UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

LAS CATEGORÍAS DE MÓDULOS SOBRE ÁLGEBRAS ASOCIATIVAS ASOCIADAS A SUPERFICIES

TESIS

para obtener el Título de:

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Brenda Rosalía Policarpo Sibaja

Director de tesis: Dr. Alfredo Nájera Chávez
Codirector de tesis: M.C. Adolfo Maceda Méndez

Huajuapan de León, Oaxaca Septiembre de 2018

Para Hipólita Sibaja,
Francisco Policarpo y Cabi.

Agradecimientos

A mi director de tesis, Dr. Alfredo Nájera por su tiempo, apoyo y disposición constantes y sobre todo por mostrarme esta área.

A todos mis maestros de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, en especial a mi codirector de tesis M. C. Adolfo Maceda Méndez por sus invaluables aportes y a mis sinodales M. C. Vulfrano Tochihuitl Bueno y Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide por su tiempo y sugerencias para revisar este trabajo.

Agradezco a mis padres y hermana por su apoyo incondicional, aliento y amor, esto representa sólo un poquito de todo lo que siempre me dan.

Por último, gracias a mi persona favorita de la universidad por su compañía y paciencia durante estos años.

Índice general

Introducción

Un álgebra asociativa sobre un campo K algebraicamente cerrado es una estructura algebraica con operaciones compatibles de suma, multiplicación (asociativa) y una multiplicación escalar por elementos de K. Una forma de encontrar este tipo de objetos es estudiando un carcaj, que en esencia es una gráfica que admite ciclos y flechas múltiples y que de manera natural produce un álgebra denominada álgebra de caminos. La vía principal para estudiar las álgebras de caminos son sus representaciones, estas son una sustitución en las que a los puntos del carcaj se le asocian espacios vectoriales y a sus flechas les corresponden transformaciones lineales.

En términos generales, la Teoría de Representaciones de Álgebras se refiere a la clasificación de los módulos indescomponibles sobre un álgebra y los morfismos entre ellos. En la década de los años 70 del siglo pasado Pierre Gabriel asoció un carcaj con relaciones a un álgebra básica [1], construyendo un puente entre representaciones de álgebras asociativas y representaciones de carcajes.

Durante esta misma década, Maurice Auslander e Idun Reiten definieron las sucesiones que casi escinden, hoy en día llamadas sucesiones de Auslander-Reiten [1]. Esto motivó a que a finales de la misma década se desarrollara el concepto de carcaj de Auslander-Reiten, convirtiendo a la Teoría de Auslander-Reiten en una de las herramientas más habituales para estudiar las categorías mod A. En este caso, a una categoría de módulos sobre un álgebra se le asocia un carcaj llamado carcaj de Auslander-Reiten conformado por clases de isomorfismo de módulos indescomponibles como puntos y morfismos irreducibles como flechas.

A toda superficie de Riemann (posiblemente con frontera) con puntos marcados se le puede asociar un carcaj con relaciones [2]. De manera particular, a partir de un disco con puntos marcados en la frontera se construyen triangulaciones. Si se tiene un disco triangulado, es posible asociarle un carcaj y a este último un potencial. Así, teniendo un carcaj con potencial, se obtiene un álgebra Jacobiana asociada a dicho disco, la cual es un álgebra de carcaj acotado que se puede estudiar mediante la Teoría de Auslander-Reiten.

Las triangulaciones anteriormente mencionadas que se atribuyen a los discos con puntos marcados están relacionadas mediante flips, es decir, mediante cambios en un único arco de la triangulación. Esta relación en términos de sus categorías de módulos se expresa con una equivalencia de categorías cociente [4], la cual puesta en términos de carcajes de Auslander-Reiten resulta ser bastante gráfica.

La estructura del presente trabajo de tesis es la siguiente.

A lo largo del capítulo 1 se presentan los conceptos básicos de la Teoría de las álgebras de caminos, mediante las cuales se construye una equivalencia a través de la categoría de módulos y la categoría de representaciones. De este modo, se muestran resultados que indican cómo contruir algunas clases de módulos a través de representaciones.

En el capítulo 2 se muestra la Teoría de Auslander-Reiten, con el propósito de mostrar una herramienta para capturar toda la información de la categoría mod A en un carcaj denominado carcaj de Auslander-Reiten.

El capítulo 3 se basa en el artículo [2], aquí se presenta cómo es posible asociarle a un disco con puntos marcados en la frontera, un álgebra Jacobiana.

Finalmente, en el capítulo 4 se expone el Teorema de Keller-Yang adaptado para estas categorías. La construcción de las categorías mod A para algunas superficies y la forma gráfica de la manifestación del Teorema de Keller-Yang en estas categorías.

Como complemento, se añadió un apéndice a manera de glosario con los funtores y algunas de sus propiedades que han sido de utilidad durante los capítulos anteriormente señalados.

Brenda Rosalía Policarpo Sibaja.

Agosto de 2018.

Capítulo 1

Introducción a la teoría de las álgebras de caminos

Este capítulo está dedicado a introducir el concepto de carcaj y álgebra de caminos, así como a relacionarlos con el concepto de álgebra y módulo. La principal referencia para esto es [1] y [5].

En la sección 1.1 se proporcionan definiciones y ejemplos de álgebra y de módulo sobre una álgebra. Se muestra con un ejemplo cómo se pueden describir todos los módulos sobre un álgebra por medio de una terna formada por dos espacios vectoriales y un morfismo entre ellos. También se presentan definiciones de otros conceptos relacionados con estos módulos. En la sección 1.2 se presenta la definición de carcaj y se muestra como se pueden utilizar estos para construir álgebras mediante. En la sección 1.3 se definen las representaciones lineales de un carcaj y se describe, sin demostración, la manera de asociar módulos sobre un álgebra con representaciones. El Teorema de Gabriel (Teorema 1.3) establece la relación estrecha entre estas construcciones. En la sección 1.4 se explica cómo se pueden describir las representaciones asociadas a diversos tipos de módulos sobre un álgebra construida a partir de un carcaj.

En adelante, con K se denotará un campo algebraicamente cerrado.

1.1. Álgebras y módulos

Definición 1.1. Sea K un campo. Una K**-álgebra** es un anillo A con elemento identidad tal que A tiene estructura de K-espacio vectorial compatible con la multiplicación del anillo, esto es, tal que

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$$

para todo $\lambda \in K$ y para todo $a, b \in A$.

Una K-álgebra A es de *dimensión finita* si la dimensión $\dim_K A$ del K-espacio vectorial A es finita.

Definición 1.2. Un K-subespacio vectorial B de una K-álgebra A es una K**-subálgebra** de A si la identidad de A pertenece a B y $bb' \in B$ para todo $b, b' \in B$.

Ejemplo 1.1. El campo K es una K-álgebra.

Ejemplo 1.2. El anillo $K[t]$ de todos los polinomios en la variable t con coeficientes en K y el anillo $K[t_1, \ldots, t_n]$ de todos los polinomios en variables conmutativas $t_1, \ldots, t_n$ con coeficientes en K, son álgebras de dimensión infinita.

Ejemplo 1.3. El anillo $\mathbb{M}_n(K)$ de matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en el campo K, es una K-álgebra no conmutativa.

En general, si A es una K-álgebra, $\mathbb{M}_n(A)$ es una K-álgebra.

Ejemplo 1.4. El subconjunto

$$\mathbb{T}_n(K) = \begin{bmatrix} K & 0 & \cdots & 0 \\ K & K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K & K & \cdots & K \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{M}_n(K)$ que consiste de todas las matrices triangulares inferiores en $\mathbb{M}_n(K)$ es una K-subálgebra de la K-álgebra $\mathbb{M}_n(K)$.

Ejemplo 1.5. Si $n = 3$, el subconjunto

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{M}_3(K)$ es una K-subálgebra de $\mathbb{M}_3(K)$ y también es una K-subálgebra de $\mathbb{T}_3(K)$.

Un elemento e de una K-álgebra es *idempotente* si $e^2 = e$. Si e_1, e_2 son elementos idempotentes de una K-álgebra A, e_1, e_2 son *ortogonales* si $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Un elemento idempotente e es *primitivo* si $e = e_1 + e_2$ con e_1, e_2 idempotentes ortogonales, implica $e_1 = 0$ o $e_2 = 0$.

Ejemplo 1.6. (a) Cualquier K-álgebra tiene dos elementos idempotentes triviales 0 y 1. En los ejemplos 1.1, 1.2, 0 y 1 son los únicos elementos idempotentes.

(b) Para la K-álgebra $\mathbb{M}_n(K)$ la matriz identidad I_n es un elemento idempotente. Sin embargo las matrices $E_i \in \mathbb{M}_n(K)$ con las siguientes entradas

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si i=j} \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ conforman un *conjunto completo de elementos idempotentes ortogonales primitivos*, es decir son elementos idempotentes, ortogonales y primitivos a pares de $\mathbb{M}_n(K)$ tales que $1_{\mathbb{M}_n(K)} = E_n = E_1 + \cdots + E_n$ y $\mathbb{M}_n(K) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i\mathbb{M}_n(K)$.

Definición 1.3. Un K-subespacio vectorial I de una K-álgebra A es un **ideal a derecha** de A (o ideal a izquierda de A) si $xa \in I$ (o $ax \in I$, respectivamente) para todo $x \in I$ y $a \in A$.

Llamaremos a I un *ideal* (o un ideal a ambos lados) de A si I es un ideal a derecha de A y un ideal a izquierda de A.

Si I es un ideal de una K-álgebra A y $m \geq 1$ es un entero, I^m denota el ideal a ambos lados de A generado por todos los productos de m elementos de I.

Un ideal I es *nilpotente* si existe $m \geq 1$ tal que $I^m = 0$.

Ejemplo 1.7. Sean $m_1, m_2, \ldots, m_n$ enteros positivos y
$A = K[t_1, t_2, \ldots, t_n]/\langle t_1^{m_1}, t_2^{m_2}, \ldots, t_n^{m_n}\rangle$. El ideal $I = \langle \overline{t_1}, \overline{t_2}, \ldots, \overline{t_n}\rangle$, donde $\overline{t_i} = t_i/\langle t_1^{m_1}, t_2^{m_2}, \ldots, t_n^{m_n}\rangle$ para cada $i \in 1, \ldots, n$ es nilpotente, pues $I^{m_1 m_2 \cdots m_n} = 0$.

Definición 1.4. El **radical** rad A de una K-álgebra A es la intersección de todos los ideales maximales a derecha en A.

$$\text{rad } A = \bigcap_{\substack{I \subset A \\ I\, maximal}} I$$

Un álgebra A es *local* si tiene un único ideal maximal a derecha.

El siguiente Lema es una consecuencia directa de las definiciones, la prueba se encuentra en [1].

Lema 1.1. Sea rad$A$ el radical de un álgebra A.

(a) Si $b \in A$ y $a \in \text{rad } A$, entonces $1 - ab$ y $1 - ba$ tienen inverso.

(b) rad A es la intersección de todos los ideales maximales a izquierda de A.

(c) rad A es un ideal a ambos lados y rad$(A/\text{rad } A)$=0.

(d) Si I es un ideal a ambos lados nilpotente de A, entonces $I \subseteq \text{rad } A$. Si además, el álgebra $A/I \cong K^{m}$[1] para algún m, entonces $I = \text{rad } A$.

Ejemplo 1.8. El radical de $\mathbb{T}_n(K)$ es el conjunto de matrices estrictamente triangulares inferior.

Ejemplo 1.9. Sean $s_1, \ldots, s_n$ enteros positivos y sea
$A = K[t_1, \ldots, t_n]/\,(t_1^{s_1}, \ldots, t_n^{s_n})$. Dado que $I = \left(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}\right)$ de A generado por las clases laterales $\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}$ de las variables $t_1, \ldots, t_n$ módulo el ideal $(t_1^{s_1}, \ldots, t_n^{s_n})$ es nilpotente pues $I^n = 0$. Por el Lema 1.1(d) se tiene $I \subset$ rad A. Además $A/I \cong K^n$, por este mismo lema se cumple que rad $A = I$.

Definición 1.5. Sea A una K-álgebra. Un A**-módulo a derecha** es un par $(M, \cdot)$, donde M es un K-espacio vectorial y $\cdot : M \times A \to M$, $(m, a) \mapsto ma$, es una operación binaria que satisface las siguientes condiciones:

(a) $(x + y)a = xa + ya$

[1] Esto significa que A es isomorfo a m copias de K.

(b) $x(a+b) = xa + xb$

(c) $x(ab) = (xa)b$

(d) $x1 = x$

(e) $(x\lambda)a = x(a\lambda) = (xa)\lambda$

para todo $x, y \in M$, $a, b \in A$ y $\lambda \in K$.

La definición de A-módulo a izquierda es análoga.

Con M_A, $({}_AM)$ se denotará al A-módulo a derecha (a izquierda, resp.) $(M, \cdot)$. Con A_A se denotará al álgebra A vista como A-módulo a derecha y ${}_AA$ como A-módulo a izquierda.

Un A-módulo M es de *dimensión finita* si la dimensión de M visto como K-espacio vectorial es finita.

Un A-módulo a derecha M se dice *generado por los elementos* $m_1, \ldots, m_s$ de M si cualquier elemento $m \in M$ tiene la forma $m = m_1a_1 + \cdots + m_sa_s$ para algunos $a_1, \ldots, a_s \in A$.

Un módulo M es *finitamente generado* si está generado por un número finito de elementos de M.

Un K-subespacio M' de un A-módulo a derecha M se dice un A-*submódulo de* M si $ma \in M'$ para todo $m \in M'$ y $a \in A$. En este caso, el K-espacio vectorial M/M' tiene una estructura natural de A-módulo.

Con Mod A se denotará a la categoría abeliana de todos los A-módulos a derecha, es decir la categoría cuyos objetos son A-módulos a derecha, los morfismos son homomorfismos de A-módulos[2] y la composición de morfismos es la composición usual de mapeos.

Asímismo, mod A denotará a la categoría de A-módulos finitamente generados, cuyos objetos son A-módulos a derecha finitamente generados y los morfismos y composición de ellos son los mismos que en Mod A.

Ejemplo 1.10. Sea A la K-subálgebra de matrices triangulares inferiores de $\mathbb{M}_n(K)$,

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix}$$

[2]Un homomorfismo f de A-módulos a derecha es un mapeo K-lineal que cumple $f(ma) = f(m)a$ para todo $m \in M$ y $a \in A$.

Es evidente que las matrices $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ forman una K-base de A sobre K. $1_R = e_1 + e_2$ y $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. De aquí que todo X en mod$A$ tiene una descomposición en suma directa como sigue: $X = Xe_1 \oplus Xe_2$, donde Xe_1 y Xe_2 son espacios sobre K. Además, para cualquier $a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in A$ y $x = \big(x_1, x_2\big) \in X$ con $x_1 \in Xe_1$ y $x_2 \in Xe_2$, tenemos que

$$xa = (x_1a_{11} + x_2a_{21}, x_2a_{22}) = (x_1a_{11} + f_X(x_2)a_{21}, x_2a_{22})$$

donde $f_X : Xe_2 \to Xe_1$ es el mapeo K-lineal dado por la fórmula $f_X(x_2) = x_2e_{21} = x_2e_{21}e_1$.

Con lo anterior, X puede ser identificado con la terna $\Big(X_1 \xleftarrow{f_X} X_2\Big)$.

Más aún, cualquier homomorfismo de A-módulos $(h : X \to Y)$ puede ser identificado con el par (h_1, h_2) de mapeos K-lineales $h_1 : X_1 \to Y_1$, $h_2 : X_2 \to Y_2$ que son las restricciones de h a, respectivamente, Xe_1 y Xe_2. Estos mapeos satisfacen la ecuación $h_1f_X = f_Yh_2$.

La correspondencia inversa de $X \mapsto \Big(X_1 \xleftarrow{f_X} X_2\Big)$ está definida asociando a cada terna $\Big(X_1 \xleftarrow{f} X_2\Big)$ con X_1, X_2 K-espacios vectoriales y $f \in \mathrm{Hom}_K(X_1, X_2)$ el K-espacio vectorial $X = X_1 \oplus X_2$ dotado con la acción por la derecha $\cdot : X \times A \to X$ de A en X definida por la fórmula $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (x_1a_{11} + f(x_2)a_{21}, x_2a_{22})$, donde $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ y $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in A$.

Definición 1.6. Un A-módulo a derecha M es **indescomponible** si M es distinto de cero y M no se descompone como suma directa $M \cong L \oplus N$, donde L y N son A-módulos distintos de cero.

Definición 1.7. Una K-álgebra de dimensión finita A es de **representación finita** (o de **tipo de representación finita**) si el número de las clases de isomorfismo de A-módulos a derecha indescomponibles de dimensión finita es finito.

Cualquier módulo simple (cuya definición se presenta a continuación), es indescomponible.

Para las definiciones de las siguientes clases importantes de módulos, se seguirá teniendo el supuesto de que K es un campo algebraicamente cerrado añadiendo el hecho de que A se considerará una K-álgebra de dimensión finita. Para estos conceptos únicamente se considerará la definición, puesto que ejemplos de ellos se presentan en la sección 1.4, donde estos son construidos de una forma más sencilla.

Definición 1.8. (a) Un A-módulo a derecha S es **simple** si es distinto de cero y cualquier submódulo de S es o bien cero o S.

(b) Un módulo M es **semisimple** si es una suma directa de módulos simples.

(c) El **radical** $\mathrm{rad}M$ de un A-módulo M es la intersección de todos los submódulos maximales de M.

(d) Para cualquier A-módulo M, el submódulo soc M de M generado por todos los submódulos simples de M es un módulo semisimple llamado **soclo de** M.

(e) El A-módulo top $M = M/\mathrm{rad}\ M$, llamado el **top de** M, es un $A/\mathrm{rad}\ A$-módulo a derecha con respecto a la acción de $A/\mathrm{rad}\ A$ dada por la fórmula $(m+\mathrm{rad}\ M)\cdot(a+\mathrm{rad}\ A) = ma+\mathrm{rad}M$.

El siguiente teorema es de gran importancia en Teoría de Módulos, la demostración es bien conocida y se encuentra en [1].

Teorema 1.1 (Teorema de Descomposición Única). Sea A una K-álgebra de dimensión finita.

(a) Cada módulo M en mod A tiene una descomposición $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, donde $M_1, \ldots, M_m$ son módulos indescomponibles y la K-álgebra de endomorfismos End M_j es local para cada $j = 1, \ldots, m$.

(b) Si $M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_i \cong \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$, donde M_i y N_j son indescomponibles, entonces $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1\ldots,n\}$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Definición 1.9. (a) Un A-módulo a derecha F es **libre** si F es isomorfo a una suma directa de copias del módulo A_A.

