Universidad Tecnológica de la Mixteca

Funciones del tipo mezclante en hiperespacios

Tesis

para obtener el título de:
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:
Víctor Martín Muñoz López

Directora de tesis:
Dra. Alicia Santiago Santos

Co-director de tesis:
Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide

Huajuapan de León, Oaxaca. Diciembre de 2018

Dedicado a mi familia
principalmente a mis padres

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi familia: a mis padres, Tirso Muñoz Martínez y Antonia López López, quienes me apoyaron en mi decisión de seguir este camino, por sus consejos y valores que me han enseñado. A mis hermanos Moisés y Jairo, porque se que siempre puedo contar con su apoyo.

Quiero agradecerle a Irma León Torres, por haberme acompañado gran parte de este trayecto y que ha hecho que el disfrute de esta experiencia sea aún mejor. Además, por todas esas experiencias que me han mostrado que somos un buen equipo.

Agradezco a la Dra. Alicia Santiago Santos, principalmente por su paciencia que me ha tenido durante este trayecto y por su apoyo incondicional, además de su ejemplo de dedicación y pasión por su trabajo. También quiero agradecer al Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide, quien ha enriquecido este trabajo con sus certeras observaciones.

También agradezco al Dr. Franco Barragán Mendoza y al Dr. Adolfo Maceda Méndez, por la dedicación de su tiempo en la revisión de esta tesis y por sus aportaciones que han engrandecido este trabajo.

Además, agradezco a mis profesores de esta universidad que me han transmitido esa pasión por las matemáticas desde mi primer día de clases. De igual forma, agradezco a mis amigos que influyeron a que esto haya sido una gran experiencia.

Finalmente, agradezco al PRODEP por el apoyo económico otorgado, mediante el proyecto titulado: “Propiedades dinámicas y topológicas sobre sistemas dinámicos inducidos”, con folio UTMIX-PTC-064.

Índice general

Introducción

La temática de la tesis se desarrolla en las áreas de la matemática denominadas Topología y Sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es un fenómeno que evoluciona a través del tiempo, si el tiempo es considerado en lapsos, decimos que es un sistema dinámico discreto. Cabe mencionar, que los sistemas dinámicos discretos tienen una grán utilidad dentro de la modelación metemática, como por ejemplo en las áreas de Biología y Finanzas. Los sistemas dinámicos discretos que estudiamos en esta tesis se construyen a partir de un espacio métrico X y una función continua $f\colon X \to X$ y el cual denotamos por (X, f). Para $k \in \mathbb{N}$, denotemos por f^k a la composición de f consigo misma k veces y f^0 a la función identidad en X. Para $x \in X$ consideremos la siguiente sucesión:

$$x, \quad f(x), \quad f^2(x), \quad f^3(x), \ \ldots$$

El objetivo principal de los sistemas dinámicos discretos es estudiar el comportamiento de estas sucesiones de puntos. Dado un sistema dinámico (X, f), es natural pensar cuál es el comportamiento de conjuntos al aplicar sucesivamente la función f, es decir, estudiar sucesiones de la siguiente forma:

$$A, \quad f(A), \quad f^2(A), \quad f^3(A), \ \ldots$$

donde $A \subseteq X$. Para este análisis, es indispensable poder comparar que tan cercano es un conjunto de otro. Esto nos induce a trabajar con los hiperespacios. Un hiperespacio de un espacio métrico compacto X, es una colección de subconjuntos de X dotado con alguna topología. El hiperespacio con el que trabajamos en esta tesis es el hiperespacio 2^X, que es la colección de los subconjuntos compactos y no vacíos de X, equipado con la métrica de Hausdorff, la cual fue introducida en [11]. Por otro lado, dada una función continua $f\colon X \to X$, ésta induce una función continua $2^f\colon 2^X \to 2^X$, como puede ver en [17]. Con esto, podemos considerar el sistema dinámico $(2^X, 2^f)$. Cuando se estudia el sistema dinámico (X, f) se dice que se analiza la dinámica individual y cuando se trabaja con su sistema dinámico inducido $(2^X, 2^f)$ se dice que se investiga la dinámica colectiva, como en [3]. Un problema muy natural es estudiar las relaciones que existen entre estas dos estructuras. Es importante indicar que el estudio de los sistemas dinámicos inducidos ha tomado fuerza en los últimos años y actualmente existe un buen número de artículos relacionados con este tema. Por mencionar sólo algunos tenemos [1], [12] y [20].

En este sentido, estudiar la relaciones que hay entre las funciones f y 2^f, nos ayuda a estudiar las relaciones entre los sistemas dinámicos (X, f) y $(2^X, 2^f)$. Más precisamente, el problema que se aborda en esta tesis es el siguiente:

Problema. Dada una clase de funciones $\mathscr{M}$, investigar las relaciones que existan entre las siguientes proposiciones:

(a) $f \in \mathscr{M}$;

(b) $2^f \in \mathscr{M}$,

cuando $\mathscr{M}$ es alguna de las siguientes clases de funciones: fuertemente mezclantes, suavemente mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivas, con especificación y con la Propiedad P.

La solución de este problema se encuentra en [10]. Sin embargo, nuestro trabajo fue comprender y detallar las demostraciones que se hallan en este artículo y escribirlas de una forma accesible para ponerlo al alcance de toda la comunidad matemática, y de todo aquel interesado en adentrarse al estudio de la dinámica colectiva.

La tesis está conformada por cuatro capítulos. En el Capítulo 1, se presentan definiciones básicas de conjuntos y funciones, entre los más importantes se encuentran el concepto de iteración de una función y el de función producto. Se estudian propiedades de las iteraciones de funciones y de la función producto, las cuales se utilizan en los Capítulos 2 y 4. Además, se muestran conceptos y propiedades de espacios métricos y espacios topológicos, tales como el de conjunto compacto y el de función continua, los cuales son indispensables en los Capítulos 2 y 4.

En el Capítulo 2, se introduce el concepto de sistema dinámico en su forma más general y los sistemas dinámicos discretos. Se dan las definiciones de los diferentes tipos de funciones con los que se trabaja en esta tesis, así como algunas caracterizaciones de la definición de función débilmente mezclante y función fuertemente mezclante, utilizando la función producto. Además, se estudian las relaciones que existen entre estas clases de funciones y se dan varios ejemplos de éstas.

En el Capítulo 3 se analizan algunos modelos de sistemas dinámicos unidimensionales y sistemas dinámicos multidimensionales. Entre los sistemas dinámicos unidimensionales se estudian el modelo de Malthus y el modelo lineal, así como sus soluciones y el comportamiento de éstas, también se dan ejemplos de estos modelos aplicados en Biología y en Finanzas. En los sistemas dinámicos multidimensionales, se estudia el modelo lineal y se dan algunos ejemplos en dimensión dos aplicados en Biología.

Finalmente, en el Capítulo 4, se estudia el hiperespacio que trabajamos, 2^X. Se dan propiedades de este hiperespacio. Se analiza la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris. También se estudia la función inducida entre hiperespacios y propiedades que cumple esta función, tales como inyectividad, sobreyectividad y continuidad. Además, se exponen los resultados principales que dan solución al problema principal que se aborda en esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares de conjuntos, funciones y espacios métricos

En este capítulo, presentamos conceptos básicos relacionados con conjuntos, funciones, espacios métricos y espacios topológicos. Este capítulo está compuesto por tres secciones. En la primera sección mencionamos propiedades de conjuntos y de funciones, así como el concepto de iteración de una función y propiedades que satisface, que son de suma importancia para definir los conceptos que se tratan en el Capítulo 2. También se introduce el concepto de función producto, el cual es indispensable en los Capítulos 2 y 4. En la segunda sección presentamos algunas definiciones y resultados básicos en espacios métricos los cuales son impresindibles para esta tesis; únicamente incluimos algunas demostraciones. Para mayores detalles puede consultar [16] y [15]. En la tercera sección se abordan conceptos y resultados importantes en espacios topológicos, las cuales fueron consultados en [4].

1.1 Conjuntos y funciones

En esta sección presentamos algunas definiciones y propiedades de conjuntos y funciones. Damos las definiciones de producto cartesiano, función producto, y algunas de sus propiedades. También se introduce el concepto de iteración de una función y propiedades que éstas cumplen.

Una de las herramientas más importantes de las matemáticas son los conjuntos, los cuales denotamos con letras mayúsculas, $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ y a los elementos de los conjuntos con las letras minúsculas $a, b, c, \ldots, x, y$ y z. A los conjuntos cuyos elementos también son conjuntos les llamamos familias y los representamos con letras caligráficas $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots, \mathscr{X}, \mathscr{Y}$ y $\mathscr{Z}$. La colección de todos los subconjuntos de un conjunto A la expresamos por $\mathscr{P}(A)$. Dada una familia $\mathscr{A}$, indicamos por $\bigcup \mathscr{A}$ y $\bigcap \mathscr{A}$ la unión e intersección de la familia, respectivamente. Además, representamos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, al conjunto de los números naturales, números enteros, números racionales, números reales y números complejos, respectivamente.

Un concepto que debemos recordar es el de función. Una función f de un conjunto X en un conjunto Y, es una regla que asocia a cada elemento x de X, un único elemento en

Y, el cual se denota por $f(x)$. Al conjunto X se le conoce como dominio, al conjunto Y como contradominio y con $f\colon X \to Y$, expresamos que f es una función que tiene dominio X y contradominio Y. Como ejemplo de función, presentamos la ***función identidad*** de un conjunto X, denotada por $id_X\colon X \to X$ y definida por $id_X(x) = x$, para cada $x \in X$.

Una función $f\colon X \to Y$ se dice que es ***inyectiva*** si, para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, se satisface que $f(x) \neq f(y)$. De forma equivalente se tiene que, f es inyectiva si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$, se cumple que $x = y$. Decimos también, que una función $f\colon X \to Y$ es ***sobreyectiva***, si para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$.

Para nuestros fines, es necesario definir la imagen directa e imagen inversa de un conjunto bajo una función f, conceptos que ponemos a continuación.

Definición 1.1.1. Sean X y Y conjuntos y $f\colon X \to Y$ una función. Para cada $A \subseteq X$ se define y denota la ***imagen directa*** de A bajo f como:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Además, para cada $B \subseteq Y$ se define y denota la ***imagen inversa*** de B bajo f como:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

La Observación 1.1.2 que escribimos en seguida se obtiene directamente de la Definición 1.1.1.

Observación 1.1.2. Sean X y Y conjuntos, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ y $f\colon X \to Y$ una función. Se cumple lo siguiente:

(1) Si $f^{-1}(B) \neq \varnothing$, entonces $B \neq \varnothing$.

(2) $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$. La igualdad se cumple si f es inyectiva.

(3) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$. La igualdad se cumple si f es sobreyectiva.

En seguida, mostramos dos resultados que son útiles en el Capítulo 4.

Proposición 1.1.3. Sean X y Y conjuntos y $f\colon X \to Y$ una función. Si f es inyectiva, entonces no existe un conjunto $A \subsetneq X$ tal que $f(A) = f(X)$.

Demostración. Hagamos la prueba por contrarecíproco, es decir, supongamos que existe $A \subsetneq X$ tal que $f(A) = f(X)$ y veamos que f no es inyectiva. Como $A \subsetneq X$, existe $x \in X$ tal que $x \notin A$. Notemos que $f(x) \in f(X)$. Dado que $f(A) = f(X)$, se tiene que $f(x) \in f(A)$. Luego, existe $x' \in A$ tal que $f(x') = f(x)$. Notemos que $x \notin A$ y $x' \in A$. De aquí, $x \neq x'$. Por lo tanto, f no es inyectiva. □

Proposición 1.1.4. Sean X y Y conjuntos y $f\colon X \to Y$ una función. Si $B \subseteq f(X)$, entonces $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Demostración. Sea $B \subseteq f(X)$. Por la Observación 1.1.2, se tiene que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$. Veamos que $B \subseteq f\big(f^{-1}(B)\big)$. Sea $y \in B$. Como $B \subseteq f(X)$, se tiene que $y \in f(X)$. Luego, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Dado que $y \in B$, obtenemos que $x \in f^{-1}(B)$. Así, $y = f(x) \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Con esto probamos que $B \subseteq f\big(f^{-1}(B)\big)$, Por lo tanto $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$. □

En los Teoremas 1.1.5 y 1.1.7 se muestran otras propiedades que cumplen la imagen directa y la imagen inversa de conjuntos. La prueba de estos teoremas se puede consultar en [4].

Teorema 1.1.5. Sean X y Y conjuntos, $A_1, A_2 \subseteq X$ y $f\colon X \to Y$ una función. Se cumple lo siguiente:

(1) Si $A_1 \subseteq A_2$, entonces $f(A_1) \subseteq f(A_2)$,

(2) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,

(3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Corolario 1.1.6. Sean X y Y conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq X$ y $f\colon X \to Y$ una función. Se cumple:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f(A_i).$$

Teorema 1.1.7. Sean X y Y conjuntos, $B_1, B_2 \subseteq Y$ y $f\colon X \to Y$ una función. Se cumple lo siguiente:

(1) Si $B_1 \subseteq B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$,

(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Corolario 1.1.8. Sean X y Y conjuntos, $B_1, B_2, \ldots, B_k \subseteq Y$ y $f\colon X \to Y$ una función. Se cumple lo siguiente:

(1) $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k} f^{-1}(B_i)$,

(2) $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(B_i)$.

A continuación mostramos un resultado que nos es útil en la prueba de la Proposición 4.2.9.

Proposición 1.1.9. Sean X y Y conjuntos, $f\colon X \to Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ tales que $B \subseteq f(A)$. Se tiene que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = B$.

Demostración. Primero veamos que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) \subseteq B$. Por el inciso (2) del Teorema 1.1.5, obtenemos que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) \subseteq f(A) \cap f\big(f^{-1}(B)\big)$. Por el inciso (3) de la Observación 1.1.2 tenemos que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$. Así, $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) \subseteq f(A) \cap B$. Además, dado que $B \subseteq f(A)$, obtenemos que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) \subseteq B$.

Ahora veamos que $B \subseteq f\big(A \cap f^{-1}(B)\big)$. Para esto, sea $y \in B$. Como $B \subseteq f(A)$, obtenemos que $y \in f(A)$. Luego, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $y \in B$, obtenemos que $x \in f^{-1}(B)$. Así, $x \in A \cap f^{-1}(B)$. De donde, $y = f(x) \in f\big(A \cap f^{-1}(B)\big)$. Con esto probamos que $B \subseteq f\big(A \cap f^{-1}(B)\big)$.

Por ambas contenciones queda demostrado que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = B$. $\square$

Otra de las definiciones que debemos recordar es la de composición de funciones. Dadas dos funciones $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$, se define la ***función composición*** $g \circ f\colon X \to Z$, como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in X$. Notemos que la composición de funciones es asociativa, esto es, si $f_1\colon X_1 \to X_2$, $f_2\colon X_2 \to X_3$ y $f_3\colon X_3 \to X_4$, se cumple que $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$. En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades de la composición de funciones relacionadas con la imagen directa e inversa, la demostración de este resultado se puede consultar en [4].

Proposición 1.1.10. Sean X, Y y Z conjuntos, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ funciones. Para cualesquiera conjuntos $A \subseteq X$ y $B \subseteq Z$, se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $(g \circ f)(A) = g(f(A))$,

(2) $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Recordemos también, que dados los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k$, se denota y define su ***producto cartesiano*** como:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in X_i,\ \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\big\}.$$

Para simplificar, expresamos el producto $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$, como $\prod_{i=1}^{k} X_i$. En el caso de que $X_1 = X_2 = \cdots = X_k = X$, escribiremos simplemente X^k y hacemos $X^1 = X$.

Otro concepto importante que debemos recordar es el de sucesión. Dado X un conjunto, una ***sucesión*** en X es una función $f\colon \mathbb{N} \to X$. Denotaremos por x_k al elemento $f(k)$, el cual es llamado el k-ésimo término de la sucesión. En este trabajo, expresamos a las sucesiones como $(x_k)_{k=1}^{\infty}$.

Ya que hemos introducido el concepto de sucesión, podemos generalizar la noción de producto cartesiano a un producto numerable de conjuntos. Para esto, consideremos una colección de conjuntos $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$, denotamos su ***producto cartesiano*** como $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, y se define como la colección de todas las sucesiones en $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ tales que $x_i \in X_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. En el caso en que $X_i = X$, para cada $i \in \mathbb{N}$, indicamos el producto como $X^{\mathbb{N}}$.

Ahora, recordemos el concepto de producto de funciones, el cual es de gran utilidad para algunas demostraciones. Para los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, y las funciones $f_i\colon X_i \to Y_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, denotamos la ***función producto*** como

$$f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k\colon \prod_{i=1}^{k} X_i \to \prod_{i=1}^{k} Y_i,$$

y se define por:

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k)(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\big),$$

para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \prod_{i=1}^{k} X_i$. En la mayoría de los casos, expresamos por $\prod_{i=1}^{k} f_i$ la función producto $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$. En el caso en que $f_1 = f_2 = \cdots = f_k = f$, escribimos $f^{\times k}$ y hacemos $f^{\times 1} = f$.

A continuación enunciamos algunas propiedades que cumple el producto cartesiano de conjuntos y el producto de funciones.

Proposición 1.1.11. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conjuntos y, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sean $A_i, B_i \subseteq X_i$ y $f_i \colon X_i \to X_i$ una función. Se cumple lo siguiente:

(1) $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \neq \varnothing$ si y sólo si $A_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

(2) $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \cap (B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \times \cdots \times (A_k \cap B_k)$.

(3) $\left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = f_1(A_1) \times f_2(A_2) \times \cdots \times f_k(A_k)$.

Demostración. Para el inciso (1), observemos que, si $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \neq \varnothing$, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $a_i \in A_i$ tal que $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Luego, $A_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Recíprocamente, si $A_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $a_i \in A_i$. Luego, $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Así, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \neq \varnothing$.

Ahora para el inciso (2), veamos primero que:

$$(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \cap (B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k) \subseteq (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \times \cdots \times (A_k \cap B_k).$$

Para esto, sea $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \cap (B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k)$. Luego $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k)$ y $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k)$. De aquí, $x_i \in A_i$ y $x_i \in B_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. En consecuencia, $x_i \in A_i \cap B_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. De donde, $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \times \cdots \times (A_k \cap B_k)$. Con esto, hemos probado que $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \cap (B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k) \subseteq (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \times \cdots \times (A_k \cap B_k)$. La otra contención se demuestra con los pasos anteriores en orden inverso. Con todo lo anterior, se demuestra la igualdad requerida en (2).

Finalmente, probemos (3). Primero veamos que:

$$\left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \subseteq f_1(A_1) \times f_2(A_2) \times \cdots \times f_k(A_k).$$

Sea $x \in \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k)$. Se tiene que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $a_i \in A_i$ tal que $x = \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Así, de la definición de la función producto, obtenemos que $x = (f_1(a_1), f_2(a_2), \ldots, f_k(a_k)) \in f_1(A_1) \times f_2(A_2) \times \cdots \times f_k(A_k)$. Con esto $\left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \subseteq f_1(A_1) \times f_2(A_2) \times \cdots \times f_k(A_k)$.

Probemos ahora que:

$$f_1(A_1) \times f_2(A_2) \times \cdots \times f_k(A_k) \subseteq \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k).$$

Sea $x \in f_1(A_1) \times f_2(A_2) \times \cdots \times f_k(A_k)$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $x_i \in f_i(A_i)$ tal que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Además, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $a_i \in A_i$, tal que $x_i = f_i(a_i)$. Así:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_k) = (f_1(a_1), f_2(a_2), \ldots f_k(a_k)) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(a_1, a_2, \cdots, a_k). \end{aligned}$$

De donde, $x \in \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k)$. Con esto, obtenemos que:

$$f_1(A_1) \times f_2(A_2) \times \cdots \times f_k(A_k) \subseteq \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k).$$

Por lo tanto, de ambas contenciones se prueba la igualdad requerida en (3). □

En el estudio de los espacios con los que trabajamos en esta tesis se consideran funciones de un conjunto en sí mismo, es decir, de la forma $f\colon X \to X$. Por tal motivo, vamos a enunciar algunas propiedades que cumplen este tipo de funciones. Notemos que dada una función de la forma $f\colon X \to X$, podemos considerar las siguientes funciones

$$f, \quad f \circ f, \quad f \circ f \circ f, \quad \ldots$$

Dada $f\colon X \to X$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos por f^k la ***k-ésima iteración*** de f y la definimos de forma recursiva como $f^0 = id_X$, $f^k = f \circ f^{k-1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Además, para cualquier subconjunto A de X, indicamos por $f^{-k}(A)$, la imagen inversa del conjunto A bajo la función f^k.

A continuación presentamos algunos resultados, los cuales muestran propiedades que cumple la iteración de una función.

Proposición 1.1.12. Sean X un conjunto, $f\colon X \to X$ una función y $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $f^{k+m} = f^k \circ f^m$,

(2) $f^{km} = \left(f^k\right)^m$.

Demostración. Probamos (1) haciendo uso de inducción matemática sobre k. Nuestro caso base es $k = 0$. Observemos que $f^{0+m} = f^m = id_X \circ f^m = f^0 \circ f^m$, con esto queda probado el caso base. Supongamos ahora que el resultado es verdadero para k y probemos que se cumple para $k + 1$. Notemos que $f^{(k+1)+m} = f^{1+(k+m)} = f \circ f^{k+m}$. Por hipótesis de inducción, se obtiene que $f^{(k+1)+m} = f \circ (f^k \circ f^m)$. Dado que la composición de funciones es asociativa, se tiene que $f^{(k+1)+m} = (f \circ f^k) \circ f^m = f^{k+1} \circ f^m$, y con ello se cumple la igualdad requerida en (1).

Ahora probemos (2), utilizando inducción matemática sobre m. Consideremos $g = f^k$, observemos que $g\colon X \to X$. Nuestro caso base es $m = 0$. Notemos que $f^{k\cdot 0} = f^0 = id_X = g^0 = \left(f^k\right)^0$, con esto queda probado el caso base. Supongamos ahora que el resultado es verdadero para m y probemos para $m+1$. Observemos que $f^{k(m+1)} = f^{k+km}$. Por el inciso (1) de esta proposición, se tiene que $f^{k(m+1)} = f^k \circ f^{km}$. Así, por hipótesis de inducción se obtiene que:

$$f^{k(m+1)} = f^k \circ \left(f^k\right)^m = g \circ g^m = g^{m+1} = \left(f^k\right)^{m+1}.$$

Por lo tanto, $f^{k(m+1)} = \left(f^k\right)^{m+1}$, y con ello se cumple la igualdad requerida en (2). □

La siguiente proposición es útil en varias ocasiones en el Capítulo 2.

Proposición 1.1.13. Sean X un conjunto, $A \subseteq X$ y $f\colon X \to X$ una función. Para cualesquiera $m, k \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $f^m\big(f^k(A)\big) = f^{m+k}(A)$,

(2) $f^{-m}\big(f^{-k}(A)\big) = f^{-(m+k)}(A)$,

(3) $f^m\big(f^{-k}(A)\big) \subseteq f^{-k}\big(f^m(A)\big)$.

Demostración. Probemos (1). Consideremos $g = f^m$ y $h = f^k$. Por el inciso (1) de la Proposición 1.1.10, tenemos que $(g \circ h)(A) = g\big(h(A)\big)$, sustituyendo los valores de g y h, obtenemos que $(f^m \circ f^k)(A) = f^m\big(f^k(A)\big)$. Así, por el inciso (1) de la Proposición 1.1.12, concluimos que $f^{m+k}(A) = f^m\big(f^k(A)\big)$.

Ahora probemos (2). Para esto, consideremos $g = f^k$ y $h = f^m$. Usando el inciso (2) de la Proposición 1.1.10, tenemos que $(g \circ h)^{-1}(A) = h^{-1}\big(g^{-1}(A)\big)$. De las definiciones de g y h, obtenemos que $(f^k \circ f^m)^{-1}(A) = f^{-m}\big(f^{-k}(A)\big)$. Por el inciso (1) de la Proposición 1.1.12, se tiene que, $(f^{k+m})^{-1}(A) = f^{-m}\big(f^{-k}(A)\big)$. Luego,

$$f^{-(k+m)}(A) = f^{-m}\big(f^{-k}(A)\big).$$

Como $k + m = m + k$, obtenemos

$$f^{-(m+k)}(A) = f^{-(k+m)}(A) = f^{-m}\big(f^{-k}(A)\big).$$

Finalmente, probemos (3). Para esto, sea $x \in f^m\big(f^{-k}(A)\big)$. Luego, existe $y \in f^{-k}(A)$ tal que $x = f^m(y)$. Dado que $y \in f^{-k}(A)$, se tiene que $f^k(y) \in A$. Así, $f^m(f^k(y)) \in f^m(A)$. Utilizando el inciso (1) de la Proposición 1.1.12 y el hecho de que $k+m = m+k$, obtenemos:

$$f^k(x) = f^k(f^m(y)) = (f^k \circ f^m)(y) = f^{k+m}(y) = f^{m+k}(y) = f^m(f^k(y)) \in f^m(A).$$

Luego, $x \in f^{-k}\big(f^m(A)\big)$. Por lo tanto, $f^m\big(f^{-k}(A)\big) \subseteq f^{-k}\big(f^m(A)\big)$. □

Lema 1.1.14. Sean X un conjunto, A y B subconjuntos no vacíos de X, $f\colon X \to X$ una función y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $f^k(A) \cap B \neq \varnothing$,

(2) $A \cap f^{-k}(B) \neq \varnothing$.

Demostración. Supongamos primero que $f^k(A) \cap B \neq \varnothing$. Luego, existe $x \in B$ tal que $x \in f^k(A)$. Esto implica que existe $y \in A$ tal que $f^k(y) = x$. En consecuencia, $y \in f^{-k}(B)$. Por lo tanto, $A \cap f^{-k}(B) \neq \varnothing$.

Recíprocamente, supongamos que $A \cap f^{-k}(B) \neq \varnothing$. Luego, existe $x \in A$ tal que $x \in f^{-k}(B)$. Esto implica que $f^k(x) \in B$. Por otro lado, como $x \in A$ se tiene que $f^k(x) \in f^k(A)$. Por lo tanto, $f^k(A) \cap B \neq \varnothing$. □

Terminamos esta sección con el siguiente resultado, el cual es indispensable en la prueba del Corolario 2.2.21 y puede demostrarse utilizando inducción matemática sobre m.

Proposición 1.1.15. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_m$ conjuntos, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sean $A_i, B_i \subseteq X_i$ y $f_i \colon X_i \to X_i$ una función. Se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)^k = \prod_{i=1}^{m} f_i^k$,

(2) $\left(\prod_{i=1}^{m} f_i^k\right)(A_1 \times \cdots \times A_m) \cap (B_1 \times \cdots \times B_m) \neq \varnothing$ si y sólo si $f_i^k(A_i) \cap B_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

1.2 Espacios métricos

En esta sección mostramos propiedades de espacios métricos, se presentan algunos ejemplos y conceptos importantes. Además, damos el concepto de continuidad de funciones en espacios métricos y algunas de sus propiedades. Lo estudiado en esta sección es indispensable para los Capítulos 2 y 4.

