UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Nociones relacionadas con la transitividad topológica

TESIS

para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Abraham López Revilla

Director de tesis:

Dr. Franco Barragán Mendoza

Co-Director de tesis:

Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvidez

Huajuapan de León, Oaxaca *Septiembre 2018*

Dedicatoria

A mi madre, a mi padre,
a mis hermanos, a mis hermanas,
a Crystal.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi familia, por su apoyo incondicional en todo momento. A mis sinodales, por sus importantes observaciones para el enriquecimiento de este trabajo. Al Dr. y amigo Jesús Fernando Tenorio Arvidez, por sus recomendaciones y consejos. Especialmente, agradezco a mi director de tesis, el Dr. y amigo Franco Barragán Mendoza porque, a pesar de todo, siempre me apoyó, aconsejó y motivó para que este trabajo viera la luz.

Idea de la transitividad

Nadie baña su alma dos veces
en el mismo río,
conjeturó Heráclito,
y otros antes de él,
que ya han sido olvidados.
Y otros más en este instante,
que ha terminado.
Otros hombres,
que aún no existen,
repetirán este adagio,
oscuro y frío,
solo por sentir
el irrevocable correr del tiempo.
Acaso, ¿no somos todos el mismo
en algún momento?
Somos uno en un instante
y en un número finito de veces
seremos otro, inevitablemente.
Pues nada escapa al parámetro
que nos rige: el tiempo;
ni la órbita de los astros,
ni aquello, sumergido en sueños,
ni siquiera el dios,
que desde el polvo,
nos ha creado.

Abraham R.

Índice general

Introducción

Las construcciones de los matemáticos,
como las de los pintores o los poetas,
deben ser bellas; las ideas,
como los colores o las palabras,
deben encajar con armonía.
La belleza es el primer requisito:
no hay un lugar permanente en el mundo
para las matemáticas feas.

G. H. HARDY

El estudio profundo de la matemática, a lo largo de la historia, ha permitido encontrar íntimas relaciones entre sus distintas ramas; lo cual ha llevado a concebir nuevas áreas. Tal es nuestro caso, pues el tema de este trabajo está sustentada principalmente por dos ramas de la matemática: La *topología* y los *sistemas dinámicos*. Cuando nos referimos al segundo, hablamos de objetos que cambian bajo algún parámetro, abstractamente hablando, estos objetos son puntos o conjuntos; ésto lo podemos relacionar con la realidad que nos rodea. En los fenómenos de la naturaleza y las actividades humanas el movimiento de los objetos está presente indudablemente y el parámetro que lo rige es el *tiempo*. En base a ésto, intuitivamente podemos decir que un sistema dinámico es un fenómeno de la naturaleza, un sistema físico o un espacio de puntos, cuyo estado evoluciona a través del tiempo mediante una ley determinada. Si el tiempo se considera sin interrupciones se dice que es un sistema dinámico continuo; en cambio, si el tiempo se mide en lapsos, se dice que es un sistema dinámico discreto.

En las últimas décadas, los sistemas dinámicos han alcanzado un desarrollo bastante amplio tanto en el ámbito puramente matemático ([1], [3]) como en las aplicaciones en distintas ciencias, pues han sido útiles para modelar problemas en áreas como: Química, Física, Biología, Medicina, Economía, etc., ver [3], [17] y [18]. Por otra parte, además de estudiar la dinámica de los objetos de manera general, podemos analizar su comportamiento respecto a la cercanía o la acomulación entre éstos o respecto a ciertos conjuntos, interviniendo de esta forma la topología. La parte de la topología que estudia a los sistemas dinámicos discretos se llama *Dinámica Topológica*.

En este sentido, sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua.

Dado $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima iteración de f se define como la composición de f consigo misma k veces y se denota por f^k. Considerando un punto $x \in X$, la órbita futura del punto x bajo f, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x) \ldots, f^k(x), \ldots\}$. Así, la órbita futura $\mathcal{O}(x, f)$ representa el movimiento de un objeto, cuya interpretación es como sigue: en el tiempo $t = 0$, un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $t = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en la posición $f(x)$; en el tiempo $t = 2$ el objeto ha cambiado nuevamente de posición y ahora se encuentra en $f^2(x)$; y así sucesivamente. En tal caso se dice que se analiza la dinámica individual o puntual. De esta manera, la pareja formada por X y f proporciona un modelo matemático del movimiento, esto es, proporciona un sistema dinámico discreto, que denotamos por (X, f), cuyo comportamiento depende tanto de f como de X. Además de la órbita futura, también podemos definir la órbita pasada de x; ésto se refiere a la unión de todos los conjuntos $f^{-k}(\{x\})$, para $k \in \mathbb{N}$, y se denota como $\mathcal{O}_-(x, f)$. Por otro lado, la órbita de x se define como la unión de la órbita pasada y la órbita futura de x y lo denotamos como $\mathcal{O}_\pm(x, f)$.

Dependiendo de las propiedades del espacio topológico X y de cómo esté definida la función continua f, se han definido y clasificado varios sistemas dinámicos discretos, por mencionar algunos: localmente sobreyectivos, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivos, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos, minimales, etc. Varios de estos sistemas fueron introducidos para espacios métricos y han sido ampliamente estudiados, ver [3], [6], [19]. En este trabajo nos enfocamos principalmente en los transitivos.

El concepto de sistema dinámico discreto transitivo, actualmente conocido como transitividad topológica, fue introducido en el año 1920 por G. D. Birkhoff para espacios métricos [6]. Desde entonces, este concepto ha sido estudiado ampliamente y ha encontrado diversas aplicaciones en otras ciencias. Por tal motivo, a través del tiempo, esta noción ha sido generalizada a espacios topológicos. En la actualidad, se conoce que un sistema dinámico discreto (X, f), donde X es un espacio topológico y $f : X \to X$ es una función continua, es transitivo si cumple con:

(TT_+) Para cualesquiera par de abiertos no vacíos U y V de X, se tiene que existe algún $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f^k(U) \cap V$ no es vacío.

Además, se han dado otras definiciones muy similares, las cuales están relacionadas o son equivalentes a la transitividad topológica, en espacios topológicos generales y/o particulares tales como espacios de Hausdorff, espacios perfectos y espacios con puntos aislados. Algunas de dichas nociones son: existe una *órbita futura* que es densa en el espacio; el conjunto *omega límite* coincide con el espacio; el espacio no es la unión de dos subconjuntos propios, cerrados y $+$*invariantes*; entre otras [1].

El objetivo del trabajo de tesis es realizar un estudio detallado de la Transitividad Topológica y de las nociones relacionadas a ésta [1], principalmente, se analizan las condiciones necesarias y/o suficientes. Además, cuando alguna condición no sea necesaria o suficiente para la transitividad, se analizarán condiciones adicionales para que tal relación sea verdadera. Para ésto hemos organizado el trabajo de la siguiente manera:

En el primer capítulo presentamos los conceptos básicos, ejemplos y notaciones de espacios métricos y topológicos, así como el concepto de función continua, todo esto es la base principal para entender el tema.

En el segundo capítulo nos centramos el tema de los sistemas dinámicos discretos, definimos formalmente lo que son las órbitas y hablamos de tipos de órbitas (o puntos) y ponemos algunos ejemplos. Además, hablamos del análisis gráfico de una órbita y damos las definiciones que son base de las nociones relacionadas con la transitividad topológica, tales como el conjunto omega-límite, la órbita sucesión, los conjuntos invariantes, entre otros.

En el cuarto capítulo definimos formalmente la transitividad topológica y vemos la relación con otros sistemas dinámicos discretos. Además, presentamos tres ejemplos importantes de funciones que son transitivas y presentamos algunos propiedades de la transitividad topológica.

Finalmente, en el cuarto capítulo presentamos las nociones relacionadas con la transitividad topológica, vemos la relación entre éstas en un espacio topológico general y agregamos condiciones al espacio para hallar más equivalencias. En esta sección los espacios topológicos de Hausdorff, perfectos y con puntos aislados son de crucial importancia.

Nociones relacionadas con la transitividad topológica

Abraham López Revilla

Septiembre 2018

Capítulo 1

Conceptos preliminares de espacios topológicos

Las investigaciones matemáticas, en la actualidad, son tan extensas, que es difícil tratarlas sin tener claros los conceptos, teoremas y proposiciones sobre los cuales están sustentas. Es por eso que, para este trabajo, es impresindible abrir un espacio de temas preliminares. El propósito de este capítulo es introducir los temas básicos que son útiles para el desarrollo de los siguientes capítulos. También establecemos la terminología y la notación necesarias para evitar ambiguedades. La mayoría de las definiciones las acompañamos con algunos ejemplos, ésto con el fin de dejar claros los conceptos. Para los teoremas y las proposiciones se dan las demostraciones que no son muy conocidas.

1.1. Breve repaso de los espacios métricos

De manera intuitiva, un *espacio métrico* es un conjunto donde podemos hablar de la *distancia* o *métrica* entre sus elementos. Es necesario definir lo que se entiende por distancia entre dos puntos de un conjunto, cuya naturaleza no conocemos. De manera formal, definimos un *espacio métrico* de la siguiente manera:

Definición 1.1.1. Sea E un conjunto cualquiera, no vacío. Se define una ***métrica*** en E como una función:

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$

con las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera x y y puntos de E, $d(x, y) \geq 0$.
2. Para cualesquiera x y y puntos de E, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. Para cualesquiera x y y puntos de E, $d(x, y) = d(y, x)$.
4. Para cualesquiera x, y y z puntos de E, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La expresión $d(x, y)$ se lee como distancia entre los puntos x y y. Y al par (E, d), constituida por el conjunto E y una métrica definida sobre E, se denomina ***espacio métrico***.

Dos conceptos fundamentales que surgen luego de definir los espacios métricos son *bola abierta* y *bola cerrada*.

Definición 1.1.2. Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$ y $r > 0$. Se define la ***bola abierta*** (respectivamente ***bola cerrada***) con centro en x y radio r como el conjunto de todos los $y \in E$ tales que $d(x, y) < r$ (respectivamente $d(x, y) \leq r$). Denotamos a estos conjuntos como $B(x, r)$ y $B[x, r]$, respectivamente.

Veamos algunos ejemplos de espacios métricos que tiene como propósito aclarar este concepto. Algunos de los ejemplos más importantes de espacios métricos son los espacios *euclidianos* $\mathbb{R}^n$, particularmente $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.1.3. Sean $n \in \mathbb{N}$ y E el conjunto $\mathbb{R}^n$. Definimos la función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x, y) = \parallel x - y \parallel, \text{ para todo } x, y \in E.$$

La función d define un espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$, el cual es llamado ***espacio euclidiano*** $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1.4. Sea E un conjunto cualquiera no vacío. Definimos la función

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$

tal que para todo $x, y \in E$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \neq y; \\ 0, & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

La función d define un espacio métrico (E, d), al cual se le llama ***espacio métrico discreto***.

Ejemplo 1.1.5. Sean (E, d) un espacio métrico y S un subconjunto no vacío de E. Se tiene que (S, d) es también un espacio métrico con la métrica de restringir d a $S \times S$. Se llama a menudo la ***métrica relativa*** inducida por d sobre S. A S se le llama ***subespacio métrico*** de M.

Ahora dedicamos una pequeña sección a las *sucesiones*, sólo para definir lo que vamos a utilizar en este trabajo. Para profundizar un poco más sobre el tema de espacios métricos y *sucesiones* se puede consultar [15] o [16].

Sucesiones

Definición 1.1.6. Sea X un conjunto. Una ***sucesión*** de elementos de X se define como la función:

$$x : \mathbb{N} \to X.$$

Si x es una sucesión, representamos por x_n el valor de x en n, en lugar de $x(n)$. Además, denotamos la sucesión x como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.1.7. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***converge*** a un punto x de X, si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x, x_n) < \epsilon, \text{ para cada } n \geq N.$$

A x se le llama ***límite*** de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Denotamos como $x_n \to x$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, cuando la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

Después de los espacios métricos euclidianos se encuentra un concepto más general: Los *espacios topológicos*. En seguida los definimos junto a otros conceptos que se relacionan con dichos espacios.

1.2. ¿Qué son los espacios topológicos?

En esta sección damos la definición de *espacio topológico* y estudiamos algunas de sus propiedades. También mencionamos algunos conceptos fundamentales que se relacionan con los *espacios topológicos* tales como los conjuntos *abiertos* y *cerrados*. Más adelante estudiamos un concepto elemental que nos permite trabajar con estos espacios, el de *función continua*.

De manera intuitiva, la *topología* se encarga de estudiar las propiedades de figuras que se conservan cuando dichas figuras sufren cambios tales como dilataciones, expansiones o son deformadas, de tal manera que no aparezcan nuevos puntos; es decir, en la transformación que se permite a las figuras debe existir una correspondencia entre la figura original y la transformada, y que la deformación haga corresponder los puntos ”cercanos” a puntos ”cercanos” entre ellas. Iniciamos con la siguiente definición:

Definición 1.2.1. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. Los conjuntos $\emptyset$ y X están en τ.

2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.

3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.

   Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama ***espacio topológico***. En otras palabras, un espacio topológico es el par (X, τ). Nosotros denotaremos a un espacio topológico sólo por X si no hace falta mencionar con qué topología está definido.

Luego de definir qué es una topología, surgen naturalmente dos conceptos de gran importancia ligadas a esta definición, *conjunto abierto* y *conjunto cerrado*; los cuales, desde el punto de vista de la topología, son conceptos muy importantes, pues permiten tener la noción de "cercanía" o "aproximación" entre puntos, que para nuestro tema principal, *sistemas dinámicos discretos*, es de gran utilidad.

Definición 1.2.2. Sea X un espacio topológico con una topología τ. Diremos que un subconjunto U de X es un ***conjunto abierto*** de X si U pertenece a la colección τ. Además, un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es un ***conjunto cerrado*** si el subconjunto $X \setminus A$ es *abierto* en X.

Para aclarar estas definiciones ponemos algunos ejemplos básicos:

Ejemplo 1.2.3. Si d es una distancia en el conjunto X, entonces la colección de todos los subconjuntos que son uniones de bolas abiertas en X es una topología sobre X, denominada topología métrica inducida por d; esto es, todo espacio métrico es un espacio topológico.

Ejemplo 1.2.4. Sea X un conjunto. La colección de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X y se denomina topología discreta.

Observemos que en el Ejemplo 1.2.4, todos los subconjuntos de X son abiertos y cerrados.

Ejemplo 1.2.5. Sea X un conjunto cualquiera. La colección compuesta únicamente por X y $\emptyset$ es también una topología sobre X y la llamaremos topología indiscreta o topología trivial.

Ejemplo 1.2.6. Sean X un conjunto y τ_f la colección de todos los subconjuntos U de X tales que $X \setminus U$ es finito o todo X; τ_f es una topología sobre X, y se le conoce como *topología cofinita* o *topología de los complementos finitos*.

En el Ejemplo 1.2.6, todos los subconjuntos finitos son cerrados.

En resumen, de la Definición 1.2.1, se tienen las siguientes propiedades de abiertos:

Observación 1.2.7. Sea X un espacio topológico. Se tiene que:

1.- El conjunto vacío y todo el espacio son conjuntos abiertos de X.

2.- La intersección de dos conjuntos abiertos es abierto de X.

3.- La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto de X.

También se tienen algunas propiedades de los conjuntos cerrados:

Proposición 1.2.8. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C}$ la familia de conjuntos cerrados de X. Se tienen las siguientes propiedades:

1.- El espacio X y el conjunto $\emptyset$ están en $\mathcal{C}$.

2.- Las uniones finitas de elementos de $\mathcal{C}$ están en $\mathcal{C}$.

3.- La intersección arbitraria de elementos de $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$.

Demostración.

1.- Puesto que X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos, se tiene que sus respectivos complementos, $\emptyset$ y X, son cerrados.

2.- Sea $\{A_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ un subconjunto de $\mathcal{C}$. Utilizando las leyes de De Morgan, tenemos:

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i).$$

Observemos que el conjunto de la parte derecha es una intersección finita de conjuntos abiertos y por lo tanto, es abierto. En consecuencia, $\bigcap\{A_i : i \in \{1, 2, \ldots n\}\}$ está en $\mathcal{C}$.

3.- Sea $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ una colección de conjuntos en $\mathcal{C}$. Aplicando las leyes de De Morgan, tenemos:

$$X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in J} (X \setminus A_\alpha).$$

Ya que $X \setminus A_\alpha$ es un conjunto abierto, para todo $\alpha \in I$, la parte derecha es la unión arbitraria de conjuntos abiertos y por lo tanto, es abierto. Así, $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ está en $\mathcal{C}$.

Con todo esto se tiene el resultado. ■

Dado un subconjunto de un espacio topológico X, se puede definir un *subespacio topológico*.

Definición 1.2.9. Sea X un espacio topológico con topología τ. Si Y es un subconjunto de X, la colección:

$$\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y, denominada ***topología de subespacio*** o ***topología relativa***. Con esta topología, Y se denomina subespacio de X; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Cuando se trabaja con un espacio topológico X y un subespacio Y diremos que un conjunto U es abierto en X si pertenece a la topología X, y diremos que U es abierto en Y si pertenece a la topología de Y.

Otros conceptos importantes son el *interior* y la *clausura* de un conjunto y *punto límite* o también llamado *punto de acumulación* de un conjunto. Estos conceptos se exponen en la Definición 1.2.10 y la Definición 1.2.12.

Definición 1.2.10. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, el ***interior*** de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A, y la ***clausura*** de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados en X que contienen a A. El interior de A se denota por $int(A)$ o por A^o y la clausura de A se denota mediante $cl(A)$ o por $\overline{A}$.

De esta definición se desprenden algunas observaciones que en seguida se muestran:

Observación 1.2.11. Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Se tienen las siguientes observaciones:

1) El conjunto $int(A)$ es un conjunto abierto en X y $cl(A)$ es un conjunto cerrado en X. Además, $int(A) \subset A \subset cl(A)$.

2) El interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A y la clausura de A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.

3) Si A es abierto, entonces $A = int(A)$. Mientras que, si A es cerrado, $A = cl(A)$.

Definición 1.2.12. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y x un punto en X. Diremos que x es ***punto límite*** o ***punto de acumulación*** de A si cada abierto de X que contenga a x interseca a A en algún punto distinto del propio x. Dicho de otra forma, x es un punto límite de A si pertenece a la clausura de $A \setminus \{x\}$. El punto x puede o no pertenecer a A, no es relevante para esta definición. Al conjunto de puntos de acumulación de A se le llama ***derivado*** de A, y se denota por A' (ver Figura 1.1).

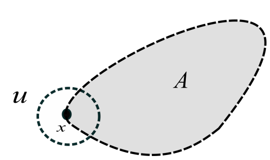


Figura 1.1: Punto de acumulación.