(b) Un A-módulo a derecha P es **proyectivo** si, para cualquier epimorfismo $h : M \to N$, el mapeo inducido $\mathrm{Hom}_A(P,h) : \mathrm{Hom}(P,M) \to \mathrm{Hom}_A(P,N)$ es sobreyectivo. Esto es, para cualquier epimorfismo $h : M \to N$ y cualquier $f \in \mathrm{Hom}_A(P,N)$, existe un $f' \in \mathrm{Hom}_A(P,M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(c) Un A-módulo a derecha P es **inyectivo** si, para cualquier monomorfismo $u : L \to M$, el mapeo inducido $\mathrm{Hom}_A(u,E) : \mathrm{Hom}(M,E) \to \mathrm{Hom}_A(L,E)$ es sobreyectivo. Esto es, para cualquier monomorfismo $u : L \to M$ y cualquier $g \in \mathrm{Hom}_A(L,E)$, existe un $g' \in \mathrm{Hom}_A(M,E)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Definición 1.10. Sea A una K-álgebra con un conjunto completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de idempotentes ortogonales primitivos. La K-álgebra A es **básica** si $e_iA \ncong e_jA$, para todo $i \neq j$.

Definición 1.11. Sea A una K-álgebra con un conjunto completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de idempotentes ortogonales primitivos. Un **álgebra básica** asociada a A es el álgebra

$$A^b = e_A A e_A$$

donde $e_A = e_{j_1} + \cdots + e_{j_\alpha}$, y $e_{j_1}, \ldots, e_{j_\alpha}$ son elegidos de modo que $e_{j_i}A \ncong e_{j_t}A$ para $i \neq t$ y cada módulo e_sA es isomorfo a uno de los módulos $e_{j_1}A, \ldots, e_{j_\alpha}A$.

1.2. Carcajes

Definición 1.12. Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es una cuadrupla que consiste de dos conjuntos: Q_0 (cuyos elementos son llamados vértices) y Q_1

(cuyos elementos son llamados flechas), y dos mapeos $s, t : Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$, su *fuente* $s(\alpha) \in Q_0$ y su *objetivo* $t(\alpha) \in Q_0$, respectivamente.

Es decir

$$\text{fuente}(\alpha) \cdot \xrightarrow{\quad \alpha \quad} \cdot \ \text{objetivo}(\alpha).$$

En otras palabras, un carcaj es una gráfica orientada que admite ciclos y flechas múltiples entre dos vértices. Las flechas del carcaj son las que determinan la orientación de este.

En adelante, nos referiremos al carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ como Q, y para denotar $\alpha \in Q_1$ con fuente $s(\alpha) = a$ y objetivo $t(\alpha) = b$, se escribirá $\alpha : a \to b$ o bien, $a \xrightarrow{\alpha} b$.

Un carcaj Q es *finito* si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos.

Un carcaj Q es *conexo* si la gráfica subyacente $\overline{Q}$ (la gráfica obtenida al ignorar la orientación de Q) es una gráfica conexa.

Definición 1.13. Sea Q un carcaj y $a, b \in Q_0$. Un **camino de longitud** $\ell \geq 1$ con fuente a y objetivo b (de a a b) es una sucesión

$$(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \mid b),$$

donde $\alpha_k \in Q_0$ para todo $1 \leq k \leq \ell$ y se tiene $s(\alpha_1) = a, t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para cada $1 \leq k < \ell$ y $t(\alpha_\ell) = b$.

Es decir,

$$a \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \cdots a_{\ell-1} \xrightarrow{\alpha_\ell} b$$

A cada punto $a \in Q_0$ se le asocia un camino de longitud 0, llamado el *camino estacionario* en a y denotado por

$$\varepsilon_a = (a \mid\mid a).$$

Un camino de longitud $\ell \geq 1$ es llamado un *ciclo* si su fuente y objetivo coinciden. Un ciclo de longitud 1 es llamado un *lazo*. Un carcaj es llamado *acíclico* si no contiene ciclos.

Ejemplo 1.11.

$$\begin{tikzcd} a\circ \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Lazo

$$\begin{tikzcd} & \circ b \arrow[dr] & \\ a\circ \arrow[ur] & & \circ c \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Ciclo de longitud 3

Definición 1.14. Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** KQ de Q es la K-álgebra cuyo K-espacio vectorial subyacente tiene como base al conjunto de todos los caminos $(a \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \mid b)$ de longitud $\ell \geq 0$ en Q tal que el producto de dos vectores en la base $(a \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \mid b)$ y $(c \mid \beta_1, \ldots, \beta_k \mid d)$ de KQ está definida como

$$(a \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \mid b)(c \mid \beta_1, \ldots, \beta_k \mid d) = \delta_{bc}(a \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \ldots, \beta_k \mid d),$$

donde δ_{bc} denota la delta de Kronecker. Es decir, el producto de dos caminos es la concatenación de ellos cuando ésta es compatible (en este caso, cuando $t(\alpha_\ell) = s(\beta_1)$) y cero en caso contrario.

Con lo anterior, se tiene que existe una descomposición en suma directa

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_\ell \oplus \cdots$$

del K-espacio vectorial KQ, donde KQ_ℓ es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_ℓ de todos los caminos de longitud ℓ.

Note que $KQ_n \cdot KQ_m \subset KQ_{n+m}$ para todo $n, m \geq 0$, pues es el producto en KQ de dos caminos de longitud n y m, que resulta un camino de longitud $n+m$ o cero (pero cero también está en KQ_{n+m} pues es un espacio vectorial).

Ejemplo 1.12. Sea Q el carcaj

$$1\circ \xleftarrow{\ \alpha\ } \circ 2$$

Los caminos de longitud 0 son los caminos estacionarios ε_1 y ε_2. El único camino de longitud 1 es α. No hay caminos de mayor longitud. El álgebra de caminos KQ tiene como base al conjunto $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha\}$. Su descomposición en suma directa es

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1$$

donde $KQ_0 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ y $KQ_1 = \langle \alpha \rangle$.

Esta álgebra de caminos tiene por tabla de multiplicación:

	ε_1	ε_2	α
ε_1	ε_1	0	0
ε_2	0	ε_2	α
α	α	0	0

Claramente, KQ es isomorfa a la K-álgebra de matrices triangulares inferiores de tamaño 2×2

$$\mathbb{T}_2(K) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}$$

donde el isomorfismo está inducido por el mapeo K-lineal tal que

$$\varepsilon_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.13. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
& \circ 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\
1 \circ \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ 3 \arrow[ll, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

El álgebra de caminos KQ tiene como base al conjunto infinito $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma, \dots\}$.

Su descomposición en suma directa está dada por:

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots$$

donde $KQ_0 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle$, $KQ_1 = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$, $KQ_2 = \langle \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle$, $KQ_3 = \langle \alpha\beta\gamma, \beta\gamma\alpha, \gamma\alpha\beta \rangle$, etcétera.

Por lo tanto, KQ es un álgebra de dimensión infinita.

Ejemplo 1.14. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 3\circ \arrow[r, "\delta"] & \circ 1 \\ 4\circ \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"'] & \circ 2 \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

El álgebra de caminos KQ tiene como base al conjunto $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta, \gamma\delta\}$. Por tanto KQ es un álgebra de dimensión 10. Su descomposición en suma directa es:

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2$$

donde $KQ_0 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \rangle$, $KQ_1 = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$ y $KQ_2 = \langle \alpha\beta, \gamma\delta \rangle$.

Lema 1.2. Sea Q un carcaj y KQ su álgebra de caminos. Entonces

(a) KQ es un álgebra asociativa.

(b) KQ tiene un elemento identidad si y sólo si Q_0 es finito.

(c) KQ es de dimensión finita si y sólo si Q es finito y acíclico.

Demostración. (a) KQ es un álgebra asociativa debido a la definición de multiplicación porque el producto de los vectores de la base es la concatenación de caminos, que es una operación asociativa.

(b) Si Q_0 es finito, es inmediato que $\sum\limits_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ es una identidad para KQ.

Si suponemos ahora que Q_0 es infinito y que KQ tiene un elemento identidad $1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i$ (donde cada λ_i son escalares distintos de cero y cada ω_i son caminos en Q). El conjunto Q_0' de los objetivos de los ω_i tiene como máximo m elementos y, en particular, es finito. Sea $a \in Q_0 \backslash Q_0'$, entonces $\varepsilon_a \cdot 1 = 0$, lo cual es una contradicción.

(c) Supongamos que Q es infinito. Luego KQ tiene una base de dimensión infinita por lo que KQ es de dimensión infinita. Si suponemos que $\omega = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell$ es un ciclo en Q, entonces para cada $t \geq 0$, tenemos un vector de la base para KQ es $\omega^t = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell)^t$ Así que de nueva cuenta, KQ es de dimensión infinita.

Recíprocamente, si Q es finito y acíclico, únicamente contiene una cantidad finita de caminos y por lo tanto KQ es de dimensión finita.

$\square$

Ejemplo 1.15. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 3\circ \arrow[r, "\delta"] & \circ 1 \\ 4\circ \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"'] & \circ 2 \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

De acuerdo al Lema 1.2, $1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$.

En efecto,

$$\begin{aligned} 1 \cdot \alpha &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \cdot \alpha \\ &= \varepsilon_1 \cdot \alpha + \varepsilon_2 \cdot \alpha + \varepsilon_3 \cdot \alpha + \varepsilon_4 \cdot \alpha \\ &= 0 + 0 + 0 + \alpha \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \beta &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \cdot \beta \\ &= \varepsilon_1 \cdot \beta + \varepsilon_2 \cdot \beta + \varepsilon_3 \cdot \beta + \varepsilon_4 \cdot \beta \\ &= 0 + \beta + 0 + 0 \\ &= \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 1 &= \alpha \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \\ &= \alpha \cdot \varepsilon_1 + \alpha \cdot \varepsilon_2 + \alpha \cdot \varepsilon_3 + \alpha \cdot \varepsilon_4 \\ &= 0 + \alpha + 0 + 0 \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta \cdot 1 &= \beta \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \\ &= \beta \cdot \varepsilon_1 + \beta \cdot \varepsilon_2 + \beta \cdot \varepsilon_3 + \beta \cdot \varepsilon_4 \\ &= \beta + 0 + 0 + 0 \\ &= \beta. \end{aligned}$$

De manera similar $\gamma \cdot 1 = 1 \cdot \gamma = \gamma$ y $\delta \cdot 1 = 1 \cdot \delta = \delta$.

Definición 1.15. Sea Q un carcaj finito y conexo. El ideal a ambos lados del álgebra de caminos KQ generado (como un ideal) por las flechas de Q es llamado el **ideal de flechas** de KQ y se denota por R_Q (o R si no hay confusión).

Notemos que existe la siguiente descomposición en suma directa

$$R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_\ell \oplus \cdots$$

del K-espacio vectorial R_Q, donde KQ_ℓ es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_ℓ de todos los caminos de longitud ℓ. En particular, el K-espacio vectorial subyacente de R_Q está generado por todos los caminos en Q de longitud $\ell \geq 1$.

Esto implica que para cada $\ell \geq 1$, se tiene

$$R_Q^\ell = \bigoplus_{m \geq \ell} KQ_m.$$

De modo que R_Q^ℓ es el ideal de KQ generado, como K-espacio vectorial, por el conjunto de todos los caminos de longitud $\geq \ell$ en Q.

Como consecuencia, $R_Q^\ell / R_Q^{\ell+1}$ está generado por las clases residuales de todos los caminos en Q de longitud (exactamente) igual a ℓ y existe un isomorfismo de K-espacios vectoriales $R_Q^\ell / R_Q^{\ell+1} \cong KQ_\ell$.

Si Q es un carcaj finito, entonces el álgebra de caminos KQ de Q es asociativa y con elemento identidad. Sin embargo, la dimensión de KQ dependerá de Q: KQ es de dimensión finita si y sólo si Q es acíclico 1.2. Cuando un álgebra de caminos KQ es de dimensión infinita se estudia el cociente de KQ con algún ideal $\mathcal{I}$ tal que $KQ/\mathcal{I}$ es de dimensión finita. El tipo de ideales que cumplen lo anterior corresponden a la siguiente definición.

Definición 1.16. Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal de flechas del álgebra de caminos KQ. Un ideal a ambos lados $\mathcal{I}$ de KQ se dice **admisible** si existe $m \geq 2$ tal que

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

Si $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ, el par $(Q, \mathcal{I})$ se dice que es un carcaj acotado. El álgebra cociente $KQ/\mathcal{I}$ se dice que es el álgebra del carcaj acotado $(Q, \mathcal{I})$, o bien, un *álgebra de carcaj acotado*.

De la definición anterior se deduce que un ideal $\mathcal{I}$ de KQ contenido en R_Q^2 es admisible si y sólo si contiene todos los caminos cuya longitud es la mayor posible.

Se puede demostrar que este es el caso si y sólo si, para cada ciclo σ, existe $s \geq 1$ tal que $\sigma^s \in \mathcal{I}$. En particular, si Q es acíclico, cualquier ideal contenido en R_Q^2 es admisible.

Ejemplo 1.16. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1\circ & 2\circ \arrow[l, shift right, "\gamma"'] \arrow[l, shift left, "\beta"'] & \circ 3 \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Cada uno de los ideales $\mathcal{I}_1 = \langle \alpha\beta \rangle$ y $\mathcal{I}_2 = \langle \alpha\beta - \alpha\gamma \rangle$ son admisibles. Las álgebras de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}_1$ y $KQ/\mathcal{I}_2$ son isomorfas bajo el isomorfismo $KQ/\mathcal{I}_1 \to KQ/\mathcal{I}_2$ inducido por la correspondencia $\varepsilon_i \mapsto \varepsilon_i$ para cada $i = 1, 2, 3$; $\alpha \mapsto \alpha$, $\beta \mapsto \beta - \alpha$ y $\gamma \mapsto \gamma$.

Ejemplo 1.17. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

El ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle$ es admisible, pues $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$. Además, para R_Q^3, los caminos de longitud ≥ 4 y cualquier objetivo contienen un producto de la forma $\alpha\beta, \beta\gamma$ o $\gamma\alpha$, y por lo tanto están en $\mathcal{I}$. El álgebra del carcaj acotado $(Q, \mathcal{I})$ es $KQ/\mathcal{I}=\langle \overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2}, \overline{\varepsilon_3}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma} \rangle$.

Definición 1.17. Sea Q un carcaj. Una **relación** en Q con coeficientes en K es una combinación K-lineal de caminos de longitud al menos dos que tienen la misma fuente y objetivo. Así, una relación ρ es un elemento de KQ tal que

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 \omega_i$$

donde λ_i son escalares (no todos cero) y los ω_i son caminos en Q de longitud al menos 2 tales que, si $i \neq j$, entonces la fuente (o el objetivo, respectivamente) de ω_i coincide con el de ω_j, es decir, $s(\omega_i) = s(\omega_j), t(\omega_i) = t(\omega_j)$.

Si $m = 1$, una relación es llamada *relación cero* o *relación monomial*. Si es de la forma $\omega_1 - \omega_2$ es llamada *relación conmutativa*.

Si $(\rho_j)_{j\in J}$ es un conjunto de relaciones para un carcaj Q tal que el ideal que generan $\langle \rho_j \mid j \in J\rangle$ es admisible, se dice que Q está *acotado por las relaciones* $(\rho_j)_{j\in J}$ o por las relaciones $\rho_j = 0$ para todo $j \in J$.

Lema 1.3. Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El conjunto $(e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0)$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos del álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$.

Se referirá a la demostración que se encuentra en [1], p. 55.

Las principales características de los ideales admisibles son las que se presentan a continuación.

Proposición 1.1. Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$ es de dimensión finita.

Demostración. Puesto que $\mathcal{I}$ es admisible, $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$ para algún entero $m \geq 2$. Así, existe un homomorfismo sobreyectivo de álgebras $KQ/R_Q^m \to KQ/\mathcal{I}$. Por la definición de ideal de flechas, es suficiente probar que KQ/R_Q^m es de dimensión finita. Las clases residuales de los caminos de longitud menor que m conforman una base para KQ/R_Q^m visto como K-espacio vectorial. Puesto que únicamente hay un número finito de estos caminos, KQ/R_Q^m es de dimensión finita. $\square$

De manera general si $\mathcal{I}$ no es admisible, el álgebra $KQ/\mathcal{I}$ no es necesariamente de dimensión finita. Un ejemplo de ello es cuando Q contiene algún ciclo ω y $\omega^t \notin \mathcal{I}$ para cualquier $t \geq 1$.

Lema 1.4. Sea Q un carcaj finito. Cualquier ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ es finitamente generado.

Demostración. Sea R el ideal de flechas de KQ y $m \geq 2$ un entero tal que $R^m \subseteq \mathcal{I}$. Se tiene la sucesión exacta corta $0 \to R^m \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}/R^m \to 0$ de KQ-módulos.

Se probará que tanto R^m como $\mathcal{I}/R^m$ son finitamente generados como KQ-módulos. Se tiene que R^m es el KQ-módulo generado por los caminos de longitud m. Dado que únicamente hay un número finito de caminos, R^m es finitamente generado. Por otra parte, $\mathcal{I}/R^m$ es un ideal de la K-álgebra de dimensión finita KQ/R^m1.1. Por lo tanto $\mathcal{I}/R^m$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita y por tanto, un KQ-módulo finitamente generado. $\square$

Corolario 1.2.1. Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. Existe un conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \ldots, \rho_m \rangle$.

Lema 1.5. Para cada $\ell \geq 1$ se tiene que $\mathrm{rad}^\ell(KQ/\mathcal{I}) = (R_Q/\mathcal{I})^\ell$.

De nueva cuenta, se considerará la demostración en [1, p.57].

De este hecho se obtiene que el K-espacio vectorial

$$\mathrm{rad}(KQ/\mathcal{I})/\mathrm{rad}^2(KQ/\mathcal{I}) = (R_Q/\mathcal{I})/(R_Q/\mathcal{I})^2 \cong R_Q/R_Q^2$$

admite como base al conjunto $\overline{\alpha} = \alpha + KQ/\mathcal{I}$, para $\alpha \in Q_1$.

Ejemplo 1.18. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 3\circ \arrow[r, "\delta"] & \circ 1 \\ 4\circ \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"'] & \circ 2 \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

El ideal $\mathcal{I}$ de KQ generado por la relación $\alpha\beta - \gamma\delta$ es admisible. Así $KQ/\mathcal{I}$ es una K-álgebra de dimensión finita, y $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}, \overline{\alpha\beta}\}$ es la base de su K-espacio vectorial, el cual es isomorfo a

$$\begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K \end{bmatrix}$$

bajo el isomorfismo definido por

$$e_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e_3 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_4 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\alpha} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\beta} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\gamma} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\delta} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\alpha\beta} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De forma recíproca, un álgebra A básica y conexa es isomorfa a un álgebra de carcaj acotado $KQ/\mathcal{I}$, donde Q es un carcaj conexo e $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ.

