UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Espacios Cuasi-Métricos y Espacios Normados Asimétricos de Dimensión Finita

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

RICARDO VÁZQUEZ HUERTA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CUAUHTÉMOC HÉCTOR CASTAÑEDA ROLDAN

CODIRECTOR DE TESIS:

DRA. LUZ DEL CARMEN ÁLVAREZ MARÍN

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, DICIEMBRE 2018.

Índice

Agradecimientos

Agradezco a toda mi familia por su apoyo incondicional, en especial a mis padres por ser los principales promotores de mis sueños, gracias a ellos por cada día confiar y creer en mí y en mis expectativas. Gracias por siempre desear y anhelar lo mejor para mi vida, gracias por cada consejo y por cada una de sus palabras que me guiaron durante mi vida.

Gracias a mis asesores y a cada uno de mis profesores, por cada detalle y momento dedicado para aclarar cualquier tipo de duda que me surgiera y por haberme permitido el desarrollo de esta tesis. Sobre todo, gracias por su amistad.

Gracias a mis amigos que siempre estuvieron ahí para apoyarme y alentarme.

A Dios gracias, porque me permitió despertar no solo con vida, sino que también me permitió continuar con salud, fuerzas y empeño a lo largo de este proyecto.

Simbología

Notación	**Significado** (eventualmente puede tener otro uso)
$\mathbb{R}^+$	$\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$
d	métrica
d_A	Acotación de la métrica d
(X, d)	Espacio métrico
$B(x, r)$	Bola abierta centrada en x y radio r
$B[x, r]$	Bola cerrada centrada en x y radio r
$S(x, r)$	Esfera con centro en x y radio r
ρ	cuasi-(semi)métrica
$\overline{\rho}$	cuasi-semimétrica (cuasi-métrica) conjugada de ρ
ρ^s	semimétrica (métrica) $máx\{\rho, \overline{\rho}\}$
(X, ρ)	Espacio cuasi-(semi)métrico
p	norma y/o seminorma asimétrica
$\overline{p}$	norma y/o seminorma asimétrica conjugada de p
p^s	(semi)norma $máx\{p, \overline{p}\}$
ρ_p	cuasi-(semi)métrica inducida por la (semi)norma asimétrica p
(X, p)	Espacio normado asimétrico

Simbología

$B_\rho(x,r)$	Bola abierta con centro en x y radio r, respecto de ρ
$B_\rho[x,r]$	Bola cerrada con centro en x y radio r, respecto de ρ
$B_p(x,r)$	Bola abierta con centro en x y radio r, respecto de p
$B_p[x,r]$	Bola cerrada con centro en x y radio r, respecto de p
τ	Topología
τ_ρ	Topología generada por ρ
(X,τ)	Espacio topológico
(x_n)	sucesión
$x_n \to x$	sucesión convergente a x
$x_n \xrightarrow{\rho} x$	sucesión convergente a x respecto a ρ
$P^{\lozenge}(x)$	seminorma simétrica mayorizada por p
$\rho_1 \equiv \rho_2$	cuasi-métricas equivalentes
$p \equiv q$	normas asimétricas equivalentes

Introducción

La creación de las teorías abstractas de espacios métricos, normados, etc., donde sólo se fijan los axiomas a los que obedecen estos conceptos, permite deducir teoremas o un grupo de estos que después pueden aplicarse a teorías particulares y así evitar repetir para cada teoría particular el mismo razonamiento.

Si omitimos la condición de simetría en la definición de una (semi)métrica, llegamos a la noción de una cuasi-(semi)métrica. Las funciones distancias asimétricas ya han sido consideradas por Hausdorff a principios del siglo pasado, cuando en su libro clásico sobre Teoría de conjuntos [21], discutió la métrica de Hausdorff de un espacio métrico. Más tarde, fueron tratados por Niemytzki [23] cuando exploró la interacción de los diversos supuestos en la axiomatización habitual de un espacio métrico. Pero Wilson [24] fue quien introdujo el término cuasi-métrica y observó que las convergencias de sucesiones en los espacios cuasi-métricos surgen de tres formas naturales.

La falta de simetría en la definición de espacios cuasi-métricos causa una gran cantidad de problemas, principalmente en relación con la completitud, la compacidad y la acotación total en tales espacios. Por ejemplo, existen varias nociones de completitud en los espacios cuasi-métricos, todas coincidentes con la noción habitual de completitud en el caso de los espacios métricos, cada una de ellas con sus ventajas y debilidades. Como ejemplo, Doitchinov [4] encontró una teoría de completitud con muchas buenas propiedades para una subclase de espacios cuasi-uniformes. Él estudió una propiedad ahora llamada completitud de Doitchinov o D-completitud. Doitchinov observó que para obtener una teoría de completitud razonable es necesario poner restricciones en la clase de espacios cuasi-uniformes considerados. Primero, desarrolló una teoría de completitud invariante conjugada para sus llamados espacios cuasi-métricos balanceados. Para los espacios métricos, la construcción produce la completitud métrica habitual. También, la compacidad contable, la compacidad secuencial y la compacidad no coinciden en los espacios cuasi-métricos, en contraste con el caso métrico.

Ahora, desde que las distancias asimétricas fueron consideradas y discutidas por Hausdorff a principios del siglo XX y desde que Wilson introdujo el término cuasi-métrica en 1931 mucho se ha trabajado al respecto y muchos han sido los progresos. Prueba de ello consta en dos monografías, la primera escrita por Murdeshwar y Naimpally (Espacios toplógicos cuasi-uniformes) [26] y la segunda por Fletcher y Lindgren (Espacios cuasi-uniformes) [27]. La primera fue escrita en 1966 y la segunda en 1982. Por su parte Reilly [25] en 1992 compiló una bibliografía sobre artículos que tratan con los espacios cuasi-métricos. Un libro mucho más reciente y que también recopila una gran cantidad de resultados, el cual para evitar malos entendidos formula incluso los artículos más viejos en terminología moderna se lo debemos a Cobzas [5]. Además en dicho libro escrito en el 2013, se ajustan los resultados de los diversos artículos a los conceptos usados y elegidos por Cobzas de lo que son una cuasi-(semi)métrica y una (semi)norma asimétrica. Esto debido a que dichos conceptos pueden aparecer con otro nombre o cambiar ligeramente en cuanto a las propiedades que deben cumplir. Este último texto es el que utilizaremos como libro de cabecera para este trabajo y por ende se adoptaran los conceptos y la terminología ahí utilizados.

Los libros antes mencionados fueron escritos en idioma inglés, el escrito por Cobzas en particular y que elegimos como nuestro libro de texto principal también carece de ejemplos sencillos para aquellos que pretendemos incursionar en el tema de los espacios asimétricos; es por ello que uno de los objetivos de este trabajo de tesis es hacer una mínima contribución a la poca información en español que existe y mostrar ejemplos sencillos, tanto para comprender como para visualizar gráficamente algunos aspectos de la teoría. Sin embargo, nuestro principal objetivo es deducir para que teoremas o grupo de teoremas de los espacios normados de dimensión finita se puede plantear su equivalente en los espacios asimétricos y bajo que condiciones se cumplen. Como por ejemplo, los teoremas de normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$ y en dimensión finita, que se cumplen en el caso simétrico.

Para ello en el capítulo 1 recopilaremos conceptos básicos y resultados que se cumplen en los espacios métricos y en los espacios normados en dimensión finita, algunos de los cuales se tratarán de trasladar al contexto asimétrico. En el capítulo 2 prescindiremos de la simetría en los conceptos de métrica y norma, para adentraremos en los espacios cuasi-métricos y normados asimétricos y mostrar los resultados obtenidos.

En el capítulo 3 damos una muy breve introducción a espacios aún más generales como son los espacios cuasi$-k-$métricos y los espacios $k-$normados asimétricos, para finalmente mencionar lo que podemos concluir de este trabajo de tesis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espacios Métricos

Definición 1 *Un espacio métrico es un par* (X, d) *, donde* X *es un conjunto y* d *es una métrica sobre* X*, esto es, una función definida sobre* $X \times X$ *tal que para toda* $x, y, z \in X$ *tenemos:*

i) d *es real, finita y no negativa.*
ii) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si,* $x = y$*.*
iii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Simetría).*
iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Desigualdad del triángulo).*

En lugar de (X, d), simplemente escribiremos X cuando no exista posibilidad de confusión.

Definición 2 *Un subespacio* (Y, d) *de* (X, d) *es obtenido si tomamos el subconjunto* $Y \subset X$ *y restringimos* d *a* $Y \times Y$*; luego la métrica sobre* Y *es la restricción* $\widetilde{d} = d \mid_{Y \times Y}$ *.* $\widetilde{d}$*, es llamada la métrica inducida sobre* Y *por* d*.*

Ejemplo 1 $\mathbb{R}$ *es un espacio métrico, con la métrica usual definida por*
$d(x, y) = |y - x|$ *.*

Ejemplo 2 $X = (0, 1)$ *con* $d(x, y) = |y - x|$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}$*.*

Ejemplo 3 *El plano euclidiano* $\mathbb{R}^2$. *El espacio métrico* $\mathbb{R}^2$, *llamado el plano euclidiano, es obtenido si tomamos el conjunto de pares ordenados* $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, *etc., y la métrica euclidiana definida por*

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Definición 3 *Dado un espacio métrico* X, *un punto* $x_0 \in X$ *y un número real* $r > 0$, *definimos los tres tipos de conjuntos siguientes:*

a) $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$ *(Bola abierta)*

b) $B[x_0, r] = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$ *(Bola cerrada)*

c) $S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) = r\}$ *(Esfera)*

En los tres casos, x_0 *es llamado el centro y* r *el radio.*

Ejemplo 4 *La bola unitaria* $B[0, 1]$ *con la métrica euclidiana es un subespacio métrico de* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 5 $\mathbb{R}^n$ *con la métrica*

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2},$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *es un espacio métrico.*

Ejemplo 6 *La bola cerrada centrada en el origen y de radio* r, *con la métrica*

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2},$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, *es un subespacio métrico de* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 7 *Sea* $X \neq \emptyset$. *Definimos*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y, \\ 1 \text{ si } x \neq y, \end{cases} \quad x, y \in X.$$

Es claro que (X, d) *es un espacio métrico, y* d *es llamada la métrica discreta. Con este ejemplo podemos observar que cualquier conjunto no vacío puede ser dotado de una métrica.*

Sea (X, d) un espacio métrico. Se puede verificar que

$$d_A(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, x, y \in X,$$

es una métrica en X a la cual llamaremos la acotación de la métrica d en X. Además $d_A(x, y) < 1$, para todo $x, y \in X$.

Ejemplo 8 *Mostraremos en detalle el ejemplo 7 para el caso particular donde* $X = \mathbb{R}$ *y* $d(x, y) = |y - x|, x, y \in \mathbb{R}$.

$$d_A(x, y) = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Las propiedades $(i), (ii)$ *y* (iii) *de la definición de métrica se cumplen de manera trivial por la definición de valor absoluto. Para verificar la desigualdad del triángulo, sean* $A = |x - z|, B = |z - y|$ *y* $C = |x - y|$.

Queremos mostrar que $\frac{C}{1+C} \leq \frac{A}{1+A} + \frac{B}{1+B}$.

Como $C \leq A + B$ *y* $A, B \geq 0$, *tenemos* $\frac{C}{1+C} \leq \frac{C+AB}{1+C} = 1 - \frac{1-AB}{1+C}$ $\leq 1 - \frac{1-AB}{1+A+B+AB} = \frac{A}{1+A} + \frac{B}{1+B}$.

d_A *se llama la métrica acotada en* $\mathbb{R}$, *ya que para todo* $x, y \in \mathbb{R}$, $d_A(x, y) < 1$.

1.1.1 Conjuntos Abiertos, Cerrados, Vecindades.

Definición 4 *Un subconjunto* M *de un espacio métrico* X *se dice que es abierto si para cada punto* x *de* M *existe una bola abierta con centro en* x, *contenida en* M.

Definición 5 *Un subconjunto* K *de* X *se dice que es cerrado si su complemento (en* X*) es abierto, esto es,* $K^c = X - K$ *es abierto.*

Definición 6 *Una bola abierta* $B(x_0, \varepsilon)$ *de radio* ε *es frecuentemente llamada una* $\varepsilon -$ *vecindad de* x_0. *(Aqui,* $\varepsilon > 0$, *por la definición 3.) Por una vecindad de* x_0 *entendemos cualquier subconjunto de* X, *el cual contiene una* $\varepsilon -$ *vecindad de* x_0.

Directamente de la definición podemos ver que cada vecindad de x_0 contiene a x_0; en otras palabras, x_0 es un punto de cada una de sus vecindades. Y si N es una vecindad de x_0 y $N \subset M$, entonces M es también una vecindad de x_0.

Definición 7 *Llamamos a* x_0 *un punto interior de un conjunto* $A \subset X$ *si* A *es una vecindad de* x_0. *El interior de* A *es el conjunto de todos los puntos interiores de* A *y puede ser denotado por* A° *o* $Int(A)$.

$Int(M)$ es abierto y es el conjunto abierto mas grande contenido en M.

Definición 8 *Sea M un subconjunto de un espacio métrico X. Un punto x_0 de X (el cual puede o no, ser un punto de M) es llamado un punto de acumulación de M (o punto límite de M) si cada vecindad de x_0 contiene al menos un punto $y \in M$ distinto de x_0. El conjunto consistente de los puntos de M y los puntos de acumulación de M es llamado la cerradura de M, es denotado por $\overline{M}$ (o $cl(M)$ si no hay confusión) y es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene a M.*

Definición 9 *Un punto frontera x_0 de un conjunto $M \subset X$, es un punto de X (el cual puede o no, pertenecer a M) tal que cada vecindad de x_0 contiene puntos de M, así como también puntos que no pertenecen a M; la frontera de M es el conjunto de todos los puntos frontera de M.*

No es difícil mostrar que la colección de todos los subconjuntos abiertos de un espacio métrico X, llamémosle τ, tiene las siguientes propiedades:

$(T1)$ $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.

$(T2)$ La unión de cualesquiera miembros de τ es un miembro de τ.

$(T3)$ La intersección de un número finito de miembros de τ es un miembro de τ.

Demostración: $(T1)$ se sigue de notar que $\emptyset$ es un conjunto abierto, pues $\emptyset$ no tiene elementos; y obviamente X es abierto.

Probemos $(T2)$. Cualquier punto x de la unión U de conjuntos abiertos pertenece a (al menos) uno de estos conjuntos, llamemosle M, y M contiene una bola B alrededor de x pues M es abierto. Entonces $B \subset U$, por la definición de unión. Esto prueba $(T2)$.

Finalmente, si y es cualquier punto de la intersección de conjuntos abiertos $M_1, ..., M_n$, entonces cada M_j contiene una bola alrededor de y y la mas pequeña de estas bolas está contenida en esa intersección. Esto prueba $(T3)$. $\blacksquare$

En general se tiene:

Definición 10 *Se define un espacio topológico (X, τ), como un conjunto X y una colección τ de subconjuntos de X, donde τ satisface los axiomas $(T1)$ a $(T3)$. La colección τ es llamada una topología para X, los elementos de τ reciben el nombre de conjuntos abiertos de X y a los elementos de X se les suele llamar puntos.*

De esta definición tenemos: *Un espacio métrico es un espacio topológico.*

Otro ejemplo de una topología es la topología cofinita. Sea X un conjunto cualquiera y definamos τ como la colección formada por el conjunto vacío junto con aquellos subconjuntos $A \subset X$ tales que $A^c = X \backslash A$ es finito. τ es una topología sobre X que se conoce como la topología cofinita y se representa por τ_{cf}.

Observación 1 *Formalmente un espacio topológico es un par ordenado* (X, τ), *con* τ *una topología. Pero por lo general, cuando no haya riesgo de confusión vamos a denotar al espacio topológico* (X, τ) *simplemente por* X *dejando implícitamente claro que hay una topología en* X.

Definición 11 *Dado un conjunto* X, *sean* τ_1 *y* τ_2 *dos topologías definidas sobre* X. *Si todo abierto de* τ_1 *es un abierto de* τ_2, *es decir,* $\tau_1 \subset \tau_2$, *diremos que* τ_2 *es más fina que* τ_1.

Así, en un espacio topológico X el conjunto vacío y X son abiertos, la unión de cualquier familia de abiertos es un conjunto abierto, y la intersección de toda familia finita de abiertos es también un conjunto abierto.

Definición 12 *Sea* X *es un espacio topológico.*

1. *Dado* $x \in X$, *diremos que* U *es vecindad de* x, *si* U *es un abierto en* X *que contiene a* x.

2. *Sea* $A \subset X$. *Se dice que* x *es un punto interior de* A, *si existe una vecindad* U *de* x *tal que* $U \subset A$.

3. *El conjunto de los puntos interiores de* A *se llama interior de* A *y se denota por* $IntA$ *o* A°.

De esta definición se sigue inmediatamente que:
$IntA = \bigcup \{U : U \subset A, U \text{ es abierto}\}$.
En otras palabras, $IntA$ es el subconjunto abierto más grande contenido en A.

Definición 13 *Sea X un espacio topológico y (x_n) una sucesión en X. Se dice que (x_n) converge al punto $x \in X$, si para toda vecindad U de x, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in U$ para todo $n > M$. Este hecho se denota escribiendo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ o bien $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.*

Definición 14 *Sean X un espacio topológico y $\mathfrak{B}$ una familia de abiertos. La familia $\mathfrak{B}$ se llama base para la topología de X si para cualquier abierto U, existe una subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \mathfrak{B}$, tal que $U = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. A los elementos de la base $\mathfrak{B}$ se les llama abiertos básicos.*

Una subcolección S de una topología τ en X es una subbase para (X, τ) si $\mathfrak{B} = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq S$ y $0 < |\mathcal{A}| < \aleph_0\}$ es una base para τ. Es decir, $S \subseteq \tau$ es una subbase para τ si y sólo si, para cada $A \in \tau\setminus\{\emptyset\}$ y para cada $x \in A$ existe $\mathcal{A} \subseteq S$ finita no vacía tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.

Definición 15 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos indexados por un conjunto cualquiera de índices $\mathcal{A}$. Sea Γ el conjunto de todos los subconjuntos de $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ de la forma*

$$\langle U_{\alpha_0} \rangle = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha,$$

donde U_{α_0} es un subconjunto abierto en X_{α_0} y $U_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_0$. La topología en $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ generada por Γ como sub-base recibe el nombre de topología de Tychonoff o topología producto. El espacio $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ provisto de dicha topología se llama producto de Tychonoff o producto topológico de los espacios $X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$.

Observación 2 *Obsérvese que la base generada por Γ como sub-base, es la colección de todos los subconjuntos de la forma $U = \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, en donde U_α es abierto en X_α y $U_\alpha = X_\alpha$ salvo para un número finito de índices en $\mathcal{A}$, digamos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. En otras palabras, $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle U_{\alpha_i} \rangle$ y lo denotaremos de la siguiente forma $U = \langle U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n} \rangle$. Los conjuntos $\langle U_\alpha \rangle$ se llaman sub-básicos canónicos y los conjuntos $\langle U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n} \rangle$ se llaman básicos canónicos.*

1.1.2 Axiomas de Separación

1. **Espacios** T_0, T_1 y T_2.

El primer axioma de separación fue introducido por A. N. Kolmogoroff, y es conocido como axioma T_0.

Definición 16 *Un espacio topológico* (X, τ) *será llamado espacio* T_0 *(también se dice que* τ *es una topología* T_0*) si para cada par de puntos distintos* x *y* y *de* X *existe un subconjunto abierto* U *tal que* U *contiene a uno de los puntos* x *o* y*, pero no al otro; esto es, para cada par de puntos distintos* x *y* y *de* X*, existe un abierto* U *tal que* $|U \cap \{x, y\}| = 1$*.*

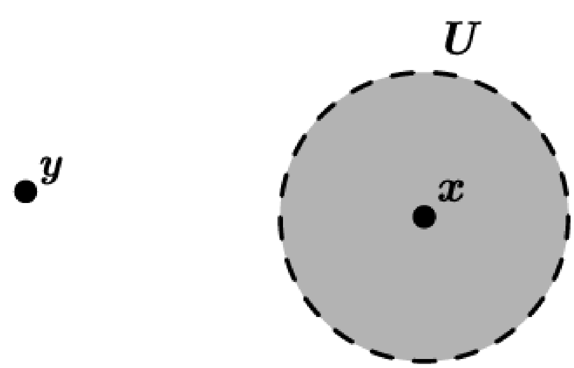

Figura 1.1 Dados dos puntos diferentes x y y, es posible hallar un abierto que contenga a uno de los puntos pero no al otro.

Ejemplo 9 *Cualquier espacio discreto y cualquier espacio euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *con la topología usual es* T_0 *y toda topología más fina que una topología* T_0 *es también una topología de este tipo.*

Ejemplo 10 *Un ejemplo clásico de un espacio* T_0 *es el espacio de Sierpiński* $S = (X, \tau)$*, donde* $X = \{0, 1\}$ *y* $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$*. El espacio de Sierpiński es un espacio* T_0 *porque* $\{0\}$ *es un elemento de la topología en* X *que contiene a* 0 *pero no al* 1*, y los únicos elementos de* X *son* 0 *y* 1*.*

Para que una topología cumpla con el axioma de separación T_0 se tiene que poder garantizar que las cerraduras de conjuntos unipuntuales distintos sean distintas:

Teorema 1 *Un espacio topológico* (X, τ) *es un espacio* T_0 *si y sólo si para todo* x, $y \in X$ *con* $x \neq y$, *se tiene que* $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$.

Este y otros resultados posteriores que mencionaremos pueden ser consultados en textos de topología general, como por ejemplo en [14], [15] , [16], [18], [19], [20] o algún otro.

El segundo axioma de separación y las propiedades de los espacios que lo verifican, fueron estudiados por primera vez en 1907 por F. Riesz.

Definición 17 *Diremos que un espacio topológico* (X, τ) *es un espacio* T_1, *o que* τ *es una topología* T_1, *si para cualesquiera puntos distintos* x *y* y *de* X, *existen subconjuntos abiertos* U *y* V *de* X *tales que* $x \in U \setminus V$ *y* $y \in V \setminus U$.

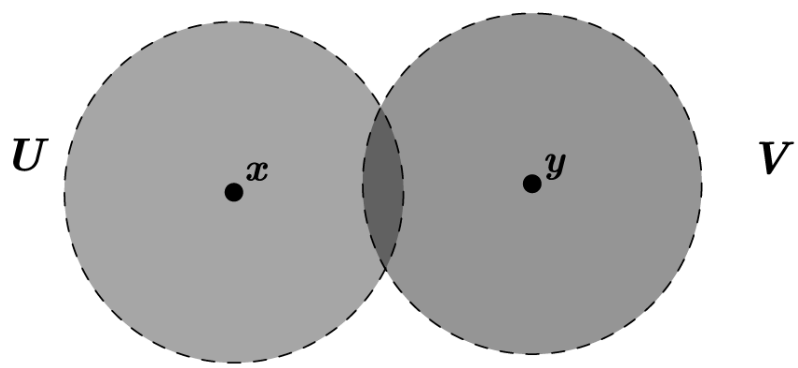

Figura 1.2 En los espacios T_1, es posible que existan puntos x e y distintos, tales que todas las vecindades de x intersecten a todas las vecindades de y. Sin embargo, existe una vecindad de x que no contiene a y y viceversa.

Ejemplo 11 *Considere en* $\mathbb{N}$ *la familia* $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\}$. *No es muy difícil verificar que* τ *es una topología en* $\mathbb{N}$. *El espacio topológico* $(\mathbb{N}, \tau)$ *es* T_0. *Es claro que todo espacio* T_1 *es un espacio* T_0. *Pero el recíproco no es cierto, y el espacio de los segmentos iniciales* $(\mathbb{N}, \tau)$ *es un ejemplo de un espacio* T_0 *pero no* T_1 *porque si* n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ *son elementos para los cuales* $n_1 < n_2$, *entonces cualquier abierto que contenga al número natural* n_2 *siempre contiene al número* n_1.

Algo que caracteriza a los espacios T_1 es que en todos ellos los conjuntos unipuntuales son siempre subconjuntos cerrados.

Teorema 2 *Un espacio topológico (X,τ) es un espacio T_1 si y sólo si, para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X.*

Corolario 1 *Un espacio topológico (X,τ) es T_1 si y sólo si, todo subconjunto finito de X es un subconjunto cerrado.*

Corolario 2 *(X,τ) es un espacio T_1 si y sólo si, τ contiene a la topología cofinita.*

Corolario 3 *Si (X,τ) es un espacio para el cual se tiene que toda sucesión definida en él tiene a lo más un límite, entonces X es un espacio T_1.*

Una consecuencia del teorema 2:

Proposición 1 *Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio topológico X.*

(1) X es un espacio T_1;

(2) cada $A \subseteq X$ es igual a la intersección de todos los subconjuntos abiertos de X que lo contienen;

(3) para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es igual a la intersección de todos los subconjuntos abiertos de X que lo contienen.

