] & & \\
\text{Thickly sindéticamente sensitivo} \arrow[r] & \text{Multi-sensitivo} \arrow[d] & \\
& \text{Thick sensitivo} \arrow[r] & \text{Sensitivo}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Diagrama que muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos del tipo sensitivo.

El Teorema 4.2.9 nos indica que si el espacio X coincide con el intervalo $[0, 1]$, entonces el sistema dinámico sensitivo es cofinitamente sensitivo. Una prueba de dicho resultado la puede consultar en [43, Teorema 2].

Teorema 4.2.9. Sea $([0, 1], f)$ un sistema dinámico. Si $([0, 1], f)$ es sensitivo, entonces $([0, 1], f)$ es cofinitamente sensitivo.

Como consecuencia del Teorema 4.2.9 y de la Figura 4.1, se obtiene el corolario siguiente.

Corolario 4.2.10. Sea $([0, 1], f)$ un sistema dinámico. Los enunciados siguientes son equivalentes:

(1) $([0, 1], f)$ es cofinitamente sensitivo.

(2) $([0, 1], f)$ es thickly sindéticamente sensitivo.

(3) $([0, 1], f)$ es multi-sensitivo.

(4) $([0, 1], f)$ es thick sensitivo.

(5) $([0, 1], f)$ es sensitivo.

El Teorema 4.2.11 nos dice cuándo algunas de las relaciones de la Figura 4.1 resultan ser equivalentes.

Teorema 4.2.11. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es un M-sistema, entonces los enunciados siguientes son equivalentes:

(1) (X, f) es Multi-sensitivo.

(2) (X, f) es Thickly sindéticamente sensitivo.

(3) (X, f) es Thick sensitivo.

De la Figura 4.1, se obtiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.12. Consideremos el sistema dinámico (X, id_X), donde $id_X : X \to X$ es la función identidad. Por la Figura 4.1, se tiene que:

(1) (X, id_X) no es cofinitamente sensitivo.

(2) (X, id_X) no es thickly sindéticamente sensitivo.

(3) (X, id_X) no es multi-sensitivo.

(4) (X, id_X) no es thick sensitivo.

A continuación, mencionamos un resultado que nos permite relacionar los sistemas dinámicos mezclantes con los sistemas de tipo sensitivo. Este resultado lo puede verificar en [43, Proposición 2].

Proposición 4.2.13. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es mezclante, entonces para cualquier $\delta \in (0, \text{diám}(X))$ se cumple que (X, f) es cofinitamente sensitivo, con constante de sensitividad δ.

De la Figura 4.1 y de la Proposición 4.2.13, se obtienen el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\text{Mezclante} \arrow[d] & & \\
\text{Cofinitamente sensitivo} \arrow[d] & & \\
\text{Thickly sindéticamente sensitivo} \arrow[r] & \text{Multi-sensitivo} \arrow[d] & \\
& \text{Thick sensitivo} \arrow[r] & \text{Sensitivo}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2: Diagrama que muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos mezclantes y del tipo sensitivo.

La prueba de la Proposición 4.2.14, la puede consultar en [5, Proposición 2.1]. Dicho resultado nos ayuda a verificar otras relaciones entre estos tipos de sistemas.

Proposición 4.2.14. Sea (X, f) un sistema dinámico. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) (X, f) es transitivo.

(2) Existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X.

Teorema 4.2.15. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es thick sensitivo y transitivo, entonces (X, f) es multi-sensitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es transitivo y thick sensitivo con constante de sensitividad $\delta > 0$. Probemos que (X, f) es multi-sensitivo. Sean $U_1, U_2, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos no vacíos de X. Veamos que $\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, \delta) \neq \emptyset$. Como (X, f) es transitivo, por la Proposición 4.2.14, existe $x \in X$, tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Luego, por la Observación 1.2.31, se tiene que

$$\mathcal{O}(x, f) \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Así, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^{n_i}(x) \in U_i, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{4.9}$$

Definamos $U = \bigcap_{i=1}^{k} f^{-n_i}(U_i)$. Notemos que de (4.9), se deduce que $x \in f^{-n_i}(U_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, $x \in \bigcap_{i=1}^{k} f^{-n_i}(U_i) = U$. Así, U es no vacío. Además, por la continuidad de f y por el inciso (1) de la Observación 2.1.8, resulta que f^{n_i} es continua, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Así, por el inciso (2) del Teorema 2.1.9, se satisface que $f^{-n_i}(U_i)$, para cada $\{i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, es un conjunto abierto en X. Luego, por el inciso (2) del Teorema 1.2.10, se cumple que $\bigcap_{i=1}^{k} f^{-n_i}(U_i) = U$ es un subconjunto abierto en X. Por otro lado, notemos que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$f^{n_i}(U) = f^{n_i}\left(\bigcap_{j=1}^{k} f^{-n_j}(U_j)\right) \subset f^{n_i}(f^{-n_i}(U_i)) \subset U_i.$$

En consecuencia, $f^{n_i}(U) \subset U_i$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Esto implica que $U \subset f^{-n_i}(U_i)$. Luego, por el inciso (1) de la Observación 3.1.2, obtenemos que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$N_f(U, \delta) \subset N_f(f^{-n_i}(U_i), \delta). \tag{4.10}$$

Por otro lado, como (X, f) es thick sensitivo, se satisface que $N_f(U, \delta)$ es thick. Luego, para $n_1 + \cdots + n_k \in \mathbb{N}$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\{s, s+1, \ldots, s + n_1 + \cdots + n_k\} \subset N_f(U, \delta).$$

Así, de (4.10), se deduce que:

$$\{s, s+1, \ldots, s + n_1 + \cdots + n_k\} \subset N_f(f^{-n_i}(U_i), \delta).$$

De donde, $s + n_i \in N_f(f^{-n_i}(U_i), \delta)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, por la Proposición 3.1.4, se concluye que $s \in N_f(U_i, \delta)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. En consecuencia, $s \in \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, \delta)$. Por lo tanto, (X, f) es multi-sensitivo. ■

4.3. Compacto transitividad y su relación con tipos de sensitividad

En esta sección estudiamos la relación entre los sistemas compacto transitivo con los sistemas del tipo sensitivo.

Teorema 4.3.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es compacto transitivo, entonces (X, f) es sensitivo.