Algunas propiedades surgen a partir de la Definición 1.2.12, las demostraciones se pueden consultar en [2].

Teorema 1.2.13. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Se tiene que $x \in cl(A)$ si y sólo si, para todo abierto U que contiene a x, $U \cap A$ no es vacío.

Teorema 1.2.14. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Un punto x está en $int(A)$ si y sólo si existe un abierto U de X que contiene a x tal que $U \subset A$. Ver Figura 1.2.

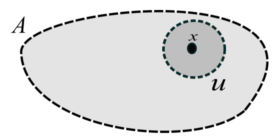


Figura 1.2: Punto interior de A.

Con los conceptos que tenemos hasta ahora podemos dar paso a los conjuntos *densos* en espacios topológicos.

Definición 1.2.15. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Diremos que A es ***denso*** en X si $cl(A) = X$.

Podemos caracterizar a este tipo de conjuntos de la siguiente forma:

Teorema 1.2.16. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Se tiene que A es denso en X si y sólo si, todo abierto no vacío U de X, cumple que $A \cap U$ no es vacío.

Demostración. Supongamos que A es denso en X. Sea U un abierto no vacío de X. Puesto que $cl(A) = X$, se tiene que, por el Teorema 1.2.13, $U \cap A$ no es vacío.

Recíprocamente, supongamos que para todo abierto no vacío U de X, $A \cap U$ no es vacío. Si suponemos que $cl(A) \neq X$, entonces $X \setminus cl(A)$ sería abierto y no vacío de X. Pero $(X \setminus cl(A)) \cap A$ es vacío, lo cual contradice lo supuesto. Por lo tanto $cl(A) = X$. ■

Tenemos algunos ejemplos de conjuntos densos a continuación.

Ejemplo 1.2.17. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, donde τ_u es la topología usual.

Ejemplo 1.2.18. Sea X un espacio topológico con la topología cofinita. Cualquier subconjunto infinito es denso en X.

Algunos espacios topológicos tienen algunas características particulares lo cual permite clasificarlos. En la siguiente sección vemos algunos tipos de espacios topológicos.

1.3. Algunos tipos de espacios topológicos

La definición de un espacio topológico es muy general y muchas de las proposiciones y teoremas que se necesitan, se prueban para espacios topológicos con propiedades más específicas. En este trabajo son de gran importancia, para algunas demostraciones, los espacios topológicos con algunas propiedades particulares tales como: *Espacios topológicos perfectos*, *espacios* T_1, *espacios de Hausdorff*, entre otros.

1.3.1. Espacios topológicos de Hausdorff

Una propiedad que todos los espacios métricos poseen es que, cualesquiera dos puntos distintos del espacio, se pueden separar por dos conjuntos abiertos que contengan a esos puntos y además sean ajenos entre ellos. En general, los espacios topológicos no gozan de esta propiedad. Cuando un espacio topológico tiene dicha propiedad son llamados *Espacios topológicos de Hausdorff* o T_2. Esta propiedad será crucial en el Capítulo 4. Antes de definir los *espacios de Hausdorff* presentamos una propiedad más débil.

Definición 1.3.1. Un espacio topológico X se denomina ***espacio*** T_1 si para cada par de puntos distintos, x_1 y x_2 de X, existen abiertos U_1 y U_2 tales que $x_1 \in U_1 \setminus U_2$ y $x_2 \in U_2 \setminus U_1$. Ver Figura 1.3.

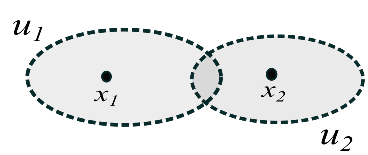


Figura 1.3: Espacio T_1. En estos espacios los conjuntos U_1 y U_2 pueden o no intersectarse.

Definición 1.3.2. Un espacio topológico X se denomina ***espacio Hausdorff*** o ***espacio*** T_2 si para cada par de puntos x_1 y x_2 distintos en X, existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 en X tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$. Ver Figura 1.4.

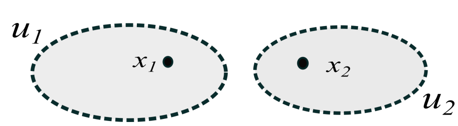


Figura 1.4: En los Espacios de Hausdorff los conjuntos U_1 y U_2 deben ser ajenos.

Notemos que todo espacio de Hausdorff es un espacio T_1. Sin embargo, un espacio T_1 no necesariamente es un espacio de Hausdorff. Algunos ejemplos de espacios de Hausdorff se muestran en seguida:

Ejemplo 1.3.3. El espacio topológico de los reales con la topología usual, $(\mathbb{R}, \tau_u)$, es de Hausdorff.

Ejemplo 1.3.4. Los espacios topológicos con la topología discreta son espacios de Hausdorff.

Como hemos mencionado, no todo espacio topológico es de Hausdorff. Veamos un ejemplo de ésto:

Ejemplo 1.3.5. La recta real, con la topología cofinita, no es un espacio de Hausdorff, pues para cualesquiera dos puntos que se tomen y dos abiertos que los contengan, los abiertos se intersectan, ya que de otra forma, un abierto estaría en el complemento del otro, pero eso es imposible, porque el complemento es finito.

Estos espacios le dan ciertas propiedades interesantes a los conjuntos unitarios, o en general, a los conjuntos finitos. Estas propiedades, que son de suma importancia para este trabajo, los mencionamos a continuación (las demostraciones se encuentran en [2]):

Proposición 1.3.6. Sea X un espacio topológico. Se tiene que, X es T_1 si y sólo si, para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X.

Como consecuencia de la Proposición 1.3.6, se tiene lo siguiente:

Proposición 1.3.7. Sean X un espacio topológico T_1. Para todo $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ puntos de X, se tiene que $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ es cerrado en X.

De la última proposición podemos observar lo siguiente:

Observación 1.3.8. Sea X un espacio topológico. Se tiene que X es T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es cerrado. Más aún, si X es finito, cualquier subconjunto de X es cerrado y abierto.

Proposición 1.3.9. Sean X un espacio topológico T_1, A un subconjunto de X y x un punto de X. Se tiene que x es punto límite de A si y sólo si, cada abierto U que contiene a x contiene infinitos puntos de A.

Ya hemos mencionado que todo espacio de Hausdorff es un espacio T_1, por lo tanto, las Proposiciones 1.3.6, 1.3.7, 1.3.9 y la Observación 1.3.8 son válidas para un espacio de Hausdorff.

1.3.2. Espacios topológicos con puntos aislados y perfectos

En esta sección estudiamos dos tipos de espacios topológicos que se relacionan, los espacios *perfectos* y espacios con *puntos aislados*; estos últimos también son llamados espacios *imperfectos*. Un espacio topológico no puede tener ambas propiedades simultáneamente. A continuación los presentamos.

Puntos aislados

Dado un conjunto cualquiera A, todos los puntos de A que no sean de acumulación se les llama puntos aislados. De manera formal:

Definición 1.3.10. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y x un punto de A. Se dice que x es ***punto aislado de*** A, si existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $U \cap A = \{x\}$. Más aún, x es ***punto aislado de*** X si existe un abierto U no vacío de X tal que $x \in U$ y $U \cap X = \{x\}$; esto significa que $U = \{x\}$. Al conjunto de puntos aislados de X lo vamos a denotar como Iso_X. En la Figura 1.5, el punto x que pertenece al conjunto A, es aislado de A.

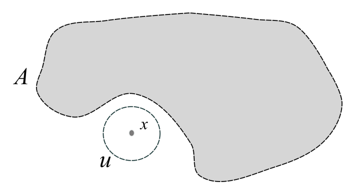


Figura 1.5: Observemos que el punto x es un punto aislado de A, pues el abierto U contiene a x y cumple que $A \cap U = \{x\}$.

Notemos que si x es punto aislado de A, entonces x no pertenece al derivado de A. En efecto, si U es un abierto no vacío de X tal que $x \in U$ y $U \cap X = \{x\}$, se tiene que $(A \setminus \{x\}) \cap U$ es vacío. Para tener más claro esta definición, tenemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.3.11. Sean $\mathbb{R}$ con la topología usual y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. En este caso todos los puntos de $\mathbb{N}$ son puntos aislados de $\mathbb{N}$. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $B\left(n, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \{n\}$.

Ejemplo 1.3.12. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. En este caso los puntos aislados de A son todos los puntos de A.

Dada la Definición 1.3.10, tenemos la siguiente caracterización:

Observación 1.3.13. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se tiene que x es punto aislado de X si y sólo si el conjunto $\{x\}$ es abierto en X.

Demostración. Supongamos que x es un punto aislado de X. Por la Definición 1.3.10, existe U abierto no vacío de X tal que $U \cap X = \{x\}$. Por lo tanto, $U = \{x\}$. Así, $\{x\}$ es abierto en X.

Recíprocamente, supongamos que $\{x\}$ es abierto en X. Pongamos $U = \{x\}$. De aquí, $U \cap X = \{x\}$. En consecuencia, x es un punto aislado de X. ∎

Cuando en un espacio no se encuentra ningún punto aislado, el espacio es llamado *perfecto*. En la siguiente sección presentamos este tipo de espacios.

Espacios topológicos perfectos

La ausencia de puntos aislados determina una nueva clase de espacios topológicos, la cual es llamado *perfectos*. Formalmente lo definimos de la siguiente forma:

Definición 1.3.14. Sea X un espacio topológico. El espacio X es ***perfecto*** si todos sus puntos son de acumulación. Equivalentemente, X es perfecto si ninguno de sus puntos es punto aislado.

Cuando un espacio tiene puntos aislados también se le llama espacio ***imperfecto***.

Proposición 1.3.15. Sea X un espacio topológico. Se tiene que X es perfecto si y sólo si todo abierto no vacío U de X tiene al menos dos puntos.

Demostración. Supongamos que X es perfecto y sea U un abierto no vacío de X. También supongamos que U contiene sólo un punto, x. Observemos que $U \cap X = \{x\}$. Por la Definición 1.3.10, x es aislado, lo cual contradice lo supuesto. Por lo tanto, U contiene al menos dos puntos.

Recíprocamente, supongamos que todo abierto no vacío U de X contiene al menos dos puntos. De aquí, la intersección de U con X nunca será un solo punto; es decir, no existen puntos aislados. Por lo tanto, X es perfecto. ■

De la Proposición 1.3.15, se obtiene la siguiente equivalencia:

Proposición 1.3.16. Sea X un espacio topológico. Se tiene que X no es perfeto si y sólo si existe un abierto no vacío U de X tal que U contenga a lo más un elemento.

Cosiderando la propiedad de Hausdorff, obtenemos los siguientes dos resultados.

Proposición 1.3.17. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Se tiene que X no es perfecto si y sólo si existe un subconjunto abierto no vacío U de X tal que U es finito.

Demostración. Supongamos que X no es perfecto. Luego, existe $x \in X$ tal que x es aislado en X. Por la Observación 1.3.13, $U = \{x\}$ es abierto de X. Así, U es finito.

Recíprocamente, supongamos que existe un subconjunto abierto no vacío y finito U de X. Pongamos $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Veamos que X no es perfecto. Notemos que, como X es de Hausdorff, existen abiertos disjuntos V_1, $V_2, \ldots, V_n$ de X tales que $x_i \in V_i$ y $V_i \subset U$, donde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Fijemos $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pongamos $V = U \cap V_j$. Notemos que V es abierto en X. Observemos que $V = \{x_j\}$. Por la Observación 1.3.13, x_j es aislado. Por lo tanto, X no es perfecto. ■

De la Proposición 1.3.17, se obtiene la siguiente equivalencia:

Proposición 1.3.18. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Se tiene que X es perfecto si y sólo si todo abierto no vacío U de X es infinito.

Pasemos a otro tipo de espacio topológico, los *espacios compactos*.

1.3.3. Espacios topológicos compactos

De manera intuitiva, un conjunto A es compacto si de toda colección de conjuntos abiertos, que ”cubre” a A, se puede extraer una subcolección finita que también cubre a A.

Definición 1.3.19. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se dice que cubre a A o que es una ***cubierta*** de A, si la unión de los elementos de $\mathcal{C}$ cubren al conjunto A. Se dice que $\mathcal{C}$ es una ***cubierta abierta*** de A si es una cubierta de A formado por conjuntos abiertos de A.

Ahora que sabemos qué es una cubierta abierta, podemos pasar a la definición formal de un conjunto *compacto*.

Definición 1.3.20. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es ***compacto*** si de cada cubierta abierta $\mathcal{C}$ de A podemos extraer una subcolección finita que también cubre a A. Si $A = X$ se dice que el espacio topológico X es compacto. A esta propiedad se le llama ***compacidad***.

Los siguientes ejemplos ilustran esta definición:

Ejemplo 1.3.21. El siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto:

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ejemplo 1.3.22. Cualquier espacio X que contenga un número finito de elementos es trivialmente compacto, pues a cualquier cubierta abierta se le puede extraer un número finito de abiertos que cubra al espacio.

Recordemos que $\mathbb{S}^1$ denota el círculo unitario y $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos.

Ejemplo 1.3.23. Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de números complejos. El subconjunto $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ es compacto.

Veamos un conjunto que no es compacto:

Ejemplo 1.3.24. La recta real, $\mathbb{R}$, no es compacta, ya que la cubierta formada por intervalos abiertos:

$$\mathcal{C} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra a $\mathbb{R}$.

Proposición 1.3.25. Sea X un espacio métrico. Si X es compacto, entonces cualquier subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X.

Proposición 1.3.26. Sean X es un espacio topológico compacto y A un subconjunto de X. Si A es cerrado, entonces A es compacto.

Demostración. Supongamos que A es cerrado. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de A. Ahora, podemos considerar la siguiente cubierta abierta de X:

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \{X - A\}.$$

Como X es compacto, alguna subcolección finita cubre a X. Si esta subcolección contiene al conjunto $X \setminus A$, lo quitamos. Si no es así, permanece igual. La colección resultante en cualquier caso es una sucolección finita de $\mathcal{C}$ que cubre a A. ■

Proposición 1.3.27. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y A un subconjunto de X. Si A es compacto, entonces A es cerrado.

Demostración. Supongamos que A es compacto. Probemos que $X \setminus A$ es un conjunto abierto. Sea x_0 un punto de $X \setminus A$. Demostremos que existe un abierto que contiene a x_0 y que no intersecta a A. Para cada punto y de A, por la propiedad de Hausdorff, podemos elegir abiertos disjuntos U_y y V_y que contengan a x_0 y a y, respectivamente. Observemos que la colección $\{V_y : y \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto, existe una subcubierta finita de A, digamos $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$. Veamos que el conjunto:

$$U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$$

es disjunto del conjunto abierto:

$$V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}.$$

En efecto, sea $z \in V$. Luego, $z \in V_{y_i}$, para algún i y, por lo tanto, $z \notin U_{y_i}$. Así, $z \notin U$. Con esto hemos visto que $U \cap V$ es vacío. Puesto que U es abierto y $x_0 \in U$, $X \setminus A$ es un conjunto abierto. Con ésto, A es cerrado. ■

La siguiente Proposición la podemos encontrar en [2]:

Proposición 1.3.28. Sea X un espacio topológico. Se tiene que X es compacto si y sólo si para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrado en X, la intersección de todos los elementos de $\mathcal{C}$:

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

no es vacía.

Existen otros tipos de espacios topológicos bastante importantes en la matemática [2]; sin embargo, para este trabajo, los que hemos mencionado son suficientes. Ahora, presentamos uno de los conceptos más relevantes y útiles en la matemática: el concepto de *función*.

1.4. Funciones continuas y algunas propiedades

Uno de los conceptos más importantes dentro de las matemáticas es el de *función*, particularmente, *función continua*. Tan relevante es, que en ningún momento de nuestro trabajo nos apartamos de este concepto.

En esta sección presentamos algunos de los conceptos básicos que se relacionan con las funciones que nos parecen más importantes y útiles para desarrollar este trabajo. Por mencionar algunas: *función continua*, *función inversa*, *homeomorfismos*, *imagen inversa de un conjunto*, *iteración de funciones*, entre otras.

Las primeras definiciones que mostramos son las de *imagen* e *imagen inversa* de un conjunto y *restricción* de una función.

Definición 1.4.1. Sean X y Y dos conjuntos cualesquiera, $f : X \to Y$ una función y U un subconjunto de X. El conjunto de los $f(x)$ tales que $x \in U$ se denomina ***imagen*** de U bajo f y se denota por $f(U)$.

Definición 1.4.2. Sean X y Y dos conjuntos cualesquiera, $f : X \to Y$ una función y V un subconjunto de Y. La ***imagen inversa*** o ***preimagen*** de V, denotada como $f^{-1}(V)$, es el conjunto de todos los puntos x de X que cumplen que $f(x) \in V$.

Definición 1.4.3. Sean X y Y dos conjuntos cualesquiera, $f : X \to Y$ una función y A un subconjunto de X. Consideremos la función $g : A \to Y$ tal que $g(a) = f(a)$, para todo $a \in A$. En este caso a g se le llama la ***restricción*** de f al conjunto A y se denota por $f\mid_A$.

Bajo estos últimos conceptos podemos mostrar algunas propiedades de las funciones sobre familias de conjuntos que son sumamente útiles:

Proposición 1.4.4. Sean X y Y dos espacios topológicos y $\{A_s : s \in I\}$ y $\{B_s : s \in J\}$ familias de conjuntos de X y Y, respectivamente. Se tienen las siguiente propiedades:

1) $f\left(\bigcup_{s\in I} A_s\right) = \bigcup_{s\in I} f(A_s)$.

2) $f\left(\bigcap_{s\in I} A_s\right) \subseteq \bigcap_{s\in I} f(A_s)$.

3) $f^{-1}\left(\bigcup_{s\in J} B_s\right) = \bigcup_{s\in J} f^{-1}(B_s)$.

4) $f^{-1}\left(\bigcap_{s\in J} B_s\right) = \bigcap_{s\in J} f^{-1}(B_s)$.

5) $f(f^{-1}(B_s)) \subseteq B_s$, donde $s \in J$. Si f es sobreyectiva, la igualdad se cumple.

6) $A_s \subseteq f^{-1}(f(A_s))$, donde $s \in I$. Basta que f sea inyectiva para que la igualdad se cumpla.

La siguiente definición que presentamos en esta sección hace referencia a uno de los conceptos más sobresalientes en la matemática, *función continua*. De manera intuitiva, una función es *continua* entre dos espacios topológicos si preserva la idea de ”proximidad”, es decir, si a través de la función se llevan puntos ”próximos” del primer espacio a puntos ”próximos” del segundo espacio.

Definición 1.4.5. Sean X y Y dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y x_0 un punto de X. Decimos que f es continua en x_0 si para todo subconjunto abierto no vacío V de Y que contiene al punto $f(x_0)$, existe un subconjunto abierto no vacío U de X que contiene x_0 y además se satisface que $f(U) \subseteq V$. Si f es continua en cada punto de X se dice que f es continua en X.