A manera de resumen, se mostrará una construcción para asociar un carcaj a un álgebra de dimensión finita con estas propiedades.

Definición 1.18. Sea A una K-álgebra básica y conexa de dimensión finita y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de A. El **carcaj (ordinario)** de A, denotado por Q_A, se define como sigue

(a) Los puntos de Q_A son los números $1, 2, \ldots, n$, los cuales están en correspondencia biyectiva con $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

(b) Dados dos puntos $a, b \in (Q_A)_0$, las flechas $\alpha : a \to b$ están en correspondencia biyectiva con los vectores en una base del K-espacio vectorial $e_a(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_b$.

Notemos que $e_a(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_b$ con $a, b \in (Q_A)_0$, es de dimensión finita puesto que A es de dimensión finita.

Proposición 1.2. Si A es un álgebra básica y conexa de dimensión finita, entonces el carcaj Q_A de A es conexo.

De nueva cuenta, la demostración se encuentra en [1, p. 62].

Ejemplo 1.19. Sea $A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}$ la K-álgebra de matrices triangulares inferiores $[\lambda_{ij}] \in \mathbb{M}_3(K)$, con $\lambda_{32} = 0$ y $\lambda_{pq} = 0$, para $p > q$. Un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos obvio de A está dado por las tres matrices idempotentes:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que $\text{rad } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\text{rad}^2 A = 0$.

De manera rápida se muestra que $e_2(\text{rad } A)e_1$ y $e_3(\text{rad } A)e_1$ son de dimensión uno y todos los espacios restantes de la forma $e_i(\text{rad } A)e_j$ son cero (porque $\dim_K(\text{rad } A) = 2$). Por lo tanto, Q_A es el carcaj

$$\begin{tikzcd} & 1\circ & \\ 2\circ \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ 3 \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Lema 1.6. Sea Q un carcaj conexo y finito, $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ, y $A = KQ/\mathcal{I}$, entonces $Q_A = Q$.

Demostración. El conjunto $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de $A = KQ/\mathcal{I}$, 1.3. De este modo, hay una correspondencia biyectiva entre los puntos de Q_A y Q. Por el Lema 1.5, las flechas de a a b en Q también están en correspondencia biyectiva con los vectores de una base del K-espacio vectorial $e_a(\text{rad}A/\text{rad}^2A)e_b$ y por lo tanto con las flechas de a a b en Q_A. □

A su vez, existe una relación entre un álgebra básica A y el álgebra de caminos del carcaj ordinario de A. El siguiente teorema es de gran importancia ya que garantiza la existencia de dicha álgebra de caminos.

Teorema 1.2. Sea A una K-álgebra básica y conexa de dimensión finita. Entonces existe un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tal que $A \cong KQ_A/\mathcal{I}$.

Una vez más, se tomará la demostración expuesta en [1]. Es importante saber que para realizar esta demostración, es indispensable que K sea un campo algebraicamente cerrado, tal como se ha supuesto desde el inicio de este capítulo.

1.3. Representaciones

Haciendo uso de un carcaj acotado $(Q, \mathcal{I})$ asociado a una K-álgebra A, se puede estudiar cualquier A-módulo M como una representación K-lineal de $(Q, \mathcal{I})$, la cual es una familia de K-espacios vectoriales que se asocian a Q_0 y mapeos K-lineales entre ellos que corresponden a las flechas en Q. Con este propósito se presenta la siguiente definición.

Definición 1.19. Sea Q un carcaj finito. Una **representación K-lineal**, o una **representación** M de Q está definida como sigue:

(a) A cada punto a en Q_0 se le asocia un K-espacio vectorial M_a.

(b) A cada flecha $\alpha : a \longrightarrow b$ en Q_1 se le asocia un mapeo K-lineal $\varphi_\alpha : M_a \longrightarrow M_b$.

Esta representación se denota como $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, o simplemente $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Se dice que la representación es de dimensión finita si cada espacio vectorial M_a es de dimensión finita.

Dadas dos representaciones $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ de Q. Un **morfismo** (de representaciones) $f : M \longrightarrow M'$ es una familia $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de K-mapeos lineales $(f_a : M_a \longrightarrow M'_a)\, a \in Q_0$ que son compatibles con la estructura de los mapeos φ_α y φ'_α, esto es, para cada flecha $\alpha : a \longrightarrow b$, tenemos que $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$, es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] & M'_b \end{tikzcd}$$

Sean $f : M \longrightarrow M'$ y $g : M' \longrightarrow M''$ dos morfismos de representaciones de Q, donde $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ y $g = (g_a)_{a \in Q_0}$. Su composición se define como la familia $gf = (g_a f_a)_{a \in Q_0}$. Entonces gf es un morfismo de M a M''.

$$\begin{tikzcd}
M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\
M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] \arrow[d, "g_a"] & M'_b \arrow[d, "g_b"] \\
M''_a \arrow[r, "\varphi''_\alpha"] & M''_b
\end{tikzcd}$$

Con esto, definimos una categoría $\mathrm{Rep}(Q)$ de representaciones K-lineales de Q. Denotamos por $\mathrm{rep}(Q)$ a la subcategoría plena[3] de $\mathrm{Rep}(Q)$ que consiste de todas las representaciones de dimensión finita.

Ejemplo 1.20. Sea Q el carcaj de Kronecker

$$\begin{tikzcd}
1\circ & 2\circ \arrow[l, shift right, "\gamma"'] \arrow[l, shift left, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

Una representación M de Q está dada por

$$\begin{tikzcd}
K^2 & K \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"]
\end{tikzcd}$$ [4]

Otra representación está dada por

$$\begin{tikzcd}
K^2 & K^2 \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]"]
\end{tikzcd}$$

Ambas son de dimensión finita. Se tiene un morfismo $M \to M'$ definido por

$$\begin{tikzcd}
K^2 \arrow[d, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]"'] & K \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[d, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"] \\
K^2 & K^2 \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]"]
\end{tikzcd}$$

[3]Una subcategoría $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ se dice *plena* si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para cualesquiera X, Y objetos de $\mathcal{C}'$.

[4]La matriz con la que se etiqueta a cada flecha indica la matriz de la transformación lineal que se le asocia.

ya que el diagrama conmuta:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Las categorías $\mathrm{Rep}(Q)$ y $\mathrm{rep}(Q)$ cumplen ser categorías abelianas, es decir, son categorías aditivas tal que cualquier morfismo $f : X \to Y$ admite un kernel $u : \mathrm{Ker}f \to X$, un cokernel $p : Y \to \mathrm{Coker}f$ y el morfismo inducido $\bar{f} : \mathrm{Coker}u \to \mathrm{Ker}p$ es un isomorfismo [3].

Definición 1.20. Sea Q un carcaj y $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación de Q. Para cualquier camino no trivial $\omega = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\ell$ de a a b en Q, la **evaluación** de M en el camino ω es el mapeo K-lineal de M_a a M_b definido por

$$\varphi_\omega = \varphi_{\alpha_\ell}\varphi_{\alpha_{\ell-1}} \cdots \varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}.$$

Esta definición se extiende para combinaciones K-lineales de caminos con la misma fuente y el mismo objetivo. Si se tiene la combinación

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i,$$

donde $\lambda_i \in K$ y ω_i es un camino en Q, para cada i (es decir, una relación), su evaluación está dada por

$$\varphi_\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{\omega_i}.$$

Si se tiene Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ, una representación $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de Q se dice **acotada por** $\mathcal{I}$ o que **satisface las relaciones** en $\mathcal{I}$ si

$$\varphi_\rho = 0, \quad \text{para todas las relaciones } \rho \in \mathcal{I}.$$

Si $\mathcal{I}$ está generado por un conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$, la representación M está acotada por $\mathcal{I}$ si y sólo si $\varphi_{\rho_j} = 0$, para todos los j tal que $1 \le j \le m$. Denotamos por $\mathrm{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ a la categoría que consiste de las representaciones de Q acotadas por $\mathcal{I}$.

Ejemplo 1.21. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & 3\circ \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1\circ & 2\circ \arrow[l, "\lambda"'] & & 5\circ \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & & 4\circ \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

acotado por la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$. Considerando las representaciones de Q dadas como

$$M = \begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"'] & \\
K & K^2 \arrow[l, "{[1\ 1]}"'] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & K \arrow[ul, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"] &
\end{tikzcd}$$

$$N = \begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "1"'] & \\
K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "1"] \\
 & & K \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

se tiene que ambas están acotadas por $\alpha\beta = \gamma\delta$, pues $\varphi_{\beta\alpha-\delta\gamma} = 0$.

La siguiente representación no está acotada por $\alpha\beta = \gamma\delta$, pues claramente $\varphi_{\beta\alpha-\delta\gamma} = \varphi_{\delta\gamma} \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dl] & \\
K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul] \arrow[dl, "1"] \\
 & & K \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

Para estudiar la categoría de módulos mod A, donde A es una K-álgebra de dimensión finita, se puede asumir sin pérdida de generalidad que A es básica y conexa. Como se ha visto en el Teorema 1.2, existe un carcaj Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tal que $A \cong KQ_A/\mathcal{I}$.

Con lo anterior, se muestra que la categoría mod A de A-módulos a derecha finitamente generados es equivalente a la categoría $\mathrm{rep}_K(Q_A, \mathcal{I})$ de representaciones K-lineales de Q_A acotadas por $\mathcal{I}$.

El siguiente teorema permite trabajar de forma indistinta con módulos sobre una clase particular de álgebras y representaciones de un carcaj, lo cual es de gran ayuda; en general es más fácil construir cierta clase de módulos haciendo uso de representaciones tal como se verá durante la siguiente sección.

Teorema 1.3 (de Gabriel). Sea $A = KQ/\mathcal{I}$, donde Q es un carcaj finito y conexo e $\mathcal{I}$ es un ideal de KQ. Existe una equivalencia K-lineal de categorías

$$F : \text{Mod } A \xrightarrow{\simeq} \text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$$

que restringe a una equivalencia de categorías $F : \text{mod } A \xrightarrow{\simeq} \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$.

Demostración. Se construirá el funtor $F : \text{Mod } A \to \text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$. Sea M un módulo en Mod A, se define la representación K-lineal $F(M) = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ de $(Q, \mathcal{I})$ de la siguiente manera:

Si $a \in Q_0$ y $e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I}$ es el correspondiente idempotente primitivo en $A = KQ/\mathcal{I}$, entonces ponemos $M_a = Me_a$.

Si $\alpha : a \to b$ pertenece a Q_1 y $\overline{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ es su correspondiente clase módulo $\mathcal{I}$, se define $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$ por $\varphi_\alpha(x) = x\overline{\alpha} = x(e_a\overline{\alpha}e_b)$ (pues $\overline{\alpha} = e_a\overline{\alpha}e_b$), para $x \in M_a$.

Como M es un A-módulo, se tiene que φ_α es un mapeo K-lineal.

$F(M)$ está acotado por $\mathcal{I}$. En efecto, sea $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\omega_i$ una relación de a a b en $\mathcal{I}$, donde $\omega_i = \alpha_{i,1}\alpha_{i,2}\cdots\alpha_{i,\ell_i}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi_\rho(x) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\varphi_{\omega_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\varphi_{\alpha_{i,1}\alpha_{i,2}\cdots\alpha_{i,\ell_i}}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x\overline{\alpha}_{i,1}\cdots\overline{\alpha}_{i,\ell_i}) \\
&= x \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\overline{\alpha}_{i,1}\cdots\overline{\alpha}_{i,\ell_i}) \\
&= x \cdot \overline{\rho} = x \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Lo cual define un funtor en los objetos.

Sea $f : M_A \to M'_A$ un morfismo en Mod A y $F(M) = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha\in Q_1}$, $F(M') = (M'_a, \varphi'_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha\in Q_1}$.

Se definirá un morfismo $F(f) : F(M) \to F(M')$ de representaciones de Q sobre K. Para $a \in Q_0$ y $x = xe_a \in Me_a = M_a$, ponemos $f(xe_a) = f(x)e_a = f(xe_a)e_a \in M'e_a = M'_a$, porque f es un morfismo de A-módulos. De este modo, la restricción f_a de f en M_a es un mapeo K-lineal $f_a : M_a \to M'_a$. Así, ponemos $F(f) = (f_a)_{a\in Q_0}$. Para mostrar que $F(f)$ es un morfismo de representaciones, falta ver que para cualquier flecha $\alpha : a \to b$, se tiene $\varphi'_\alpha f_a = f_b\varphi_\alpha$. En efecto, sea $x \in M_a$, se tiene

$$f_b\varphi_\alpha(x) = f_b(x\overline{\alpha}) = f(x\overline{\alpha}) = f(x)\overline{\alpha} = f_a(x)\overline{\alpha} = \varphi'_\alpha f_a(x).$$

Resulta que $F : \text{Mod } A \to \text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ es un funtor K-lineal y debido a su construcción, se puede restringir a un funtor K-lineal mod $A \to \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$.

Ahora se definirá un funtor K-lineal $G : \text{Rep}_K\,(Q, \mathcal{I}) \to \text{Mod } A$, de modo que sea quasi-inversa de F.

Sea $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ una representación en $\text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$. Ponemos $G(M) = \bigoplus_{a\in Q_0} M_a$ con la estructura de A-módulo a derecha siguiente. Para esto, como $A = KQ/\mathcal{I}$, se definirá una estructura de KQ-módulo de $G(M)$. Sea $x = (x_a)_{a\in Q_0} \in G(M)$. Para describir una estructura de KQ-módulo en $G(M)$, es suficiente definir los productos de la forma $x\omega$, con ω un camino en Q. Se tienen los siguientes casos.

Si $\omega = \varepsilon_a$ es el camino estacionario en a, entonces $x\omega = x\varepsilon_a = x_a$.

Si $\omega = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell$ es un camino no trivial de a a b, se considera el mapeo K-lineal $\varepsilon_\omega = \varepsilon_{\alpha_\ell}\cdots\varepsilon_{\alpha_1} : M_a \to M_b$ y ponemos $(x\omega)_c = \delta_{bc}\varphi_\omega(x_a)$, donde δ_{bc} denota la delta de Kronecker. En otras palabras $x\omega$ es el elemento de $G(M) = \bigoplus_{a\in Q_0} M_a$ cuya única componente distinta de cero es $(x\omega)_b = \varphi_\omega(x_a) \in M_b$.

De manera natural, la multiplicación de elementos de $G(M)$ por caminos de Q, extiende a $G(M)$ como un KQ-módulo. Ahora bien, como la representación M de Q está acotada por $\mathcal{I}$, para cada relación ρ en $\mathcal{I}$ y para cada $x \in G(M)$, se tiene $x\rho = 0$. Claramente $G(M)\mathcal{I} = 0$. Con esto, $G(M)$ es un A-módulo a derecha bajo la fórmula $x(v + \mathcal{I}) = xv$ para $x \in G(M)$ y $v \in KQ$. Esto define un funtor G en los objetos.

Sea $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ un morfismo de $(M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ a $(M'_a, \varphi'_\alpha)_{a\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ en $\mathrm{Rep}_K(Q,\mathcal{I})$. Se desea construir un morfismo $G(f) : G(M) \to G(M')$ de A-módulos. Debido a la construcción de $G(M)$ y $G(M')$, K-espacios vectoriales, existe un mapeo K-lineal

$$G(f) = \bigoplus_{a\in Q_0} M_a : G(M) \to G(M').$$

Resulta que $G(f)$ es un morfismo de A-módulos a derecha, esto es, para cualquier $x \in G(M)$ y cualquier $\overline{\omega} \in KQ/\mathcal{I}$, se tiene que $G(f)(x\overline{\omega}) = G(f)(x)\overline{\omega}$. En efecto, sea $x = x_a \in M_a$ y $\overline{\omega} = \omega + \mathcal{I}$, donde ω es un camino en Q de $a \in Q_0$ a $b \in Q_0$. Se tiene

$$G(f)(x\overline{\omega}) = G(f)(x_a\overline{\omega}) = f_b\varphi_\omega(x_a) = \varphi'_\omega f_a(x_a) = f_a(x_a)\overline{\omega} = G(f)(x)\overline{\omega}$$

con lo que se cumple la afirmación.

Con todo, también se cumple que G es un funtor K-lineal. Además, G se puede restringir al funtor K-lineal $\mathrm{mod}\, A \to \mathrm{rep}_K(Q,\mathcal{I})$.

Se verifica que $FG \cong 1_{\mathrm{Rep}_K(Q,\mathcal{I})}$ y $GF \cong 1_{\mathrm{Mod}\, A}$.

Por último, al ser Q finito, si $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ es una representación K-lineal de $(Q,\mathcal{I})$, se tiene que $\dim_K(\bigoplus_{a\in Q_0} M_a) < \infty$ si y sólo si $\dim_K M_a < \infty$ para todo $a \in Q_0$, con lo que se prueba la segunda afirmación de este Teorema.

□

Corolario 1.3.1. Sea Q un carcaj, finito, conexo y acíclico. Existe una equivalencia de categorías $\mathrm{Mod}\, KQ \cong \mathrm{Rep}_K(Q)$ que restringe a una equivalencia $\mathrm{mod}\, KQ \cong \mathrm{rep}_K(Q)$.

Demostración. Dado que Q es acíclico, por el Teorema 1.2, el álgebra KQ es de dimensión finita. Así, el resultado se sigue haciendo $\mathcal{I} = 0$ en el Teorema 1.3. □

1.4. Módulos simples, proyectivos e inyectivos

En adelante, $(Q,\mathcal{I})$ denotará un carcaj finito, conexo y acotado por el ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ. Se denotará por A a la K-álgebra de carcaj acotado

$A = KQ/\mathcal{I}$. Así, A es una K-álgebra básica, conexa y de dimensión finita con identidad, con $R/\mathcal{I}$ como radical (donde R es el ideal de flechas de KQ) y $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ como conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos. Del Teorema de Gabriel 1.3, existe una equivalencia entre los A-módulos de este tipo de álgebras y las representaciones K-lineales de $(Q, \mathcal{I})$.

El objetivo de esta sección es mostrar una manera de calcular los A-módulos simples, proyectivos indescomponibles e inyectivos indescomponibles como representaciones acotadas de $(Q, \mathcal{I})$.

Sea $a \in Q_0$, se denota por $S(a)$ la representación $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ de Q definida como sigue:

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & si \quad b \neq a \\ \\ K & si \quad b = a \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = 0 \quad para \;\; todo \;\; \alpha \in Q_1.$$

Es claro que $S(a)$ es una representación acotada de $(Q, \mathcal{I})$ para cualquier $\mathcal{I}$. Llamamos a $S(a)$ el A-módulo simple correspondiente al punto $a \in Q_0$.