Demostración. Supongamos que (X, f) es compacto transitivo. Demostremos que (X, f) es sensitivo. Sea $0 < \varepsilon < \frac{\text{diám}(X)}{4}$. Esto implica que $0 < 4\varepsilon < \text{diám}(X)$. Luego, $0 < 2\varepsilon < \frac{\text{diám}(X)}{2}$. En consecuencia, $\frac{\text{diám}(X)}{2} - 2\varepsilon > 0$. Sea $\delta = \frac{\text{diám}(X)}{2} - 2\varepsilon$. Note que $\delta > 0$. Mostremos que δ es una constante de sensitividad para (X, f). Sean $x \in X$ y U_0 subconjunto abierto en X, tal que $x \in U_0$. Como (X, f) es compacto transitivo, existe $y \in X$ tal que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \tag{4.11}$$

para cada vecindad G de y y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X. Sean V_1 y V_2 subconjuntos abiertos en X y $x_1 \in X$, tales que:

$$\text{diám}(V_1) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \text{diám}(V_2) < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Además,

$$y \in V_1 \quad \text{y} \quad x_1 \in V_2. \tag{4.13}$$

Y

$$\frac{\text{diám}(X)}{2} \leq d(x_1, y). \tag{4.14}$$

Por otro lado, de (4.11), aplicado a los conjuntos U_0, V_1 y V_2, se obtiene que:

$$N_f(x, V_1) \cap N_f(U_0, V_2) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \in N_f(x, V_1)$ y $n \in N_f(U_0, V_2)$. Esto implica que

$$f^n(x) \in V_1 \quad \text{y} \quad U_0 \cap f^{-n}(V_2) \neq \emptyset. \tag{4.15}$$

Por la Proposición 2.2.22 y de (4.15) se deduce que $f^n(U_0) \cap V_2 \neq \emptyset$. Luego existe $z \in U_0$ tal que :

$$f^n(z) \in V_2. \tag{4.16}$$

De la desigualdad del triángulo se satisface que:

$$d(y, x_1) \leq d(y, f^n(x)) \; + \; d(f^n(x), f^n(z)) \; + \; d(f^n(z), x_1). \tag{4.17}$$

Luego, de (4.12), (4.13) y (4.15), resulta que $d(y, f^n(x)) < \varepsilon$. Nuevamente, de (4.12), (4.13) y (4.16), se deduce que $d(f^n(z), x_1) < \varepsilon$. En consecuencia, de (4.17), se cumple que

$$d(y, x_1) < \varepsilon + d(f^n(x), f^n(z)) + \varepsilon.$$

Luego,

$$d(y, x_1) - 2\varepsilon < d(f^n(x), f^n(z)).$$

De donde, por (4.14), se concluye que:

$$\delta = \frac{\text{diám}(X)}{2} - 2\varepsilon \leq d(x_1, y) - 2\varepsilon < d(f^n(x), f^n(z)).$$

Así,

$$\delta < d(f^n(x), f^n(z)).$$

Por lo tanto, (X, f) es sensitivo. ■

Como consecuencia del Ejemplo 3.3.14 y el Teorema 4.3.1, se obtiene el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.3.2. El sistema dinámico $([0,1], T)$ es sensitivo.

Por el Ejemplo 4.3.2 y por el Corolario 4.2.10, se obtiene el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.3.3. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], T)$. Se cumple que:

(1) $([0,1], T)$ es cofinitamente sensitivo.

(2) $([0,1], T)$ es thickly sindéticamente sensitivo.

(3) $([0,1], T)$ es multi-sensitivo.

(4) $([0,1], T)$ es thick sensitivo.

En la sección 5.2 del capítulo 5 mencionamos otro ejemplo de sistema cofinitamente sensitivo, thickly sindéticamente sensitivo, multi-sensitivo y thick sensitivo.

Terminamos la sección con la Figura 4.3, en la cual se muestran algunas relaciones entre los sistemas dinámicos en la clase de los sistemas transitivos.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Mezclante} \arrow[d] & \\
 & \text{Débilmente mezclante} \arrow[dl] \arrow[d] & \\
\text{Transitivo + Thick sensitivo} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Compacto transitivo} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Transitivo} \\
\text{Multi-sensitivo} \arrow[r] & \text{sensitivo} &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3: Diagrama que muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos en la clase de los sistemas dinámicos transitivos.

Con respecto al recíproco de algunas relaciones indicadas en la Figura 4.3, se cumple el Teorema 4.3.4, el cual puede encontrar en [20, Corolario 3.10].

Teorema 4.3.4. Sea (X, f) un sistema dinámico compacto transitivo. Si (X, f) es un M-sistema, entonces (X, f) es débilmente mezclante.

Del Teorema 4.3.4 y de la Figura 4.3, se obtiene la Figura 4.4, que muestra las relaciones entre algunos tipos de sistemas dinámicos en la clase de M-sistemas.

$$\begin{tikzcd}
\text{Compacto transitivo} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Débilmente mezclante} \arrow[d] \\
\text{Thick sensitivo} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Multi-sensitivo} \arrow[d] \\
\text{Sensitivo}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.4: Diagrama que muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos en la clase de los M-sistemas.

Finalmente, de la Figura 4.3, se obtiene que:

Ejemplo 4.3.5. Consideremos el sistema dinámico (X, id_X), donde $id_X : X \to X$ la función identidad. Se tiene que:

(1) (X, id_X) no es mezclante.

(2) (X, id_X) no es débilmente mezclante.

(3) (X, id_X) no es compacto transitivo.

(4) (X, id_X) no es transitivo.