De la Definición 1.4.5 surge una caracteriazación que utilizamos constantemente; la cual mostramos en el Teorema 1.4.6 (ver [2]). Para ésto, necesitamos la ayuda del concepto de imagen inversa de un conjunto.

Teorema 1.4.6. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. La función f se dice que es ***continua*** en X si y sólo si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

La siguiente definición nos habla de una propiedad que tienen algunas funciones de mandar conjuntos abiertos de un espacio a conjuntos abiertos de otro espacio. De forma similiar, con los conjuntos cerrados.

Definición 1.4.7. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es abierta si para cada subconjunto abierto A en X, $f(A)$ es abierto en Y. Por otro lado, se dice que f es cerrada si para cada $B \subset X$ cerrado en X, $f(A)$ es cerrado en Y.

La composición de funciones es uno de los conceptos más útiles en este trabajo (ver [2] o [15]), ya que apartir de ella podemos construir lo que llamamos *Sistema dinámico discreto*. La composición de funciones conserva la continuidad de las funciones.

Observación 1.4.8. Sean X y Y espacio topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones. Si f y g son funciones continuas, entonces la composición $f \circ g$ es continua. En particular, $f \circ f$ es continua.

Con ayuda de la composición de funciones se obtienen otros conceptos, como la *iteración* de funciones, ésto se refiere a componer una misma función varias veces.

Iteración de funciones

La palabra *iteración* hace referencia a la repetición de un suceso una y otra vez, en este caso hablamos de la iteración de una función; es decir, a la composición de una función consigo mismo repetidas veces.

Definición 1.4.9. Sean X un espacio topológco, $f : X \to X$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. La ***n-ésima iteración de*** f, denotada como f^n, se define como la composición reiterada de f consigo misma n veces; es decir:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots f}_{n \text{ veces}}.$$

Donde $f^1 = f$ y $f^n = f \circ f^{n-1}$. Además, definimos $f^0 : X \to X$ como la función identidad en X; es decir, $f^0(x) = x$, para todo $x \in X$. Más aún, $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ y $(f^n)^m = f^{nm}$, para cada n y $m \in \mathbb{N}$.

Veamos un ejemplo para aclarar esta definición:

Ejemplo 1.4.10. Sean $X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $f : X \to X$ la función continua definida por $f(x) = ax$. De aquí, se obtiene:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = a^2x, \\ f^3(x) &= f(f^2(x)) = a^3x, \\ &\vdots \\ f^n(x) &= f(f^{n-1}(x)) = a^nx. \end{aligned}$$

Inductivamente, de la Observación 1.4.8, se puede demostrar la siguiente proposición:

Proposición 1.4.11. Sea X un espacio topológico. Si $f : X \to X$ es una función continua, entonces f^n es continua, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De la Definición 1.4.2 y la Definición 1.4.9, tenemos lo siguiente:

Definición 1.4.12. Sean X y Y dos conjuntos cualesquiera, $f : X \to Y$ una función y A un subconjunto de Y. Dado $k \in \mathbb{N}$, la *preimagen* de A bajo f^k se denota por $f^{-k}(A)$, ésto se interpreta como: $f^{-k}(A) = f^{-1}(f^{-(k-1)}(A))$. En el caso en que $A = \{x\}$, escribiremos $f^{-1}(x)$ en lugar de $f^{-1}(\{x\})$.

La siguiente observación surge de la Definición 1.4.7:

Observación 1.4.13. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si f es abierta (cerrada) en X, entonces f^k es abierta (cerrada) en Y, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para A subconjunto de un espacio topológico X y n un número natural, denotamos la *imagen* de A bajo f^n, como $f^n(A)$. Usando esta notación podemos mostrar la siguiente proposición:

Proposición 1.4.14. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Se cumple que:

$$f^n(X) \subseteq f^{n-1}(X) \subseteq \ldots \subseteq f(X) \subseteq X$$

, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como f es una función que va del espacio X en sí mismo, tenemos que $f(X) \subset X$. De aquí, se tiene lo siguiente:

$$f^2(X) = f(f(X)) \subset f(X) \subset X,$$
$$f^3(X) = f(f^2(X)) \subset f(X) \subset X,$$

En general, para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$f^n(X) = f(f^{n-1}(X)) \subset f(X) \subset X.$$

De esta manera, queda demostrada la proposición. ■

En la Proposición 1.4.15 no es necesaria la propiedad de continuidad; sin embargo, el resultado es importante para muchos resultados más adelante.

Proposición 1.4.15. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Consideremos A y B subconjunto no vacíos de X. Se tiene que, para $k \in \mathbb{Z}$, $f^k(A) \cap B$ no es vacío si y sólo si $A \cap f^{-k}(B)$ no es vacío.

Demostración. Sea $x \in A \cap f^{-k}(B)$, ésto sucede si y sólo si $x \in A$ y $x \in f^{-k}(B)$, ésto último se cumple si y sólo si $f^k(x) \in f^k(A)$ y $f^k(x) \in B$. Con ésto tenemos que $f^k(A) \cap B$ no es vacío. ■

Teorema 1.4.16. Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función abierta. Si $x \in X$ es un punto aislado de X, entonces $\{f^k(x)\}$ es también punto aislado, para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, $\{f^k(x)\}$ es un conjunto abierto.

Demostración. Por la Observación 1.3.13, $\{x\}$ es abierto en X. Pongamos $U = \{x\}$. Puesto que f es una función abierta, $f^k(U)$ es un conjunto abierto, para cada $k \in \mathbb{N}$. Observemos que $f^k(U) = f^k(\{x\}) = \{f^k(x)\}$. De aquí, $f^k(U) \cap X = \{f^k(x)\}$; esto es que $f^k(x)$ es punto aislado de X, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{f^k(x)\}$ es abierto en X. ■

Retomando el concepto de compacidad, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.4.17. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y A un subconjunto de X. Si A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto.

Demostración. Supongamos que A es compacto. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de $f(A)$. Probemos que $\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta abierta de A. Sea $x \in A$. Luego, $f(x) \in f(A)$ y como $\mathcal{C}$ es cubierta de A, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $f(x) \in C$. En consecuencia, $x \in f^{-1}(C)$. Por lo tanto, la colección dada es una cubierta de A. Puesto que f es continua, por el Teorema 1.4.6, se tiene que es una cubierta abierta de A.

Por otro lado, como A es compacto, existe un número finito de conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de $\mathcal{C}$, tales que $f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2), \ldots, f^{-1}(C_n)$ cubren a A. Probemos que los conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ cubren a $f(A)$. Sea $y \in f(A)$. Luego, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Observemos que $x \in f^{-1}(C_k)$, para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De aquí, $f(x) \in C_k$, esto es que $y \in C_k$. Como y es cualquier punto de $f(A)$, concluimos que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ cubre a $f(A)$. Por lo tanto, $f(A)$ es compacto. ■

De aquí, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.4.18. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y A un subconjunto de X. Si A es compacto, entonces $f^k(A)$ es compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Las funciones continuas biyectivas con inversa continua son muy importantes dentro de la topología; estas nos ayudan a determinar la equivalencia que existe entre espacios topológicos. A este tipo de funciones se les llama *homeomorfismos*. Formalmente se definen de la siguiente manera:

Definición 1.4.19. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Si las funciones f y f^{-1} son ambas continuas, se dice que f es un ***homeomorfismo***. Además, se dice que X y Y son ***homeomorfos*** si existe un homeomorfismo entre ellos.

De la Definición 1.4.19, se desprende la siguiente observación:

Observación 1.4.20. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también es un homeomorfismo.

Proposición 1.4.21. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) f es un homeomorfismo.

2) f es cerrada.

3) f es abierta.

Para profundizar más en los temas que hemos expuesto en este capítulo, se puede consultar [2], [15] [16]. Con esto damos paso al siguiente capítulo.

Capítulo 2

Introducción a los sistemas dinámicos discretos

En la naturaleza, casi todos los objetos y fenómenos están sometidos al cambio y al movimiento, éstos dependen de los parámetros con los que se relacionan. Cuando se estudian dichos objetos y fenómenos, el *tiempo* y el *espacio* (posición), sin lugar a dudas, nos permiten la percepción de que algo cambia o se mueve. En este sentido, el tiempo y la posición son dos parámetros muy importantes que se utiliza para describir la dinámica de la naturaleza. El estudio de los problemas de la dinámica han resultado ser un reto para el entendimiento humano durante miles de años, por mencionar uno, el estudio del movimiento de los astros dentro del sistema solar, que estudia la mecánica celeste. Este tipo de fenómenos han sido muy importantes para entender la naturaleza y por eso han sido de gran interés para las ciencias y las matemáticas. Podemos encontrar un poco de historia de los *sistemas dinámicos* en [4].

Es importante mencionar que, matemáticamente, los *sistemas dinámicos discretos* estudian objetos abstractos (puntos o conjuntos); es decir, no atiende un fenómeno particular y tampoco consideran parámetros concretos (que pueden ser infinitos). Sin embargo, a lo largo de este capítulo hacemos referencias constantes a los parámetros tiempo y posición simplemente para tener una idea más tangible de lo que estamos estudiando.

2.1. ¿Qué son los sistemas dinámicos discretos?

Intuitivamente, el estudio de los *sistemas dinámicos* consiste en analizar sistemas *deterministas*; es decir, consideramos situaciones que dependan de un parámetro dado, normalmente es el tiempo y que varían de acuerdo a leyes establecidas, de tal forma que el conocimiento de la situación en un momento determinado permite, de alguna manera, reconstruir el pasado y predecir el futuro. De manera formal, este concepto se presenta a continuación.

Definición 2.1.1. Sean X un espacio topológico y $(G, *)$ un semi-grupo con elemento neutro. Un ***sistema dinámico*** es una función continua $\varphi : G \times X \to X$ que satisface lo siguiente:

(a) $\varphi(0, x) = x$, para cada $x \in X$, donde 0 es el elemento neutro en G.

(b) $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t * s, x)$, para cada $t, s \in G$ y para cada $x \in X$.

Generalmente, al espacio X se le llama ***espacio fase***, al semi-grupo G se le llama ***conjunto de parámetros*** y la función φ se conoce como ***ley determinística***.

Una manera alternativa y equivalente de introducir un sistema dinámico, es como sigue: para cada $t \in G$, sea $\varphi_t : X \to X$ (basta considerar por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$) que cumple con lo siguiente:

(I) $\varphi_0(x) = x$, para cada $x \in X$,

(II) $(\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = \varphi_{t*s}(x)$, para cada $s, t \in G$ y para cada $x \in X$.

Si $G = \mathbb{R}^+$, al sistema dinámico se le llama ***sistema diámico continuo*** o ***flujo***. Si $G = \mathbb{N} \cup \{0\}$, al sistema dinámico se le llama ***sistema dinámico discreto***.

Una función continua de un espacio topológico X en sí mismo, $f : X \to X$, y el semi-grupo $G = \mathbb{N} \cup \{0\}$, determinan un sistema dinámico discreto $\phi : G \times X \to X$ definido por $\phi(k, x) = f^k(x)$, para cada $(k, x) \in G \times X$, donde f^k es la composición de la función f consigo misma k veces cuando $k \neq 0$ y f^0 es la función identidad en X. Para referirnos al sistema dinámico discreto ϕ escribiremos simplemente (X, f). La parte de la Topología que se encarga del estudio de este tipo de sistemas dinámicos discretos se le conoce como ***Dinámica Topológica*** [5].

El sistema dinámico discreto (X, f) generalmente es referido a la ecuación en diferencias [4]:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

En base a la Definición 2.1.1, surge el concepto de *órbita*, cuya importancia y utilidad se muestra en todos los capítulos siguientes.

2.2. Órbitas

Ahora nos toca discutir un poco sobre la dinámica de algunas funciones y algunas de sus propiedades. En las matemáticas, existen muchos problemas que envuelven el concepto de *iteración*. Una ***iteración*** significa repetir un proceso una y otra vez. En los sistemas dinámicos discretos, este proceso que se repite está determinado por la aplicación de una función. En los capítulos consecuentes consideramos funciones de una variable como en cálculo elemental [14].

Como hemos mencionado en la Sección 1.4, dado un espacio topológico X, $f : X \to X$ una función continua y $k \in \mathbb{N}$, se define la k-ésima iteración de f como la composición de f consigo misma k veces. A partir de ésto, surge la siguente definición:

Definición 2.2.1. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x un punto de X. La ***órbita futura*** (o simplemente ***órbita***) de x bajo f, se denota y define como:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

La interpretación de la órbita futura no es muy difícil de visualizar; supongamos que x representa la posición o el estado de un objeto o fenómeno de la naturaleza. Así, $\mathcal{O}(x, f)$ representa el movimiento de un objeto que va cambiando con el tiempo; explícitamente: en el tiempo $t = 0$, un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $t = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en la posición $f(x)$; en el tiempo $t = 2$ el objeto ha cambiado nuevamente de posición y ahora se encuentra en $f^2(x)$; y así sucesivamente (podría decirse que x representa la posición de un objeto en el presente). En tal caso se dice que se analiza la ***dinámica individual*** o ***puntual***. La Figura 2.3 ilustra esta definición.

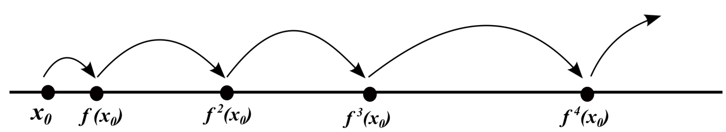


Figura 2.1: Órbita futura de x_0, $\mathcal{O}(x_0, f)$. En esta figura suponemos que el tiempo avanza hacia la derecha y que x_0 es la posición de un objeto en el presente.

Puesto que la órbita futura genera una sucesión de puntos, podemos considerar ahora la órbita futura de cualquiera de éllos; es decir, podemos observar que:

Observación 2.2.2. Dado X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x un punto de X, tenemos que, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$:

$$\mathcal{O}(f^n(x), f) = \{f^k(x) : k \geq n\}.$$

Cabe mencionar que algunos autores se refieren a la órbita futura simplemente como *órbita* [3]. Por otro lado, es natural pensar que si se estudia el futuro de un objeto, es decir, si existe la órbita futura de un punto bajo alguna función f, debe también existir la *órbita pasada* de ese mismo punto, con esto nos refierimos a los hechos que precedieron al objeto que se estudia. Para la siguiente definición, recordemos el concepto de imagen inversa (Definición 1.4.2).

Definición 2.2.3. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x un punto de X. La ***órbita pasada*** de x bajo f se denota y define como:

$$\mathcal{O}_{-}(x, f) = \bigcup \{f^{-k}(x) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Visto de otra manera, la órbita pasada es la siguiente igualdad:

$$\bigcup\{f^{-k}(x) : k \in \mathbb{N}\} = f^{-1}(x) \cup f^{-2}(x) \cup \ldots \cup f^{-k}(x) \cup \ldots$$

Visualmente, el siguiente dibujo muestra la órbita pasada de un punto:

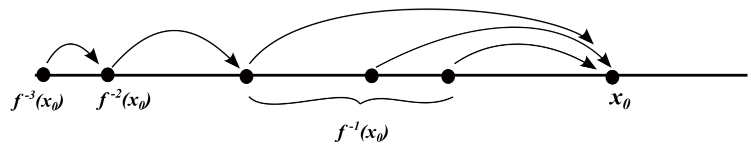


Figura 2.2: Órbita pasada de x_0, $\mathcal{O}_-(x_0, f)$. Imaginemos que x_0 es la posición de un objeto en el presente y que lo puntos del lado izquierdo de él representan el pasado, es decir, los puntos de donde proviene x_0. Observemos que más de un punto pueden llegar a uno solo, pues estamos tratando con el concepto de imagen inversa.

Podemos estudiar sólo el futuro y el pasado de un objeto por separado, pero también podemos estudiarlos simultáneamente y ver la relación que existe entre ellos. Para ésto, se define el siguiente conjunto llamando simplemente *órbita*.

Definición 2.2.4. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x un punto de X. La ***órbita*** de x bajo f se define como:

$$\mathcal{O}_\pm(x, f) = \mathcal{O}(x, f) \cup \mathcal{O}_-(x, f).$$

Podemos aclarar un poco más la idea de la órbita de un punto a través de un dibujo. Consideremos un objeto que en el presente se encuentra en la posición x_0 en algún espacio y f una función a través de la cual el objeto se desplaza al transcurrir el tiempo. Veamos la órbita de x_0 en la Figura 2.3.

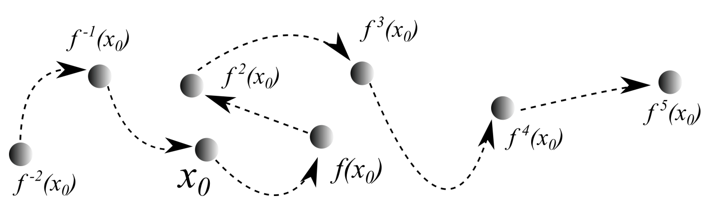


Figura 2.3: En este caso, x_0 representa la posición en el tiempo presente de un objeto. Observemos que la órbita pasada de x_0 son los puntos de $f^{-1}(x_0)$ y $f^{-2}(x_0)$; mientras que los demás puntos representan la órbita futura de x_0. En conjunto, esta figura representa la órbita de x_0, $\mathcal{O}_\pm(x_0, f)$.

Es importante aclarar que al referirnos a cualquiera de los conjuntos $\mathcal{O}(x, f)$, $\mathcal{O}_-(x, f)$ y $\mathcal{O}_\pm(x, f)$ podemos decir simplemente órbita, en lugar de órbita pasada u órbita futura, aclarando, con la notación, a cuál de éllas nos referimos. Ahora veamos algunos ejemplos concretos para entender más estos conceptos.

Ejemplo 2.2.5. Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por:

$$f(x) = 2x^2.$$

Consideremos el punto $x = 8$. Así, obtenemos las órbitas de x:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{8, 128, 32768, \ldots\},$$

$$\mathcal{O}_-(x, f) = \left\{2, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots, \right\},$$

$$\mathcal{O}_\pm(x, f) = \left\{\ldots \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 2, 8, 128, 32768, \ldots\right\}.$$

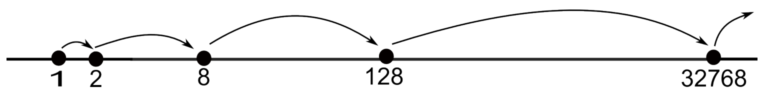


Figura 2.4: Órbita de $x = 8$ bajo $f(x) = 2x^2$ en la recta real, $\mathcal{O}_\pm(8, f)$.