Proposición 2 *Sea (X,τ) un espacio T_1. Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de un subconjunto E de X si y sólo si, cada abierto que contiene a x contiene también una cantidad infinita de puntos del conjunto E.*

La condición adicional que introdujo Hausdorff (1914) en la definición de sus espacios topológicos, es una forma de separar puntos que son distintos y es conocida como axioma de separación T_2 (o axioma de separación de Hausdorff).

Definición 18 *Un espacio topológico (X,τ) es un espacio de Hausdorff o T_2 si X satisface la siguiente condición: para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.*

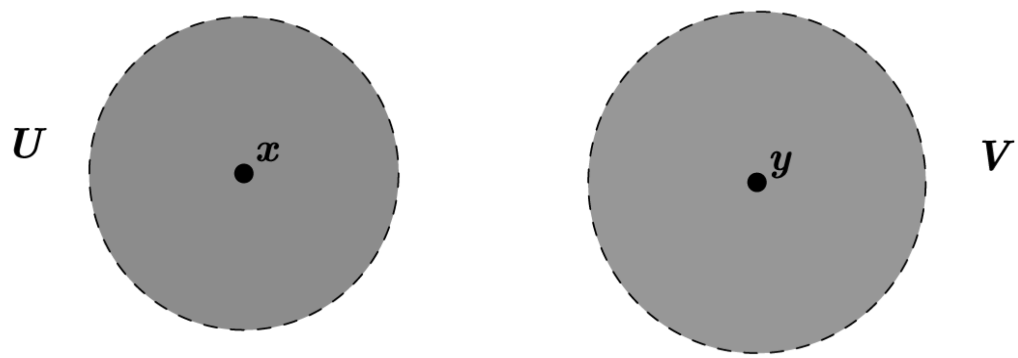

Figura 1.3 En los espacios de Hausdorff , dos puntos diferentes x y y, siempre tienen vecindades que los contienen y que son ajenas entre sí.

No es difícil verificar que todo espacio T_2 es un espacio T_1 (y por lo tanto, también un espacio T_0).

Ejemplo 12 *Todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff. Efectivamente, supongamos que* (X, d) *es un espacio métrico y denotemos con el símbolo* τ_d *a la topología generada por la métrica* d. *Si* x, $y \in X$ *son puntos distintos de* X, *entonces* $\varepsilon = d(x, y) > 0$. *Note ahora que* $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ *y* $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ *son subconjuntos abiertos ajenos de* X *que contienen a* x *y a* y, *respectivamente. Como consecuencia de esto, los espacios* $\mathbb{R}^n$ *son espacios de Hausdorff.*

Pero la implicación $T_2 \Rightarrow T_1$ no puede ser revertida.

Ejemplo 13 *Si* X *es un conjunto infinito con la topología cofinita* τ_c, *entonces cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos* U, V *de* X *siempre se intersectan, porque si ocurriera que* $U \cap V = \emptyset$ *entonces* $X = X \setminus \emptyset = X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, *y por la definición de la topología cofinita, los subconjuntos* $X \setminus U$ *y* $X \setminus V$ *son finitos. En consecuencia, la topología* τ_c *no es* T_2; *pero sabemos que sí es* T_1.

Ejemplo 14 *Toda topología más fina que una topología* T_2 *dada, es una topología* T_2.

Teorema 3 *Sea* (X, τ) *un espacio de Hausdorff . Si* (x_n) *es una sucesión convergente, entonces* (x_n) *converge a un solo punto.*

Teorema 4 *Si* $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ *es una familia de espacios topológicos no vacíos, entonces el producto* $\prod\limits_{j \in J} X_j$ *es un espacio* T_k $(k = 0, 1, 2)$ *si y sólo si, cada espacio* X_j *es un espacio* T_k.

1.1.3 Convergencia de Sucesiones, Sucesiones de Cauchy y Espacios Completos.

Definición 19 *Una sucesión* (x_n) *en un espacio métrico* $X = (X, d)$ *se dice que es convergente o que converge si hay un* $x \in X$ *tal que* $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$, x *es llamado el límite de* (x_n) *y escribimos* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, *o simplemente,* $x_n \longrightarrow x$.

En tal caso, decimos que (x_n) converge a x o que tiene límite x. Si (x_n) no es convergente, se dice que es divergente.

Definición 20 *Llamamos a un subconjunto no vacío* $M \subset X$ *un conjunto acotado si su diámetro*

$$\delta(M) = \sup_{x,y \in M} d(x, y)$$

es finito. Y llamamos a una sucesión (x_n) *en* X *una sucesión acotada si el correspondiente conjunto de puntos es un subconjunto acotado de* X.

Observación 3 M *está acotado si y sólo si, está contenido en una bola. De hecho, si* M *está acotado, para cada* $z \in X$ *se puede encontrar* $r \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $M \subset B(z, r)$.

Lema 1 *Sea* $X = (X, d)$ *un espacio métrico. Entonces:*
a) *Cualquier sucesión convergente en* X *está acotada y su límite es único.*
b) *Si* $x_n \longrightarrow x$ *y* $y_n \longrightarrow y$ *en* X, *entonces* $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$.

Demostración.

a) *Supongamos que* $x_n \longrightarrow x$. *Entonces, tomando* $\varepsilon = 1$, *podemos encontrar una* N *tal que* $d(x_n, x) < 1$ *para toda* $n > N$. *Por tanto por la desigualdad del triángulo, para toda* n *tenemos* $d(x_n, x) < 1 + a$ *donde*

$$a = m\acute{a}x\{d(x_1, x), ..., d(x_n, x)\}.$$

Esto demuestra que (x_n) *está acotada. Asumiendo que* $x_n \longrightarrow x$ *y* $x_n \longrightarrow z$, *obtenemos de la desigualdad triangular*

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \longrightarrow 0 + 0$$

y la unicidad del límite $x = z$ *se sigue de la definición 1 ii).*

b) *Por la desigualdad del triángulo generalizada tenemos que*

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

Por tanto obtenemos

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

y una desigualdad similar se obtiene intercambiando x_n *y* x, *así como también* y_n *y* y, *y multiplicando por* -1. *Juntas nos dan,*

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \longrightarrow 0,$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. ∎

La siguiente definición fue dada por primera vez por Fréchet (1906).

Definición 21 *Una sucesión* (x_n) *en un espacio métrico* (X, d) *se dice que es de Cauchy (o fundamental), si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una* $N = N(\varepsilon)$ *tal que* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ *para cada* $m, n > N$.

Definición 22 *El espacio* X *se dice ser completo si cada sucesión de Cauchy en* X *converge, esto es, tiene un límite el cual es un elemento de* X.

Teorema 5 *Toda sucesión convergente en un espacio métrico, es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. *Si* $x_n \longrightarrow x$, *entonces para cada* $\varepsilon > 0$ *hay una* $N = N(\varepsilon)$ *tal que*

$$d(x_n, x) < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para toda } n > N.$$

Por lo tanto, por la desigualdad triangular obtenemos para $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto muestra que (x_n) *es de Cauchy.* ∎

Teorema 6 *Sea M un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d) y $\overline{M}$ su cerradura. Entonces:*

a) *$x \in \overline{M}$ si y sólo si, hay una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \longrightarrow x$.*

b) *M es cerrado si y sólo si, $x_n \in M, x_n \longrightarrow x$ implica que $x \in M$.*

Demostración. a) *Sea $x \in \overline{M}$. Si $x \in M$, una sucesión de ese tipo es $(x, x, ...)$. Si $x \notin M$, es un punto de acumulación de M. Por lo tanto, para cada $n = 1, 2, ...$ la bola $B(x, \frac{1}{n})$ contiene una $x_n \in M$, y $x_n \longrightarrow x$ porque $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.*

Análogamente, si (x_n) está en M y $x_n \longrightarrow x$, entonces $x \in M$ o cada vecindad de x contiene puntos $x_n \neq x$, así que x es un punto de acumulación de M. Por lo tanto $x \in \overline{M}$, por la definición de la cerradura.

b) M es cerrado si y sólo si, $M = \overline{M}$, así que b) se sigue de a). ■

Teorema 7 *Un subespacio M de un espacio métrico completo X, es completo, si y sólo si, el conjunto M es cerrado en X.*

Demostración. *Sea M completo. Por Teorema 6 a), para cada $x \in \overline{M}$ hay una sucesión (x_n) en M la cual converge a x. Como (x_n) es de Cauchy por Teorema 5 y M es completo, (x_n) converge en M, el límite es único por Lema 1. Por lo tanto $x \in M$. Esto prueba que M es cerrado porque el $x \in \overline{M}$ es arbitrario.*

Análogamente, sea M cerrado y (x_n) de Cauchy en M. Entonces $x_n \longrightarrow x \in X$, lo cual implica que $x \in \overline{M}$ por Teorema 6 a) y $x \in M$ pues $M = \overline{M}$ por hipótesis. Por lo tanto, la sucesión de Cauchy arbitraria (x_n) converge en M, lo cual prueba la completitud de M. ■

Ejemplo 15 *$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ son espacios métricos completos.*

Recordemos que una sucesión (x_n) de reales converge en $\mathbb{R}$ si y sólo si, satisface el criterio de convergencia de Cauchy, esto es, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ dado hay una $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \qquad \text{para toda } m, n > N.$$

Aquí $|x_m - x_n|$ es la distancia $d(x_m, x_n)$ de x_m a x_n sobre la línea real $\mathbb{R}$. Por lo tanto, se reescribe la desigualdad del criterio de Cauchy de la siguiente forma

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad (m, n > N).$$

Y si una sucesión (x_n) satisface la condición del criterio de Cauchy, podemos llamarle una sucesión de Cauchy. Entonces el criterio de Cauchy *simplemente dice que una sucesión de números reales converge sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si, es una sucesión de Cauchy.*

Ahora, recordemos que la métrica sobre $\mathbb{R}^n$ (la métrica euclidiana) está definida por

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j - \eta_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $x = \left(\xi_j\right)$ y $y = \left(\eta_j\right)$. Consideremos cualquier sucesión de Cauchy (x_m) en $\mathbb{R}^n$, escribiendo $x_m = \left(\xi_1^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}\right)$. Como (x_m) es de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ hay una N tal que

$$d\left(x_m, x_r\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(r)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \qquad (m, r > N). \tag{1}$$

Elevando al cuadrado, tenemos para $m, r > N$ y $j = 1, ..., n$

$$\left(\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(r)} \right)^2 < \varepsilon^2 \qquad y \qquad \left| \xi_j^{(m)} - \eta_j^{(r)} \right| < \varepsilon.$$

Esto muestra que para cada j fija, $(1 \leq j \leq n)$, la sucesión $\left(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...\right)$ es una sucesión de Cauchy de números reales. La cual converge pues $\mathbb{R}$ es completo, digamos que $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ cuando $m \longrightarrow \infty$. Usando estos n límites, definimos $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Claramente, $x \in \mathbb{R}^n$. De (1), con $r \longrightarrow \infty$,

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon \qquad (m > N).$$

Esto muestra que x es el límite de (x_m) y prueba la completitud de $\mathbb{R}^n$, porque (x_m) es una sucesión de Cauchy arbitraria.

1.2 Espacios Normados

Definición 23 *Un espacio vectorial (o espacio lineal) X sobre un campo K, es un conjunto no vacío X de elementos $x, y, ...$(cuyos elementos son llamados vectores), junto con dos operaciones algebraicas. Estas operaciones son llamadas suma de vectores y multiplicación de vectores por escalares, esto es, por elementos de K, que cumplen 10 propiedades:*

(i) *Si $x, y \in X$, entonces $x + y \in X$ (cerradura bajo la suma).*

(ii) *Para todo $x, y, z \in X, (x + y) + z = x + (y + z)$ (ley asociativa de vectores).*

(iii) *Existe un único vector $0 \in X$ tal que para todo $x \in X, x+0 = 0+x = x$ (el 0 se llama vector cero o neutro aditivo).*

(iv) *Si $x \in X$, existe un único vector $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$ ($-x$ se llama inverso aditivo de x).*

(v) *Si $x, y \in X$, entonces $x + y = y + x$ (ley conmutativa de la suma de vectores).*

(vi) *Si $x \in X$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in X$ (cerradura bajo la multiplicación por un escalar).*

(vii) *Si $x, y \in X$ y α es un escalar, entonces $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ (primera ley distributiva).*

(viii) *Si $x \in X$ y α, β son escalares, entonces $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ (segunda ley distributiva).*

(ix) *Si $x \in X$ y α, β son escalares, entonces $\alpha (\beta x) = (\alpha\beta) x$ (ley asociativa de la multiplicación por escalares).*

(x) *Para cada vector $x \in X, 1x = x$.*

K es llamado el campo escalar (o campo de coeficientes) del espacio vectorial X. X es llamado un espacio vectorial real si $K = \mathbb{R}$ (el campo de los números reales).

Definición 24 *Un subespacio de un espacio vectorial X es un subcojunto no vacío Y de X tal que para toda $y_1, y_2 \in Y$ y todo escalar α, β tenemos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Luego, Y es un espacio vectorial, siendo las dos operaciones algebraicas las inducidas por X.*

Un subespacio especial de X es el espacio impropio $Y = X$. Cualquier otro subespacio de X $(\neq \{0\})$ es llamado propio.

Otro subespacio especial de cualquier espacio vectorial es $Y = \{0\}$.

Definición 25 *Una combinación lineal de vectores $x_1, ..., x_n$ de un espacio vectorial X es una expresión de la forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, donde los coeficientes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son escalares.*

Definición 26 *Para cualquier subconjunto no vacío $M \subset X$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de M es llamado el generado de M, denotado por $gen\,(M)$ o $span\,(M)$.*

Es fácil ver que $Y = gen\,(M)$ es un subespacio de X, y decimos que Y es generado por M.

A continuación, dos conceptos que suelen utilizarse una y otra vez.

La dependencia e independencia lineal de un conjunto M dado de vectores $x_1, ..., x_r$, $(r \geq 1)$ en un espacio vectorial X, están definidas por medio de la ecuación $\alpha_1 x + ... + \alpha_r x_r = 0$, donde $\alpha_1, ..., \alpha_r$ son escalares. Claramente, la ecuación se cumple para $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$. Si esta es la única r-upla para la cual la ecuación se cumple, el conjunto M se dice que es linealmente independiente. M se dice que es linealmente dependiente si M no es linealmente independiente, esto es, si la ecuación se cumple para alguna r-upla de escalares, no todos cero.

Definición 27 *Un subconjunto arbitrario M de X se dice que es linealmente independiente si cada subconjunto finito no vacío de M es linealmente independiente. M se dice que es linealmente dependiente si M no es linealmente independiente.*

Definición 28 *Un espacio vectorial X se dice que es de dimensión finita, si existe un número entero positivo n tal que X contiene un conjunto linealmente independiente de n vectores, mientras que cualquier conjunto de $n+1$*

o más vectores de X es linealmente dependiente. A n se le llama la dimensión de X, lo escribimos como $n = \dim X$. Por definición, $X = \{0\}$ es de dimensión finita y $\dim X = 0$. Si X no es de dimensión finita, se dice que es de dimensión infinita.

Ejemplo 16 *$\mathbb{R}^n$ es n-dimensional.*

Definición 29 *Si $\dim X = n$, una n-upla de vectores linealmente independiente de vectores de X es llamada una base para X (o una base en X).*

Si $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base para X, cada $x \in X$ tiene una única representación como una combinación lineal de vectores base: $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$.

Ejemplo 17 *Una base para $\mathbb{R}^n$ es $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ donde*

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, ..., 0)\,, \\
e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0)\,, \\
&.................. \\
&.................. \\
e_n &= (0, 0, 0, ..., 1)\,.
\end{aligned}
$$

Ésta es en ocasiones llamada, la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Observación 4 *De manera más general, si X es cualquier espacio vectorial, no necesariamente de dimensión finita, y B es un subconjunto linealmente independiente de X el cual genera a X, entonces B es llamada una base (o base de Hamel) para X. Luego, si B es una base para X, entonces cada $x \in X$, $x \neq 0$, tiene una única representación como una combinación lineal de (un número finito) elementos de B con escalares distintos de cero como coeficientes.*

Cada espacio vectorial $X \neq \{0\}$ tiene una base.

Teorema 8 ***(Dimensión de un subespacio)*** *Sea X un espacio vectorial de dimensión n. Entonces cualquier subespacio propio Y de X tiene dimensión menor que n.*

En muchos casos un espacio vectorial puede ser al mismo tiempo un espacio métrico, porque una métrica d está definida sobre X. Sin embargo, si no hay una relación entre la estructura algebraica y la métrica, no se puede esperar una útil y aplicable teoría que combine conceptos métricos y algebraicos. Para garantizar tal relación entre las propiedades "geométricas" y "algebraicas" de X, se define sobre X una métrica d de una forma especial. Primero se introduce un concepto auxiliar, el cual usa las operaciones algebraicas de un espacio vectorial. A decir:

Definición 30 *Un espacio normado X, es un espacio vectorial con una norma definida sobre él. Aquí, una norma sobre un espacio vectorial X (real o complejo) es una función real sobre X cuyo valor en una $x \in X$ está denotado por $\|x\|$, la norma de x; y la cual tiene las propiedades:*

$(N1)$ $\quad \|x\| \geq 0,$

$(N2)$ $\quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$

$(N3)$ $\quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$

$(N4)$ $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$

aquí x y y son vectores arbitrarios en X y α es cualquier escalar.

El espacio normado definido es denotado por $(X, \|\cdot\|)$ o simplemente por X.

Definición 31 *Una seminorma sobre un espacio vectorial X es un mapeo $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface $(N1), (N3)$ y $(N4)$.*

Observación 5 *Sea p una seminorma, $p(0) = 0, |p(y) - p(x)| \leq p(y - x)$. Además, si $p(x) = 0$ implica que $x = 0$, entonces p es una norma.*

Luego, se emplea la norma para obtener una métrica d que es del tipo deseado:

Definición 32 *Una norma sobre X define una métrica d sobre X, la cual está dada por*

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

y es llamada la métrica inducida por la norma.

Veamos a continuación algunos ejemplos de normas en $\mathbb{R}^n$.
Para $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$:

Ejemplo 18 $\|x\| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ *es una norma en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 19 $\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + ... + |\xi_n|$ *es una norma en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 20 $\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + ... + |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $(1 < p < +\infty)$, *es también una norma en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 21 *De igual forma,* $\|x\|_\infty = máx\{|\xi_1|, ..., |\xi_n|\}$ *es una norma en* $\mathbb{R}^n$.

Definición 33 *La esfera* $S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ *en un espacio normado* X, *es llamada esfera unidad.*

Ejemplo 22 $\|x\|_4 = \left(|\xi_1|^4 + |\xi_2|^4\right)^{\frac{1}{4}}$ *es una norma en* $\mathbb{R}^2$ *y las esferas unidad de dicha norma y de* $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ *y* $\|x\|_\infty$ *son:*

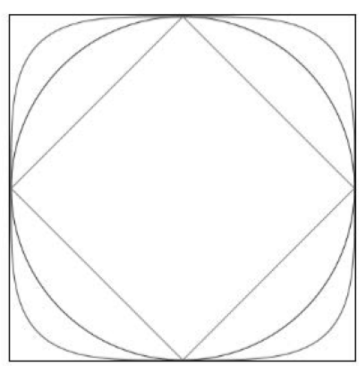

Figura 1.4 De adentro hacia afuera se muestran las gráficas de las esferas unidad de $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_4$ y $\|x\|_\infty$.

Como ya se estableció, dichos ejemplos de normas inducen métricas:

Ejemplo 23 $d(x,y) = \|x - y\|_1 = |\xi_1 - \zeta_1| + |\xi_2 - \zeta_2|$, $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Lema 2 *Una métrica d inducida por una norma sobre un espacio normado X satisface:*

(a) $d(x+a, y+a) = d(x,y)$

(b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\ d(x,y)$

para toda $x, y, a \in X$ y para cada escalar α.

1.2.1 Otras Propiedades de los Espacios Normados

Definición 34 *Un subespacio Y de un espacio normado X es un subespacio de X considerado como un espacio vectorial, con la norma obtenida restringiendo la norma sobre X al conjunto Y. Esta norma sobre Y se dice que es la inducida por la norma sobre X. Si Y es cerrado en X, entonces Y es llamado un subespacio cerrado de X. Un espacio de Banach es un espacio normado completo (completo en la métrica definida o inducida por la norma).*

Definición 35 *Un subespacio Y de un espacio de Banach X, es un subespacio de X considerado como un espacio normado.*

Teorema 9 ***(Subespacio de un espacio de Banach)*** *Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y sólo si, el conjunto Y es cerrado en X.*

La convergencia de sucesiones y los conceptos relacionados, vistos en los espacios métricos, teniendo en cuenta la Definición 32 $d(x,y) = \|x-y\|$ se escriben de la siguiente forma:

Definición 36 *Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es convergente si converge en la métrica inducida por la norma. Es decir, si X contiene un elemento x tal que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

En este caso se escribe $x_n \longrightarrow x$ y a x se le llama el límite de (x_n).

Definición 37 *Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, para cualesquiera $m, n > N$.*

1.2.2 Espacios y Subespacios Normados de Dimensión Finita

Lema 3 *Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio normado X (de cualquier dimensión). Entonces hay un número $c > 0$ tal que para cada elección de escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tenemos que*

$$\|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| \geq c\left(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|\right). \tag{1}$$

Demostración. *Escribimos $s = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$. Si $s = 0$, todos los α_j son cero y el resultado se cumple para cualquier c.*

Sea $s > 0$. Entonces (1) es equivalente a la desigualdad que se obtiene de dividir por s a (1) y escribiendo $\beta_j = \frac{\alpha_j}{s}$, esto es,

$$\|\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n\| \geq c \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\beta_j\right| = 1\right) \tag{2}$$

De modo que es suficiente probar la existencia de una $c > 0$ tal que (2) se cumple para cada n-upla de escalares $\beta_1, ..., \beta_n$ con $\Sigma\left|\beta_j\right| = 1$.

Supongamos que esto es falso. Entonces existe una sucesión (y_m) de vectores

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + ... + \beta_n^{(m)} x_n \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\beta_j^{(m)}\right| = 1\right)$$

tal que

$$\|y_m\| \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando} \quad m \longrightarrow \infty.$$

Ahora, razonemos de la siguiente forma. Como $\Sigma\left|\beta_j^{(m)}\right| = 1$, tenemos que $\left|\beta_j^{(m)}\right| \leq 1$. Luego, para cada j fijo la sucesión

$$\left(\beta_j^{(m)}\right) = \left(\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, ...\right)$$

está acotada. Consecuentemente, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, $\left(\beta_1^{(m)}\right)$ tiene una subsucesión convergente. Sea β_1 el límite de esta subsucesión, y denotemos por $(y_{1,m})$ la correspondiente subsucesión de (y_m). Por el mismo argumento, $(y_{1,m})$ tiene una subsucesión $(y_{2,m})$ para la cual la correspondiente subsucesión de escalares $\left(\beta_2^{(m)}\right)$ converge; denotamos por β_2 el límite. Continuando de esta forma, después de n pasos obtenemos una subsucesión $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, ...)$ de (y_m) cuyos términos son de la forma

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\gamma_j^{(m)}\right| = 1\right)$$

con escalares $\gamma_j^{(m)}$ *que satisfacen* $\gamma_j^{(m)} \longrightarrow \beta_j$ *cuando* $m \longrightarrow \infty$. *Luego, como* $m \longrightarrow \infty$,

$$y_{n,m} \qquad \longrightarrow \qquad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

donde $\sum_{j=1}^{n} \left|\beta_j\right| = 1$, *por lo cual no todos los* β_j *pueden ser cero. Como* $\{x_1, ..., x_n\}$ *es un conjunto linealmente independiente, tenemos que* $y \neq 0$.

Por otro lado, $y_{n,m} \longrightarrow y$ *implica que* $\|y_{n,m}\| \longrightarrow \|y\|$, *por la continuidad de la norma. Como* $\|y_m\| \longrightarrow 0$ *por suposición, y* $(y_{n,m})$ *es una subsucesión de* (y_m), *debemos tener que* $\|y_{n,m}\| \longrightarrow 0$. *Por lo tanto,* $\|y\| = 0$, *así* $y = 0$ *por* $(N2)$ *de la definición de norma, Esto contradice que* $y \neq 0$, *y el lema queda probado.* ∎

Definición 38 *Dos métricas* d, m *para un conjunto* X *se dicen equivalentes topológicamente –se denota* $d \equiv m$*- si y solamente si, generan la misma topología; esto es,* $\tau_d = \tau_m$.

Si las métricas inducidas por dos normas dadas en X *son equivalentes topológicamente, entonces decimos que las normas son equivalentes.*

Definición 39 *Se dice que dos métricas* d, m *para un mismo conjunto* X *son equivalentes métricamente si y sólo si, existen* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *tales que para cada par de puntos* $x, y \in X$ *se satisface:* $d(x, y) \leq \alpha m(x, y), m(x, y) \leq \beta d(x, y)$.

Si las métricas inducidas por dos normas dadas en X *son equivalentes métricamente, entonces decimos que las normas son equivalentes métricamente.*

Obsérvese que lo anterior es equivalente a las desigualdades que aparecen en el Teorema 11.