El siguiente teorema provee una forma sencilla de calcular algunos de los módulos más importantes de un álgebra, que habitualmente no se deducen con facilidad, mostrando la magnitud del Teorema 1.3.

Lema 1.7. Sea $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación acotada de $(Q, \mathcal{I})$.

(a) M es semisimple si y sólo si $\varphi_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in Q_1$.

(b) soc $M{=}N$, donde $N = (N_a, \psi_\alpha)$ con $N_a = M_a$ si a es un pozo[5]; mientras que

$$N_a = \bigcap_{\alpha : a \to b} \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha : M_a \to M_b)$$

si a no es pozo y $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \restriction_{N_a} = 0$ para toda flecha α con fuente a.

(c) rad $M = J$, donde $J = (J_a, \gamma_\alpha)$ con $J_a = \sum_{\alpha : b \to a} \mathrm{Im}(\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$ y $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha \mid_{J_\alpha}$ para toda flecha α con fuente a.

[5]Esto es, ninguna flecha tiene por fuente a a.

(d) top $M = L$, donde $L = (L_a, \psi_\alpha)$ con $L_a = M_a$ si a es una fuente, mientras que

$$L_a = \sum_{\alpha:b\to a} \mathrm{Coker}(\psi_\alpha : M_b \to M_a)$$

si a no es una fuente y $\psi_\alpha = 0$ para toda flecha α con fuente a.

Demostración. (a) Este inciso se sigue de que $\varphi_\alpha = 0$ para cualquier $\alpha \in Q_1$ si y sólo si $M \cong \bigoplus a \in Q_0 S(a)^{\dim_K M_a}$.

(b) Al ser $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \mid_{N_a}$, N es un submódulo de M. Por (a), dado que $\psi_\alpha = 0$ para cada α, se tiene que N es semisimple. Sea S_A un módulo simple de M. Luego, existe $a \in Q_0$ tal que $S \cong S(a)$ (pues $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de A-módulos simples del álgebra de carcaj acotado $A = KQ/\mathcal{I}$ de $(Q, \mathcal{I})$). Así, para cada $\alpha : a \to b$, se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K = S(a)_a \arrow[r] \arrow[d] & S(a)_b = 0 \arrow[d] \\ M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & M_b \end{tikzcd}$$

De aquí que $S(a)_a \subseteq \mathrm{Ker}\varphi_\alpha$ para cada $\alpha : a \to b$ y $S(a)_a \subseteq N_a$. Esto prueba que $S(a) \subseteq N$ y por lo tanto $N = \mathrm{soc}\ M$.

(c) Sea R el ideal de flechas de KQ. Puesto que rad $A = R/\mathcal{I}$ está generado como un ideal (a ambos lados) por las clases residuales módulo $\mathcal{I}$ de las flechas $\alpha \in Q_1$ y dado que Mrad $A =$ rad M es una propiedad del radical de un módulo M en mod A ([1], p. 15), se sigue que

$$J = \mathrm{rad} M = M \cdot \mathrm{rad} A = M \cdot (R/\mathcal{I}) = \sum_{\alpha\in Q_1} M\overline{\alpha},$$

donde $\overline{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$. Luego, para cualquier $a \in Q_0$, se tiene $J_a = \sum_{\alpha:b\to a} M\overline{\alpha}$, donde la suma es tomada sobre todas las flechas con objetivo a. Para tales flechas, la definición del funtor F en 1.3, satisface $M\overline{\alpha} = Me_b\overline{\alpha} = M_b\overline{\alpha} = \varphi_\alpha(M_b) = \mathrm{Im}\varphi_\alpha$, porque la acción de φ_α corresponde a la multiplicación a derecha por $\overline{\alpha}$. Así, $J_a = \sum_{\alpha:b\to a} \mathrm{Im}(\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$. Como J es un submódulo de M, se tiene $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha \mid_{J_a}$.

(d) Se sigue de (c) pues top $M = M/\text{rad}M$.

$\square$

Ejemplo 1.22. Sea M el A-módulo

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "0"] & & \\
K & K \arrow[l, "1"'] \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ll, "1"] & K \arrow[l, "1"']
\end{tikzcd}$$

Entonces M no es semisimple y

$$\text{soc } M = \begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "0"] & & \\
K & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[ur, "0"] & & 0 \arrow[ll, "0"] & 0 \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}$$

$$\text{rad } M = \begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "0"] & & \\
K & K \arrow[l, "1"'] \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ll, "1"] & 0 \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}$$

Dado que A es un álgebra básica y $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de A, la descomposición $A_A = \bigoplus_{a\in Q_0} e_aA$ es una descomposición de A_A como una suma directa de A-módulos proyectivos e indescomponibles no isomorfos. De manera que $P(a) = e_aA$ con $a \in Q_0$.

Para describir explícitamente los A-módulos inyectivos indescomponibles se considera la lista completa de A-módulos inyectivos e indescomponibles no isomorfos dados por los módulos $I(a) = D(Ae_A)$ con $a \in Q_0$, donde $D = \text{Hom}_K(-, K)$ denota la K-Dualidad Estándar[6] entre A-módulos a derecha y A-módulos a izquierda. Así $I(a) = Ae_a$ con $a \in Q_0$.

Ejemplo 1.23. Sea A el álgebra dada por

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ll, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

[6]Este funtor se describe de forma explícita en el apéndice.

Considerando la representación

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "1"] & \\ K \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ll, "1"] \end{tikzcd}$$

Los módulos indescomponibles proyectivos e inyectivos son los siguientes

$$\mathrm{P}(1) = \mathrm{I}(2) = \begin{tikzcd} & K \arrow[dr] & \\ K \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{P}(2) = \mathrm{I}(3) = \begin{tikzcd} & K \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & K \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{P}(3) = \mathrm{I}(1) = \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & \\ K \arrow[ur] & & K \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

La siguiente definición proveerá una notación más compacta para módulos sobre un álgebra con las características anteriormente mencionadas.

Para esto, denotaremos a los puntos (vértices) del carcaj Q de A como $\{1, \ldots, n\}$, a los idempotentes primitivos de A como e_j, haciendo correspondencia a los elementos $j \in Q_0$ y por $P(j) = e_jA$, $I(j) = D(Ae_j)$ a los correspondientes A-módulos proyectivos e inyectivos.

Definición 1.21. Sea $A \cong KQ/\mathcal{I}$ una K-álgebra y sea M un módulo en mod A. El **vector dimensión** de M está definido como el vector

$$\operatorname{\mathbf{dim}} M = \begin{bmatrix} \dim_K Me_1 \\ \vdots \\ \dim_K Me_n \end{bmatrix} = [\dim_K Me_1, \ldots, \dim_K Me_n]^t$$

en $\mathbb{Z}^n$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ son idempotentes ortogonales primitivos de A que corresponden a los puntos $1, 2, \ldots, n$ de Q_0.

En algunos casos, resulta conveniente representar vectores dimensión de una forma más sugerente, es decir, siguiendo la forma del carcaj.

Ejemplo 1.24. Los módulos simples, proyectivos e inyectivos del ejemplo 1.23 quedan como sigue

$$\mathrm{S}(1) = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}(2) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}(3) = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}(1) = \mathrm{I}(2) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}(2) = \mathrm{I}(3) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}(3) = \mathrm{I}(1) = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

O bien, se puede prescindir de los paréntesis.

Ejemplo 1.25. El A-módulo

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "0"] & & \\
K & K^2 \arrow[l, "1"'] \arrow[ur, "1"] & & K \arrow[ll, "1"] & K^3 \arrow[l, "1"']
\end{tikzcd}$$

tiene por vector dimensión (siguiendo la forma del carcaj)

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ 1 & 2 & & 1 & 3 \end{array}$$

Capítulo 2

Teoría de Auslander-Reiten

En este capítulo se presenta una herramienta estándar para describir todos los módulos indescomponibles sobre una cierta clase de K-álgebras de dimensión finita que se darán a conocer en el capítulo 3, así como los morfismos entre ellos. Lo anterior, considerando el Teorema 1.3 presentado en el capítulo 1. Esta herramienta fue introducida por Auslander y Reiten mediante las nociones de morfismos irreducibles y sucesiones que casi escinden [1].

En la sección 2.1 se presentará la definición y propiedades más importantes, algunas sin demostración, de morfismos irreducibles y morfismos que casi escinden en mod A. Se tendrá en cuenta que, como consecuencia del Teorema de Descomposición Única 1.1, cualquier módulo en esta categoría se puede descomponer de forma única en sumandos indescomponibles salvo isomorfismo y permutación. A lo largo de la sección 2.2, se muestran los principales resultados de morfismos irreducibles y sucesiones que casi escinden. El objetivo de esta sección es mostrar los teoremas y proposiciones más usuales para construir la categoría mod A, por lo cual únicamente se muestran las demostraciones de las últimas consecuencias. Todo lo anterior tiene el objetivo de introducir la definición de carcaj de Auslander-Reiten cuya construcción recopila los elementos de la categoría mod A.

2.1. Morfismos que casi escinden y morfismos irreducibles

Definición 2.1. Sean L, M, N módulos en mod A.

(a) Un morfismo de A-módulos $f : L \to M$ es **minimal a izquierda** si todo $h \in \operatorname{End} M$ tal que $hf = f$ es un automorfismo.

(b) Un morfismo de A-módulos $g : M \to N$ es **minimal a derecha** si todo $k \in \operatorname{End} M$ tal que $gk = g$ es un automorfismo.

(c) Un morfismo de A-módulos $f : L \to M$ **casi escinde a izquierda** si

  (i) f no es una sección, es decir, no existe un morfismo $p : M \to L$ tal que $pf = id_L$.

  (ii) para cualquier morfismo de A-módulos $u : L \to U$ que no es una sección existe $u' : M \to U$ tal que $u'f = u$, es decir, que u' hace al siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[dl, dashed, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

(d) Un morfismo de A-módulos $g : M \to N$ **casi escinde a derecha** si

  (i) f no es una retracción, es decir, no existe un morfismo $q : N \to M$ tal que $gq = id_N$.

  (ii) para cualquier morfismo de A-módulos $v : V \to N$ que no es una retracción existe $v' : V \to M$ tal que $gv' = g$, es decir, que u' hace al siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

(e) Un morfismo de A-módulos $f : L \to M$ **es minimal que casi escinde a izquierda** si es minimal a izquierda y casi escinde a izquierda.

(f) Un morfismo de A-módulos $g : M \to N$ **es minimal que casi escinde a derecha** si es minimal a derecha y casi escinde a derecha.

Proposición 2.1. (a) Si los morfismos de A-módulos $f : L \to M$ y $f' : L \to M'$ son minimales que casi escinden a izquierda, entonces existe un isomorfismo $h : M \to M'$ tal que $f' = hf$.

(b) Si los morfismos de A-módulos $g : M \to N$ y $g' : M' \to N$ son minimales que casi escinden a derecha, entonces existe un isomorfismo $k : M \to M'$ tal que $g = g'k$.

Demostración. Únicamente se probará (a) puesto que la prueba de (b) es análoga.

Dado que f y f' casi escinden a izquierda, existen $h : M \to M'$ y $h' : M' \to M$ tales que $f' = hf$ y $f = h'f'$. De aquí que $f = h'hf'$ y $f' = hh'f'$, con $h'h \in \text{End } M$ y $hh' \in \text{End } M'$. Como f y f' son minimales, $h'h$ y hh' son automotfismos. Así, h es un isomorfismo. □

Lema 2.1. (a) Si $f : L \to M$ es un morfismo que casi escinde a izquierda en mod A, entonces el módulo L es indescomponible.

(b) Si $f : M \to N$ es un morfismo que casi escinde a derecha en mod A, entonces el módulo N es indescomponible.

Demostración. Solamente se probará (a) ya que la prueba para (b) es similar.

Supongamos que L no es indescomponible. Así $L \cong L_1 \oplus L_2$ para L_1 y L_2 distintos de cero. Sean $p_1 : L \to L_1$ y $p_2 : L \to L_2$ las respectivas proyecciones, de modo que p_1 y p_2 no son secciones. Como f casi escinde a izquierda, existen morfismos $u_1 : M \to L_1$ y $u_2 : M \to L_2$ tales que $u_1 f = p_1$ y $u_2 f = p_2$. Sin embargo, $u = \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right] : M \to L$ cumple $uf = 1_L$, indicando que f sí es una sección, lo cual no puede suceder. □

Definición 2.2. Un morfismo $f : X \to Y$ en mod A es **irreducible** si

(a) f no es una sección ni una retracción y

(b) si $f = f_1 f_2$, entonces f_1 es una retracción o f_2 es una sección.

De esta última definición, podemos inferir que si un morfismo f es irreducible entonces es un monomorfismo propio o un epimorfismo propio, esto es, un monomorfismo que no es isomorfismo o un epimorfismo que no es isomorfismo.

Para la siguiente definición, se denotará por rad_A a $\mathrm{rad}_{\mathrm{mod}A}$, el **radical de la categoría** mod A y con $A(X,Y)$ se denotará a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}A}(X,Y)$.

Definición 2.3. El **radical** de la categoría mod A es el ideal rad_A definido como

$$\mathrm{rad}_A(X,Y) = \{h \in A(X,Y) : 1_X - g \circ h \text{ es invertible para algún } g \in A(Y,X)\}$$

donde $1_X \in A(X,X)$ es el morfismo identidad en X, y esto se cumple para todos los objetos X y Y de mod A.

Se tiene que si X, Y son módulos indescomponibles en mod A, entonces $\mathrm{rad}_A(X,Y)$ es el K-espacio vectorial de todos los homomorfismos no invertibles de X a Y. Así, si X es indescomponible, $\mathrm{rad}_A(X,X)$ no es más que el radical del álgebra local End X. Si X, Y son módulos indescomponibles en mod A, se define la segunda potencia $\mathrm{rad}_A^2 \subseteq \mathrm{rad}_A$ de rad_A tomando por $\mathrm{rad}_A^2(X,Y)$ al subespacio de rad_A que consiste de todos los homomorfismos de A-módulos de la forma gf, donde $f \in \mathrm{rad}_A(X,Z)$ y $g \in \mathrm{rad}_A(Z,Y)$ para algún (no necesariamente indescomponible) objeto Z en mod A.

El espacio $\mathrm{rad}_A(X,Y)\backslash\mathrm{rad}_A^2(X,Y)$ "mide" el número de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles X y Y tal como lo muestra el siguiente lema.

Lema 2.2. Sean X, Y módulos indescomponibles en mod$A$. Un morfismo $f : X \to Y$ es irreducible si y sólo si $f \in \mathrm{rad}_A(X,Y)\backslash\mathrm{rad}_A^2(X,Y)$.

Demostración. Primero se supondrá que f es irreducible. De acuerdo a la definición de radical, $f \in \mathrm{rad}_A(X,Y)$. Supongamos ahora que $f \in \mathrm{rad}_A^2(X,Y)$. Esto es, $f = gh$ donde $h \in \mathrm{rad}_A(X,Z)$ y $g \in \mathrm{rad}_A(Z,Y)$ para algún Z objeto de mod A. De acuerdo al Teorema de Descomposición Única 1.1, $Z = \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i$ para algún t y Z_i módulos indescomponibles para $i = 1, \dots, t$. Así, podemos escribir los morfismos h y g como $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} : X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i$, y

$g = [g_1 \ \cdots \ g_t] : \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i \longrightarrow Y$. Puesto que f es irreducible, h es una sección o bien, g es una retracción. Supongamos que h es una sección, así pues, sea

$h' = [h'_1 \ \cdots \ h'_t] : \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i \longrightarrow X$ tal que $1_X = h'h = \sum_{i=1}^{t} h'_i h_i$. Dado que h'_i no es invertible (para todo i), $h'_i h_i$ tampoco es invertible, de modo que $h'_i h_i \in \mathrm{rad}_A(X, X) = \mathrm{rad\ End}\ X$. Sin embargo, End X es local, por lo tanto $1_X \in \mathrm{rad\ End}\ X$, y $h'_i h \notin \mathrm{rad}_A(X, X)$ lo cual es una contradicción. Así que h no es una sección. Análogamente g no es una retracción.

Estas contradicciones muestran que $f \notin \mathrm{rad}_A^2(X, Y)$.

Recíprocamente, se supone que $f \in \mathrm{rad}_A(X, Y) \backslash \mathrm{rad}_A^2(X, Y)$. Debido a que X, Y son indescomponibles y f no es un isomorfismo, f no puede ser una sección y tampoco puede ser una retracción. Supongamos ahora que $f = gh$, donde $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$, para algún $Z \in \mathrm{mod}\ A$. Descomponiendo a Z como suma directa de módulos indescomponibles $Z = \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i$ y escribiendo $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} : X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i$, y $g = [g_1 \ \cdots \ g_t] : \bigoplus_{i=1}^{t} Z_i \longrightarrow Y$, se tiene que $f = \sum_{i=1}^{t} g_i h_i$. Como $f \notin \mathrm{rad}_A^2(X, Y)$, existe un índice $i \in \{1, \ldots t\}$, tal que o bien h_i es invertible o bien existe un índice $j \in \{1, \ldots t\}$, tal que g_j es invertible. Si ocurre que h_i es invertible para algún i, entonces h es una sección. De lo contrario, g es una retracción. Así, f es irreducible. □

Del Lema 2.2, dados M y N A-módulos indescomponibles en mod A se construye el cociente

$$\mathrm{Irr}(M, N) = \mathrm{rad}_A(M, N) \backslash \mathrm{rad}_A^2(M, N)$$

de los K-espacios vectoriales $\mathrm{rad}_A(M, N)$ y $\mathrm{rad}_A^2(M, N)$, llamado **espacio de morfismos irreducibles**.

2.2. Propiedades de morfismos irreducibles y sucesiones que casi escinden

Proposición 2.2. (a) Si $f : L \to M$ es un monomorfismo irreducible, entonces $N = \mathrm{Coker} f$ es indescomponible.

(b) Si $g : M \to N$ es un epimorfismo irreducible, entonces $L = \mathrm{Ker} g$ es indecomponible.

El Teorema que se presenta a continuación, muestra cómo los morfismos irreducibles pueden ser vistos como componentes de morfismos minimales que casi escinden.

Teorema 2.1. (a) Sea $f : L \to M$ minimal que casi escinde a izquierda en mod$A$. Entonces f es irreducible. Más aún, un homomorfismo $f' : L \to M'$ de A-módulos es irreducible si y sólo si $M' \neq 0$ y existe una descomposición en suma directa $M \cong M' \oplus M''$ y un homomorfismo $f'' : L \to M''$ tal que $\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix} : L \to M' \oplus M''$ es minimal que casi escinde a izquierda.