En la Figura 2.5, se muestra la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ y parte de la órbita de $x = 8$. Las flechas simplemente indican el cambio de posición del punto a lo largo de la gráfica de f.

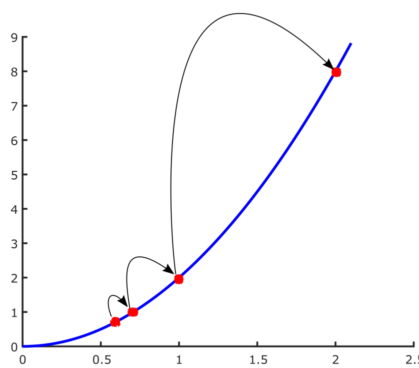


Figura 2.5: Órbita de $x = 8$ bajo $f(x) = 2x^2$, $\mathcal{O}_\pm(8, f)$.

Ejemplo 2.2.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua definida como$f(x) = 2x$.

Consideremos el punto $x_0 = \frac{1}{2}$. Con esto obtenemos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{O}(x_0, f) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\right\},$$

$$\mathcal{O}_-(x_0, f) = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\},$$

$$\mathcal{O}_{\pm}(x_0, f) = \left\{ \ldots, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots \right\}.$$

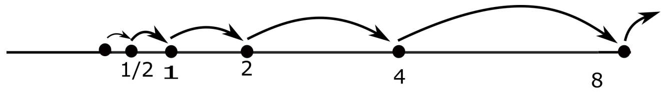


Figura 2.6: Órbita de $x_0 = \frac{1}{2}$ bajo $f(x) = 2x$ en la recta real.

La gráfica de $f(x) = 2x$ se muestra en la Figura 2.7, y se ve parte de la órbita de x_0.

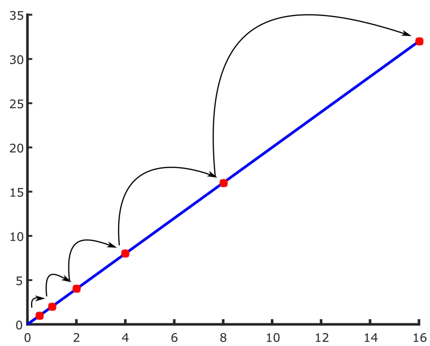


Figura 2.7: Órbita de $x = \frac{1}{2}$ bajo $f(x) = 2x$, $\mathcal{O}_{\pm}(x_0, f)$.

La influencia de una función sobre un punto y las características que éstos determinan, ha permitido que los puntos en los sistemas dinámicos se pueden clasificar. En la siguiente sección estudiamos algunos puntos que son útiles a nuestro trabajo.

Tipos de puntos

De acuerdo a las órbitas que describen los puntos bajo alguna función, existen diferentes tipos de puntos en los sistemas dinámicos discretos. En esta parte mostraremos algunos: *Puntos fijos, puntos periódicos y pre-periódicos*. Otros puntos interesantes son los *atractores* y *repulsores*, que más adelante abordaremos un poco.

Uno de los más importantes es el *punto fijo*, el cual es de mucha utilidad para el *análisis gráfico* de las órbitas (Sección 2.3). Vamos con el primer tipo de punto.

Punto fijo

Definición 2.2.7. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y x_0 un punto de X. Decimos que x_0 es ***punto fijo*** de f si $f(x_0) = x_0$. En este caso, la órbita de x_0 bajo f es un conjunto muy sencillo:

$$\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0, x_0, x_0, ...\},$$

que en realidad es el conjunto $\{x_0\}$ (ver la Figura 2.8). En este caso, notemos que, para cada natural n, se tiene que $f^n(x_0) = x_0$. Así, la órbita de x_0 bajo f tiende a x_0, cuando n tiende a infinito.

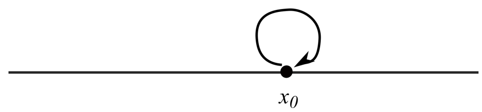


Figura 2.8: Órbita de x_0 bajo f representado en la recta real.

Para encontrar los puntos fijos de una función f es suficiente resolver la ecuación $f(x) = x$. Vayamos con algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x) = -x + 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observemos que $x_0 = 1$ es un punto fijo, ya que $f(1) = 1$. Luego, la órbita de x_0 es el siguiente conjunto, que además representamos en la Figura 2.9, (a):

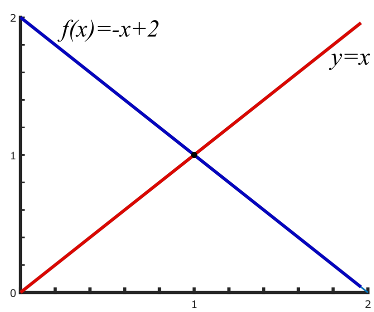
$$\mathcal{O}(1, f) = \{1\}.$$

Los puntos fijos no son únicos, puede haber más de uno. Veamos el siguiente ejemplo:

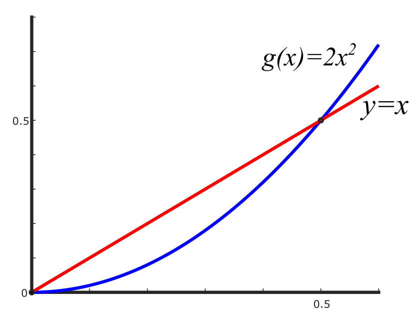
Ejemplo 2.2.9. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua definida por $g(x) = 2x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso, se tienen dos puntos fijos, $x_0 = 0$ y $x_1 = \frac{1}{2}$. Por lo que, sus respectivas órbitas son:

$$\mathcal{O}(0, g) = \{0\}.$$
$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{2}, g\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Geométricamente, los puntos fijos pueden ser encontrados examinando la intersección de la gráfica de la función f con la recta $y = x$. Los Ejemplos 2.2.8 y 2.2.9 se pueden visualizar en la Figura 2.9, (a) y (b).



(a) Gráfica de $f(x) = -x + 2$.



(b) Gráfica de $g(x) = 2x^2$

Figura 2.9: Observemos que la recta $y = x$ intersecta a las gráficas de $f(x) = -x + 2$ y $g(x) = 2x^2$, estas intersecciones marcan los puntos fijos de f y g, pues resuelven las ecuaciones $f(x) = x$ y $g(x) = x$, respectivamente. Observemos también que f tiene un solo punto fijo, mientras g tiene dos puntos fijo.

La teoría de los puntos fijos va mucho más allá de lo que hemos expuesto, para nosotros es suficiente para continuar con este trabajo.

Otro tipo de puntos muy importante son los *periódicos*. Estos puntos describen una órbita muy sencilla que además es finita. Lo más interesantes (para nosotros) está en saber la cantidad de elementos que tienen sus órbitas (que nosotros llamaremos *periodo*); por ejemplo, para saber que es suficiente que una función dada tiene un punto con una órbita de al menos tres elementos (*periodo* 3) para asegurar que existen órbitas de todos los *periodos*; es decir, podemos encontrar órbitas de 1, 2, 3, 4, 5,... elementos.

Puntos periódicos

En los sistemas dinámicos los puntos *periódicos* son sumamente importantes, ya que las órbitas de estos puntos contienen muchas propiedades que son relativamente sencillas de analizar, graficar y, además, dan pauta a resultados bastante interesantes que iremos exponiendo poco a poco.

Definición 2.2.10. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x_0 un punto de X. Decimos que x_0 es un ***punto periódico*** de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$.

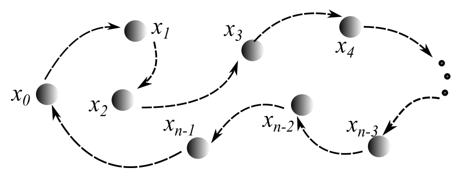


Figura 2.10: Órbita periódica de x_0 de periodo n.

Al conjunto de todos los puntos periódicos lo denotamos como $Per(f)$. Además, si x es un elemento de $Per(f)$, decimos que $\mathcal{O}(x, f)$ es una ***órbita periódica***.

Si x_0 es un punto periódico, decimos que x_0 tiene ***periodo*** k, si k es el menor natural para el cual $f^k(x_0) = x_0$; esto es:

$$k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

En algunas ocasiones se utiliza la siguiente notación, dado $n \in \mathbb{N}$:

$$Per_n(f) = \{x \in X : x \text{ es de periodo } n\}.$$

En este caso tenemos que:

$$Per(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Per_n(f).$$

De la Definición 2.2.10, se derivan las siguientes observaciones:

Observación 2.2.11. Todo punto fijo es periódico y su periodo es 1.

Observación 2.2.12. Si x_0 es un punto periódico de periodo n, entonces todos los puntos de $\mathcal{O}(x_0, f)$ también son periódicos de periodo n.

Observación 2.2.13. Si x es periódico y $y \in \mathcal{O}(x, f)$, entonces $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}(y, f)$.

Definamos ahora a los puntos *pre-periódicos*, los cuales están ligados a los puntos periódicos.

Definición 2.2.14. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x un punto de X. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x) \in Per(f)$, decimos que x es un ***punto pre-periódico*** de f. En este caso, también decimos que x tiene una ***órbita pre-periódica***. A estos puntos también se les llama ***eventualmente periódicos*** (ver Figura 2.12).

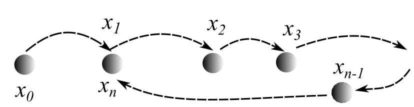


Figura 2.11: Órbita pre-periódica de x_0. Observemos que x_1 es periódico y su periodo, en este caso, es $n - 1$.

Vamos a aclarar estos conceptos con un ejemplo de un sistema dinámico discreto que contiene puntos de distintos periodos.

Ejemplo 2.2.15. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 3 - 3x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Observemos que $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$ son los puntos fijos de f. Por lo que, sus órbitas correspondientes son:

$$\mathcal{O}(0, f) = \{0\},$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{3}{4}, f\right) = \left\{\frac{3}{4}\right\},$$

Como hemos mencionado, las órbitas de estos puntos tienen periodo 1. Ahora, consideremos el punto $x = \frac{3}{10}$. Así, la órbita de x es:

$$\mathcal{O}\left(\frac{3}{10}, f\right) = \left\{\frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right\}.$$

En este caso estamos frente a una órbita de periodo 2. Tomemos los puntos $x = \frac{3}{28}$ y $x = \frac{3}{13}$; las órbitas correspondientes son:

$$\mathcal{O}\left(\frac{3}{28}, f\right) = \left\{\frac{3}{28}, \frac{9}{28}, \frac{27}{28}\right\}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{3}{13}, f\right) = \left\{\frac{3}{13}, \frac{9}{13}, \frac{12}{13}\right\}$$

Ahora tenemos órbitas que tienen periodo 3. Veamos qué sucede con los puntos $x = \frac{3}{40}$, $x = \frac{3}{82}$ y $x = \frac{21}{82}$:

$$\mathcal{O}\left(\frac{3}{40}, f\right) = \left\{\frac{3}{40}, \frac{9}{40}, \frac{27}{40}, \frac{39}{40}\right\},$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{3}{82}, f\right) = \left\{\frac{3}{82}, \frac{9}{82}, \frac{27}{82}, \frac{81}{82}\right\},$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{21}{82}, f\right) = \left\{\frac{21}{82}, \frac{63}{82}, \frac{57}{82}, \frac{75}{82}\right\}.$$

Observemos que estas tres órbitas son de periodo 4.

Hemos dado un ejemplo donde podemos encontrar órbitas de diferentes periodos (para más ejemplos se puede consultar [3], [7] y [8]). De hecho, este sistema dinámico discreto tiene órbitas de todos los periodos. Más adelante probamos que si f tiene una órbita de periodo 3, entonces f tiene órbitas de todos los periodos. Las siguientes proposiciones nos ayudan a demostrarlo. A partir de ahora representaremos el intervalo $[0,1]$ por I.

Resulta que las funciones estríctamente crecientes sólo tienen puntos de periodo 1. Veamos formalmente este resultado:

Proposición 2.2.16. Sea (I, f) un sistema dinámico discreto. Si f es estrictamente creciente, entonces f sólo puede tener puntos de periodo 1.

Demostración. Sea x un punto de I. Supongamos que $f(x) \neq x$ y $f^2(x) = x$. Supongamos también que $f(x) < x$. Luego, $f(f(x)) = f^2(x) < f(x)$. De aquí, $f^2(x) < x$, lo cual contradice la primera suposición. Ahora, supongamos que x tiene periodo $n > 1$; es decir, $f^n(x) = x$, en este caso, $f^j(x) \neq x$, para $0 < j < n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(x) < x$. En consecuencia, tenemos que $x = f^n(x) < f^{n-1}(x) < \cdots < f(x) < x$. Con lo cual llegamos a una contradicción. Por lo tanto, f sólo puede tener puntos de periodo 1. ■

Ejemplo 2.2.17. Las funciones de las gráficas de las Figuras 2.16 y 2.15 son ejemplos de la Proposición 2.2.16.

La Proposición 2.2.16 no se cumple para funciones decrecientes; esto lo podemos ver con un ejemplo:

Ejemplo 2.2.18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua definida como:

$$f(x) = 1 - x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Notemos que $x = \frac{1}{2}$ es un punto fijo. Ahora, observemos que cualquier otro punto, tiene periodo 2. Tomemos, por ejemplo $x_0 = \frac{3}{10}$; tiene periodo 2. La órbita de x_0 es:

$$\mathcal{O}\left(\frac{3}{10}, f\right) = \left\{\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right\}.$$

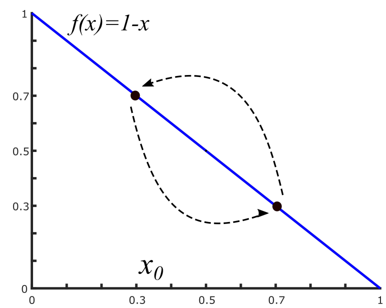


Figura 2.12: Órbita periódica de x_0. Los puntos marcados sobre la gráfica de la función f son puntos de la órbita de x_0, el cual tiene periodo 2. Las flechas marcan el cambio de posición del punto x_0 al iterar f.

La existencia de puntos de algunos periodos nos puede garantizar la existencia de otros puntos con diferentes periodos. Por ejemplo, si existe un punto de periodo 2, entonces sabemos que hay uno de periodo 1; o si tenemos uno de periodo 3, entonces existe uno de periodo 2. Más aún, si tenemos un punto de periodo 3, tenemos la garantía de que existen puntos de todos los periodos. Estos resultados los veremos en las Proposiciones 2.2.19, 2.2.22 y 2.2.23.

Proposición 2.2.19. Sea (I, f) un sistema dinámico discreto. Si f tiene un punto de periodo 2, entonces f tiene un punto de periodo 1.

Demostración. Supongamos que f tiene un punto de periodo dos y sean x_1, $x_2 \in I$, con $x_1 \neq x_2$ tal que $\mathcal{O}(x_1, f) = \{x_1, x_2\}$. Esto significa que $f(x_1) = x_2$ y $f(x_2) = x_1$. Supongamos que $x_1 < x_2$. De aquí, $x_1 < f(x_1)$ y $f(x_2) < x_2$, de donde $0 < f(x_1) - x_1$ y $f(x_2) - x_2 < 0$. Es decir, $f(x_2) - x_2 < 0 < f(x_1) - x_1$. Sea $g : I \to I$ definida por $g(x) = f(x) - x$, para todo $x \in I$. Notemos que g es continua en I. Además, $g(x_2) < 0 < g(x_1)$. Utilizando el Teorema del Valor Medio [14], sabemos que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $g(c) = 0$. En consecuencia, $f(c) - c = 0$. Con esto, $f(c) = c$. Esto significa que c es un punto fijo. Luego, $\mathcal{O}(c, f) = \{c\}$. Por lo tanto, c es un punto de periodo 1. ∎

Proposición 2.2.20. Sea $f : I \to I$ una función continua. Consideremos a y b puntos de I tales que $a < b$ y $[a, b] \subseteq I$. Si $[a, b] \subseteq f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Supongamos que $[a,b] \subseteq f([a,b])$. De aquí, existen x_1 y $x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) = a$ y $f(x_2) = b$. Notemos que $x_1 \neq x_2$. Supongamos que $x_1 < x_2$. Así, $f(x_1) = a \leq x_1 < x_2 \leq b = f(x_2)$. Si $f(x_1) = x_1$ ó $f(x_2) = x_2$, se tiene el resultado. Supongamos que $f(x_1) < x_1 < x_2 < f(x_2)$. Así, $f(x_1) < x_1$ y $x_2 < f(x_2)$. De aquí, $f(x_1) - x_1 < 0$ y $0 < f(x_2) - x_2$. Definimos $g : I \to I$ tal que $g(x) = f(x) - x$, para todo $x \in I$. Notemos que g es continua en I y $g(x_1) < 0 < g(x_2)$. Por el Teorema del Valor Intermedio [14], existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $g(c) = 0$. Se sigue que $f(c) - c = 0$; es decir, $f(c) = c$. Por lo tanto, f tiene un punto fijo. ■

La prueba de la siguiente Proposición la podemos encontrar en [3]

Proposición 2.2.21. Sean $f : I \to I$ una función continua y $[a,b]$ y $[c,d]$ intervalos contenidos en I. Si $[c,d] \subseteq f([a,b])$, entonces existe un intervalo $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ tal que $f([\alpha,\beta]) = [c,d]$

Proposición 2.2.22. Sean A un subintervalo de $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua en A. Si f tiene una órbita de periodo 3, entonces f tiene una órbita de periodo 2.

Demostración. Sean a, b y c puntos de A tales que $\mathcal{O}(a,f) = \{a,b,c\}$, donde $a < b < c$. Se tienen los siguientes 2 casos:

Caso (1): $f(a) = b, f(b) = c$ y $f(c) = a$,
Caso (2): $f(a) = c, f(b) = a$ y $f(c) = b$.

Consideremos el Caso (1). Sean $I = [a,b]$ y $J = [b,c]$. Notemos que $[b,c] \subseteq f(I)$; esto es que $J \subseteq f(I)$. Notemos también que $[a,c] \subseteq f(J)$ y puesto que $I \cup J = [a,c]$, obtenemos que $I \cup J \subseteq f(J)$. Como $I \subseteq f(J)$, existe un subintervalo $A_1 \subseteq J$ tal que $f(A_1) = I$, esto último por la Proposición 2.2.21. Observemos que:

$$A_1 \subseteq J \subseteq I \cap J \subseteq f(J).$$

Luego, existe otro subintervalo $A_2 \subseteq I$ tal que $f(A_2) = A_1$. De donde $f^2(A_2) = f(f(A_2)) = f(A_1) = I$. En consecuencia, $A_2 \subseteq f^2(A_2)$. De aquí, existe $x_0 \in A_2$ tal que $f^2(x_0) = x_0$. Veamos que x_0 es de periodo 2. Para esto, basta verificar que $f(x_0) \neq x_0$. Supongamos que $f(x_0) = x_0$. Notemos que $x_0 \in I$ y $f(x_0) \in A_1 \subseteq J$. Así, $f(x_0) \in I \cap J$, por que $x_0 = f(x_0) = b$; es decir, $f(b) = b$, lo cual es una contradicción, pues $f(b) = c$. Por lo tanto, x_0 tiene periodo 2.