Comenzamos esta sección con la definición de espacio métrico.

Definición 1.2.1. Un ***espacio métrico*** es una pareja (X, d), donde X es un conjunto no vacío y $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ es una función tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple lo siguiente:

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Además, se dice que la función d es una ***métrica*** sobre X. En lo sucesivo, por brevedad cuando digamos X espacio métrico, suponemos que está dotado con una métrica d.

Ahora recordemos tres ejemplos de espacios métricos bien conocidos; omitimos las demostraciones respectivas.

Ejemplo 1.2.2. Dado X un conjunto no vacío. Se puede demostrar sin mucha dificultad que la función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

para cada $x, y \in X$, es una métrica sobre X. Esta métrica es conocida como ***métrica cero-uno*** o ***métrica discreta***.

Ejemplo 1.2.3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. La función $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $d(x,y) = |x-y|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, es una métrica sobre $\mathbb{R}$.

En el siguiente ejemplo se muestra una métrica para el producto finito de espacios métricos.

Ejemplo 1.2.4. Sea $k \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sea (X_i, d_i) un espacio métrico. Se tiene que la función $d\colon \left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) \to \mathbb{R}$, definida por:

$$d(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2), \ldots, d_k(x_k,y_k)\},$$

para cualesquiera $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \prod_{i=1}^{k} X_i$, es una métrica sobre $\prod_{i=1}^{k} X_i$, la cual es conocida como ***métrica producto***.

De ahora en adelante, el producto finito de espacios métricos es considerado con la métrica producto. Ahora, para mostrar una métrica para el producto numerable de un espacio métrico es necesario introducir el concepto de conjunto acotado. Dado un espacio métrico (X,d) y $A \subseteq X$ no vacío, decimos que A es ***acotado*** si el conjunto de números reales $\{d(x,y) : x, y \in A\}$ es acotado. El espacio X es llamado ***espacio métrico acotado***, o simplemente ***espacio acotado***, si es un subconjunto acotado de si mismo. Si A es un conjunto acotado, definimos y denotamos el ***diámetro*** de A como:

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

Ahora que hemos recordado el concepto de espacio métrico acotado, podemos dar otro ejemplo de espacio métrico.

Ejemplo 1.2.5. Consideremos (X,d) un espacio métrico acotado. Definamos la función $\rho\colon X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i}, \quad \text{para cualesquiera } x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}.$$

La función ρ es una métrica para $X^{\mathbb{N}}$. En efecto, primero verifiquemos que la función ρ está bien definida. Al ser X acotado, existe $M > 0$, tal que $d(x,y) \leq M$, para cualesquiera $x, y \in X$. Así, para cualesquiera $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$, se tiene que

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i} \leq M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = M.$$

Ahora, veamos que ρ cumple las condiciones (i), (ii), (iii), (iv) de la Definición 1.2.1. Para esto, sean $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ y $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ elementos de $X^{\mathbb{N}}$. Para el inciso (i), observe que para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $d(x_i, y_i) \geq 0$, lo cual implica que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\frac{d(x_i,y_i)}{2^i} \geq 0$. Así, $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i} \geq 0$.

Ahora, para el inciso (ii), observemos que si $\rho(x,y) = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i} = 0$. En consecuencia $d(x_i, y_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado que d es una métrica sobre X, obtenemos que $x_i = y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, $x = y$. El recíproco se demuestra con los pasos anteriores en orden inverso. Con esto se demuestra el inciso (ii).

Para el inciso (iii), se tiene que $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(y_i,x_i)}{2^i} = \rho(y,x)$.

Finalmente, para el inciso (iv), tenemos que:

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,z_i) + d(z_i,y_i)}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i,z_i)}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(z_i,y_i)}{2^i} \\ &= \rho(x,z) + \rho(z,y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ es una métrica sobre $X^{\mathbb{N}}$.

Los siguientes dos conceptos son muy importantes dentro de la teoría de espacios métricos. Dado un espacio métrico (X,d), un subconjunto $A \subseteq X$, puede ser considerado como un espacio métrico, con la métrica $d|_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}$, definida por $d|_{A\times A}(x,y) = d(x,y)$, para cada $x, y \in A$. Decimos que $(A, d|_{A\times A})$ es un subespacio de (X,d). Por otro lado, para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, se define la ***bola abierta*** con centro en x y radio ε como el conjunto

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Definición 1.2.6. Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que:

(1) x es un ***punto interior*** de A, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq A$.

(2) x es un ***punto clausura*** de A, si para cada $\varepsilon > 0$ se cumple que $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Definición 1.2.7. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Definimos y denotamos el ***interior*** de A, como:

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in X : x \text{ es punto interior de } A\}.$$

Además, definimos y expresamos la ***clausura*** de A como:

$$\operatorname{cl}(A) = \{x \in X : x \text{ es punto clausura de } A\}.$$

Dados A, B subconjuntos de un espacio métrico X, se puede verificar directamente de la definición lo siguiente:

$$\operatorname{int}(A) \subseteq A \quad \text{y} \quad A \subseteq \operatorname{cl}(A). \tag{1.1}$$

Además, si $A \subseteq B$, se tiene que:

$$\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B) \quad \text{y} \quad \operatorname{cl}(A) \subseteq \operatorname{cl}(B). \tag{1.2}$$

Decimos que A es un conjunto ***abierto*** en X, si todos sus puntos son puntos interiores, es decir $\operatorname{int}(A) = A$, y que B es un conjunto ***cerrado*** en X, si $X \setminus A$ es un conjunto abierto en X. En [16, Proposición 1, pág. 63] y [15, Teorema 1, pág. 35] se demuestra que en un espacio métrico X, para cada $x \in X$ y cada $r > 0$ se tiene que $B(x, r)$ es un conjunto abierto en X.

A continuación presentamos algunas propiedades que cumplen el interior y la clausura de conjuntos. Para, la demostración de la Proposición 1.2.8, puede consultar en [15, Teorema 2, pág. 36], [15, Teorema 5, pág. 38] y [15, Teorema 6, pág. 51].

Proposición 1.2.8. Sea X un espacio métrico. Para cualesquiera $A, B \subseteq X$ se cumple lo siguiente:

(1) $\operatorname{int}\big(\operatorname{int}(A)\big) = \operatorname{int}(A)$,

(2) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$,

(3) $\operatorname{int}(A \cup B) \subseteq \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$,

(4) $\operatorname{cl}\big(\operatorname{cl}(A)\big) = \operatorname{cl}(A)$,

(5) $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl}(A) \cup \operatorname{cl}(B)$,

(6) $\operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}(B) \subseteq \operatorname{cl}(A \cap B)$.

De los incisos (1) y (4) de la Proposición 1.2.8, se obtiene que el interior de un conjunto es un conjunto abierto y la clausura de un conjunto es un conjunto cerrado. A continuación, mostramos un resultado que nos servirá más adelante.

Proposición 1.2.9. Sean X un espacio métrico y $x_0 \in X$. Se tiene que $X \setminus \{x_0\}$ es un conjunto abierto en X.

Demostración. Observemos que si $X = \{x_0\}$, se tiene que $X \setminus \{x_0\} = \varnothing$ es abierto, así que para el resto de la prueba suponemos que $|X| \geq 2$. Para probar que $X \setminus \{x_0\}$ es abierto en X hay que demostrar que $\operatorname{int}(X \setminus \{x_0\}) = X \setminus \{x_0\}$. De (1.1) se tiene que $\operatorname{int}(X \setminus \{x_0\}) \subseteq X \setminus \{x_0\}$. Resta probar que $\operatorname{int}(X \setminus \{x_0\}) \supseteq X \setminus \{x_0\}$. Sea $x \in X \setminus \{x_0\}$. Luego, $x \in X$ y $x \neq x_0$. Hagamos $r = d(x, x_0)$. Notemos que $r > 0$. Además, $x_0 \notin B(x, r)$. De donde, $B(x, r) \subseteq X \setminus \{x_0\}$. Así, $x \in \operatorname{int}(X \setminus \{x_0\})$. Luego, $X \setminus \{x_0\} \subseteq \operatorname{int}(X \setminus \{x_0\})$. De ambas contenciones se obtiene que $\operatorname{int}(X \setminus \{x_0\}) = X \setminus \{x_0\}$. Por lo tanto, $X \setminus \{x_0\}$ es un conjunto abierto en X. $\square$

Proposición 1.2.10. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existen $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos tales que:

$$x \in U, \quad y \in V, \quad \text{y} \quad U \cap V = \varnothing.$$

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Hagamos $r = d(x, y)$, dado que $x \neq y$, obtenemos que $r > 0$. Hagamos $U = B(x, \frac{r}{2})$ y $V = B(y, \frac{r}{2})$. Observe que U y V son abiertos en X, $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. □

En la siguiente proposición se enuncian algunas propiedades que cumplen los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados. La demostración de la Proposición 1.2.11 la puede consultar en [16, Proposición 2, pág. 65] y [16, Proposición 8, pág. 76].

Proposición 1.2.11. Sea X un espacio métrico. Se cumple lo siguiente:

(1) Para cualesquiera $U_1, U_2, \ldots, U_n \subseteq X$ abiertos en X, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es abierto en X.

(2) Para cualesquiera $F_1, F_2, \ldots, F_n \subseteq X$ cerrados en X, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es cerrado en X.

(3) Para cualquier colección $\mathscr{U}$ de conjuntos abiertos en X, $\bigcup \mathscr{U}$ es abierto en X.

(4) Para cualquier colección $\mathscr{F}$ de conjuntos cerrados en X, $\bigcap \mathscr{F}$ es cerrado en X.

Utilizando la Proposición 1.2.9 y el inciso (1) de la Proposición 1.2.11 se obtiene la siguiente observación.

Observación 1.2.12. Si X es un espacio métrico y $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, entonces el conjunto $X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es abierto en X.

Ahora, utilizando la Observación 1.2.12 y el inciso (1) de la Proposición 1.2.11 se obtiene la siguiente observación.

Observación 1.2.13. Si X es un espacio métrico, U es un subconjunto abierto de X y $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, entonces $U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un conjunto abierto en X.

Otros conceptos de espacios métricos que debemos recordar son los de punto aislado y punto de acumulación. Sean X un espacio métrico y $x \in X$. Decimos que x es un ***punto aislado*** de X si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) = \{x\}$. Equivalentemente, x es un punto aislado si el conjunto $\{x\}$ es abierto en X. Decimos que x es un ***punto de acumulación*** de X si para todo $r > 0$, se cumple que $B(x, r) \setminus \{x\} \neq \varnothing$. De la definición de punto aislado se obtiene la siguiente observación.

Observación 1.2.14. Si X es un espacio métrico sin puntos aislados y $U \subseteq X$ es abierto y no vacío en X, entonces U tiene una cantidad infinita de puntos.

A partir de la Observación 1.2.13 y Observación 1.2.14 podemos deducir la siguiente observación.

Observación 1.2.15. Si X es un espacio métrico sin puntos aislados, $U \subseteq X$ es abierto y no vacío en X y $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, entonces $U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es abierto y no vacío en X.

Definición 1.2.16. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es ***denso*** en X si $\mathrm{cl}(A) = X$.

A continuación damos una equivalencia de conjunto denso, la cual es de gran utilidad para demostrar si un conjunto es denso en un espacio.

Proposición 1.2.17. Sean X un espacio métrico y $D \subseteq X$. Se tiene que D es denso en X si y sólo si para cada $U \subseteq X$ abierto y no vacío en X se cumple que $U \cap D \neq \varnothing$.

Demostración. Supongamos primero que D es un conjunto denso en X, esto es, $\text{cl}(D) = X$. Sea $U \subseteq X$ abierto y no vacío en X. Como U es no vacío, existe $x \in U$. Dado que U es abierto y $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$. Por otro lado, dado que $x \in U \subseteq X = \text{cl}(D)$, se obtiene que $B(x, r) \cap D \neq \varnothing$. Luego, $U \cap D \neq \varnothing$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $U \subseteq X$ abierto y no vacío en X, se cumple que $U \cap D \neq \varnothing$. Veamos que D es denso en X, es decir, $\text{cl}(D) = X$. Claramente se cumple que $\text{cl}(D) \subseteq X$. Probemos que $X \subseteq \text{cl}(D)$. Para esto, sea $x \in X$. Puesto que, para cada $r > 0$, $B(x, r)$ es un conjunto abierto y no vacío en X, se tiene por hipótesis que $B(x, r) \cap D \neq \varnothing$, para cada $r > 0$. Así, $x \in \text{cl}(D)$. Luego, $X \subseteq \text{cl}(D)$. De ambas contenciones obtenemos que $\text{cl}(D) = X$. Por lo tanto, D es denso en X. □

Ahora mostramos un resultado de conjuntos densos en espacios métricos sin puntos aislados.

Proposición 1.2.18. Sean X un espacio métrico sin puntos aislados, $D \subseteq X$ un conjunto denso en X y $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$. Se tiene que el conjunto $D \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un conjunto denso en X.

Demostración. Probemos que $D \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es denso en X utilizando la Proposición 1.2.17. Sea $U \subseteq X$ abierto y no vacío en X. Como X no tiene puntos aislados, por la Observación 1.2.15 se tiene que $U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es abierto y no vacío en X. Dado que D es denso en X, se deduce que $(U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) \cap D \neq \varnothing$. Equivalentemente se tiene que $U \cap (D \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) \neq \varnothing$. Por lo tanto, por la Proposición 1.2.17 se concluye que $D \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es denso en X. □

Ahora, recordemos el concepto de convergencia de una sucesión en un espacio métrico. Sean (X, d) un espacio métrico y $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Decimos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es ***convergente*** en X, si existe $x_0 \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ que satisface que:

$$d(x_i, x_0) < \varepsilon, \quad \text{para cada } i \geq k.$$

En este caso decimos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a x_0 y que x_0 es el límite de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ se dice que es de ***Cauchy*** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x_i, x_j) < \varepsilon, \quad \text{para cualesquiera } i, j \geq k.$$

Se sabe que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy y que el recíproco no siempre es verdadero. Además, se dice que un espacio métrico X es ***completo***, si toda sucesión de Cauchy es una sucesión convergente. El resultado que presentamos a continuación, Teorema 1.2.19, es conocido como el Teorema de Baire, cuya demostración se puede consultar en [21, Teorema 5.6, pág. 97].

Teorema 1.2.19. Sean X un espacio métrico completo y $\{A_k \subseteq X : k \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos abiertos y densos de X. Se cumple que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_k$ es denso en X.

Ahora, introducimos el concepto de distancia de un punto a un conjunto, el cual es muy útil en el Capítulo 4. Consideremos (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $A \subseteq X$ no vacío, definimos y denotamos la ***distancia del punto*** x ***al conjunto*** A como:

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

En la siguiente proposición, Proposición 1.2.20, mostramos algunas propiedades relacionadas con la distancia de un punto a un conjunto.

Proposición 1.2.20. Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A \subseteq X$ no vacío. Se cumple lo siguiente:

(1) $d(x, A) \geq 0$,

(2) $d(x, A) \leq d(x, a)$, para cualquier $a \in A$,

(3) $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \text{cl}(A)$.

La demostración de los incisos (1) y (2) de la Proposición 1.2.20 es inmediata, mientras que la demostración del inciso (3) se puede consultar en [15, Teorema 2, pág. 46].

Otro concepto importante en espacios métricos es el de función continua, el cual mencionamos a continuación.

Definición 1.2.21. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una función. Decimos que f es ***continua en un punto*** $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier $y \in X$:

$$d(x, y) < \delta \quad \text{implica} \quad d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Se dice que la función f es ***continua*** en X si es continua en cada punto de X.

La Proposición 1.2.22, la cual mostramos en seguida, nos proporciona equivalencias a la definición de continuidad de una función. Para la demostración de este resultado puede consultar [16, Proposición 3, pág. 68] y [16, Proposición 9, pág. 76].

Proposición 1.2.22. Sean X y Y espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es continua.

(2) Para cada $U \subseteq Y$ abierto en Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

(3) Para cada $F \subseteq Y$ cerrado en Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Con ayuda de la Proposición 1.2.22, se demuestra sin mucha dificultad la siguiente proposición.

Proposición 1.2.23. Sean X, Y y Z espacios métricos, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ funciones. Si f es continua en X y g es continua en Y, entonces $g \circ f$ es continua en X.

A su vez, a partir de la Proposición 1.2.23 se tiene la siguiente observación.

Observación 1.2.24. Si $f\colon X \to X$ es continua en X, entonces f^k es continua en X, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Otro concepto que recordamos es el de función uniformemente continua.

Definición 1.2.25. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una función. Decimos que f es ***uniformemente continua*** si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que:

$$d(x, y) < \delta \quad \text{implica} \quad d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Ahora mostramos un resultado relacionado con la composición de funciones uniformemente continuas. La prueba de la Proposición 1.2.26 la puede consultar en [15, Teorema 1, pág. 182].

Proposición 1.2.26. Sean X, Y y Z espacios métricos, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ funciones continuas. Si f y g son uniformemente continuas, entonces $g \circ f$ es uniformemente continua.

Con ayuda de la Proposición 1.2.26, no es difícil verificar la siguiente observación.

Observación 1.2.27. Si $f\colon X \to X$ es uniformemente continua, entonces f^k es uniformemente continua, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Otro concepto que introducimos es el de isometría. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos. Una función $f\colon X \to Y$ se dice que es una ***isometría***, si $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, para cualesquiera $x, y \in X$. A continuación presentamos ejemplos de isometrías.

Ejemplo 1.2.28. En cualquier espacio métrico (X, d), la función $id_X\colon X \to X$ es una isometría.

Ejemplo 1.2.29. Consideremos $S^1 = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0, 1]\}$, con la métrica usual de los números complejos. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos la función $R_\alpha : S^1 \to S^1$, por $R_\alpha\left(e^{2\pi i\theta}\right) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}$, para cada $e^{2\pi i\theta} \in S^1$, o bien, $R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, para cada $z \in S^1$. La función R_α, se llama ***rotación*** de S^1. En la Figura 1.1 se representa gráficamente el comportamiento de la función R_α.

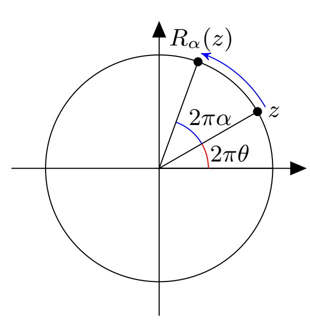


Figura 1.1: Representación gráfica de R_α.

Afirmamos que la función R_α es una isometría. En efecto, sean $z_1, z_2 \in S^1$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} d\big(R_\alpha(z_1), R_\alpha(z_2)\big) &= |R_\alpha(z_2) - R_\alpha(z_1)| \\ &= |e^{2\pi i\alpha} z_2 - e^{2\pi i\alpha} z_1| \\ &= |e^{2\pi i\alpha}||z_2 - z_1| \\ &= |z_2 - z_1| = d(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Ahora, presentamos dos observaciones respecto a isometrías, las cuales no son muy difíciles de verificar.

Observación 1.2.30. Si $f\colon X \to Y$ es una isometría, entonces f es continua.

Observación 1.2.31. Si $f\colon X \to X$ es una isometría, entonces f^k es una isometría, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Proposición 1.2.32. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos, $f\colon X \to Y$ una isometría y $A \subseteq X$ un conjunto acotado. Se cumple que $\text{diám}\big(f(A)\big) = \text{diám}(A)$.

Demostración. Observemos que

$$\{d'(z, w) : z, w \in f(A)\} = \{d'(f(x), f(y)) : x, y \in A\} = \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Así,

$$\text{diám}\big(f(A)\big) = \sup\{d'(z, w) : z, w \in f(A)\} = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} = \text{diám}(A).$$

Por lo tanto, $\text{diám}\big(f(A)\big) = \text{diám}(A)$. □

Terminamos esta sección con el siguiente resultado, el cual se deduce de la Observación 1.2.31 y la Proposición 1.2.32.

Proposición 1.2.33. Sean (X, d) un espacio métrico, $f\colon X \to X$ una isometría, $A \subseteq X$ un conjunto acotado y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se tiene que $\text{diám}\big(f^k(A)\big) = \text{diám}(A)$.

1.3 Espacios topológicos

En esta sección, presentamos el concepto de espacio topológico, el cual es más general que el de espacio métrico estudiado en la sección anterior. También se tratan otros conceptos importantes como el de compacidad, base de un espacio topológico y el de función continua entre espacios topológicos. Los resultados presentados en esta sección son de gran utilidad en los Capítulos 2 y 4.

Comenzamos esta sección con los conceptos de topología sobre un conjunto y el de espacio topológico.

Definición 1.3.1. Sea X un conjunto. Decimos que $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una ***topología*** sobre X si satisface las siguientes propiedades:

(i) $\varnothing, X \in \mathscr{T}$;

(ii) Si $U, V \in \mathscr{T}$, entonces $U \cap V \in \mathscr{T}$;

(iii) Si $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{T}$, entonces $\bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{T}$.

Un ***espacio topológico*** es una pareja $(X, \mathscr{T})$, donde $\mathscr{T}$ es una topología sobre X. A los elementos de $\mathscr{T}$ les llamamos abiertos.

A continuación, exhibimos un ejemplo en el que se muestra que cualquier conjunto puede ser dotado al menos de dos topologías.

Ejemplo 1.3.2. Sea X un conjunto. Las familias $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, X\}$ y $\mathscr{T}_2 = \mathscr{P}(X)$ son topologías sobre X, las cuales son llamadas topología indiscreta y topología discreta, respectivamente. Si X es dotado con la topología indiscreta decimos que X es un espacio indiscreto. De manera similar, si X es considerado con la topología discreta, a X le llamamos espacio discreto.

El ejemplo que mostramos en seguida, afirma que cualquier espacio métrico se puede considerar como un espacio topológico.

Ejemplo 1.3.3. Sea (X, d) un espacio métrico. La familia

$$\mathscr{T}_d = \{U \subseteq X : U \text{ es una unión de bolas abiertas en } X\}$$

es una topología sobre X. De ahora en adelante, vamos a considerar a todo espacio métrico como un espacio topológico, con la topología $\mathscr{T}_d$.

Otro concepto importante que debemos recordar es el de subespacio de un espacio topológico. Dados $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto de X. La colección $\mathscr{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{T}\}$ es una topología sobre A. El espacio topológico $(A, \mathscr{T}_A)$ es llamado ***subespacio*** de $(X, \mathscr{T})$.

A continuación mostramos un ejemplo de subsepacio.

Ejemplo 1.3.4. Sea $(X, \mathscr{T}_1)$ un espacio topológico indiscreto, como en el Ejemplo 1.3.2, y sea $A \subseteq X$. El subespacio $(A, \mathscr{T}_A)$ de $(X, \mathscr{T}_1)$ es nuevamente un espacio indiscreto. De forma similar, todo subespacio de un espacio discreto, es también un espacio discreto.

A continuación, mostramos la definición de otro concepto importante en los espacios topológicos, que es el de base para una topología.

Definición 1.3.5. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Decimos que $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ es una ***base*** para $\mathscr{T}$ si cada elemento de $\mathscr{T}$ es la unión de elementos de $\mathscr{B}$.

Ahora mostramos un par de ejemplos sobre bases, con el fin de ilustrar este concepto.

Ejemplo 1.3.6. Sea X un conjunto y consideremos $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ las topologías indiscreta y discreta, respectivamente. Las familias $\mathcal{B}_1 = \{X\}$ y $\mathcal{B}_2 = \big\{\{x\} : x \in X\big\}$ son bases para $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, respectivamente.

Ejemplo 1.3.7. Sea (X, d) un espacio métrico. La colección de todas las bolas abiertas en X, $\mathcal{B}_d = \{B(x, r) : x \in X \text{ y } r > 0\}$, es una base para $\mathcal{T}_d$.

A continuación, en la Proposición 1.3.8 mostramos una equivalencia de base para una topología. La demostración de este resultado la puede consultar en [4, Teorema 2.2, pág. 64].

Proposición 1.3.8. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$.

(2) Para cada $U \in \mathcal{T}$ y cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

En seguida, en el Teorema 1.3.9, se expone un método para mostrar la igualdad de dos topologías sobre un conjunto X. Para la prueba de este resultado puede consultar [4, Teorema 3.4, pág. 68] .

Teorema 1.3.9. Sean X un conjunto, $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ topologías sobre X y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente. Se tiene que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ si y sólo si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ satisfacen las siguientes condiciones:

(1) Para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada $x \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.

(2) Para cada $B' \in \mathcal{B}'$ y cada $x \in B'$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B'$.

El Teorema 1.3.10 nos proporciona un método para construir topologías sobre un conjunto X, a partir familias de subconjuntos de X. La demostración la puede consultar en [4, Teorema 3.1, pág. 65]. Este resultado es indispensable para la Definición 4.1.3.

Teorema 1.3.10. Sean X un conjunto y $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Existe una única topología, $\mathcal{T}(S)$, que es la más pequeña tal que $S \subseteq \mathcal{T}(S)$. La familia $\mathcal{T}(S)$ puede ser descrita como sigue: Consiste de $\varnothing$, X, todas las intersecciones finitas de elementos de S y todas las uniones arbitrarias de estas intersecciones finitas. La colección S es llamada una subbase para $\mathcal{T}(S)$. Se dice que $\mathcal{T}(S)$ es generada por S.

Enseguida, presentamos otro resultado, que nos proporciona un método más para construir topologías a partir de familias especiales de subconjuntos de un conjunto X. La prueba del resultado que presentamos a continuación, Teorema 1.3.11, la puede consultar en [4, Teorema 3.2, pág. 67].

Teorema 1.3.11. Sean X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisface lo siguiente: para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y para cada $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Se cumple que la familia $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ que consiste de $\varnothing$, X, y todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$, es una topología para X. Más aun $\mathcal{B} \cup \{\varnothing\} \cup \{X\}$ es una base para $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, la cual es la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{B}$.

Corolario 1.3.12. Sean X un conjunto y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ que satisface lo siguiente: para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ tales que $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, se tiene que $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$. Se cumple que la familia $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ descrita en el Teorema 1.3.11 es una topología sobre X. Además, $\mathscr{B} \cup \{\varnothing\} \cup \{X\}$ es una base para $\mathscr{T}(\mathscr{B})$.

Con ayuda del Corolario 1.3.12 podemos dar más ejemplos de topologías. En el siguiente ejemplo, el cual se verifica fácilmente utilizando el Corolario 1.3.12 y el inciso (2) de la Proposición 1.1.11, mostramos una topología la cual será muy utilizada en los Capítulos 2 y 4.

Ejemplo 1.3.13. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ espacios topológicos. La familia

$$\mathscr{B} = \big\{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k : U_i \text{ es abierto y no vacío en } X_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\big\}$$

genera una topología sobre $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$, la cual es llamada ***topología producto***. Además $\mathscr{B}$ es una base para la topología producto.

La proposición que mostramos en seguida, Proposición 1.3.14, nos indica que la topología inducida por la métrica producto y la topología producto coinciden.