(b) Sea $g : M \to N$ minimal que casi escinde a derecha en mod$A$. Entonces g es irreducible. Más aún, un homomorfismo $g' : M' \to N$ de A-módulos es irreducible si y sólo si $M' \neq 0$ y existe una descomposición en suma directa $M \cong M' \oplus M''$ y un homomorfismo $g'' : M'' \to N$ tal que $\begin{bmatrix} g' & g'' \end{bmatrix} : M' \oplus M'' \to N$ es minimal que casi escinde a derecha.

Definición 2.4. Una sucesión exacta corta en mod$A$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es llamada una **sucesión que casi escinde** si:
(a) f es minimal y casi escinde a izquierda y
(b) g es minimal y casi escinde a derecha.

Se observa que al ser f y g morfismos que casi escinden a izquierda y derecha, respectivamente, los módulos L y N son indescomponibles. Además, dado que f no es una sección y g no es una retracción, la sucesión no escinde, de modo que L es un módulo no inyectivo y N es un módulo no proyectivo.

Las siguientes equivalencias de las sucesiones que casi escinden sintetizan algunas de los resultados que hasta este punto se han mostrado en este capítulo y añade algunas más que serán utilizadas para probar los resultados que se presentan a lo largo de esta sección.

Teorema 2.2. Sea

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en mod$A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) La sucesión dada casi escinde.

(b) L es indescomponible y g casi escinde a derecha.

(c) N es indescomponible y f casi escinde a izquierda.

(d) El homomorfismo f es minimal que casi escinde a derecha.

(e) El homomorfismo g es minimal que casi escinde a izquierda.

(f) L y N son indescomponibles, y f y g son irreducibles.

La existencia de las sucesiones que casi escinden en mod A está garantizada, sin embargo este hecho está lejos de ser obvio. Para esto se construye el siguiente funtor.

Definición 2.5. Las **traslaciones de Auslander-Reiten** se definen como la composición de D con Tr[1], como sigue

$$\tau = DTr \quad \text{y} \quad \tau^{-1} = TrD$$

La existencia de estas sucesiones está plasmada en el siguiente teorema.

Teorema 2.3. (a) Para cualquier A-módulo indescomponible no proyectivo M_A, existe una sucesión que casi escinde $0 \to \tau M \to E \to M \to 0$ en mod$A$.

(b) Para cualquier A-módulo indescomponible no inyectivo N_A, existe una sucesión que casi escinde $0 \to N \to F \to \tau^{-1}N \to 0$ en mod$A$.

Para establecer un método de construcción para la traslación de Auslander-Reiten, se recurre al funtor de Nakayama ν [2].

Proposición 2.3. (a) Sea P un módulo indescomponible y proyectivo en mod$A$. Un homomorfismo de A-módulos $g : M \to P$ es minimal que casi escinde a derecha si y sólo si g es un monomorfismo con imagen igual a rad P.

[1] Tr denota la dualidad Tr, este funtor es llamado **transposición** y se encuentra definido en el apéndice

[2] Tanto la definición de este funtor como el teorema de construcción se encuentran en el apéndice.

(b) Sea I un módulo indescomponible e inyectivo en mod$A$. Un homomorfismo de A-módulos $f : I \to M$ es minimal que casi escinde a izquierda si y sólo si f es un epimorfismo con kernel igual a soc I.

Demostración. Únicamente se probará (a) puesto que la prueba para (b) es similar. Por la Proposición 2.1(b), es suficiente mostrar que el homomorfismo inclusión $g : \mathrm{rad}P \to P$ es minimal que casi escinde a derecha, puesto que estos morfismos están determinados por su objetivo.

Dado que g es un monomorfismo, g es minimal que casi escinde a derecha. Además g no es una retracción. Sea $v : V \to P$ un homomorfismo tal que no es una retracción. Puesto que P es proyectivo sólo tiene un submódulo maximal, de modo que rad P es el único submódulo maximal de P. Así, como v no es un epimorfismo, v necesariamente factoriza en rad P, pues $v(V) \subseteq \mathrm{rad}P$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{rad}P \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

□

Corolario 2.2.1. Sea X un módulo indescomponible en mod$A$.

(a) Existe un morfismo minimal que casi escinde a derecha $g : M \to X$. Además $M = 0$ si y sólo si X es simple y proyectivo.

(b) Existe un morfismo minimal que casi escinde a izquierda $f : X \to M$. Además $M = 0$ si y sólo si X es simple e inyectivo.

Proposición 2.4. (a) Sea M un módulo indescomponible y no proyectivo en mod A. Existe un morfismo irreducible $f : X \to M$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $f' : \tau M \to X$.

(b) Sea N un módulo indescomponible y no inyectivo en mod A. Existe un morfismo irreducible $f : N \to Y$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $g' : Y \to \tau^{-1}N$.

Demostración. Solamente se probará (a) puesto que la prueba de (b) es análoga.

Primero supongamos que $f : X \to M$ es un morfismo irreducible. Por Teorema 2.1(b), existe $h : Y \to M$ tal que $[f\ h] : X \oplus Y \to M$ es minimal que casi escinde a derecha. Como M no es proyectivo, entonces $[f\ h]$ es un epimorfismo. Por la Proposición 2.2, $L = \mathrm{Ker}[f\ h]$ es indescomponible y así por el Teorema 2.2 la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' \\ h' \end{bmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{[f\ h]} M \longrightarrow 0$$

casi escinde. Dado que las sucesiones que casi escinden con módulo inicial y final dado son únicas salvo isomorfismo, existe un isomorfismo $g : \tau M \xrightarrow{\simeq} L$ y así, el homomorfismo $f'g : \tau M \to X$ es irreducible.

El recíproco se obtiene de forma similar. $\square$

Corolario 2.2.2. (a) Sea S un módulo simple proyectivo y no inyectivo en mod A. Si $f : S \to M$ es irreducible, entonces M es proyectivo.

(b) Sea S un módulo simple inyectivo y no proyectivo en mod A. Si $f : M \to S$ es irreducible, entonces M es inyectivo.

Demostración. Para probar (a), sin pérdida de generalidad podemos asumir que M es indescomponible. Supongamos que f es irreducible y M no es proyectivo. Aplicando la Proposición 2.4(a), se tiene que existe un morfismo irreducible $\tau M \to S$. Por el Corolario 2.2.1 (a), $\tau M = 0$, así M es proyectivo.

La prueba de (b) es similar. $\square$

Proposición 2.5. Sea P un módulo no simple, indescomponible, proyectivo e inyectivo, $S = \mathrm{soc}\ P$, y $R = \mathrm{rad}\ P$. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}} R/S \oplus P \xrightarrow{[-j\ p]} P/S \longrightarrow 0$$

casi escinde.

Demostración. Dado que R tiene soclo simple, es indescomponible. De modo que $i : R \to P$ es el único morfismo irreducible (salvo isomorfismo) con final

P de acuerdo a la Proposición 2.3(a). De igual manera, el módulo P/S es indescomponible y $p : P \to P/S$ es el único morfismo irreducible (salvo isomorfismo) con inicio en P 2.3(b). Por la Proposición 2.4(a) $\tau(P/S) \to P$ es irreducible, luego $R \cong \tau(P/S)$.

Puesto que la sucesión exacta que forman i y p no escinde, basta ver que el monomorfismo $\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} : R \to R/S \oplus P$ casi escinde a izquierda de acuerdo a 2.2(d).

Para esto, supongamos que $u : R \to U$ no es una sección. Si u es un monomorfismo, entonces como P es inyectivo, u factoriza en P y en efecto, el monomorfismo que deseamos, escinde a izquierda. De lo contrario, existe una factorización $u = u'u''$, con $u'' : R \to U'$ un epimorfismo propio y $u' : U' \to U$ un monomorfismo. Ya que $\mathrm{Ker}\ u \neq 0$, el soclo simple S de R está contenido en $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u''$. Así, el epimorfismo u'' factoriza en R/S, esto es, existe $u_1 : R/S \to U'$ tal que $u'' = u_1 q$. Así $\bar{u} = [u'u_1, 0]$ satisface u_1 $\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} = [u'u_1, 0] \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} = u'u_1 q = u'u'' = u$. □

Como se mencionó con anterioridad, para algunos casos sencillos, los hechos que establecen los resultados mostrados a lo largo de esta sección es todo lo que se necesita para construir el carcaj de la categoría mod A, donde A es una K-álgebra de dimensión finita. Este carcaj representa la información fundamental de esta categoría que es, en esencia, todos los módulos indescomponibles en mod$A$ (salvo isomorfismo) y los morfismos irreducibles entre ellos, es decir los homomorfismos que no factorizan en módulos no triviales. La definición formal de este carcaj es la siguiente.

Definición 2.6. Sea A un álgebra básica y conexa de dimensión finita. El carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ se define como sigue:

(a) Los puntos de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ son las clases de isomorfismo $[X]$ de módulos indescomponibles X en mod$A$

(b) Sean $[M]$, $[N]$ los puntos en $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ correspondientes a los módulos indescomponibles M, N en mod$A$. Las flechas $[M]\to[N]$ están en correspondencia biyectiva con los vectores de una base del K-espacio vectorial $\mathrm{Irr}(M, N)$.

El carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ de la categoría de módulos mod$A$ es llamado el **carcaj de Auslander-Reiten** de A.

En el capítulo 4 se muestra la construcción de los carcajes de Auslander-Reiten de las categorías de módulos sobre álgebras que son de interés para este trabajo.

Capítulo 3

Álgebras Jacobianas

A lo largo de este capítulo se muestra la construcción del carcaj asociado a la triangulación de una superficie.

Las definiciones de este capítulo han sido extraídas de [2, p. 3-5] y al mismo tiempo adaptadas para discos con puntos marcados en la frontera. De esta manera (de acuerdo a la definición de arco), se hablará de polígonos de n lados cuando de discos con n puntos marcados en la frontera se trate. Para esta clase de superficies, estas definiciones son simplificadas como se muestra a continuación.

Con este fin, en adelante se denotará con Δ_{n+3} al polígono (disco) con $n+3$ vértices (puntos distintos marcados en la frontera) $a_1, \ldots, a_{n+3}$ ordenados en el sentido de las manecillas del reloj.

Definición 3.1. Un **arco** A_i en Δ_{n+3} es un segmento que conecta a a_i con a_j.

Definición 3.2. Dos arcos son **compatibles** si no se intersectan.

Definición 3.3. El segmento B_i de (los vértices del polígono) a_i a a_{i+1} (lado del polígono) es un *arco exterior* (en la frontera).

Definición 3.4. Una **triangulación** T es una colección maximal de arcos interiores compatibles (se excluyen los lados del polígono, es decir, los arcos exteriores). Esta triangulación corta al polígono en **triángulos**.

Como primera observación, toda triangulación de Δ_{n+3} consta de n arcos.

Ejemplo 3.1.

Figura 3.1: Triangulaciones de Δ_6

Definición 3.5. Sea $T = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ los arcos interiores de una triangulación de Δ_{n+3}. El **flip de T en** A_i es una transformación μ_{A_i} que remueve el arco A_i y lo reemplaza con un único arco diferente A_i', tal que junto con los arcos restantes forman una nueva triangulación T'. Es decir

$$\mu_{A_i}(T) = T' = T \setminus \{A_i\} \cup \{A_i'\}$$

es una triangulación.

Ejemplo 3.2.

Figura 3.2: Flip en A_1

Lema 3.1. Cualesquiera dos triangulaciones de Δ_{n+3} están relacionadas por flips.

Demostración. Por inducción sobre el número de vértices del polígono. Sea T una triangulación de Δ_{n+3}.

Para $n = 0$ la propiedad se cumple por vacuidad.

Para $n = 1$ la propiedad se cumple pues $|T| = 1$, T es única salvo permutación (un flip en el único arco, sólo hay dos triangulaciones distintas).

Supongamos que esto se cumple para cualquier triangulación de Δ_{n+3} y Δ_i con $i \leq n$.

Cualquier triangulación debe incluir al menos un triángulo con vértices consecutivos (según el ordenamiento que siguen las manecillas del reloj). De esta manera, podemos ver una triangulación de Δ_{n+4} como una triangulación de Δ_{n+3} añadiendo un vértice tal que forma un triángulo con dos vértices consecutivos. Sea ι el vértice añadido y ι_j, ι_{j+1} los vértices vecinos que eran vértices de Δ_{n+3}. Dado que $\iota_j, \iota, \iota_{j+1}$ forman un triángulo, cualquier cambio en la triangulación de los vértices originales puede realizarse mediante flips de acuerdo a la hipótesis inductiva. Así que sólo tenemos que estudiar el caso de otras triangulaciones cuyos arcos interiores involucran al vértice ι. Note que ι tiene valencia[1] dos y podría llegar a tener grado de hasta $n - 2$.

Estos casos quedan cubiertos de la siguiente forma.

Sea A_j el arco con vértices finales ι, ι_{j+1}. Considerando los triángulos que comparten el arco A_j y que tienen como tercer vértice ι y ι_i para algún ι_i vértice de Δ_{n+3} respectivamente, podemos hacer un flip en A_j y reemplazarlo por el arco A_i con vértices finales ι y ι_i. Ahora ι tiene valencia tres y está conectado con el vértice ι_i.

Modificando la triangulación de Δ_{n+3} por medio de flips, se puede cambiar arcos con vértice ι_i a cualquier otro vértice (con excepción de los arcos que también tienen como vértice final ι_j y ι_{j+1}) y conseguir cualquier triangulación en la que ι tenga valencia tres.

Tomando como triangulación inicial cualquiera de estas nuevas triangulaciones, se puede incrementar la valencia de ι a cuatro mediante otro flip y repetir esto consecutivamente.

[1] Con valencia de un vértice ι se hace referencia al grado de este vértice, es decir, el número de arcos que conectan a ι con otros vértices.

Así, por medio de flips se transforma una triangulación en cualquier otra.

□

Sean $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una triangulación de Δ_{n+3} y $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ los vértices de un triángulo ordenados de forma usual (en el sentido de las manecillas del reloj), con arcos A_i, A_j, A_k tal que A_i conecta a a_{i_3} con a_{i_1}, A_j conecta a a_{i_1} con a_{i_2} y A_k conecta a a_{i_2} con a_{i_3}. Entonces A_i está **"antes que"** A_j y A_j está **"antes que"** A_k, es decir, los arcos también se ordenan en el sentido de las manecillas del reloj. La siguiente figura ilustra esta noción.

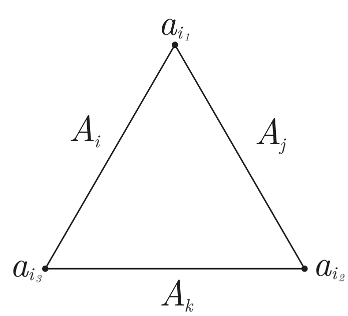


Figura 3.3: A_i está "antes que" A_j y A_j está "antes que" A_k.

Definición 3.6. Sea $T = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una triangulación de Δ_{n+3}. El carcaj Q_T asociado a T se define como

- $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$
- Si $A_i, A_j \in T$ son lados de un triángulo y A_i está antes que A_j, entonces añadimos una flecha $a_{ij} : i \to j$ en Q_1.

Ejemplo 3.3.

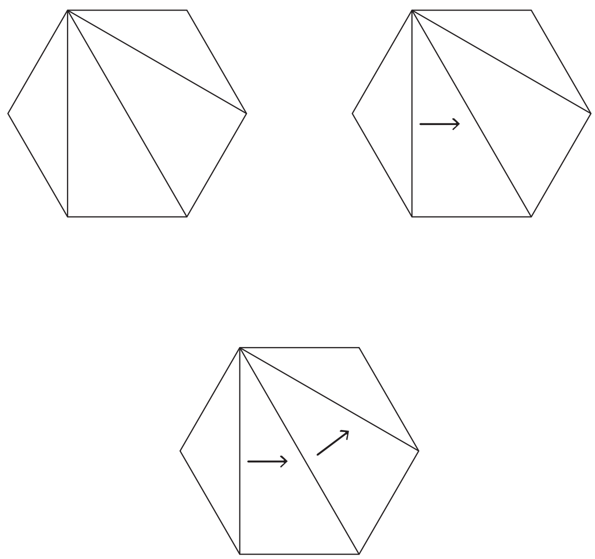


Figura 3.4: Construcción del carcaj Q_T

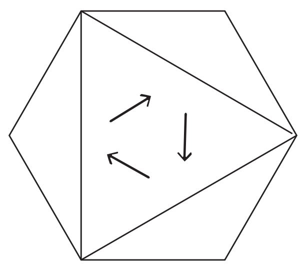
Definición 3.7. Sea KQ_T una K-álgebra de caminos asociada a una triangulación T. El **potencial de** KQ_T es el ideal admisible

$$\mathcal{I}_T := \sum_{\Delta \in T} C_\Delta$$

donde $C_\Delta = upv$, es decir, es un ciclo (de longitud 3) en Q_T.

Decimos que $(Q_T, \mathcal{I}_T)$ con $\mathcal{I}_T$ el potencial de KQ_T es un carcaj con potencial.

Ejemplo 3.4. Dada la siguiente triangulación de
$Delta_6$, se construye el carcaj Q_T asociado tal como se muestra en la siguiente figura



Es decir, $Q_T =$

$$\begin{tikzcd} & \circ 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1\circ \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ 3 \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

El potencial de KQ_T está generado por $\alpha\beta\gamma$.

A su vez, un carcaj con potencial induce un álgebra Jacobiana. Con este fin, se presenta la siguiente definición.

Definición 3.8. Sea $C_\Delta = upv$ un ciclo en Q_T y sea p una flecha en Q_T. La derivada cíclica $\partial_p(C_\Delta)$ de C_Δ respecto a p se define como

$$\partial_p(C_\Delta) = \sum_{C_\Delta = upv} vu.$$

Definición 3.9. Sea $(Q_T, \mathcal{I}_T)$ un carcaj con potencial. Definimos al ideal Jacobiano $\mathcal{J}(\mathcal{I})$ como el ideal generado por las derivadas cíclicas del potencial $\mathcal{I}_T$ respecto a las flechas de Q_T.

Definición 3.10. Dado un carcaj con potencial $(Q_T, \mathcal{I}_T)$ definimos el **álgebra Jacobiana** de Q_T como

$$\mathcal{P}(Q_T, \mathcal{I}) := KQ_T/\mathcal{J}(\mathcal{I}_T)$$

donde $\mathcal{J}(\mathcal{I}_T)$ es el ideal Jacobiano de KQ_T.

Ejemplo 3.5. Sea $Q_T =$

$$\begin{tikzcd}
 & \circ 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\
1\circ \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ 3 \arrow[ll, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

El potencial de KQ_T está generado por $\alpha\beta\gamma$.