El procedimiento para el Caso (2) es análogo. ■

Proposición 2.2.23. Sean A un subintervalo de $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua en A. Si f tiene órbita de periodo 3, entonces f tiene órbitas de todos los periodos.

Demostración. Sean a, b y c puntos de A tales que $\mathcal{O}(a,f) = \{a,b,c\}$, donde $a < b < c$. Se tiene los siguientes casos:

Caso 1: $f(a) = b, f(b) = c$ y $f(c) = a$,
Caso 2: $f(a) = c, f(b) = a$ y $f(c) = b$.

Consideremos el Caso 1. Sean $I = [a, b]$ y $J = [b, c]$ Notemos que $J \subseteq f(I)$ y $I \cup J \subseteq f(J)$. Como $I \subseteq f(J)$, existe un subintervalo $A_1 \subseteq J$ tal que $f(A_1) = I$, esto último por la Proposición 2.2.21. Puesto que:

$$A_1 \subseteq J \subseteq I \cap J \subseteq f(J),$$

existe otro subintervalo $A_2 \subseteq J$ tal que $f(A_2) = A_1$. Así,

$$A_2 \subseteq J \subseteq I \cap J \subseteq f(J),$$

por lo que, existe $A_3 \subseteq J$ tal que $f(A_3) = A_2$.

De manera inductiva, tenemos que :

$$A_{n-2} \subseteq J \subseteq I \cap J \subseteq f(J),$$

por lo que, existe $A_{n-1} \subseteq J$ tal que $f(A_{n-1}) = A_{n-2}$. Como:

$$A_{n-1} \subseteq J \subseteq f(I),$$

existe un subintervalo $A_n \subseteq I$ tal que $f(A_n) = A_{n-1}$. Notemos que $A_n \subseteq I$ y $f^n(A_n) = I$. Así, $A_n \subseteq f^n(A_n)$. Por la Proposición 2.2.20, existe $x_0 \in A_n$ tal que $f^n(x_0) = x_0$.

Veamos que x_0 es de periodo n. Para esto, basta verificar que $f^i(x_0) \neq x_0$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Supongamos que existe $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ tal que $f^k(x_0) = x_0$. Pero $x_0 \in I$ y $f^k(x_0) \in J$. Se sigue que $x_0 = f^k(x_0) = b$; es decir, $f^k(b) = b$, lo cual es una contradicción, pues $f^k(b) \neq b$. Por lo tanto, x_0 tiene periodo n.

Para el caso 2 el procedimiento es similar. ■

Existen otros resultados interesante y muchas preguntas acerca de la relación que tienen los puntos periódicos de las funciones. Para nosotros es suficiente con lo que hemos mostrado, pues ya tenemos una noción más amplia de qué es un sistema dinámico discreto. Para ver otros resultados, pueden consultar [3] y [8].

Además de los puntos periódicos, pre-periódicos y fijos, existen otros puntos bastante útiles para el *análisis de las órbitas*; éstos están íntimamente ligados con los puntos fijos. Nos referimos a los puntos fijos *atractores* y *repulsores*.

Puntos fijos atractores y repulsores

En las siguientes definiciones se muestran algunas propiedades que tienen ciertos puntos, los cuales son sumamente importantes pues se puede obtener información sobre la dinámica inducida por las iteraciones de la función f en un intervalo abierto que contiene al punto.

Definición 2.2.24. Sean x_0 un punto fijo en el espacio métrico X y $f : X \to X$ una función continua. Definimos lo siguiente:

a) Se dice que x_0 es ***un punto fijo atractor*** o ***sumidero*** si existe $r > 0$ tal que para todo $x \in B(x_0, r)$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0.$$

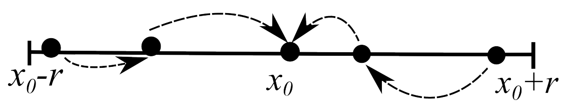


Figura 2.13: Punto fijo atractor.

b) El punto x_0 es ***un punto fijo repulsor*** o ***fuente*** si existe $r > 0$ tal que para cada $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(x) \notin B(x_0, r).$$

La Figura 2.14, muestra la dinámica de un punto repulsor:

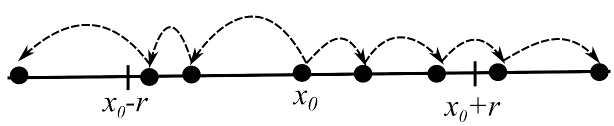


Figura 2.14: Punto fijo repulsor.

c) Cuando x_0 no es *punto fijo repulsor* ni *punto fijo atractor* se dice que x_0 es ***un punto indiferente***.

Veamos dos ejemplos de sistemas dinámicos donde se presetan los primeros dos casos.

Ejemplo 2.2.25. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, definida como $f(x) = \alpha x$, donde $0 < \alpha < 1$. El punto fijo para esta función está en 0, este punto es un punto atractor. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de las órbitas alrededor de 0, para el caso en que $\alpha = \frac{1}{3}$:

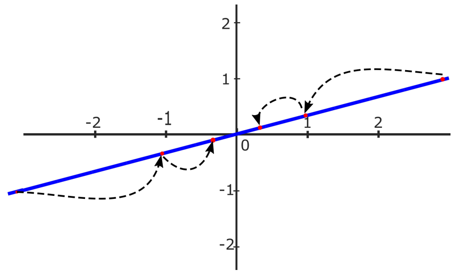


Figura 2.15: Análisis del comportamiento atractor del punto $x = 0$, como punto fijo de la función $f(x) = \frac{1}{3}x$. En este caso, se muestran los comportamientos de los puntos x =-3.1 y x =2.9, donde las órbitas se acercan cada vez más al punto 0.

Ejemplo 2.2.26. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, definida como:

$$f(x) = \beta x,$$

con $\beta > 1$. En este caso el punto fijo es 0, y es un punto fijo repulsor. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de las órbita de los puntos alrededor del punto 0, para el caso $\beta = 3$.

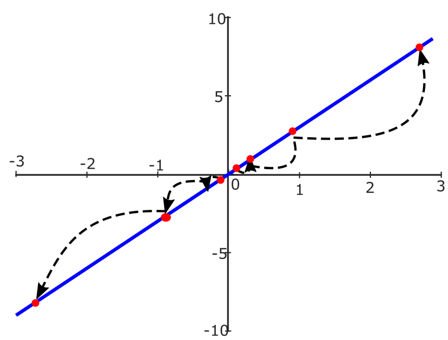


Figura 2.16: Dinámica del punto repulsor $x = 0$ como punto fijo de la función $f(x) = 3x$. Esta gráfica muestra el comportamiento de las órbitas de los puntos $x = -0.1$ y x =0.1, donde las órbitas se escapan del 0.

Existe una fuerte relación entre los puntos fijos atractor o repulsor y la derivada de la función f, en el caso en que f sea una función real de una variable. La siguiente proposición nos muestra tal relación (la demostración se puede consultar en [3]):

Proposición 2.2.27. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$, $f : A \to A$ una función y x_0 un punto fijo. Supongamos que f es derivable en A y f' es continua en A. Se sigue que:

(a) Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.

(b) Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.

En el Ejemplo 2.3.4, podemos ver cómo se aplica y la utilidad de la Proposición 2.2.27.

Es indiscutible la importancia y la gran utilidad de las gráficas para la visualización y el entendimiento de las sistemas dinámicos discretos. Hasta ahora nos hemos apoyado de la gráfica de la función, de algunos puntos que se mueven a través de élla y de flechas para indicar el movimiento; sin embargo, existe un método más formal para el análisis de órbitas apoyándonos de la gráfica de la función dada y de la identidad. Cabe mencionar que este método es limitado, pues algunas veces nos enfrentamos con órbitas que se escapan a las posibilidades del método (computacionalmente hablando). Dedicaremos la siguiente sección al análisis, a través de gráficas, de las órbitas.

2.3. Análisis gráfico de órbitas

En esta sección introducimos un proceso geométrico que nos ayudará a entender la dinámica de las órbitas de puntos en un espacio a través de la gráfica de una función real de una variable. Este proceso es llamado ***Análisis gráfico***, nos permite entender visualmente el movimiento de un punto a través de la gráfica de una función dada y la gráfica de la función identidad. Es importante mencionar que este método sólo sirve para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Veamos cómo funciona.

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y x_0 un punto de $\mathbb{R}$. Supongamos que queremos analizar el comportamiento de la órbita de x_0. Para lograr tal objetivo, analizamos el comportamiento de la gráfica de f y la gráfica de función identidad, siguiendo los siguientes pasos:

1) En primer lugar, dibujamos la gráfica de f y la gráfica de la identidad. Hasta aquí, todo muy fácil.

2) Luego, ubicamos el lugar de partida de nuestro recorrido, el cual es $(x_0, 0)$ y hallamos el valor de $f(x_0)$ marcando el punto $(x_0, f(x_0))$ (notemos que estamos sobre la gráfica de f). En seguida trazamos el segmento que va de $(x_0, 0)$ a $(x_0, f(x_0))$ y marcamos con una flecha. Observemos que este segmento es paralelo al eje y.

3) Ahora, sobre la gráfica de la identidad, marcamos el punto $(f(x_0), f(x_0))$ y trazamos el segmento que va de $(x_0, f(x_0))$ a $(f(x_0), f(x_0))$ y marcamos con una flecha; este último segmento es paralelo al eje x.

4) De aquí, evaluamos f en $f(x_0)$; es decir, $f(f(x_0)) = f^2(x_0)$, y marcamos la posición de $(f(x_0), f^2(x_0))$. Así, unimos el segmento que va de $(f(x_0), f(x_0))$ a $(f(x_0), f^2(x_0))$ y dibujamos una flecha. De nuevo, hemos obtenido un segmento paralelo al eje y. Del último punto nos dirigimos al punto $(f^2(x_0), f^2(x_0))$ y luego a $(f^2(x_0), f^3(x_0))$ y así sucesivamente cuantas veces sean necesarias (y posibles).

Al resultado que obtenemos de este proceso se le llama ***red de araña*** o ***diagrama cobweb***. Para ejemplificar este proceso, comenzaremos por funciones sencillas y luego trataremos funciones un poco más complejas. Lo más interesante de este análisis surge cuando se trabaja con puntos particulares tales como: puntos fijos, periódicos, pre-periódicos, puntos con órbitas densas, entre otros.

Ejemplo 2.3.1. Sean $A = [-3, 3]$ y $f : A \to A$ la función continua definida por $f(x) = \cos(x)$, para todo $x \in A$, y consideremos a $y : A \to A$ como la función identidad.

Observemos que el punto fijo para esta función está en el punto 0.7391. Tomemos $x_0 = -2$. La órbita de x_0 es la siguiente:

$$\mathcal{O}(-2, f) = \{-2,\ \text{-0.4161},\ 0.9147,\ 0.6101, \ldots\}.$$

De acuerdo al proceso mencionado para el análisis gráfico, el punto $(x_0, 0)$ es el punto de partida. Veamos el resultado:

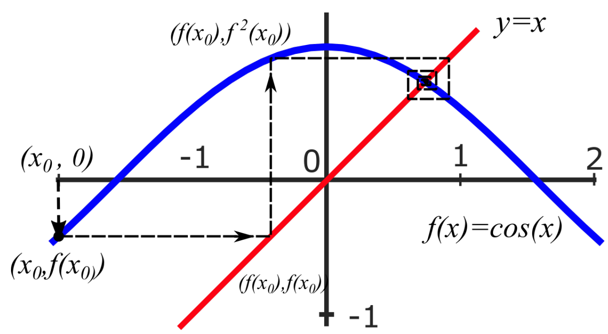


Figura 2.17: Anális gráfico de la órbita del punto $x_0 = -2$ bajo la función $f(x) = \cos(x)$.

Notemos en la Figura 2.17, que la órbita del punto $x_0 = -2$ se acerca cada vez más al punto fijo $x = 0.73908$.

Ejemplo 2.3.2. Sean $A = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, $y : A \to A$ como la identidad y $f : A \to A$ la función continua definida como:

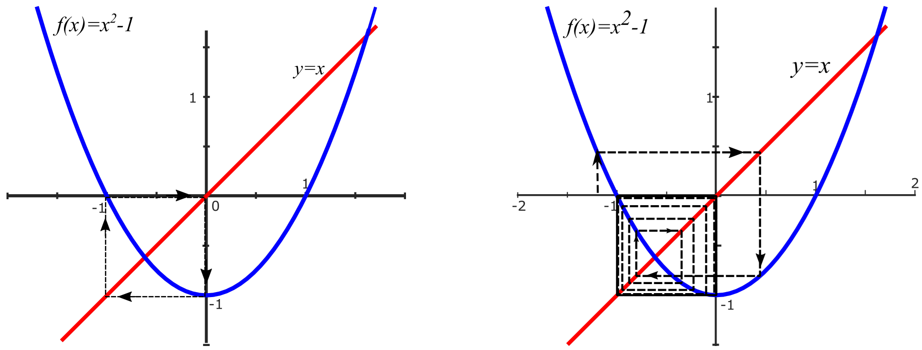
$$f(x) = x^2 - 1, \text{ para todo } x \in A.$$

En este caso tenemos dos puntos fijos: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Consideremos los puntos $x_0 = -1$ y $x_1 = -1.2$; sus respectivas órbitas son:

$$\mathcal{O}(-1, f) = \{-1, 0\},$$

$$\mathcal{O}(-1.2, f) = \{\text{-1.2, 0.44, -0.8064, -0.3497,-0.8777}, \ldots\}.$$

En la Figura 2.18, se muestran las órbitas de x_0 y x_1:



(a) órbita de x_0 =-1 (b) órbita de x_1 =-1.2

Figura 2.18: Análisis gráfico de las órbitas de -1 y -1.2, bajo la función $f(x) = x^2 - 1$. Observemos que el primer punto tiene una órbita de periodo 2, mientras que el otro punto tiene una órbita de periodo mayor que 2.

Existen casos donde las órbitas de los puntos son densas. A continuación se mostrará un ejemplo en la función llamada *Logística*, la cual más adelante la vamos a analizar de manera más minuciosa:

Ejemplo 2.3.3. Sean $A = [0, 1]$, $f : A \to A$ y $g : A \to A$ funciones continuas, donde g es la función identidad y f se define como:

$$f(x) = 4x(1 - x), \text{ para todo } x \in A.$$

Esta función tiene dos puntos fijos, $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$. En este caso vamos a considerar un punto con órbita densa, x_0 =0.1. La Figura 2.19, muestra la órbita de x_0:

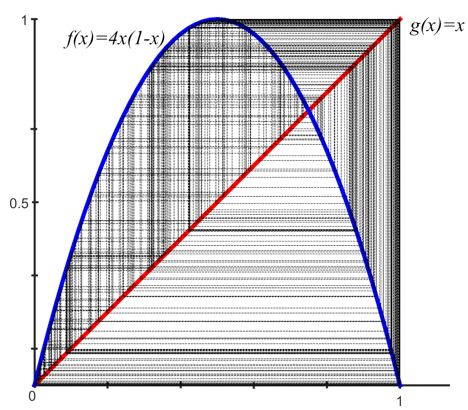


Figura 2.19: Anális gráfico de la órbita del punto $x_1 = 0.1$ en la función $f(x) = 4x(1-x)$. En este caso el punto x_1 tiene una órbita densa.

Consideremos un último ejemplo, en el cual retomamos la Definición 2.2.24 y hacemos uso de la Proposición 2.2.27.

Ejemplo 2.3.4. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x) = 2x - 2x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Los puntos fijos de f en este caso son: 0 y $\frac{1}{2}$. Derivando la función, tenemos que $f'(x) = 2 - 4x$. Notemos que $f'(0) = 2$ y $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. De acuerdo a la Proposición 2.2.27, inciso (a), 0 es un punto fijo atractor, mientras que, por el inciso (b) de la misma proposición, $\frac{1}{2}$ es un punto fijo repulsor. El análisis grafico se muestra en la Figura 2.20:

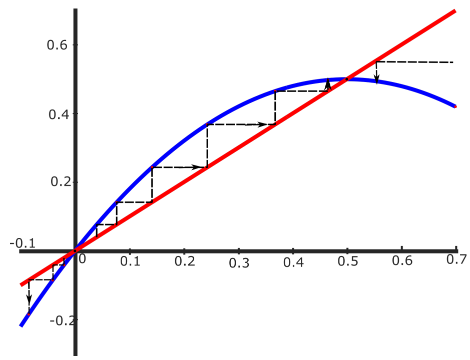


Figura 2.20: Dinámica de las órbitas de los puntos alrededor del punto 0 y $\frac{1}{2}$ bajo la función $f(x) = 2x - 2x^2$.

En la siguiente sección haremos un breve estudio de dos funciones que son de gran importancia para los sistemas dinámicos, no sólo por sus propiedades dinámicas, sino por sus aplicaciones [3] y [9]; nos referimos a la *función tienda* y la *función logística*. El análisis gráfico que hemos estudiado, será de gran utilidad para el estudio de estas funciones.

2.4. La función tienda y la logística

La función tienda

La *tienda* (llamada así por la forma de su gráfica) es una de las funciones continuas más importantes dentro del área de los sistemas dinámicos discretos debido a sus bastas propiedades dinámicas. En esta sección se estudian algunas de esas propiedades. El análisis gráfico en esta sección es de gran utilidad. Veamos cómo se define esta función:

Definición 2.4.1. Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La función T es conocida como ***función tienda***.

La gráfica de esta función en el intervalo $[0, 1]$, se muestra en la Figura 2.21. Aunque la función tienda tiene una forma muy sensilla de visualizar, el sistema dinámico que induce es bastante complejo (en algunos casos) e interesante.

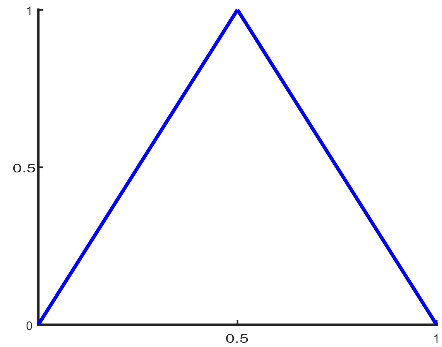


Figura 2.21: Función tienda en el intervalo $[0,1]$.