Teorema 10 *Sean* d, m *dos métricas en un espacio métrico* X. *Ser equivalentes métricamente implica ser equivalentes topológicamente.*

Demostración. *Sean* d, m *dos métricas equivalentes métricamente, por tanto, existen dos números* α, β *que satisfacen la definición. Es sencillo verificar que dada la bola abierta* $B_d(x, \varepsilon)$ *entonces* $B_m\left(x, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$. *Lo anterior de la siguiente manera: sea* $y \in B_m\left(x, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)$ *luego* $m(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}$ *y por hipótesis tenemos que* $d(x, y) \leq \alpha m(x, y)$.

Así, $d(x,y) \leq \alpha m(x,y) \leq \alpha\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = \varepsilon$, *por lo tanto* $y \in B_d(x,\varepsilon)$. *Con lo cual se demuestra que* $\tau_d \subseteq \tau_m$. *Similarmente* $B_d\left(x, \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \subseteq B_m(x,\varepsilon)$ *y por lo tanto* $\tau_m \subseteq \tau_d$. ■

Proposición 3 *Para dos normas* $\| \bullet \|_1$ *y* $\| \bullet \|_2$ *sobre un mismo espacio vectorial* X *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una constante* $\beta \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$ *para todo* $x \in X$.

2. *La topología de la norma* $\| \bullet \|_2$ *es más fina que la de* $\| \bullet \|_1$.

Demostración. *Dados* $x \in X$ *y* $r \in \mathbb{R}^+$, *denotamos por* $B_1(x,r)$ *y* $B_2(x,r)$ *a las bolas abiertas de centro* x *y radio* r *para las normas* $\| \bullet \|_1$ *y* $\| \bullet \|_2$, *respectivamente.*

$(1) \Rightarrow (2)$. *Si* U *es un conjunto abierto para la norma* $\| \bullet \|_2$, *para cada* $x \in U$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B_2(x,\varepsilon) \subset U$. *De* (1) *deducimos entonces que* $B_1\left(x, \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \subset B_2(x,\varepsilon) \subset U$, *luego* U *es abierto para la norma* $\| \bullet \|_1$, *como queríamos.*

$(2) \Rightarrow (1)$. *Como* $B_2(0,1)$ *es abierto para* $\|\bullet\|_2$, *también lo será para* $\|\bullet\|_1$, *luego ha de existir* $\delta > 0$ *tal que* $B_1(0,\delta) \subset B_2(0,1)$. *Tomando* $\beta = \frac{1}{\delta} > 0$ *conseguimos la desigualdad buscada. En efecto, si* $x \in X$ *verificase que* $\|x\|_2 > \beta \|x\|_1$, *tomando* $y = \frac{x}{\|x\|_2}$ *tendríamos*

$$\|y\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} < \frac{1}{\beta} = \delta,$$

de donde $\|y\|_2 < 1$, *que es una contradicción, puesto que claramente* $\|y\|_2 = 1$. *Así pues,* $\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$ *para todo* $x \in X$, *como deseabamos.* ■

De lo anterior podemos concluir entonces que:

Teorema 11 *Dos normas* $\| \bullet \|_1$ *y* $\| \bullet \|_2$ *en un espacio vectorial* X *son topológicamente equivalentes si y sólo si, existen constantes* α *y* $\beta \in \mathbb{R}^+$ *tales que*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in X.$$

Demostración. *De la proposición 3 se deduce que si intercambiamos las normas obtenemos el resultado deseado.* ■

Observación 6 *Las métricas que son equivalentes métricamente definen la misma topología. Sin embargo, dos métricas diferentes pueden definir la misma topología y no ser equivalentes métricamente.*

Ejemplo 24 *Dado un espacio métrico* (X, d) *definimos la métrica*
$e(x, y) := \text{mín}\{1, d(x, y)\}$. *Nuestra nueva métrica* e *está acotada por* 1 *y además es equivalente topológicamente con* d. *En efecto, para la bola* $B_d(x, r)$ *al tomar* $s = \text{mín}\{1, r\}$ *se tiene que* $B_e(x, s) \subseteq B_d(x, r)$. *La otra inclusión es obvia.*

Sin embargo, no es posible encontrar β *que satisfaga* $d(x, y) \leq \beta e(x, y)$, *para todo par de puntos* $x, y \in X$.

Usando el Lema 3, podemos ahora probar el siguiente teorema (el cual no se mantiene para espacios de dimensión infinita).

Teorema 12 ***(Normas Equivalentes)*** *Sobre un espacio vectorial de dimensión finita* X, *cualquier norma* $\|\cdot\|$ *es equivalente a cualquier otra norma* $\|\cdot\|_0$.
Demostración. *Sean* $\dim X = n$ *y* $\{e_1, ..., e_n\}$ *cualquier base para* X. *Entonces toda* $x \in X$ *tiene una única representación*

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Por el Lema 3, hay una constante positiva c *tal que*

$$\|x\| \geq c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|).$$

Por otro lado, la desigualdad del triángulo nos da que

$$\|x\|_0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|e_j\|_0 \leq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|, \qquad k = \text{máx}_j \|e_j\|_0.$$

Juntando ambos resultados, $a\|x\|_0 \leq \|x\|$ *donde* $a = \frac{c}{k} > 0$. *La otra desigualdad es ahora obtenida intercambiando los roles de* $\|\cdot\|$ *y* $\|\cdot\|_0$ *en el argumento anterior.* ■

Este teorema es de considerable importancia práctica. Por ejemplo, implica que la convergencia o divergencia de una sucesión en un espacio vectorial de dimensión finita no depende de la particular elección de una norma sobre ese espacio.

Ejemplo 25 *Sean* $X = \mathbb{R}^n$, *la norma* $\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$ *y la norma* $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1| + ... + |x_n|\}$. *Es fácil deducir que* $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$, *y si* (x_n) *es una sucesión convergente en* $(\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty)$ *es claro que también es convergente con la norma* $\|x\|_1$.

Capítulo 2

Espacios Cuasi-Métricos y Normados Asimétricos

2.1 Espacios Cuasi-Métricos y Normados Asimétricos

A continuación daremos una introducción a los espacios cuasi-métricos y normados asimétricos. Comenzaremos mostrando los conceptos básicos, así como también algunos ejemplos sencillos que nos servirán para visualizar gráficamente otros aspectos teóricos como las bolas abiertas y las relaciones que guardan entre sí. Además mostraremos algunos de los resultados que se han logrado trasladar a estos espacios más generales, desde los espacios métricos y espacios normados de dimensión finita. Para la definición de los conceptos a utilizar en este trabajo, tanto para las cuasi-(semi)métricas como para las (semi)normas asimétricas hemos usado de referencia Cobzas [5]. A decir,

2.1.1 Definiciones y ejemplos

Definición 40 *Una cuasi-semimétrica sobre un conjunto X es un mapeo $\rho : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

$(QM1)$ $\rho(x, x) = 0,$

$(QM2)$ $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$,

para cualesquiera $x, y, z \in X$. *Si, además,*

$(QM3)$ $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0 \Longrightarrow x = y$,

para cualesquiera $x, y \in X$, *entonces* ρ *es llamada una cuasi-métrica.*

El par (X, ρ) *es llamado un espacio cuasi-semimétrico, y un espacio cuasi-métrico respectivamente.*

Definición 41 *La conjugada de una cuasi-semimétrica* ρ *es la cuasi-semimétrica* $\overline{\rho}(x,y) = \rho(y,x)$, $x, y \in X$.

El mapeo $\rho^s(x,y) = \text{máx}\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\}$, $x, y \in X$, *es una semimétrica sobre* X, *la cual es una métrica si y sólo si,* ρ *es una cuasi-métrica.*

Las siguientes desigualdades se cumplen para estas cuasi-semimétricas, para cualesquiera $x, y \in X$:

$$\rho(x,y) \leq \rho^s(x,y) \quad \text{y} \quad \overline{\rho}(x,y) \leq \rho^s(x,y). \tag{3.1.1}$$

Definición 42 *Si* (X, ρ) *es un espacio cuasi-semimétrico, entonces para* $x \in X$ *y* $r > 0$ *definimos:*

$B_\rho(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ − *la bola abierta con centro en* x *y radio* r, *y*

$B_\rho[x,r] = \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}$ − *la bola cerrada con centro en* x *y radio* r.

Ejemplo 26 *Definimos* $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *por:*

$\rho(x,y) = \text{máx}\{f(x) - f(y), \frac{f(y)-f(x)}{2}\}$, *donde* $f : X \to \mathbb{R}$ *es inyectiva.*

Es claro que cumple $(QM1)$, *verifiquemos que cumple* $(QM2)$.

Lo analizaremos por casos: Sean $A = \text{máx}\{f(x) - f(y), \frac{f(y)-f(x)}{2}\}$ *y*

$B = \text{máx}\{f(x) - f(z), \frac{f(z)-f(x)}{2}\} + \text{máx}\{f(z) - f(y), \frac{f(y)-f(z)}{2}\}$

Caso 1 *Supongamos que* $f(x) - f(y) = f(x) - f(z) + f(z) - f(y) > 0$, *entonces* $A = f(x) - f(y)$.

1. *Si* $f(z)-f(y)<0$ *y* $f(x)-f(z)>0$, *entonces* $f(x)-f(z)>f(y)-f(z)$ *y* $máx\{f(z)-f(y), \frac{f(y)-f(z)}{2}\} = \frac{(f(y)-f(z))}{2} > 0$.

   Además, $f(x)-f(z) > f(y)-f(z) > \frac{f(y)-f(z)}{2} > 0$.

   Así, $B = f(x)-f(z)+\frac{f(y)-f(z)}{2}$ *y* $f(z) < f(y)$.

   Y luego $f(x)-f(y) < f(x)-f(z)$. *Por lo tanto,* $A < B$.

2. *Si* $f(x)-f(z)<0$ *y* $f(z)-f(y)>0$, *entonces* $f(z)-f(y)>f(z)-f(x)$ *y* $máx\{f(x)-f(z), \frac{f(z)-f(x)}{2}\} = \frac{f(z)-f(x)}{2} > 0$.

   Además, $f(z)-f(y) > f(z)-f(x) > \frac{f(z)-f(x)}{2} > 0$.

   Así, $B = \frac{f(z)-f(x)}{2} + f(z)-f(y)$ *y* $f(x) < f(z)$.

   Luego, $f(x)-f(y) < f(z)-f(y)$. *Por lo tanto,* $A < B$.

3. *Por último si* $f(x)-f(z) > 0$ *y* $f(z)-f(y) > 0$. *Entonces* $B = f(x)-f(z)+f(z)-f(y) = f(x)-f(y)$. *Por lo tanto,* $A = B$.

Caso 2 *Supongamos que* $f(y)-f(x) = f(y)-f(z)+f(z)-f(x) > 0$, *entonces* $A = \frac{f(y)-f(x)}{2}$.

1. *Supongamos que* $f(z)-f(x) < 0$ *y* $f(y)-f(z) > 0$, *entonces* $\frac{f(y)-f(z)}{2} > \frac{f(x)-f(z)}{2} > 0$, $máx\{f(x)-f(z), \frac{f(z)-f(x)}{2}\} = f(x)-f(z) > 0$.

   Así, $B = \frac{f(y)-f(z)}{2} + f(x)-f(z)$ *y* $f(z) < f(x)$. *Luego,* $\frac{f(z)}{2} < \frac{f(x)}{2}$.

   Por lo tanto, $A < B$.

2. *Análogamente para* $f(y)-f(z) < 0$ *y* $f(z)-f(x) > 0$.

3. *Finalmente si* $f(z)-f(x) > 0$ *y* $f(y)-f(z) > 0$. *Entonces* $B = \frac{f(z)-f(x)}{2} + \frac{f(y)-f(z)}{2} = \frac{f(y)-f(x)}{2}$. *Por lo tanto,* $A = B$.

De todo lo anterior se tiene que $A \leq B$, *para toda* $x, y, z \in X$.*Por lo tanto,* ρ *es cuasi-semimétrica. Pero además, si* $\rho(x,y) = 0 = \rho(y,x)$ *entonces* $x = y$ *puesto que* f *es inyectiva. Por lo cual* ρ *es cuasi-métrica.*

Ejemplo 27 *Para el ejemplo 26 tenemos que*

$$\overline{\rho}(x,y) = máx\{f(y)-f(x), \frac{f(x)-f(y)}{2}\}$$

y

$$\rho^s(x,y) = m\acute{a}x\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\} = |f(x) - f(y)|.$$

A continuación citamos un resultado publicado en [11], que nos muestra la relación que existe entre las bolas abiertas de una cuasi-semimétrica, su conjugada y su super "s", el cual además de interesante nos será de una gran utilidad.

Proposición 4 *En (X, ρ) un espacio cuasi-semimétrico, para cualquier $x \in X$, se cumple que $B_{\rho^s}(x,r) = B_\rho(x,r) \cap B_{\overline{\rho}}(x,r)$.*
Demostración. *En efecto, si $y \in B_{\rho^s}(x,r)$, entonces $\rho^s(x,y) = m\acute{a}x\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\} < r$, y por lo tanto, $B_{\rho^s}(x,r) \subseteq B_\rho(x,r) \cap B_{\overline{\rho}}(x,r)$. Ahora, si $y \in B_\rho(x,r) \cap B_{\overline{\rho}}(x,r)$ se tiene que $\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y) < r$, luego $\rho^s(x,y) < r$, y así $y \in B_{\rho^s}(x,r)$. Con lo anterior, $B_\rho(x,r) \cap B_{\overline{\rho}}(x,r) = B_{\rho^s}(x,r)$. De ambas contenciones tenemos la igualdad.*
■

En la búsqueda de ejemplos de cuasi-métricas (cuasi-semimétricas), surgió el cuestionarnos acerca de si dada una métrica d cualquiera existe una cuasi-métrica ρ diferente de d, tal que su super "s" (ρ^s) tuviera bolas abiertas que coincidieran con las bolas abiertas de la métrica en el espacio X cuya métrica es d. O si existía al menos un ejemplo de este fenómeno. La respuesta fue afirmativa, se llegó a dicho objetivo mediante la utilización de normas asimétricas definidas a partir de normas del espacio y las cuasi-métricas inducidas por estas normas asimétricas.

Ejemplo 28 *Se busca una cuasi-métrica $\rho(x,y)$ cuya $\rho^s(x,y)$ tenga como bolas abiertas B_{ρ^s}, las bolas abiertas de una métrica en el espacio.*

Como caso particular del ejemplo 26, tomemos $X = [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ inyectiva en X y $\rho_2(x,y) = m\acute{a}x\{x^2 - y^2, \frac{y^2 - x^2}{2}\}$. Sean $x, y \in X, r > 0$.

Supongamos $\rho_2(x,y) < r$, si $x < y$, entonces $\rho_2(x,y) = \frac{y^2-x^2}{2} < r$.

Luego, $y^2 < 2r + x^2$ lo que implica que $y < \sqrt{2r + x^2}$.

Así, $x < y < \sqrt{2r + x^2}$.

Si $x > y$, entonces $\rho_2(x,y) = x^2 - y^2 < r$. Luego, $y^2 > x^2 - r$ lo que implica que $y > \sqrt{x^2 - r}$.

Así, $\sqrt{x^2 - r} < y < x$.

Por lo tanto,

$$B_{\rho_2}(x,r) = (a, \sqrt{2r + x^2}), \text{ donde } a = \text{máx}\{0, \sqrt{x^2 - r}\}. \quad (1)$$

Ahora, $\overline{\rho}_2(x,y) = \text{máx}\{y^2 - x^2, \frac{x^2-y^2}{2}\}$. *Supongamos* $\overline{\rho}_2(x,y) < r$. *Si* $x < y$, *entonces* $\overline{\rho}_2(x,y) = y^2 - x^2 < r$.

Luego, $y < \sqrt{r + x^2}$ *lo que implica que* $x < y < \sqrt{r + x^2}$.

Si $x > y$, *entonces* $\overline{\rho}_2(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} < r$. *Luego,* $y > \sqrt{x^2 - 2r}$ *lo que implica que* $\sqrt{x^2 - 2r} < y < x$.

Por lo tanto,

$$B_{\overline{\rho}_2}(x,r) = (b, \sqrt{r + x^2}), \text{ donde } b = \text{máx}\{0, \sqrt{x^2 - 2r}\}. \quad (2)$$

De (1) *y* (2) *tenemos que* $B_{\rho_2^s}(x,r) = (a, \sqrt{r + x^2})$.

Ahora, para la métrica $d = |x^2 - y^2| = |f(x) - f(y)|$, *tenemos que* $-r < x^2 - y^2 < r$, *lo que implica que* $x^2 - r < y^2 < r + x^2$.

Así, $\sqrt{x^2 - r} < y < \sqrt{r + x^2}$.

Por lo tanto, $B_d(x,r) = (a, \sqrt{r + x^2})$.

Obteniendo así que $B_{\rho_2^s}(x,r) = B_d(x,r)$.

Definición 43 *Una norma asimétrica sobre un espacio vectorial real* X *es una función* $p : X \longrightarrow [0,\infty)$ *que satisface las condiciones:*

$(AN1)$ $p(x) = p(-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$;

$(AN2)$ $p(\alpha x) = \alpha p(x)$;

$(AN3)$ $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,

para toda $x, y, z \in X$ *y* $\alpha \geq 0$.

Si p satisface solo las condiciones $(AN2)$ *y* $(AN3)$, *entonces es llamada una seminorma asimétrica. El par* (X, p) *es llamado un espacio normado asimétrico (espacio seminormado asimétrico respectivamente).*

Una seminorma asimétrica p define una cuasi-semimétrica ρ_p sobre X a través de la fórmula

$$\rho_p(x,y) = p(y - x), \; x, y \in X. \quad (3.2.2)$$

llamada la *cuasi-(semi)métrica inducida por la (semi)norma asimétrica.*

Definición 44 *Se define la seminorma asimétrica conjugada* $\overline{p}$ *y la seminorma* p^s *por*

$$\overline{p}(x) = p(-x) \text{ y } p^s(x) = máx\{p(x), \overline{p}(x)\}, \tag{3.2.3}$$

para $x \in X$.

Las desigualdades (3.1.1) se transforman en

$$p(x) \leq p^s(x) \text{ y } \overline{p}(x) \leq p^s(x), \tag{3.2.4}$$

para toda $x \in X$. Obviamente, p^s es una norma cuando p es una norma asimétrica y (X, p^s) es un espacio normado.

Observación 7 *Las conjugadas de* ρ *y* p *son denotadas tambien por* ρ^{-1} *y* p^{-1}.

Observación 8 *Se podría llegar a pensar que ya que una seminorma asimétrica* p *define una cuasi-semimétrica* ρ_p, *y que estas a su vez tienen una conjugada, se terminan obteniendo 4 cuasi-semimétricas; 2 para* p *y otras 2 para* $\overline{p}$. *Sin embargo, esto no sucede.*

En efecto, recordemos que $\rho_p(x, y) = p(y - x)$ *y* $\overline{p}(x) = p(-x)$.

Luego, $\rho_{\overline{p}}(x, y) = \overline{p}(y - x) = p(x - y)$ *y* $\overline{\rho}_p(x, y) = \rho_p(y, x) = p(x - y)$.

Por lo tanto, $\rho_{\overline{p}} = \overline{\rho}_p$.

Además, $\overline{\rho}_{\overline{p}}(x, y) = \rho_{\overline{p}}(y, x) = \overline{p}(x - y) = p(y - x) = \rho_p(x, y)$.

Así, $\overline{\rho}_{\overline{p}} = \rho_p$.

Es decir, únicamente son dos cuasi-semimétricas, ρ_p *y su conjugada* $\overline{\rho}_p$. *O sus equivalentes en notación.*

Definición 45 *Si* (X, p) *es un espacio seminormado asimétrico, las bolas están dadas por*

$$B_p(x, r) = \{y \in X : p(y - x) < r\} - \text{la bola abierta},$$

y

$$B_p[x, r] = \{y \in X : p(y - x) \leq r\} - \text{la bola cerrada},$$

para $x \in X$ *y* $r > 0$.

La bola cerrada unitaria de X es $B_p = B_p[0,1]$ y la bola abierta unitaria es $B'_p = B_p(0,1)$. En este caso las siguientes fórmulas se cumplen:

$$B_p[x,r] = x + rB_p \quad y \quad B_p(x,r) = x + rB'_p, \tag{3.2.5}$$

esto es, cualquiera de las bolas unitarias de X determinan completamente su estructura cuasi-métrica.

Si es necesario, estas bolas serán denotadas por $B_{p,X}$ y $B'_{p,X}$, respectivamente.

Recordemos que la conjugada $\overline{p}$ de p está definida por $\overline{p}(x) = p(-x)$, $x \in X$, y la seminorma asociada es $p^s(x) = máx\{p(x), \overline{p}(x)\}$, $x \in X$. La seminorma p es una norma asimétrica si y sólo si, p^s es una norma sobre X.

Observación 9 *Algunas veces una norma asimétrica se denota por el símbolo* $\|\cdot|$, *una notación propuesta por Krein y Nudelman (1973), en su libro Teoría de momentos.*

Ejemplo 29 *En el plano, la función* $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$p(x,y) = máx\{y - x, y + x, 0\},$$

es una norma asimétrica, ya que

(i) *si* $\lambda \geq 0$, $p(\lambda(x,y)) = máx\{\lambda y - \lambda x, \lambda y + \lambda x, 0\}$
$= \lambda máx\{y - x, y + x, 0\} = \lambda p(x,y)$,

(ii) *Además, si* $x = (x_1, x_2)$ *y* $y = (y_1, y_2)$,

$$p(x+y) = máx\{x_2 + y_2 - x_1 - y_1, x_2 + y_2 + x_1 + y_1, 0\}$$

$$= máx\{x_2 - x_1 + y_2 - y_1, x_2 + x_1 + y_2 + y_1, 0\}$$

$$\leq máx\{x_2 - x_1, x_2 + x_1, 0\} + máx\{y_2 - y_1, y_2 + y_1, 0\}$$

$$= p(x) + p(y).$$

(iii) *Si* $p(x) = p(-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Por lo tanto, p *es una norma asimétrica.*

También se encontraron normas asimétricas que cumplian con la propiedad de que la super "s" tenía bolas abiertas que coincidían con las bolas abiertas de una norma en dicho espacio.

Ejemplo 30 *Sea p la norma definida en el ejemplo 29. Veamos quienes son las bolas abiertas:*

Recordemos que $B_p(x,r) = \{y \in X : p(y-x) < r\}, r > 0$ *y que* $p(y-x) = \rho_p(x,y)$.

En particular veremos quienes son las bolas abiertas centradas en el origen.

$x = (0,0), B_p(x,r) = \{(y_1,y_2) : y_2 - y_1, y_1 + y_2 < r\}$.

Geométricamente se trazan las rectas $y_2 - y_1 = r$ *y* $y_1 + y_2 = r$. *Y la región por debajo de ellas es la bola abierta,*

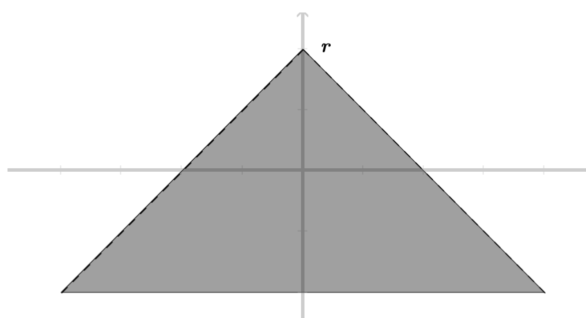

Figura 2.1 $B_p((0,0),r)$

$\overline{p}(x) = p(-x) = \text{máx}\{-x_2 - (-x_1), -x_2 - x_1, 0\}$
$= \text{máx}\{-x_2 + x_1, -x_2 - x_1, 0\}$.
Así, $B_{\overline{p}}((0,0),r) = \{(y_1,y_2) : y_1 - y_2, -y_1 - y_2 < r\}$

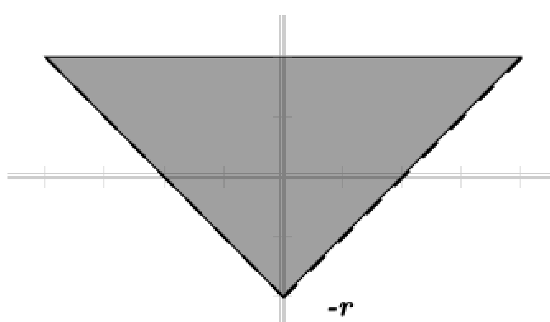

Figura 2.2 $B_{\overline{p}}((0,0),r)$

Luego, $B_{p^s}((0,0),r) = \{(y_1,y_2) : |y_2 - y_1|, |y_1 + y_2| < r\}$

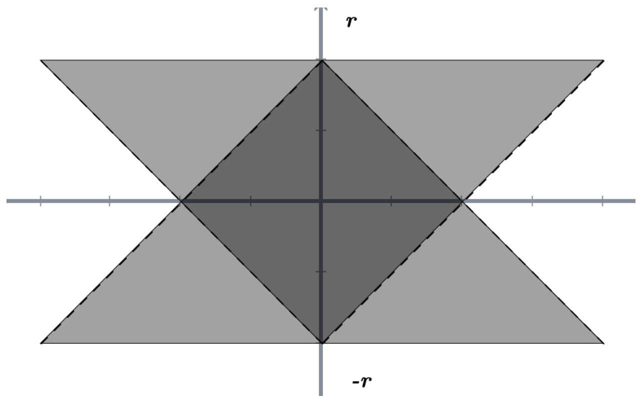

Figura 2.3 $B_{p^s}((0,0),r)$

Y sea $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, *la norma* 1 *en* $\mathbb{R}^2$, *cuyas bolas abiertas centradas en el origen coinciden con las de* B_{p^s}.