Las derivaciones se calculan como sigue

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha(\alpha\beta\gamma) &= \beta\gamma \\
\partial_\beta(\alpha\beta\gamma) &= \gamma\alpha \\
\partial_\gamma(\alpha\beta\gamma) &= \alpha\beta
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{J}(\mathcal{I}_\mathcal{T})$ está generado por $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$.

Por lo tanto, el álgebra Jacobiana asociada al carcaj Q_T es el álgebra de carcaj acotado $KQ_T/\langle\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha\rangle$.

Capítulo 4

Categoría de módulos de superficies específicas

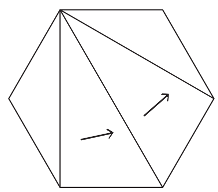
El propósito de este capítulo es construir categorías mod A y ejemplificar el Teorema de Keller-Yang.

Para esto, en la sección 4.1 se muestran algunos carcajes de Auslander-Reiten de mod A, donde A es un álgebra asociativa asociada a discos con puntos marcados en la frontera construidas de acuerdo al capítulo 3. En la sección 4.2 , se ilustra el Teorema de Keller-Yang que permite relacionar las categorías de módulos sobre álgebras Jacobianas asociadas a triangulaciones de Δ_{n+3} que difieren por un flip.

4.1. Ejemplos de categorías de módulos

De acuerdo al capítulo 3, las categorías de módulos sobre álgebras asociadas a triangulaciones de un disco con puntos marcados en la frontera se relacionan con los carcajes descritos a continuación.

Ejemplo 4.1. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\circ_1 \xleftarrow{\beta} \circ_2 \xleftarrow{\alpha} \circ_3$$

Los A-módulos indescomponibles proyectivos e inyectivos, como representaciones son:

$$P(1) = (K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0) = S(1)$$

$$P(2) = (K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0)$$

$$P(3) = (K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K) = I(1)$$

$$I(2) = (0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K)$$

$$I(1) = (0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K) = S(3)$$

y el módulo simple

$$S(2) = (0 \longleftarrow K \longleftarrow 0)$$

Se tienen las siguientes relaciones

$$\mathrm{P}(1) = \mathrm{rad}\ \mathrm{P}(2) \qquad \mathrm{P}(2) = \mathrm{rad}\ \mathrm{P}(3)$$

$$\mathrm{I}(3) = \mathrm{I}(2)/\mathrm{S}(2) \qquad \mathrm{I}(2) = \mathrm{I}(1)/\mathrm{S}(1) = \mathrm{P}(3)/\mathrm{S}(1)$$

La construcción del carcaj de Auslander-Reiten de esta K-álgebra se encuentra en [1] y es la que se presenta a continuación.

Dado que el A-módulo P(1) es simple, proyectivo y no inyectivo, por el Corolario 2.2.2 (a) se tiene que el final de cada morfismo irreducible que empieza en P(1) es proyectivo. Por las relaciones anteriores y como P(1) no es un sumando de rad P(3), el morfismo inclusión $i : P(1) \to P(2)$ es el único morfismo irreducible y es el único morfismo minimal que casi escinde a derecha con estos extremos. Así, se tiene la sucesión que casi escinde

$$0 \longrightarrow P(1) \underset{i}{\longrightarrow} P(2) \longrightarrow \mathrm{Coker}\, i \longrightarrow 0\ .$$

Más aún, Coker $i = P(2)/P(1) = S(2)$.

S(2) es indescomponible. Consideramos P(2), usando el razonamiento anterior, existe un morfismo irreducible $P(2) \to P(3)$ que es la inclusión. Aplicando la Proposición 2.5 al módulo no simple, proyectivo e inyectivo P(3), obtenemos la sucesión que casi escinde

$$0 \longrightarrow P(2) \longrightarrow P(3) \oplus S(2) \longrightarrow I(2) \longrightarrow 0\ .$$

Por otro lado, el homomorfismo $I(2) \to I(2)/S(2) = S(3)$ es minimal que casi escinde a izquierda, con kernel S(2), entonces la sucesión exacta $0 \longrightarrow S(2) \longrightarrow I(2) \longrightarrow S(3) \longrightarrow 0$ casi escinde.

Finalmente, esta información se recopila en el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd}
& & {[P(3)]} \arrow[dr] & & \\
& {[P(2)]} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[I(2)]} \arrow[dr] & \\
{[P(1)]} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[S(2)]} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[S(3)]}
\end{tikzcd}$$

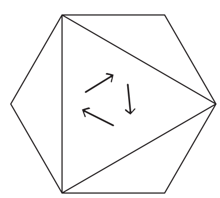
Figura 4.1: Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}\ A)$

Y en términos de vectores dimensión

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 111 \arrow[dr] & & \\
 & 110 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 011 \arrow[dr] & \\
100 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 010 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 001
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2: Carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$

Ejemplo 4.2. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \circ_2 \arrow[dr, "\beta"] & \\
\circ_1 \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ_3 \arrow[ll, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha\beta = 0$, $\beta\gamma = 0$ y $\gamma\alpha = 0$.

Todos los módulos son tanto inyectivos como proyectivos. Las sucesiones que casi escinden son las siguientes:

$$\substack{0\\00} \to \substack{1\\00} \to \substack{1\\10} \to \substack{0\\10} \to \substack{0\\00}$$

$$\substack{0\\00} \to \substack{0\\10} \to \substack{0\\11} \to \substack{0\\01} \to \substack{0\\00}$$

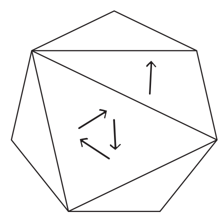
$$\substack{0\\00} \to \substack{0\\01} \to \substack{1\\01} \to \substack{1\\00} \to \substack{0\\00}$$

En estas sucesiones se encuentran todos los módulos indecomponibles de esta K-álgebra. Así, el carcaj obtenido corresponde a la siguiente figura.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \substack{0\\1\,1} \arrow[dr] & & & \\
{\color{red}\substack{1\\0\,0}} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{0\\1\,0} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{0\\0\,1} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\color{red}\substack{1\\0\,0}} \\
 & \substack{1\\1\,0} \arrow[ur] & & & & \substack{1\\0\,1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.3: Carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$

Ejemplo 4.3. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \circ_2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\beta"] & \circ_4 \\
\circ_1 \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ_3 \arrow[ll, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha\beta = 0$, $\beta\gamma = 0$ y $\gamma\alpha = 0$.

Por la Proposición 2.5, las sucesiones que casi escinden correspondientes a los módulos proyectivos e inyectivos son

$$0 \to \begin{smallmatrix}00\\10\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}00\\11\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}00\\01\end{smallmatrix} \to 0$$

$$0 \to \begin{smallmatrix}11\\00\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}11\\10\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}10\\10\end{smallmatrix} \to 0$$

Puesto que $\begin{smallmatrix}10\\10\end{smallmatrix}$ es inyectivo, la Proposición 2.3 garantiza un morfismo irreducible

$$\begin{smallmatrix}10\\10\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}00\\10\end{smallmatrix}$$

y $\begin{smallmatrix}10\\10\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}00\\10\end{smallmatrix}$.

Una presentación proyectiva minimal del A-módulo S_2 es

$$P(3) \oplus P(4) \to P(2) \to S_2 \to 0$$

Aplicando el funtor de Nakayama, según la Proposición en A.4, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \tau S_2 \to I(3) \oplus I(4) \to I(2) \to \nu S_2 \to 0 \ .$$

Con lo cual $\tau S_2 = \ {}_{01}^{11} \ = P(2)$. Del Teorema 2.3, existe el morfismo irreducible rad$P(2) \to P(2)$. Puesto que rad $P(2) = \ {}_{01}^{01}$ se descompone como $S_3 \oplus S_4$, se tienen dos morfismos irreducibles.

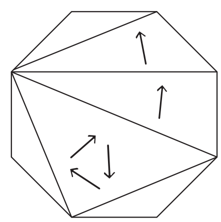
Además $P(2) = S_3 \oplus \ {}_{00}^{11}$ y $P(2) = I(3) \oplus S_4$.

Finalmente se obtiene el siguiente carcaj.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \substack{11\\10} \arrow[dr] & & & & {\color{red}\substack{01\\00}} \\
{\color{red}\substack{00\\01}} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{11\\00} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{10\\10} \arrow[dr] & & & \\
 & \substack{11\\01} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{10\\00} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{00\\10} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\color{red}\substack{00\\01}} \\
{\color{red}\substack{01\\00}} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{10\\01} \arrow[ur] & & & & \substack{00\\11} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.4: Carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$

Ejemplo 4.4. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \circ_2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[dl, "\beta"'] & \circ_4 \arrow[r, "\epsilon"] & \circ_5 \\
\circ_1 \arrow[rr, "\alpha"'] & & \circ_3 \arrow[ul, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha\beta = 0$, $\beta\gamma = 0$ y $\gamma\alpha = 0$.

De la Proposición 2.5, las sucesiones que casi escinden correspondientes a los módulos proyectivos e inyectivos son

$$0 \to \begin{smallmatrix}111\\00\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}111\\10\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}110\\00\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}110\\10\end{smallmatrix} \to 0$$
$$0 \to \begin{smallmatrix}000\\10\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}000\\11\end{smallmatrix} \oplus \to \begin{smallmatrix}000\\01\end{smallmatrix} \to 0$$

Una presentación inyectiva minimal del A-módulo $\begin{smallmatrix}110\\00\end{smallmatrix}$ es

$$0 \to \begin{smallmatrix}110\\00\end{smallmatrix} \to I(4) \to I(1)$$

aplicando el funtor de Nakayama, como indica la Proposición en A.4 obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \nu^{-1} \begin{smallmatrix}110\\00\end{smallmatrix} \to P(4) \to P(1) \to \tau^{-1} \begin{smallmatrix}110\\00\end{smallmatrix} \to 0$$

Con lo anterior se tiene que $\tau^{-1}\ {}^{110}_{00} = {}^{100}_{10}$.

Luego, se tiene que $I(4) \oplus S_2 = I(2) \oplus {}^{110}_{00}$.

Puesto que soc $I(2) =$ soc ${}^{000}_{10} = S_1$, por la Proposición 2.3(b) el morfismo $I(2) \to S_1$ es irreducible.

Una presentación proyectiva minimal del A-módulo ${}^{110}_{00}$ es

$$P(3) \oplus P(5) \to P(2) \to {}^{110}_{00} \to 0$$

Nuevamente, por la Proposición en A.4, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \tau\ {}^{110}_{00} \to I(3) \oplus I(5) \to I(2) \to \nu\ {}^{110}_{00} \to 0$$

Con lo cual $\tau\ {}^{110}_{00} = {}^{111}_{01} = P(2)$.

Luego, se tiene que $P(2) \oplus {}^{110}_{00} = {}^{111}_{00} \oplus {}^{110}_{01}$.

Y por lo tanto ${}^{110}_{00} \oplus {}^{100}_{01} = {}^{110}_{01} \oplus S_2$.

Una presentación proyectiva minimal del A-módulo ${}^{110}_{01}$ es

$$P(5) \to P(2) \to {}^{110}_{01} \to 0$$

De nueva cuenta, aplicando el funtor de Nakayama, se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to \tau\ {}^{110}_{01} \to I(5) \to I(2) \to \nu\ {}^{110}_{01} \to 0$$

Así, $\tau\ {}^{110}_{01} = {}^{011}_{00} = P(4)$. Luego, se tiene que $P(2) \oplus {}^{110}_{01} = P(2) \oplus S_4$. Además rad $P(4) = S_5$, con lo que el morfismo $S_5 \to P(4)$ es irreducible y $P(4) = S_2 \oplus S_5$. Por otro lado, rad $P(2) = P(4) \oplus S_3$ y $P(2) = S_3 \oplus {}^{111}_{00}$.

De esta manera, se tiene el siguiente carcaj

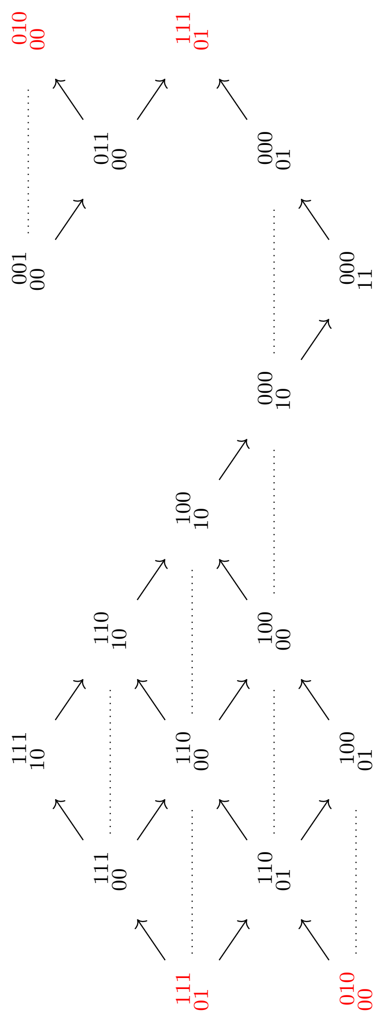
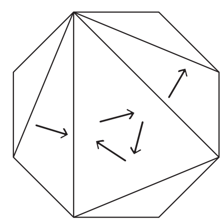


Figura 4.5: Carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$

La construcción de todos los ejemplos siguientes es análoga y en general se aplicaron los mismos teoremas y proposiciones utilizados en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 4.5. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd} & & \circ_3 \arrow[dr, "\beta"] & & \\ \circ_1 & \circ_2 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ_4 \arrow[ll, "\gamma"] & \circ_5 \arrow[l, "\epsilon"'] \end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha\beta = 0$, $\beta\gamma = 0$ y $\gamma\alpha = 0$.

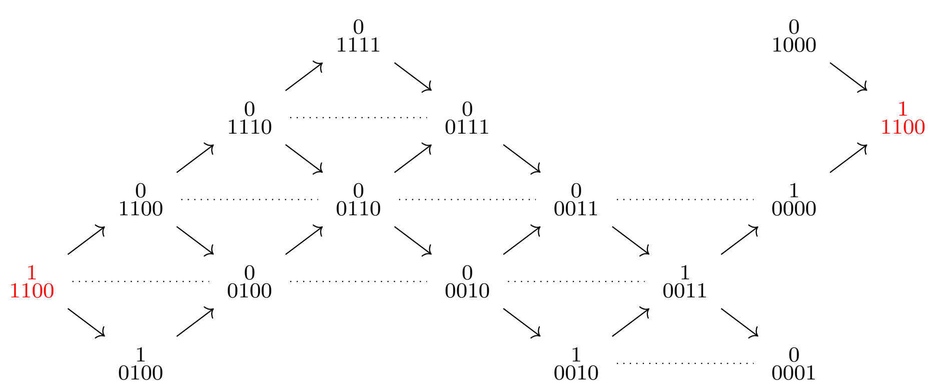
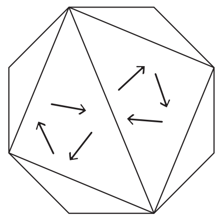


Figura 4.6: Carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$

Ejemplo 4.6. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$
\begin{tikzcd}
 & \circ_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & & \circ_4 \arrow[dr, "\alpha_5"] & \\
\circ_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \circ_3 \arrow[ll, "\alpha_3"] \arrow[ur, "\alpha_4"] & & \circ_5 \arrow[ll, "\alpha_6"]
\end{tikzcd}
$$

acotado por $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$ y $\alpha_3\alpha_1 = 0$, $\alpha_4\alpha_5 = 0$, $\alpha_5\alpha_6 = 0$ y $\alpha_6\alpha_4 = 0$.

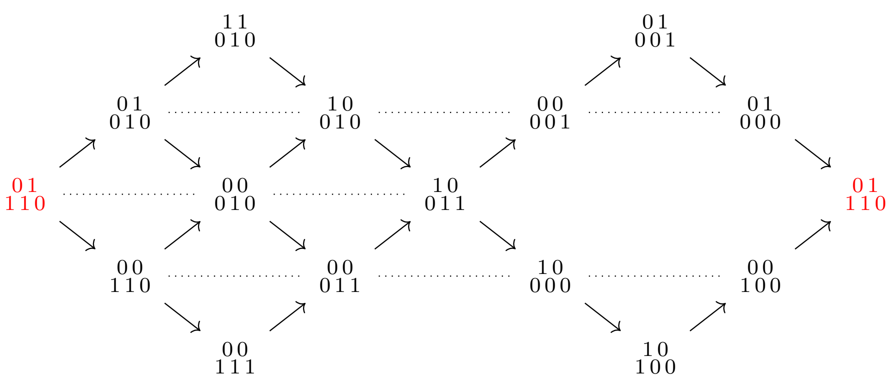
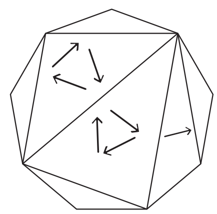


Figura 4.7: Carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$

Ejemplo 4.7. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \circ_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & & \circ_4 \arrow[dr, "\alpha_5"] \arrow[rr, "\alpha_7"] & & \circ_6 \\
\circ_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \circ_3 \arrow[ll, "\alpha_3"] \arrow[ur, "\alpha_4"] & & \circ_5 \arrow[ll, "\alpha_6"] &
\end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$ y $\alpha_3\alpha_1 = 0$, $\alpha_4\alpha_5 = 0$, $\alpha_5\alpha_6 = 0$ y $\alpha_6\alpha_4 = 0$.