Lo más interesante para nosotros ocurre en el intervalo $[0,1]$, pues si tomamos un punto x fuera $[0,1]$, $\mathcal{O}(x,T)$ siempre tiende a $-\infty$. Por otro lado, si x está en $[0,1]$ la órbita de x siempre se queda atrapada en ese intervalo; esto nos lleva a pensar que los puntos fijos, periódicos, atractores, repulsores, etc., se encuentran en dicho intervalo. Veamos estos resultados formalmente, pero antes establezcamos algunas observaciones con respecto T.

Observación 2.4.2. Sea $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función tienda y x un punto de $\mathbb{R}$:

1. Si $x<0$, entonces $\mathcal{O}(x,T)$ es una sucesión decreciente. Además, $\lim_{n\to\infty} T^n(x)=-\infty$.

2. Si $x>1$, entonces $T(x)<0$. En este caso también, se tiene que $\lim_{n\to\infty} T^n(x)=-\infty$.

3. Si $x\in[0,1]$, entonces $T(x)\in[0,1]$. Más aún, $T^n(x)\in[0,1]$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

4. Para todo $x\in[0,1], |T'(x)|=2$.

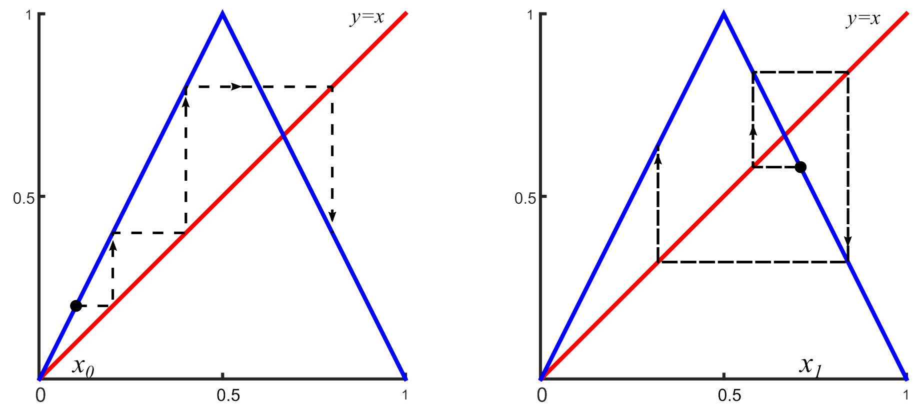
5. T es diferenciable, para toda $x\in[0,1]\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

De aquí en adelante nos enfocamos en el estudio de las órbitas de T que inician en puntos del intervalo $[0,1]$; es decir, nos restringiremos al estudio de T en el intervalo $[0,1]$, esto es $T:[0,1]\to[0,1]$.

La primera parte importante es hallar los puntos fijos de T. Sea $x\in[0,1]$. Resolvamos la ecuación $T(x)=x$ para hallar los puntos fijos. Puesto que T está definida en dos intervalos, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2},1\right]$, tenemos dos casos. Si $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, se tiene el caso $T(x)=2x$. Por lo tanto, $2x=x$. De aquí, se obtiene que $x=0$ es un punto fijo. Si $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, se tiene el $T(x)=2-2x$, es decir, $2-2x=x$, de donde se obtiene que $x=\frac{2}{3}$ es punto fijo. Observemos que estos puntos son los únicos puntos fijos de T.

En resumen, tenemos que $0\in Per(T)$ y $\frac{2}{3}\in Per(T)$. Por lo tanto, $Per(T)$ no es vacío.

Los puntos fijos de la función tienda son repulsores ambos. Ésto lo podemos verificar usando la Proposición 2.2.27. Observemos que $T'(0)=2$ y $T'(\frac{2}{3})=-2$, por lo que $|T'(0)|>1$ y $|T'(\frac{2}{3})|>1$. En las gráficas de la Figura 2.22, se pueden observar las óbitas de $x_0=$0.1 y $x_1=$0.71.



(a) órbita de x_0 =0.1 (b) órbita de x_1 =0.71

Figura 2.22: Análisis gráfico de los puntos fijos 0 y $\frac{2}{3}$ y las órbitas de los puntos x_0 =0.1 y x_1 =0.71.

Observemos que los puntos fijos, que son los puntos marcados por la intersección de las gráficas de la función T y de la función identidad, son ambos repulsores. En la Figura 2.22, se puede ver que las órbitas del punto x_0 =0.1 se aleja de $x = 0$, el cual es fijo. Así también, el punto x_1 =0.71, se aleja del punto $x = \frac{2}{3}$, que también es fijo. Vayamos a otro caso.

En la Sección 2.2, hemos visto que los puntos fijos son puntos de periodo uno. Ahora veamos algunos puntos de periodo dos. Observemos que $x_0 = \frac{2}{5}$ es punto de periodo 2 y su órbita es la siguiente:

$$\mathcal{O}\left(\frac{2}{5}, f\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Al obtener la órbita de $\frac{2}{5}$, hemos conseguido un nuevo punto de periodo dos, este es el punto $\frac{4}{5}$. Observemos que $\mathcal{O}\left(\frac{2}{5}, f\right) = \mathcal{O}\left(\frac{4}{5}, f\right)$. La Figura 2.23 ilustra la órbita de $\frac{2}{5}$, que también es parte de la órbita de $\frac{4}{5}$.

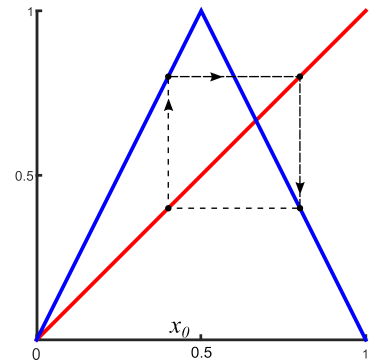


Figura 2.23: Análisis gráfico del punto $x_0 = \frac{2}{5}$. En este caso, la órbita de x_0 es de periodo 2.

De aquí podemos observar lo siguiente:

Observación 2.4.3. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si x es un punto periódico de f de periodo n, entonces cada punto de la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es también un punto periódico de periodo n.

Por otro lado, la función T también tiene un punto con periodo 3, $x_0 = \frac{2}{9}$. Veamos esta órbita:

$$\mathcal{O}\left(\frac{2}{9}, f\right) = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}.$$

Como hemos observado, los puntos $\frac{4}{9}$ y $\frac{8}{9}$ también son puntos de periodo 3 y sus órbitas coiciden. La Figura 2.24, muestra la dinámica del punto x_0:

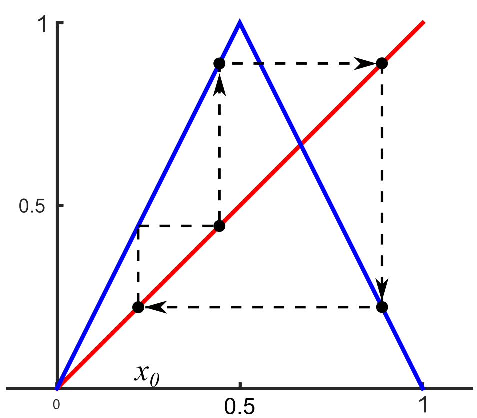


Figura 2.24: Análisis gráfico del punto $x_0 = \frac{2}{9}$. En este caso, la órbita de x_0 es de periodo 3.

Podemos ir más allá. Resulta que la función T tiene puntos de todos los periodos; es decir, la tienda es un ejemplo de la Proposición 2.2.23. Veamos la siguiente proposición:

Proposición 2.4.4. La función tienda, $T : [0, 1] \to [0, 1]$, tiene órbitas periódicas de todos los periodos.

Demostración. El punto $x_0 = \frac{2}{9}$ es de periodo 3. Por lo tanto, por la Proposición 2.2.23, T tiene puntos periódicos de periodo n, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

De aquí se desprende la siguiente observación:

Observación 2.4.5. El $Per(T)$ tiene cardinalidad infinita.

Existe puntos con órbitas muy grandes. La Figura 2.25, muestra sólo una parte de la órbita del punto x_0 =0.002.

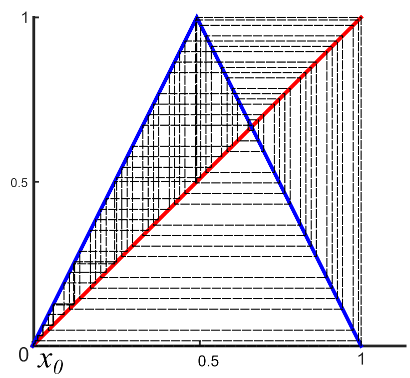


Figura 2.25: Análisis gráfico del punto x_0 =0.002.

Observemos que la gráfica de la función tienda restringida al intervalo $[0, 1]$ está formada por dos segmentos de recta como se muestra en la Figura 2.21. Uno de ellos está sobre el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, mientras que el otro está en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, con pendientes 2 y -2 respectivamente. La Figura 2.21 muestra la gráfica.

Considerando la composición $T \circ T = T^2$, se observa que está compuesta por cuatro segmentos en los intervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, donde cada segmento tiene pendiente 2^2 y $-(2^2)$, alternadamente.

En este caso, $T^2 : [0, 1] \to [0, 1]$ está definida como:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ -4\left(x - \frac{1}{2}\right) & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ 4\left(x - \frac{1}{2}\right), & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ -4(x - 1), & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]. \end{cases}$$

La función T^2 es continua en $[0, 1]$. La Figura 2.26 nos muestra la gráfica de T^2:

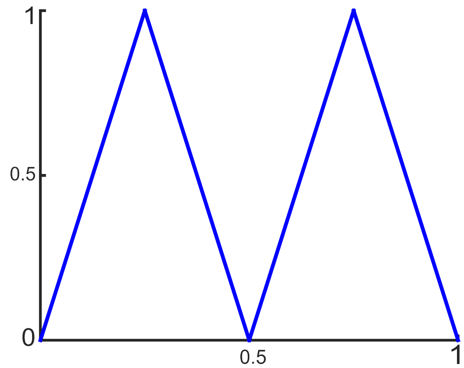


Figura 2.26: Gráfica de la función T^2 en el intervalo $[0,1]$

En el caso de $T^3 : [0,1] \to [0,1]$, el intervalo $[0,1]$ es dividido en 2^3 subintervalos, donde cada subintervalo está definido por $\left[\frac{l}{2^3}, \frac{l+1}{2^3}\right]$ con $l \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. En cada subintervalo, los segmentos que forman la función tiene una pendiente de 2^3 y $-(2^3)$, alternadamente.

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x, & x \in \left[0, \frac{1}{8}\right]; \\ -8\left(x - \frac{1}{4}\right), & x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]; \\ 8\left(x - \frac{1}{4}\right), & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]; \\ -8\left(x - \frac{1}{2}\right), & x \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]; \\ 8\left(x - \frac{1}{2}\right), & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]; \\ -8\left(x - \frac{3}{4}\right), & x \in \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]; \\ 8\left(x - \frac{3}{4}\right), & x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]; \\ -8(x-1), & x \in \left[\frac{7}{8}, 1\right]. \end{cases}$$

La función T^3 es continua en $[0,1]$. La gráfica de T^3 se muestra en la Figura 2.27:

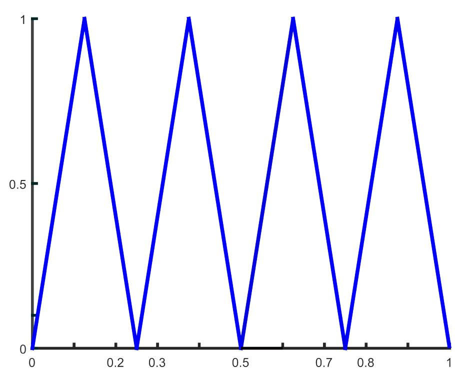


Figura 2.27: Gráfica de la función T^3 en el intervalo $[0,1]$

De manera general, cuando tomamos la composición T^n el intervalo es dividido en

2^n subintervalos, donde los segmentos que forman a T^n tienen pendientes 2^n y $-(2^n)$ alternadamente.

De manera inductiva, se puede ver que la función

$$T^n|_{\left[\frac{l}{2^n},\frac{l+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{l}{2^n},\frac{l+1}{2^n}\right] \to \left[\frac{l}{2^n},\frac{l+1}{2^n}\right]$$

es un homeomorfismo. Esta afirmación se prueba en el Capítulo 3. Además, se prueba una propiedad muy importante para este trabajo, la *transitividad* de T.

La familia de funciones logísticas

Una de las funciones típicas estudiadas dentro de la dinámica de funciones es la *logística*. Aunque esta función es muy sencilla, engloba una gran cantidad de propiedades de sus puntos, sobre todo en el intervalo $[0,1]$, tantos como la función tienda. De hecho, en el Capítulo 3, retomamos estas funciones, la tienda y la *logística*, para estudiar propiedades que comparten.

Definición 2.4.6. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : [0,1] \to [0,1]$ la función definida por:

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \quad \text{para todo } x \in [0,1].$$

Esta función es llamada ***función logística***.

A continuación se muestran las gráficas de la logísticas en el intervalo $[0,1]$ para los casos $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$ y $\lambda_5 = 0.5$:

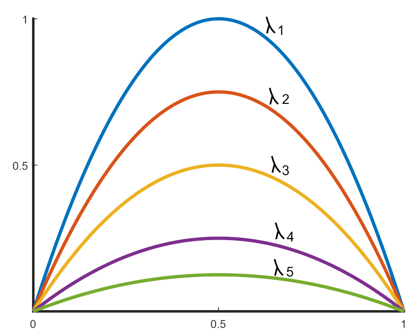


Figura 2.28: Gráfica de la función logística en el intervalo $[0,1]$ para los casos $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$ y $\lambda_5 = 0{,}5$.

A continución mostramos algunas propiedades de f_λ:

Observación 2.4.7. Sea $f_\lambda : [0,1] \to [0,1]$, la función logística. Se tiene las siguientes propiedades:

1. Se tiene que f_λ es continua en $\mathbb{R}$.
2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $f_\lambda(0) = f_\lambda(1) = 0$.
3. Se tiene que $f'(x) = \lambda(1 - 2x)$.
4. La máxima altura de f_λ se alcanza en $x = 1/2$.
5. Si $\lambda > 1$ y $x < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_\lambda^n(x) = -\infty$.
6. Si $\lambda > 1$ y $x > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_\lambda^n(x) = -\infty$.
7. Si $0 < \lambda < 1$ y $x \in (0, 1)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_\lambda^n(x) = 0$.
8. Si $0 < \lambda < 4$ y $x \in (0, 1)$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_\lambda^n(x) = 0$.

La demostración de esta observación y otras propiedades de la función logística, se pueden consultar en [11].

Lo más interesante de esta función, igual que en el caso de la función tienda, considerando el estudio de las órbitas de los puntos, se encuentran en el intervalo $[0, 1]$ y considerando $0 < \lambda \leq 4$.

En lo que sigue, analizamos los puntos fijos de f_λ. Si consideramos los puntos fijos de f_λ debemos considerar aquellos puntos que satisfacen la ecuación $-\lambda x^2 + (\lambda - 1)x = 0$. De aquí, los puntos fijos de f_λ son $x = 0$ y $x_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Además, debemos observar que $f_\lambda'(x) = \lambda$ y $f_\lambda'(x_\lambda) = 2 - \lambda$.

Existe una propiedad llamada *conjugación topológica*, a través de la cuál se puede determinar la equivalencia de funciones. Esta propiedad la estudiamos en el Capítulo 3; veremos que la función tienda es equivalente a la función logística en el caso $\lambda = 4$; por esta razón, ahora nos enfocamos en este caso en lo que sigue de esta sección. Esta sección es breve, puesto que retomamos el estudio de la logística en el siguiente capítulo. A continuación hacemos un análisis gráfico de algunas órbitas.

Definimos a $L(x) = 4x(1-x)$, a la función logística para el caso $\lambda = 4$. Al igual que la función tienda, la logística tiene puntos con órbitas de todos los periodos. Vayamos poco a poco. Observemos, primero, que los puntos fijos son 0 y $\frac{3}{4}$; con esto tenemos que:

$$\mathcal{O}(0, f) = \{0\},$$
$$\mathcal{O}\left(\frac{3}{4}, f\right) = \left\{\frac{3}{4}\right\}.$$

Utilizando la Proposición 2.2.27, podemos determinar que los puntos fijos, 0 y $\frac{3}{4}$, son ambos repulsores.

Recordemos que los puntos fijos son puntos de periodo uno. Por otro lado, el punto $x_0 = 0.3455$ es un punto de periodo 2 y el punto $x_1 = 0.4132$ es un punto de periodo 3. En seguida se muestran las órbitas correspondientes y sus gráficas:

$$\mathcal{O}(0{,}3455, f) = \{0.3455,\ 0.9045\},$$

$$\mathcal{O}(0{,}1170, f) = \{0.1170,\ 0.4132,\ 0.9699\}.$$

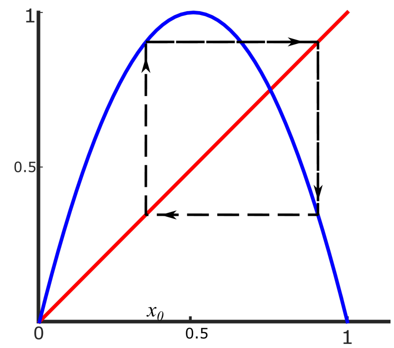


Figura 2.29: Gráfica de la órbita del punto x_0 =0.3455, bajo la función logística, que tiene periodo 2.

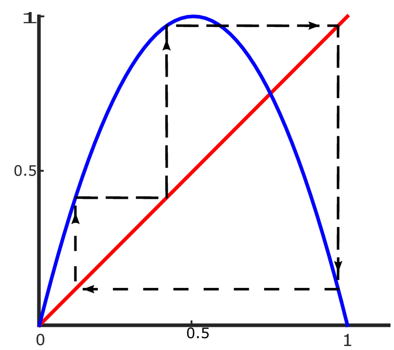


Figura 2.30: Gráfica de la órbita del punto x_0 =0.3455, bajo la función logística, que tiene periodo 3.

Hemos obtenido puntos de periodo 1, 2 y 3. Por la Proposición 2.2.23, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.4.8. La función logística, $L : [0, 1] \to [0, 1]$, tiene órbitas periódicas de periodo n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hallar puntos de periodos grandes es una tarea complicada en muchos casos. Veamos el caso para el punto x_1 =0.1. La Figura 2.19, muestra parte de la órbita de x_1.

Vayamos a otros conceptos. En la Sección 2.2, nos hemos referido a la órbita de un punto como *dinámica individual* o *puntual*; ahora si consideramos órbitas sobre conjuntos de puntos, surgen nuevas definiciones y propiedades distintas.