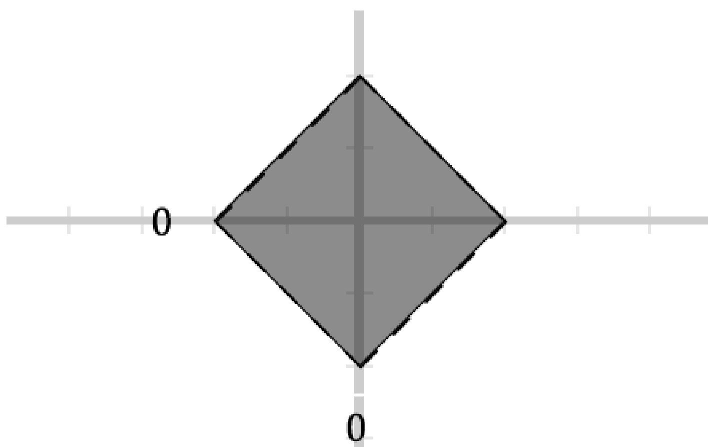

Figura 2.4 $B_{\|\cdot\|_1}((0,0),r)$

Definición 46 *Un conjunto* $G \subset X$ *es* $\rho-$*abierto si y sólo si, para cada* $x \in G$ *existe* $r = r_x > 0$ *tal que* $B_\rho(x,r) \subset G$.

Definición 47 *Sea* (X,ρ) *un espacio cuasi-semimétrico, definimos a la topología* $\tau(\rho)$ *del espacio* X *por la colección de todos los conjuntos* $\rho-$*abiertos, es decir,*

$$\tau(\rho) = \{A \subseteq X : A \text{ es } \rho - \text{abierto}\}$$

llamada la topología inducida por la cuasi-semimétrica ρ.

Usando la cuasi-semimétrica conjugada $\overline{\rho}$ uno puede obtener otra topología $\tau(\overline{\rho})$. Una tercera topología es la topología $\tau(\rho^s)$ generada por la semimétrica ρ^s. Algunas ocasiones usaremos la notación alterna $\tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}}, \tau_{\rho^s}$ para designar a dichas topologías.

Definición 48 *Un subconjunto C de un espacio vectorial V es un cono (a veces llamado cono lineal) si para cada $x \in C$ y α escalar positivo, el producto $\alpha x \in C$. Un cono C es un cono convexo si $\alpha x + \beta y \in C$, para cualesquiera α, β escalares positivos y cualesquiera $x, y \in C$.*

Proposición 5 *El conjunto de las cuasi-semimétricas (cuasi-métricas) es un cono (convexo) en el espacio $\{f : X \times X \to \mathbb{R}\}$. Esto con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar, entre funciones.*

Demostración. *Verificamos las dos siguientes afirmaciones:*

1\. *Sean ρ_1 y ρ_2 cuasi-semimétricas (cuasi-métricas) en X, tales que $\rho_1 \neq \rho_2$. Definimos $\rho(x,y) = \rho_1(x,y)+\rho_2(x,y)$. Entonces ρ es una cuasi-semimétrica (cuasi-métrica).*

Veamos que cumple con los requisitos:

(i) $\rho(x,x) = \rho_1(x,x) + \rho_2(x,x) = 0 + 0 = 0$. *Y* $\rho(x,y) \geq 0$, *pues* $\rho_1(x,y) \geq 0$ *y* $\rho_2(x,y) \geq 0$.

(ii) $\rho(x,z) = \rho_1(x,z) + \rho_2(x,z) \leq \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z) + \rho_2(x,y) + \rho_2(y,z) = \rho(x,y) + \rho(y,z)$. *Por lo tanto,* $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ *para toda* $x, y, z \in X$.

(iii) *Si* $\rho(x,y) = 0$ *entonces* $\rho_1(x,y) + \rho_2(x,y) = 0$, *pero* $\rho_1(x,y) \geq 0$ *y* $\rho_2(x,y) \geq 0$. *Por lo tanto,* $\rho_1(x,y) = 0$ *y* $\rho_2(x,y) = 0$ *y dado que son cuasi-semimétricas (cuasi-métricas) se tiene que* $x = y$.

De manera análoga si $\rho(y,x) = 0$.

El caso $\rho_1 = \rho_2$ *queda contemplado en el siguiente resultado.*

2\. *Sea ρ una cuasi-semimétrica (cuasi-métrica) y $\alpha > 0$. Entonces $\alpha\rho$ es una cuasi-semimétrica (cuasi-métrica).*

Nuevamente hay que verificar que cumple los requisitos de la definición:

(i) $\alpha\rho(x,x) = \alpha(0) = 0$ *y es evidente que* $\alpha\rho(x,y) \geq 0$.

(ii) $\alpha\rho(x,z) \leq \alpha(\rho(x,y) + \rho(y,z)) = \alpha\rho(x,y) + \alpha\rho(y,z)$, *para toda* $x, y, z \in X$.

(iii) *Si* $\alpha\rho(x,y) = 0 = \alpha\rho(y,x)$ *entonces* $\rho(x,y) = 0 = \rho(x,y)$. *Por lo tanto,* $x = y$.

Por lo tanto, forman un cono (convexo). ■

Análogamente,

Proposición 6 *El conjunto de las seminormas asimétricas (normas asimétricas) es un cono (convexo) en el espacio* $\{f : X \to \mathbb{R}\}$.

Demostración. *Se cumplen las dos siguientes afirmaciones:*

1. *Sean* P_1 *y* P_2 *seminormas asimétricas (normas asimétricas) en* X. *Entonces el funcional* $P : X \to \mathbb{R}$, *definido por* $P(x) = P_1(x) + P_2(x)$ *es una seminorma asimétrica (norma asimétrica) en* X. *Para lo cual verificamos:*

(i) *Si* $P(x) = P(-x) = 0$, *entonces* $P_1(x) + P_2(x) = 0$ *y* $P_1(-x) = P_2(-x) = 0$. *Pero como* $P_1(x) \geq 0$ *y* $P_2(x) \geq 0$ *para toda* $x \in X$, *entonces* $P_1(x) = 0 = P_2(x)$ *y* $P_1(-x) = 0 = P_2(-x)$. *Por lo tanto,* $x = 0$ *ya que* P_1 *y* P_2 *son seminormas asimétricas (normas asimétricas).*

(ii) *Sea* $\alpha > 0$. $P(\alpha x) = P_1(\alpha x) + P_2(\alpha x) = \alpha P_1(x) + \alpha P_2(x) = \alpha(P_1(x) + P_2(x)) = \alpha P(x)$. *Así,* $P(\alpha x) = \alpha P(x)$, *para toda* $x \in X, \alpha > 0$.

(iii) $P(x+y) = P_1(x+y) + P_2(x+y) \leq P_1(x) + P_1(y) + P_2(x) + P_2(y) = P(x) + P(y)$.

Por lo tanto, $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$ *para toda* $x, y \in X$.

De lo anterior, P *es seminorma asimétrica (norma asimétrica).*

2. *Sea* P *una seminorma asimétrica (norma asimétrica) en* X *y* $\alpha > 0$. *Entonces,* αP *es una seminorma asimétrica (norma asimétrica). Igual que antes verificamos que cumple los requisitos:*

(i) *Si* $\alpha P(x) = 0 = \alpha P(-x)$ *entonces,* $P(x) = 0 = P(-x)$. *Luego,* $x = 0$.

(ii) *Sea* $\beta > 0$.

$\alpha P(\beta x) = \alpha \beta P(x) = \beta(\alpha P(x))$, *para toda* $x \in X$.

(iii) $\alpha P(x + y) \leq \alpha(P(x) + P(y)) = \alpha P(x) + \alpha P(y)$.

Luego, $\alpha P(x + y) \leq \alpha P(x) + \alpha P(y)$, *para toda* $x, y \in X$.

Por lo tanto αP *es una seminorma asimétrica (norma asimétrica).*

Así, tenemos que el conjunto de las seminormas asimétricas (normas asimétricas) forman un cono (convexo). ■

2.1.2 Axiomas de Separación, Sucesiones convergentes, Sucesiones de Cauchy, Espacios Balanceados y Completitud

Los axiomas de separación son las propiedades que un espacio topológico cumple en función del grado en que puntos distintos pueden ser separados por medio de los abiertos de la topología, ρ-abiertos en nuestro caso. En la literatura ya existen resultados que nos dicen bajo que condiciones los espacios cuasi-métricos y normados asimétricos resultan ser T_0, T_1 y T_2 (Cobzas [5]) los cuáles citaremos para hacer uso de ellos en nuestro análisis particular de los espacios normados asimétricos de dimensión finita.

Observación 10 *Como un espacio con dos topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$, un espacio cuasi-semimétrico puede ser visto como un espacio bitopológico en el sentido de Kelly [2].*

Un espacio bitopológico es simplemente un conjunto T dotado con dos topologías τ y ν, este es comúnmente denotado por denotado por (T, τ, ν).

Observación 11 *En general diremos que un espacio bitopológico (T, τ, ν) tiene la propiedad P si ambas topologías τ y ν tienen la propiedad P.*

El espacio bitopológico (T, τ, ν) es llamado Hausdorff a pares si para cada par de puntos distintos $s, t \in T$ existen una $\tau-$vecindad U de s y una $\nu-$vecindad V de t tales que $U \cap V = \emptyset$.

A continuación citamos un resultado que aparece en Cobzas [5]. Cabe aclarar que únicamente se incluye la parte que nos interesa, el resultado completo puede ser consultado en dicha referencia.

Proposición 7 *Sea (X, ρ) es un espacio cuasi-semimétrico.*

1. Si ρ es una cuasi-métrica, entonces las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$ son T_0, pero no necesariamente T_1 (y luego no necesariamente T_2, en contraste al caso con los espacios métricos).

2. La topología τ_ρ es T_1 si y sólo si, $\rho(x,y) > 0$ cuando $x \neq y$. En este caso, $\tau_{\overline{\rho}}$ es también T_1 y como un espacio bitopológico, X es Hausdorff a pares.

Demostración. *1 Si x, y son puntos distintos en el espacio cuasi-métrico (X, ρ), entonces $\max\{\rho(x,y), \rho(y,x)\} > 0$. Si $\rho(x,y) > 0$, entonces $y \notin B_\rho(x, r)$, donde $r = \rho(x,y)$. Similarmente, si $\rho(y,x) > 0$, se tiene $x \notin B_\rho(y, r')$, siendo $r' = \rho(y,x)$. Consecuentemente, τ_ρ es T_0 y $\tau_{\overline{\rho}}$ también.*

2. Supongamos que $\rho(x,y) > 0$ para cada $x \neq y$. Entonces $y \notin B_\rho(x, \rho(x,y))$. Como $\rho(y,x) > 0$ también, $x \notin B_\rho(y, \rho(y,x))$, mostrando que la topología τ_ρ es T_1. Similarmente $\tau_{\overline{\rho}}$ es T_1.

Además, $B_\rho(x,r) \cap B_{\overline{\rho}}(y,r) = \emptyset$, *donde* $r > 0$ *esta dado por* $2r := \rho(x,y) > 0$. *De hecho, si* $z \in B_\rho(x,r) \cap B_{\overline{\rho}}(y,r)$, *entonces*

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) < r + r = \rho(x,y),$$

siendo esta una contradicción, la cual muestra que el espacio bitopológico $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ *es Hausdorff a pares.*

Es fácil verificar que si τ_ρ *es* T_1, *entonces* $\rho(x,y) > 0$ *para cada par de puntos distintos* $x, y \in X$.

Pues si τ_ρ *es* T_1 *entonces para cada par de puntos distintos* $x, y \in X$, *existen* $B_\rho(x,r)$ *y* $B_\rho(y,s)$, *con* $r, s > 0$ *tales que* $x \notin B_\rho(y,s)$ *y* $y \notin B_\rho(x,r)$, *luego* $\rho(x,y) > r > 0$ *y* $\rho(y,x) > s > 0$.

Por lo tanto, $\rho(x,y) > 0$ *para cada par de puntos distintos* $x, y \in X$. ■

A partir de este momento por cuestiones de notación, cuando nos sea conveniente, en lugar de decir que τ_ρ es T_1 simplemente diremos que ρ es T_1.

Ejemplo 31 $\rho(x,y) = máx\{f(x) - f(y), \frac{(f(y)-f(x))}{2}\}$ *del ejemplo 26 es* (T_1), *pues* $\rho(x,y) > 0$ *para toda* $x \neq y$, *ya que recordemos que* f *es inyectiva.*

Ejemplo 32 *Otra forma de definir cuasi-métricas es mediante*

$$\rho_k(x,y) = \begin{cases} f(y) - f(x) & f(x) \leq f(y) \\ k & f(y) < f(x) \end{cases}, k > 0$$

donde $f : X \to \mathbb{R}$ *es inyectiva.*

Estas cuasi-métricas resultan ser T_1 *por la inyectividad de* f.

En efecto, es evidente que $\rho_k(x,y) \geq 0$ *y que* $\rho_k(x,x) = 0$.

Resta verificar la desigualdad triangular: Sean $x, y, z \in X$.

Si $\rho_k(x,y) = 0$ *entonces* $\rho_k(x,y) \leq \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$.

Supongamos que $\rho_k(x,y) \neq 0$, *procederemos por casos:*

(i) *Si* $z = x$ *o* $z = y$ *entonces,* $\rho_k(x,y) \leq \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$,

(ii) *Si* $z \neq x$ *o* $z = y$ *entonces,*

a) $f(z) < f(x) < f(y)$ *y* $\rho_k(x,y) = f(y) - f(x) \leq k + f(y) - f(z)$
$= \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$,

b) $f(z) < f(y) < f(x)$ *y* $\rho_k(x,y) = k \leq k + f(y) - f(z)$

$= \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$,

c) $f(x) < f(z) < f(y)$ *y* $\rho_k(x,y) = f(y) - f(x)$
$\leq f(y) - f(z) + f(z) - f(x) = \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$,

d) $f(x) < f(y) < f(z)$ *y* $\rho_k(x,y) = f(y) - f(x) \leq f(z) - f(x) + k$
$= \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$,

e) $f(y) < f(x) < f(z)$ *y* $\rho_k(x,y) = k \leq f(z) - f(x) + k$
$= \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$,

f) $f(y) < f(z) < f(x)$ *y* $\rho_k(x,y) = k \leq k + k = \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$.

Con lo que queda demostrado que $\rho_k(x,y) \leq \rho_k(x,z) + \rho_k(z,y)$ *para toda* $x,y,z \in X$.

Y por lo tanto, ρ_k *es una cuasi-métrica, la cual además es* T_1.

Observación 12 *De hecho* ρ_k *define una familia de cuasi-métricas, todas* T_1.

Proposición 8 *Si* $d(x,y)$ *es una métrica y* $\rho(x,y)$ *es una cuasi-semimétrica entonces,* $d(x,y) + \rho(x,y)$ *es una cuasi-métrica.*

Demostración. *Sea* $q(x,y) = d(x,y) + \rho(x,y)$. *Verifiquemos que cumple con las propiedades:*

(i) *Es evidente que* $q(x,x) = 0$.

(ii) *Finalmente,* $q(x,y) = d(x,y) + \rho(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) + \rho(x,z) + \rho(z,y) = (d(x,z) + \rho(x,z)) + (d(z,y) + \rho(z,y)) = q(x,z) + q(z,y)$, *para toda* $x,y,z \in X$.

Por lo tanto, q *es una cuasi-métrica.* ■

Ejemplo 33 *Por el Ejemplo 32 y utilizando* $\rho_k(x,y)$ *con* $k = 1$, *podemos deducir fácilmente que:*

$$\rho_k^{'}(x,y) = \begin{cases} k(f(y) - f(x)) & f(x) \leq f(y) \\ k & f(y) < f(x) \end{cases},$$

donde $k > 0$ *y* $f : X \to \mathbb{R}$ *inyectiva.*

Es también una cuasi-métrica T_1. *Esto debido a que* $\rho_k^{'}(x,y) = k\rho_1(x,y)$ *y recordemos que si* ρ *es una cuasi-semimétrica (cuasi-métrica) y* $k > 0$ *entonces* $k\rho$ *es una cuasi-semimétrica (cuasi-métrica), lo mismo sucede con la propiedad* T_1.

Ejemplo 34 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *una función creciente. Entonces* $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *definida mediante*

$$\rho(x,y) = \begin{cases} f(y) - f(x) & , \quad x < y \\ x - y & , \quad x \geq y \end{cases},$$

es una cuasi-métrica. Más aún, si f *es estrictamente creciente entonces* ρ *es* T_1.

En efecto, es evidente que $\rho(x,x) = 0$. *Probemos que cumple la desigualdad triangular:*

Lo analizaremos por casos, para ello sean $A = \rho(x,y)$ *y* $B = máx\{f(z) - f(x), x - z\} + máx\{f(y) - f(z), z - y\}$,

Caso 1 *Supongamos que* $f(y) - f(x) = f(y) - f(z) + f(z) - f(x) > 0$. *Entonces,* $A = f(y) - f(x)$.

Asumamos ahora que:

(i) $f(y) - f(z) > 0$ *y* $f(z) - f(x) < 0$. *Así,*

$B = f(y) - f(z) + x - z$ *y* $f(z) < f(x)$. *Luego,* $f(y) - f(x) < f(y) - f(z)$. *Por lo tanto,* $A \leq B$.

(ii) $f(y) - f(z) < 0$ *y* $f(z) - f(x) > 0$. *De lo anterior,*

$B = z - y + f(z) - f(x)$ *y* $f(y) < f(z)$. *Luego,* $f(y) - f(x) < f(z) - f(x)$. *Así,* $A \leq B$.

(iii) $f(y) - f(z) > 0$ *y* $f(z) - f(x) > 0$. *Se concluye que,*

$B = f(y) - f(z) + f(z) - f(x) = f(y) - f(x)$. *Por lo cual,* $A = B$.

Caso 2 *Supongamos ahora que* $x - y = x - z + z - y > 0$. *Entonces,* $A = x - y$.

Asumamos que:

(i) *$x-z>0$ y $z-y<0$. Así, $B=x-z+f(y)-f(z)$ y $z<y$. Luego, $x-y<x-z$. Por lo tanto, $A\leq B$.*

(ii) *$x-z<0$ y $z-y>$0. De lo anterior, $B=f(z)-f(x)+z-y$ y $x<z$. Luego, $x-y<z-y$. Por esta razón, $A\leq B$.*

(iii) *$x-z>0$ y $z-y>0$. Así,*

$B=x-z+z-y=x-y$. Por consiguiente, $A=B$.

En consecuencia, $\rho(x,y)$ cumple con la desigualdad triangular. Por lo cual es una cuasi-métrica, la cual además es T_1 si f es estrictamente creciente.

Ejemplo 35 *Sea $\rho : X\times X\to[0,\infty)$ dada por*

$$\rho_k(x,y)=\begin{cases} 2(y-x) & x\leq y \\ \frac{x-y}{2} & y<x \end{cases},$$

es una cuasi-métrica.
Es fácil visualizar que

(i) $\rho(x,x)=0$,

(ii) *Resta probar la desigualdad del triángulo.*
Definamos $A=\text{máx}\left\{2(y-x),\frac{x-y}{2}\right\}$ y $B=\text{máx}\left\{2(z-x),\frac{x-z}{2}\right\}+\text{máx}\left\{2(y-z),\frac{z-y}{2}\right\}$. Y procedemos por casos:

Caso 1 *Supongamos que $y-x=y-z+z-x>0$. Luego, $A=2(y-x)$. Asumamos que:*

a) *$y-z>0$ y $z-x<0$. Entonces, $B=\frac{x-z}{2}+2(y-z)$ y $z<x$. Así, $y-x<y-z$. Por esta razón, $A\leq B$.*

b) *$y-z<0$ y $z-x<0$. Luego, $B=-\frac{z-y}{2}+2(z-x)$ y $z>x$, de este modo, $x-y<z-y$. Y por lo tanto, $A\leq B$.*

(c) *$y-z>0$ y $z-x>0$. Luego,*

$B=2(z-x)+2(y-z)=2(y-x)$. Por lo cual, $A=B$.

Caso 2 *Supongamos ahora que* $x - y = x - z + z - y > 0$. *Luego,* $A = \frac{x-y}{2}$.

Y asumamos que:

(a) $x - z > 0$ *y* $z - y < 0$. *Luego,* $B = \frac{x-z}{2} + 2(y - z)$ *y* $z < y$. *Así,* $x - y < y - z$. *Por lo cual,* $A \leq B$.

(b) $x - z > 0$ *y* $z - y < 0$. *De forma que,* $B = 2(z - x) + \frac{z-y}{2}$ *y* $x < z$. *De este modo,* $x - y \leq z - y$. *Por lo tanto,* $A \leq B$.

(c) $x - z > 0$ *y* $z - y > 0$. *Luego,* $B = \frac{z-y}{2} + \frac{x-z}{2} = \frac{x-y}{2}$. *Por ello,* $A = B$.

Luego, $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, *para todo* $x, y, z \in X$.

De tal modo que ρ *es una cuasi-semimétrica.*

Además es claro que si $x \neq y, \rho(x,y) > 0$; *por lo cual* ρ *es una cuasi-métrica* T_1.

Ejemplo 36 *Daremos ahora un ejemplo de cuasi-semimétrica definida mediante el uso de una norma (cualquiera). Sea* X *un espacio normado y sea* $\rho_{n,m} : X \times X \to \mathbb{R}$ *definida por* $\rho_{n,m}(x,y) = \text{máx}\{\frac{\|y\|-\|x\|}{n}, \frac{\|x\|-\|y\|}{m}\}$ *donde* $n, m \in \mathbb{Z}^+(\mathbb{Q}^+), n \neq m$. *Entonces* $\rho_{n,m}$ *es una cuasi-semimétrica.*

En efecto, evidentemente $\rho_{n,m}(x,y) \geq 0$ *y* $\rho_{n,m}(x,x) = 0$. *Falta verificar la desigualdad triangular, para ello definimos como* $A = \rho_{n,m}(x,y)$ *y como* $B = \rho_{n,m}(x,z) + \rho_{n,m}(z,y)$ *y procedemos por casos:*

Caso 1 *Si* $0 < \frac{\|y\|-\|x\|}{n} = \frac{\|y\|-\|z\|+\|z\|-\|x\|}{n}$. *Entonces* $A = \frac{\|y\|-\|x\|}{n}$.

Asumamos que:

(i) $\|y\| - \|z\| > 0$ *y* $\|z\| - \|x\| < 0$. *Luego,*

$B = \frac{\|x\|-\|z\|}{m} + \frac{\|y\|-\|z\|}{n}$ *y* $\|z\| < \|x\|$. *Así,* $\|y\| - \|x\| < \|y\| - \|z\|$ *lo que implica que* $\frac{\|y\|-\|x\|}{n} < \frac{\|y\|-\|z\|}{n}$. *Por lo tanto,* $A \leq B$.

(ii) $\|y\| - \|z\| < 0$ *y* $\|z\| - \|x\| > 0$. *De lo anterior,*

$B = \frac{\|z\|-\|y\|}{m} + \frac{\|z\|-\|x\|}{n}$ *y* $\|y\| < \|z\|$. *Por lo cual,* $\|y\| - \|x\| < \|z\| - \|x\|$ *lo que implica que* $\frac{\|y\|-\|x\|}{n} < \frac{\|z\|-\|x\|}{n}$. *Por lo que,* $A \leq B$.

(iii) *$\|y\| - \|z\| > 0$ y $\|z\| - \|x\| > 0$. Luego,*

$B = \frac{\|y\|-\|z\|}{n} + \frac{\|z\|-\|x\|}{n} = \frac{\|y\|-\|x\|}{n} = A$. Por lo tanto, $A = B$.

Caso 2 *Ahora supongamos que $\frac{\|x\|-\|y\|}{m} = \frac{\|x\|-\|z\|+\|z\|-\|y\|}{m} > 0$. Entonces $A = \frac{\|x\|-\|y\|}{m}$.*

Asumamos que:

(i) *$\|x\| - \|z\| > 0$ y $\|z\| - \|y\| < 0$. Luego,*

$B = \frac{\|x\|-\|z\|}{m} + \frac{\|y\|-\|z\|}{n}$ y $\|z\| < \|y\|$. Así, $\|x\| - \|y\| < \|x\| - \|z\|$ lo que implica que $\frac{\|x\|-\|y\|}{m} < \frac{\|x\|-\|z\|}{m}$. Por lo tanto, $A \leq B$.