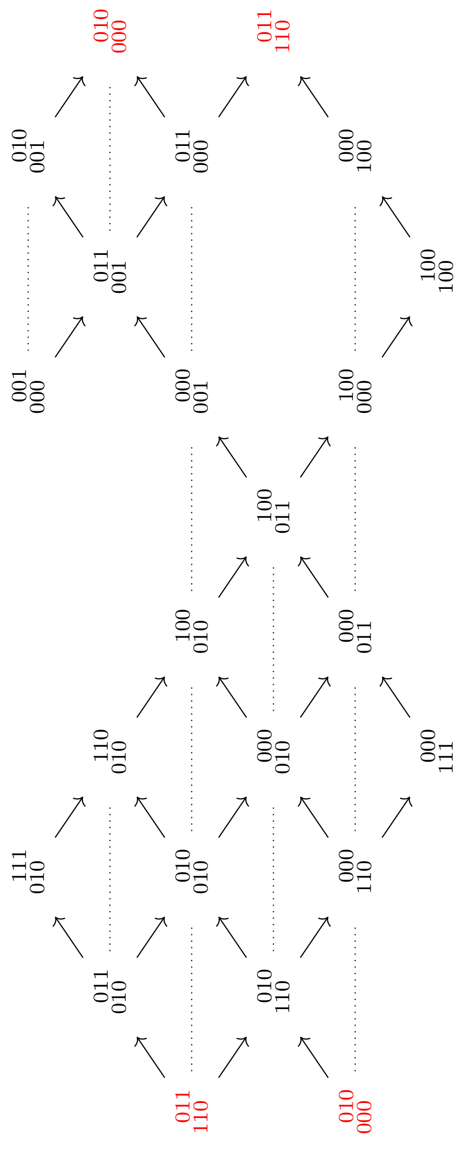
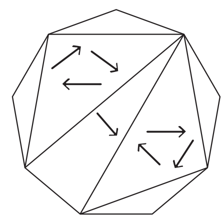


Figura 4.8: Carcaj Γ(mod A)

Ejemplo 4.8. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \circ_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & & & & \circ_5 \arrow[dr, "\alpha_6"] & \\
\circ_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \circ_3 \arrow[ll, "\alpha_3"] & & \circ_4 \arrow[ll, "\alpha_4"] \arrow[ur, "\alpha_5"] & & \circ_6 \arrow[ll, "\alpha_7"]
\end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$ y $\alpha_3\alpha_1 = 0$, $\alpha_5\alpha_6 = 0$, $\alpha_6\alpha_7 = 0$ y $\alpha_7\alpha_5 = 0$.

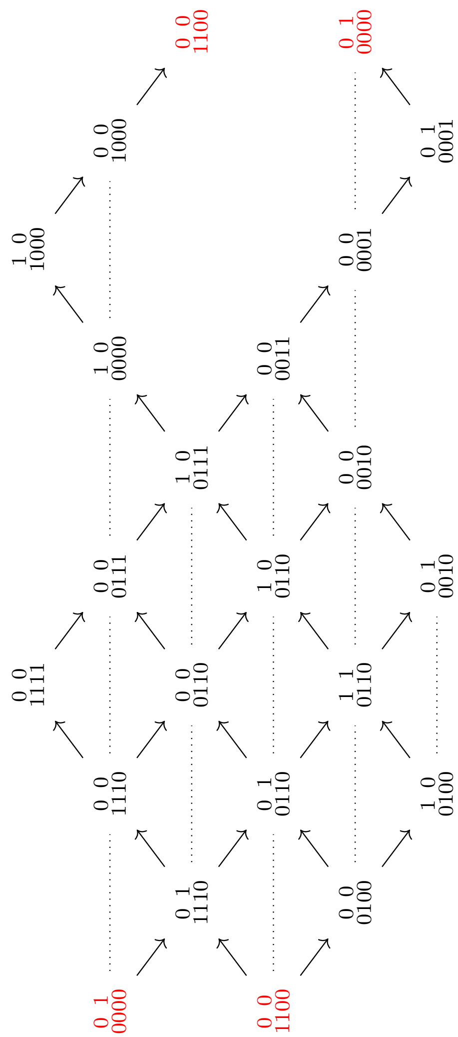
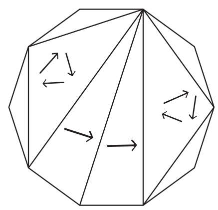


Figura 4.9: Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}\ A)$

Ejemplo 4.9. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \circ_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & & & & \circ_6 \arrow[dr, "\alpha_7"] & \\
\circ_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \circ_3 \arrow[ll, "\alpha_3"] & \circ_4 \arrow[l, "\alpha_4"] & \circ_5 \arrow[l, "\alpha_5"] \arrow[ur, "\alpha_6"] & & \circ_7 \arrow[ll, "\alpha_8"]
\end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$ y $\alpha_3\alpha_1 = 0$, $\alpha_6\alpha_7 = 0$, $\alpha_7\alpha_8 = 0$ y $\alpha_8\alpha_6 = 0$.

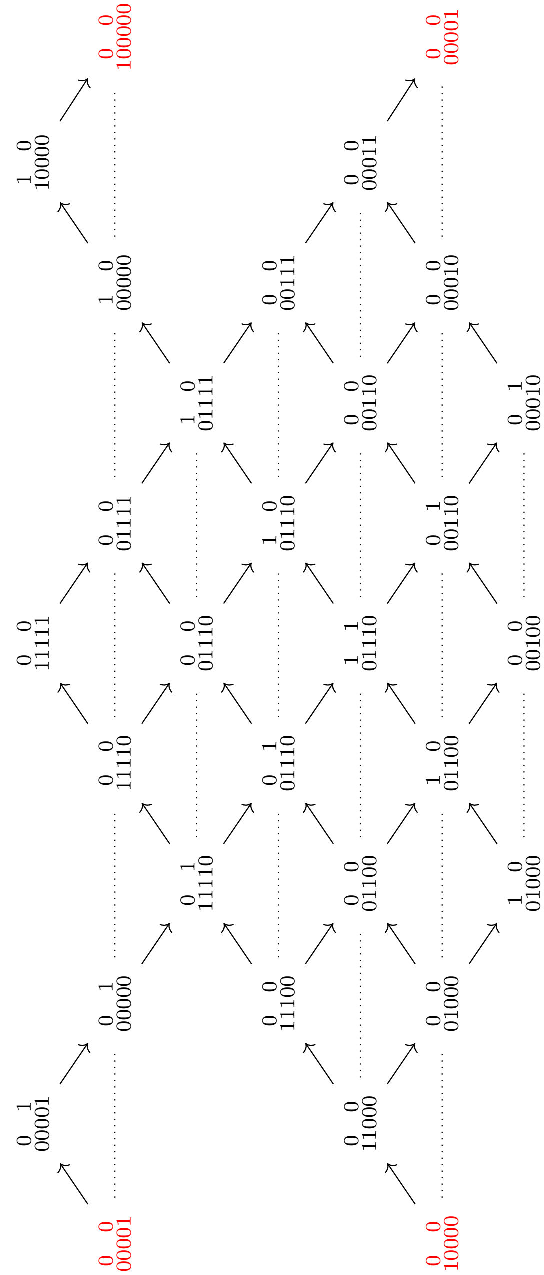
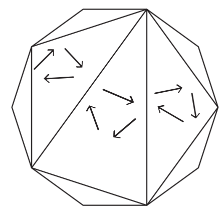


Figura 4.10: Carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$

Ejemplo 4.10. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \circ_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & & \circ_4 \arrow[dr, "\alpha_5"] & & \circ_6 \arrow[dr, "\alpha_8"] & \\
\circ_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \circ_3 \arrow[ll, "\alpha_3"] \arrow[ur, "\alpha_4"] & & \circ_5 \arrow[ll, "\alpha_6"] \arrow[ur, "\alpha_7"] & & \circ_7 \arrow[ll, "\alpha_9"]
\end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$, $\alpha_3\alpha_1 = 0$, $\alpha_2\alpha_5 = 0$, $\alpha_5\alpha_6 = 0$, $\alpha_6\alpha_4 = 0$, $\alpha_7\alpha_8 = 0$, $\alpha_8\alpha_9 = 0$ y $\alpha_9\alpha_7 = 0$.

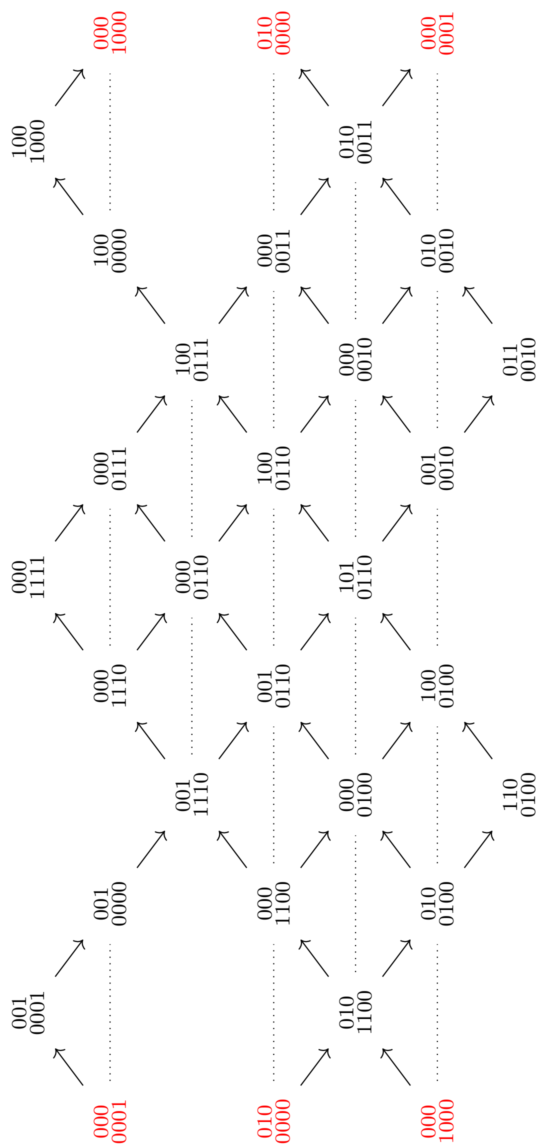
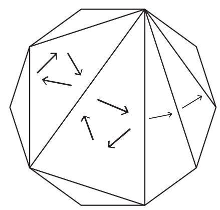


Figura 4.11: Carcaj $\Gamma(\text{mod } A)$

Ejemplo 4.11. Dada la triangulación



Se tiene la K-álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}
& \circ_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & & \circ_4 \arrow[r, "\alpha_7"] \arrow[dr, "\alpha_5"] & \circ_6 \arrow[r, "\alpha_8"] & \circ_7 \\
\circ_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & \circ_3 \arrow[ll, "\alpha_3"] \arrow[ur, "\alpha_4"] & & \circ_5 \arrow[ll, "\alpha_6"] &
\end{tikzcd}$$

acotado por $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$ y $\alpha_3\alpha_1 = 0$, $\alpha_4\alpha_5 = 0$, $\alpha_5\alpha_6 = 0$ y $\alpha_6\alpha_4 = 0$.

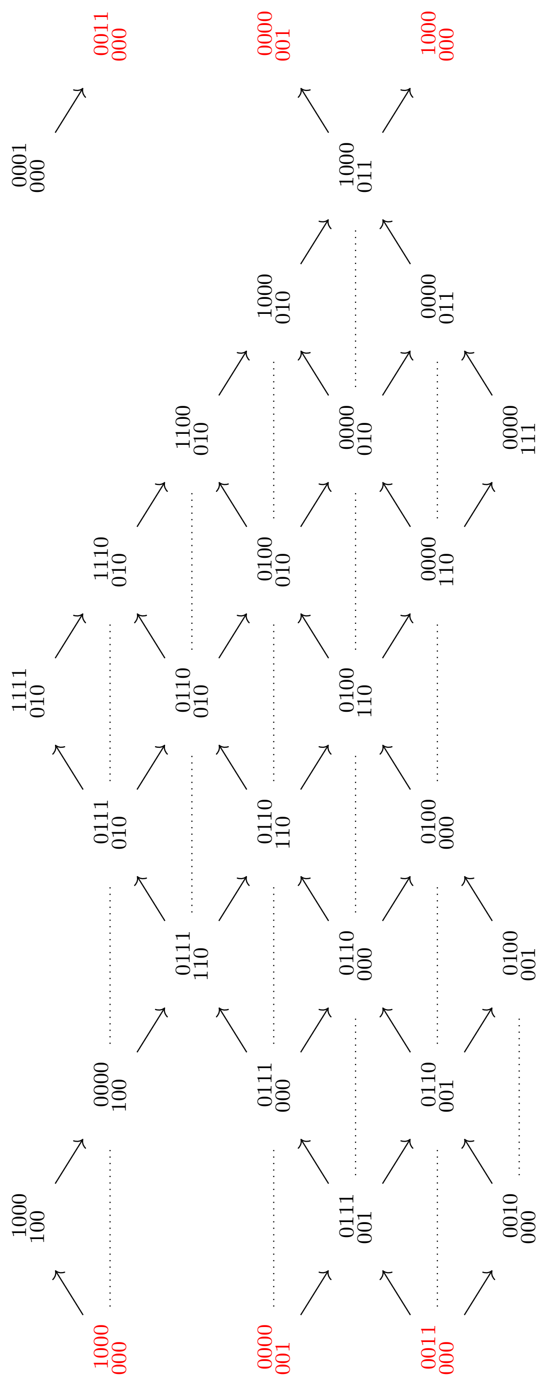


Figura 4.12: Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}\, A)$

4.2. Teorema de Keller-Yang

El siguiente Teorema relaciona categorías mod A donde A son álgebras Jacobianas asociadas a triangulaciones de Δ_{n+3} que difieren por un flip.

Teorema 4.1. [4] Sea T una triangulación de Δ_{n+3}, $A_k \in T$ y $T' = \mu_{A_k}(T)$. Entonces

$$\operatorname{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_k \cong \operatorname{mod}(\mathcal{J}(Q'_T, \mathcal{I}'_T))/S'_k$$ [1]

donde S_k (respectivamente S'_k) es el módulo simple en k de $\operatorname{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))$ (respectivamente $\operatorname{mod}(\mathcal{J}(Q'_T, \mathcal{I}'_T)))$.

La consecuencia en los carcajes de Auslander-Reiten de las categorías cociente mencionadas en este Teorema, es que estos adquieren la misma forma tal como se muestra a continuación.

[1] Esta notación representa una categoría cociente, tal como se explica en A.2.

Ejemplo 4.12. Las triangulaciones siguientes

(a) Triangulación T (b) Triangulación T'

Triangulaciones de Δ_6

difieren por un flip, pues $T' = \mu_{A_2}(T)$ (considerando que al arco $A_2 \in T$ le corresponde el vértice 2 del carcaj en el Ejemplo 4.1, de acuerdo a la construcción del carcaj asociado a una triangulación.).

Así, siguiendo el teorema de Keller-Yang, hay una equivalencia entre las categorías cociente $\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_2$ y $\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q'_T, \mathcal{I}'_T))/S'_2$ (donde S'_2 es el módulo simple en 2 en el carcaj $Q_{T'}$) tal como se presenta a continuación.

$$\begin{tikzcd}
 & & 111 \arrow[dr] & & \\
 & 110 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 011 \arrow[dr] & \\
100 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 010 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 001
\end{tikzcd}$$

Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_2)$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \substack{0\\11} \arrow[dr] & & & \\
\substack{1\\00} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{0\\10} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{0\\01} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \substack{1\\00} \\
 & \substack{1\\10} \arrow[ur] & & & & \substack{1\\01} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_{T'}, \mathcal{I}_{T'}))/S'_2)$

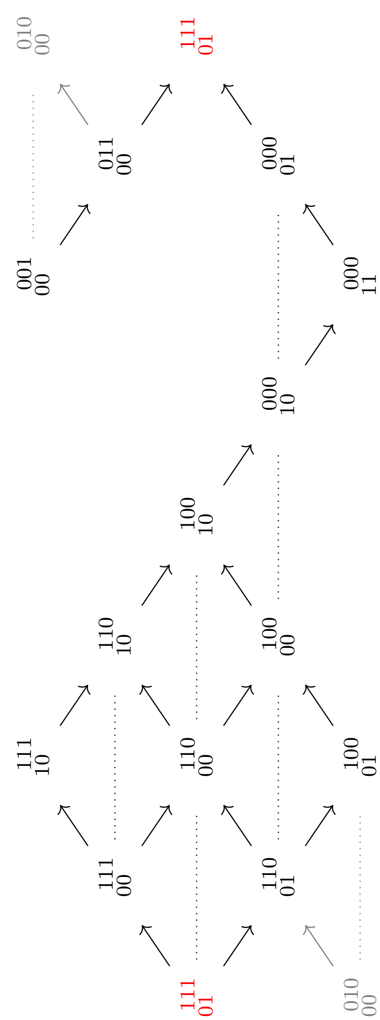
Ejemplo 4.13. Las triangulaciones siguientes

(c) Triangulación T (d) Triangulación T'

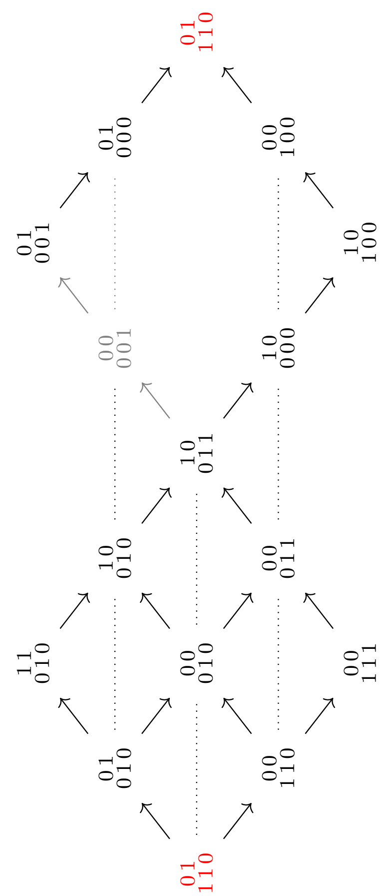
Triangulaciones de Δ_8

también difieren por un flip, pues $T' = \mu_{A_4}(T)$ (considerando que al arco $A_4 \in T$ le corresponde el vértice 4 del carcaj en el Ejemplo 4.4, de acuerdo a la construcción del carcaj asociado a una triangulación).

Así, siguiendo el Teorema de Keller-Yang, hay una equivalencia entre las categorías cociente $\operatorname{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_4$ y $\operatorname{mod}(\mathcal{J}(Q'_T, \mathcal{I}'_T))/S'_4$, (donde S'_4 es el módulo simple en 5 en el carcaj $Q_{T'}$) tal como se presenta a continuación.