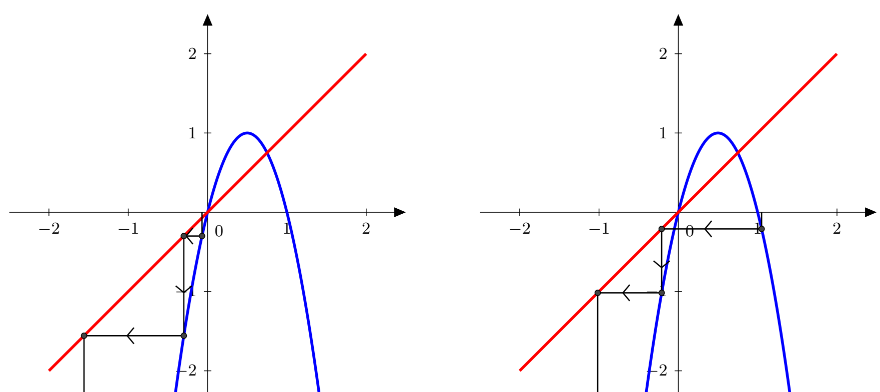
La función logística

5

La función logística es una función matemática, la cual se hizo muy conocida en 1976 gracias al artículo del biólogo Robert May, el cual pretendía hallar un modelo demográfico sencillo que explicase la dinámica de una población de la que se ha supuesto que tiene un crecimiento cada vez más lento a medida que se acerca a una cantidad de individuos considerada como límite. Robert May comprobó que al cambiar los valores del único parámetro del modelo, este presentaba soluciones muy distintas y a veces muy complejas pese a que se trata de una simple aplicación polinómica de grado 2. La aplicación logística puede expresarse matemáticamente como $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ siendo μ el parámetro que varía. Esta ecuación describe dos efectos: el crecimiento de tipo exponencial de la población (efecto más visible cuando la población es pequeña) y la mortalidad adicional que aumenta a medida que crece la población, debido a la competencia de los individuos entre sí para asegurarse el alimento necesario. Esto se traduce matemáticamente por el término cuadrático con un signo negativo. Este modelo asume que los recursos para la población son ilimitados y que no hay mortalidad debido a la competencia por otras especies.

Definición 5.0.1. Sean $\mu \in (0, 4]$ y $L_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. A la función L_μ se le conoce como la *función logística*.

Utilizando un análisis gráfico se puede comprobar que las órbitas de todos los puntos fuera del intervalo [0,1] tienden a menos infinito (vea la Figura 5.1). Por lo tanto, estudiamos la dinámica de esta función sólo en el intervalo $[0, 1]$.



(a) $L_4(x)$ (b) $L_4(x)$

Figura 5.1: Comportamiento geométrico de órbitas fuera del intervalo [0,1].

En la Figura 5, se muestran las gráficas de funciones logística para algunos valores de μ.

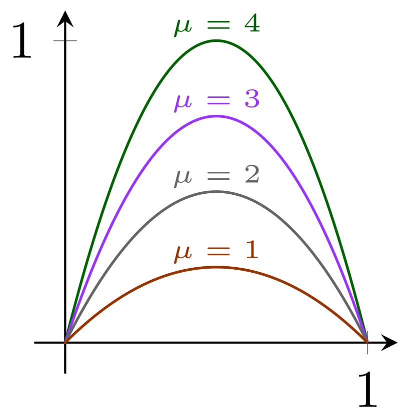


Figura 5.2: Gráficas de funciones logística, cuando $\mu \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Proposición 5.0.2. Sea $\mu \in (0, 4]$. Consideremos el sistema dinámico $\big([0, 1], L_\mu\big)$. Se cumple que $\dfrac{\mu}{4}$ es el máximo de la función L_μ.

Demostración. Veamos que la función L_μ, con $\mu \in (0, 4]$, tiene un máximo en $\dfrac{\mu}{4}$. Para eso, notemos que $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$. Luego, $L'(x) = \mu - 2\mu x = \mu(1 - 2x)$. Para encontrar los puntos críticos, resolvamos, $L'_\mu(x) = 0$. Esto es, $\mu(1 - 2x) = 0$. De donde, $1 - 2x = 0$ esto implica que $x = \frac{1}{2}$. Por otro lado, se tiene que $L''_\mu(x) = -2\mu$. Esto implica que $L''_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = -2\mu < 0$. Así, $L_\mu(\frac{1}{2}) = \dfrac{\mu}{4}$, es un máximo de L_μ. Por lo tanto, $\dfrac{\mu}{4}$, es un máximo para la función L_μ, con $\mu \in (0, 4]$. ■

Proposición 5.0.3. Sea $\mu \in (0, 4]$. Consideremos el sistema dinámico $([0, 1], L_\mu)$. Las proposiciones siguientes son verdaderas:

(1) Si $\mu \in (0, 4]$, entonces el intervalo [0,1] es + invariante bajo L_μ.

(2) Si $\mu = 4$, entonces el intervalo $[0, 1]$ es invariante bajo L_4.

Demostración. (1) Supongamos que $\mu \in (0, 4]$. Veamos que [0,1] es + invariante bajo L_μ. Para esto, probemos que $L_\mu([0, 1]) \subset [0, 1]$. Sea $y \in L_\mu([0, 1])$. Luego, existe $x_0 \in [0, 1]$, tal que $L_\mu(x_0) = y$. De la definición de L_μ se sigue que $y = \mu x_0(1 - x_0)$. Consideremos los siguientes casos:

(a) Si $x_0 = 0$ o $x_0 = 1$, entonces $y = 0$.

(b) Si $x_0 \in (0, 1)$, por la Proposición 5.0.2 y puesto que $\mu \in (0, 4]$, se tiene que:

$$y = \mu x_0(1 - x_0) \leq \frac{\mu}{4} \leq 1.$$

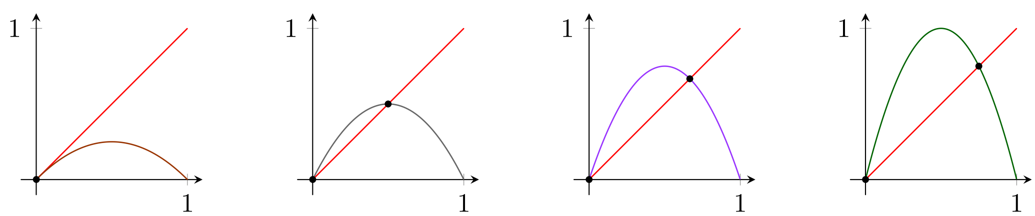
En ambos casos se tiene que $y \in [0, 1]$. Así, $L_\mu([0, 1]) \subset [0, 1]$. Por lo tanto, $[0, 1]$ es + invariante bajo L_μ.
(2) Supongamos que $\mu = 4$. Por el inciso (1), se tiene que $L_4([0, 1]) \subset [0, 1]$. Resta verificar

que $[0,1] \subset L_4([0,1])$. Para eso, sea $y \in [0,1]$. Consideremos $x_0 = \dfrac{1+\sqrt{1-y}}{2}$. Como $y \in [0,1]$, se obtiene que $x_0 \in [0,1]$. Además,

$$\begin{aligned} L_4(x_0) &= 4\left(\frac{1+\sqrt{1-y}}{2}\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{1-y}}{2}\right) \\ &= \left(1+\sqrt{1-y}\right)\left(1-\sqrt{1-y}\right) \\ &= 1-(1-y) = y. \end{aligned}$$