Proposición 1.3.14. Sean $k \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sea (X_i, d_i) un espacio métrico. Consideremos d la métrica producto y $\mathscr{T}$ la topología producto sobre $\prod_{i=1}^{k} X_i$. Se cumple que $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}$, donde $\mathscr{T}_d$ es la topología inducida por la métrica d.

Demostración. Pongamos $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$. Para la prueba utilizamos el Teorema 1.3.9. Para esto, hay que recordar que de los Ejemplos 1.3.7 y 1.3.13 tenemos que

$$\mathscr{B}_d = \{B(x, r) : x \in X \text{ y } r > 0\}$$

y

$$\mathscr{B} = \big\{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k : U_i \text{ es abierto y no vacío en } X_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\big\}$$

son bases para $\mathscr{T}_d$ y $\mathscr{T}$, respectivamente. Veamos que se satisfacen los inciso (1) y (2) del Teorema 1.3.9. Primero probemos que se cumple (1). Sea $B \in \mathscr{B}_d$. Luego, existe $r > 0$ y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $B = B(x, r)$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Observemos que $B' = B(x_1, r) \times B(x_2, r) \times \cdots \times B(x_k, r) \in \mathscr{B}$. Verifiquemos que se cumple que $x \in B' \subseteq B$. Claramente, $x \in B'$. Si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in B'$, entonces $y_i \in B(x_i, r)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, $d(x_i, y_i) < r$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Así

$$d(x, y) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1,), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_k(x_k, y_k)\} < r.$$

Esto implica que $y \in B(x, r) = B$. Con esto probamos que $B' \subseteq B$. Así, $x \in B' \subseteq B$.

Ahora, veamos que se satisface (2). Sea $B' \in \mathscr{B}$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in B'$. Dado que $B' \in \mathscr{B}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe U_i abierto en X_i tal que $B' = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $r_i > 0$ tal que $B(x_i, r_i) \subseteq U_i$. Hagamos $r = \text{mín}\{1, 2, \ldots, k\}$. Sea $B = B(x, r)$. Probemos que $x \in B \subseteq B'$. Claramente $x \in B$. Veamos que $B \subseteq B'$. Sea $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in B$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ se tiene que

$$d_i(x_i, y_i) \leq \text{mín}\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_k(x_k, y_k)\} = d(x, y) < r \leq r_i.$$

Así, $y_i \in B(x_i, r_i) \subseteq U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. De donde, $y \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k = B'$. Con esto probamos que $B \subseteq B'$. Por lo tanto, $x \in B \subseteq B'$.

Con todo lo anterior hemos demostrado que se satisfacen los incisos (1) y (2) del Teorema 1.3.9. Por lo tanto, $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}$. $\square$

Ahora, presentamos las definiciones de cubierta, cubierta abierta y subcubierta de una cubierta. Todo esto con el fin de introducir el concepto de compacidad.

Definición 1.3.15. Sea X un espacio topológico. Una ***cubierta*** de X es una colección $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(X)$ tal que $X = \bigcup \mathscr{C}$. Una ***cubierta abierta*** de X es una cubierta cuyos elementos son subconjuntos abiertos de X. Si $\mathscr{C}$ es una cubierta de X y $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{P}(X)$, decimos que $\mathscr{C}'$ es ***subcubierta*** de $\mathscr{C}$, si $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ también es una cubierta de X.

En seguida, introducimos el concepto de compacidad, el cual es indispensable en el Capítulo 3.

Definición 1.3.16. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es ***compacto***, si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. Decimos que $A \subseteq X$ es compacto si es compacto como subespacio de X.

A continuación mostramos algunos ejemplos de espacios topológicos compactos y subconjuntos compactos.

Ejemplo 1.3.17. Cualquier conjunto considerado con la topología indiscreta es compacto. Más aún, todo subconjunto de un espacio indiscreto es compacto.

Ejemplo 1.3.18. Sea X un espacio topológico. Todos los subconjuntos finitos de X son subconjuntos compactos. Además, si X es dotado con la topología discreta, entonces los conjuntos finitos son los únicos subconjuntos compactos de X.

Ahora, presentamos algunos resultados sobre espacios métricos compactos. La prueba de la Proposición 1.3.19 la puede consultar en [16, Proposición 1, pág. 211].

Proposición 1.3.19. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Si A es compacto, entonces A es cerrado. Además, si X es compacto y A es cerrado, entonces A es compacto.

De la Proposición 1.3.19 se tiene de manera inmediata la siguiente observación.

Observación 1.3.20. Sean X un espacio métrico compacto y $A \subseteq X$. Se tiene que A es compacto si y sólo si A es cerrado en X.

El siguiente resultado, Proposición 1.3.21, nos muestra condiciones necesarias y suficientes para que un espacio métrico posea una base numerable. La demostración de este resultado la puede consultar en [16, Proposición 1, pág. 274]

Proposición 1.3.21. Sea X un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) X contiene un conjunto denso y numerable,

(2) X posee una base numerable,

(3) Toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita o numerable.

De la Proposición 1.3.21 y de la Definición 1.3.16 se deduce el siguiente resultado.

Proposición 1.3.22. Sea X un espacio métrico. Si X es compacto, entonces X posee una base numerable.

A continuación mostramos un resultado que relaciona el concepto de espacio métrico compacto y espacio métrico completo. La prueba del Teorema 1.3.23 la puede consultar [15, Teorema 1, pág. 117]

Teorema 1.3.23. Sea X un espacio métrico. Si X es compacto, entonces X es completo.

Ahora introducimos el concepto de función continua en espacios topológicos.

Definición 1.3.24. Sean X y Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función. Decimos que f es continua si para cada $U \subseteq Y$ abierto en Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Recordemos algunas propiedades sobre funciones continuas. La prueba de la Proposición 1.3.25 puede consultar en [4, Teorema 8.3, pág. 79].

Proposición 1.3.25. Sean X y Y espacios topológicos, $\mathscr{B}$ una base para la topología de Y y $f\colon X \to Y$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es continua.

(2) Para cada $F \subseteq Y$ cerrado en Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

(3) Para cada $B \in \mathscr{B}$, $f^{-1}(B)$ es abierto en X.

Finalizamos esta sección y el capítulo mostrando un resultado sobre funciones continuas en espacios métricos, cuyo dominio es compacto. La prueba la puede consultar en [15, Teorema 4, pág. 185].

Teorema 1.3.26. Sean X y Y espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una función. Si X es compacto y f es continua, entonces f es uniformemente continua.

CAPÍTULO 2

Nociones básicas de sistemas dinámicos discretos

En este capítulo se abordan los sistemas dinámicos y se estudian las funciones del tipo mezclante y las relaciones que existen entre estos tipos de funciones. Este capítulo está compuesto por dos secciones, en la primera sección mostramos la definición de sistema dinámico y algunos ejemplos. En la segunda sección, presentamos los diferentes tipos de funciones mezclantes, así como algunas funciones del tipo transitiva, y se verifican las relaciones que existen entre estos tipos de funciones.

2.1 Conceptos básicos

En esta sección estudiamos el concepto de sistema dinámicos y se analizan algunos ejemplos. En palabras, un sistema dinámico es un fenómeno que evoluciona a través del tiempo mediante una ley. Para poder estudiar los sistemas dinámicos, debemos presentar la definición mátemática de un sistema dinámico. Para la siguiente definición es necesario notar que un semigrupo topológico es un semigrupo[1] dotado con una topología de tal manera que la operación del semigrupo sea continua.

Definición 2.1.1. Sean X un espacio topológico, $(S, *)$ un semigrupo topológico con elemento neutro e y $\varphi\colon S \times X \to X$ una función continua. Decimos que la terna (X, S, φ) es un ***sistema dinámico*** si satisface lo siguiente:

(i) $\varphi(e, x) = x$, para cada $x \in X$,

(ii) $\varphi(a, \varphi(b, x)) = \varphi(a * b, x)$, para cualesquiera $a, b \in S$ y cualquier $x \in X$.

Si $S = \mathbb{Z}$ o $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ considerado con la suma usual, entonces decimos que el sistema dinámico es un ***sistema dinámico discreto***. Por otro lado, si $S = \mathbb{R}$ o $S = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, con la suma usual, entonces decimos que el sistema dinámico es un ***sistema dinámico continuo***.

[1]Un semigrupo es una pareja $(S, *)$, donde S es un conjunto y $*$ una operación binaria que es asociativa.

Estamos enfocados en estudiar sistemas dinámicos de la forma $(X, \mathbb{N} \cup \{0\}, \varphi)$. Así, que a continuación hacemos un análisis de los sistemas de esta forma. Para esto, debemos recordar el concepto de iteración de una función f, que se define de la siguiente forma: $f^0 = id_X$ y $f^k = f \circ f^{k-1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Consideramos el sistema dinámico discreto $(X, \mathbb{N}\cup\{0\}, \varphi)$, donde $\varphi\colon \mathbb{N}\cup\{0\}\times X \to X$. Podemos definir la función continua $f\colon X \to X$, dada por $f(x) = \varphi(1, x)$, para cada $x \in X$. Veamos que la función φ se puede determinar a partir de las iteraciones de la función f. Notemos que, para cada $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$, si usamos la condición (i) de la Definición 2.1.1 se tiene que:

$$\varphi(0, x) = x = f^0(x), \quad \text{para cada } x \in X.$$

Por otra parte, por la condición (ii) de la Definición 2.1.1 se tiene que:

$$\varphi(k, x) = \varphi(1 + (k-1), x) = \varphi(1, \varphi(k-1, x)).$$

Así, por la forma en la que se define la función f se obtiene que:

$$\varphi(k, x) = f(\varphi(k-1, x)). \tag{2.1}$$

Utilizando (2.1) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi(1, x) &= f(\varphi(0, x)) = f(x),\\
\varphi(2, x) &= f(\varphi(1, x)) = f(f(x)) = f^2(x),\\
\varphi(3, x) &= f(\varphi(2, x)) = f(f^2(x)) = f^3(x),\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

De manera general, se tiene que $\varphi(k, x) = f^k(x)$, para cada $x \in X$ y cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde f^k es la k-ésima iteración de la función f, definida en el Capítulo 1. En efecto, probemos esto utilizando inducción matemática sobre k. Para el caso $k = 0$, por la condición (i), se tiene que:

$$\varphi(0, x) = x = f^0(x), \quad \text{para cada } x \in X.$$

Ahora supongamos que la igualdad se cumple para k, es decir,

$$\varphi(k, x) = f^k(x), \quad \text{para cada } x \in X.$$

Probemos que se cumple para $k + 1$. Por (2.1) tenemos que $\varphi(k+1, x) = f(\varphi(k, x))$. Utilizando la hipótesis de inducción obtenemos que:

$$\varphi(k+1, x) = f(\varphi(k, x)) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x).$$

De todo lo anterior, hemos demostrado que $\varphi(k, x) = f^k(x)$, para cada $x \in X$ y cada $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Por lo tanto, todo sistema dinámico discreto de la forma $(X, \mathbb{N}\cup\{0\}, \varphi)$ está bien determinado por el espacio topológico X y una función continua $f\colon X \to X$. De ahora en adelante denotamos por (X, f) a cualquier sistema dinámico discreto y consideramos a X como un espacio métrico. Dado que trabajamos sólo con sistemas dinámicos discretos, nos referimos a estos simplemente como sistemas dinámicos.

Uno de los conceptos importantes en el estudio de los sistemas dinámicos es el de órbita de un punto, el cual definimos a continuación.

Definición 2.1.2. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Definimos y denotamos la ***órbita*** de x bajo f como:

$$\mathcal{O}(x, f) = \left\{ f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Cuando se analiza un sistema dinámico (X, f), lo que interesa estudiar es el desarrollo de las órbitas de todos los elementos del espacio X bajo la función f. La órbita de un punto es posible que sea un conjunto infinito, pero también puede suceder que sea finito.

Definición 2.1.3. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que:

(1) x es un ***punto fijo*** de f si $f(x) = x$.

(2) x es un ***punto periódico*** de f si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Al número natural k más pequeño que cumple que $f^k(x) = x$ le llamamos ***periodo*** de x.

Observemos que la órbita de un punto periódico cuyo periodo es k es de la siguiente forma:

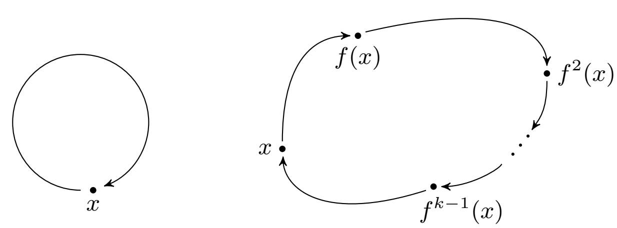
$$\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x)\}.$$

Por otra parte la órbita de un punto fijo es de la forma:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{x\}.$$

Al conjunto de puntos periódicos y puntos fijos del sistema (X, f) lo denotamos por $\mathrm{Per}(f)$ y $\mathrm{Fix}(f)$, respectivamente. Se puede observar de la definición de punto periódico, que los puntos fijos son puntos periódicos de periodo uno. Luego, $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Per}(f)$.

En la Figura 2.1 se representa gráficamente el comportamiento de un punto fijo y un punto periódico.



(a) Punto fijo (b) Punto periódico de periodo k

Figura 2.1: Representación gráfica de un punto fijo y un punto periódico.

A continuación, damos ejemplos de sistemas dinámicos y analizamos sus puntos fijos y puntos periódicos.

Ejemplo 2.1.4. Consideremos $X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax$, para cada $x \in X$. Notemos que para cada $x \in X$ tenemos:

$$\begin{aligned}
f^0(x) &= id_{\mathbb{R}}(x) = x = a^0 x, \\
f^1(x) &= f(x) = ax = a^1 x, \\
f^2(x) &= f(f(x)) = f(ax) = a^2 x, \\
f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(a^2) = a^3 x, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

En general, se tiene que $f^k(x) = a^k x$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Observemos que, 0 es un punto fijo de f. Por otro lado, consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Si $a = -1$. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tiene que x es un punto periódico de periodo 2. En este caso $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$ y $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{R}$.

Caso 2. Si $a = 1$. Todos los puntos de $\mathbb{R}$ son puntos fijos de f. Para este caso $\mathrm{Fix}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{R}$.

Caso 3. Si $|a| \neq 1$. Se tiene que 0 es el único punto periódico de f. Luego, $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$ y $\mathrm{Per}(f) = \{0\}$.

Ejemplo 2.1.5. Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $m \geq 2$ y $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. Consideremos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ con la métrica discreta y la función $f\colon X \to X$ definida como:

$$f(x_i) = \begin{cases} x_{i+1}, & \text{si} \quad 1 \leq i \leq m-1; \\ x_1, & \text{si} \quad i = m. \end{cases}$$

En la Figura 2.2, se representa gráficamente el comportamiento del sistema dinámico (X, f).

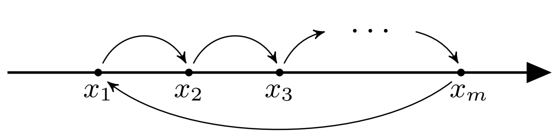


Figura 2.2: Descripción gráfica de f.

Por la construcción de la función, se tiene que f no poseé puntos fijos. Así, $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$. Además, todos los puntos de X son puntos periódicos de periodo m. Luego $\mathrm{Per}(f) = X$. Adicionalmente, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) = X$, para cada $x \in X$.

Finalizamos esta sección mostrando un ejemplo más de sistema dinámico.

Ejemplo 2.1.6. Consideremos S^1 y la función rotación $R_\alpha\colon S^1 \to S^1$, por $R_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z$, para cada $z \in S^1$ definida en el Ejemplo 1.2.29.

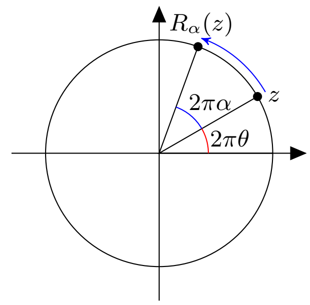


Figura 2.3: Representación gráfica de R_α.

Encontremos los puntos fijos y periódicos de la función R_α. Para esto, hay que encontrar los elementos $z \in S^1$ tales que $R_\alpha^k(z) = z$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Tomemos $z \in S^1$ arbitrario. Observemos que $R_\alpha^k(z) = e^{2k\pi i\alpha}z$. La igualdad $R_\alpha^k(z) = z$ se cumple si y sólo si $e^{2k\pi i\alpha}z = z$, equivalentemente, $e^{2k\pi i\alpha} = 1$. Esta última igualdad se satisface si y sólo si $2k\pi\alpha = 2m\pi$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Esto último es equivalente a $k\alpha \in \mathbb{Z}$. Con esto queda demostrado que $R_\alpha^k(z) = z$ si y sólo si $k\alpha \in \mathbb{Z}$. A partir de esto, se tienen los siguientes casos:

Caso 1. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La función R_α no tiene puntos fijos ni puntos periódicos, ya que $k\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathrm{Fix}(R_\alpha) = \varnothing$ y $\mathrm{Per}(R_\alpha) = \varnothing$.

Caso 2. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$. Para cada $z \in S^1$, se tiene que z es un punto periódico con periodo $k = \min\{s \in \mathbb{N} : s\alpha \in \mathbb{Z}\}$. Más aún, si $\alpha = \frac{a}{b}$, donde a y b son primos relativos (es decir con máximo común divisor igual a 1), entonces el periodo de z es b, para cada $z \in S^1$. Luego, $\mathrm{Per}(R_\alpha) = S^1$. Además, si $\alpha \in \mathbb{Z}$, se cumple que $\mathrm{Fix}(R_\alpha) = S^1$. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, se tiene que $\mathrm{Fix}(R_\alpha) = \varnothing$.

2.2 Funciones del tipo mezclante

En esta sección se presentan los distintos tipos de funciones mezclante y las del tipo transitiva. Se analizan las relaciones que existen entre ellas y se muestran varias propiedades que cumplen. También se exhiben algunos ejemplos de estos tipos de funciones. Tanto en esta sección como en el Capítulo 4 se utiliza el concepto de producto cartesiano de espacios métricos, el cual es considerado con la métrica producto y utilizamos el hecho de que la topología inducida por esta métrica coincide con la topología producto, además que la familia descrita en el Ejemplo 1.3.13 es una base para esta topología.

Como hemos mencionado anteriormente, los sistemas dinámicos discretos que estudiamos en esta tesis están completamente determinados por un espacio métrico X y una función continua $f\colon X \to X$. Nosotros estamos interesados en sistemas dinámicos particulares, los cuales se obtienen, poniendo ciertas condiciones a la función f. Para esto se definen las siguientes funciones.

Definición 2.2.1. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua, decimos que:

1. f es ***transitiva*** si para cualesquiera dos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$.

2. f es ***débilmente mezclante*** si la función $f \times f : X \times X \to X \times X$ es transitiva.

3. f es ***suavemente mezclante*** si para cualquier espacio métrico Y y cualquier función transitiva $g : Y \to Y$, se cumple que la función $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ es transitiva.

4. f es ***fuertemente mezclante***[2] si para cualesquiera dos abiertos no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$, para cada $k \geq n$.

5. f es ***totalmente transitiva*** si f^k es transitiva para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Cabe mencionar que en algunos textos, en la definición de función transitiva se exige que el número k sea un número natural. Sin embargo, mas adelante, en la Proposición 2.2.15 mostramos que esto es equivalente.

Como una consecuencia inmediata de las definiciones dadas en la Definición 2.2.1 tenemos la siguiente observación.

Observación 2.2.2. Toda función totalmente transitiva es transitiva.

A continuación damos ejemplos de las funciones dadas en la Definición 2.2.1.

Ejemplo 2.2.3. La función del Ejemplo 2.1.5 es transitiva. En efecto, sean $U, V \subseteq X$ abiertos en X y no vacíos. Sea $x \in X$ tal que $x \in U$. Se tiene que $\mathcal{O}(x, f) = X$. Luego, $\mathcal{O}(x, f) \cap V \neq \varnothing$. Esto implica que existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(x) \in V$. Así, $f^k(x) \in f^k(U) \cap V$. En consecuencia, $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Por lo tanto, f es transitiva.

Ejemplo 2.2.4. Sea X un espacio métrico con al menos dos puntos. La función identidad, $id_X \colon X \to X$, no es transitiva. En efecto, dado que X tiene al menos dos puntos, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$. Por la Proposición 1.2.10, existen conjuntos $U, V \subseteq X$, abiertos no vacíos tales que:

$$x_1 \in U, \quad x_2 \in V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que:

$$(id_X)^k(U) \cap V = U \cap V = \varnothing.$$

Por lo tanto, id_X no es transitiva.

Ejemplo 2.2.5. La función del Ejemplo 2.1.5 no es totalmente transitiva. En efecto, dado que todos los puntos de X son puntos periódicos de periodo m, se tiene que $f^m = id_X$. Luego, por el Ejemplo 2.2.4, tenemos que f^m no es transitiva. Por lo tanto, f no es totalmente transitiva.

De los Ejemplos 2.1.5 y 2.2.5, se obtiene la siguiente observación.

[2]En algunos textos es conocida como *mezclante*.

Observación 2.2.6. Existe una función transitiva que no es totalmente transitiva.

Ahora, mostramos un ejemplo de una función fuertemente mezclante, la cual es conocida cono la función tienda. En [5], [8] y [19] se puede encontrar un estudio detallado sobre esta función y propiedades que satisface.

Ejemplo 2.2.7. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$, definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2-2x, & \text{si } \ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

La función T es conocida como ***función tienda***. En [8, Corolario 4.2.21, pág. 63] se muestra que la función tienda es fuertemente mezclante.

A continuación mostramos un resultado que servirá para determinar si una función es transitiva.

Proposición 2.2.8. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Se tiene que, f es transitiva si y sólo si para cualquier $V \subseteq X$ abierto y no vacío en X, el conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$ es denso en X.

Demostración. Supongamos primero que f es transitiva. Sea $V \subseteq X$ abierto no vacío. Probemos que $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$ es denso en X utilizando la Proposición 1.2.17. Sea $U \subseteq X$ abierto y no vacío en X. Como f es transitiva, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_0}(U) \cap V \neq \varnothing$. Por el Lema 1.1.14 se tiene que $U \cap f^{-k_0}(V) \neq \varnothing$. Luego, $U \cap \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)\right] \neq \varnothing$. Así por la Proposición 1.2.17, obtenemos que $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$ es denso en X.

Recíprocamente, supongamos que para cada $V \subseteq X$ abierto y no vacío en X, el conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$ es denso en X. Probemos que f es transitiva. Para esto, sean $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos en X. Por hipótesis, el conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$ es denso en X. Así, por la Proposición 1.2.17, obtenemos que $U \cap \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)\right] \neq \varnothing$. Luego, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $U \cap f^{-k_0}(V) \neq \varnothing$. En consecuencia, por el Lema 1.1.14, obtenemos que $f^{k_0}(U) \cap V \neq \varnothing$. Por lo tanto, f es transitiva. □

Ahora, en la Proposición 2.2.9 y la Proposición 2.2.10 mostramos una relación entre la existencia de órbitas densas en X y la transitividad de la función f.

Proposición 2.2.9. Sean X un espacio métrico sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X y probemos que f es transitiva. Para esto, sean $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos en X. Como $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X y U es abierto y no vacío en X, por la Proposición 1.2.17, se tiene que $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \varnothing$. Luego, existe $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_1}(x) \in U$. Dado que X no tiene puntos aislados, por la Proposición 1.2.18, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) \setminus \{x, f(x), \ldots, f^{k_1}(x)\}$ es denso en X. Además, dado que V es abierto y no vacío en X, por la Proposición 1.2.17, $V \cap [\mathcal{O}(x, f) \setminus \{x, f(x), \ldots, f^{k_1}(x)\}] \neq \varnothing$. Luego, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_2}(x) \in V$. Observe que $k_1 < k_2$, Así, $f^{k_2}(x) = f^{k_2 - k_1}(f^{k_1}(x))$. Hemos obtenido que, $f^{k_1}(x) \in U$ y $f^{k_2-k_1}(f^{k_1}(x)) \in V$. De aquí concluimos que, $f^{k_2-k_1}(U) \cap V \neq \varnothing$. Por lo tanto, f es transitiva. □

Para el siguiente resultado debemos mencionar que un subconjunto A de un espacio métrico X es G_δ si A es una intersección numerable de subconjuntos abiertos de X.

Proposición 2.2.10. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces el conjunto:

$$D(f) = \{x \in X : \mathcal{O}(x, f) \text{ es un subconjunto denso en } X\}$$

es un subconjunto denso en X y G_δ.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Como X es compacto, por la Proposición 1.3.22, existe $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $U_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(B_n)$. Observe que U_n es abierto y no vacío en X. Como f es transitiva, por la Proposición 2.2.8 se tiene que U_n es denso en X. Hagamos $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Observe que A es un conjunto G_δ. Además, como X es compacto, por el Teorema 1.3.23, se tiene que X es completo. Así, por el Teorema de Baire (Teorema 1.2.19), obtenemos que A es denso en X.

Veamos ahora que $A = D(f)$. Primero verifiquemos que $A \subseteq D(f)$. Sea $x \in A$. Veamos que $x \in D(f)$, esto es, $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Utilizamos la Proposición 1.2.17. Sea $U \subseteq X$ abierto y no vacío en X. Dado que $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subseteq U$. Por otro lado, como $x \in A$, se tiene que $x \in U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, en particular, $x \in U_m$. Luego, $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(B_m)$. De donde, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de modo que $f^{k_0}(x) \in B_m \subseteq U$. Así, $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \varnothing$. Por la Proposición 1.2.17, obtenemos que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X, es decir, $x \in D(f)$. Con esto probamos que $A \subseteq D(f)$.

Probemos ahora que $D(f) \subseteq A$. Sea $x \in D(f)$. Luego, $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Sea $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X y B_n es abierto y no vacío, por la Proposición 1.2.17 obtenemos que $B_n \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \varnothing$. En consecuencia, existe $k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_n}(x) \in B_n$. Así, $x \in f^{-k_n}(B_n)$. Con esto probamos que $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(B_n) = U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = A$. Hemos demostrado que $D(f) \subseteq A$. Por ambas contenciones obtenemos que $D(f) = A$. Por lo tanto, $D(f)$ es denso y G_δ. $\square$

A partir de la Proposición 2.2.9 y la Proposición 2.2.10, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.11. Si X es un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces f es transitiva si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X.

El Corolario 2.2.11 nos ayuda a determinar si una función es transitiva o no, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.12. Consideremos S^1 y la función rotación $R_\alpha\colon S^1 \to S^1$, dada por $R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z$, para cada $z \in S^1$, definida en el Ejemplo 1.2.29. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: $\alpha \in \mathbb{Q}$. En este caso R_α no es transitiva. En efecto, por el Ejemplo 2.1.6, se tiene que $\operatorname{Per}(R_\alpha) = S^1$. Luego, no existe $z \in S^1$ tal que $\mathcal{O}(z, R_\alpha)$ es densa en S^1. Así, por el Corolario 2.2.11 obtenemos que R_α no es transitiva.

Caso 2: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso R_α es transitiva. En efecto, en [19, Proposición 1.6.14, pág. 48] se muestra que $\mathcal{O}(z, R_\alpha)$ es densa en X, para cada $z \in S^1$. Así, por el Corolario 2.2.11 obtenemos que R_α es transitiva.