(ii) *$\|x\| - \|z\| < 0$ y $\|z\| - \|y\| > 0$. Se concluye que,*

$B = \frac{\|z\|-\|x\|}{n} + \frac{\|z\|-\|y\|}{m}$ y $\|x\| < \|z\|$. Así, $\|x\| - \|y\| < \|z\| - \|y\|$ lo que implica que $\frac{\|x\|-\|y\|}{m} < \frac{\|z\|-\|y\|}{m}$. Por lo cual, $A \leq B$.

(iii) *$\|x\| - \|z\| > 0$ y $\|z\| - \|y\| > 0$. De lo anterior,*

$B = \frac{\|x\|-\|z\|}{m} + \frac{\|z\|-\|y\|}{m} = \frac{\|x\|-\|y\|}{m} = A$. Por consiguiente, $A = B$.

Por lo tanto, $\rho_{n,m}(x, y) \leq \rho_{n,m}(x, z) + \rho_{n,m}(z, y)$, para toda $x, y, z \in X$.

Por lo cual $\rho_{n,m}$ es una cuasi-semimétrica

Sin embargo, $\rho_{n,m}$ no es una cuasi-métrica pues $\|x\| = \|-x\|$, es decir, $\rho_{n,m}(x, -x) = 0$ para toda $x \in X$, esto es, existen $x, y \in X, x \neq y$ $(y = -x)$ tales que $\rho_{n,m}(x, y) = 0$. Y por lo anterior, $\rho_{n,m}$ tampoco es T_1.

Ahora, sabemos que $d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica y que si (X, d) es un espacio métrico entonces, $(X, \alpha d)$ con $\alpha > 0$ también es espacio métrico.

Por lo anterior, $d(x, y) = \frac{\|x-y\|}{2}$ es métrica. De hecho, $d(x, y) = \frac{\|x-y\|}{n}$, con $n > 0$ es métrica. Además, sabemos que si $d(x, y)$ es una métrica y $\rho(x, y)$ es una cuasi-semimétrica entonces, $d(x, y) + \rho(x, y)$ es una cuasi-métrica.

Haciendo uso de esto y del Ejemplo 36:

Ejemplo 37 *Sea* $\rho_n^m(x,y) = \frac{\|x-y\|}{n} + \rho_{n,m}(x,y)$. *La cual es una cuasi-métrica.*

Ahora mismo es de nuestro interés $\rho_2^3(x,y) = \frac{\|x-y\|}{2} + \rho_{2,3}(x,y)$. *Pues con* $X = \mathbb{R}^2$ *queremos visualizar* $B_\rho(x,r), B_{\overline{\rho}}(x,r)$ *y* $B_{\rho^s}(x,r)$. *En particular* $B_\rho(0,r)$, $B_{\overline{\rho}}(0,r)$ *y* $B_{\rho^s}(0,r)$.

A continuación se muestran:

$B_{\rho_2^3}(0,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \rho_2^3(0,y) < r\}$. *Pero* $\rho_2^3(0,y) = \frac{\|y\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} = \|y\|$.

Así, $B_{\rho_2^3}(0,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| < r\}$.

$B_{\overline{\rho}_2^3}(0,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \overline{\rho}_2^3(0,y) < r\} = \{y \in \mathbb{R}^2 : \overline{\rho}_2^3(y,0) < r\}$.

Pero $\overline{\rho}_2^3(y,0) = \frac{\|y\|}{2} + \frac{\|y\|}{3} = \frac{5}{6}\|y\|$.

Luego, $B_{\overline{\rho}_2^3}(0,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \frac{5}{6}\|y\| < r\} = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| < \frac{6}{5}r\}$.

Por lo tanto, $B_{(\rho_2^3)^s}(0,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| < r\}$.

Gráficamente si utilizamos la norma euclidiana:

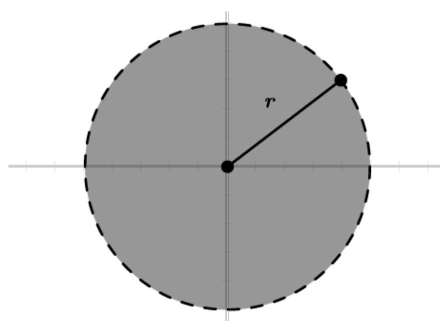

Figura 2.5 $B_{\rho_2^3}(0,r)$

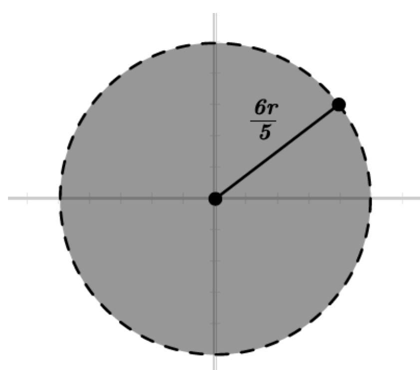

Figura 2.6 $B_{\overline{\rho}_2^3}(0,r)$

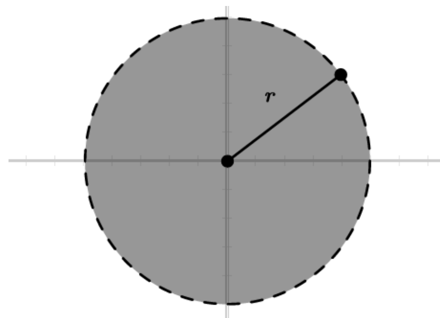

Figura 2.7 $B_{(\rho_2^3)^s}(0,r) = B_{\|\cdot\|}(0,r)$

Al igual que en otro de los ejemplos previamente presentados, la super "s" tiene bolas abiertas que coinciden con las generadas por la métrica en $\mathbb{R}^2$ *inducida por la norma euclidiana; solo que en este caso las bolas abiertas que coinciden son aquellas centradas en el origen. Más aún, se tiene que las bolas abiertas de la* ρ_2^3 *coinciden también con las de la métrica euclidiana (las centradas en el origen). Lo mismo sucede si utilizamos otras normas en* $\mathbb{R}^2$, *por ejemplo las que motivan la Fig.* 1.4.

Definición 49 *Sea* (X,ρ) *espacio cuasi-semimétrico y* (x_n) *una sucesión en* X. *La convergencia de una sucesión* (x_n) *a* x *con respecto a* $\tau(\rho)$, *llamada* $\rho-$*convergencia y denotada por* $x_n \xrightarrow{\rho} x$, *puede ser caracterizada de la siguiente forma:*

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \iff \rho(x,x_n) \longrightarrow 0. \tag{3.1.2}$$

también

$$x_n \xrightarrow{\overline{\rho}} x \iff \overline{\rho}(x,x_n) \longrightarrow 0 \iff \rho(x_n,x) \longrightarrow 0. \tag{3.1.3}$$

Proposición 9 *Sea* (x_n) *una sucesión en un espacio cuasi-semimétrico* (X,ρ).

1. Si (x_n) *es* $\tau_\rho-$*convergente a* x *y* $\tau_{\overline{\rho}}-$*convergente a* y, *entonces* $\rho(x,y)=0$.

2. Si (x_n) *es* $\tau_\rho-$*convergente a* x *y* $\rho(y,x)=0$, *entonces* (x_n) *es también* $\tau_\rho-$*convergente a* y.

Demostración. *1. Haciendo* $n \longrightarrow \infty$ *en la desigualdad* $\rho(x,y) \le \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y)$, *uno obtiene que* $\rho(x,y)=0$.

2. Se sigue de $\rho(y,x_n) \le \rho(y,x) + \rho(x,x_n) = \rho(x,x_n) \longrightarrow 0$, *cuando* $n \longrightarrow \infty$. ■

A continuación introducimos los espacios cuasi-métricos balanceados que presenta Doitchinov en [4]:

Definición 50 *Sea (X, ρ) un espacio cuasi-semimétrico T_1. La cuasi-semimétrica ρ se llama balanceada si la siguiente condición se cumple:*

$$[\lim_{m,n} \rho(v_m, u_n) = 0 \wedge \forall n, \rho(u, u_n) \leq r \wedge \forall m, \rho(v_m, v) \leq s] \Longrightarrow$$

$$\rho(u, v) \leq r + s, \tag{3.1.4}$$

para todas las sucesiones $(u_n), (v_m)$ en X y todas las $u, v \in X$.

Un espacio cuasi-semimétrico T_1 (X, ρ), donde ρ es una cuasi-métrica balanceada es llamado un espacio cuasi-métrico balanceado o un espacio B-cuasi-métrico.

Ejemplo 38 *El espacio (X, ρ) del ejemplo 26 es balanceado con*

$$\rho(x, y) = máx\{f(x) - f(y), \frac{(f(y) - f(x))}{2}\}.$$

En efecto, sean (x_n) y (y_m) sucesiones en X tales que:

$$[\lim_{n,m} \rho(y_m, x_n) = 0 \wedge \forall n, \rho(x, x_n) \leq r \wedge \forall m, \rho(y_m, y) \leq s].$$

Tenemos que:

1. $\rho(x, y) = f(x) - f(y)$ *ó*

2. $\rho(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{2}$

Si sucede 1 *entonces* $\rho(y, x) = \frac{\rho(x,y)}{2}$. *Si pasa* 2 *entonces* $\rho(y, x) = 2\rho(x, y)$.

Luego, $\rho(x_n, y_m) = \frac{\rho(y_m, x_n)}{2} \vee \rho(x_n, y_m) = 2\rho(y_m, x_n)$.

En ambos casos tenemos que $\lim_{m,n} \rho(x_n, y_m) = 0$.

Aplicando la desigualdad del triángulo obtenemos que:

$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y_m) + \rho(y_m, y)$

$\leq r + s + \rho(x_n, y_m)$.

Así, $\rho(x, y) \leq r + s$.

Por lo tanto, (X, ρ) *es un espacio balanceado.*

Como ya hemos establecido, es de nuestro interés conocer bajo que condiciones los espacios resultan ser T_1 y T_2 principalmente. Es por ello que al igual que como se hizo con la proposición 7, citaremos algunos resultados que aparecen en Cobzas [5] que establecen dichas condiciones. Incluyendo únicamente las partes que son de interés, para posteriormente hacer uso de ellas en la demostración de nuevos resultados. Tales resultados que se citan son las proposiciones 10, 11 y 12.

Proposición 10 *[4] Sea (X,ρ) un espacio B-cuasi-métrico.*

1. Las siguientes afirmaciones se cumplen para todas las sucesiones $(x_m),(y_n)$ en X y toda $x,y\in X$.

(i) $[\lim_n \rho(x,x_n)=0\wedge\forall n,\rho(y,x_n)\le r]\Longrightarrow\rho(y,x)\le r;$

(ii) $[\lim_n \rho(x_n,x)=0\wedge\forall n,\rho(x_n,y)\le r]\Longrightarrow\rho(x,y)\le r;$ (3.1.5)

(i) $[\lim_n \rho(x,x_n)=0\wedge\lim_n \rho(y,x_n)=0]\Longrightarrow x=y;$

(ii) $[\lim_n \rho(x_n,x)=0\wedge\lim_n \rho(x_n,y)=0]\Longrightarrow x=y;$ (3.1.6)

$$[\lim_n \rho(x_n,x)=0\wedge\lim_n \rho(y,y_m)=0\wedge\forall m,n,\rho(x_n,y_m)\le r]\Rightarrow\rho(x,y)\le r; \tag{3.1.7}$$

(i) $[\lim_n \rho(x_n,x)=0\wedge\lim_n \rho(y,y_m)=0]\Longrightarrow\lim_{m,n}\rho(x_m,y_n)=\rho(x,y);$

(ii) $\lim_n \rho(x_n,x)=0\Longrightarrow\lim_n \rho(x_n,y)=\rho(x,y);$

(iii) $\lim_n \rho(x,x_n)=0\Longrightarrow\lim_n \rho(y,x_n)=\rho(y,x).$ (3.1.8)

2. Las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$ son T_2 (Hausdorff). Para cada $y\in X$ fija la función $\rho(\cdot,y)$ es $\tau_{\overline{\rho}}-$continua sobre X y $\rho(y,\cdot)$ es $\tau_\rho-$continua sobre X.

Demostración. *1. Para probar* (3.1.5) *(i) y (ii), hacemos en* (3.1.4)
$u_n=x_n,v_m=x,u=y,v=x$, respectivamente, $u_m=x,v_n=x_n$,
$u=x,v=y$ (con m,n teniendo papeles intercambiados).

Para probar (3.1.6) *(i), sea $\varepsilon>0$. Como $\rho(y,x_n)\longrightarrow 0$, existe $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que $\rho(y,x_n)\le\varepsilon$ para toda $n\ge n_\varepsilon$. Como $\rho(x,x_n)\longrightarrow 0$, una aplicación de* (3.1.5) *(i) nos da que $\rho(y,x)\le\varepsilon$. Ya que $\varepsilon>0$ fue arbitrariamente elegido, esto implica que $\rho(y,x)=0$, y así $x=y$ (en la definición de un espacio cuasi-métrico balanceado hemos requerido que la topología τ_ρ sea T_1). La afirmación (ii) se sigue similarmente.*

2. El hecho de que las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$ son T_2 se sigue de (3.1.6) *(i) y (ii) respectivamente.*

El resto de las demostraciones pueden ser consultadas en Cobzas [5]. ∎

En general la topología generada por una norma asimétrica es T_0 pero no T_1. Una condición para que la topología de un espacio normado asimétrico sea Hausdorff está en términos de un funcional $p^\diamond : X \longrightarrow [0, \infty)$ asociada a una seminorma asimétrica p definida sobre un espacio vectorial real X. Dicho resultado aparece en el trabajo de García-Raffi, Romaguera y Sánchez-Pérez [6]. A continuación se presenta dicho resultado.

Definición 51 *Dado un espacio seminormado asimétrico (X, p), la función $p^\diamond$ está definida por la fórmula*

$$p^\diamond (x) = \acute{\imath}nf\{p(x') + p(x' - x) : x' \in X\}, x \in X. \tag{3.2.6}$$

Proposición 11 *El funcional $p^\diamond$ es una seminorma (simétrica) sobre X, $p^\diamond \leq p$, y $p^\diamond$ es la seminorma más grande sobre X mayorizada por p.*

Demostración. *Primero observar que, reemplazando x' por $x' - x$ en* $(3.2.6)$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} p^\diamond(-x) &= \acute{\imath}nf\{p(x') + p(x' + x) : x' \in X\} \\ &= \acute{\imath}nf\{p(x' - x) + p((x' - x) + x) : x' \in X\} = p^\diamond(x), \end{aligned}$$

luego $p^\diamond$ es simétrica.

$p^\diamond(\alpha x) = \alpha p^\diamond(x)$, $x \in X, \alpha \geq 0$, *es obvia (tomando $\alpha x'$).*

Finalmente se comprueba la desigualdad del triángulo.

Para $x, y \in X$ y $x', y' \in X$ arbitrarios, tenemos que

$$\begin{aligned} p^\diamond(x + y) &\leq p(x' + y') + p(x' + y' - x - y) \\ &\leq p(x') + p(x' - x) + p(y') + p(y' - y), \end{aligned}$$

así, pasando al ínfimo con respecto a $x', y' \in X$, obtenemos

$$p^\diamond(x + y) \leq p^\diamond(x) + p^\diamond(y).$$

Supongamos ahora que existe una seminorma q sobre X tal que $q \leq p$, es decir, $\forall z \in X, q(z) \leq p(z)$, y $p^\diamond(x) < q(x) \leq p(x)$, para algún $x \in X$. Entonces, por la definición de $p^\diamond$, existe $x' \in X$ tal que $p^\diamond(x) < p(x') + p(x' - x) < q(x)$, llevando a la siguiente contradicción

$$q(x) \leq q(x') + q(x - x') = q(x') + q(x' - x) \leq p(x') + p(x' - x) < q(x). \quad \blacksquare$$

En la siguiente proposición se reúnen las propiedades de separación (las cuales son un par) de un espacio seminormado asimétrico.

Proposición 12 *[6] Sea (X, p) un espacio seminormado asimétrico.*

1. La topología τ_p es T_0 si y sólo si, para cada $x \in X, x \neq 0, p(x) > 0$ o $p(-x) > 0$, en otras palabras si y sólo si, p es una norma asimétrica.
2. La topología τ_p es T_1 si y sólo si, $p(x) > 0$ para toda $x \in X, x \neq 0$.
3. La topología τ_p es Hausdorff si y sólo si, $p^{\diamond}(x) > 0$ para cada $x \neq 0$.

Demostración. *La afirmación de* 1 *y* 2 *se sigue de la proposición 7*-1.
3. *Si $p^{\diamond}(x) > 0$ cuando $x \neq 0$, entonces $p^{\diamond}$ es una norma sobre X, así que la topología $\tau_{p^{\diamond}}$ generada por $p^{\diamond}$ es Hausdorff. La desigualdad $p^{\diamond} \leq p$ implica que la topología τ_p es más fina que $\tau_{p^{\diamond}}$, por lo que es Hausdorff también.*

Supongamos $p^{\diamond}(x) = 0$ para algún $x \neq 0$. Por la definición (3.2.6) *de $p^{\diamond}$, existe una sucesión (x_n) en X tal que $\lim_n [p(x_n) + p(x_n - x)] = p^{\diamond}(x) = 0$. Esto implica que $\lim_n p(x_n) = 0$ y $\lim_n p(x_n - x) = 0$, mostrando que la sucesión (x_n) tiene dos límites con respecto a τ_ρ. Consecuentemente, la topología τ_p no es Hausdorff.* ■

Observación 13 *Sea (E, q) un espacio normado asimétrico. Hacemos la convención de que ρ_q representa a τ_{ρ_q}.*

ρ_q es $T_1 \Longleftrightarrow q(x) \neq 0, \forall x \neq 0$. Análogamente para su conjugada $\overline{\rho}_q$.

En efecto.

$\Rightarrow$) Si ρ_q es T_1 entonces, para cada par $x, y \in E$, $x \neq y$, existen $B_{\rho_q}(x, r) \wedge B_{\rho_q}(y, r'), r, r' > 0$; tales que $x \notin B_{\rho_q}(y, r') \wedge y \notin B_{\rho_q}(x, r)$.
Luego, $\rho_q(x, y) > r > 0 \wedge \rho_q(y, x) > r' > 0$.
Por lo tanto, $\rho_q(x, y) > 0, \forall x \neq y$. Haciendo $z = y - x$, tenemos que $z \neq 0$ y $0 < \rho_q(x, y) = q(y - x) = q(z)$. Así, $q(z) \neq 0, \forall z \neq 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $q(z) \neq 0, \forall z \neq 0$, es decir, $q(z) > 0, \forall z \neq 0$. Sean $x, y \in E$ arbitrarias tales que $x \neq y$. Haciendo $z = y - x$ tenemos que $q(y - x) = \rho_q(x, y) > 0, \forall x \neq y$. Sea $r := \rho_q(x, y)$ y $r' = \frac{r}{2} > 0$. Luego, $y \notin B_{\rho_q}(x, r')$ ya que si $y \in B_{\rho_q}(x, r')$ entonces $r = \rho_q(x, y) < r' = \frac{r}{2}$. ¡Contradicción! Análogamente $x \notin B_{\rho_q}(y, r'')$, para alguna $r'' > 0$. Por lo tanto, ρ_q es T_1.

Así como se tiene que "si $d(x,y)$ es una métrica y $\rho(x,y)$ es una cuasi-semimétrica entonces, $d(x,y)+\rho(x,y)$ es una cuasi-métrica". Un resultado similar se tiene para las normas asimétricas:

Proposición 13 *Si $\|\cdot\|$ es una norma y p es una norma asimétrica, entonces $T(x)=p(x)+\|x\|$ es una norma asimétrica T_1.*

Demostración. *Verificamos que cumple con las propiedades:*

(i) Sea $\alpha>0$, $T(\alpha x)=p(\alpha x)+\|\alpha x\|=\alpha p(x)+\alpha\|x\|=\alpha(p(x)+\|x\|)$ $=\alpha T(x)$.

(ii) Veamos que cumple con la desigualdad triangular:
$T(x+y)=p(x+y)+\|x+y\|\leq p(x)+p(y)+\|x\|+\|y\|$
$=(p(x)+\|x\|)+(p(y)+\|y\|)=T(x)+T(y),\forall x,y\in X$

(iii) Dado que $p(x)\geq 0\wedge\|x\|\geq 0\wedge\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$, se tiene que $T(x)=0\Longleftrightarrow x=0$.

Por lo tanto, T es una norma asimétrica T_1. ■

Tomando en cuenta las definiciones de equivalencia de métricas y normas junto con el teorema que dice "Ser equivalentes métricamente implica ser equivalentes topológicamente" planteamos el siguiente resultado análogo para los espacios asimétricos:

Teorema 13 *Sean ρ_1 y ρ_2 cuasi-semimétricas (cuasi-métricas) en X. Ser equivalentes métricamente implica ser equivalentes topológicamente.*

Demostración. *Ya que ρ_1 y ρ_2 son equivalentes métricamente, existen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ tales que: $\rho_1(x,y)\leq\alpha\rho_2(x,y)\wedge\rho_2(x,y)\leq\beta\rho_1(x,y)$, para toda $x,y\in X$.*

Sea la bola abierta $B_{\rho_1}(x,\varepsilon)$. Si $y\in B_{\rho_2}(x,\frac{\varepsilon}{\alpha})$ entonces, $\rho_2(x,y)<\frac{\varepsilon}{\alpha}$, como $\rho_1(x,y)\leq\alpha\rho_2(x,y)<\alpha(\frac{\varepsilon}{\alpha})=\varepsilon$, por lo tanto, $y\in B_{\rho_1}(x,\varepsilon)$. Luego, $B_{\rho_2}(x,\frac{\varepsilon}{\alpha})\subseteq B_{\rho_1}(x,\varepsilon)$. Así, $\tau(\rho_1)\subseteq\tau(\rho_2)$.

Análogamente, $B_{\rho_2}(x,\frac{\varepsilon}{\beta})\subseteq B_{\rho_2}(x,\varepsilon)$ y por lo tanto, $\tau(\rho_2)\subseteq\tau(\rho_1)$.

Por lo anterior, $\tau(\rho_1)=\tau(\rho_2)$. ■

Una pregunta hasta cierto punto natural es: ¿Qué pasa con las conjugadas de dos cuasi-métricas que son equivalentes? Lo que nos lleva al siguiente resultado.

Corolario 4 *Sean ρ_1 y ρ_2 cuasi-métricas en X. Si ρ_1 y ρ_2 son equivalentes métricamente entonces, $\overline{\rho}_1$ y $\overline{\rho}_2$ también lo son.*

Demostración. *Sabemos que ρ_1 y ρ_2 son métricamente equivalentes entonces, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que: $\rho_1(x,y) \leq \alpha\rho_2(x,y) \wedge \rho_2(x,y) \leq \beta\rho_1(x,y)$, para toda $x, y \in X$.*

En particular, $\rho_1(y,x) \leq \alpha\rho_2(y,x) \wedge \rho_2(y,x) \leq \beta\rho_1(y,x)$, para toda

$x, y \in X$. Es decir, $\overline{\rho}_1(x,y) \leq \alpha\overline{\rho}_2(x,y) \wedge \overline{\rho}_2(x,y) \leq \beta\overline{\rho}_1(x,y)$, para toda $x, y \in X$.

Por lo tanto, $\overline{\rho}_1$ y $\overline{\rho}_2$ son equivalentes métricamente, más aún, topológicamente equivalentes. ■

Teorema 14 *Sean $\|\cdot\|$ y p, norma arbitraria y norma asimétrica arbitraria (respectivamente) en $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe $\beta > 0$ tal que $p(x) \leq \beta\|x\|$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. *Basta demostrarlo con la norma $\|\cdot\|_1$ y utilizar la transitividad de la relación de equivalencia "normas equivalentes".*

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Luego, $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Así, $p(x) = p(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)$

$\leq p(x_1e_1) + \ldots + p(x_ne_n) = |x_1|p((-1)^{\frac{x_1^-}{x_1}}e_1) + \ldots + |x_n|p((-1)^{\frac{x_n^-}{x_n}}e_n)$

$\leq \beta(|x_1| + \ldots + |x_n|) = \beta\|x\|_1$,

donde $x^- := máx\{-x, 0\}, x \in \mathbb{R}$

y $\beta = máx\{p(e_1), \ldots, p(e_n), p(-e_1), \ldots, p(-e_n)\}$.

Por lo tanto, $p(x) \leq \beta\|x\|_1$. ■

Teorema 15 *Sean $\|\cdot\|$ y p, norma arbitraria y norma asimétrica arbitraria (respectivamente) en E espacio de dimensión finita. Entonces, existe $\beta > 0$ tal que $p(x) \leq \beta\|x\|$, para toda $x \in E$.*

Demostración. *Misma idea que en el anterior resultado; usando equivalencia de normas y el Teorema 14.* ■

Teorema 16 *Sean $\|\cdot\|$ norma arbitraria en $\mathbb{R}^n$ y p norma asimétrica arbitraria en $\mathbb{R}^n$ tal que $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Entonces, existen α, $\beta > 0$ tales que $\alpha\|x\| \leq p(x) \leq \beta\|x\|$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$, esto es, p y la norma son equivalentes.*

Demostración. *Basta probar el resultado utilizando la norma $\|\cdot\|_1$, pues el Teorema 12 para normas equivalentes y el hecho de que la relación de* *"normas equivalentes" es una relación de equivalencia, nos permiten hacer la transición hacia cualquier otra norma de* $\mathbb{R}^n$.