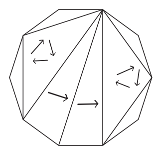


Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_4)$

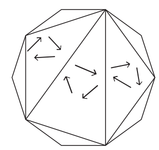


Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_{T'}, \mathcal{I}_{T'}))/S'_4)$

Ejemplo 4.14. Las triangulaciones siguientes



(e) Triangulación T

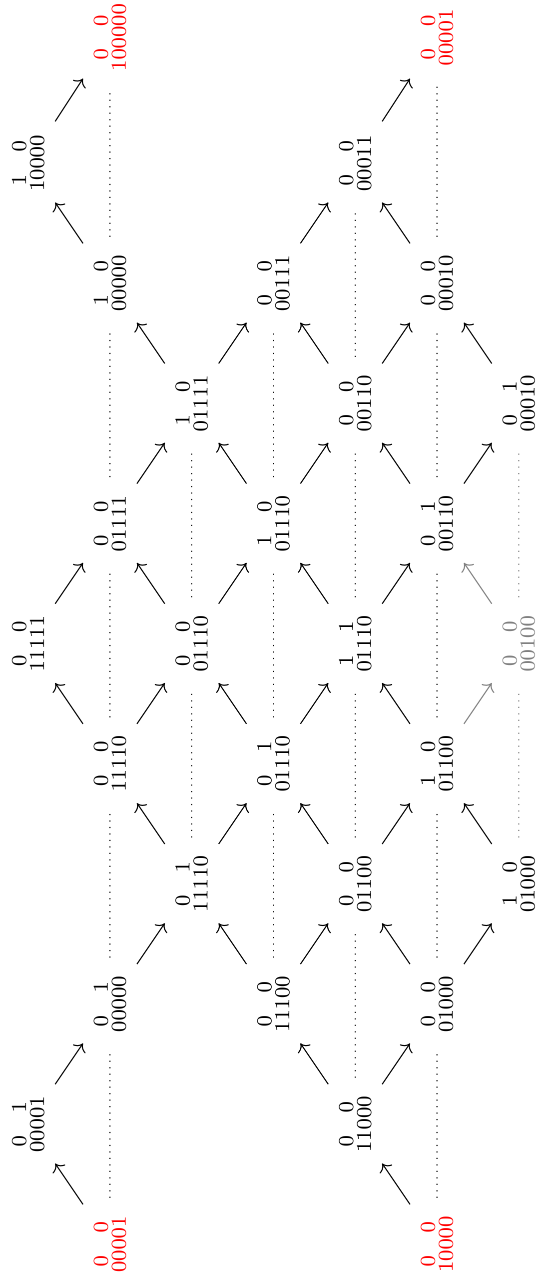


(f) Triangulación T'

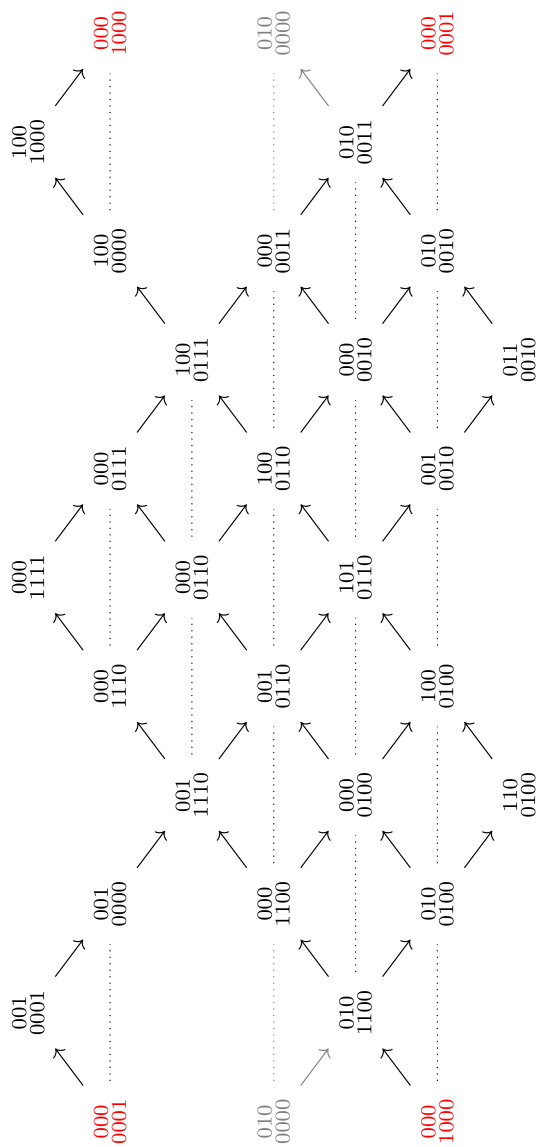
Triangulaciones de Δ_{10}

difieren por un flip, pues $T' = \mu_{A_4}(T)$ (considerando que al arco $A_4 \in T$ le corresponde el vértice 4 del carcaj en el Ejemplo 4.9, de acuerdo a la construcción del carcaj asociado a una triangulación.).

Así, siguiendo el teorema de Keller-Yang, hay una equivalencia entre las categorías cociente $\text{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_4$ y $\text{mod}(\mathcal{J}(Q'_T, \mathcal{I}'_T))/S'_4$, (donde S'_4 es el módulo simple en 4 en el carcaj $Q_{T'}$) tal como se presenta a continuación.

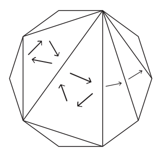


Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_4)$

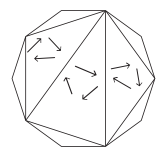


Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_{T'}, \mathcal{I}_{T'}))/S'_4)$

Ejemplo 4.15. Las triangulaciones siguientes



(g) Triangulación T

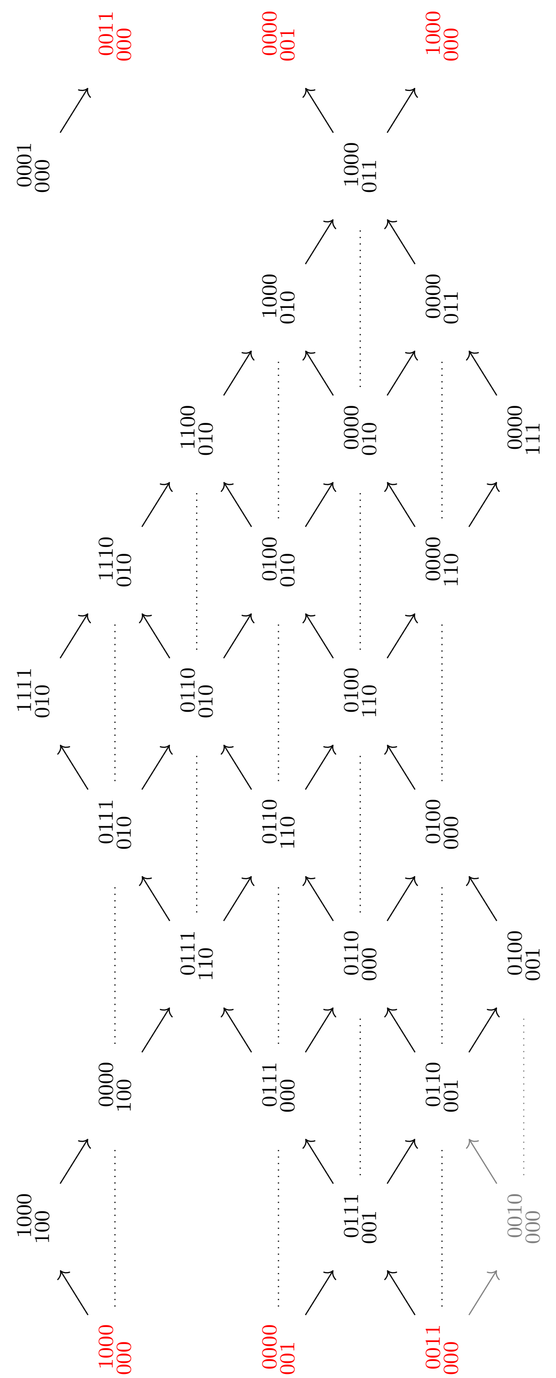


(h) Triangulación T'

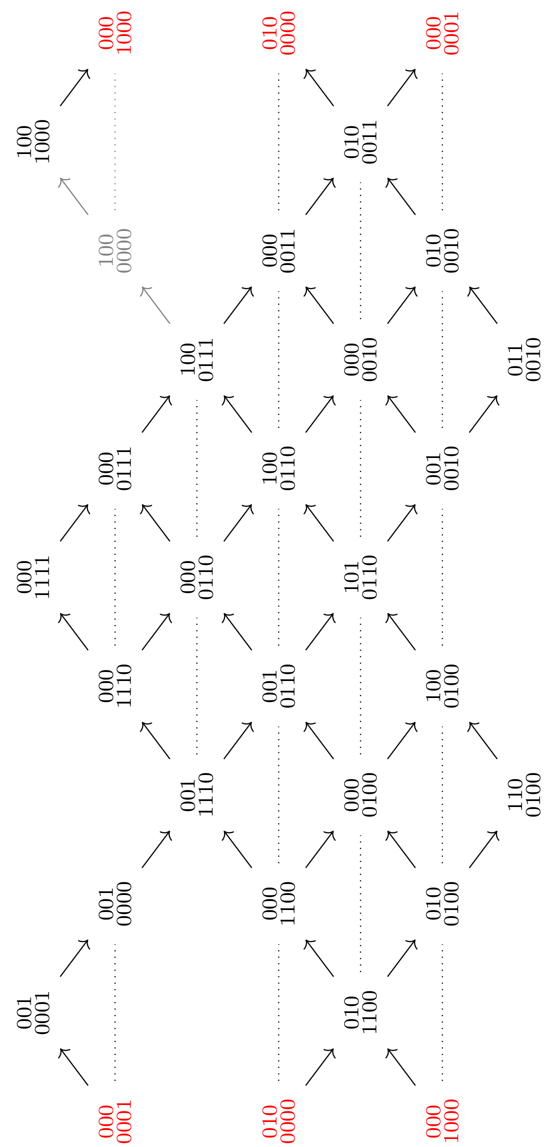
Triangulaciones de Δ_{10}

difieren por un flip, pues $T' = \mu_{A_6}(T)$ (considerando que al arco $A_6 \in T$ le corresponde el vértice 6 del carcaj en el Ejemplo 4.11, de acuerdo a la construcción del carcaj asociado a esta triangulación.).

Así, siguiendo el teorema de Keller-Yang, hay una equivalencia entre las categorías cociente $\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_6$ y $\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q'_T, \mathcal{I}'_T))/S'_6$, (donde S'_6 es el módulo simple en 2 en el carcaj $Q_{T'}$) tal como se presenta a continuación.



Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_T, \mathcal{I}_T))/S_4)$



Carcaj $\Gamma(\mathrm{mod}(\mathcal{J}(Q_{T'}, \mathcal{I}_{T'}))/S'_6)$

Conclusiones

Las álgebras de caminos, en particular, su estudio por medio de sus representaciones, brinda una forma distinta que además es bastante visual para construir las clases de isomorfismo de sus módulos. Lo anterior es debido a que existe una equivalencia entre la categoría de representaciones y la categoría de módulos de cierto tipo de álgebras que coinciden con las que se estudiaron en este trabajo. Más aún, esta equivalencia resulta en una forma sencilla de calcular algunas clases importantes de módulos. Con esto, se facilita la construcción de la categoría mod A en forma del carcaj de Auslander-Reiten.

Por otro lado, los carcajes asociados a triangulaciones de discos con puntos marcados en la frontera, tienen asociado un álgebra de carcaj acotado de dimensión finita, lo cual induce un carcaj de Auslander-Reiten de mod A finito. En este trabajo se desarrollaron ejemplos de cómo se asocia tal carcaj y de manera particular, cómo calcular el potencial para las álgebras que resultan de este tipo de triangulaciones para así, conseguir su ideal Jacobiano y por último el álgebra Jacobiana.

De manera explícita se mostró el procedimiento de construcción de algunas categorías de módulos de álgebras que provienen de triangulaciones de las superficies que fueron de interés para este trabajo. Finalmente, se corroboró de manera específica el teorema de Keller-Yang para estas superficies, lo cual es de utilidad para comprobar la construcción correcta de las categorías mod A.

Como trabajo a futuro se pretende conseguir un patrón que dicte cómo se comporta cualquier categoría mod A, para álgebras Jacobianas que provienen de este tipo de superficies. Otro problema que se planea abordar es el de estudiar estas categorías para discos con puntos marcados en la frontera y un punto marcado en el interior.

Apéndice A

Glosario de funtores

A lo largo de esta sección se muestran los funtores utilizados a través de los capítulos así como algunas aplicaciones de ellos que son necesarios para complementarlos.

A.1. K-Dualidad Estándar

Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Se define el funtor

$$D : \text{mod } A \longrightarrow \text{mod } A^{op}$$

que asigna a cada módulo a derecha M en mod A, el K-espacio vectorial dual

$$M^* = \text{Hom}_K(M, K)$$

dotado con la estructura de K-espacio vectorial a izquierda dada por la fórmula $(a\varphi)(m) = \varphi(ma)$ para $\varphi \in \text{Hom}_K(M, K)$, $a \in A$ y $m \in M$, y para cada homomorfismo de A-módulos $h : M \to N$ el homomorfismo dual $D(h) : \text{Hom}_K(h, K) : D(N) \to D(M)$, $\varphi \mapsto \varphi h$, de A-módulos a derecha.

La quasi-inversa de la dualidad D también se denota por

$$D : \text{mod } A^{op} \longrightarrow \text{mod } A$$

y se define asignando a cada A-módulo a izquierda Y el K-espacio vectorial dual $D(Y) = Y^* = \mathrm{Hom}_K(Y, K)$ dotado con la estructura de A-módulo a derecha dada por la fórmula $(\varphi a)(y) = \varphi(ay)$ para $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(Y, K)$, $a \in A$ y $y \in Y$.

De aquí se consigue que el mapeo K-lineal $e : M \to M^{**}$ dado por $e(m)(f) = f(m)$, donde $m \in M$ y $f \in D(M)$, define equivalencias naturales de funtores $1_{\mathrm{mod} A} \cong D \circ D$ y $1_{\mathrm{mod} A^{op}} \cong D \circ D$.

Por tanto, D es una dualidad de categorías, es decir, hay una correspondencia entre las propiedades de mod A y mod A^{op}. Esta dualidad es llamada la K-dualidad estándar.

Con esto último, cualquier A-módulo a derecha M es un módulo a izquierda sobre el álgebra End M con respecto a la multiplicación $(\mathrm{End}\ M)\times M \mapsto M$, $(\varphi, m) \mapsto \varphi m = \varphi(m)$.

Los siguientes funtores se emplean para probar la existencia de sucesiones que casi escinden en la categoría mod A.

A.2. Transposición

Se define el siguiente funtor A-dual

$$(-)^t = \mathrm{Hom}_A(-,A) : \mathrm{mod}\ A \longrightarrow \mathrm{mod}\ A^{op}$$

tal como en A.1. Este funtor (-)^t induce una dualidad entre las categorías proj A y proj A^{op} de A-módulos proyectivos a derecha e izquierda, respectivamente [1].

Usando esta dualidad, cada A-módulo M se aproxima mediante módulos proyectivos. Sea

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

una presentación minimal proyectiva de M, es decir, una sucesión exacta tal que $p_0 : P_0 \to M$ y $p_1 : P_1 \to \mathrm{Ker}\ p_0$ son cubiertas proyectivas. Aplicando el funtor (-)^t, se obtiene la sucesión exacta de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow \mathrm{Coker} p_1^t \longrightarrow 0.$$

Usualmente se denota Coker p_1^t por Tr M, llamado el transpuesto de M. Este A-módulo a izquierda Tr M es único salvo isomorfismo y asigna módulos de mod A a módulos de mod A^{op}. No obstante, anula a los módulos proyectivos. Con el propósito de hacer de este funtor una dualidad, debe considerarse la siguiente construcción.

Para dos A-módulos M, N, se denotará por $\mathcal{P}(M, N)$ al subconjunto de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ de todos los homomorfismos que factorizan en un A-módulo proyectivo.

Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Se define el funtor A-dual llamado **transposición**

$$\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}\ A \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}\ A^{op}$$

donde $\underline{\mathrm{mod}}A$ es la categoría cociente mod $A/\mathcal{P}(M, N)$. Sus objetos son los mismos de mod A, sin embargo el K-espacio vectorial $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N)$ de morfismos de M a N está definido por el espacio vectorial cociente

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)/\mathcal{P}(M, N)$$

de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ con la composición de morfismos inducida por la composición en mod A.

A.3. Traslaciones de Auslander-Reiten

Las traslaciones de Auslander-Reiten se definen como la composición de los funtores D y Tr

$$\tau = D\mathrm{Tr} \quad \text{y} \quad \tau^{-1} = \mathrm{Tr}D$$

Con la definición de este functor, se garantiza la existencia de sucesiones que casi escinden en el siguiente teorema de Auslander y Reiten.

Teorema A.1. (a) Para cualquier A-módulo indescomponible y no proyectivo M_A, existe una sucesion que casi escinde $0 \to \tau M \to E \to M \to 0$ en mod A.

(b) Para cualquier A-módulo indescomponible y no inyectivo M_A, existe una sucesion que casi escinde $0 \to N \to F \to \tau^{-1}M \to 0$ en mod A.

Las traslaciones de Auslander-Reiten son de gran importancia en el carcaj de Auslander-Reiten de mod A. Un método para su construcción se presenta en la siguiente proposición por medio del funtor de Nakayama.

A.4. Funtor de Nakayama

El funtor de Nakayama de mod A se define como el endofuntor

$$\nu = D\mathrm{Hom}_A(-, A) : \mathrm{mod}\ A \longrightarrow \mathrm{mod}\ A$$

Este funtor induce dos equivalencias de categorías $\mathrm{proj}A \underset{\nu^{-1}}{\overset{\nu}{\rightleftarrows}} \mathrm{inj}A$, donde $\nu^{-1} = \mathrm{Hom}_A(DA, -)$ es quasi-inversa de ν.

Proposición A.1. (a) Sea $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ una presentación proyectiva minimal de un A-módulo M. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0.$$

(b) Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_0} E_0 \xrightarrow{i_1} E_1$ una presentación inyectiva minimal de un A-módulo N. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \nu^{-1}N \xrightarrow{\nu^{-1}i_0} \nu^{-1}E_0 \xrightarrow{\nu^{-1}i_1} \nu^{-1}E_1 \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0.$$

Bibliografía

[1] I. Assem, D. Simson y A. Skowroński, *Elements of Representation Theory of Associative Algebras, Volume I*, Cambridge University Press, 2006.

[2] S. Fomin, M. Shapiro y D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces, part I: Cluster complexes*, Acta Mathematica, 201:83-146, 2008.

[3] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90, 323-448, 1962.

[4] B. Keller y D. Yang, *Derived equivalences from mutations of quivers with potential*, Advances in Mathematics, Volume 226, págs. 2118-2168, 2006.

[5] A. Skowroński y K. Yamagata, *Frobenius Algebras I: Basic representation Theory*, European Mathematical Society, 2012.

[6] R. Schiffler, *Quiver Representations*, Springer, 2014.

[7] D. J. Benson, *Representations and Cohomology I*, Cambridge studies in advanced mathematics 30, 1995.

[8] P. Gabriel y A. V. Roiter, *Representation of Finite-dimensional Algebras*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

[9] A. J. Berrick y AM. E. Keating, *An introduction to rings and modules with K-theory*, Cambridge University Press, New York, 2000.

[10] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[11] I. N. Herstein, *Álgebra Moderna: Grupos, Anillos, Campos, Teoría de Galois*, Trillas, México, 1990.