A partir del Ejemplo 2.2.12 se obtiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.13. Consideremos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y la función rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$. Se tiene que R_α es totalmente transitiva. En efecto, observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} R_\alpha^2(z) &= R_\alpha(R_\alpha(z)) = e^{2\pi i\alpha} R_\alpha(z) = e^{2\pi i(2\alpha)} z = R_{2\alpha}(z) \\ R_\alpha^3(z) &= R_\alpha(R_\alpha^2(z)) = e^{2\pi i\alpha} R_\alpha^2(z) = e^{2\pi i(3\alpha)} z = R_{3\alpha}(z) \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general, se cumple que $R_\alpha^k = R_{k\alpha}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado que $k\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, por el Ejemplo 2.2.12 se tiene que $R_{k\alpha}$ es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, R_α^k es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto R_α es totalmente transitiva.

El lema que mostramos a continuación, Lema 2.2.14, nos muestra otra propiedad que cumplen las funciones transitivas. Este lema es indispensable en la prueba de Corolario 2.2.17 y del Teorema 2.2.25.

Lema 2.2.14. Sean X un espacio métrico y $f \colon X \to X$ una función transitiva. Para cada $U \subseteq X$ abierto en X no vacío y cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^{-k}(U)$ es abierto y no vacío.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto y no vacío en X. Notemos que para $k = 0$, se tiene que $f^{-0}(U) = (f^0)^{-1}(U) = id_X^{-1}(U) = U$. Así, $f^{-0}(U)$ es abierto y no vacío. Resta probar el resultado para $k \in \mathbb{N}$. Para esto utilizamos inducción matemática sobre k. Para $k = 1$, observemos que si $U = X$, se tiene que $f^{-1}(U) = f^{-1}(X) = X \neq \varnothing$. Para el resto de la prueba supongamos que $U \neq X$. Luego, existe $y \in X$ tal que $y \notin U$. Dado que U es no vacío, existe $x \in U$. Como $x \neq y$, por la Proposición 1.2.10, existen dos subconjuntos abiertos no vacíos V, W de X tales que:

$$x \in V, \quad y \in W \quad \text{y} \quad V \cap W = \varnothing.$$

Dado que U es un conjunto abierto y $x \in U$, tenemos que $U \cap V$ es abierto y $x \in U \cap V$. En consecuencia, $U \cap V$ es un conjunto abierto no vacío. Además, como $W \cap V = \varnothing$, se obtiene que:

$$W \cap (U \cap V) = \varnothing. \tag{2.2}$$

Por otro lado, como f es transitiva y se tiene que $U \cap V$ y W son abiertos no vacíos, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^m(W) \cap (U \cap V) \neq \varnothing$. Así, por (2.2), se obtiene que $m \neq 0$. Usando el Lema 1.1.14 se sigue que $W \cap f^{-m}(U \cap V) \neq \varnothing$. En consecuencia, $f^{-m}(U \cap V) \neq \varnothing$. Como $f^{-m}(U \cap V) \subseteq f^{-m}(U)$, se deduce que $f^{-m}(U) \neq \varnothing$. Por otro lado, dado que $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $m - 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, lo cual implica que f^{m-1} es una función. Además:

$$f^{-(m-1)}(f^{-1}(U)) = f^{-m}(U) \neq \varnothing.$$

Aplicando el inciso (1) de la Observación 1.1.2 a la función f^{m-1} y al conjunto $f^{-1}(U)$, se tiene que $f^{-1}(U) \neq \varnothing$. Dado que f es continua se concluye que $f^{-1}(U)$ es abierto y no vacío.

Supongamos ahora que el resultado es verdadero para k, es decir, $f^{-k}(U)$ es abierto y no vacío. Probemos que el resultado es verdadero para $k+1$. Para esto, por el inciso (2) de la Proposición 1.1.13 tenemos que $f^{-(k+1)}(U) = f^{-1}(f^{-k}(U))$. Por hipótesis de inducción, se tiene que $f^{-k}(U)$ es abierto y no vacío. Por el caso base y dado que f es una función continua, se tiene que $f^{-1}(f^{-k}(U))$ es abierto y no vacío. □

Con ayuda del Lema 2.2.14, podemos dar una equivalencia de función transitiva, la cual mostramos a continuación.

Proposición 2.2.15. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es transitiva,

(2) para cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$.

Demostración. Veamos primero que (1) implica (2). Supongamos que f es transitiva. Por el Lema 2.2.14, se tiene que el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto y no vacío en X. Nuevamente, dado que f es transitiva, para los conjuntos U y $f^{-1}(V)$ existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(U) \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Luego, por el Lema 1.1.14, se tiene que $f\big(f^k(U)\big) \cap V \neq \varnothing$. Así, $f^{k+1}(U) \cap V \neq \varnothing$. Además, $k+1 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, se cumple (2).

La demostración de (2) implica (1), se tiene directamente de la definición de función transitiva. □

El Teorema 2.2.25 y los Corolarios 2.2.20, 2.2.17, 2.2.22, los cuales mostramos en seguida, nos muestran las relaciones que hay entre los conceptos dados en la Definición 2.2.1

Lema 2.2.16. Sean Y y Y espacios métricos, $f\colon X \to X$ y $g\colon Y \to Y$ funciones continuas. Si f es fuertemente mezclante y g es transitiva, entonces $f \times g$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es fuertemente mezclante y que g es transitiva. Probemos que la función $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva. Sean U y V conjuntos abiertos y no vacíos de $X \times Y$, veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f \times g)^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Notemos que, existen conjuntos abiertos no vacíos $U_1, V_1 \subseteq X$ y $U_2, V_2 \subseteq Y$ tales que $U_1 \times U_2 \subseteq U$ y $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Por otro lado, dado que f es fuertemente mezclante, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^m(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing, \quad \text{para cada } k \geq n. \tag{2.3}$$

Dado que la función g es transitiva, por el Lema 2.2.14 se obtiene que $g^{-n}(V_2)$ es abierto y no vacío. Ahora bien, aplicando la definición de transitividad a la función g y a los conjuntos abiertos U_2 y $g^{-n}(V_2)$, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $g^{k_0}(U_2) \cap g^{-n}(V_2) \neq \varnothing$. Así, por el Lema 1.1.14, se obtiene que $g^n\big(g^{k_0}(U_2)\big) \cap V_2 \neq \varnothing$. Luego, por el inciso (1) de la Proposición 1.1.13 se obtiene que:

$$g^{n+k_0}(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing. \tag{2.4}$$

Dado que $n + k_0 \geq n$, por (2.3) obtenemos:

$$f^{n+k_0}(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing. \tag{2.5}$$

Si hacemos $k = n + k_0$, de (2.4), (2.5) y el inciso (1) de la Proposición 1.1.11 se obtiene

$$[f^k(U_1) \cap V_1] \times [g^k(U_2) \cap V_2] \neq \varnothing,$$

equivalentemente, por el inciso (2) de la Proposición 1.1.11 se tiene

$$[f^k(U_1) \times g^k(U_2)] \cap [V_1 \times V_2] \neq \varnothing,$$

lo cual implica que $(f \times g)^k(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \varnothing$. Dado que $U_1 \times U_2 \subseteq U$ y $V_1 \times V_2 \subseteq V$, obtenemos que $(f \times g)^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Por lo tanto, $f \times g$ es transitiva. □

Corolario 2.2.17. Sean X un espacio métrico y $f \colon X \to X$ una función continua. Si f es fuertemente mezclante, entonces f es suavemente mezclante.

Demostración. Supongamos que f es fuertemente mezclante y veamos que f es suavemente mezclante. Para esto, sean Y un espacio métrico y $g \colon Y \to Y$ una función transitiva. Por el Lema 2.2.16 la función $f \times g \colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva. Por lo tanto, f es suavemente mezclante. □

Lema 2.2.18. Sean X y Y espacios métricos, $f \colon X \to X$ y $g \colon Y \to Y$ funciones continuas. Si $f \times g$ es transitiva, entonces f y g son transitivas.

Demostración. Supongamos que $f \times g$ es transitiva. Veamos que f es transitiva. Para esto, sean $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos en X. Notemos que los conjuntos $U \times Y$ y $V \times Y$ son abiertos y no vacíos en $X \times Y$. Así, por la transitividad de $f \times g$, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $(f \times g)^k(U \times Y) \cap (V \times Y) \neq \varnothing$. Por otro lado, notemos que:

$$\begin{aligned}(f \times g)^k(U \times Y) \cap (V \times Y) &= (f^k(U) \times g^k(Y)) \cap (V \times Y)\\ &= [f^k(U) \cap V] \times [g^k(Y) \times Y] \neq \varnothing.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15 obtenemos que $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Así, f es transitiva.

De manera similar se demuestra que g es transitiva. □

Corolario 2.2.19. Sean X un espacio métrico y $f \colon X \to X$ una función continua. Si f es suavemente mezclante, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que la función f es suavemente mezclante y probemos que f es transitiva. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos en X. Sean Y un espacio métrico y $g \colon Y \to Y$ una función transitiva. Como f es suavemente mezclante, obtenemos que $f \times g \colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva. Por el Lema 2.2.18, se tiene que f es una función transitiva. □

El resultado que mostramos a continuación, Corolario 2.2.20, se demuestra aplicando el Corolario 2.2.19.

Corolario 2.2.20. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es suavemente mezclante, entonces f es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que f es suavemente mezclante. Por el Corolario 2.2.19, obtenemos que f es una función transitiva. Con esto, se tiene que f es suavemente mezclante y f es transitiva. Por el inciso 4 de la Definición 2.2.1, se tiene que $f \times f$ es transitiva. □

Corolario 2.2.21. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $f \times f$ es transitiva, entonces f es transitiva.

Corolario 2.2.22. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezclante, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante y veamos que f es transitiva. Como f es suavemente mezclante, se tiene que $f \times f$ es transitiva. Por el Corolario 2.2.22, obtenemos que f es transitiva. □

De el los Corolarios 2.2.17, 2.2.19 se sigue el siguiente resultado.

Corolario 2.2.23. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es fuertemente mezclante, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es fuertemente mezclante y veamos que f es transitiva. Como f es fuertemente mezclante, por el Corolario 2.2.17, se tiene que f es suavemente mezclante. Luego, por el Corolario 2.2.19, se tiene que f es transitiva. □

El resultado que presentamos a continuación, Teorema 2.2.24, es de gran utilidad para la demostración del Teorema 2.2.25, de la Proposición 2.2.28 y del Teorema 2.2.34. Parte de la prueba de este teorema fue consultada en [7, Teorema 1.11, pág. 23], en donde se muestran algunas otras equivalencias del concepto de función débilmente mezclante.

Teorema 2.2.24. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es débilmente mezclante,

(2) para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $f^{\times m}$ es transitiva,

(3) para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $f^{\times m}$ es débilmente mezclante,

(4) para cualesquiera conjuntos $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos en X, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:
$$f^k(U) \cap U \neq \varnothing \quad \text{y} \quad f^k(U) \cap V \neq \varnothing.$$

Demostración. Veamos primero que (1) implica (2). Para esto, supongamos que f es débilmente mezclante y probemos (2) utilizando inducción matemática sobre m. Para $m = 1$, del Corolario 2.2.22 se obtiene que f es transitiva. Por lo tanto $f^{\times 1}$ es transitiva. Supongamos ahora que el resultado es verdadero para m y probemos para $m + 1$, esto es, veamos que $f^{\times(m+1)}$ es transitiva. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos en X^{m+1}. Existen $U_1, \ldots, U_m, U_{m+1}, V_1, \ldots, V_m$ y V_{m+1} conjuntos abiertos en X no vacíos tales que:

$$U_1 \times \cdots \times U_m \times U_{m+1} \subseteq U \quad \text{y} \quad V_1 \times \cdots \times V_m \times V_{m+1} \subseteq V. \tag{2.6}$$

Notemos que $U_m \times V_m$ y $U_{m+1} \times V_{m+1}$ son abiertos y no vacíos en $X \times X$. Dado que $f \times f$ es transitiva, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$(f \times f)^{k_0}(U_m \times V_m) \cap [U_{m+1} \times V_{m+1}] \neq \varnothing.$$

Por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15, obtenemos que $f^{k_0}(U_m) \cap U_{m+1} \neq \varnothing$ y $f^{k_0}(V_m) \cap V_{m+1} \neq \varnothing$. Usando el Lema 1.1.14 se tiene que $U_m \cap f^{-k_0}(U_{m+1}) \neq \varnothing$ y $V_m \cap f^{-k_0}(V_{m+1}) \neq \varnothing$. Hagamos:

$$U' = U_m \cap f^{-k_0}(U_{m+1}) \quad \text{y} \quad V' = V_m \cap f^{-k_0}(V_{m+1}). \tag{2.7}$$

Ahora, observemos que los conjuntos $U_1 \times \cdots \times U_{m-1} \times U'$ y $V_1 \times \cdots \times V_{m-1} \times V'$ son abiertos y no vacíos en X^m. Por la hipótesis de inducción, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$(f^{\times m})^k(U_1 \times \cdots \times U_{m-1} \times U') \cap [V_1 \times \cdots \times V_{m-1} \times V'] \neq \varnothing.$$

Así, por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15, se tiene que:

$$f^k(U_i) \cap V_i \neq \varnothing, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \ldots, m-1\} \tag{2.8}$$

y

$$f^k(U') \cap V' \neq \varnothing.$$

Por otra parte de (2.7) se tiene que $U' \subseteq U_m$ y $V' \subseteq V_m$, respectivamente. Así, $f^k(U') \cap V' \subseteq f^k(U_m) \cap V_m$. Dado que $f^k(U') \cap V' \neq \varnothing$, obtenemos que:

$$f^k(U_m) \cap V_m \neq \varnothing. \tag{2.9}$$

Nuevamente, por (2.7) se deduce que $U' \subseteq f^{-k_0}(U_{m+1})$ y $V' \subseteq f^{-k_0}(V_{m+1})$, respectivamente. En consecuencia,

$$\begin{aligned} f^k(U') \cap V' &\subseteq f^k\big(f^{-k_0}(U_{m+1})\big) \cap f^{-k_0}(V_{m+1}) \\ &\subseteq f^{-k_0}\big(f^k(U_{m+1})\big) \cap f^{-k_0}(V_{m+1}) \qquad \text{por Proposición 1.1.13 inciso (3)} \\ &= f^{-k_0}\big(f^k(U_{m+1}) \cap V_{m+1}\big). \qquad \text{por Proposición 1.1.7 inciso (2)} \end{aligned}$$

Dado que $f^k(U') \cap V' \neq \varnothing$ se tiene que $f^{-k_0}\big(f^k(U_{m+1}) \cap V_{m+1}\big) \neq \varnothing$. Por el inciso (1) de la Observación 1.1.2 obtenemos que:

$$f^k(U_{m+1}) \cap V_{m+1} \neq \varnothing. \tag{2.10}$$

De (2.8), (2.9) y (2.10) obtenemos que:

$$f^k(U_i) \cap V_i \neq \varnothing, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m+1\}.$$

Así, usando el inciso (2) de la Proposición 1.1.15, se deduce que:

$$\left(f^{\times(m+1)}\right)^k (U_1 \times \cdots \times U_m \times U_{m+1}) \cap [V_1 \times \cdots \times V_m \times V_{m+1}] \neq \varnothing.$$

Por (2.6), concluimos que $\left(f^{\times(m+1)}\right)^k (U) \cap V \neq \varnothing$. Por lo tanto, $f^{\times(m+1)}$ es transitiva.

Veamos ahora que (2) implica (3). Para esto, sea $m \in \mathbb{N}$. Para probar que $f^{\times m}$ es débilmente mezclante, debemos verificar que $f^{\times m} \times f^{\times m} \colon X^m \times X^m \to X^m \times X^m$ es transitiva. Sean $U, V \subseteq X^m \times X^m$ abiertos y no vacíos en $X^m \times X^m$. Existen $U', U'', V', V'' \subseteq X^m$, tales que $U' \times U'' \subseteq U$ y $V' \times V'' \subseteq V$. Además, para los conjuntos U', U'', V' y V'', existen $U_1, \ldots, U_m, U'_1, \ldots, U'_m, V_1, \ldots, V_m, V'_1, \ldots, V'_m \subseteq X$ tales que:

$$U_1 \times \cdots \times U_m \subseteq U', \quad U'_1 \times \cdots \times U'_m \subseteq U'', \quad V_1 \times \cdots \times V_m \subseteq V' \quad \text{y} \quad V'_1 \times \cdots \times V'_m \subseteq V''.$$

Observemos que los conjuntos $U_1 \times \cdots \times U_m \times U'_1 \times \cdots \times U'_m$ y $V_1 \times \cdots \times V_m \times V'_1 \times \cdots \times V'_m$ son abiertos y no vacíos en X^{2m}. Por hipótesis, la función $f^{\times 2m}$ es transitiva. Luego, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$\left(f^{\times 2m}\right)^k (U_1 \times \cdots \times U_m \times U'_1 \times \cdots \times U'_m) \cap [V_1 \times \cdots \times V_m \times V'_1 \times \cdots \times V'_m] \neq \varnothing.$$

Por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15, obtenemos que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \varnothing$ y $f^k(U'_i) \cap V'_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Nuevamente, por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15, tenemos que:

$$\left(f^{\times m}\right)^k (U_1 \times \ldots \times U_m) \cap [V_1 \times \ldots \times V_m] \neq \varnothing \quad \text{y} \quad \left(f^{\times m}\right)^k (U'_1 \times \ldots \times U'_m) \cap [V'_1 \times \ldots \times V_m] \neq \varnothing.$$

Luego, $(f^{\times m})^k(U') \cap V' \neq \varnothing$ y $(f^{\times m})^k(U'') \cap V'' \neq \varnothing$. Una vez más, por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15 obtenemos que $(f^{\times m} \times f^{\times m})^k (U' \times U'') \cap [V' \times V''] \neq \varnothing$. Así, $(f^{\times m} \times f^{\times m})^k (U) \cap V \neq \varnothing$. Con esto probamos que $f^{\times m} \times f^{\times m}$ es transitiva. Por lo tanto, $f^{\times m}$ es débilmente mezclante.

Probemos ahora que (3) implica (4). Supongamos que se cumple (3). Sean $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos. Por hipótesis, para $m = 1$, la función $f^{\times 1}$ es débilmente mezclante, o bien, f es débilmente mezclante, esto es, $f \times f$ es transitiva. Notemos que los conjuntos $U \times U$ y $U \times V$ son abiertos y no vacíos en $X \times X$. Dado que $f \times f$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$(f \times f)^k (U \times U) \cap [U \times V] \neq \varnothing.$$

Por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15 tenemos que:

$$f^k(U) \cap U \neq \varnothing \quad \text{y} \quad f^k(U) \cap V \neq \varnothing.$$

Finalmente, probemos que (4) implica (1). Supongamos (4) y probemos que f es débilmente mezclante. Para esto, hay que demostrar que $f \times f$ es transitiva. Sean U y V abiertos y no vacíos en $X \times X$. Existen U_1, U_2, V_1 y V_2 conjuntos abiertos y no vacíos en X tales que:

$$U_1 \times U_2 \subseteq U \quad \text{y} \quad V_1 \times V_2 \subseteq V.$$

Notemos que por hipótesis, en particular, para los conjuntos V_1, V_2, existe $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_1}(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$. Por el Lema 1.1.14, obtenemos que $V_1 \cap f^{-k_1}(U_2) \neq \varnothing$. Sea

$$W_1 = V_1 \cap f^{-k_1}(U_2). \tag{2.11}$$

Observemos que W_1 es abierto y no vacío. Por la transitividad de f, para los conjuntos W_1 y U_1, existe $k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_2}(U_1) \cap W_1 \neq \varnothing$. Por el Lema 1.1.14, tenemos que $U_1 \cap f^{-k_2}(W_1) \neq \varnothing$. Hagamos

$$W_2 = U_1 \cap f^{-k_2}(W_1). \tag{2.12}$$

Notemos que W_2 es abierto en X y no vacío.

Por otro lado, dado que f es transitiva, por el Lema 2.2.14, se tiene que $W_3 = f^{-(k_1+2k_2)}(V_2)$ es abierto y no vacío. Así, por hipótesis aplicada a los conjuntos W_2 y W_3, existe $k_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$f^{k_3}(W_2) \cap W_2 \neq \varnothing \quad \text{y} \tag{2.13}$$

$$f^{k_3}(W_2) \cap W_3 \neq \varnothing. \tag{2.14}$$

Observemos que por (2.12), obtenemos que $W_2 \subseteq U_1$. Además, por (2.11) y (2.12) se tiene que $W_2 \subseteq f^{-k_2}(V_1)$. Esto implica que, $f^{k_3}(W_2) \cap W_2 \subseteq f^{k_3}(U_1) \cap f^{-k_2}(V_1)$. Así, por (2.13), obtenemos que $f^{k_3}(U_1) \cap f^{-k_2}(V_1) \neq \varnothing$. Usando el Lema 1.1.14 y el inciso (1) de la Proposición 1.1.13 obtenemos que:

$$f^{k_2+k_3}(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing. \tag{2.15}$$

Por otro lado, de (2.11) y (2.12), se deduce que $W_2 \subseteq f^{-k_2}\big(f^{-k_1}(U_2)\big)$. Del inciso (2) de la Proposición 1.1.13 se obtiene que $W_2 \subseteq f^{-(k_1+k_2)}(U_2)$. De aquí, deducimos que $f^{k_3}(W_2) \cap W_3 \subseteq f^{k_3}\big(f^{-(k_1+k_2)}(U_2)\big) \cap W_3$. De (2.14) se tiene $f^{k_3}\big(f^{-(k_1+k_2)}(U_2)\big) \cap W_3 \neq \varnothing$. Notemos que $W_3 = f^{-(k_1+k_2)}\big(f^{-k_2}(V_2)\big)$. Además, por el inciso (3) de la Proposición 1.1.13 y por el inciso (2) del Teorema 1.1.7 obtenemos que:

$$\begin{aligned} f^{k_3}\big(f^{-(k_1+k_2)}(U_2)\big) \cap W_3 &\subseteq f^{-(k_1+k_2)}\big(f^{k_3}(U_2)\big) \cap W_3 \\ &= f^{-(k_1+k_2)}\big(f^{k_3}(U_2) \cap f^{-k_2}(V_2)\big). \end{aligned}$$

Así, $f^{-(k_1+k_2)}\big(f^{k_3}(U_2) \cap f^{-k_2}(V_2)\big) \neq \varnothing$, lo cual implica que $f^{k_3}(U_2) \cap f^{-k_2}(V_2) \neq \varnothing$. Por el Lema 1.1.14 y por la Proposición 1.1.13, obtenemos que:

$$f^{k_2+k_3}(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing. \tag{2.16}$$

De (2.15) y (2.16) tenemos que:

$$f^{k_2+k_3}(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing \quad \text{y} \quad f^{k_2+k_3}(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing.$$

Por los incisos (1) y (2) de la Proposición 1.1.15 obtenemos que

$$(f \times f)^k(U_1 \times U_1) \cap [V_1 \times V_2] \neq \varnothing,$$

donde $k = k_1 + k_2$. Como $U_1 \times U_2 \subseteq U$ y $V_1 \times V_2 \subseteq V$, se tiene que $(f \times f)^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Con esto, hemos probado que $f \times f$ es transitiva. Por lo tanto, f es débilmente mezclante. $\square$

Con ayuda del inciso (4) del Teorema 2.2.24 podemos dar una interpretación del concepto de función débilmente mezclante, el cual se ilustra en la Figura 2.4.

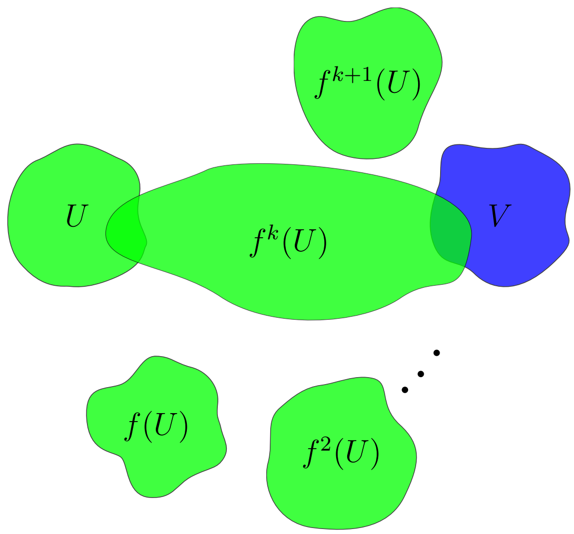


Figura 2.4: Interpretación geométrica del concepto de función débilmente mezclante.

Teorema 2.2.25. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezclante, entonces f es totalmente transitiva.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante y veamos que f es totalmente transitiva. Sea $k \in \mathbb{N}$ y mostremos que f^k es transitiva. Por el Teorema 2.2.24, tenemos que $f^{\times k}$ es transitiva. Sean U y V abiertos en X y no vacíos. Por el Lema 2.2.14, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, el conjunto $V_i = f^{-i}(V)$ es abierto y no vacío. Observemos que los conjuntos:

$$U \times U \times \cdots \times U \quad \text{y} \quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$$

son abiertos y no vacíos en X^k. Como $f^{\times k}$ es transitiva existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$\left(f^{\times k}\right)^m (U \times U \times \cdots \times U) \cap [V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k] \neq \varnothing.$$

Así, por la Proposición 1.1.15, se tiene que $f^m(U) \cap V_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Esto es, $f^m(U) \cap f^{-i}(V) \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Por el Lema 1.1.14, obtenemos que:

$$f^{m+i}(U) \cap V \neq \varnothing, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}. \tag{2.17}$$

Por otro lado, por el algoritmo de la división, existen $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tales que $m = kq + r$, $0 \leq r < k$. Notemos que $0 < k - r \leq k$. Así, sustituyendo el valor de m en (2.17) y haciendo $i = k - r$, se tiene que:

$$f^{kq+r+(k-r)}(U) \cap V = f^{k(q+1)}(U) \cap V \neq \varnothing.$$

Por el inciso (2) de la Proposición 1.1.12 se concluye que $(f^k)^{q+1}(U) \cap V \neq \varnothing$. Con esto queda probado que f^k es transitiva. Por lo tanto, f es totalmente transitiva. $\square$

El Diagrama 2.1 resume las relaciones que hay entre las definiciones dadas en la Definición 2.2.1

$$\begin{array}{c}\text{Fuertemente mezclante}\\ \downarrow \\ \text{Suavemente mezclante}\\ \downarrow \\ \text{Débilmente mezclante}\\ \downarrow \\ \text{Totalmente transitiva}\\ \downarrow \\ \text{Transitiva}\end{array}$$

Diagrama 2.1: Relaciones entre algunos tipos de funciones

Con ayuda del Diagrama 2.1 podemos dar más ejemplos de las funciones dadas en la Definición 2.2.1. Del Ejemplo 2.2.7 y el Diagrama 2.1, se obtiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.26. La función tienda $T\colon [0,1] \to [0,1]$, definida en el Ejemplo 2.2.7, es fuertemente mezclante, suavemente mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva y transitiva.