Para probar la segunda desigualdad $p(x) \leq \beta\|x\|_1$ *tan solo aplicamos el Teorema 14.*

Supongamos ahora que la primer desigualdad $\alpha\|x\|_1 \leq p(x)$ *es falsa, lo que implica que para cada* $\alpha = 1/k$ $(k \in \mathbb{N})$ *existe un vector* x_k *tal que* $p(x_k) < \frac{1}{k}\|x_k\|_1$. *Consideremos la sucesión* $y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_1}$ $(k \in \mathbb{N})$, *que verifica* $\|y_k\|_1 = 1$.

Como (y_k) *es una sucesión acotada –pues* $\|y_k\|_1 = 1$*- contiene una subsucesión convergente a un punto* $a \in \mathbb{R}^n$, $y_{k_j} \underset{j}{\rightarrow} a$.

Tenemos $\|a\|_1 = \lim\limits_{j} \left\|y_{k_j}\right\|_1 = 1$, *luego* $a \neq 0$.

Por otra parte, aplicando la propiedad triangular obtenemos:

$p(a) \leq p(a - y_{k_j}) + p(y_{k_j}) \leq \beta\|a - y_{k_j}\|_1 + \frac{1}{k_j} \underset{j}{\rightarrow} 0.$

Así, $p(a) = 0$ *y* $a = 0$. *Contradicción!!*

Por lo tanto, $\alpha\|x\|_1 \leq p(x)$ *para toda* $x \in \mathbb{R}^n$.

Juntando ambos resultados se tiene que: $\alpha\|x\|_1 \leq p(x) \leq \beta\|x\|_1$, *para toda* $x \in \mathbb{R}^n$.

Es decir, son equivalentes y por lo tanto generan la misma topología. ■

Teorema 17 *Todas las normas asimétricas en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, *son equivalentes.*

Demostración. *Consecuencia directa del Teorema 16, haciendo uso de la propiedad de la transitividad de la relación de equivalencia "normas equivalentes".* ■

Observación 14 *Recordemos que* p^s *es una norma cuando* p *es una norma asimétrica y* (X, p^s) *es un espacio normado. Por lo cual, para las normas asimétricas* p *en* $\mathbb{R}^n$ *con la propiedad de que* $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0, p$ *y* p^s *son normas asimétricas equivalentes.*

Observación 15 *Las normas asimétricas* p *en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, *inducen cuasi-métricas* ρ *que son* T_1. *Luego, por la proposición 7 de Cobzas [5] se tiene que* $(\mathbb{R}^n, \rho, \overline{\rho})$ *es Hausdorff a pares.*

Observación 16 *Las normas asimétricas* p *tales que* $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$*, son* T_1*. Pues* $p(x) > 0$*, para cada* $x \neq 0$*.*

Teorema 18 *En un espacio* X *de dimensión finita, sea* p *una norma asimétrica. Si* $p^{\Diamond}(x) > 0$ *para toda* $x \neq 0$ *entonces* (X, ρ_p) *es balanceado, donde* $\rho_p(x, y) = p(y - x)$*.*

Demostración. *Si* $p^{\Diamond}(x) > 0$*,* $\forall x \neq 0$ *tenemos que:*

1) $p(x) > 0, \forall x \neq 0$*. Lo anterior debido a que* $0 < p^{\Diamond} \leq p$ *(Cobzas [5], proposición 11). Lo cual significa que* p *es* T_1 *y por lo tanto* ρ_p *es una cuasimétrica y* T_1*. Así tenemos la primer condición de balanceado.*

2) $p^{\Diamond}$ *es una norma, pues por Cobzas [5] (proposición 11)* $p^{\Diamond}$ *es una seminorma simétrica.*

Debido a que $p^{\Diamond}$ *es una norma y* p *una norma asimétrica en un espacio* X *de dimensión finita, existe* $\beta > 0$ *tal que* $p(x) \leq \beta p^{\Diamond}(x), \forall x \in X$ *, por lo tanto,* $p \equiv p^{\Diamond}$*.*

Por último, sean $x, y \in X$ *y* $(x_n), (y_m)$ *sucesiones en* X *tales que:*

$$\lim_{n,m} \rho_p(y_m, x_n) = 0 \wedge \forall n, \rho_p(x, x_n) \leq r \wedge \forall m, \rho_p(y_m, y) \leq s.$$

Y haciendo uso de la desigualdad del triángulo para la cuasi-métrica:

$$\rho_p(x, y) \leq \rho_p(x, x_n) + \rho_p(x_n, y_m) + \rho_p(y_m, y) \leq r + s + \rho_p(x_n, y_m),$$

pero

$$\frac{\rho_p(x_n, y_m)}{\beta} = \frac{p(y_m - x_n)}{\beta} \leq p^{\Diamond}(y_m - x_n) = p^{\Diamond}(x_n - y_m) \leq p(x_n - y_m)$$

$= \rho_p(y_m, x_n)$*. Luego,* $\frac{\rho_p(x_n, y_m)}{\beta} \leq \rho_p(y_m, x_n)$*.*

Como $\lim_{n,m} \rho_p(y_m, x_n) = 0$ *entonces* $\lim_{n,m} \rho_p(x_n, y_m) = 0$*.*

Por lo cual, $\rho_p(x, y) \leq r + s$*.*

Por lo tanto, (X, ρ_p) *es balanceado.* ■

Más aún, hemos demostrado que:

Teorema 19 *En un espacio X de dimensión finita, todas las normas asimétricas p tales que $p^{\Diamond}(x) > 0, \forall x \neq 0$ son equivalentes entre ellas, a su respectiva conjugada y a las normas en el espacio.*

Lo anterior debido a que $p^{\Diamond}$ es una norma, que resulta en este caso ser equivalente a las normas asimétricas p que cumplen dicha condición; en combinación con el Teorema 12 y recordando que la relación "normas equivalentes" es una relación de equivalencia.

Observación 17 *Sea p una norma asimétrica, decir que $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ es equivalente a decir que $p(x) > 0, \forall x \neq 0$, o lo que es lo mismo T_1.*

Corolario 5 *Si p es una norma asimétrica tal que $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, en un espacio X de dimensión finita, entonces $\overline{p}$ también tiene dicha propiedad y son por lo tanto un par de normas asimétricas equivalentes, por consecuencia (X, ρ_p) es balanceado.*

Observación 18 *Este resultado se cumple si p es tal que $p^{\Diamond} > 0$. Sin embargo, más adelante probaremos que $p > 0$ implica $p^{\Diamond} > 0$, por lo que se podrá concluir también que el espacio normado asimétrico de dimensión finita es balanceado de una forma más general.*

Ahora mostraremos un ejemplo de una norma asimétrica p en un espacio X de dimensión finita, tal que para algún $x \neq 0$, $p^{\Diamond}(x) = 0$.

Ejemplo 39 $X = \mathbb{R}$, $p(x) = \{ {}^{x,\ x \geq 0}_{0,\ x<0}$

Sea $x \neq 0$, fijo. Observemos que si escogemos $x' < 0 \wedge x < 0 \wedge x' < x$, se tiene que:

$p(x') + p(x' - x) = 0 + 0 = 0.$

Por lo tanto, $p^{\Diamond}(x) = ínf\{p(x') + p(x' - x) : x' \in X\} = 0.$

Lo que nos conduce a la pregunta lógica: ¿En un espacio X de dimensión finita, si $p(x) > 0$ entonces $p^{\Diamond}(x) > 0$?

Y la respuesta es afirmativa, por el momento únicamente en $\mathbb{R}^n$. Veamos:

Teorema 20 *En $X = \mathbb{R}^n$, sean p una norma asimétrica.*

Si $p(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, entonces $p^{\Diamond}(x) > 0$, $\forall x \neq 0$. Es decir, $p^{\Diamond}(x)$ es norma.

Demostración. *Recordemos que $p^{\Diamond}(x) = ínf\{p(x') + p(x' - x) : x' \in X\}$.*

Si $p(x) > 0$, $\forall x \neq 0$. Sea $x \neq 0$, fijo. Tenemos que por ser $X = \mathbb{R}^n$ y p una norma asimétrica T_1, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha \|x\| \leq p(x)$; donde $\|\cdot\|$ es una norma en X.

Luego, $\alpha \|x'\| + \alpha \|x' - x\| \leq p(x') + p(x' - x)$. Pero, $\|x' - x\| = \|x - x'\|$ y $\|x\| \leq \|x - x'\| + \|x'\|$.

Por lo tanto, $0 < \alpha \|x\| \leq p(x') + p(x' - x), \forall x' \in X$.

Por lo cual $p^{\Diamond}(x) > 0$. Es decir, $p^{\Diamond}(x)$ es una norma. ■

El resultado anterior nos dice que en $\mathbb{R}^n$ no existe p norma asimétrica T_1 tal que $p^{\Diamond}(x) = 0$, para algún $x \neq 0$.

De hecho, implica que $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ siempre es balanceado cuando p es una norma asimétrica T_1.

En la búsqueda de averiguar si en un espacio X de dimensión finita, $p(x) > 0$ implica $p^{\Diamond}(x) > 0$, y que si $p(x) > 0$ implica que $p \equiv \|\cdot\|$, donde $\|\cdot\|$ es una norma en el espacio de dimensión finita. He notado que si uno de ellos se cumple, el otro también se cumplirá. En particular, en la búsqueda del primero me he topado con el siguiente hecho:

Proposición 14 *Sean X un espacio de dimensión finita y p una norma asimétrica. Si $\|\cdot\|$ es una norma en el espacio, entonces $\widetilde{p}(x) = \|x\| + p(x)$ es una norma asimétrica T_1 tal que $\widetilde{p} \equiv \|\cdot\|$.*

Demostración. *Para toda $x \in X$, tenemos que $\|x\| \leq \|x\| + p(x)$.*

Sea $\widetilde{p}(x) = \|x\| + p(x)$.

Sabemos que $\widetilde{p}$ es una norma asimétrica y por ser X un espacio de dimensión finita, tenemos que (por un resultado anterior Teorema 15) existe $\beta > 0$ tal que $\widetilde{p}(x) \leq \beta \|x\|$.

Por lo cual, $\|x\| \leq \|x\| + p(x) = \widetilde{p}(x) \leq \beta \|x\|, \forall x \in X$.

Por lo tanto, $\widetilde{p} \equiv \|\cdot\|$. ■

Para la $\widetilde{p}$ del teorema anterior tenemos las dos siguientes observaciones:

Observación 19 $\widetilde{p}^s(x) = máx\{p(x) + \|x\|, p(-x) + \|-x\|\}$
$= máx\{p(x) + \|x\|, p(-x) + \|x\|\} = máx\{p(x), p(-x)\} + \|x\|$
$= p^s(x) + \|x\|$.

Por lo tanto, $\widetilde{p}^s = p^s + \|\cdot\|$.

Observación 20 *Si p es únicamente una seminorma asimétrica,* $\widetilde{p}(\cdot) = p(\cdot) + \|\cdot\|$ *es también una norma asimétrica.*

Es de nuestro interés mostrar que el Teorema 18 tiene sentido, es decir, que efectivamente existan dichas P norma asimétrica y $P^\Diamond$ norma que cumplan las condiciones del Teorema 18. Para lo cual:

Ejemplo 40 *Sean* $X = \mathbb{R}^2$ *y* $T(x) = p(x) + \|x\|_1$, *donde* $p(x) = máx\{x_2 - x_1, x_2 + x_1, 0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

Tenemos que ver que $T^\Diamond(x) > 0, \forall x \neq 0$.

Para lo cual sea $x \neq 0$, *fijo y sea* x' *en* X *arbitrario, observemos que* $p(x') + \|x'\|_1 + p(x' - x) + \|x' - x\|_1 \geq \|x' - x\|_1 + \|x'\|_1 \geq \|x\|_1 > 0$.

Por lo tanto tenemos que $T^\Diamond(x) > 0, \forall x \neq 0$. *Lo que significa que* $T^\Diamond$ *es norma. Lo anterior también se puede deducir haciendo uso de que T es una norma asimétrica T_1 y aplicando el Teorema 20.*

Finalmente, sean $(x_n), (y_m)$ *sucesiones en* $\mathbb{R}^2$ *y* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *tales que:*

$$\lim_{n,m} \rho_T(y_m, x_n) = 0 \wedge \forall n, \rho_T(x, x_n) \leq r \wedge \forall m, \rho_T(y_m, y) \leq s.$$

Aplicando la desigualdad del triángulo:

$$\rho_T(x, y) \leq \rho_T(x, x_n) + \rho_T(x_n, y_m) + \rho_T(y_m, y) \leq r + s + \rho_T(x_n, y_m),$$

y si recordamos que en $\mathbb{R}^n$ (*en particular* $n = 2$) *existen* $\alpha, \beta > 0$ *tales que* $\alpha T(-x) \leq T(x) \leq \beta T(-x), \forall x \in X = \mathbb{R}^2$ *(Teorema 16), tendremos que*

$$\lim_{n,m} \rho_T(y_m, x_n) = 0 \textit{ implica que } \lim_{n,m} \rho_T(x_n, y_m) = 0.$$

Luego, $\rho_T(x, y) \leq r + s$.

Por lo tanto, (X, ρ_T) *es balanceado.*

Ejemplo 41 *El ejemplo 29, es un ejemplo de una norma asimétrica que no es T_1, pues si $x_2 < 0 \wedge x_1 = 0, p(x) = 0$. Es decir, existe un $x = (x_1, x_2) \neq 0$ tal que $p(x) = máx\{x_2 - x_1, x_2 + x_1, 0\} = 0$.*

Además no existe un $\alpha > 0$, tal que $\alpha \|x\|_1 \leq p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Por el mismo argumento que no es T_1. Luego p no es equivalente a $\|\cdot\|_1$. Y tampoco $(\mathbb{R}^2, p)$ es balanceado, ni Hausdorff. Aunque todo lo anterior ya podiamos deducirlo gracias a los resultados mostrados hasta el momento. Sin embargo, es de utilidad mencionar dicha norma asimétrica con el propósito de ilustrar una $\widetilde{p} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ definida por

$$\widetilde{p}(x) = p(x) + \|x\|_1,$$

que si cumple con todo lo que p no cumple. De hecho, tiene bolas abiertas de la misma forma que las de la norma $\|\cdot\|_1$, pero a escala.

La teoría expuesta hasta este momento nos asegura que es una norma asimétrica T_1, y que el espacio con dicha norma asimétrica es balanceado y Hausdorff. Aun así, veamos por ejemplo que son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\widetilde{p}$:

$\widetilde{p}(x) = máx\{x_2 - x_1, x_2 + x_1, 0\} + \|x\|_1$

$= máx\{x_2 - x_1 + \|x\|_1, x_2 + x_1 + \|x\|_1, \|x\|_1\}$

y se tiene que $x_2 - x_1 \leq |x_1| + |x_2| = \|x\|_1$,

luego, $x_2 - x_1 + \|x\|_1 \leq 2\|x\|_1$, así $\frac{1}{2}(x_2 - x_1 + \|x\|_1) \leq \|x\|_1$.

Análogamente para $x_2 + x_1 + \|x\|_1, \|x\|_1$.

Por lo tanto, $\frac{1}{2}\widetilde{p}(x) \leq \|x\|_1 \leq \widetilde{p}(x)$.

Ahora veamos que a pesar de todo lo anterior, la cuestión referente a las bolas abiertas falla.

Sea $x = (0, 0)$ y $r > 0$.

$B_{\widetilde{p}}((0,0), r) = \{(y_1, y_2) : y_2 - y_1 + \|y\|, y_1 + y_2 + \|y\|, \|y\| < r\}$,

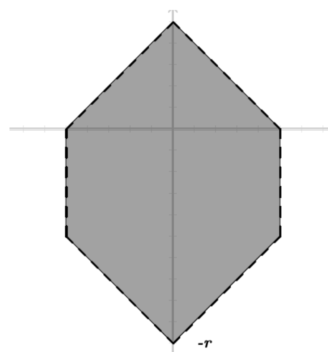

Figura 2.8 $B_{\widetilde{p}}((0,0), r)$

$$B_{\widetilde{\widetilde{p}}}((0,0),r) = \{(y_1,y_2) : y_1 - y_2 + \|y\|, -y_1 - y_2 + \|y\|, \|y\| < r\},$$

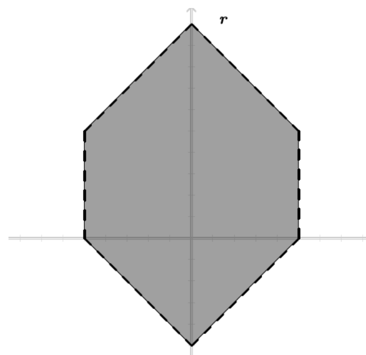

Figura 2.9 $B_{\widetilde{\widetilde{p}}}((0,0),r)$

$$B_{\widetilde{p}^s}((0,0),r) = \{(y_1,y_2) : |y_2 - y_1| + \|y\|, |y_1 + y_2| + \|y\|, \|y\| < r\},$$

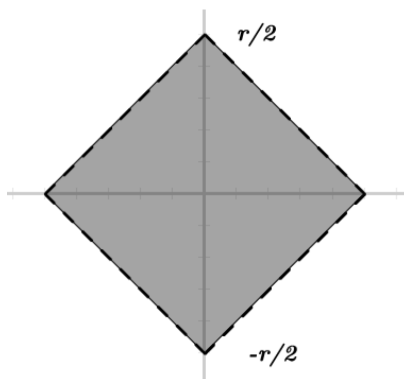

Figura 2.10 $B_{\widetilde{P}^s}((0,0),r)$

$$B_{\|\cdot\|_1}((0,0),r) = \{(y_1,y_2) : \|y\| = |y_1| + |y_2| < r\},$$

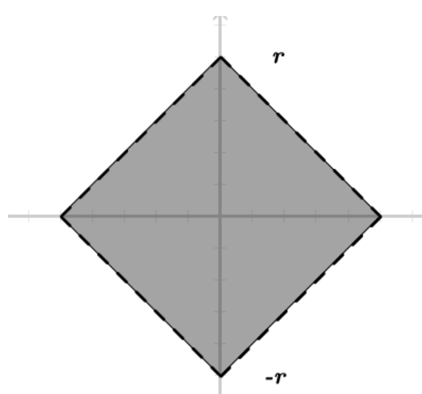

Figura 2.11 $B_{\|\cdot\|_1}((0,0), r)$

Sin embargo, basta cambiar la norma $\|\cdot\|_1$ en este ejemplo por cualquier otra y entonces las bolas abiertas no solo no estarán a escala, sino que ni siquiera en su forma geométrica coincidirán.

A continuación mostramos que sucede con la forma de las bolas abiertas usando por ejemplo $\|\cdot\|_\infty$

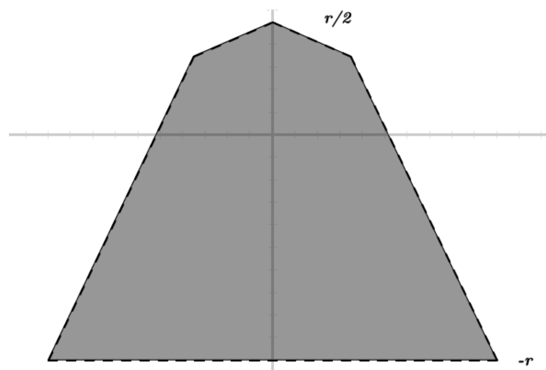

Figura 2.12 $B_{\widetilde{p}}((0,0), r)$

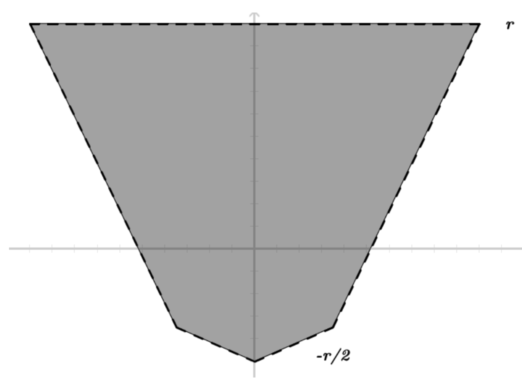

Figura 2.13 $B_{\widetilde{\widetilde{p}}}((0,0), r)$

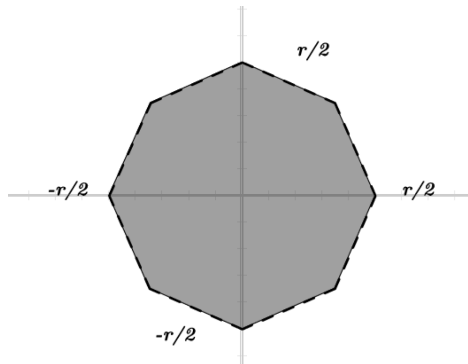

Figura 2.14 $B_{\widetilde{p}^s}((0,0), r)$

La bola $B_{\widetilde{p}^s}((0,0), r)$ *obviamente no coincide en su forma con la bola de* $\|\cdot\|_\infty$.

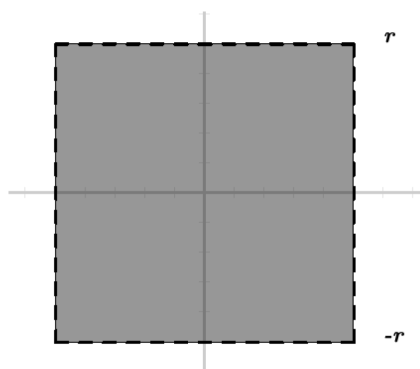

Figura 2.15 $B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0), r)$

Hasta este punto hemos mostrado algunos resultados que han tenido ciertas limitaciones (Teoremas 18 y 20), pero gracias a algunos resultados de García-Raffi [1], estas limitaciones pueden ser superadas. Pues en el caso del Teorema 18 ya no partiremos de la hipótesis de que $p^\Diamond$ sea mayor que 0 para toda $x \neq 0$, sino de que p lo sea y seguir concluyendo que el espacio normado asimétrico de dimensión finita sea balanceado. Y en el caso del Teorema 20, pasará de ser un resultado válido únicamente en $\mathbb{R}^n$ a ser válido en dimensión finita. De acuerdo a los resultados de García-Raffi [1] *en un espacio de dimensión finita* X, *las normas asimétricas* T_1 s*on equivalentes entre ellas mismas y a las normas en el espacio* X. Más adelante haremos uso de este hecho para obtener de parte nuestra algunas consecuencias interesantes.

Primero que nada García-Raffi presenta un resultado clásico:

Lema 4 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio lineal normado de dimensión finita, con una base* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *. Entonces, una sucesión* (x_k) *en* E *converge a* $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$*, si y sólo si, la sucesión* $i-$ *coordenada de* (x_k) *converge a* λ_i*, con respecto a la norma euclidiana,* $i = 1, ..., n$*.*

Y luego generaliza dicho resultado a los espacios lineales normados asimétricos como sigue:

Teorema 21 *Sea* (E, q) *un espacio lineal normado asimétrico de dimensión finita, con base* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$*. Entonces, una sucesión* (x_k) *en* E *converge a* $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ *con respecto a* q*, si y sólo si, la sucesión* $i-$ *coordenada de* (x_k) *converge a* λ_i*, con respecto a la norma euclidiana,* $i = 1, ..., n$*.*

Dado que la prueba es algo extensa y que no le daremos algún uso no la incluiremos, sin embargo se puede consultar en el artículo de García-Raffi [1].

Posteriormente presenta una definición y los resultados que son de nuestro interés:

Definición 52 *Un espacio lineal normado asimétrico* (E, q) *es llamado normable, si hay una norma* $\|\cdot\|$ *sobre el espacio lineal* E *tal que las topologías* τ_{d_q} *y* $\tau_{\|\cdot\|}$ *coinciden sobre* E*.*

Corolario 6 *Sea* (E, q) *un espacio lineal normado asimétrico de dimensión finita y* T_1*. Entonces* (E, q) *es normable por la norma* q^s*.*

Demostración. *Sea* (x_k) *una sucesión en* E *que converge a* x *con respecto a* q*. Por el Teorema 21 y el Lema 4* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge a* x *con respecto a la norma* q^s*. Es decir, por el Teorema 21,* (x_k) *converge a* x *con respecto a* q *si y sólo si, la sucesión* $i-$*coordenada de* (x_k) *converge a* λ_i*, con respecto a la norma euclidiana,* $i = 1, ..., n$*; donde* $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ *y* $\{e_1, ..., e_n\}$ *base. A su vez, por el Lema 4; la sucesión* $i-$*coordenada de* (x_k) *converge a* λ_i*, con respecto a la norma euclidiana si y sólo si,* (x_k) *converge a* x *con respecto a la norma del espacio* E*, digamos* q^s*. Lo cual implica que* τ_{d_q} *coincide con* $\tau_{d_{q^s}}$*,* $\left(\tau_{d_q} = \tau_{d_{q^s}}\right)$*. Pues de no cumplirse que* $\tau_{q^s} \subset \tau_q$*, existiría una* (x_n) *tal que* $q^s(x_n - x) < \frac{1}{n}$ *pero* $q(x_n - x) > \varepsilon$*. Es decir,* $x_n \xrightarrow{q^s} x$ *pero* $x_n \overset{q}{\nrightarrow} x$*. Lo cual es una contradicción.* ■

Y como bien se menciona en el mismo artículo: en particular se observa que, debido al corolario 6, el axioma de separación T_1 implica el axioma de separación T_2 en el caso de dimensión finita.