Así, $y \in L_4([0,1])$. Luego, $[0,1] \subset L_4([0,1])$. Por lo tanto, L_4 es invariante bajo L_4. ■

Hacemos un estudio de los puntos fijos de $L_\mu : [0,1] \to [0,1]$, para $\mu \in (0,4]$. En la Figura 5.3, se muestra geométricamente los puntos fijos de las funciones L_1, L_2, L_3 y L_4.



(a) $L_1(x)$ (b) $L_2(x)$ (c) $L_3(x)$ (d) $L_4(x)$

Figura 5.3: Puntos fijos para L_μ, donde $\mu \in \{1,2,3,4\}$.

A continuación obtendremos los puntos fijos de L_μ analíticamente.

Ejemplo 5.0.4. Sea $\mu \in (0,4]$. Dada la función $L_\mu : [0,1] \to [0,1]$, los puntos fijos de L_μ son los $x \in [0,1]$ tales que $L_\mu(x) = x$. Notemos que $\mu x(1-x) = x$ es equivalente a $x(\mu - \mu x - 1) = 0$. Por lo tanto, los puntos fijos de L_μ son:

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = 1 - \frac{1}{\mu}. \tag{5.1}$$

Ahora determinemos el comportamiento de los puntos fijos, para los diferentes valores de μ, para eso hacemos uso de la derivada de la función L_μ. Notemos que,

$$L'_\mu(x) = \mu - 2\mu x, \text{ para cada } x \in [0,1]. \tag{5.2}$$

Para ver dicho comportamiento consideremos los siguientes casos:

Caso I. Para $\mu \in (0,1]$. De (5.1), se obtiene que $x_2 = 1 - \frac{1}{\mu} \leq 0$. Por lo tanto, el único punto fijo de L_μ en el intervalo [0,1], es $x_1 = 0$. Además, para $\mu \in (0,1)$, de (5.2) se obtiene que:

$$|L'_\mu(x_1)| = |L'_\mu(0)| = |\mu| < 1.$$

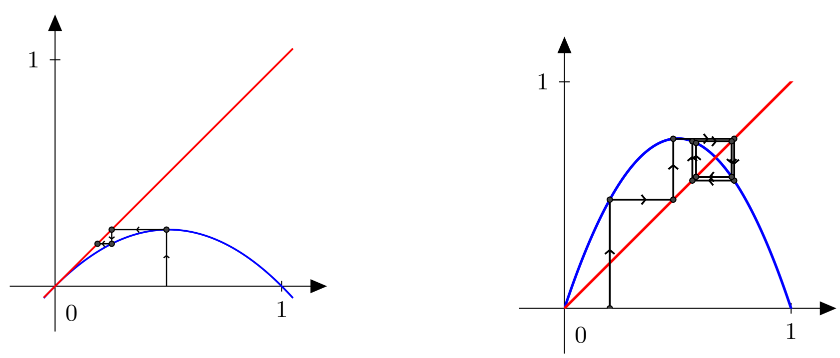
Así, por el Teorema 2.2.11, se obtiene que 0 es un punto fijo atractor. En el caso cuando $\mu = 1$. De (5.2), se obtiene que $|L'_\mu(x_1)| = |L'_\mu(0)| = 1$. Luego, por Teorema 2.2.11, no podemos concluir algo. Sin embargo, en el inciso (a) de la Figura 5.4, se visualiza que 0 es un punto atractor.

Caso II. Para $\mu \in (1,3]$. Notemos que $|L'_\mu(x_1)| = |L'_\mu(0)| = |\mu| > 1$. Así, por el Teorema 2.2.11, se obtiene que $x_1 = 0$, es un punto repulsor. Por otro lado, para $\mu \in (0,3)$ para el punto fijo x_2, de (5.2), se obtiene que:

$$\left|L'_\mu(x_2)\right| = \left|L'_\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right| = \left|\mu - 2\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right| = \left|\mu - 2\mu + \frac{2\mu}{\mu}\right| = |-\mu + 2| < 1.$$

Luego, por el Teorema 2.2.11, se obtiene que x_2 es un punto fijo atractor. En el caso cuando $\mu = 3$. De (5.2), se obtiene que $|L'_\mu(\frac{2}{3})| = |-3+2| = 1$. Luego, del Teorema 2.2.11, no podemos concluir algo. Sin embargo, en la Figura 5.4 inciso (b), se visualiza que x_2 es un punto atractor.

Caso III. Para $\mu \in (3,4]$. Notemos que, $|L'_\mu(x_1)| = |L'_\mu(0)| = |\mu| > 1$. Así, por el Teorema 2.2.11, se obtiene que 0 es un punto fijo repulsor. Por otro lado, $|L'_\mu(1 - \frac{1}{\mu})| = |-\mu + 2| > 1$. Por lo tanto, x_2 también es un punto fijo repulsor.



(a) $L_1(x)$ (b) $L_3(x)$

Figura 5.4: Comportamiento geométrico de órbitas en las funciones $L_1(x)$ y $L_3(x)$.

Proposición 5.0.5. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], L_\mu)$. Si $\mu \in (1,3]$, entonces L_μ no tiene puntos periódicos de periodo 2.