Ahora, mostramos un resultado, Teorema 2.2.27, el cual nos da una caracterización de función suavemente mezclante, además, es de gran utilidad en la prueba del Teorema 4.3.15.

Teorema 2.2.27. Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) f es suavemente mezclante,

(2) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $f^{\times m}$ es suavemente mezclante.

Demostración. Probemos primero que (1) implica (2). Para esto supongamos que f es suavemente mezclante y probemos (2) haciendo uso de inducción matemática sobre m. Para $m = 1$, por hipótesis $f^{\times 1} = f$ es suavemente mezclante. Supongamos ahora que el resultado es verdadero para m y probemos para $m + 1$. Sean Y un espacio métrico y $g\colon Y \to Y$ una función transitiva, veamos que $\left(f^{\times(m+1)}\right) \times g\colon X^{m+1} \times Y \to X^{m+1} \times Y$ es transitiva. Sean U, V abiertos y no vacíos en $X^{m+1} \times Y$. Existen $U', V' \subseteq X^{m+1}$ y $U'', V'' \subseteq Y$ abiertos y no vacíos tales que $U' \times U'' \subseteq U$ y $V' \times V'' \subseteq V$. Además, existen $U_1, \ldots, U_m, U_{m+1}, V_1, \ldots, V_m, V_{m+1} \subseteq X$ tales que

$$U_1 \times \cdots \times U_m \times U_{m+1} \subseteq U' \quad \text{y} \quad V_1 \times \cdots \times V_m \times V_{m+1} \subseteq V'. \tag{2.18}$$

Dado que f es suavemente mezclante y g es transitiva, obtenemos por definición que $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ es una función transitiva. Por hipótesis de inducción, tenemos que $f^{\times m} \times [f \times g] : X^m \times [X \times Y] \to X^m \times [X \times Y]$ es transitiva. Observemos que los conjuntos

$$[U_1 \times \cdots \times U_m] \times [U_{m+1} \times U''] \quad \text{y} \quad [V_1 \times \cdots \times V_m] \times [U_{m+1} \times V'']$$

son abiertos y no vacíos en $X^m \times [X \times Y]$. Luego, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$\Big(f^{\times m} \times [f \times g]\Big)^k \Big([U_1 \times \cdots \times U_m] \times [U_{m+1} \times U'']\Big) \cap \Big([V_1 \times \cdots \times V_m] \times [V_{m+1} \times V'']\Big) \neq \varnothing.$$

Por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15 obtenemos que

$$\left(f^{\times m}\right)^k (U_1 \times \cdots \times U_m) \cap [V_1 \times \cdots \times V_m] \neq \varnothing \quad \text{y}$$

$$(f \times g)^k (U_{m+1} \times U'') \cap [V_{m+1} \times V''] \neq \varnothing.$$

Nuevamente, por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15 tenemos que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m, m+1\}$ y $g^k(U'') \cap V'' \neq \varnothing$. Además, del inciso (2) de la Proposición 1.1.15, se deduce que $(f^{\times(m+1)})^k(U_1 \times \cdots \times U_m \times U_{m+1}) \cap [V_1 \times \cdots \times V_m \times V_{m+1}] \neq \varnothing$ y $g^k(U'') \cap V'' \neq \varnothing$. Una vez más, utilizando el inciso (2) de la Proposición 1.1.15 obtenemos que:

$$\left(f^{\times(m+1)} \times g\right)^k \Big([U_1 \times \cdots \times U_m \times U_{m+1}] \times U''\Big) \cap \Big([V_1 \times \cdots \times V_m \times V_{m+1}] \times V''\Big) \neq \varnothing.$$

Por (2.2.27) y dado que $U' \times U'' \subseteq U$ y $V' \times V'' \subseteq V$, se tiene que $\left(f^{\times(m+1)} \times g\right)^k (U) \cap V \neq \varnothing$. Con esto probamos que $f^{\times(m+1)} \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $f^{\times(m+1)}$ es suavemente mezclante.

Por otro lado, la prueba de (2) implica (1) se tiene de manera inmediata. □

El resultado que mostramos en seguida, Proposición 2.2.28, nos servirá para obtener ejemplos de funciones que no son débilmente mezclantes.

Proposición 2.2.28. Sean (X, d) un espacio métrico tal que $|X| \geq 2$ y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una isometría, entonces f no es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que f es una isometría y veamos que f no es débilmente mezclante utilizando el inciso (4) del Teorema 2.2.24. Probemos que existen $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos tales que, para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple:

$$f^k(U) \cap U = \varnothing \quad \text{o} \quad f^k(U) \cap V = \varnothing.$$

Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que $|X| \geq 2$, existen $x_0, y_0 \in X$ tales que $x_0 \neq y_0$. Hagamos $r = d(x_0, y_0)$, $U = B\big(x_0, \frac{r}{4}\big)$ y $V = B\big(y_0, \frac{r}{4}\big)$. Se tienen los siguientes casos:

Caso 1: $f^k(U) \cap U = \varnothing$.

En este caso, terminamos.

Caso 2: $f^k(U) \cap U \neq \varnothing$.

Veamos que $f^k(U)\cap V=\varnothing$. Para esto, sean $x\in f^k(U)$ y $y\in V$ y probemos que $x\neq y$. Dado que $f^k(U)\cap U\neq\varnothing$, existe $x_1\in f^k(U)$ tal que $x_1\in U$. Observe que:

$$d(x_1,y)\leq d(x_1,x)+d(x,y). \tag{2.19}$$

Por otro lado, usando la desigualdad del triángulo y el hecho de que $x_1\in U=B(x_0,\frac{r}{4})$ y que $y\in V=B(y_0,\frac{r}{4})$, tenemos que:

$$r=d(x_0,y_0)\leq d(x_0,x_1)+d(x_1,y)+d(y,y_0)<2\left(\frac{r}{4}\right)+d(x_1,y).$$

Así, $\frac{r}{2}<d(x_1,y)$. Además, dado que f es una isometría, por la Proposición 1.2.33 se obtiene que $d(x_1,x)\leq \text{diám}\big(f^k(U)\big)=\text{diám}(U)\leq\frac{r}{2}$. Luego, de (2.19) obtenemos que:

$$\frac{r}{2}<\frac{r}{2}+d(x,y).$$

En consecuencia, $d(x,y)>0$, esto es, $x\neq y$. Con esto, hemos probado que $f^k(U)\cap V=\varnothing$. Por lo tanto, f no es débilmente mezclante. □

Utilizando el Diagrama 2.1 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.29. Sean X un espacio métrico tal que $|X|\geq 2$ y $f\colon X\to X$ una función continua. Si f es una isometría, entonces:

(1) f no es suavemente mezclante,

(2) f no es fuertemente mezclante.

A continuación mostramos un ejemplo de una función que no es débilmente mezclante, suavemente mezclante ni fuertemente mezclante.

Ejemplo 2.2.30. Consideremos $\alpha\in\mathbb{R}$ y la función rotación $R_\alpha : S^1\to S^1$. La función R_α no es débilmente mezclante. En efecto, en el Ejemplo 1.2.29 se muestra que R_α es una isometría. Así, por la Proposición 2.2.28 se obtiene que R_α no es débilmente mezclante. Más aún, por el Corolario 2.2.29, se deduce que R_α no es fuertemente mezclante ni suavemente mezclante.

De los Ejemplos 2.2.13 y 2.2.30, se obtiene la siguiente observación.

Observación 2.2.31. Existe una función totalmente transitiva que no es débilmente mezclante.

A continuación mencionamos dos tipos de funciones más con las cuales trabajamos en esta tesis.

Definición 2.2.32. Sean (X,d) un espacio métrico y $f\colon X\to X$ una función continua. Decimos que f tiene la ***propiedad de especificación*** (o simplemente, f tiene ***especificación***) si para cada $\varepsilon>0$, existe $M_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que, para cualquier natural $m\geq 2$, cualesquiera m puntos $x_1,x_2,\ldots,x_m$ de X y cualesquiera $2m$ enteros $0\leq a_1\leq b_1<a_2\leq b_2<\cdots<a_m\leq b_m$ con $a_i-b_{i-1}\geq M_\varepsilon$, para cada $i\in\{2,3,\ldots,m\}$, existe $x\in X$ tal que:

$$d(f^k(x),f^k(x_i))\leq\varepsilon,$$

para cualquier $k\in\{a_i,a_i+1,\ldots,b_i\}$ y cualquier $i\in\{1,2,\ldots,m\}$.

En palabras, una función con la propiedad de especificación aproxima distintos bloques de órbitas, suficientemente separados, con la órbita de un punto. En la Figura 2.5 se ilustra el comportamiento de una función con la propiedad de especificación, cuando m=2.

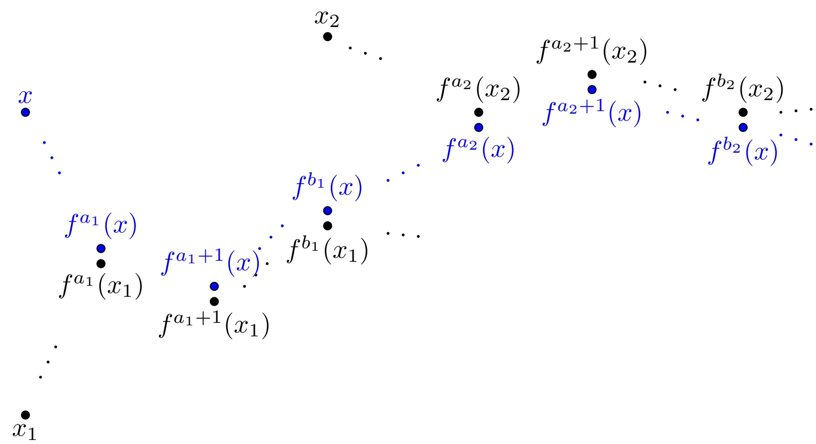


Figura 2.5: Interpretación geométrica del concepto de función con especificación.

Un ejemplo de una función con especificación, lo puede encontrar en [6].

Definición 2.2.33. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Decimos que f tiene la ***Propiedad P*** si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos U_0 y U_1 de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualquier función $s : \{0, 1, 2, \ldots, k\} \to \{0, 1\}$, existe un punto $x \in X$ que satisface:

$$x \in U_{s(0)}, f^N(x) \in U_{s(1)}, \ldots, f^{kN}(x) \in U_{s(k)}.$$

En la Figura 2.6 se ilustra el concepto de una función con la Propiedad P, en este caso $k = 3$. Notemos que la función s que aparece en la Definición 2.2.33, se puede representar en la figura como una asociación de los números $1, 2, \ldots, k$, a los conjuntos U_0 y U_1.

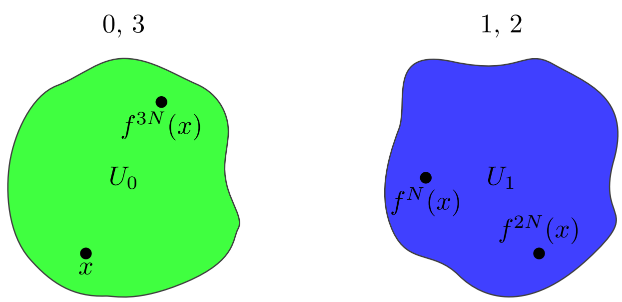


Figura 2.6: Interpretación geométrica del concepto de función con la Propiedad P.

En el siguiente resultado, mostramos la relación que existe entre las funciones con la Propiedad P y las funciones débilmente mezclantes.

Teorema 2.2.34. Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si f tiene la Propiedad P, entonces f es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que f tiene la Propiedad P. Probemos que f es débilmente mezclante utilizando el inciso (4) del Teorema 2.2.24. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos no vacíos. Hagamos $U_0 = U$ y $U_1 = V$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ que satisface la definición de Propiedad P. Así, para $k = 2$ y $s : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$, donde $s(0) = s(1) = 0$ y $s(2) = 1$, existe $x \in X$ tal que:

$$x \in U_{s(0)}, f^N(x) \in U_{s(1)}, f^{2N}(x) \in U_{s(2)}.$$

Luego, $x, f^N(x) \in U$ y $f^{2N}(x) \in V$. Así, $f^N(U) \cap U \neq \varnothing$ y $f^N(U) \cap V \neq \varnothing$. Por lo tanto, f es débilmente mezclante. $\square$

Concluimos esta sección y el capítulo con el siguiente diagrama en el cual resumimos las relaciones entre algunas funciones estudiadas en este capítulo. Este diagrama se obtiene a partir del Diagrama 2.1, el Teorema 2.2.34 y las Observaciones 2.2.6 y 2.2.31.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Fuertemente mezclante} \arrow[d] \\
 & \text{Suavemente mezclante} \arrow[d] \\
\text{Propiedad } P \arrow[r] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[d, shift right] \\
 & \text{Totalmente transitiva} \arrow[u, shift right, "/"' marking] \arrow[d, shift right] \\
 & \text{Transitiva} \arrow[u, shift right, "/"' marking]
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2.2: Relaciones estudiadas entre los tipos de funciones presentados en este capítulo.

Cabe mencionar, que no se encontraron las demostraciones o contraejemplos para los siguientes enunciados:

- Si f es débilmente mezclante, entonces f es suavemente mezclante.
- Si f es suavemente mezclante, entonces f es fuertemente mezclante.
- Si f es débilmente mezclante, entonces f tiene la Propiedad P.

De igual forma, tampoco encontramos las relaciones entre la propiedad de especificación con los demás tipos de funciones estudiados en este capítulo.

Capítulo 3

Aplicaciones de los sistemas dinámicos discretos

El objetivo de este capítulo es mostrar al lector algunas de las aplicaciones de los sistemas dinámicos discretos, principalmente en el área de la Biología. El capítulo está compuesto por dos secciones, en la primera se muestran modelos en la recta real, mejor conocidos como sistemas unidimensionales. En la segunda sección se mencionan los sistemas dinámicos multidimensionales y se dan algunos ejemplos de éstos en dimensión dos. Cabe mencionar que en el presente capítulo no trabajamos con los sistemas dinámicos colectivos.

Dado un sistema dinámico (X, f) y $x \in X$, en los modelos matemáticos es usual denotar por x_k al punto $f^k(x)$ y al punto x_0 es conocido como condición inicial. Así, el estudio del comportamiento del sistema (X, f) se representa mediante una ecuación, denominada ecuación en diferencias, de la siguiente forma:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.1}$$

Una solución del sistema dinámico (X, f) es una sucesión de puntos $(x_k)_{k=0}^{\infty}$, que satisface la ecuación (3.1). El principal objetivo de los sistemas dinámicos que estudiamos en este capítulo, es encontrar soluciones para dichos sistemas, es decir, encontrar sucesiones $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ que satisfagan la ecuación (3.1). Además, se estudian las propiedades cualitativas de estas soluciones.

En este capítulo denotamos por $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales positivos.

3.1 Sistemas unidimensionales

En esta sección mostramos dos modelos de sistemas dinámicos, los cuales son conocidos como modelo de Malthus y modelo lineal. También damos algunos ejemplos de estos modelos, analizamos sus soluciones, el comportamiento de dichas soluciones y mostramos cómo se aplican en la Biología y en Finanzas.

3.1.1. Modelo de Malthus

En esta subsección mostramos el modelo de Malthus y algunos ejemplos de este. El modelo de Malthus es un modelo de población, en donde se supone que x_k es el número de individuos en el tiempo k. Además, se asume que por cada individuo existente en el periodo k habrá, por término medio, a individuos en el periodo $k+1$. Esto es

$$x_{k+1} = ax_k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.2}$$

La ecuación (3.2) es conocida como ecuación de Malthus, la cual determina un sistema dinámico $(\mathbb{R}^+, f)$, donde $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, esta dada por $f(x) = ax$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. Así, la población en el tiempo k está dada por la igualdad:

$$x_k = f^k(x_0), \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Veamos ahora cómo son las soluciones de este sistema. Para esto, tomemos una condición inicial x_0. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) = ax_0 \\
x_2 &= f(x_1) = ax_1 = a^2x_0 \\
x_3 &= f(x_2) = ax_2 = a^3x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

En general, se tiene que $x_k = a^k x_0$. Así, las soluciones del sistema dinámico son sucesiones $(x_k)_{k=1}^{\infty}$.

Ahora veamos el comportamiento de estas soluciones. Para esto, consideremos los siguientes casos:

Caso 1: $0 < a < 1$.
En este caso, a^k tiende a cero cuando k tiende a infinito. Así, x_k tiende a cero cuando k tiende a infinito.

Caso 2: $a = 1$.
En este caso, obtenemos que $x_k = x_0$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, todo punto de $\mathbb{R}^+$ es un punto fijo de f.

Caso 3: $a > 1$.
En este caso, a^k tiende a infinito cuando k tiende a infinito. Así, x_k tiende a infinito cuando k tiende a infinito.

A continuación vemos algunos ejemplos ocupando el modelo de Malthus, el primero es aplicado al crecimiento de una población de venados.

Ejemplo 3.1.1. Supongamos que se tiene una población de 100 venados en una región, cuya población aumenta un 20 % cada año. El crecimiento de la población se puede describir por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{k+1} = (1 + 0.20)x_k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{3.3}$$

donde k representa el número de años, y la condición inicial es $x_0 = 100$. Notemos que (3.3) es una ecuación de Malthus con $a = 1 + 0.20$. De aquí, obtenemos que la población de venados está descrita como sigue:

$$x_k = (1 + 0.20)^k 100, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Ahora damos otro ejemplo utilizando el modelo de Malthus, el cual está aplicado a finanzas.

Ejemplo 3.1.2. Supongamos que se desea invertir \$5,000 y que el Banco 1 ofrece una tasa de interés de 6.5 % compuesta mensualmente. Denotemos por x_0 la inversión original (es decir, $x_0 = 5,000$) y por x_k la cantidad que se obtendrá en el k-ésimo mes. Cabe mencionar, que el interés esté compuesto mensualmente significa que en cada mes, el saldo del cliente aumentará $\frac{0.065}{12}$ veces la cantidad anterior. Por ejemplo, para el final del primer mes, la cantidad que se tendrá será de $x_1 = x_0 + \frac{0.065}{12}x_0$, o bien, $x_1 = \left(1 + \frac{0.065}{12}\right)x_0$. Para el final del segundo mes se tendrá un total de $x_2 = x_1 + \frac{0.065}{12}x_1$, o bien, $x_2 = \left(1 + \frac{0.065}{12}\right)x_1$. En general, se tiene que:

$$x_{k+1} = \left(1 + \tfrac{0.065}{12}\right)x_k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por otro lado, supongamos que el Banco 2 ofrece una tasa de interés de 6.8 % compuesto cada 4 meses. De forma similar que el interés del Banco 1, se puede ver que después de n periodos de cuatro meses, la cantidad total del cliente estará dada por la regla:

$$x_k = \left(1 + \tfrac{0.068}{3}\right)^k x_0.$$

Ahora, veamos cuanto será la cantidad acumulada después de 5 años con las dos ofertas diferentes. Primero, notemos que en el Banco 1 se realiza un aumento por cada mes, entonces durante 5 años se realizarán 60 aumentos, así, en 5 años se tendrá un balance de $x_{60} = \left(1 + \frac{0.065}{12}\right)^{60} x_0 = 6914.9$. Por otro lado, en el Banco 2, dado que en cada año se realizan 3 aumentos, en 5 años se realizará un total de 15 aumentos, así, en 5 años se tendrá un balance de $x_{15} = \left(1 + \frac{0.068}{3}\right)^{15} x_0 = 6998.12$. Notemos que en 5 años es más conveniente invertir en el Banco 2.

De manera general, si x_0 es la inversión inicial, r la tasa de interés y m el número de periodos compuestos en un año, entonces después de $k+1$ periodos compuestos, el monto x_{k+1} disponible está dado por la regla:

$$x_{k+1} = \left(1 + \tfrac{r}{m}\right)x_k = \left(1 + \tfrac{r}{m}\right)^{k+1} x_0. \tag{3.4}$$

Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la función definida por $f(x) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. Así, (3.4) puede reescribirse de la siguiente forma

$$x_{k+1} = f(x_k) = f^k(x).$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R}^+, f)$ es un ejemplo de un sistema dinámico unidimensional modelado con la ecuación de Malthus.

3.1.2. Modelo lineal

El modelo lineal es un modelo similar al modelo de Malthus, donde se considera que la población aumenta una cantidad constante b de individuos en cada unidad de tiempo. En este caso, la población en el tiempo $k+1$ queda representado con la siguiente ecuación:

$$x_{k+1} = ax_k + b, \tag{3.5}$$

donde a y b son números reales. El sistema dinámico $(\mathbb{R}^+, f)$, donde $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, está dada por $f(x) = ax + b$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, nos representa el modelo planteado.

Para poder estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema dinámico, presentamos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si la sucesión $\big(f^k(x)\big)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente, entonces $\lim_{k\to\infty} f^k(x)$ es un punto fijo de f.

Demostración. Supongamos que $\big(f^k(x)\big)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente. Hagamos $y = \lim_{k\to\infty} f^k(x)$. Veamos que y es un punto fijo de f. Notemos que $f(y) = f\big(\lim_{k\to\infty} f^k(x)\big)$. Como f es continua obtenemos que $f\big(\lim_{k\to\infty} f^k(x)\big) = \lim_{k\to\infty} f\big(f^k(x)\big)$. De donde, $f(y) = \lim_{k\to\infty} f\big(f^k(x)\big) = \lim_{k\to\infty} f^{k+1}(x) = y$. Con esto obtenemos que $f(y) = y$. Por lo tanto, y es un punto fijo de f. □

La Proposición 3.1.3 es de gran utilidad para estudiar las propiedades cualitativas de las órbitas, ya que en palabras, nos dice que la órbita de un punto sólo se aproxima a un punto fijo.

Ahora veamos cómo son las soluciones de este sistema. Para esto, tomemos una condición inicial x_0. Observemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + b \\
x_2 &= ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + b(a+1) \\
x_3 &= ax_2 + b = a(a^2x_0 + b(a+1)) + b = a^3x_0 + b(a^2 + a + 1) \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

En general, se tiene que $x_k = a^k x_0 + b(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1)$. Recordando la fórmula $1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1} = \frac{1-a^k}{1-a}$, obtenemos que:

$$x_k = a^k x_0 + \frac{1-a^k}{1-a} b.$$

Para hacer un análisis de las soluciones del sistema $(\mathbb{R}^+, f)$ debemos tener presente la Proposición 3.1.3, ya que analizamos si las soluciones del sistemas convergen al punto fijo o no. Para esto, estudiemos los siguientes casos:

Caso 1: $a = 1$.
En este caso, tenemos dos posibilidades.

(a) Si $b = 0$, entonces todo punto $x \in \mathbb{R}^+$ es punto fijo de f, lo cual implica que toda solución del sistema es una sucesión constante.

(b) Si $b \neq 0$, entonces $f(x) = x + b$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. Ahora, para una condición inicial x_0 se observa los siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + b \\ x_2 &= x_1 + b = (x_0 + b) + b = x_0 + 2b \\ x_3 &= x_2 + b = (x_2 + 2b) + b = x_0 + 3b \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general, se tiene que $x_k = x_0 + kb$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, $x_k \to \infty$ si $b > 0$ y $x_k \to -\infty$ si $b < 0$.

Caso 2: $a = -1$.
En este caso, se tiene que $f(x) = -x + b$ y el único punto fijo de f es $\overline{x} = \frac{b}{2}$. Además, note que $f(f(x)) = -(-x + b) + b = x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. Esto implica que todo punto $x \in \mathbb{R}^+$ es un punto periódico de f de periodo dos, a excepción del punto fijo de f.

Caso 3: $a \neq 1$.
En este caso, el punto fijo de f es $\overline{x} = \frac{b}{1-a}$. Dada una condición inicial x_0, analicemos si, la órbita de x_0 se acerca o se aleja del punto fijo $\overline{x} = \frac{b}{1-a}$. Para esto calculemos $|x_k - \overline{x}|$. Observemos los siguiente:

$$x_k - \overline{x} = \left(a^k x_0 + \frac{1 - a^k}{1 - a} b\right) - \frac{b}{1 - a} = a^k x_0 + \frac{b}{1 - a}(1 - a^k - 1) = a^k \left(x_0 - \frac{b}{1 - a}\right).$$

Así, $|x_k - \overline{x}| = |a|^k \left|x_0 - \frac{b}{1-a}\right|$. De aquí se tienen dos posibilidades.

(a) Si $|a| < 1$, entonces $|a|^k$ tiende a cero, lo cual implica que $|x_k - \overline{x}|$ tiende a cero cuando k tiende a infinito. Así, x_k tiende a $\overline{x}$ cuando k tiende a infinito.

(b) Si $|a| > 1$, entonces $|a|^k$ tiende a infinito. De aquí, se tiene que $|x_k - \overline{x}|$ tiende a infinito cuando k tiende a infinito. Así, x_k se aleja de $\overline{x}$ cuando k tiende a infinito.

A continuación, vemos un ejemplo de este modelo, aplicado a una población de pájaros.

Ejemplo 3.1.4. Supongamos que en cierta isla, hay una especie de pájaros y las condiciones de la isla son desfavorables para estos pájaros, ya que si los pájaros estuvieran aislados, su población disminuiría un 20 %. En este caso, la cantidad de pájaros en el tiempo k está dada por:

$$x_k = 0.8^k x_0.$$

Lo cual implica, que a la larga, la cantidad de pájaros disminuye hasta cero. Supongamos ahora que cada año emigran 1000 pájaros de otra colonia a nuestra isla. Así, la cantidad de pájaros en el tiempo $k + 1$, queda determinado como sigue:

$$x_{k+1} = 0.8x_k + 1000. \tag{3.6}$$

Notemos que (3.6) se trata de un modelo lineal, donde $a = 0.8$ y $b = 1000$. Como $0.8 < 1$, se tiene que las soluciones de este sistema dinámico, convergen al punto fijo $\overline{x} = \frac{1000}{1-0.8} = \frac{1000}{0.2} = 5000$. Esto es, cuando k tiende a infinito, x_k se aproxima a 5000.

Ahora presentamos un ejemplo de un modelo lineal el cual está aplicado a finanzas.

Ejemplo 3.1.5. Supongamos que se pide un préstamo de una cantidad x_0 a una tasa de interés anual r. Supongamos además que x_k representa la deuda total en el tiempo k. Si cada mes se abona una cantidad p, la deuda en el mes $k+1$ está dada por:

$$x_{k+1} = \left(1 + \tfrac{r}{12}\right)x_k - p, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Si nuestro préstamo es de 1000 pesos, a una tasa de interés del 10 % y se paga una cantidad mensual de $p = 100$ pesos, entonces la deuda está descrita por la siguiente ecuación en diferencias.

$$x_{k+1} = \left(1 + \tfrac{0.1}{12}\right)x_k - 100, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.7}$$

Notemos que (3.7) se trata de un modelo lineal, donde $a = 1 + \frac{0.1}{12}$ y $b = -100$. Determinemos en qué mes se terminará de pagar el préstamo solicitado. De (3.1.2), obtenemos que:

$$x_{k+1} = \left(1 + \tfrac{0.1}{12}\right)^k(1000) - 100\frac{1-(1+\frac{0.1}{12})^k}{1-(1+\frac{0.1}{12})}, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Esto se simplifica como:

$$x_{k+1} = 1000\left[-11\left(1 + \tfrac{0.1}{12}\right)^k + 12\right], \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Para determinar el mes k en el que se termina de pagar la deuda, se debe cumplir que $-11\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^k \leq 0$. Equivalentemente $\left(\frac{12.1}{12}\right)^k \geq \frac{12}{11}$. El primer numero natural que satisface esta desigualdad es $k = 11$. Así, en el onceavo mes se terminará de pagar la deuda.