2.5. Conjuntos invariantes

En esta sección estudiamos órbitas sobre conjuntos que serán de suma importancia en el Capítulo 4. Definimos nuevos conjuntos tales como: *conjuntos +invariantes*, *-invariantes* e *invariantes* bajo alguna función, también se definen las órbitas sobre conjuntos (como hemos mencionado) y se demuestran algunas propiedades que surgen al interactuar con éstas. Además, aparece el concepto de *conjunto omega límite* y se muestran algunas de sus propiedades.

Definición 2.5.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Se define lo siguiente:

1) Sea A un subconjunto de X. Se dice que A es ***+invariante*** bajo f si $f(A) \subset A$. En otro caso, si A cumple que $f^{-1}(A) \subset A$, se dice que A es ***-invariante*** bajo f. Finalmente, si $f(A) = A$, el conjunto A es llamado simplemente ***invariante*** bajo f.

   Es importante mencionar que, a menos que no sea claro bajo qué función estas propiedades se cumplen, se dirá simplemente que A es +invariante, -invariante o invariante.

2) Sea A un subconjunto de X. Se denotan y definen los conjuntos:

   a) La ***órbita futura de A*** bajo f:

   $$\mathcal{O}(A, f) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}(x, f).$$

   b) La ***órbita pasada de A*** bajo f:

   $$\mathcal{O}_-(A, f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(A).$$

   c) La ***órbita de A*** bajo f: $\mathcal{O}_\pm(A, f) = \mathcal{O}(A, f) \cup \mathcal{O}_-(A, f)$.

3) Sea x un punto de X. El conjunto ***omega límite*** de x bajo f, se denota y define como sigue:

   $$\omega f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\{f^k(x) : k \geq n\}).$$

4) Una sucesión $\langle x_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle$ es una ***órbita sucesión*** si $f(x_k) = x_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

5) Sean A y B subconjuntos de X. Se definen los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

   a) $N(A, B) = \{k \in \mathbb{Z} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\}$.

   b) $N_+(A, B) = N(A, B) \cap \mathbb{N}$.

A partir de estas definiciones se desprenden algunas observaciones y proposiciones inmediatas donde se relacionan los conceptos.

Del punto 2) de la Definición 2.5.1, se tienen la siguiente observación:

Observación 2.5.2. Sea A un subconjunto de X. Se tienen las siguientes observaciones:

a) Se cumple que:
$$\mathcal{O}(A, f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^k(A).$$

b) Se cumple que:
$$\mathcal{O}_-(A, f) = \bigcup_{x \in A} \{f^{-k}(x) : k \in \mathbb{N}\}.$$

c) Se cumple que:
$$\mathcal{O}_\pm(A, f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(A).$$

Demostración. Solo probamos el inciso a). Para probar los otros incisos se sigue un proceso similar.

a) Sea $y \in \mathcal{O}(A, f)$. Por la Definición 2.5.1, $y \in \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}(x, f)$. De aquí, $y \in \mathcal{O}(x, f)$, para algún $x \in A$. Luego, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(x) = y$. Puesto que $x \in A$, se tiene que $y \in f^k(A)$. Por lo tanto, $y \in \bigcup f^k(A)$.

Por otro lado, sea $y \in \bigcup f^k(A)$, donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, $y \in f^k(A)$, para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De aquí, existe $x \in A$ tal que $f^k(x) = y$. En consecuencia, $y \in \mathcal{O}(x, f)$. Puesto que $x \in A$, $y \in \mathcal{O}(A, f)$. ∎

Del punto 3) de la Definición 2.5.1, se obtiene la siguiente observación:

Observación 2.5.3. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y x un punto de X. De la definición de *omega límite*, se cumple que:
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\{f^k(x) : k \geq n\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)).$$

Demostración. Sea $x \in \bigcap \{cl(\{f^k(x) : k \geq n\}),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. De aquí, se tiene que $x \in cl(\{f^k(x) : k \geq n\})$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, para todo abierto no vacío U de X que contiene a x, $U \cap \{f^k(x) : k \geq n\}$ no es vacío, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; esto es equivalente a que $U \cap \mathcal{O}(f^n(x), f)$ no es vacío, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En consecuencia, $x \in cl(\mathcal{O}(f^n(x), f))$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por lo tanto, $x \in \bigcap \{cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Observemos que cada uno de los pasos que hemos dado son equivalentes. Por lo tanto, para la demostración de la otra contención, se sigue un proceso partiendo del último paso. ∎

De la Definición 2.5.1, 4) podemos intercambiar el orden de los conjuntos. Así obtenemos la siguiente observación:

Observación 2.5.4. Dado dos subconjuntos, A y B, de un espacio topológico X, se tiene que:

a) $N(B, A) = \{k \in \mathbb{Z} : B \cap f^{-k}(A) \neq \emptyset\}$.

b) $N_+(B, A) = N(B, A) \cap \mathbb{N}$.

De esta última observación podemos mostrar la Proposición 2.5.5.

Proposición 2.5.5. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Sean A y B subconjuntos de X. Se tiene que $N(A, B)$ no es vacío si y sólo si $N(B, A)$ no es vacío.

Demostración. Supongamos que $N(A, B)$ no es vacío. Por la Definición 2.5.1 inciso 5), existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $A \cap f^{-k}(B)$ no es vacío. Probemos que $N(B, A)$ no es vacío. Puesto que $A \cap f^{-k}(B)$ no es vacío, por la Proposición 1.4.15, $f^k(A) \cap B$ no es vacío; este último conjunto lo podemos ver como $B \cap f^{-(-k)}(A)$, donde $-k \in \mathbb{Z}$. De aquí, $N(B, A)$ no es vacío.

Por otro lado, supongamos que $N(B, A)$ no es vacío. Veamos que $N(A, B)$ no es vacío. Luego, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $B \cap f^{-k}(A)$ no es vacío; equivalentemente, $f^k(B) \cap A$ no es vacío (Proposición 1.4.15); esto es, $A \cap f^{-(-k)}(B)$, donde $-k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, $N(A, B)$ no es vacío. ■

Ahora veamos la relación entre los conjuntos $N_+(A, B)$ y $-N_+(B, A)$. Notemos que:

$$-N_+(B, A) = \{-k : k \in \mathbb{N} \text{ y } B \cap f^{-(-k)}(A) \neq \emptyset\}.$$

Observación 2.5.6. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A y B subconjuntos de X. Se cumple que $N_+(A, B)$ no es vacío si y sólo si $-N_+(B, A)$ no es vacío.

Demostración. Supongamos que $N_+(A, B)$ no es vacío. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap f^{-k}(B)$ no es vacío. Equivalentemente, $f^k(A) \cap B$ no es vacío. El último conjunto lo podemos ver como $B \cap f^{-(-k)}(A)$. Puesto que $-k < 0$, se tiene que $-N_+(B, A)$ no es vacío. Observemos que todos estos pasos son equivalentes, por lo tanto, el recíproco es inmediato. ■

Recordemos de qué forma está definido el conjunto $N(A, B)$. La Observación 2.5.7 nos muestra una forma equivalente del conjunto $N(A, B)$.

Observación 2.5.7. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Consideremos los subconjuntos A y B de X. Se tiene que:

$$N(A, B) = N_+(A, B) \cup -N_+(B, A) \cup \{0\}.$$

Demostración. Sea $k \in N(A,B)$. Como $k \in \mathbb{Z}$, se sigue que $k \in N_+(A,B) \cup -N_+(B,A) \cup \{0\}$.

Por otro lado, sea $k \in N_+(A,B) \cup -N_+(B,A) \cup \{0\}$. Luego, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $k \in N(A,B)$. ■

Notemos que si $N(A,B)$ no sólo contiene al 0, entonces $N_+(A,B)$ y $-N_+(B,A)$ no son vacíos. En la Proposición 2.5.8, presentamos este resultado.

Proposición 2.5.8. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A y B subconjuntos de X. Si $N(A,B) \setminus \{0\}$ no es vacío, entonces los conjuntos $N_+(A,B)$ y $-N_+(B,A)$ no son vacíos.

Demostración. Puesto que $0 \notin N(A,B)$, por las Observaciones 2.5.7 y 2.5.6, $N_+(A,B)$ y $-N_+(B,A)$ no son vacíos. ■

Un caso especial de la Observación 2.5.8, se tiene cuando A y B son disjuntos.

Observación 2.5.9. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Consideremos A y B subconjuntos de X. Supongamos que A y B son disjuntos. Si $N(A,B)$ no es vacío, entonces $N_+(A,B)$ y $-N_+(B,A)$ no son vacío.

Las Proposiciones 2.5.10 y 2.5.12 muestran la relación entre una función y la órbita de un conjunto (o de un punto en el caso de los Corolarios 2.5.11 y 2.5.13):

Proposición 2.5.10. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X. Se tiene que $\mathcal{O}(f^{n+1}(A), f) \subset \mathcal{O}(f^n(A), f)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que:

$$\mathcal{O}(f^{n+1}(A), f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^k(f^{n+1}(A)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^{k+n+1}(A),$$

esto por la Observación 2.5.2, a). Además:

$$\mathcal{O}(f^n(A), f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^k(f^n(A)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^{k+n}(A)).$$

Observemos que:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^{k+n+1}(A) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^{k+n}(A).$$

Por lo tanto, $\mathcal{O}(f^{n+1}(A), f) \subset \mathcal{O}(f^n(A), f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolario 2.5.11. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y x un punto de X. Para todo $x \in X$, se tiene que $\mathcal{O}(f^{n+1}(x), f) \subset \mathcal{O}(f^n(x), f)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Basta hacer $A = \{x\}$ y aplicar la Proposición 2.5.10. ■

Proposición 2.5.12. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y A un subconjunto de X. Se cumple que $f(\mathcal{O}(A, f)) = \mathcal{O}(f(A), f)$.

Demostración. La proposición se cumple por las siguientes igualdades entre conjuntos:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{O}(A,f)) &= f(\textstyle\bigcup_{x\in A}\mathcal{O}(x,f)) \\ &= f(\textstyle\bigcup_{x\in A}\{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}) \\ &= \textstyle\bigcup_{x\in A} f(\{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}) \\ &= \textstyle\bigcup_{x\in A}\{f^{k+1}(x) : k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\} \\ &= \textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} f^k(f(A)) \\ &= \mathcal{O}(f(A), f). \end{aligned}$$

■

Corolario 2.5.13. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se tiene que $f(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(f(x), f)$.

Demostración. Basta hacer $A = \{x\}$, y aplicar la Proposición 2.5.12. ■

De manera inductiva, el Corolario 2.5.13, se puede extender a la Observación 2.5.14.

Observación 2.5.14. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $x \in X$. Se tiene que $f^k(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(f^k(x), f)$.

Veamos algunos resultados que se obtienen de los conjuntos *+invariantes*, *-invariantes* e *invariantes*. La importancia y utilidad de estos conjuntos se verán en el Capítulo 4.

Observación 2.5.15. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X. Se cumple que A es +invariante si y sólo si $A \subset f^{-1}(A)$.

Demostración. Por la Definición 2.5.1, se tiene que $f(A) \subset A$. Observemos que $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(A)$. Por la Proposición 1.4.4, obtenemos que $A \subset f^{-1}(A)$.

Por otro lado, supongamos que $A \subset f^{-1}(A)$. Luego, $f(A) \subset f(f^{-1}(A)) \subset A$. Así, $f(A) \subset A$; es decir, A es +invarante. ■

Si un conjunto A es +invariante bajo alguna función f, entonces cualquier iteración de f sobre el conjunto A está en A. Esto lo vemos en la siguiente observación:

Proposición 2.5.16. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X. Si A es +invariante bajo f, entonces A es +invariante bajo f^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Procedamos por indución. Por la Definición 2.5.1, la proposición se cumple para $n = 1$. Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$; veamos que se cumple para $n = k + 1$. Observemos que $f^{k+1}(A) = f(f^k(A))$. Puesto que $f^k(A) \subset A$ y por hipótesis, tenemos que $f^{k+1}(A) \subset A$. Por lo tanto, $f^n(A) \subset A$, para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, A es +invariante bajo f^n, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

En el caso de los conjuntos -invariantes se cumple una propiedad parecida al iterar la imagen inversa de un conjunto. Veamos el siguiente resultado:

Proposición 2.5.17. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ y A un subconjunto de X. Si A es -invariante bajo f, entonces A es -invariante bajo f^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Procedamos por inducción. Para $n = 1$, la proposición se tiene inmediatamente por la Definición 2.5.1. Supongamos que la proposición se cumple para $n = k$. Probemos que se cumple para $n = k + 1$. Puesto que $f^{-(k+1)}(A) = f^{-1}(f^{-k}(A))$ y $f^{-k}(A) \subset A$, tenemos que $f^{-(k+1)}(A) \subset A$. En consecuencia, $f^{-n}(A) \subset A$, para todo $n \in \mathbb{N}$; esto significa que A es -invariante bajo f^n, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Si un conjunto es invariante, esta propiedad también se preserva bajo iteraciones, ésto lo vemos en la Observación 2.5.18, la prueba es similar a las dos proposiciones anteriores.

Observación 2.5.18. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ y A un subconjunto de X. Si A es invariante bajo f, entonces A es invariante bajo f^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado un conjunto que tiene la propiedad +invariante (-invariante), resulta que su complemento es -invariante (+invariante).

Proposición 2.5.19. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X . Se tiene que A es +invariante si y sólo si $X \setminus A$ es -invariante.

Demostración. Supongamos que A es +invariante, esto es que $f(A) \subset A$. Por la Observación 2.5.16, $A \subset f^{-1}(A)$. De aquí, tenemos que $X \setminus [f^{-1}(A)] \subset X \setminus A$. Observemos que $X \setminus [f^{-1}(A)] = f^{-1}(X \setminus A)$. Así, $f^{-1}(X \setminus A) \subset X \setminus A$. En resumen, $X \setminus A$ es -invariante bajo f.

Recíprocamente, supongamos que $X \setminus A$ es -invariante bajo f, esto es que $f^{-1}(X \setminus A) \subset X \setminus A$. Luego, $A \subset X \setminus [f^{-1}(X \setminus A)]$. Por propiedades de conjuntos, sabemos que $f^{-1}(X \setminus (X \setminus A)) = f^{-1}(A)$. Así, $A \subset f^{-1}(A)$. Esto significa que A es +invariante bajo f. ■

Resulta que la órbita futura de un conjunto es +invariante y la órbita pasada de un conjunto es -invariante. Veamos esto en la Proposición 2.5.20.

Proposición 2.5.20. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X. Se tiene que:

1) $\mathcal{O}(A, f)$ es un conjunto +invariante.

2) $\mathcal{O}_{-}(A, f)$ es un conjunto -invariante.

Demostración. 1) Por la Definición 2.5.1, tenemos que $\mathcal{O}(A,f) = \bigcup\{\mathcal{O}(x,f) : \ x \in A\}$. Luego, utilizando el Corolario 2.5.13, se sigue que:

$$f(\mathcal{O}(A,f)) = f\left(\bigcup_{x\in A} \mathcal{O}(x,f)\right) = \bigcup_{x\in A} f(\mathcal{O}(x,f)) = \bigcup_{x\in A} \mathcal{O}(f(x),f).$$

Por el Corolario 2.5.11 $\displaystyle\bigcup_{x\in A} \mathcal{O}(f(x),f) \subset \bigcup_{x\in A} \mathcal{O}(x,f)$ y $\displaystyle\bigcup_{x\in A} \mathcal{O}(x,f) = \mathcal{O}(A,f)$.

Así, tenemos que: $f(\mathcal{O}(A,f)) \subset \mathcal{O}(A,f)$. En consecuencia, $\mathcal{O}(A,f)$ es +invariante.

2) Por la Definición 2.5.1, 2), tenemos que:

$$\mathcal{O}_-(A,f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(A).$$

Luego, utilizando la Proposición 1.4.4 y la Definición 2.5.1, tenemos la siguiente igualdad:

$$f^{-1}(\mathcal{O}_-(A,f)) = f^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(A)\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-(k+1)}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f^{-k}(A) : k > n\}.$$

Observemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f^{-k}(A) : k > n\} \subset \bigcup\{f^{-k}(A) : k \in \mathbb{N}\}$. También notemos que $\bigcup\{f^{-k}(A) : k \in \mathbb{N}\} = \mathcal{O}_-(A,f)$. De aquí, concluimos que $f^{-1}(\mathcal{O}_-(A,f)) \subset \mathcal{O}_-(A,f)$. Es decir, $\mathcal{O}_-(A,f)$ es -invariante.

Con todo lo anterior queda demostrada la Proposición. ■

El conjunto $\mathcal{O}_\pm(A,f)$ es un conjunto +invariante, lo cual lo vemos en la siguiente proposición, pero no necesariamente -invariante. Esto último se cumple si f es inyectiva. Además, si f es biyectiva, el conjunto es invariante [1].

Proposición 2.5.21. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ un función continua y A un subconjunto de X. Se tiene que $\mathcal{O}_\pm(A,f)$ es un conjunto +invariante.

Demostración. Veamos que $f(\mathcal{O}_\pm(A,f)) \subset \mathcal{O}_\pm(A,f)$. Notemos que:

$$f(\mathcal{O}_\pm(A,f)) = f\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(A)\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f\left(f^k(A)\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{k+1}(A).$$

Notemos que $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{k+1}(A) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(A)$. Por lo tanto, $f(\mathcal{O}_\pm(A,f)) \subseteq \mathcal{O}_\pm(A,f)$. ■

Hemos visto que, dado un conjunto A, $\mathcal{O}(A,f)$ es +invariante; profundizando un poco más, se puede ver que $\mathcal{O}(A,f)$ es el conjunto +invariante más pequeño que contiene a A. En el caso de $\mathcal{O}_-(A,f)$, resulta que es el conjunto -invariante más pequeño que contiene a A. Estos resultados los probamos en la Observación 2.5.24. Antes, probemos las Proposiciones 2.5.22 y 2.5.23.

Proposición 2.5.22. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X. Consideremos $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ la colección de todos subconjuntos +invariantes de X tales que $A \subset B_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Se tiene que $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ es el conjunto +invariante más pequeño que contiene a A.

Demostración. Primero probemos que $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ es un conjunto +invaritante. Puesto que B_α es +invariante para todo $\alpha \in I$ y por la Proposición 1.4.4:

$$f\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f(B_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ es +invariante.

Ahora veamos que $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ es el conjunto +invariante más pequeño que contiene a A. Supongamos que existe $B \subset X$ +invariante tal que $A \subseteq B$. De aquí, existe $\beta \in I$ tal que $B_\beta = B$. Así, $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha \subset B$. Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$, es el subconjunto +invariante más pequeño que contiene a A. ■

Ahora veamos el caso para los conjuntos -invariantes.

Proposición 2.5.23. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y $A \subset X$. Consideremos $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ la colección de todos subconjuntos -invariantes de X tales que $A \subset B_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Se tiene que $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ es el conjunto -invariante más pequeño que contiene a A.