Una observación que nosotros también haremos más adelante, pero sostenida mediante otro argumento.

Lema 5 *Sea (E, q) un espacio lineal normado asimétrico y τ_{d_q} la topología generada por la cuasi-métrica d_q. Entonces τ_{d_q} es T_1, si y sólo si, $q(y) \neq 0$, para cada $y \in E \setminus \{0\}$.*

La demostración de este lema ya se ha mostrado anteriormente en la Proposición 7 y se puede encontrar en Cobzas [5].

Y finalmente en una nota (observación) aparece el resultado que nos interesa:

Observación 21 *... todas las normas asimétricas sobre un espacio lineal de dimension finita T_1 son equivalentes. El Lema 5 muestra que un espacio lineal normado asimétrico es T_1 si y sólo si, $q(x) \neq 0$, para toda $x \in E \setminus \{0\}$.*

De lo cual tenemos que:

Teorema 22 *Las normas asimétricas T_1 en un espacio normado asimétrico de dimensión finita X, son equivalentes entre sí (incluidas las conjugadas) y también a las normas en el espacio X.*

Demostración. *Sea (E, q) un espacio lineal normado asimétrico de dimensión finita y q^s la norma del supremo usual. Entonces q restringida a*

$S = \{x \in E : q^s(x) = 1\}$ no alcanza el cero, es decir, está acotada por debajo. Pues si no fuera cierto, existiría una sucesión (x_n) en la esfera unitaria tal que

$q(x_n) \longrightarrow 0$ y entonces $q^s(x_n) \longrightarrow 0$ por el teorema 21, pero esto no puede ser ya que $q^s(x_n) = 1$. Así, $q(x_n) > \gamma > 0, \forall x \in S$.

Sabemos que $q(x) \leq q^s(x)$, para toda x, pero para establecer la equivalencia que se afirma resta ver la otra desigualdad, pero por la acotación en la bola unitaria de (E, q^s) se tiene que $\forall x \in E, q\left(\frac{x}{q^s(x)}\right) > \gamma$, esto es, $q(x) > \gamma q^s(x)$.

Por lo tanto, q y q^s son equivalentes $\blacksquare$

Del Teorema 22 tenemos que a nuestro conjunto de normas que son equivalentes en dimensión finita ya conocido, se le acaban de añadir las normas asimétricas T_1.

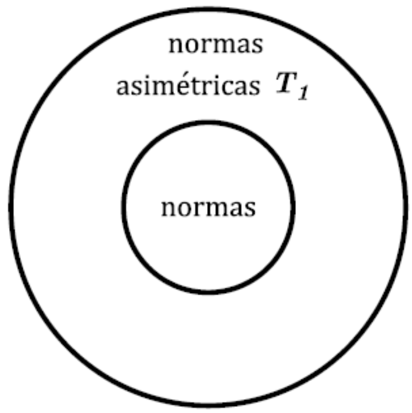

Figura 2.16 Conjunto de normas que son equivalentes en dimensión finita.

Y ahora podemos extender algunos de los resultados previos, además de presentar otros nuevos valiéndonos del resultado anterior.

Teorema 23 *Sea (X,p) un espacio normado asimétrico de dimensión finita.*
Si $p(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ entonces $p^{\Diamond}(x) > 0$, $\forall x \neq 0$. Es decir, $p^{\Diamond}(x)$ es norma.
Demostración. *Recordemos que $p^{\Diamond}(x) = \acute{\imath}nf\{p(x') + p(x'-x) : x' \in X\}$. Si $p(x) > 0$, $\forall x \neq 0$. Sea $x \neq 0$, fijo. Tenemos que por ser X un espacio de dimensión finita y p una norma asimétrica T_1, existe $\alpha > 0$ tal que*
$\alpha \|x\| \leq p(x)$; donde $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera en X.
Luego, $\alpha \|x'\| + \alpha \|x'-x\| \leq p(x') + p(x'-x)$. Pero, $\|x'-x\| = \|x-x'\|$ y $\|x\| \leq \|x-x'\| + \|x'\|$.
Así, $0 < \alpha \|x\| \leq p(x') + p(x'-x), \forall x' \in X$.
Por lo tanto $p^{\Diamond}(x) > 0$. Es decir, $p^{\Diamond}(x)$ es una norma. ■

Al igual que en $\mathbb{R}^n$, del Teorema 23 podemos observar que no existe una p norma asimétrica T_1 en un espacio de dimensión finita, tal que $p^{\Diamond}(x) = 0$.
Más aún, tenemos que:

Corolario 7 *Sea (X,p) un espacio normado asimétrico de dimensión finita. Si la topología τ_p es T_1 entonces τ_p es Hausdorff.*
Demostración. *Por la Proposición 12 tenemos que si τ_p es T_1 entonces $p(x) > 0, \forall x \in X.x \neq 0$, luego por el Teorema 23 $p^{\Diamond}(x) > 0$, $\forall x \neq 0$. Y nuevamente por la Proposición 12, $p^{\Diamond}(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ si y sólo si, τ_p es Hausdorff.* ■

Teorema 24 *Si (X,p) es un espacio normado asimétrico de dimensión finita y T_1, entonces es balanceado.*

Demostración. *Dado que p es T_1 tenemos que $p^{\Diamond}(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, luego por el Teorema 18 se tiene que (X,p) es balanceado.* ■

Observación 22 *Dada la equivalencia que hay entre las normas asimétricas T_1 en un espacio de dimensión finita X, en particular la que existe entre una norma asimétrica p y su conjugada $\overline{p}$, se tiene que el espacio $(X,\overline{p})$ es también balanceado. Aunque esta última afirmación se puede concluir a partir de la Proposición 1.2.74. en Cobzas [5].*

Además, por la equivalencia de p y $\overline{p}$ se tiene que para todas las sucesiones $(u_n),(v_m)$ sobre X, $\lim_{n,m} \rho_p(v_m,u_n) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n,m} \rho_p(u_n,v_m) = 0$.

Observación 23 *De igual manera, $(X,\overline{p})$ es Hausdorff. A diferencia de lo que sucede cuando p es únicamente una norma asimétrica, pues en tal caso solamente se puede asegurar que $(X,p,\overline{p})$ es Hausdorff a pares.*

Obsérvese que (X,p) es Hausdorff si y sólo si, es balanceado.

Observación 24 *No hemos probado que todas las cuasi-métricas T_1 sean equivalentes entre ellas mismas, ni a las métricas del espacio dado (ni en $\mathbb{R}^n$ y mucho menos en dimensión finita). Puede ser que cumplan o no dichas propiedades.*

Por ejemplo:

Ejemplo 42 *Con la cuasi-métrica del Ejemplo 33, el espacio $X = \mathbb{R}$ es balanceado.*

Como ya lo habiamos mencionado, la completitud luce muy diferente en espacios cuasi-métricos. La falta de simetría en la definición de cuasi-métrica causa muchos problemas, principalmente en lo concerniente a la completitud, la compacidad y la acotación total en tales espacios. Hay varias nociones de completitud en espacios cuasi-métricos, concordando todas con la noción habitual de completitud en el caso de los espacios métricos, teniendo cada una de ellas sus ventajas y desventajas. A continuación describiremos brevemente algunas de estas definiciones de completitud, junto con algunas de sus propiedades.

Definición 53 *Sea (X,ρ) un espacio cuasi-semimétrico, (x_n) sucesión en X. La sucesión se llama:*

(a) $\rho-$Cauchy por la izquierda (derecha) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall n \geq n_0, \rho(x, x_n) < \varepsilon$$

$(\rho(x_n, x) < \varepsilon$, respectivamente);

(b) ρ^s-Cauchy si es una sucesión de Cauchy en el espacio semimétrico (X,ρ^s), esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall n, k \geq n_0, \rho^s(x_n, x_k) < \varepsilon,$$

o equivalentemente, $\forall n, k \geq n_0, \rho(x_n, x_k) < \varepsilon$, (por lo cual, cuando sea conveniente diremos simplemente que es $\rho-$Cauchy)

(c) $K-$Cauchy por la izquierda (derecha) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall n, k, n_0 \leq k \leq n \Longrightarrow \rho(x_k, x_n) < \varepsilon$$

$(\rho(x_n, x_k) < \varepsilon$, respectivamente);

(d) $K-$Cauchy débilmente por la izquierda (derecha) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall n \geq n_0, \rho(x_{n_0}, x_n) < \varepsilon$$

$(\rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$, respectivamente).

Algunas veces, para enfatizar la cuasi-métrica ρ, deberíamos decir que una sucesión es $K-\rho-$Cauchy por la izquierda, etc. La K en la definición viene de Kelly [2], quien fue el primero en considerar este concepto (ver también [7]).

A continuación introducimos con un mero propósito ilustrativo, algunas de las propiedades y relaciones que guardan entre sí, dichos conceptos.

Proposición 15 ([8]) *Sea (X,ρ) un espacio cuasi-semimétrico.*

1. Estos conceptos estan relacionados de la siguiente forma:

$$\rho^s-\text{Cauchy} \Longrightarrow K-\text{Cauchy por la izquierda}$$
$$\Longrightarrow K-\text{Cauchy débilmente por la izquierda}$$
$$\Longrightarrow \rho-\text{Cauchy por la izquierda.}$$

Las mismas implicaciones se cumplen para las correspondientes definiciones por la derecha.

Ninguna de las implicaciones anteriores es reversible.

2. Una sucesión es Cauchy por la izquierda (en algún sentido) con respecto a ρ si y sólo si, es Cauchy por la derecha (en el mismo sentido) con respecto a $\overline{\rho}$.

3. Una sucesión es ρ^s-Cauchy si y sólo si, es tanto $K-$Cauchy por la derecha, como por la izquierda.

4. Una sucesión $\rho-$convergente es $\rho-$Cauchy por la izquierda y una sucesión $\overline{\rho}-$convergente es $\rho-$Cauchy por la derecha.

Definición 54 *Un espacio cuasi-semimétrico (X,ρ) es llamado:*

- *$\rho-$secuencialmente completo si cada sucesión ρ^s-Cauchy es $\tau_\rho-$convergente ([10]);*
- *$\rho-$secuencialmente completo por la izquierda si cada sucesión $\rho-$Cauchy por la izquierda es $\tau_\rho-$convergente ([8]);*
- *Smyth secuencialmente completo por la izquierda (derecha) si cada sucesión $K-$Cauchy por la izquierda (derecha) es ρ^s-convergente.*

Definición 55 *Un espacio cuasi-semimétrico (X,ρ) es llamado bicompleto si el espacio semimétrico asociado (X,ρ^s) es completo, es decir, cada sucesión ρ^s-Cauchy es $\tau_{\rho^s}-$convergente.*

Con el mismo propósito que la proposición de arriba, mostramos las relaciones que guardan dichos conceptos.

Proposición 16 *Estas nociones de completitud estan relacionadas de la siguiente forma:*

$\rho-$secuencialmente completo $\Longrightarrow$ $K-$secuencialmente completo débilmente por la izquierda $\Longrightarrow$

$K-$secuencialmente completo por la izquierda $\Longrightarrow$ $\rho-$completo por la izquierda.

Las mismas implicaciones se cumplen para las correspondientes definiciones de completitud por la derecha.

Tales definiciones y Proposiciones (15 y 16) pueden ser consultadas en Cobzas [5]. Y como podemos observar, no se hace alguna mención restrictiva respecto de la dimensión del espacio cuasi-semimétrico (X,ρ), donde la cuasi-semimétrica ρ en este caso sería la inducida por alguna norma asimétrica. Sin embargo, nuestro propósito es analizar el caso de dimensión finita, en el cual obtuvimos el siguiente resultado:

Proposición 17 *Sea (X,p) un espacio normado asimétrico T_1 de dimensión finita y sea $\rho=\rho_p$,*

1. *Las implicaciones de la Proposición 15 son reversibles.*

2. *Las definiciones derechas coinciden con las izquierdas. Es decir, son equivalentes.*

3. *El inciso* 4. *de la Proposición 15 se transforma en: una sucesión es* $\rho-$*convergente si y sólo si, es* $\overline{\rho}-$*convergente; además si la sucesión es* $\rho-$*convergente entonces es* $\rho-$*Cauchy.*

Demostración. 2. *Si* (x_n) *es* $\rho-$*Cauchy por la izquierda (derecha) entonces para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $x \in X$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para toda* $n \geq n_0, \rho(x, x_n) < \varepsilon$ $(\rho(x_n, x) < \varepsilon$ *respectivamente).*

La definición anterior en este caso cumple que $\overline{\rho}(x, x_n) \leq \beta\rho(x, x_n) < \varepsilon$*, con* $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\beta}$.

Es decir, si (x_n) *es* $\rho-$*Cauchy por la izquierda entonces es* $\rho-$*Cauchy por la derecha y viceversa.*

(Análogamente para las otras definiciones)

1. *Ahora sean* $n, k \geq n_0$ *y* $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ *entonces* $\rho(x_n, x_k) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_k) < \varepsilon$

Por lo tanto, (x_n) *es* $\rho-$*Cauchy.*

Con lo anterior tenemos que $\rho-$*Cauchy por la izquierda implica* $\rho-$*Cauchy y junto con la proposición 15 se tiene que:*

ρ^s-*Cauchy*$\Longrightarrow$ $K-$*Cauchy por la izquierda*$\Longrightarrow$ $K-$*Cauchy débilmente por la izquierda*$\Longrightarrow$ $\rho-$*Cauchy por la izquierda (por la derecha)*$\Longrightarrow$ $\rho-$*Cauchy* $(\rho^s-$*Cauchy).*

Cerrándose así el círculo.

Además, ρ^s-*Cauchy*$\Longrightarrow$ $K-$*Cauchy por la derecha*$\Longrightarrow$ $K-$*Cauchy débilmente por la derecha*$\Longrightarrow$ $\rho-$*Cauchy por la derecha*$\Longrightarrow$ $\rho-$*Cauchy* $(\rho^s-$*Cauchy).*

(2) *y* (3) *de la proposición 15 son absorbidas por* 1.

3. *Debido a la equivalencia de* ρ *y* $\overline{\rho}$ *se tiene que* $\rho(x, x_n) \to 0 \Longleftrightarrow \overline{\rho}(x, x_n) \to 0$. *Y por la proposición 15 tenemos que si una sucesión es* $\rho-$*convergente entonces es* $\rho-$*Cauchy por la izquierda entonces por* 1 *es* $\rho-$*Cauchy o cualquiera de sus equivalentes.* ■

Definición 56 *Un espacio normado asimétrico bicompleto* (X, p) *es llamado un espacio biBanach.*

Teorema 25 *Sean X espacio de dimensión finita y p, q normas asimétricas T_1. Entonces (X, p) es biBanach si y sólo si, (X, q) lo es.*

Demostración. *Por hipótesis tenemos que existen $\alpha, \beta > 0$ tales que para todo $x \in X$, $\alpha p(x) \leq q(x) \leq \beta p(x)$.*

Si (X, p) es biBanach y (x_n) es una sucesión de Cauchy para q $\left(\rho_q - \text{Cauchy}\right)$, en virtud de la primera desigualdad, también lo es para la norma asimétrica p. Luego es convergente para esta última norma asimétrica, y también lo es para la norma asimétrica equivalente q. Esto demuestra que (X, q) es biBanach. Análogamente se demuestra el recíproco. ■

Capítulo 3

Espacios Cuasi-k-Métricos y k-Normados Asimétricos

3.1 Espacios Cuasi-k-Métricos y k-Normados Asimétricos

A continuación damos una breve introducción a los espacios más generales cuasi-k-métricos y k-normados asimétricos. Donde se siguen cumpliendo algunos resultados ya obtenidos en $\mathbb{R}^n$. Además se mostrarán algunos ejemplos ilustrativos de k-normas asimétricas T_1 que son equivalentes a las normas en el espacio y que poseen bolas abiertas que coinciden con las bolas abiertas de la norma dada.

3.1.1 Definiciones y ejemplos

En las siguientes definiciones k es un número real mayor o igual a 1.

Definición 57 *Sea X un conjunto no vacío, una $k-$métrica sobre X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ la cual satisface para cualesquiera $x, y, z \in X$ las siguientes condiciones:*

(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x, z) \leq k(d(x.y) + d(y, z))$,

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$.

El par (X,d) es llamado un espacio $k-$métrico. Si solamente (ii) y (iii) se cumplen, entonces el par es llamado un espacio $k-$semimétrico.

Definición 58 *Sea X un espacio lineal real. Una función $\|\cdot\|_k : X \to [0,\infty)$ es una $k-$norma sobre X si para cada $x,y \in X$ y $r \in \mathbb{R}$, se cumplen:*

(i) $\|x\|_k = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|rx\|_k = |r| \|x\|_k$,

(iii) $\|x+y\|_k \leq k(\|x\|_k + \|y\|_k)$.

$(X, \|\cdot\|_k)$ es llamado un espacio $k-$normado. De igual manera, si solamente (ii) y (iii) se cumplen, entonces el par es llamado un espacio $k-$seminormado.

Observación 25 *Un espacio métrico (semimétrico) es un espacio $1-$métrico ($1-$semimétrico) y un espacio normado (seminormado) es un espacio $1-$normado ($1-$seminormado).*

Prescindir de la condición de simetría en la Definición 57, da lugar a la Definición 59.

Definición 59 *Una cuasi$-k-$semimétrica sobre un conjunto arbitrario no vacío X es una función $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ que satisface:*

(i) $\rho(x,x) = 0$,

(ii) $\rho(x,z) \leq k(\rho(x,y) + \rho(y,z))$, *para toda* $x,y,z \in X$.

Más aún, si

(iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$ *implica que* $x = y$, *para toda* $x,y \in X$, *entonces* ρ *es llamada una cuasi$-k-$métrica.*

Observación 26 *Una cuasi-métrica (cuasi-semimétrica) es una cuasi$-1-$métrica (cuasi$-1-$semimétrica).*

Al igual que con las cuasi-semimétricas, dada una cuasi$-k-$semimétrica ρ en un conjunto X, la conjugada $\overline{\rho}$ de ρ está definida por

$$\overline{\rho}\,(x,y)=\rho\,(y,x)\,,x,y\in X.$$

Es sencillo verificar que $\overline{\rho}$ es también una cuasi$-k-$semimétrica; mientras que la función $\rho^s : X\times X\to\mathbb{R}$ dada por

$$\rho^s\,(x,y)=m\acute{a}x\{\rho\,(x,y)\,,\overline{\rho}\,(x,y)\},$$

es una $k-$semimétrica.

Más aún, ρ es una cuasi$-k-$métrica si y sólo si, ρ^s es una $k-$métrica sobre X.

La siguiente desigualdad es trivialmente válida por definición,

$$\rho\,(x,y)\leq\rho^s\,(x,y)\ \text{ y }\ \overline{\rho}\,(x,y)\leq\rho^s\,(x,y)\,. \tag{3.1}$$

De igual manera si quitamos la condición de simetría en la Definición 58, se da lugar a la Definición 60.

Definición 60 *Sea X un espacio lineal real. Una función $p:X\to[0,\infty)$ es una $k-$norma asimétrica sobre X, si para toda $x,y\in X$ y $r\geq 0$:*

(i) $p\,(x)=p\,(-x)=0$ *implica que* $x=0$,

(ii) $p\,(rx)=rp\,(x)\,,$

(iii) $p\,(x+y)\leq k\,(p\,(x)+p\,(y))\,.$

En este caso (X,p) es llamado un espacio $k-$normado asimétrico. Si p solo satisface las condiciones (ii) y (iii), entonces es llamado un espacio $k-$seminormado asimétrico. También la conjugada $\overline{p}$ de una $k-$seminorma asimétrica p está definida por $\overline{p}\,(x)=p\,(-x)\,,x\in X$.

Y la función $p^s:X\to[0,\infty)$ dada por

$$p^s\,(x)=m\acute{a}x\{p\,(x)\,,p\,(-x)\},x\in X,$$

es una $k-$seminorma.

Aquí las desigualdades análogas a (3.1) son:

$$p\,(x)\leq p^s\,(x)\ \text{ y }\ \overline{p}\,(x)\leq p^s\,(x)\,,\ \text{para toda } x\in X. \tag{3.2}$$

Observación 27 *Una $k-$seminorma asimétrica p es una $k-$norma asimétrica si y sólo si, p^s es una $k-$norma sobre X.*

Una $k-$seminorma asimétrica p induce una cuasi$-k-$semimétrica ρ_p sobre X, dada por $\rho_p(x,y) = p(y-x), x, y \in X$.

De las definiciones podemos notar que la desigualdad triangular es lo que diferencía a las cuasi-semimétricas (cuasi-métricas) de las cuasi$-k-$semimétricas (cuasi$-k-$métricas), lo mismo sucede para el caso de las "normas" respectivas; con respecto a las Proposiciones 7-3 y 12-2 o la Observación 14, es posible generalizarlas a este nuevo contexto, pues las mismas demostraciones son aplicables. Por lo anterior, dichos resultados son válidos para las cuasi$-k-$semimétricas (cuasi$-k-$métricas) y a las $k-$seminormas asimétricas ($k-$normas asimétricas).

Ejemplo 43 *Sea $p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ una función definida por:*

$$p(x) = \begin{cases} \|x\| & x_1 \geq 0 \\ \frac{\|x\|}{2} & x_1 < 0 \end{cases}, \quad \text{donde } \|\cdot\| \text{ es una norma en } \mathbb{R}^n$$

y x_1 es la primera componente de x. Claramente se cumple que si $p(x) = p(-x) = 0$ entonces $x = 0$. De hecho, se tiene que $p(x) = 0$ si y sólo si, $x = 0$. También es sencillo ver que $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0$.

De tal manera que si probamos la desigualdad triangular, tendremos que p es una $k-$norma asimétrica y T_1.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Lo probaremos por casos:

Caso 1 *Supongamos que $x_1 \geq 0$ y*

(i) $y_1 \geq 0$

Entonces, $x_1 + y_1 \geq 0$. Luego, $p(x+y) = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$= p(x) + p(y)$.

(ii) $y_1 < 0$

Entonces $x_1 + y_1 \geq 0 \vee x_1 + y_1 < 0$.

a) *Si $x_1 + y_1 \geq 0$ entonces $p(x+y) = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$*

$= p(x) + 2p(y)$.

b) *Si* $x_1 + y_1 < 0$ *entonces* $p(x+y) = \frac{\|x+y\|}{2} \leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} = \frac{\|x\|}{2} + p(y)$
$\leq \|x\| + p(y) = p(x) + p(y)$.

Caso 2 *Supongamos que* $x_1 < 0$ *y*

(i) $y_1 < 0$

Entonces, $x_1 + y_1 < 0$. *Luego,* $p(x+y) = \frac{\|x+y\|}{2} = p(x) + p(y)$.

(ii) $y_1 \geq 0$

Entonces, $x_1 + y_1 \geq 0 \vee x_1 + y_1 < 0$.

a) *Si* $x_1 + y_1 \geq 0$ *entonces,* $p(x+y) = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$= 2p(x) + p(y)$.

b) *Si* $x_1 + y_1 < 0$ *entonces,* $p(x+y) = \frac{\|x+y\|}{2} \leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} = \frac{\|y\|}{2} + p(x)$
$\leq \|y\| + p(x) = p(x) + p(y)$.

Por lo tanto, tenemos que $p(x+y) \leq 2(p(x) + p(y))$.
Lo que significa que p *es una* $2-$*norma asimétrica* T_1.
Además, $\overline{p}(x) = p(-x) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{2}, & x_1 > 0 \\ \|x\| & x_1 \leq 0 \end{cases}$
Por lo que, $p^s(x) = máx\{p(x), p(-x)\} = \|x\|$, *para toda* $x \in \mathbb{R}^n$.
Y haciendo uso de lo que ya sabemos, $\rho_p(x,y) = p(y-x)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ *define una cuasi*$-k-$*métrica* T_1.