Observemos que los sistemas dinámicos mostrados en esta sección, todos tienen una solución y es fácil obtenerlas. Sin embargo, esto no siempre es posible, por ejemplo el sistema dinámico $([0,1], f)$, donde f esta dada por $f(x) = 4x(1-x)$, la cual es llamada función logística, el comportamiento de las órbitas de los puntos de [0,1] son impredecibles, lo cual se le conoce como caos. Más aun, en [8] se muestra que la función f es fuertemente mezclante. Además, por el Diagrama 2.2 se tiene que la función f satisface todas las definiciones de la Definición 2.2.1. Además, en [8] se muestra un modelo matemático utilizando esta función.

3.2 Sistemas multidimensionales

En esta sección vamos a estudiar ejemplos de sistemas dinámicos multidimensionales. El motivo por el cual surgen estos sistemas dinámicos es por la necesidad de estudiar poblaciones que interactúan entre sí. En este sentido, utilizamos una variable diferente para cada población, que representa el número de individuos que hay en dicho grupo en cada instante de tiempo.

Cabe mencionar, que en esta sección se da por hecho que el lector tiene conocimientos de Álgebra Lineal, y conoce los conceptos de matrices, valores y vectores propios de una matriz, así como también el proceso de diagonalización de una matriz y el de base para un espacio vectorial. Denotamos por $\mathbf{x}_k$, el estado de la población en el tiempo k, donde $\mathbf{x}_k$ es un vector de $\mathbb{R}^m$ y representamos por $x_k^{(m)}$ la m-ésima entrada de $\mathbf{x}_k$.

El caso más sencillo de modelo de dinámica de poblaciones plantea un sistema de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

donde A es una matriz cuadrada. Esta ecuación es conocida con ecuación lineal. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0,\\
\mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 = A(A\mathbf{x}_0) = A^2\mathbf{x}_0,\\
\mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 = A(A^2\mathbf{x}_0) = A^3\mathbf{x}_0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

En general, obtenemos que $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$, para cada $k \in \mathbb{N}$. A su vez, el caso más simple es cuando A es una matriz diagonal, es decir, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

En este caso $\mathbf{x}_k$ puede reescribirse como:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_0^{(1)}\\ x_0^{(2)}\\ \vdots\\ x_0^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k x_0^{(1)}\\ \lambda_2^k x_0^{(2)}\\ \vdots\\ \lambda_m^k x_0^{(m)} \end{pmatrix}.$$

En la mayoría de las situaciones la matriz A no será una matriz diagonal. En estos casos se necesita un poco de herramienta de Álgebra Lineal para abordar este problema. Si $A = QBQ^{-1}$, donde Q es una matriz invertible de $m \times m$, la matriz A está totalmente descrita por las matrices B y Q. Si B es suficientemente sencilla, es más fácil estudiar la matriz A. Supongamos que $A = QBQ^{-1}$. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A &= QBQ^{-1},\\
A^2 &= \left(QBQ^{-1}\right)\left(QBQ^{-1}\right) = QB\left(Q^{-1}Q\right)BQ = QB^2Q^{-1},\\
A^3 &= AA^2 = \left(QBQ^{-1}\right)\left(QB^2Q^{-1}\right) = QB^3Q^{-1},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

En general, se tiene que $A^k = QB^kQ^{-1}$, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así, que el problema es expresar la matriz A de esta forma lo más sencillo posible.

Recordemos que una matriz cuadrada A se dice diagonalizable si existen una matriz cuadrada Q invertible y una matriz diagonal B, de modo que $B = Q^{-1}AQ$, o equivalentemente, $A = QBQ^{-1}$. No profundizamos en cómo encontrar las matrices B y Q, cuando existan, sin embargo ilustramos esto en los ejemplos que exhibimos.

A continuación, introducimos un ejemplo utilizando la ecuación lineal, en el cual analizamos un modelo presa-depredador.

Ejemplo 3.2.1. En cierto hábitat existe una población de zorros y una de conejos. Representemos por x_k y y_k la cantidad de zorros y conejos en el tiempo k, donde k es medido en meses. Supongamos que la cantidad de zorros y conejos en el tiempo $k+1$ está dado como sigue:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 0.5x_k + 0.3y_k \\ y_{k+1} &= -0.26x_k + 1.17y_k, \end{aligned}$$

donde $0.5x_k$ nos indica que sin conejos, sólo sobrevivirá la mitad de zorros, mientras que el término $1.17y_k$ de la segunda ecuación nos indica que sin zorros como depredadores, la población de conejos aumentará en un 17 %. Si hay una cantidad considerable de conejos, el $0.3y_k$ tenderá a hacer que la población de zorros aumente, mientras que el término $-0.26x_k$ mide las muertes de conejos debidas a la depredación por los zorros.

Escribiendo este problema en forma matricial, nos queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k,$$

donde $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.26 & 1.17 \end{pmatrix}$.

Como hemos mencionado anteriormente, debemos expresar a A, de la forma $A = QBQ^{-1}$, donde Q es una matriz de 2×2 invertible y B es una matriz de 2×2, lo más sencilla posible, de preferencia una matriz diagonal. Para esto, calculemos los valores propios de A. Primero debemos calcular el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, donde I es la matriz identidad de 2×2. En este caso, tenemos que:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0.3 \\ -0.26 & 1.17-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.67\lambda + 0.663 = (\lambda - 1.02)(\lambda - 0.65).$$

Las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = 1.02$ y $\lambda_2 = 0.65$. Ahora, calculemos los vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_2. Para $\lambda_1 = 1.02$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0.5-1.02 & 0.3 \\ -0.26 & 1.17-1.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} -0.52v_1 + 0.3v_2 &= 0, \\ -0.26v_1 + 0.15v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Observe que la segunda ecuación se obtiene de la primera multiplicando por 2. Una solución a este sistema de ecuaciones es $v_1 = 15$ y $v_2 = 26$. Así, un vector propio para λ_1 es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 26 \end{pmatrix}$. Ahora, para $\lambda_2 = 0.65$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0.5-0.65 & 0.3 \\ -0.26 & 1.17-0.65 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de forma equivalente,

$$\begin{aligned} -0.15v_1 + 0.3v_2 &= 0, \\ -0.26v_1 + 0.52v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Una solución a este sistema de ecuaciones es $v_1 = 2$ y $v_2 = 1$. Así, un vector propio para λ_2 es $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. En consecuencia, si hacemos

$$B = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 \\ 0 & 0.65 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos que $A = QBQ^{-1}$. Observemos que $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = QB^kQ^{-1}\mathbf{x}_0$.

En lo que resta del ejemplo, veamos como se comporta la población a largo plazo, es decir cuando k es muy grande. Para esto, hagamos el análisis de dos formas. Para la primera forma observemos que $Q^{-1} = \frac{-1}{37}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -26 & 15 \end{pmatrix}$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.02^k & 0 \\ 0 & 0.65^k \end{pmatrix}\frac{-1}{37}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -26 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{37}\begin{pmatrix} 15(1.02)^k(x_0-2y_0) + 2(0.65)^k(-26x_0+15y_0) \\ 26(1.02)^k(x_0-2y_0) + (0.65)^k(-26x_0+15y_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que para k suficientemente grande, se tiene que 0.65^k es cercano a cero, en símbolos, $0.65^k \approx 0$. Así,

$$\mathbf{x}_k \approx -\frac{1}{37}\begin{pmatrix} 15(1.02)^k(x_0-2y_0) \\ 26(1.02)^k(x_0-2y_0) \end{pmatrix} = -\frac{1}{37}(1.02)^k(x_0-2y_0)\begin{pmatrix} 15 \\ 26 \end{pmatrix} = c\mathbf{v}_1,$$

donde $c = -\frac{1}{37}(1.02)^k(x_0-2y_0)$.

Ahora, hagamos este análisis de otra forma. Observemos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$. Luego, existen escalares c_1 y c_2 de tal manera que $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$. Esto implica que:

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = A^k(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2).$$

Por otra parte, observe que $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ y $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$. Utilizando inducción matemática, se demuestra que $A^k\mathbf{v}_1 = \lambda_1^k\mathbf{v}_1$ y $A^k\mathbf{v}_2 = \lambda_2^k\mathbf{v}_2$. En consecuencia,

$$\mathbf{x}_k = A^k(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1A^k\mathbf{v}_1 + c_2A^k\mathbf{v}_2 = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2.$$

Dado que $\lambda_2 = 0.65$, para k muy grande, se tiene que $\lambda_2^k \approx 0$. Así,

$$\mathbf{x}_k \approx c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1.$$

Con esto hemos demostrado que, dada cualquier condición inicial, a la larga, $\mathbf{x}_k$ se comporta como un múltiplo de v_1. Por ejemplo, si suponemos que se tiene la condición inicial $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \end{pmatrix}$, es decir, que hay 100 zorros y 500 conejos. entonces $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, donde $c_1 = \frac{900}{37}$ y $c_2 = -\frac{4900}{37}$. Como mencionamos anteriormente, para k suficientemente grande se tiene que:

$$\mathbf{x}_k \approx \frac{900}{37}\,\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 = \frac{900}{37}\,1.02^k \begin{pmatrix} 15 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Geométricamente, nos representa que cualquier solución de este sistema dinámico, se aproxima a la recta $26x - 15y = 0$.

Para el siguiente ejemplo, es necesario ver algunas propiedades de la razón áurea o número áureo. El número áureo se define como $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si hacemos $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, se puede verificar la siguiente observación:

Observación 3.2.2. Los números φ y ψ, definidos anteriormente, satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $1 - \varphi = \psi$,

(2) $1 - \psi = \varphi$,

(3) $1 + \varphi = \varphi^2$,

(4) $1 + \psi = \psi^2$,

(5) $\varphi + \psi = 1$,

(6) $\varphi\psi = -1$.

Proposición 3.2.3. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$. Se cumple que:

$$\frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{k-2} - \psi^{k-2}}{\varphi - \psi}.$$

Demostración. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{k-2} - \psi^{k-2}}{\varphi - \psi} &= \frac{\varphi^{k-1} - \psi^{k-1} + \varphi^{k-2} - \psi^{k-2}}{\varphi - \psi} \\ &= \frac{\varphi^{k-2}(\varphi + 1) - \psi^{k-2}(\psi + 1)}{\varphi - \psi}. \end{aligned}$$

Por los incisos (3) y (4) de la Observación 3.2.2, obtenemos que:

$$\frac{\varphi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{k-2} - \psi^{k-2}}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^{k-2}\varphi^2 - \psi^{k-2}\psi^2}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi}.$$

Con esto queda demostrado lo deseado. □

Ahora, mencionamos una sucesión muy famosa, la cual es conocida como ***sucesión de Fibonacci***. La sucesión de Fibonacci, $(F_k)_{k=1}^{\infty}$, se define como $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para cada $k \geq 3$. A los números F_k se les llama números de Fibonacci. Se tiene que

$$F_k = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi}, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

En efecto, verifiquemos esto utilizando inducción matemática sobre k. Para $k = 1$, $\frac{\varphi-\psi}{\varphi-\psi} = 1 = F_1$. Para $k = 2$, $\frac{\varphi^2-\psi^2}{\varphi-\psi} = \frac{(\varphi-\psi)(\varphi+\psi)}{\varphi-\psi} = \varphi + \psi$. Por el inciso (5) de la Observación 3.2.2, obtenemos que $\frac{\varphi^2-\psi^2}{\varphi-\psi} = 1 = F_2$. Supongamos que la igualdad se satisface para todo $m \leq k$, donde $k \geq 2$. Probemos que se cumple para $k + 1$. Por el supuesto, se tiene que:

$$F_k = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} \quad \text{y} \quad F_{k-1} = \frac{\varphi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\varphi - \psi}.$$

Por la Proposición 3.2.3, obtenemos que:

$$\frac{\varphi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^k - \psi^k}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\varphi - \psi} = F_k + F_{k-1} = F_{k+1}.$$

Con esto queda demostrado, lo deseado.

Finalizamos este capítulo con el siguiente ejemplo, en donde analizamos un sistema dinámico que tiene una estrecha relación con la sucesión de Fibonacci.

Ejemplo 3.2.4. Consideremos una población de conejos, los cuales son contabilizados por parejas. El tiempo es tomado en meses. Vamos a asumir que la población está dividida en dos grupos, conejos jóvenes y conejos adultos. La dinámica en este problema se describe como sigue: una pareja de conejos adultos procrea una pareja en el próximo mes, los conejos jóvenes tardan un mes en crecer en conejos adultos. Así, si denotamos por x_k el número de conejos jóvenes y y_k el número de conejos adultos, el sistema queda determinado por las siguientes ecuaciones en diferencias.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= y_k, \\ y_{k+1} &= x_k + y_k. \end{aligned}$$

Escribiendo el sistema en su forma matricial, nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Veamos como está determinado el sistema en el tiempo k. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, el polinomio característico de A está dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Las raíces del polinomio característico son $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ahora, determinemos los vectores propios correspondientes a φ y ψ. Para φ, tenemos:

$$\begin{pmatrix} -\varphi & 1 \\ 1 & 1-\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De forma equivalente,

$$\begin{aligned} -\varphi v_1 + v_2 &= 0, \\ v_1 + (1-\varphi)v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Una solución de este sistema de ecuaciones es $v_1 = 1$ y $v_2 = \varphi$. Así, un vector propio correspondiente a φ, es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix}$. Ahora, para ψ, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ 1 & 1-\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} -\psi v_1 + v_2 &= 0, \\ v_1 + (1-\psi)v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Una solución de este sistema de ecuaciones es $v_1 = 1$ y $v_2 = \psi$. Esto implica que, un vector propio correspondiente a ψ, es $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}$. Observe que $A = QBQ^{-1}$, donde $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$. Luego, el sistema está representado como sigue:

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = QB^kQ^{-1}\mathbf{x}_0$$

Notemos que $Q^{-1} = \frac{1}{\psi-\varphi} \begin{pmatrix} \psi & -1 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}$. Así,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^k & 0 \\ 0 & \psi^k \end{pmatrix} \frac{1}{\psi - \varphi} \begin{pmatrix} \psi & -1 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\psi-\varphi} \begin{pmatrix} \psi\varphi^k - \varphi\psi^k & -\varphi^k + \psi^k \\ \psi\varphi^{k+1} - \varphi\psi^{k+1} & -\varphi^{k+1} + \psi^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando el inciso (6) de la Observación 3.2.2, se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\psi - \varphi} \begin{pmatrix} \psi^{k-1} - \varphi^{k-1} & -\varphi^k + \psi^k \\ \psi^k - \varphi^k & -\varphi^{k+1} + \psi^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, tomemos como valor inicial $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, con un par de conejos jóvenes. Se obtiene que:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\psi - \varphi} \begin{pmatrix} \psi^{k-1} - \varphi^{k-1} & -\varphi^k + \psi^k \\ \psi^k - \varphi^k & -\varphi^{k+1} + \psi^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\psi - \varphi} \begin{pmatrix} \psi^{k-1} - \varphi^{k-1} \\ \psi^k - \varphi^k \end{pmatrix}.$$

Si hacemos z_k, la cantidad total de conejos en el tiempo k (en parejas), se tiene que:

$$z_k = x_k + y_k = \frac{1}{\psi - \varphi}\left(\psi^{k-1} - \varphi^{k-1} + \psi^k - \varphi^k\right) = \frac{\psi^{k-1}(1+\psi) - \varphi^{k-1}(1+\varphi)}{\psi - \varphi}.$$

Por los incisos (3) y (4) de la Observación 3.2.2, obtenemos que:

$$z_k = \frac{\psi^{k-1}\psi^2 - \varphi^{k-1}\varphi^2}{\psi - \varphi} = \frac{\varphi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\varphi - \psi}.$$

Aplicando (3.8), concluimos que:

$$z_k = F_{k+1}, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Con esto mostramos que, a partir de la condición inicial $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir una pareja de conejos jóvenes, la población total de conejos se comporta como la sucesión de Fibonacci.

Capítulo 4

Dinámica colectiva. Resultados principales

Recordemos que en un sistema dinámico (X, f), el objetivo es estudiar qué es lo que le pasa a los puntos cuando se le aplica sucesivamente la función f. Esto nos representa el movimiento de un objeto x en el espacio X; a este fenómeno le llamamos dinámica individual. Es natural estudiar el comportamiento de una colección de objetos de X. Esto es, estudiar sucesiones de la forma

$$A, \quad f(A), \quad f^2(A), \dots$$

donde A es un subconjunto de X. A esto le llamamos dinámica colectiva. Para hacer un estudio de este tipo, es necesario tener la noción de cercanía entre conjuntos, lo que nos conlleva a estudiar los hiperespacios.

En este capítulo presentamos una introducción a los hiperespacios y a las funciones inducidas entre hiperespacios. Todo esto, con el fin de poder hablar de la dinámica colectiva, es decir, la dinámica de conjuntos. El capítulo está conformado por tres secciones, en la primera de ellas se realiza la construcción de la métrica de Hausdorff, se introduce la topología de Vietoris y se analizan algunas de sus propiedades. En la segunda sección se introduce el concepto de función inducida en hiperespacios y se estudian propiedades que satisfacen. En la tercera y última sección se aborda el problema principal de esta tesis, esto es, estudiar las relaciones que existen entre la dinámica individual y la dinámica colectiva para ciertos tipos de sistemas dinámicos.

4.1 Hiperespacios

En esta sección damos una introducción a los hiperespacios, hacemos la construcción de la métrica de Hausdorff y presentamos la topología de Vietoris, y vemos la relación que existe entre estos dos conceptos. También definimos las funciones inducidas entre hiperespacios y se estudian las propiedades que satisfacen.

En términos generales, un ***hiperespacio*** de un espacio topológico X, es una colección de subconjuntos de X, dotada con alguna topología. En esta tesis, restringimos el estudio de los hiperespacios cuando X es un espacio métrico. Algunos de los hiperespacios más conocidos se denotan y definen como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{CL}(X) &= \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\}, \\ \mathcal{CB}(X) &= \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado, acotado y no vacío}\} \quad \text{y} \\ 2^X &= \{A \subseteq X : A \text{ es compacto en } X \text{ y no vacío}\}. \end{aligned}$$

Observemos que $2^X \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{CL}(X)$. En general, cuando X es un espacio topológico no siempre podemos hablar del hiperespacio $\mathcal{CB}(X)$, ya que no siempre podemos hablar del concepto de conjunto acotado, así como tampoco, se cumple siempre que $2^X \subseteq \mathcal{CL}(X)$. En el caso en que X es un espacio topológico, se considera a 2^X como la colección de los subconjuntos compactos, cerrados y no vacíos de X.

En este trabajo, estamos enfocados en estudiar el hiperespacio 2^X, donde X es un espacio métrico compacto. A este hiperespacio lo dotamos de una métrica y una topología. Los hiperespacios $\mathcal{CB}(X)$ y $\mathcal{CL}(X)$ los utilizaremos para construir la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris, respectivamente, ya que éstos son los hiperespacios más grandes en los que se consideran estos conceptos.

4.1.1. Métrica de Hausdorff

En esta sección mostramos una métrica para 2^X, la cual es conocida como métrica de Hausdorff. Más aún, definimos esta métrica para $\mathcal{CB}(X)$, el cual es el hiperespacio más grande donde se puede definir. Un estudio más detallado sobre la métrica de Hausdorff lo puede encontrar en [2] y [9].

Sean X un espacio métrico, A y B subconjuntos acotados de X. Denotemos por $\rho(A,B)$ al supremo de las distancias de los puntos de A al conjunto B. En símbolos:

$$\rho(A,B) = \sup\{d(a,B) : a \in A\}.$$

A continuación mostramos un resultado, Proposición 4.1.1, el cual es de gran utilidad para definir una métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$.

Proposición 4.1.1. Sean (X,d) un espacio métrico, $A, B \subseteq X$ conjuntos acotados y no vacíos. Se cumple los siguiente:

(1) $\rho(A,B) \geq 0$,

(2) $\rho(A,B) = 0$ si y sólo si $A \subseteq \mathrm{cl}(B)$,

(3) $\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B)$, para cualquier $C \subseteq X$ acotado y no vacío.

Demostración. Notemos que (1) se tiene por el inciso (1) de la Proposición 1.2.20.

Probemos ahora (2). Notemos que $\rho(A,B) = 0$ es equivalente a $d(a,B) = 0$, para cada $a \in A$. Por el inciso (3) de la Proposición 1.2.20, $d(a,B) = 0$ es equivalente a que $a \in \mathrm{cl}(B)$. Por lo tanto, $\rho(A,B) = 0$ si y sólo si $A \subseteq \mathrm{cl}(B)$.

Finalmente, probemos (3). Sea $C \subseteq X$ acotado y no vacío. Sean $a \in A$ y $c \in C$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} d(a,B) &= \text{ínf}\{d(a,b) : b \in B\} \\ &\leq \text{ínf}\{d(a,c) + d(c,b) : b \in B\} \\ &= d(a,c) + \text{ínf}\{d(c,b) : b \in B\} \\ &= d(a,c) + d(c,B) \leq d(a,c) + \rho(C,B). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} d(a,B) &\leq \text{ínf}\{d(a,c) + \rho(C,B) : c \in C\} \\ &= \text{ínf}\{d(a,c) : c \in C\} + \rho(C,B) \\ &= d(a,C) + \rho(C,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho(A,B) = \sup\{d(a,B) : a \in A\} \leq \rho(A,C) + \rho(C,B)$. □

Teorema 4.1.2. Sea X un espacio métrico. La función $H\colon \mathcal{CB}(X)\times\mathcal{CB}(X) \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(A,B) = \text{máx}\{\rho(A,B), \rho(B,A)\},$$

es una métrica para $\mathcal{CB}(X)$.

Demostración. Para demostrar que H es una métrica para $\mathcal{CB}(X)$, tomemos $A, B, C \in \mathcal{CB}(X)$ y veamos que se satisfacen los incisos (i), (ii), (iii) y (iv) de la Definición 1.2.1. Para el inciso (i), notemos que $H(A,B) \geq \rho(A,B)$. Luego, por el inciso (1) de la Proposición 4.1.1 se tiene que $H(A,B) \geq 0$.

Para el inciso (ii). Si $H(A,B) = 0$, entonces $\rho(A,B) = 0$ y $\rho(B,A) = 0$. Por el inciso (2) de la Proposición 4.1.1 tenemos que $A \subseteq \text{cl}(B)$ y $B \subseteq \text{cl}(A)$. Dado que $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, se tiene que $A \subseteq B$ y $A \subseteq B$. Así, $A = B$. El recíproco se demuestra con los pasos anteriores aplicados en orden inverso. Con esto queda demostrado el inciso (ii).

Veamos ahora que se satisface (iii). Para esto basta observar lo siguiente.

$$H(A,B) = \text{máx}\{\rho(A,B), \rho(B,A)\} = \text{máx}\{\rho(B,A), \rho(A,B)\} = H(B,A).$$

Finalmente, probemos que se satisface (iv). Por el inciso (3) de la Proposición 4.1.1, se tiene que:

$$\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$$

y

$$\rho(B,A) \leq \rho(B,C) + \rho(C,A) \leq H(C,B) + H(A,C) = H(A,C) + H(C,B).$$

Por lo tanto, $H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$. □

De acuerdo al Teorema 4.1.2 se tiene que $(\mathcal{CB}(X), H)$ es un espacio métrico. La función H es conocida como ***métrica de Hausdorff***.

4.1.2. Topología de Vietoris

En esta sección mostramos una topología para el hiperespacio 2^X, la cual es conocida como Topología de Vietoris. Más aún, definimos esta topología para $\mathcal{CL}(X)$, que es el hiperespacio más grande en el que se estudia, esto es, cualquier otro hiperespacio es un subespacio de $\mathcal{CL}(X)$. Todo lo que se trate en este apartado se puede definir para espacios topológicos en general.

Comenzamos esta sección con la definición de la topología de Vietoris. Cabe mencionar que esta definición está sustentada por el Teorema 1.3.10.

Definición 4.1.3. Sea X un espacio métrico. La ***topología de Vietoris*** para $\mathcal{CL}(X)$ es la topología más pequeña, $\mathcal{T}_V$, para $\mathcal{CL}(X)$ que cumpla las siguientes propiedades:

(i) $\{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subseteq U\} \in \mathcal{T}_V$, para cualquier conjunto U abierto en X.

(ii) $\{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subseteq F\}$ es cerrado respecto a $\mathcal{T}_V$, para cualquier conjunto F cerrado en X.

Trabajar con los elementos de la topología de Vietoris a partir de la definición, es complicado, así que para un mejor manejo presentamos una base para esta topología. Sea X un espacio métrico y consideremos $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq X$ no vacíos. Definamos la siguiente subfamilia de $\mathcal{CL}(X)$:

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_k\rangle = \left\{B \in \mathcal{CL}(X) : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \varnothing, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}\right\}.$$

Estas familias son denominados ***vietóricos***.

El resultado que mostramos a continuación, Teorema 4.1.4, nos muestra una base para la topología de Vietoris. La prueba de este resultado la puede consultar en [14, Teorema 1.2, pág. 3]

Teorema 4.1.4. Sea X un espacio métrico. La colección:

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, \ldots, U_k\rangle : k \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \text{ es abierto y no vacío en } X, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

es una base para la topología de Vietoris $\mathcal{T}_V$.

Ahora, mostramos un resultado que es de gran utilidad más adelante.

Proposición 4.1.5. Sea X un espacio métrico. Para cualesquiera dos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ no vacíos de $\mathcal{CL}(X)$, considerado con la topología de Vietoris, existen subconjuntos abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_k, V_1, V_2, \ldots, V_k \subseteq X$ tales que:

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle \subseteq \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle \subseteq \mathcal{V}.$$

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos y no vacíos en $\mathcal{CL}(X)$. Dado que $\mathcal{B}_V$ es una base para $\mathcal{T}_V$, existen $U_1, U_2, \ldots, U_{k_1}, V_1, V_2, \ldots, V_{k_2} \subseteq X$, tales que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_{k_1}\rangle \subseteq \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \langle V_1, V_2, \ldots, V_{k_2}\rangle \subseteq \mathcal{V}.$$

Si $k_1 = k_2$, se tiene el resultado. Supongamos que $k_1 \neq k_2$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $k_1 < k_2$. Hagamos $W_i = U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k_1\}$ y $W_i = U_1$, para $i \in \{k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_2\}$. De la construcción es fácil verificar que:

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_{k_1} \rangle = \langle W_1, W_2, \ldots, W_{k_2} \rangle .$$

Así, $\langle W_1, W_2, \ldots, W_{k_2} \rangle \subseteq \mathscr{U}$ y $\langle V_1, V_2, \ldots, V_{k_2} \rangle \subseteq \mathscr{V}$. □

Ahora veamos algunas propiedades que cumplen los vietóricos.