Demostración. Para obtener los puntos de periodo 2 de la función $L_\mu(x)$, tenemos que encontrar los puntos $x \in [0,1]$ tales que $L^2_\mu(x) - x = 0$ y diferentes a los puntos fijos de $L_\mu(x)$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
L^2_\mu(x) &= L_\mu(\mu x(1-x)) \\
&= \mu\left[\mu x(1-x)\right]\left[1 - \mu x(1-x)\right] \\
&= (\mu^2 x - \mu^2 x^2)(1 - \mu x + \mu x^2) \\
&= \mu^2 x - \mu^2 x^2 - \mu^3 x^2 + \mu^3 x^3 + \mu^3 x^3 - \mu^3 x^4 \\
&= -\mu^3 x^4 + 2\mu^3 x^3 - (\mu^2 + \mu^3)x^2 + \mu^2 x
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 0 = L_\mu^2(x) - x &= -\mu^3x^4 + 2\mu^3x^3 - (\mu^2+\mu^3)x^2 + \mu^2x - x \\ &= -\mu^3x^4 + 2\mu^3x^3 - (\mu^2+\mu^3)x^2 + (\mu^2-1)x \\ &= -x(\mu x - \mu + 1)(\mu^2x^2 - \mu(\mu+1)x + \mu + 1) \end{aligned}$$

De donde,

$$x(\mu x - \mu + 1)(\mu^2x^2 - \mu(\mu+1)x + \mu + 1) = 0 \tag{5.3}$$

De (5.3), obtenemos 3 casos:

(a) $x = 0$

(b) $\mu x - \mu + 1 = 0$

(c) $\mu^2x^2 - \mu(\mu+1)x + \mu + 1 = 0$

En el caso (a) se tiene que $x = 0$. Como 0 es un punto fijo de $L_\mu(x)$, entonces 0 no es un punto periódico de periodo 2. En el caso (b), se tiene que $x = 1 - \frac{1}{\mu}$, el cual también es un punto fijo de $L_\mu(x)$. Así, tampoco puede ser un punto periódico de periodo 2. Finalmente, para el caso (c), notemos que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mu(\mu+1) \pm \sqrt{\mu^2(\mu+1)^2 - 4\mu^2(\mu+1)}}{2\mu^2} \\ &= \frac{\mu(\mu+1) \pm \sqrt{\mu^2(\mu+1)(\mu+1-4)}}{2\mu^2} \\ &= \frac{\mu(\mu+1) \pm \mu\sqrt{\mu+1}\sqrt{\mu-3}}{2\mu^2} \\ &= \frac{\mu+1 \pm \sqrt{\mu+1}\sqrt{\mu-3}}{2\mu} \end{aligned}$$

Luego, si $\mu \in (1,3)$ entonces x no es un número real. Si $\mu = 3$, entonces $x = \frac{2}{3}$ que es un punto fijo de $L_3(x)$. Por lo tanto, $L_\mu(x)$ no tiene puntos periódicos de periódo 2. ■

5.1. Conjugación

En esta sección se muestran ejemplos de sistemas dinámicos conjugados al sistema dinámico $([0,1], L_4)$. Obteniendo, además, otros ejemplos de sistemas dinámicos compacto transitivo.

Proposición 5.1.1. Los sistemas dinámicos $([0,1], L_4)$ y $([0,1], T)$, donde $L_4(x) = 4x(1-x)$, para cada $x \in [0,1]$ y

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2 - 2x, & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$, son topológicamente conjugados.

Demostración. Consideremos la función $h:[0,1]\to[0,1]$ dada por $h(x)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{x\pi}{2}\right)$, para cada $x\in[0,1]$. Veamos que h es una conjugación entre las funciones T y L_4. Para eso, veamos que $h(T(x))=L(h(x))$, para cada $x\in[0,1]$. Consideremos los siguientes casos:

1) $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. En este caso $T(x)=2x$. Notemos que,

$$h(T(x))=h(2x)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{2x\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}^2(x\pi).$$

2) $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. En este caso $T(x)=2(1-x)$. Notemos que:

$$\begin{aligned}h(T(x))=h(2(1-x))=\operatorname{sen}^2\left(\frac{2(1-x)\pi}{2}\right)&=\operatorname{sen}^2(\pi-\pi x)\\ &=\left[\operatorname{sen}(\pi)\cos(-\pi x)+\cos(\pi)\operatorname{sen}(-\pi x)\right]^2\\ &=\operatorname{sen}^2(-\pi x)=\operatorname{sen}^2(\pi x).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}L(h(x))&=L\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\\ &=4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\\ &=4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x\pi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x\pi}{2}\right)\\ &=\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)\right)^2\\ &=\operatorname{sen}^2(\pi x)\end{aligned}$$

En consecuencia, $h(T(x))=L(h(x))$, para cada $x\in[0,1]$. Además, se puede verificar que h es biyectiva, continua y con inversa $h^{-1}:[0,1]\to[0,1]$, definida como $h^{-1}(y)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{y})$ continua. Por lo tanto, T y L son topológicamente conjugadas. ∎

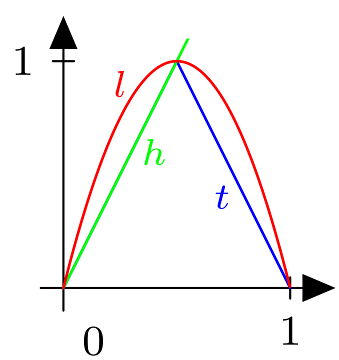


Figura 5.5: Gráfica que muestra las funciones del Ejemplo 5.1.1.

El Ejemplo 5.1.2, se obtiene de la Proposición 5.1.1, de la Proposición 3.4.4 y del Ejemplo 3.3.13.

Ejemplo 5.1.2. El sistema dinámico $([0,1], L_4)$ es débilmente mezclante.

De la Proposición 5.1.1, del Corolario 3.4.6 y del Ejemplo 3.3.14, se obtiene el Ejemplo 5.1.3.

Ejemplo 5.1.3. El sistema dinámico $([0,1], L_4)$ es compacto transitivo.

Del Corolario 3.4.2 y del Ejemplo 5.1.3, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5.1.4. El sistemas dinámico $([0,1], L_4)$ es transitivo.

Como una consecuencia del Teorema 4.3.1 y del Ejemplo 5.1.2, se obtiene el siguiente resultado.

Ejemplo 5.1.5. El sistema dinámico $([0,1], L_4)$ es sensitivo.

Por el Ejemplo 5.1.5 y por el Corolario 4.2.10, se obtiene el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5.1.6. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], L_4)$. Se cumple que:

(1) $([0,1], L_4)$ es cofinitamente sensitivo.

(2) $([0,1], L_4)$ es thickly sindéticamente sensitivo.

(3) $([0,1], L_4)$ es multi-sensitivo.