Ejemplo 44 *En particular si* $n = 2, r > 0$, *se tiene que las bolas abiertas para* $\rho_p, \overline{\rho}_p$ *y* ρ_p^s, *donde* $\|\cdot\|$ *es la norma "usual", son de la forma:*
Tenemos que $B_{\rho_p}(x,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^2 : \rho_p(x,y) = p(y-x) < r\right\}$, *sean* $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.
Si $y_1 - x_1 \geq 0$, *entonces* $\rho_p(x,y) = p(y-x) = \|y-x\| < r$, *y*
si $y_1 - x_1 < 0$, *entonces* $\rho_p(x,y) = p(y-x) = \frac{\|y-x\|}{2} < r$.
Es decir, la gráfica de la bola abierta es:

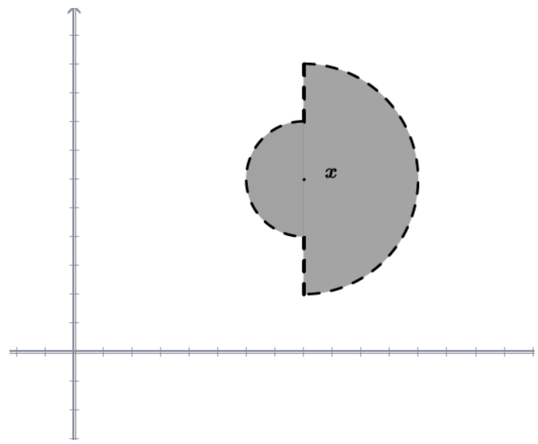

Figura 3.1 $B_{\rho_p}(x,r)$

Ahora tenemos que,

$B_{\overline{\rho}_p}(x,r) \;=\; \left\{y \in \mathbb{R}^2 : \overline{\rho}_p(x,y) = \rho_p(y,x) = p(x-y) = \overline{p}(y-x) < r\right\}.$

Así,

si $y_1 - x_1 \leq 0$, *entonces* $\overline{\rho}_p(x,y) = \rho_p(y,x) = \|y-x\| < r$, *y*

si $y_1 - x_1$, *entonces* $\overline{\rho}_p(x,y) = \rho_p(y,x) = \frac{\|y-x\|}{2} < r$.

Por lo tanto, la gráfica de la bola abierta es:

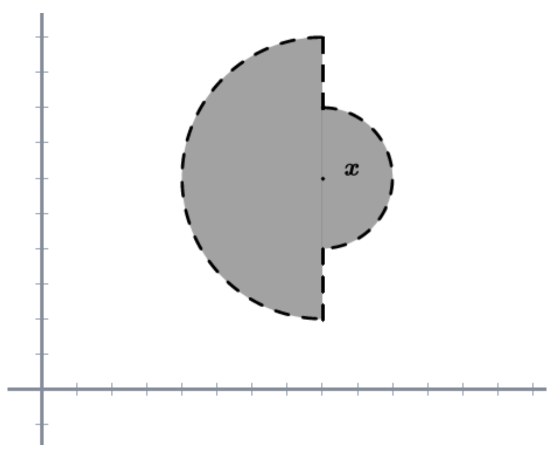

Figura 3.2 $B_{\overline{\rho}_p}(x,r)$

Finalmente, haciendo uso del resultado de que la intersección de las bolas abiertas de ρ *y su conjugada* $\overline{\rho}$ *coincide con las bolas abiertas de* ρ^s*, tendremos lo que ya sabíamos de manera analítica* $\left(\rho_p^s(x,y) = \|x-y\|\right)$*. Esto es, que las bolas abiertas de* ρ^s *coinciden con las de la norma elegida (la euclidiana).*

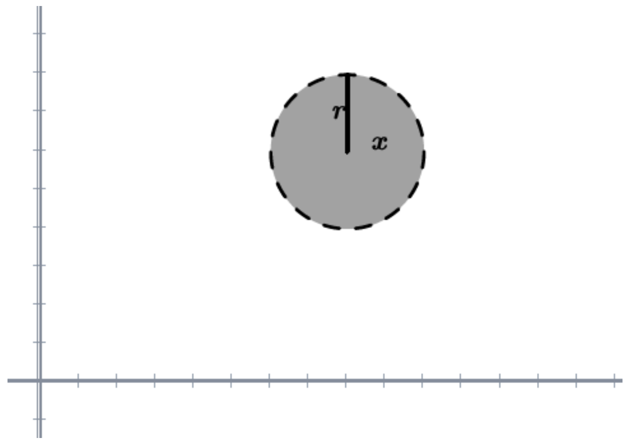

Figura 3.3 $B_{\rho_p^s}(x,r) = B_{\|\cdot\|}(x,r)$

Si en lugar de utilizar la norma euclidiana hacemos uso de alguna de las otras normas como en ejemplos anteriores ($\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$) obtendremos bolas abiertas para el Ejemplo 44 como a continuación se muestra:

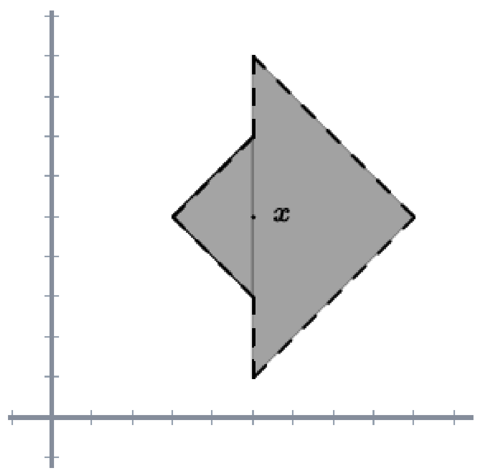

Figura 3.4 $B_{\rho_p}(x,r)$ con la norma $\|\cdot\|_1$

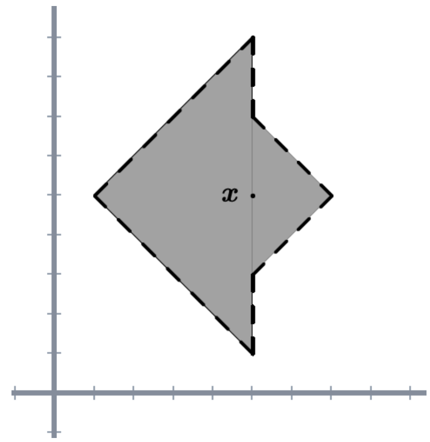

Figura 3.5 $B_{\overline{\rho}_p}(x, r)$ con la norma $\|\cdot\|_1$

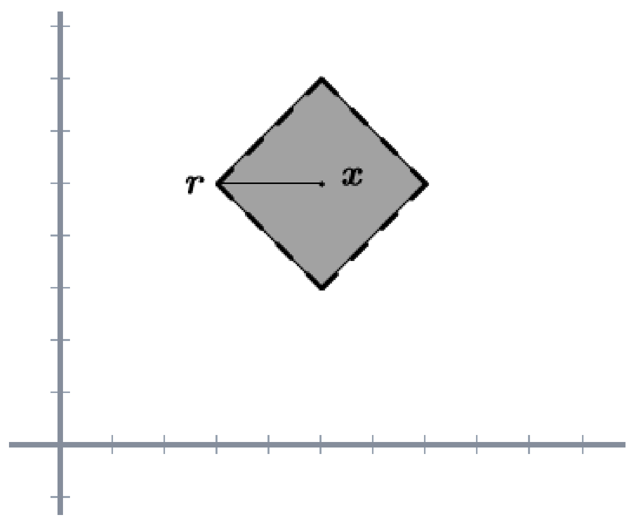

Figura 3.6 $B_{\rho_p^s}(x, r) = B_{\|\cdot\|_1}(x, r)$

De manera similar para $\|\cdot\|_\infty$.

Ejemplo 45 *Sea* $p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *una función definida por:*

$$p(x) = \begin{cases} \|x\|_1, & x_1 \geq 0 \\ \|x\|_\infty, & x_1 < 0 \end{cases},$$

donde $\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$ *y* $\|x\|_\infty = máx\{|x_1|, ..., |x_n|\}$.

Inmediatamente de estas definiciones de las normas, se deduce fácilmente que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$, *para toda* $x \in \mathbb{R}^n$.

Es evidente que $(i)\, p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *y* $(ii)\, p(\alpha x) = \alpha p(x), \alpha \geq 0$.

Resta verificar la desigualdad triangular:

(iii) *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$,

a) *Supongamos que* $x_1 \wedge y_1 \geq 0$. *Entonces,* $p(x+y) = \|x\|_1 + \|y\|_1$ $= p(x) + p(y)$.

b) *Supongamos que* $x_1 < 0 \wedge y_1 < 0$. *Entonces,* $p(x+y) = \|x+y\|_\infty$ $\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty = p(x) + p(y)$.

c) *Supongamos que* $x_1 \geq 0 \wedge y_1 < 0$. *Entonces puede suceder que:*

1) $x_1 + y_1 \geq 0$. *Entonces,* $p(x+y) = \|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ $= p(x) + \|y\|_1 \leq p(x) + n\|y\|_\infty = p(x) + np(y)$.

2) $x_1 + y_1 < 0$. *Entonces,* $p(x+y) = \|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ $= \|x\|_\infty + p(y) \leq \|x\|_1 + p(y) = p(x) + p(y)$.

d) *Análogamente para* $x_1 < 0 \wedge y_1 \geq 0$.

Por lo tanto, $p(x+y) \leq n(p(x) + p(y))$, *para toda* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Así, tenemos que p *es una* $k-$*norma asimétrica.*

Además, p *es* T_1 *y* $\|x\|_\infty \leq p(x) \leq \|x\|_1$, *para toda* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Y ya que $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_\infty$ *son normas equivalentes, existen* $\alpha, \beta > 0$ *tales que* $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq p(x) \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_\infty$, *para toda* $x \in \mathbb{R}^n$. *Por lo tanto,* $p(\cdot)$ *es equivalente a ambas normas y por consecuencia al resto de las normas en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 46 *A continuación siendo* $X = \mathbb{R}^2$ *para el Ejemplo 45, mostramos cuales son las bolas abiertas* $B_{\rho_p}(x,r), B_{\overline{\rho}_p}(x,r), B_{\rho_p^s}(x,r)$ *y el hecho de que está última coincide con la bola abierta de* $\|\cdot\|_1$.

Si $y_1 - x_1 \geq 0$, *entonces* $\rho_p(x,y) = p(y-x) = \|y-x\|_1 < r$, *y*

si $y_1 - x_1 < 0$, *entonces* $\rho_p(x,y) = p(y-x) = \|y-x\|_\infty < r$.

Por lo tanto, la gráfica de la bola abierta $B_{\rho_p}(x,r)$ *es:*

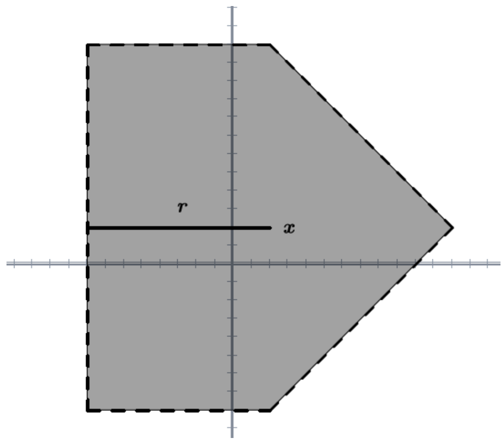

Figura 3.7 $B_{\rho_p}(x,r)$

Análogamente,
Si $y_1 - x_1 \leq 0$, *entonces* $\overline{\rho}_p(x,y) = \rho_p(y,x) = \|y-x\|_\infty < r$, *y*
si $y_1 - x_1 > 0$, *entonces* $\overline{\rho}_p(x,y) = \rho_p(y,x) = \|y-x\|_1 < r$.
Por lo cual la gráfica de la bola abierta $B_{\overline{\rho}_p}(x,r)$ *es:*

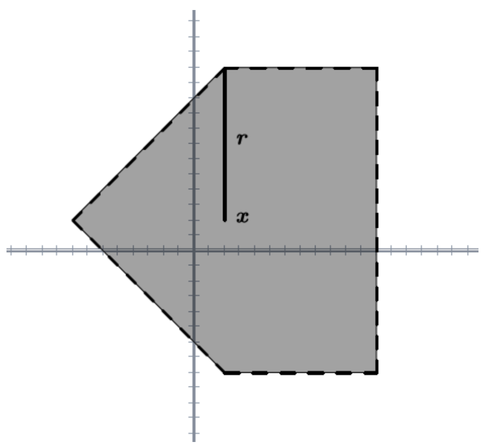

Figura 3.8 $B_{\overline{\rho}_p}(x,r)$

De las cuales obtenemos que la gráfica para $B_{\rho_p^s}(x,r)$ *es:*

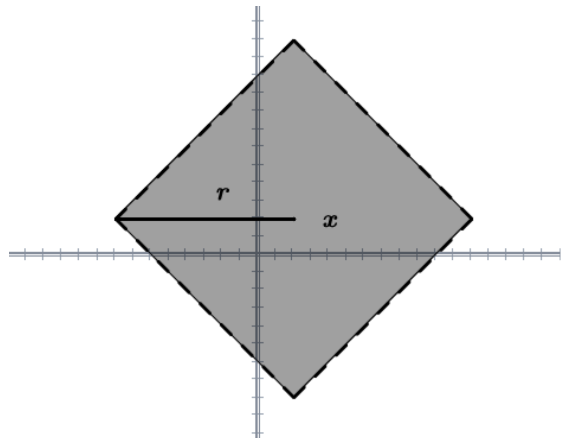

Figura 3.9 $B_{\rho_p^s}(x,r) = B_{\|\cdot\|_1}(x,r)$

Al igual que se hizo con las normas asimétricas, ahora podemos plantear resultados análogos para las $k-$normas asimétricas que se siguen cumpliendo. Lo anterior, tan solo haciendo unos ligeros y simples ajustes en las demostraciones ya realizadas en el caso de las normas asimétricas. A decir,

Teorema 26 *Sean* $\|\cdot\|$ *y* P*, norma arbitraria y* $k-$*norma asimétrica arbitraria (respectivamente) en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces, existe* $\beta > 0$ *tal que* $P(x) \leq \beta\|x\|$*, para toda* $x \in \mathbb{R}^n$*.*
Demostración. *Basta demostrarlo con la norma* $\|\cdot\|_1$ *y utilizar la transitividad de la relación de equivalencia "normas equivalentes".*

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ *y* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *base canónica de* $\mathbb{R}^n$*.*
Luego, $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$*.*
Así, $P(x) = P(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) \leq k(P(x_1e_1) + \ldots + P(x_ne_n))$
$= k(|x_1|P((-1)^{\frac{x_1^-}{x_1}}e_1) + \ldots + |x_n|P((-1)^{\frac{x_n^-}{x_n}}e_n))$
$\leq k\lambda(|x_1| + \ldots + |x_n|) = \beta\|x\|_1$ *,donde* $x^- := máx\{-x, 0\}, x \in \mathbb{R}$,
$\lambda = máx\{P(e_1), \ldots, P(e_n), P(-e_1), \ldots, P(-e_n)\}$ *y* $\beta = k\lambda$*.*
Por lo tanto, $P(x) \leq \beta\|x\|_1$*.* ■

Teorema 27 *Sean* $\|\cdot\|$ *y* P*, norma arbitraria y* $k-$*norma asimétrica arbitraria (respectivamente) en* E *espacio de dimensión finita. Entonces, existe* $\beta > 0$ *tal que* $P(x) \leq \beta\|x\|$*, para toda* $x \in E$*.*
Demostración. *Utilizando el mismo razonamiento que en el Teorema 26 obtenemos el resultado deseado.* ■

Teorema 28 *Sean $\|\cdot\|$ y P, norma arbitraria y $k-$norma asimétrica T_1 arbitraria respectivamente, en $\mathbb{R}^n$. Entonces, existen $\alpha, \beta > 0$ tales que*

$$\alpha\|x\| \leq P(x) \leq \beta\|x\|, \ \textit{para toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. *Basta probar el resultado utilizando la norma $\|\cdot\|_1$, pues el Teorema 12 para normas equivalentes y el hecho de que la relación de "normas equivalentes" es una relación de equivalencia, nos permiten hacer la transición hacia cualquier otra norma de $\mathbb{R}^n$.*

Para probar la segunda desigualdad $P(x) \leq \beta\|x\|_1$ tan solo aplicamos el Teorema 26.

Supongamos ahora que la primer desigualdad $\alpha\|x\|1 \leq P(x)$ es falsa, lo que implica que para cada $\alpha = 1/m$ (m natural) existe un vector x_m tal que $P(x_m) < \frac{1}{m}\|x_m\|_1$. Consideremos la sucesión $y_m = \frac{x_m}{\|x_m\|_1}$ $(m \in \mathbb{N})$, que verifica $\|y_m\|_1 = 1$.

Como (y_m) es una sucesión acotada –pues $\|y_m\|_1 = 1$- contiene una subsucesión convergente a un punto $a \in \mathbb{R}^n$, $y_{m_j} \underset{j}{\rightarrow} a$.

Tenemos $\|a\|_1 = \lim\limits_j \left\|y_{m_j}\right\|_1 = 1$, luego $a \neq 0$.

Por otra parte, aplicando la propiedad triangular obtenemos:

$P(a) \leq k\left(P(a - y_{m_j}) + P(y_{m_j})\right) \leq k\beta\|a - y_{m_j}\|_1 + k\frac{1}{m_j} \underset{j}{\rightarrow} 0.$

Así, $P(a) = 0$ y $a = 0$. Contradicción!!

Por lo tanto, $\alpha\|x\|_1 \leq P(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Juntando ambos resultados se tiene que: $\alpha\|x\|_1 \leq P(x) \leq \beta\|x\|_1$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Así, $P(a) = 0$ y $a = 0$. Contradicción!!

Por lo tanto, $\alpha\|x\|_1 \leq P(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Juntando ambos resultados se tiene que: $\alpha\|x\|_1 \leq P(x) \leq \beta\|x\|_1$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Es decir, son equivalentes y por lo tanto generan la misma topología. ■

De lo anterior podemos concluir que las normas, las normas asimétricas T_1 y las $k-$normas asimétricas T_1 en $\mathbb{R}^n$, son equivalentes entre sí. Es decir, al conjunto de normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$ ya existente le acabamos de añadir nuevos elementos, en este caso las $k-$normas asimétricas T_1; pues previamente ya le habiamos añadido las normas asimétricas T_1.

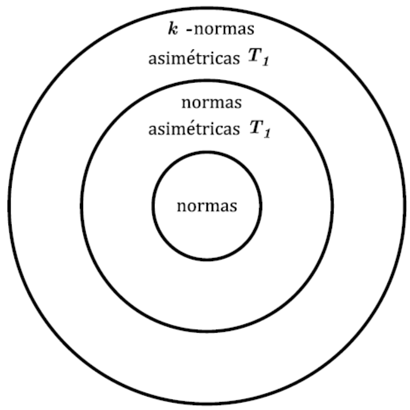

Figura 3.10 Conjunto de normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

Conclusiones

Creo que después de finalizado el presente trabajo de Tesis, se puede concluir que se cumplieron y cubrieron de manera exitosa los objetivos planteados al inicio. Además de que puede servir como material introductorio a los espacios asimétricos, de manera más precisa a los normados asimétricos de dimensión finita T_1; se logró trasladar algunos de los resultados clásicos, se generaron nuevos resultados apoyados de estos últimos y de los ya existentes en la literatura referente a espacios asimétricos.

En el caso de los resultados para espacios asimétricos equivalentes a los clásicos, pudimos observar que sus demostraciones en general únicamente tuvieron que ser ajustadas al nuevo contexto; aunque esto no significa que haya sido siempre sencillo. Lamentablemente no pudimos demostrar por nuestros medios un resultado que resultó ser de una importancia relevante, nos referimos al Teorema 27. Pero para nuestra fortuna nos percatamos de que García-Raffi ya lo había hecho previamente [1].

También pudimos notar en el caso de los asimétricos normados de entrada dos cosas, la primera es que en la literatura no hay muchos resultados en dimensión finita y la segunda es que en dimensión finita se llegan a cumplir cosas que en general no se cumplen en los asimétricos. Como el hecho de que en los normados asimétricos T_1 implica T_2 en dimensión finita, pero no en general. Cuestiones que quizás resulten obvias para los conocedores del tema, pero no para aquellos que apenas comenzamos.

Evidentemente aún hay muchas interrogantes por responder, no solamente las relacionadas a este trabajo de tesis, sino de manera general en los asimétricos. En nuestro caso particular, hay preguntas como las siguientes:

Conjetura 1 *Recordando el ejemplo* 30*, nos podemos plantear la siguiente pregunta: ¿Dado un espacio normado de dimensión finita, es siempre posible encontrar ya sea una norma asimétrica, una norma asimétrica* T_1 *o una* $k-$*norma asimétrica no simétricas tal que coincidan las bolas abiertas con las de la norma del espacio y/o que sean equivalentes a la norma elegida del espacio?*

En el caso de las $k-$normas asimétricas T_1 la respuesta es afirmativa para ambas cuestiones, como se muestra precisamente en los Ejemplos 43, 44 y 45. En el caso de las normas asimétricas T_1 solamente podemos afirmar la cuestión de la equivalencia. En el resto de los casos no lo sabemos.

De igual forma nos faltó mostrar un ejemplo de cuasi-métrica T_1 que no proviniera de una norma asimétrica y que no cumpliera con que el espacio fuese balanceado. Pues un ejemplo de cuasi-métrica T_1 no proveniente de una norma asimétrica donde si cumple que el espacio cuasi-métrico es balanceado ya fue mostrado en el Ejemplo 42. No sabemos si los cuasimétricos T_1 son siempre balanceados. No pudimos probarlo ni encontrar un contraejemplo. En el Teorema 24 se establece que en dimensión finita esto es cierto si la cuasimétrica proviene de una norma asimétrica.

De tal manera que hay mucho camino por recorrer y mucha historia por escribir en los espacios asimétricos.

Bibliografía

[1] García-Raffi L. M, *Compactness and finite dimension in asymmetric normed linear spaces*, Topology Appl. **153**, (2005) , 844-853.

[2] J. C. Kelly, *Bitopologial spaces*, Proc. London Math. Soc. **13** (1963), 71-89.

[3] E. P. Lane, *On quasi-metric spaces*, Duke Math. J. **36** (1969), 65-71.

[4] D. Doitchinov, *On completeness in quasi-metric spaces,* Topology Appl. **30** (1988) , no. 2, 127-148.

[5] S. Cobzas, *Asymmetric locally convex spaces,* Int. J. Math. Math. Sci. (2013) , no. 16, 2585-2608.

[6] L. M. García-Raffi, S. Romaguera, and E. A. Sánchez Pérez, *On Hausdorff asymmetric normed linear spaces,* Houston J. Math. **29** (2003) , no. 3, 717-728 (electronic).

[7] L. Collins and J. Zimmer, *An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem,* Topology Appl. **154** (2007) , no. 11, 2312-2322.

[8] I. L. Reilly, P. V. Subrahmanyam, M.K. Vamanamurthy, *Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces,* Monatsh. Math. **93** (1982) , 127-140.

[9] A.-R. K. Ramazanov, *Sign-sensitive appoximations of bounded functions by polinomials,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (1998) , no. 5, 53-58.

[10] E. Alemany and S. Romaguera, *On half-completion and bicompletion of quasi-metric spaces,* Comment. Math. Univ. Carolin. **37** (1996) , no. 4, 749-756.

[11] J.M. Hernández, C.H. Castañeda, L.C. Álvarez, J.L. Hernández, V. Tochihuitl, J.L. Carrasco, T.M.A. Ramírez, R. Vazquez, *Espacios con distancias no simétricas,* Temas de Ciencia y Tecnología Vol. **18,** (2014) , no. 53, 3-9. http://www.utm.mx/edi_anteriores/temas53/T53_1E1-EspNoSimetricos.pdf

[12] Nef, Walter. *Linear Algebra.* Courier Corporation. (1988), p. 35.

[13] Hernández J. M, Castañeda C. H, Álvarez L. C, Tochihuitl V. and Vázquez R, *Decomposition of metrics and norms,* Global Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (GJMMS). Volume 6, Number 1 (2016), pp. 1–9. https://www.ripublication.com/gjmms16/gjmmsv6n1_01.pdf

[14] José Luis Navarro. *Topología general II,* Preprinted submitted to Elsevier Science (2006) , https://riemann.unizar.es/geotop/WebGeoTo/Profes/navarro/topologiageneralii.pdf

[15] Stephen Willard. *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company (1970) .

[16] Ryszard Engelking. *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics. Volume 6 Heldermann Verlag (1989) .

[17] C. E. Aull, R. Lowen. *Handbook of the History of General Topology Vol. 3,* Springer-Science+Business Media, B.V. (2001) .

[18] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons (1978) .

[19] James Dugundji. *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. (1966) .

[20] Fidel Casarrubias y Ángel Tamariz. *Elementos de Topología General*, SMM (2012) .

[21] Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig (1914) .

[22] Alejandro Viveros, *Tesis "Espacios Normados Asimétricos"*, Universidad Tecnológica de la Mixteca (2013) .

[23] Niemytzki, V., *Über die Axiome des metrischen Raumes*, Math. Ann. 104 (1931) ,666-671.

[24] Wilson, W.A., On quasi-metric spaces, Amer. J. Math. 53 (1931) , 675-684.

[25] Reilly, I. L., *A quasi-metric bibliography*, The University of Auckland, Depth. Math. Stat., Report Series No. 269, Junio (1992), New Zealand.

[26] Murdeshwar, M. G. and Naimpally, S.A., *Quasi-Uniform Topological Spaces*, Noodhoff, Groningen (1966) .

[27] Fletcher, P. and Lindgren, W. F., Quasi-Uniform Spaces, Lecture Notes Pure Appl. Math. 77, Dekker, New York (1982) .