Lema 4.1.6. Sea X un espacio métrico. Se cumple lo siguiente:

(1) $\langle A \rangle \neq \varnothing$ si y sólo si $A \neq \varnothing$, para cada $A \subseteq X$.

(2) $\left\langle \bigcap \mathscr{A} \right\rangle = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \langle A \rangle$, para cualquier familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X.

Demostración. Veamos primero que $\langle A \rangle \neq \varnothing$ si y sólo si $A \neq \varnothing$. Para esto, supongamos primero que $\langle A \rangle \neq \varnothing$. Esto significa que existe $K \in 2^X$ tal que $K \subseteq A$. Dado que $\varnothing \notin 2^X$, tenemos que $K \neq \varnothing$, así $A \neq \varnothing$.

Recíprocamente, supongamos que $A \neq \varnothing$, esto es, existe $x \in X$, tal que $x \in A$. Notemos que $\{x\} \in 2^X$ y $\{x\} \subseteq A$, en consecuencia, $\{x\} \in \langle A \rangle$. Por lo tanto $\langle A \rangle \neq \varnothing$.

Ahora probemos (2). Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos de X. Sea $K \in \langle \bigcap \mathscr{A} \rangle$. Luego, $K \in 2^X$ y $K \subseteq \bigcap \mathscr{A}$. De donde, $K \in 2^X$ y $K \subseteq A$, para cada $A \in \mathscr{A}$. Así, $K \in \langle A \rangle$, para cada $A \in \mathscr{A}$. De aquí, se deduce que $K \in \bigcap \{\langle A \rangle : A \in \mathscr{A}\}$. Con esto, queda demostrado que $\left\langle \bigcap \mathscr{A} \right\rangle \subseteq \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \langle A \rangle$.

Ahora veamos la otra contención. Para esto, sea $K \in \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \langle A \rangle$. Luego, $K \in \langle A \rangle$, para cada $A \in \mathscr{A}$. De aquí, se obtiene que $K \in 2^X$ y $K \subseteq A$, para cada $A \in \mathscr{A}$. Así, $K \in 2^X$ y $K \subseteq \bigcap \mathscr{A}$. De donde, $K \in \langle \bigcap \mathscr{A} \rangle$. Con esto, queda demostrado que $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} \langle A \rangle \subseteq \left\langle \bigcap \mathscr{A} \right\rangle$. De ambas contenciones, se obtiene la igualdad requerida en (2). □

Finalizamos esta sección con el Teorema 4.1.7, el cual nos relaciona la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris, una prueba de este resultado la puede consultar en [14, Teorema 3.1, pág. 16].

Teorema 4.1.7. Sean X un espacio métrico. Si X es compacto, entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris coinciden en 2^X.

En [13] se encuentran algunos ejemplos de hiperespacios, en donde se exhiben modelos para éstos.

4.2 Funciones inducidas

En esta sección vamos a introducir el concepto de función inducida entre hiperespacios y exponemos algunas de las propiedades que satisface. A partir de ahora, los espacios con los que trabajamos son considerados espacios métricos compactos, todo con el fin de tener ambas herramientas disponibles, la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris.

Dados X y Y espacios métricos compactos y $f\colon X \to Y$ una función continua, definimos la función $2^f\colon 2^X \to 2^Y$, como:

$$2^f(K) = f(K), \quad \text{para todo } K \in 2^X.$$

Notemos que la función 2^f está bien definida, ya que f es continua. La función 2^f es llamada ***función inducida*** por f entre 2^X y 2^Y.

Ahora, veamos algunas relaciones que existen entre f y 2^f.

Proposición 4.2.1. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Se tiene que f es inyectiva si y sólo si 2^f es inyectiva.

Demostración. Supongamos que f es inyectiva y probemos que 2^f es inyectiva. Sean $K_1, K_2 \in 2^X$ tales que $2^f(K_1) = 2^f(K_2)$. Veamos que $K_1 = K_2$. Como $2^f(K_1) = 2^f(K_2)$, se tiene que $f(K_1) = f(K_2)$. Luego $f^{-1}(f(K_1)) = f^{-1}(f(K_2))$. Dado que f es inyectiva, por el inciso (2) de la Observación 1.1.2 obtenemos que:

$$K_1 = f^{-1}(f(K_1)) = f^{-1}(f(K_2)) = K_2.$$

Con esto queda probado que 2^f es inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que 2^f es inyectiva y veamos que f es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Observemos que $\{x_1\}, \{x_2\} \in 2^X$. Luego,

$$2^f\big(\{x_1\}\big) = f\big(\{x_1\}\big) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f\big(\{x_2\}\big) = 2^f\big(\{x_2\}\big).$$

Como 2^f es inyectiva, se obtiene que $\{x_1\} = \{x_2\}$. Así, $x_1 = x_2$. Por lo tanto, f es inyectiva. $\square$

Proposición 4.2.2. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Se tiene que f es sobreyectiva si y sólo si 2^f es sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que f es sobreyectiva y probemos que 2^f es sobreyectiva. Sea $K \in 2^Y$. Se tiene que K es cerrado en Y. Como f es continua, por el inciso (3) de la Proposición 1.2.22 se tiene que $f^{-1}(K)$ es cerrado en X. Sea $K' = f^{-1}(K)$. Dado que X es compacto y K' es cerrado en X, por la Proposición 1.3.19, se obtiene que K' es compacto. Por otro lado, como f es sobreyectiva, por el inciso (3) de la Observación 1.1.2 se concluye que $f(f^{-1}(K)) = K$. Luego, $K = f(K') = 2^f(K')$. Por lo tanto, 2^f es sobreyectiva.

Recíprocamente, supongamos que 2^f es sobreyectiva y veamos que f es sobreyectiva. Sea $y \in Y$. Observemos que $\{y\} \in 2^Y$. Dado que 2^f es sobreyectiva, existe $K \in 2^X$ tal que $2^f(K) = \{y\}$. Tomemos $x \in K$. Observemos que $f(x) \in f(K) = 2^f(K) = \{y\}$. Así, $f(x) = y$. Por lo tanto, f es sobreyectiva. $\square$

A continuación presentamos otro resultado importante, el cual nos permite crear sistemas dinámicos en los hiperespacios.

Proposición 4.2.3. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Se tiene que la función inducida 2^f es continua.

Demostración. Para la prueba utilizamos la base $\mathscr{B}_V$ y la equivalencia de continuidad del inciso (3) de la Proposición 1.3.25. Sean $U_1, U_2, \ldots, U_k \subseteq X$ abiertos no vacíos. Probemos que $\left(2^f\right)^{-1}\big(\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle\big)$ es abierto en 2^X. Para esto veamos que

$$\left(2^f\right)^{-1}\big(\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle\big) = \left\langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_k)\right\rangle.$$

Primero probemos que $\left(2^f\right)^{-1}\big(\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle\big) \subseteq \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_k)\rangle$. Sea $K \in \left(2^f\right)^{-1}\big(\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle\big)$, se cumple que $f(K) = 2^f(K) \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle$. Luego,

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i, \quad \text{y} \quad f(K) \cap U_i \neq \varnothing, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Por el inciso (2) de la Observación 1.1.2 y el inciso (2) del Corolario 1.1.8, se tiene que:

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i).$$

Por otro lado, dado que $f(K) \cap U_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, se sigue del Lema 1.1.14, que $K \cap f^{-1}(U_i) \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Así, $K \in \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_k)\rangle$.

Probemos ahora que $\left(2^f\right)^{-1}\big(\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle\big) \supseteq \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_k)\rangle$. Sea $K \in \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_k)\rangle$. Se tiene que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i) \quad \text{y} \quad K \cap f^{-1}(U_i) \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Por el Corolario 1.1.6 y el inciso (3) de la Observación 1.1.2 se tiene que:

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f\left(f^{-1}(U_i)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Por otro lado, dado que $K \cap f^{-1}(U_i) \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, obtenemos del Lema 1.1.14, que $f(K) \cap U_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Así, $2^f(K) = f(K) \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle$. De donde, $\left(2^f\right)^{-1}\big(\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle\big) \supseteq \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_k)\rangle$. Por lo tanto, $\left(2^f\right)^{-1}\big(\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle\big) = \langle f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_k)\rangle$. □

El siguiente corolario se sigue de la Observación 1.2.25 y de la Proposición 4.2.3.

Corolario 4.2.4. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función. Si f es continua, entonces $\left(2^f\right)^k$ es continua, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.2.5. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Para cada $K \in 2^X$ y cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que $\left(2^f\right)^k(K) = f^k(K)$.

Demostración. Sea $K \in 2^X$. Hagamos la prueba utilizando inducción matemática sobre k. Para $k = 0$ se tiene que:

$$\left(2^f\right)^0(K) = id_{2^X}(K) = K = id_X(K) = f^0(K).$$

Supongamos ahora que el resultado es verdadero para k y probemos que se cumple para $k+1$. Por la definición de iteración de funciones, aplicada a la función 2^f, y por la definición de la función 2^f se tiene que:

$$\left(2^f\right)^{k+1}(K) = 2^f\left(\left(2^f\right)^k(K)\right) = f\left(\left(2^f\right)^k(K)\right).$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $\left(2^f\right)^{k+1}(K) = f\big(f^k(K)\big)$. Por el inciso (1) de la Proposición 1.1.13 se sigue que $\left(2^f\right)^{k+1}(K) = f^{k+1}(K)$. $\square$

Como consecuencia de la Proposición 4.2.5 se tiene la siguiente observación.

Observación 4.2.6. Para cualquier función continua $f\colon X \to X$ y cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que, la k-ésima iteración de la función 2^f, coincide con la función inducida de la función f^k. En símbolos, $\left(2^f\right)^k = 2^{(f^k)}$.

De ahora en adelante, a la k-ésima iteración de la función 2^f, la denotamos simplemente como 2^{f^k}.

A continuación presentamos un resultado que es de gran utilidad en la Sección 3.3.

Proposición 4.2.7. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Para cada $A \subseteq X$, se cumple que $2^f\big(\langle A\rangle\big) \subseteq \big\langle f(A)\big\rangle$.

Demostración. Sea $K \in 2^f\big(\langle A\rangle\big)$. Luego, existe $K' \in \langle A\rangle$ tal que $2^f(K') = K$. De la definición de la función 2^f se tiene que $f(K') = K$. Por otro lado, dado que $K' \in \langle A\rangle$, obtenemos que $K' \subseteq A$. Luego, $f(K') \subseteq f(A)$. Así, $K = f(K') \in \big\langle f(A)\big\rangle$. Por lo tanto, $2^f\big(\langle A\rangle\big) \subseteq \big\langle f(A)\big\rangle$. $\square$

Es natural preguntarse si se satisface la igualdad de la Proposición 4.2.7. A continuación, damos un ejemplo en el cual esta igualdad no se satisface.

Ejemplo 4.2.8. Consideremos $f\colon [0,3] \to [0,3]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } \ 0 \le x < 1; \\ 3 - x & \text{si } \ 1 \le x < 2; \\ 2x - 3 & \text{si } \ 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

En la Figura 4.1, se muestra la gráfica de la función f.

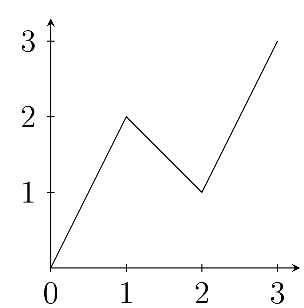


Figura 4.1: Gráfica de la función f.

Consideremos $A = \{1\} \cup \left(\frac{5}{2}, 3\right]$. Observemos que $f(A) = [2, 3]$ (ver Figura 4.2).

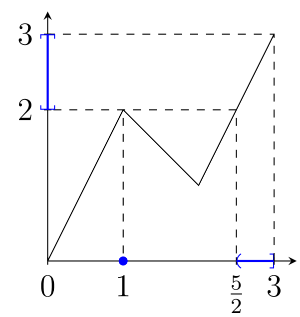


Figura 4.2: Imagen de A bajo f.

Notemos que $K = [2, 3] \in \langle f(A) \rangle$. Consideremos la función $f|_A \colon A \to [0, 3]$, definida por $f|_A(x) = f(x)$, para cada $x \in A$. Observemos que $f|_A$ es inyectiva. Por la Proposicición 1.1.3, obtenemos que no existe $K_1 \subsetneq A$ tal que $f|_A(K_1) = f|_A(A) = [2, 3] = K$. Luego, no existe $K_1 \subsetneq A$ tal que $f(K_1) = f(A) = K$. Además, notemos que A no es compacto. De donde, no existe un subconjunto compacto K_1 de A de tal forma que $2^f(K_1) = f(K_1) = K$. Con esto, concluimos que $K \notin 2^f\big(\langle A \rangle \big)$. Por lo tanto, $2^f\big(\langle A \rangle \big) \subsetneq \big\langle f(A) \big\rangle$.

En vista del Ejemplo 4.2.8, tenemos que en general no se satisface la igualdad de la Proposición 4.2.7. A continuación, en los siguientes dos resultados se dan condiciones para que se satisfaga la igualdad en la Proposición 4.2.7.

Proposición 4.2.9. Sean X y Y espacios métricos compactos, $f \colon X \to Y$ una función continua y $A \subseteq X$ no vacío. Si A es cerrado en X, entonces $2^f\big(\langle A \rangle \big) = \big\langle f(A) \big\rangle$.

Demostración. Supongamos que A es cerrado y veamos que $2^f\big(\langle A \rangle \big) = \big\langle f(A) \big\rangle$. Por la Proposición 4.2.7, tenemos que $2^f\big(\langle A \rangle \big) \subseteq \big\langle f(A) \big\rangle$. Probemos que $\big\langle f(A) \big\rangle \subseteq 2^f\big(\langle A \rangle \big)$. Sea $K \in \big\langle f(A) \big\rangle$. Luego, $K \in 2^X$ y $K \subseteq f(A)$. Por la Proposición 1.3.19, se tiene que K es cerrado en Y. Dado que f es continua, por el inciso (3) de la Proposición 1.2.22 $f^{-1}(K)$ es cerrado en X. Además, como $K \neq \varnothing$ y $K \subseteq f(A)$, se tiene que $A \cap f^{-1}(K) \neq \varnothing$. Dado que A y $f^{-1}(K)$ son cerrados, se tiene que $K_1 = A \cap f^{-1}(K)$ es cerrado y no vacío en X. Como X es compacto, nuevamente por la Proposición 1.3.19, obtenemos que K_1 es compacto. Así, $K_1 \in 2^X$. Además, $K_1 \in \langle A \rangle$.

Por otro lado, como $K \subseteq f(A)$, de la Proposición 1.1.9 se tiene que $f\big(A \cap f^{-1}(K)\big) = K$. Luego,

$$2^f(K_1) = f(K_1) = f\big(A \cap f^{-1}(K)\big) = K.$$

Así, $K = 2^f(K_1) \in 2^f\big(\langle A \rangle \big)$. Con esto probamos que $\big\langle f(A) \big\rangle \subseteq 2^f\big(\langle A \rangle \big)$. Por lo tanto, $2^f\big(\langle A \rangle \big) = \big\langle f(A) \big\rangle$. $\square$

Proposición 4.2.10. Sean X y Y espacios métricos compactos, $f \colon X \to Y$ una función continua e inyectiva. Para cada $A \subseteq X$ no vacío, se cumple que $2^f\big(\langle A \rangle \big) = \big\langle f(A) \big\rangle$.

Demostración. Sea $A \subseteq X$ y veamos que $2^f\big(\langle A\rangle\big) = \big\langle f(A)\big\rangle$. Por la Proposición 4.2.7, tenemos que $2^f\big(\langle A\rangle\big) \subseteq \big\langle f(A)\big\rangle$. Probemos que $\big\langle f(A)\big\rangle \subseteq 2^f\big(\langle A\rangle\big)$. Sea $K \in \big\langle f(A)\big\rangle$. Luego, $K \in 2^X$ y $K \subseteq f(A)$. Por la Proposición 1.3.19, se tiene que K es cerrado en Y. Dado que f es continua, por el inciso (3) de la Proposición 1.2.22 $f^{-1}(K)$ es cerrado en X. Nuevamente por la Proposición 1.3.19, obtenemos que $f^{-1}(K)$ es compacto. Claramente $f^{-1}(K)$ es no vacío. Así, $f^{-1}(K) \in 2^X$. Dado que f es inyectiva, se tiene que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. Así, $f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. De donde, $f^{-1}(K) \in \langle A\rangle$.

Por otro lado, dado que $K \subseteq f(A) \subseteq f(X)$, por la Proposición 1.1.4 se tiene que $f\big(f^{-1}(K)\big) = K$. Luego,

$$K = f\big(f^{-1}(K)\big) = 2^f\big(f^{-1}(K)\big) \in 2^f\big(\langle A\rangle\big).$$

Con esto probamos que $\big\langle f(A)\big\rangle \subseteq 2^f\big(\langle A\rangle\big)$. Por lo tanto, $2^f\big(\langle A\rangle\big) = \big\langle f(A)\big\rangle$. □

4.3 Dinámica colectiva

Recordemos que dado un sistema dinámico (X, f), podemos construir el sistema dinámico $(2^X, 2^f)$. Uno de los problemas que se estudia, es ver la relación que existe entre el sistema dinámico (X, f) y el sistema dinámico $(2^X, 2^f)$. Específicamente, el problema que abordamos en esta sección es el siguiente.

Problema. Dada una clase de funciones $\mathscr{M}$, investigar las relaciones que existan entre las siguientes proposiciones:

(a) $f \in \mathscr{M}$;

(b) $2^f \in \mathscr{M}$,

cuando $\mathscr{M}$ es alguna de las siguientes clases de funciones: fuertemente mezclantes, suavemente mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivas, con especificación y con la Propiedad P.

Sin más preámbulo, comenzamos con la siguiente observación, en la que se muestra una relación entre los puntos fijos y periódicos de la función f y los de su función inducida 2^f.

Observación 4.3.1. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$. Se cumple lo siguiente:

(1) Si x es un punto fijo de f, entonces $\{x\}$ es un punto fijo de 2^f.

(2) Si x es un punto periódico de f, entonces $\{x\}$ es un punto periódico de 2^f.

A continuación, mostramos otro resultado referente a puntos periódicos.

Proposición 4.3.2. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X, entonces $\mathrm{Per}\left(2^f\right)$ es denso en 2^X.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Per}(f)$ es denso en 2^X y probemos que $\mathrm{Per}\big(2^f\big)$ es denso en X. Para esto, sea $\mathcal{U} \subseteq 2^X$ abierto no vacío y veamos que $\mathcal{U} \cap \mathrm{Per}\big(2^f\big) \neq \varnothing$. Por la Proposición 4.1.5 tenemos que, existen $U_1, U_2, \ldots, U_m \subseteq X$ abiertos y no vacíos tales que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Dado que $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X, se sigue que $U_i \cap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Así, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existen $x_i \in U_i$ y $k_i \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_i}(x_i) = x_i$. Sean $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ y $k = k_1 k_2 \cdots k_m$. Notemos que $2^{f^k}(B) = B$, lo cual implica que $B \in \mathrm{Per}\big(2^f\big)$. Además, se tiene que $B \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Con esto, $\mathcal{U} \cap \mathrm{Per}\big(2^f\big) \neq \varnothing$. Por lo tanto, $\mathrm{Per}\big(2^f\big)$ es un conjunto denso en 2^X. □

Es natural preguntarse si el recíproco de la Proposición 4.3.2 es verdadero. En [3, pág. 298, 299] se exhibe un ejemplo de una función tal que $\mathrm{Per}(2^f)$ es denso en X y $\mathrm{Per}(f) = \varnothing$, lo cual implica que $\mathrm{Per}(f)$ no es denso en X. Así que, el recíproco de la Proposición 4.3.2 no se cumple en general. Sin embargo, el recíproco es verdadero en el caso en que $X = [0, 1]$, para verificar esta afirmación puede consultar [3, Proposición 18.16, pág. 297].

En seguida mostramos un resultado referente a transitividad.

Teorema 4.3.3. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua en X. Si la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ es transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que 2^f es transitiva y probemos que f es transitiva. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos no vacíos. Notemos que $\langle U \rangle$ y $\langle V \rangle$ son abiertos y no vacíos en 2^X. Dado que 2^f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $2^{f^k}\big(\langle U \rangle\big) \cap \langle V \rangle \neq \varnothing$. Notemos que de la Proposición 4.2.7, obtenemos que $2^{f^k}\big(\langle U \rangle\big) \subseteq \big\langle f^k(U) \big\rangle$, de donde, $\big\langle f^k(U) \big\rangle \cap \langle V \rangle \neq \varnothing$. Ahora, utilizando el inciso (2) del Lema 4.1.6, se tiene, $\big\langle f^k(U) \cap V \big\rangle \neq \varnothing$. Por el inciso (1) del Lema 4.1.6, se sigue que $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Con todo lo anterior hemos probado que f es transitiva. □

El recíproco del Teorema 4.3.3 no es verdadero. Más adelante, en el Ejemplo 4.3.6, se muestra que la función R_α, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es transitiva, sin embargo, su función inducida no es transitiva.

Ahora, mostramos un resultado correspondiente a funciones totalmente transitivas.

Teorema 4.3.4. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si $2^f : 2^X \to 2^X$ es totalmente transitiva, entonces f es totalmente transitiva.

Demostración. Supongamos que 2^f es totalmente transitiva y probemos que f es totalmente transitiva, esto es, f^k es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Dado que 2^f es totalmente transitiva, obtenemos que 2^{f^k} es transitiva. Además, por la Observación 4.2.6 tenemos que 2^{f^k} es la función inducida de f^k. Así, dado que la función 2^{f^k} es transitiva, por el Teorema 4.3.3, la función f^k es transitiva. Con esto probamos que f es totalmente transitiva. □

El recíproco del Teorema 4.3.4 no es válido. Posteriormente, en el Ejemplo 4.3.6, se muestra que la función R_α, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es totalmente transitiva y que su función inducida no es totalmente transitiva.

A continuación mostramos un resultado correspondiente a funciones débilmente mezclantes. Este resultado también relaciona la propiedad de transitividad.

Teorema 4.3.5. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) f es débilmente mezclante,

(2) 2^f es débilmente mezclante,

(3) 2^f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante y veamos que 2^f es débilmente mezclante. Para demostrar que 2^f es débilmente mezclante usamos el inciso (4) del Teorema 2.2.24. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ abiertos en 2^X y no vacíos, probemos que existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $2^{f^k}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \varnothing$ y $2^{f^k}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$. Por la Proposición 4.1.5, para $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, existen conjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_m, V_1, V_2, \ldots, V_m$ abiertos y no vacíos en X tales que:

$$\langle U_1, U_1, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \langle V_1, V_1, \ldots, V_m \rangle \subseteq \mathcal{V}.$$

Observemos que los conjuntos $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m$ y $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m$ son abiertos y no vacíos en X^m. Por el Teorema 2.2.24 se tiene que $f^{\times m}$ es débilmente mezclante. Luego, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$(f^{\times m})^k(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m) \cap [U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m] \neq \varnothing \quad \text{y} \tag{4.1}$$

$$(f^{\times m})^k(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m) \cap [V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m] \neq \varnothing. \tag{4.2}$$

De (4.1) y por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15, se tiene que $f^k(U_i) \cap U_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Esto último implica que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existe $x_i \in U_i$ tal que $f^k(x_i) \in U_i$. Consideremos el conjunto $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Notemos que $B \in 2^X$. Además,

$$B \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U} \qquad \text{y}$$
$$f^k(B) = \{f^k(x_1), f^k(x_2), \ldots, f^k(x_m)\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U}.$$

Así, $B \in \mathcal{U}$ y $2^{f^k}(B) = f^k(B) \in \mathcal{U}$. Lo cual implica que $2^{f^k}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \varnothing$. De forma similar, usando (4.2) se demuestra que $2^{f^k}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$. Así, por el Teorema 2.2.24, se concluye que 2^f es débilmente mezclante.

La prueba de que (2) implica (3) se tiene de manera inmediata del Corolario 2.2.22.

Finalmente, supongamos que 2^f es transitiva y veamos que f es débilmente mezclante. Para demostrar que f es débilmente mezclante utilizamos el inciso (4) del Teorema 2.2.24. Sean U y V abiertos en X y no vacíos. Los conjuntos $\langle U \rangle$ y $\langle U, V \rangle$ son abiertos en 2^X y no vacíos. Dado que 2^f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $2^{f^k}\big(\langle U \rangle\big) \cap \langle U, V \rangle \neq \varnothing$, esto es, existe $K \in 2^X$ tal que $K \in \langle U \rangle$ y $2^{f^k}(K) \in \langle U, V \rangle$. Dado que $2^{f^k}(K) \in \langle U, V \rangle$, por la Proposición 4.2.5, se obtiene que $f^k(K) \in \langle U, V \rangle$. Esto implica que, $f^k(K) \subseteq U \cup V$, $f^k(K) \cap U \neq \varnothing$ y $f^k(K) \cap V \neq \varnothing$. Luego, existen $x_1, x_2 \in K$ tales que $f^k(x_1) \in U$ y $f^k(x_2) \in V$. Además, dado que $K \in \langle U \rangle$ obtenemos que $x_1, x_2 \in K \subseteq U$. Así, $f^k(x_1) \in f^k(U) \cap U$ y $f^k(x_2) \in f^k(U) \cap V$, lo cual implica que:

$$f^k(U) \cap U \neq \varnothing \quad \text{y} \quad f^k(U) \cap V \neq \varnothing.$$

Por lo tanto, usando el Teorema 2.2.24, se tiene que f es débilmente mezclante. $\square$

Con ayuda del Teorema 4.3.5, damos ejemplos que muestran que los recíprocos de los Teoremas 4.3.3 y 4.3.4 no son ciertos.

Ejemplo 4.3.6. Consideremos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y la función rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ (vea Ejemplo 2.1.6). Se tiene que la función R_α es transitiva, sin embargo, la función 2^{R_α} no es transitiva. En efecto, por el Ejemplo 2.2.12 se tiene que R_α es transitiva. Por otro lado, del Ejemplo 2.2.30, obtenemos que R_α no es débilmente mezclante. Luego, por el Teorema 4.3.5, se deduce que 2^{R_α} no es transitiva.

Ejemplo 4.3.7. Consideremos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y la función rotación $R_\alpha \colon S^1 \to S^1$ (vea Ejemplo 2.1.6). Se tiene que la función R_α es totalmente transitiva, sin embargo, la función 2^{R_α} no es totalmente transitiva. En efecto, por el Ejemplo 2.2.13, se tiene que R_α es totalmente transitiva. Por otro lado, del Ejemplo 4.3.6, se tiene que 2^{R_α} no es transitiva. Luego, 2^{R_α} no es totalmente transitiva.

A continuación presentamos la definición de función caótica. Para esta definición se considera que el espacio X es infinito.

Definición 4.3.8. Sean X un espacio métrico y $f \colon X \to X$ una función continua. Decimos que f es ***caótica***, si f es transitiva y $\mathrm{Per}(f)$ es un conjunto denso en X.