(4) $([0,1], L_4)$ es thick sensitivo.

Proposición 5.1.7. Los sistemas dinámicos $([0,1], L_4)$ y $([-2,2], Q)$, donde $L_4(x) = 4x(1-x)$, para cada $x \in [0,1]$ y $Q(x) = x^2 - 2$, para cada $x \in [-2,2]$ son topológicamente conjugadas. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "L_4"] \arrow[d, "h"'] & {[0,1]} \arrow[d, "h"] \\
{[-2,2]} \arrow[r, "Q"'] & {[-2,2]}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Consideremos la función $h : [0,1] \to [-2,2]$, dada por $h(x) = -4x + 2$, para cada $x \in [0,1]$. Veamos que h es una conjugación entre las funciones L_4 y Q. Para esto probemos que $h(L_4(x)) = Q(h(x))$, para cada $x \in [0,1]$. Sea $x \in [0,1]$. Notemos que

$$\begin{aligned}
h(L_4(x)) &= h(4x - 4x^2) \\
&= -4(4x - 4x^2) + 2 \\
&= -16x + 16x^2 + 2 \\
&= 16x^2 - 16x + 2. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Q(h(x)) &= h(x)^2 - 2 \\ &= (-4x+2)^2 - 2 \\ &= 16x^2 - 16x + 4 - 2 \\ &= 16x^2 - 16x + 2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

De (5.4) y (5.5), se concluye que $h(L_4(x)) = Q(h(x))$, para cada $x \in [0,1]$. Además, se puede verificar que $h(x)$ es continua, biyectiva y con inversa $h^{-1}(y) = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}$ continua. Por lo tanto, h es una conjugación entre las funciones L_4 y Q. ■

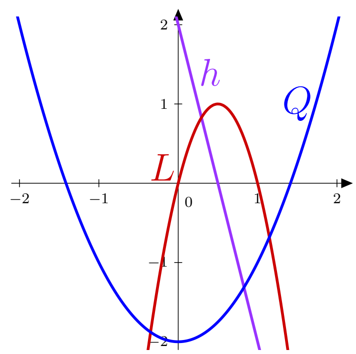


Figura 5.6: Gráficas de las funciones del Ejemplo 5.1.7.

Del análisis realizado en esta sección, de la Proposicion 3.4.6, del Ejemplo 5.1.3 y de la Proposición 5.1.7, se obtienen el siguiente resultado.

Corolario 5.1.8. El sistema dinámico $([-2,2], Q)$ es compacto transitivo.

El siguiente resultado de obtiene del Corolario 5.1.8 y del Teorema 4.3.1.

Corolario 5.1.9. El sistema dinámico $([-2,2], Q)$ es sensitivo.

Del Corolario 5.1.8 y del Ejemplo 5.1.7, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5.1.10. El sistemas dinámico $([-2,2], Q)$ es transitivo.

5.2. La cuenca de atracción

En esta sección damos una introducción a la cuenca de atracción de un punto fijo de una función. Básicamente la cuenca de atracción de un punto fijo atractor x_0 es el conjunto de todos los puntos del espacio X cuya órbita converge a x_0. Analizamos este concepto en los puntos fijos atractores de la función logística.

Definición 5.2.1. Sean $([a,b], f)$ un sistema dinámico, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a,b]$ un punto fijo atractor de f. Se define la *cuenca de atracción* de x_0, denotado por $B_f(x_0)$, como

$$B_f(x_0) = \{x \in [a,b] : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0\}.$$

Se define la *cuenca de atracción inmediata* de x_0 como el mayor intervalo I, tal que $I \subset B_f(x_0)$ y $x_0 \in I$.

El resultado que enunciamos a continuación, es referente a la cuenca de atracción inmediata de un punto fijo atractor, el cual nos ayuda a mostrar un resultado más adelante.

Proposición 5.2.2. Sean $([a,b], f)$ un sistema dinámico, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $p \in [a,b]$ un punto fijo atractor. Si C es la cuenca de atracción inmediata de p y $C \subset (a,b)$, entonces C es un intervalo abierto.

Demostración. Como p es un punto fijo atractor existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $y \in [a,b]$ con $|p-y| < \varepsilon_0$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(y) = p$. Supongamos que $C = [a', b']$. Como $a' \in C$, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(a') = p$. Luego, para ε_0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ se tiene que $|f^k(a')-p| < \varepsilon_0$. Por otro lado, como f es continua, por el inciso (1) de la Observación 2.1.8, se obtiene que f^k es continua. Así, para $\varepsilon_1 = \text{mín}\{|f^k(a')-(p-\varepsilon_0)|, |(p+\varepsilon_0)-f^k(a')|\}$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x-a'| < \delta$, entonces $|f^k(x) - f^k(a')| < \varepsilon_1$. De donde, $|f^k(x)-p| < \varepsilon_0$. Esto implica que, para todo $x \in [a,b]$, tal que $|x-a'| < \delta$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{n+k}(x) = p$. En consecuencia, para todo $x \in (a'-\delta, b']$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = p$. Así, $(a'-\delta_2, b'] \subset B_f(p)$. Además, $(a'-\delta_2, b']$ es un intervalo tal que $p \in (a'-\delta_1, b']$ y es más grande que C. Lo cual contradice al hecho de que C es la cuenca de atracción inmediata de p. La contradicción surgió de suponer que $a' \in C$. Así, $a' \notin C$. De manera similar se verifica que $b' \notin C$. Por lo tanto, $C = (a', b')$ el cual es un intervalo abierto. ■

A continuación obtendremos la cuenca de atracción para los puntos fijos atractores de $L_\mu(x)$, donde $\mu \in (1,3]$.

Teorema 5.2.3. Sea $\mu \in (0,3]$. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], L_\mu)$, donde $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$, para cada $x \in [0,1]$. Las proposiciones siguientes son verdaderas.

(1) Para $\mu \in (0,1]$, la cuenca de atracción del punto fijo atractor $x_1 = 0$ es $B_{L_\mu}(0) = [0,1]$.

(2) Para $\mu \in (1,3]$, la cuenca de atracción del punto fijo atractor $x_2 = 1 - \dfrac{1}{\mu}$ es $B_{L_\mu}(1-\frac{1}{\mu}) = (0,1)$.