A continuación mostramos un ejemplo de función caótica.

Ejemplo 4.3.9. Consideremos la función tienda $T \colon [0,1] \to [0,1]$, definida en el Ejemplo 2.2.7. En [5, Teorema 2.2.8, pág. 35], se muestra que la función tienda es caótica.

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 4.3.5 y de la Proposición 4.3.2.

Teorema 4.3.10. Sean X un espacio métrico compacto y $f \colon X \to X$ una función continua. Si f es caótica y débilmente mezclante, entonces 2^f es caótica.

Del Teorema 4.3.10, es natural preguntarse si, 2^f es caótica implica que f es caótica. Resulta ser que esta proposición no es verdadera, aunque construir un ejemplo es complicado. En [6] se muestra una función f que no es caótica de tal manera que 2^f es caótica.

Ahora, mostramos un resultado relacionado con las funciones fuertemente mezclantes.

Teorema 4.3.11. Sean X un espacio métrico compacto y $f \colon X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) 2^f es fuertemente mezclante,

(2) f es fuertemente mezclante.

Demostración. Supongamos primero que 2^f es fuertemente mezclante y veamos que f es fuertemente mezclante. Para esto, sean $U, V \subseteq X$ abiertos en X y no vacíos. Notemos que $\langle U \rangle$ y $\langle V \rangle$ son abiertos y no vacíos en 2^X. Como 2^f es fuertemente mezclante, existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $2^{f^k}\big(\langle U \rangle\big) \cap \langle V \rangle \neq \varnothing$, para cada $k \geq n$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n$. Se tiene que $2^{f^k}\big(\langle U \rangle\big) \cap \langle V \rangle \neq \varnothing$. Por la Proposición 4.2.7, se sigue que $\big\langle f^k(U) \big\rangle \cap \langle V \rangle \neq \varnothing$. Además, por el inciso (2) del Lema 4.1.6, obtenemos que $\big\langle f^k(U) \cap V \big\rangle \neq \varnothing$. Más aún, de la Proposición 4.2.7, tenemos que $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Con todo lo anterior hemos probado que f es fuertemente mezclante.

Recíprocamente, supongamos que f es fuertemente mezclante y probemos que 2^f es fuertemente mezclante. Para esto, sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq 2^X$ abiertos y no vacíos. Por la Proposición 4.1.5, existen abiertos $U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_m \subseteq X$ no vacíos tales que:

$$\langle U_1, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \subseteq \mathcal{V}.$$

Dado que la función f es fuertemente mezclante, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \varnothing$, para cada $k \geq n_i$. Sean $n = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$ y $k \geq n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in U_i$ tal que $f^k(x_i) \in V_i$. Notemos que el conjunto $B = \{x_1, \ldots, x_m\}$ cumple que, $B \in \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$ y

$$2^{f^k}(B) = f^n(B) = \{f^k(x_1), \ldots, f^k(x_m)\} \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle .$$

De aquí, $B \in \mathcal{U}$ y $2^{f^k}(B) \in \mathcal{V}$. Lo cual implica que $2^{f^k}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$. Dado que esto se cumple para cada $k \geq n$, obtenemos que 2^f es fuertemente mezclante. □

Del Diagrama 2.2 y el Teorema 4.3.11 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.3.12. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si 2^f es fuertemente mezclante, entonces:

(1) f es suavemente mezclante,

(2) f es débilmente mezclante,

(3) f es totalmente transitiva,

(4) f es transitiva.

Lema 4.3.13. Sean X y Y espacios métricos con X compacto, $f\colon X \to X$ y $g\colon Y \to Y$ funciones continuas. Si $2^f \times g\colon 2^X \times Y \to 2^X \times Y$ es transitiva, entonces $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva. Además f y g son transitivas.

Demostración. Supongamos que $2^f \times g\colon 2^X \times Y \to 2^X \times Y$ es transitiva y veamos que $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva. Para esto, sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos en $X \times Y$. Existen conjuntos abiertos no vacíos $U_1, V_1 \subseteq X$ y $U_2, V_2 \subseteq Y$ tales que $U_1 \times U_2 \subseteq U$ y $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Observemos que, los conjuntos $\big\langle U_1 \big\rangle$ y $\big\langle V_1 \big\rangle$ son abiertos en 2^X y no vacíos. Así, los conjuntos $\big\langle U_1 \big\rangle \times U_2$ y $\big\langle V_1 \big\rangle \times V_2$ son abiertos en $2^X \times Y$ y no vacíos. Para los conjuntos $\langle U_1 \rangle \times U_2$ y $\langle V_1 \rangle \times V_2$, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$\Big(2^f \times g\Big)^k \Big(\big\langle U_1 \big\rangle \times U_2\Big) \cap \big[\big\langle V_1 \big\rangle \times V_2\big] \neq \varnothing.$$

Por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15, se tiene que $2^{f^k}\big(\,\langle U_1 \rangle\,\big) \cap \langle V_1 \rangle \neq \varnothing$ y $g^k(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$. Por la Proposición 4.2.7 y el inciso (2) del Lema 4.1.6 se tiene que:

$$2^{f^k}\big(\,\langle U_1 \rangle\,\big) \cap \langle V_1 \rangle \subseteq \big\langle f^k(U_1) \big\rangle \cap \langle V_1 \rangle = \big\langle f^k(U_1) \cap V_1 \big\rangle.$$

Esto implica que, $\langle f^k(U_1) \cap V_1 \rangle \neq \varnothing$. Ahora, utilizando el inciso (1) del Lema 4.1.6, obtenemos que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing$. Con esto, hemos probado que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ y $g^k(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$. Por el inciso (2) de la Proposición 1.1.15 tenemos que $(f \times g)^k(U_1 \times U_2) \cap [V_1 \times V_2] \neq \varnothing$. Dado que $U_1 \times U_2 \subseteq U$ y $V_1 \times V_2 \subseteq V$, se tiene que $(f \times g)^k(U) \cap V \neq \varnothing$. Así, $f \times g$ es transitiva. Además, por el Lema 2.2.18, obtenemos que f y g son transitivas. □

Lema 4.3.14. Sean X y Y espacios métricos tal que X es compacto, $f \colon X \to X$ y $g \colon Y \to Y$ funciones continuas. Si para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^{\times m} \times g$ es transitiva, entonces $2^f \times g$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que $f^{\times m} \times g$ es transitiva y probemos que $2^f \times g$ es transitiva. Para esto, sean $\mathbb{U}$ y $\mathbb{V}$ abiertos no vacíos en $2^X \times Y$. Luego, existen abiertos no vacíos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq 2^X$ y $U, V \subseteq Y$ tales que $\mathcal{U} \times U \subseteq \mathbb{U}$ y $\mathcal{V} \times V \subseteq \mathbb{V}$.

Por la Proposición 4.1.5, para los conjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, U_1, \ldots, U_m, V_2, V_2, \ldots, V_m$ de X tales que:

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle \subseteq \mathcal{V}.$$

Por otro lado, por el Teorema 2.2.27, la función $f^{\times m}$ es suavemente mezclante, esto implica que $f^{\times m} \times g$ es una función transitiva. Además, observemos que los conjuntos $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m \times U$ y $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \times V$ son abiertos y no vacíos en $X^m \times Y$. Así, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$\left(f^{\times m} \times g\right)^k (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m \times U) \cap [V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \times V] \neq \varnothing.$$

Por la Proposición 1.1.15, se tiene que:

$$f^k(U_i) \cap V_i \neq \varnothing, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad \text{y} \tag{4.3}$$

$$g^k(U) \times V \neq \varnothing. \tag{4.4}$$

De (4.3) obtenemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ existe $x_i \in U_i$ tal que $f^k(x_i) \in V_i$. Sea $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Notemos que:

$$B \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U} \quad \text{y}$$

por la Proposición 4.2.5:

$$2^{f^k}(B) = f^k(B) = \{f^k(x_1), f^k(x_2), \ldots, f^k(x_m)\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle \subseteq \mathcal{V}.$$

Así,

$$2^{f^k}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing. \tag{4.5}$$

De (4.5), (4.4) y de la Proposición 1.1.15, se tiene que:

$$\left(2^f \times g\right)^k (\mathcal{U} \times U) \cap [\mathcal{V} \times V] \neq \varnothing.$$

Dado que $\mathcal{U} \times U \subseteq \mathbb{U}$ y $\mathcal{V} \times V \subseteq \mathbb{V}$, obtenemos que $\left(2^f \times g\right)^k (\mathbb{U}) \cap \mathbb{V} \neq \varnothing$. Por lo tanto, $2^f \times g$ es transitiva. □

A continuación mostramos un resultado correspondiente a las funciones suavemente mezclantes.

Teorema 4.3.15. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) 2^f es suavemente mezclante,

(2) f es suavemente mezclante.

Demostración. Probemos primero que (1) implica (2). Para esto, supongamos que 2^f es suavemente mezclante y veamos que f es suavemente mezlante. Para esto, sean Y un espacio métrico y $g : Y \to Y$ una función transitiva y probemos que $f \times g$ es transitiva. Dado que 2^f es suavemente mezclante, tenemos que $2^f \times g$ es transitiva. Por el Lema 4.3.13, obtenemos que $f \times g$ es transitiva. Por lo tanto, f es suavemente mezclante.

Veamos ahora que (2) implica (1), esto es, supongamos que f es suavemente mezclante y probemos que 2^f es suavemente mezclante. Como f es suavemente mezclante, por el Teorema 2.2.27, obtenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $f^{\times m}$ es suavemente mexclante. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^{\times m} \times g$ es transitiva. Por el Lema 4.3.14, obtenemos que $2^f \times g$ es transitiva. Por lo tanto, 2^f es suavemente mezclante. □

A partir del Diagrama 2.2 y el Teorema 4.3.15 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.3.16. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si 2^f es suavemente mezclante, entonces:

(1) f es débilmente mezclante.

(2) f es totalmente transitiva.

(3) f es transitiva.

Ahora, veamos un resultado referente a funciones con especificación.

Teorema 4.3.17. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) 2^f tiene especificación,

(2) f tiene especificación.

Demostración. Probemos primero que (1) implica (2). Para esto, supongamos que 2^f tiene especificación. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier natural $m \geq 2$, cualesquiera m puntos $K_1, K_2, \ldots, K_m$ de 2^X y cualesquiera $2m$ enteros $0 \leq a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_m \leq b_m$ con $a_i - b_{i-1} \geq M_\varepsilon$, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$, existe $K \in 2^X$ tal que:

$$H\left(2^{f^k}(K), 2^{f^k}(K_i)\right) \leq \varepsilon,$$

para cualquier $k \in \{a_i, a_i+1, \ldots, b_i\}$ y cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Para probar que f tiene especificación, tomemos $m \geq 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ y $2m$ enteros $0 \leq a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 <$

$\cdots < a_m \leq b_m$ con $a_i - b_{i-1} \geq M_\varepsilon$, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$. Hagamos $K_i = \{x_i\} \in 2^X$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Luego, existe $K \in 2^X$ tal que:

$$H\left(2^{f^k}(K), 2^{f^k}(K_i)\right) \leq \varepsilon,$$

para cualquier $k \in \{a_i, a_i+1, \ldots, b_i\}$ y cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Fijemos $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $k \in \{a_i, a_i+1, \ldots, b_i\}$. Se tiene que:

$$H\Big(f^k(K), \big\{f^k(x_i)\big\}\Big) = H\Big(f^k(K), f^k\big(\{x_i\}\big)\Big) = H\Big(2^{f^k}(K), 2^{f^k}\big(\{x_i\}\big)\Big) \leq \varepsilon.$$

Sea $x \in K$. Observemos que:

$$\begin{aligned} d\big(f^k(x), f^k(x_i)\big) &\leq \sup\Big\{d\big(z, \{f^k(x_i)\}\big) : z \in f^k(K)\Big\} = \rho\big(f^k(K), \{f^k(x_i)\}\big) \\ &\leq H\Big(f^k(K), \big\{f^k(x_i)\big\}\Big) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Con esto probamos que $d(f^k(x), f^k(x_i)) \leq \varepsilon$, para cualquier $k \in \{a_i, a_i+1, \ldots, b_i\}$ y cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Por lo tanto, f tiene especificación.

Ahora probemos que (2) implica (1). Supongamos que f tiene especificación y veamos que 2^f también tiene especificación. Para esto, sea $\varepsilon > 0$. Como f tiene especificación, existe $M_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier natural $m \geq 2$, cualesquiera m puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de X y cualesquiera $2m$ enteros $0 \leq a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_m \leq b_m$ con $a_i - b_{i-1} \geq M_{\varepsilon/2}$, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$, existe $x \in X$ tal que:

$$d\big(f^k(x), f^k(x_i)\big) \leq \varepsilon/2,$$

para cualquier $k \in \{a_i, a_i+1, \ldots, b_i\}$ y cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Para probar que 2^f tiene especificación, sean $m \geq 2$, $K_1, K_2 \ldots, K_m \in 2^X$ y $2m$ enteros $0 \leq a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_m \leq b_m$ con $a_i - b_{i-1} \geq M_{\varepsilon/2}$, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$. Dado que f es continua y X es compacto, por el Teorema 1.3.26, se tiene que f es uniformemente continua. Más aún, por la Observación 1.2.27, obtenemos que f^k es uniformemente continua, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, b_m\}$. Así, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, b_m\}$ y para $\varepsilon/2$ existe $\delta_k > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$, se satisface que:

$$d(x, y) < \delta_k \quad \text{implica} \quad d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon/2. \tag{4.6}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{b_m}\}$. Se cumple que, para cualesquiera $x, y \in X$:

$$d(x, y) < \delta \quad \text{implica} \quad d(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon/2, \quad \text{para cada } k \in \{1, 2, \ldots, b_m\}.$$

Fijemos $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Observe que $\mathscr{C}_i = \{K_i \cap B(x, \delta) : x \in K_i\}$ es una cubierta abierta para K_i. Dado que K_i es compacto, existen $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{N_i}^i \in K_i$ de modo que $K_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_i} B(x_j^i, \delta)$.

Para m puntos $x_{t_1}^1, x_{t_2}^2, \ldots, k_{t_m}^m \in X$, donde $t_i \in \{1, 2, \ldots, N_i\}$ e $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, como f tiene especificación, existe $z_{t_1 t_2 \cdots t_m} \in X$ tal que:

$$d\big(f^k(z_{t_1 t_2, \cdots t_m}), f^k(x_{t_i})\big) < \varepsilon/2, \tag{4.7}$$

para cada $k \in \{a_i, a_i + 1, \ldots, b_i\}$ y cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Hagamos:

$$K = \big\{ z_{t_1 t_2 \cdots t_m} : t_i \in \{1, 2, \ldots, N_i\}, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \big\}.$$

Observemos que K es finito, así, $K \in 2^X$. Probemos que $H\left(2^{f^k}(K), 2^{f^k}(K_i)\right) < \varepsilon$, para cada $k \in \{a_i, a_{i+1}, \ldots, b_i\}$ y cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Para esto, tomemos $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $k \in \{a_i, a_i + 1, \ldots, b_i\}$.

Sea $t_j \in \{1, 2, \ldots, N_j\}$ arbitrario, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Por el inciso (2) de la Proposición 1.2.20 y (4.7) obtenemos que:

$$d\big(f^k(z_{t_1 t_2 \cdots t_m}), f^k(K_i)\big) \leq d\big(f^k(z_{t_1 t_2 \cdots t_m}), f^k(x^i_{t_i})\big) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Luego, $\rho\big(f^k(K), f^k(K_i)\big) \leq \varepsilon$.

Por otro lado, fijemos $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $z \in K_i$. Dado que $K_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_i} B(x^i_j, \delta)$, existe $t_i \in \{1, 2, \ldots, N_i\}$ tal que $d(z, x^i_{t_i}) < \delta$. Por (4.6), obtenemos que:

$$d\big(f^k(z), f^k(x^i_{t_i})\big) < \varepsilon/2, \text{ para cada } z \in K_i. \tag{4.8}$$

Ahora, de (4.7) y (4.8), para $t_j \in \{1, 2, \ldots, N_j\}$, con $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i\}$ se obtiene que:

$$d\big(f^k(z), f^k(z_{t_1 t_2, \cdots t_m})\big) \leq d\big(f^k(z), f^k(x^i_{t_i})\big) + d\big(f^k(x^i_{t_i}), f^k(z_{t_1 t_2, \cdots t_m})\big) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Además, por el inciso (2) de la Proposición 1.2.20, obtenemos:

$$d\big(f^k(z), f^k(K)\big) \leq d\big(f^k(z), f^k(z_{t_1 t_2, \cdots t_m})\big) < \varepsilon.$$

Luego, dado que z es un elemento arbitrario de K_i, obtenemos que $\rho\big(f^k(K_i), f^k(K)\big) \leq \varepsilon$.

Con todo hemos probado que $\rho\big(f^k(K), f^k(K_i)\big) \leq \varepsilon$ y $\rho\big(f^k(K_i), f^k(K)\big) \leq \varepsilon$. De aquí, obtenemos que $H\big(f^k(K), f^k(K_i)\big) \leq \varepsilon$, o bien, $H\left(2^{f^k}(K), 2^{f^k}(K_i)\right) \leq \varepsilon$, para cada $k \in \{a_i, a_i + 1, \ldots, b_i\}$ y cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Por lo tanto, 2^f tiene especificación. $\square$

En seguida, mostramos un resultado correspondiente a la Propiedad P.

Teorema 4.3.18. Sean X un espacio métrico compacto y $f \colon X \to X$ una función continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) 2^f tiene la Propiedad P,

(2) f tiene la Propiedad P.

Demostración. Veamos primero que (1) implica (2). Supongamos que 2^f tiene la Propiedad P y probemos que f tiene la Propiedad P. Sean $U_0, U_1 \subseteq X$ abiertos en X y no vacíos. Los conjuntos $\langle U_0 \rangle$ y $\langle U_1 \rangle$ son abiertos en 2^X y no vacíos. Dado que 2^f tiene la Propiedad P, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier función $s \colon \{0, 1, \ldots, k\} \to \{0, 1\}$, existe $K \in 2^X$ tal que:

$$K \in \left\langle U_{s(0)} \right\rangle, \ f^N(K) \in \left\langle U_{s(1)} \right\rangle, \ \ldots, \ f^{kN}(K) \in \left\langle U_{s(k)} \right\rangle. \tag{4.9}$$

Para probar que f tiene la Propiedad P tomemos $k \in \mathbb{N}$ y $s\colon \{0,1,\dots,k\} \to \{0,1\}$. Como existe $K \in 2^X$ el cual satisface (4.9), se tiene que:

$$K \subseteq U_{s(0)},\ f^N(K) \subseteq U_{s(1)},\ \dots,\ f^{kN}(K) \subseteq U_{s(k)}.$$

Tomemos $x \in K$. Se sigue que:

$$x \in U_{s(0)},\ f^N(x) \in U_{s(1)},\ \dots,\ f^{kN}(x) \in U_{s(k)}.$$

Por lo tanto, f tiene la Propiedad P.

Veamos ahora que (2) implica (1). Supongamos que f tiene la Propiedad P y probemos que 2^f tiene la Propiedad P. Sean $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \subseteq 2^X$ abiertos y no vacíos en 2^X. Por la Proposición 4.1.5, existen $U_1^0, U_2^0, \dots, U_m^0$, $U_1^1, U_2^1, \dots, U_m^1 \subseteq X$ abiertos y no vacíos en X tales que:

$$\langle U_1^0, U_2^0, \dots, U_m^0 \rangle \subseteq \mathcal{U}_0 \quad \text{y} \quad \langle U_1^1, U_2^1, \dots, U_m^1 \rangle \subseteq \mathcal{U}_1.$$

Dado que f tiene la Propiedad P, para cada $i \in \{1,2,\dots,m\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualquier función $s\colon \{0,1,\dots,k\} \to \{0,1\}$ existe $x \in X$ que satisface:

$$x \in U_i^{s(0)},\ f^N(x) \in U_i^{s(1)},\ \dots,\ f^{kN_i}(x) \in U_i^{s(k)}.$$

Hagamos $N = N_1 N_2 \cdots N_m$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $s\colon \{0,1,\dots,k\} \to \{0,1\}$. Para cada $i \in \{1,2,\dots,m\}$ consideremos $p_i = \frac{N}{N_i}$, $k_i = (k+1)p_i - 1$ y $s_i\colon \{0,1,\dots,k_j\} \to \{0,1\}$ definida por:

$$s_i(j) = \begin{cases} s(0), & \text{si} \quad 0 \leq j < p_i; \\ s(1), & \text{si} \quad p_i \leq j < 2p_i; \\ \quad \vdots & \\ s(k), & \text{si} \quad kp_i \leq j < (k+1)p_i. \end{cases}$$

Para k_i y s_i, existe $x_i \in X$ tal que:

$$x_i \in U_i^{s_i(0)},\ f^{N_i}(x_i) \in U_i^{s_i(1)},\ \dots,\ f^{k_i N_i}(x_i) \in U_i^{s_i(k_i)}.$$

Sea $K = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Notemos que $K \in 2^X$. Además, para cada $j \in \{0,1,\dots,k\}$ y para cada $i \in \{1,2,\dots,m\}$, se tiene que $jp_i \in \{0,1,\dots,k_i\}$. Luego,

$$f^{jN}(x_i) = f^{jp_i N_i}(x_i) \in U_i^{s_i(jp_i)} = U_i^{s(j)}.$$

Así,

$$f^{jN}(K) = \{f^{jN}(x_1), f^{jN}(x_2), \dots, f^{jN}(x_m)\} \in \langle U_1^{s(j)}, U_2^{s(j)}, \dots, U_m^{s(j)} \rangle \subseteq \mathcal{U}_{s(j)}.$$

Con esto,

$$K \in \mathcal{U}_{s(0)},\ \left(2^f\right)^N(K) \in \mathcal{U}_{s(1)},\ \dots,\ \left(2^f\right)^{kN}(K) \in \mathcal{U}_{s(k)}.$$

Por lo tanto, 2^f tiene la Propiedad P. $\square$

Concluimos esta sección y el capítulo presentando la siguiente tabla, la cual resume los resultados obtenidos en esta sección

Propiedad	$f \implies 2^f$	$2^f \implies f$	Resultados
Transitiva	No	Sí	Ejemplo 4.3.6 y Teorema 4.3.3, resp.
Totalmente transitiva	No	Sí	Ejemplo 4.3.7 y Teorema 4.3.4, resp.
Débilmente mezclante	Sí	Sí	Teorema 4.3.5
Suavemente mezclante	Sí	Sí	Teorema 4.3.11
Fuertemente mezclante	Sí	Sí	Teorema 4.3.15
Especificación	Sí	Sí	Teorema 4.3.17
Propiedad P	Sí	Sí	Teorema 4.3.18

Conclusiones

En esta tesis se analizaron diferentes tipos de funciones mezclantes, a saber: fuertemente mezclantes, suavemente mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivas y transitivas. Además, se incluyeron dos tipos de funciones más, que son las funciones con especificación y las funciones con la Propiedad P. Se estudiaron las relaciones que existen entre estos tipos de funciones, concluyendo en la obtención del siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Fuertemente mezclante} \arrow[d] \\
 & \text{Suavemente mezclante} \arrow[d] \\
\text{Propiedad } P \arrow[r] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[d, shift right] \\
 & \text{Totalmente transitiva} \arrow[u, shift right, "/" marking] \arrow[d, shift right] \\
 & \text{Transitiva} \arrow[u, shift right, "/" marking]
\end{tikzcd}
$$

También, en esta tesis se demostró el siguiente resultado.

Teorema. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es débilmente mezclante,

(2) para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $f^{\times m}$ es transitiva,

(3) para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $f^{\times m}$ es débilmente mezclante,

(4) para cualesquiera conjuntos $U, V \subseteq X$ abiertos y no vacíos en X, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:
$$f^k(U) \cap U \neq \varnothing \quad \text{y} \quad f^k(U) \cap V \neq \varnothing.$$

El teorema previo nos brinda varias caracterizaciones del concepto de función débilmente mezclante. Cabe mencionar que este resultado nos fue de gran utilidad en varias demostraciones (vea la prueba de la Proposición 2.2.28 y los Teoremas 2.2.34, 4.3.5).

Finalmente, con respecto al siguiente problema:

Problema. Dada una clase de funciones $\mathscr{M}$, investigar las relaciones que existan entre las siguientes proposiciones:

(a) $f \in \mathscr{M}$;

(b) $2^f \in \mathscr{M}$,

cuando $\mathscr{M}$ es alguna de las siguientes clases de funciones: fuertemente mezclantes, suavemente mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivas, transitivas, con especificación y con la Propiedad P.

Respecto a este problema, se estudió lo siguiente. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Se cumple lo siguiente:

- 2^f es débilmente mezclante si y sólo si f es débilmente mezclante.
- 2^f es suavemente mezclante si y sólo si f es suavemente mezclante.
- 2^f es fuertemente mezclante si y sólo si f es fuertemente mezclante.
- 2^f tiene especificación si y sólo si f tiene especificación.
- 2^f tiene la Propiedad P si y sólo si f tiene la Propiedad P.

Los resultados estudiados, que dan respuesta al problema principal de esta tesis, se resumen en la siguiente tabla.

Propiedad	$f \implies 2^f$	$2^f \implies f$
Transitiva	No	Sí
Totalmente transitiva	No	Sí
Débilmente mezclante	Sí	Sí
Suavemente mezclante	Sí	Sí
Fuertemente mezclante	Sí	Sí
Especificación	Sí	Sí
Propiedad P	Sí	Sí

Índice alfabético

Bibliografía

[1] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl., 156 (2009), 1013-1033.

[2] F. Barragán, A. Romero, S. Sanchez-Perales y V. M. Grijalva-Altamirano, *Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, Sistemas dinámicos III, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[3] J. E. K. Dávalos y H. M. Lango, Sistemas dinámicos discretos, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allind and Bacon, Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.

[5] S. Flores-Rodríguez, *Un acercamiento a la dinámica colectiva*, Tesis de Licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2017.

[6] J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha, A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal., 71 (2009), no. 1-2, 1-8.

[7] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 101, American Mathematical Society, 2003.

[8] V. M. Grijalva-Altamirano, *Dinámica de funciones inducidas entre productos simétricos*, Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2016.

[9] V. M. Grijalva-Altamirano, *Métrica de Hausdorff*, Tesis de Licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2013.

[10] R. Gu y W. Guo, *On mixing property in set-valued discrete systems*, Chaos, Sol. & Fract., 28 (2006), 747-754.

[11] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[12] G. Higuera y A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc., 37 (2011), 367-401.

[13] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[14] A. Illanes y S. B. Nadler, *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[15] I. L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, 1973.

[16] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemáticas Pura e Aplicada, 1997.

[17] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.

[18] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[19] A. Rojas-Carrasco, *Nociones de transitividad topológica en productos simétricos generalizados*, Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2017.

[20] H. Román-Flores, *A note on transitivity in set-valued discrete systems*, Chaos, Sol. & Fract., 17 (2003), 99-104.

[21] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3ra edición, McGraw-Hill, 1987.