Demostración. (1) En este caso el punto fijo atractor es $x = 0$. Veamos que $B_{L_\mu}(0) = [0,1]$. Dado que $x \in [0,1]$, se tiene que $0 \leq 1-x \leq 1$. Además, como $\mu \in (0,1]$, por hipótesis, se tiene que:

$$0 \leq \mu(1-x) \leq \mu \leq 1. \tag{5.6}$$

Luego, puesto que $x \in [0,1]$, de (5.6), se obtiene que $0 \leq \mu x(1-x) \leq x$. Equivalentemente,

$$0 \leq L_\mu(x) \leq x. \tag{5.7}$$

Notemos que, $L_\mu(x) \in [0,1]$. Así, de (5.7), se obtiene que $0 \leq L_\mu(L_\mu(x)) \leq L_\mu(x)$. De forma equivalente:

$$0 \leq L_\mu^2(x) \leq L_\mu(x). \tag{5.8}$$

Procediendo de forma similar se verifica que $0 \leq L_\mu^n(x) \leq L_\mu^{n-1}(x)$. Es decir, la sucesión $L_\mu^n(x)$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente. Así, $L_\mu^n(x)$ es convergente. Luego, por la Proposición 2.2.9 y puesto que, en este caso, 0 es el único punto fijo, se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} L_\mu^n(x) = 0$, para cada $x \in [0,1]$. Por lo tanto, $B_{L_\mu}(0) = [0,1]$.

(2) En este caso, el punto fijo atractor es $x_0 = 1 - \frac{1}{\mu}$. Veamos que $B_{L_\mu}(x_0) = (0,1)$. Sea C la cuenca de atracción inmediata de x_0. Por la Proposición 5.2.2, C es un intervalo abierto. Así, C es de la forma $C = (a,b)$, $a, b \in [0,1]$. Por otro lado, notemos que $L_\mu(0) = 0$. Así, $\lim\limits_{n\to\infty} L_\mu^n(0) = 0$. Por lo tanto, $0 \notin B_{L_\mu}(x_0)$. Análogamente, se verifica que $1 \notin B_{L_\mu}(x_0)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en (a,b) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Luego, dado que $L_\mu(x)$ es continua, del Teorema 1.3.18, se obtiene que $\lim\limits_{n\to\infty} L_\mu(x_n) = L_\mu(a)$. Además:

$$a \leq L_\mu(a) \leq b. \tag{5.9}$$

Por otro lado, puesto que C es un intervalo, por la Proposición 1.2.27, se tiene que C es conexo. De donde, por la Proposición 1.3.5, se obtiene que $L_\mu(C)$ es conexo. Nuevamente, por la Proposición 1.2.27, se tiene que $L_\mu(C)$ es un intervalo. Luego, como x_0 es un punto fijo y $x_0 \in (a,b)$ se tiene que $x_0 \in L_\mu(a,b)$. Además, $L_\mu(a,b) \subset B_{L_\mu}(x_0)$. Así, se obtiene que $L_\mu(a,b) \subset (a,b)$. Luego, como $a \notin (a,b)$, se tiene que $L_\mu(a) \notin (a,b)$. Lo cual de (5.9), implica que $L_\mu(a) = a$ o $L_\mu(a) = b$. Con un análisis similar para b se tiene que $L_\mu(b) = b$ o $L_\mu(b) = a$. Para lo cual se tienen los siguientes casos:

(a) Si $L_\mu(a) = a$ y $L_\mu(b) = b$, entonces a y b son puntos fijos.

(b) Si $L_\mu(a) = a$ y $L_\mu(b) = a$, o $L_\mu(a) = b$ y $L_\mu(b) = b$, entonces a es un punto preperiódico o b es un punto preperiódico.

(c) Si $L_\mu(a) = b$ y $L_\mu(b) = a$, entonces a y b son puntos periódicos de periodo 2.

Notemos que el caso (a) no puede ser pues 0 y x_0 son los únicos puntos fijos cuando $\mu \in (1,3]$. Además, por la Proposición 5.0.5, la función L_μ no tiene puntos periódicos de periódo 2, para cuando $\mu \in (1,3]$, es decir, el inciso (c) tampoco puede ocurrir. Por lo tanto, se debe cumplir el caso (b). Como los únicos puntos preperiódicos en $[0,1]$, diferentes de x_0, son 0 y 1, se tiene que $a = 0$ y $b = 1$. Por lo tanto, $B_{L_\mu}(x_0) = (0,1)$. ■

Conclusiones

En este trabajo de tesis, realizamos un análisis sobre los sistemas dinámicos compacto transitivos, las propiedades y los resultados más conocidos en esta clase de sistemas. Cabe mencionar que el desarrollo de esta tesis estuvo basado en el artículo *Dynamical compactness and sensitivity*([20]). A continuación mencionamos algunos de los resultados revisados, relacionados con esta clase de sistemas.

Se probó la siguiente caracterización: un sistema dinámico (X, f) es compacto transitivo si y sólo si $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$.

En este trabajo mostramos que los siguientes sistemas dinámicos son compactos transitivos:

1. La *función tienda* $T : [0,1] \to [0,1]$, definida como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \\ 2-2x, & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

   para cada $x \in [0,1]$.

2. La *función logística* $L : [0,1] \to [0,1]$, dada por:

$$L(x) = 4x(1-x), \text{ para cada } x \in [0,1].$$

3. La función $Q : [-2,2] \to [-2,2]$, definida como $Q(x) = x^2 - 2$, para cada $x \in [-2,2]$.

Se estudió la relación que existe entre las diferentes variantes de sensitividad, la cual se resume en el siguiente diagrama. Y éstos son equivalentes si es espacio X es el intervalo $[0,1]$.

$$\begin{tikzcd}
\text{Cofinitamente sensitivo} \arrow[d] & & \\
\text{Thickly sindéticamente sensitivo} \arrow[r] & \text{Multi-sensitivo} \arrow[d] & \\
& \text{Thick sensitivo} \arrow[r] & \text{Sensitivo}
\end{tikzcd}$$

Figura 5.7: Diagrama que muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos del tipo sensitivos.

Además, cuando (X, f) es un M-sistema se satisface las siguiente relación:

$$\begin{tikzcd}
\text{Compacto transitivo} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Débilmente mezclante} \arrow[d] \\
\text{Thick sensitivo} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Multi-sensitivo} \arrow[d] \\
\text{Sensitivo}
\end{tikzcd}$$

Figura 5.8: Diagrama que muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos en la clase de los M-sistemas.

Se estudio también la relación entre los sistemas compacto transitivo con los de tipo sensitivos. A continuación se muestra el diagrama final obtenido.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Mezclante} \arrow[d] & \\
 & \text{Débilmente mezclante} \arrow[dl] \arrow[d] & \\
\text{Transitivo + Thick sensitivo} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Compacto transitivo} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Transitivo} \\
\text{Multi-sensitivo} \arrow[r] & \text{Sensitivo} &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.9: Diagrama que muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos, en la clase de los sistemas dinámicos transitivos.

Finalmente, se realizó un estudio de la función logística. Analizamos puntos periódicos y puntos fijos. Además, verificamos que la función tienda es topológicamente conjugada a L_4, mostrando así, propiedades del sistema dinámico $([0,1], L_4)$ tales como que dicho sistema es cofinitamente sensitivo, tickly sindéticamente sensitivo, multi-sensitivo, thick sensitivo, sensitivo, débilmente mezclante y transitivo, entre otras.

Bibliografía

[1] C. Abraham, G. Biau y B. Cadre,*On Lyapunov exponent and sensitivity*, J. Math. Anal. Appl. 290, 2004, 395-404.

[2] R. H. Abraham, L. Gardini y C. Mira, *Chaos in Discrete Dynamical Systems: a visual introduction in 2 dimensions*, 1997.

[3] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl. 5, 2009, 1013-1033.

[4] E. Akin y J. D. Carlson, *Conceptions of topological transitivity*, Topology Appl. 159, 2012, 2815-2830.

[5] E. Akin y S. Kolyada, *Li-Yorke Sensitivity*, Nonlinearity 16, 2014, 1421-1433.

[6] J. Auslander y J. A. Yorke, *Interval maps, factors of maps, and chaos*, The Tohoku Mathematical Journals 32, no. 2, 1980, 177-188.

[7] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., San Diego, 1988.

[8] W. Bauer Salzburg y K. Sigmund Wien, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. 79, 1975, 81-92.

[9] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Math. Soc. 1927.

[10] M. Brin y G. Struck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2003.

[11] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, second edition, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1989.

[12] J. Dugundji, *Topology*, Allyn y Bacon, Inc, 1966.

[13] J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha y A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal. 71, 2009, 1-8.

[14] E. Glasner, *Classifying dynamical systems by their recurrence properties*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 2004, 21-40.

[15] E. Glasner, *Ergodic Theory via Joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 101, American Mathematical Society, 1945.

[16] S. Glasner y D. Maon, *Rigidity in topological dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 1989, 309-320.

[17] V. M. Grijalva, *Dinámica de funciones inducidas entre productos simétricos*, tesis de maestría, UTM, 2016.

[18] J. Guckenheimer, *Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys. 1979, 133-160.

[19] D. Gulick, *Encounter with chaos*, McGraw-Hill, New York, 1992.

[20] W. Huang, D. Khilko, S. Kolyada y G. Zhang, *Dynamical compactness and sensitivity*, Journal of Differential Equations, Vol. 260, 2016, 6800-6827.

[21] W. Huang, S. Kolyada y G. Zhang, *Analogues of Auslander-Yorke theorems for multi-sensitivity*, 2016.

[22] A. Illanes Mejía, *Hiperespacios de continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, UNAM 2004.

[23] I. L. Iribarren *Topología de espacios métricos*, Universidad Simón Bolívar, Caracas, 2008.

[24] I. M. James, *History of Topology*, elsevier, North Holland, 1999.

[25] J. E. King Dávalos y H. Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

[26] C. Knudsen, *Chaos without nonperiodicity*, American Mathematical Monthly 101, 1994, 563-565.

[27] S. Kolyada, L. Snoha y S. Trofimchuk, *Noninvertible minimal maps,* Fund. Math., 2001, 141-162.

[28] S. Kolyada, M. Misiurewicz y L. Snoha, *Spaces of transitive interval maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 2015, 2151-2170.

[29] D. Kwietniak, *Exact Devaney Chaos and Entropy,* Qualitative theory dynamical systems 6, 2005, 169-179.

[30] E. A. Lacomba, *Los sistemas dinámicos, ¿Qué son y para que sirven?*, Miscelánea matemática, 2000, 39-50.

[31] E. Lages Lima, *Espaços métricos*,IMPA, Río de Janeiro, 2011.

[32] J. Li, S. Tu y X. Ye, *Mean equicontinuity and mean sensitivity*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 2015, 2587-2612.

[33] J. Li y X. Ye, *Recent development of chaos theory in topological dynamics*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2016, 83-114.

[34] H. Liu, L. Liao y L. Wang, *Thickly syndetical sensitivity of topological dynamical system*, Discrete Dyn. Nat. Soc. 2014.

[35] S. Macías, *Topics on Continua*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2005.

[36] J. Mai y W. Sun, *Transitivities of maps of general topological spaces*, Topology Appl., 2010, 946-953.

[37] J. R. Munkres, *Topology*, Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[38] S. B. Nadler, jr., *Continuum theory:An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[39] E. Norton Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. 20, 1963, 130-141.

[40] J. A. Pérez, *Topología de conjuntos, un primer curso*, Publicaciones electrónicas, Serie Textos 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2015.

[41] A. Rojas Carrasco, *Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados*, tesis de maestría, UTM, 2017.

[42] D. Ruelle y F. Takens, *On the nature of turbulence*, Communications in Mathematical Physics, 1971, 167-192.

[43] T. K. Subrahmonian Moothathu, *Stronger forms of sensitivity for dynamicals systems*, Nonlinearity 20, 2007, p. 2115-2126.

[44] Y. Wang, G. Wei y W. H. Campbell, *Sensitive dependence on initial conditions between dynamical systems and their induced hyperspaces dynamical system*, Topology and its Applications, 2009, 803-811.

[45] J. Xiong, *Chaos in topological transitive systems*, Science in China, 2005, 929-939.

[46] X. Ye y T. Yu, *Sensitivity, proximal extension and higher order almost automorphy*, 2016.

Índice alfabético