Demostración. Afirmamos que el conjunto $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ es -invariante; esto lo podemos verificar usando el hecho de que B_α es -invariante para todo $\alpha \in I$ y la Proposición 1.4.4:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

Ahora, supongamos que $B \subset X$ es el conjunto -invariante que contiene a A. Observemos que $B \in \{B_\alpha : \alpha \in I\}$. Luego, existe $\beta \in I$ tal que $B = B_\beta$. En consecuencia, $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha \subset B$. Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ es el conjunto -invariante más pequeño que contiene a A. ■

De las últimas dos proposición tenemos la siguiente observación:

Observación 2.5.24. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X:

a) $\mathcal{O}(A, f)$ es el conjunto +invariante más pequeño que contiene a A.

b) $\mathcal{O}_-(A, f)$ es el conjunto -invariante más pequeño que contiene a A.

Demostración. a) Sea $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ la colección de todos los subconjuntos +invariantes de X que contienen a A. Por la Proposición 2.5.22, basta probar que:

$$\mathcal{O}(A,f) = \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

En la Proposición 2.5.22, probamos que $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ es un conjunto +invaritante. Usando la Proposición 2.5.16, para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos lo siguiente:

$$f^k(A) \subseteq f^k\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

De aquí, puesto que $\mathcal{O}(A,f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(A)$, se sigue que $\mathcal{O}(A,f) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$.

Por otro lado, ya que $\mathcal{O}(A,f)$ es un conjunto +invariante y contiene a A, existe $\beta \in I$ tal que $\mathcal{O}(A,f) = B_\beta$. Observemos que $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha \subseteq B_\beta$. Así, $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha \subseteq \mathcal{O}(A,f)$. Por lo tanto:

$$\mathcal{O}(A,f) = \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

b) Sea $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ la colección de todos los subconjuntos -invariantes de X que contienen a A. Probemos que $\mathcal{O}_-(A,f) = \bigcap_{\alpha\in I} B_n$.

Observemos que $f^{-k}(A) \subseteq f^{-k} \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.4.4,

$$f^{-k}\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-k}(B_\alpha).$$ Puesto que $\bigcap_{\alpha\in I} f^{-k}(B_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ y $\mathcal{O}_-(A,f) =$

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(A)$, tenemos que $\mathcal{O}(A,f) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$. Ahora, veamos que $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha \subseteq \mathcal{O}(A,f)$.

Notemos que $\mathcal{O}_-(A,f) = B_\beta$, para algún $\beta \in I$. De aquí, $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha \subseteq B_\beta$.

Con todo ésto, queda demostrada la Observación. ■

Si A es +invariante, la intersección de todos los subconjuntos de X que contienen a A, es A; por lo que A coincide con su órbita futura. Veamos formalmente este resultado en la Proposición 2.5.25.

Proposición 2.5.25. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X. Se tiene que A es + invariante si y sólo si $A = \mathcal{O}(A,f)$.

Demostración. Supongamos que A es $+$invariante. Por Observación 2.5.24, inciso a), $\mathcal{O}(A, f)$ es el conjunto $+$invariante más pequeño que contiene a A. Por lo tanto, $A = \mathcal{O}(A, f)$.

Recíprocamente, supongamos que $A = \mathcal{O}(A, f)$. Observemos que A es $+$invariante, pues $\mathcal{O}(A, f)$ es un conjunto $+$invariante. ■

Por otro lado, si A es -invariante coincide con su órbita pasada.

Proposición 2.5.26. Sea X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función y A un subconjunto de X. Tenemos que A es -invariante si y sólo si $A = \mathcal{O}_-(A, f)$.

Demostración. Supongamos que A es -invariante. Por el inciso b) de la Observación 2.5.24 sabemos que $\mathcal{O}_-(A, f)$ es el subconjunto -invariante más pequeño que contiene a A y como A es -invariante, se sigue que $A = \mathcal{O}_-(A, f)$.
Por otro lado, supongamos que $\mathcal{O}_-(A, f) = A$. Notemos que A es -invariante, pues $\mathcal{O}_-(A, f)$ -invariante. ■

Hasta aquí, hemos visto cómo se relacionan los conjuntos *+invariantes*, *-invariantes* e *invariantes* con las órbitas de conjuntos. Ahora veamos cómo se relaciona lo anterior con los conjuntos ya definidos, $N(A, B)$ y $N_+(A, B)$.

Proposición 2.5.27. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Consideremos los subconjuntos disjuntos, abiertos y no vacíos U y V de X. Si U y V son -invariantes, entonces $N_+(U, V)$ es vacío.

Demostración. Supongamos que $N_+(U, V)$ no es vacío. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V)$ no es vacío. Puesto que V es -invariante, por la Proposición 2.5.17, se tiene que $f^{-k}(V) \subset V$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero como $U \cap V$ es vacío, se sigue que $U \cap f^{-k}(V)$ es vacío. Esto contradice lo que hemos supuesto. Por lo tanto, $N_+(U, V)$ es vacío. ■

Como $f^k(U) \cap V$ no es vacío si y sólo si $U \cap f^{-k}(V)$ no es vacío, si U y V fueran disjuntos y $+$invariantes, $N_+(U, V)$ es vacío. Así, tenemos la siguiente observación:

Observación 2.5.28. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Consideremos los subconjuntos disjuntos, abiertos y no vacíos U y V de X. Si U y V son $+$invariantes, entonces $N_+(U, V)$ es vacío.

Ahora, si $N_+(U, V)$ no es vacío, resulta que cualquier subconjunto abierto -invariante es denso; el recíproco también se cumple.

Proposición 2.5.29. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Para cualesquiera U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X, el conjunto $N_+(U, V)$ no es vacío si y sólo si todo subconjunto abierto -invariante de X es denso en X.

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Supongamos que $N_+(U, V)$ no es vacío. Sea W un subconjunto -invariante y abierto de X. Como W es -invariante, por la Observación 2.5.24 inciso b), $\mathcal{O}_-(W, f) = W$. Además, por hipótesis, $N_+(U, W)$ no es vacío. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(W)$ no es vacío. Observemos que $f^{-k}(W) \subset \mathcal{O}_-(W, f)$. En consecuencia, $U \cap \mathcal{O}_-(W, f)$ no es vacío. Puesto que $\mathcal{O}_-(W, f) = W$, se sigue que $U \cap W$ no es vacío. Por lo tanto, W es denso en X.

Ahora, supongamos que todo abierto -invariante de X es denso. Sea U un abierto no vacío de X. Consideremos el conjunto:

$$\mathcal{O}_-(U, f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(U).$$

Por la Proposición 2.5.20, $\mathcal{O}_-(U, f)$ es -invariante. Por hipótesis, $\mathcal{O}_-(U, f)$ es denso en X. Como V es abierto, se tiene que $\mathcal{O}_-(U, f) \cap V$ no es vacío. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V$ no es vacío. Por la Proposición 1.4.15, $U \cap f^{-k}(V)$ no es vacío. Por lo tanto, $N_+(U, V)$ no es vacío. ■

Por otro lado, si $N_+(U, V)$ no es vacío, todo abierto +invariante es denso. Veamos este resultado en la Proposición 2.5.30.

Proposición 2.5.30. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si para cualesquiera par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $N_+(U, V)$ no es vacío, entonces todo subconjunto abierto +invariante de X es denso en X.

Demostración. Supongamos que para cualesquiera par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $N_+(U, V)$ no es vacío. Sea W un subconjunto +invariante y abierto de X. Consideremos un abierto no vacío U de X. Por hipótesis, $N(W, U)$ no es vacío. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $W \cap f^{-k}(U)$ no es vacío. De aquí, $f^k(W) \cap U$ no es vacío (Proposición 1.4.15). Como W es +invariante, se tiene que $f^k(W) \subset W$. Por lo tanto, $W \cap U$ no es vacío. En consecuencia, W es denso en X. ■

El recíproco de la Proposición 2.5.30, es válido si f es abierta y se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.31. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función abierta. Si todo subconjunto abierto +invariante es denso en X, entonces $N_+(U, V)$ no es vacío, para cualesquiera U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Demostración. Supongamos que todo subconjunto abierto +invariante es denso en X. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Veamos que $N_+(U, V)$ no es vacío. Por la Proposición 2.5.20, tenemos que $\mathcal{O}(U, f)$ es un conjunto +invariante. Ahora, probemos que $\mathcal{O}(U, f)$ es un conjunto abierto en X. Sea $y \in \mathcal{O}(U, f)$. Veamos que y es punto interior de $\mathcal{O}(U, f)$. Observemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y \in f^k(U)$. Definimos $W = f^k(U)$. Puesto que f es abierta, tenemos que W es un conjunto abierto. Notemos que $y \in W$. Como $f^k(U) \subset \mathcal{O}(U, f)$, tenemos que $W \subset \mathcal{O}(U, f)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(U, f)$ es abierto.

Sabemos que $\mathcal{O}(U,f)$ es +invariante y abierto. Por hipótesis, $\mathcal{O}(U,f)$ es denso en X; por lo que $\mathcal{O}(U,f)\cap V$ no es vacío. En consecuencia, existe $n\in\mathbb{N}$ tal $f^n(U)\cap V$ no es vacío; esto significa que $N_+(U,V)$ no es vacío. ■

Dados los conjuntos A y B, existe un relación entre los conjuntos $N(A,B)$, $\mathcal{O}_\pm(A,f)$ y $\mathcal{O}_\pm(B,f)$.

Proposición 2.5.32. Sean X un espacio topológico, $f:X\to X$ una función y A y B subconjuntos de X. Las siguientes proposiciones son equivalente:

1) $N(A,B)$ no es vacío.

2) $\mathcal{O}_\pm(A,f)\cap B$ no es vacío.

3) $A\cap\mathcal{O}_\pm(B,f)$ no es vacío.

Demostración. Supongamos que $N(A,B)$ no es vacío. Luego, existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $A\cap f^{-k}(B)$ no es vacío. Por la Proposición 1.4.15, $f^k(A)\cap B$ no es vacío. Puesto que $f^k(A)\subset\mathcal{O}_\pm(A,f)$, obtenemos que $\mathcal{O}_\pm(A,f)\cap B$ no es vacío. Con esto, hemos probado que 1) implica 2).

Ahora, supongamos que $\mathcal{O}_\pm(A,f)\cap B$ no es vacío. Luego, existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $f^k(A)\cap B$ no es vacío; equivalentemente, $A\cap f^{-k}(B)$ no es vacío (Proposición 1.4.15). Observemos que $f^{-k}(B)\subset\mathcal{O}_\pm(B,f)$. Así, se tiene que $A\cap\mathcal{O}_\pm(B,f)$ no es vacío. Hemos probado que 2) implica 3).

Por último, supongamos que $A\cap\mathcal{O}_\pm(B,f)$ no es vacío. Se sigue que existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $f^k(B)\cap A$ no es vacío; equivalentemente, $B\cap f^{-k}(A)$ no es vacío. Así, $N(A,B)$ no es vacío. Esto es, 3) implica 1). ■

Ahora, si consideramos los conjuntos $N_+(A,B)$, $\mathcal{O}(A,f)$ y $\mathcal{O}_-(A,f)$ tenemos lo siguiente:

Proposición 2.5.33. Sean X un espacio topológico, $f:X\to X$ una función y A y B subconjuntos de X. Los siguientes incisos son equivalentes:

1) $N_+(A,B)$ no es vacío.

2) $\mathcal{O}(A,f)\cap B$ no es vacío.

3) $A\cap\mathcal{O}_-(B,f)$ no es vacío.

Demostración. Supongamos que $N_+(A, B)$ no es vacío. Esto significa que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap f^{-k}(B)$ no es vacío; equivalentemente, $f^k(A) \cap B$ no es vacío. Puesto que $f^k(A) \subset \mathcal{O}(A, f)$, se sigue que $\mathcal{O}(A, f) \cap B$ no es vacío. Con esto hemos probado que 1) implica 2).

Ahora supongamos que $\mathcal{O}(A, f) \cap B$ no es vacío. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(A) \cap B$ no es vacío; de aquí, $A \cap f^{-k}(B)$ no es vacío. Pero $f^{-k}(B) \subset \mathcal{O}_-(B, f)$, por lo que $A \cap \mathcal{O}_-(B, f)$ no es vacío. Con esto tenemos que 2) implica 3).

Por último, supongamos que $A \cap \mathcal{O}_-(B, f)$ no es vacío. Se sigue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap f^{-k}(B)$ no es vacío. Esto último implica que $N_+(A, B)$ no es vacío. Por lo tanto, hemos probado que 3) implica 2). ■

Las variadas características que se han encontrado en los sistemas dinámicos discretos, han permitido una clasificación amplia de éstos. Por ejemplo, podemos mencionar algunas características que en el siguiente capítulo vamos a estudiar un poco: *Mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitiva, caótica, localmente sobreyectiva, minimal* y *transitiva.* Nuestro enfoque va a estar centrado en la *transitividad*; poco a poco veremos el por qué.

Capítulo 3

Transitividad topológica

Mientras más se ha indagado en las propiedades topológicas de los sistemas dinámicos discretos, más características particulares se han encontrado en ellas; es por eso que, de acuerdo a esas características, se han ido clasificando en distintos tipos. En este capítulo nos dedicamos al estudio de algunos sistemas dinámicos discretos, por mencionar algunos: *Mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivos, caóticos, localmente sobreyectivos, minimales* y *transitivos*. Nos enfocaremos principalmente en la última propiedad, ya que, como veremos más adelante, todas las propiedades mencionadas tienen la propiedad de *transitividad*; pero su importancia no sólo radica en eso, sino en las investigaciones más profundas a las que se puede conducir, tales como las propiedades *caóticas* [3] y [12]. Para nosotros, su relevancia la reflejamos en las *nociones* relacionadas con la *transitividad topológica* [1], las cuales abordaremos con más detalle en el Capítulo 4.

3.1. La transitividad topológica y otras propiedades

El concepto de *transitividad topológica* se remonta a G. D. Birkhoff, introducida en 1920 para espacios métricos [6]. Nosotros nos concentramos en este concepto definido para espacios topológicos. En esencia y de manera intuitiva, una función es *transitiva* si, para cualquier par de conjuntos abiertos no vacíos que tomemos, existe un punto en cualquiera de ellos, cuya órbita futura visita en algún momento al otro conjunto abierto. De manera formal, la *transitividad topológica* de una función se define de la siguiente manera:

Definición 3.1.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es ***topológicamente transitiva*** si, para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $f^n(U) \cap V$ no es vacío. También se dice simplemente que f es ***transitiva***.

Es importante recordar la Proposición 1.4.15, ya que con esto podemos decir, equivalentemente, que f es transitiva si $U \cap f^{-n}(V)$ no es vacío. Observemos que esta equivalencia está determinada por la órbita pasada de V.

Algunos autores han considerado que f es transitiva si existe un punto en el espacio, cuya órbita futura es densa [5]. Esta definición y la que nosotros hemos dado, en general, no son equivalentes [13].

La Figura 3.1, nos ayuda a visualizar la idea de la transitividad topológica.

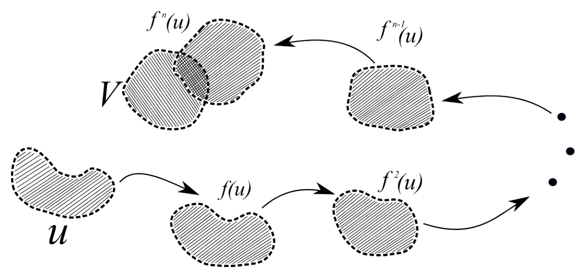


Figura 3.1: Transitividad topológica. Los conjuntos U y V representan los conjuntos abiertos de un espacio topológico X, notemos que, a través de la función f, la órbita de U intersecta a V en n iteraciones de f.

Podemos hablar también de *puntos transitivos*. Veamos la siguiente definición:

Definición 3.1.2. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x un punto de X. Decimos que x es ***punto transitivo*** de f si $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. También se dice simplemente que x es ***transitivo***.

Dada la última definición, nos preguntamos si existe una relación entre un punto transitivo y una función transitiva. Veamos cómo se relacionan. Antes, demostremos el siguiente lema:

Lema 3.1.3. Sean X un espacio topológico T_1 y perfecto, $f : X \to X$ una función continua y $x \in X$. Si x es punto transitivo de f, entonces $f^k(x)$ es un punto transitivo de f, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que x es punto transitivo. Veamos que $f^n(x)$ es punto transitivo. Procedamos por inducción:

Veamos que se cumple para el caso $k = 1$, para esto veamos que $\mathcal{O}(f(x), f)$ es denso en X. Supongamos que existe un abierto no vacío U de X tal que $\mathcal{O}(f(x), f) \cap U$ es vacío. Como $\mathcal{O}(x, f) \cap U$ no es vacío, y ya que $\mathcal{O}(f(x), f) = \mathcal{O}(x, f) \setminus \{x\}$, tenemos que $\mathcal{O}(x, f) \cap U = \{x\}$. Luego, $(U \setminus \{x\}) \cap \mathcal{O}(x, f)$ es vacío. Dado que X es perfecto, por la Proposición 1.3.15, U tiene más de un punto. De donde $U \setminus \{x\}$ no es vacío. Además, como X es T_1, $\{x\}$ es cerrado en X. Así, $U \setminus \{x\}$ es abierto en X, pero $(U \setminus \{x\}) \cap \mathcal{O}(x, f)$ es vacío; lo cual contradice que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Por lo tanto, $\mathcal{O}(f(x), f) \cap U$ no es vacío, esto es, $\mathcal{O}(f(x), f)$ es densa en X; en otras palabras.

De manera similar, se prueba para para $k = n$. Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}(f^k(x), f)$ es densa en X. En consecuencia, $f^k(x)$ es punto transitivo. ■

Proposición 3.1.4. Sean X un espacio topológico T_1 y $f : X \to X$ una función continua. Si X es perfecto y existe $x \in X$ tal que x es punto transitivo, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que X es perfecto y x un punto transitivo. Consideremos U y V dos abiertos no vacíos de X. Por la Definición 3.1.2, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) \cap U$ no es vacío. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in U$. Además, por el Lema 3.1.3, tenemos que $f^m(x)$ es punto transitivo. De aquí, $\mathcal{O}(f^m(x), f) \cap V$ no es vacío. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(f^m(x)) \in V$. De aquí, $f^m(x) \in f^{-k}(V)$. Por lo tanto, $U \cap f^{-k}(V)$ no es vacío. Así, por la Proposición 1.4.15, f es transitiva. ■

Como hemos mencionado, además de la propiedad transitiva existen otras propiedades de los sistemas dinámicos discretos que se relacionan con la transitividad. A continuación se mencionan algunas de estas propiedades:

Definición 3.1.5. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ es una función continua. Se dice que f es:

(1) ***Mezclante*** si para cada par de abiertos no vacíos, U y V de X, existe un número natural n tal que el conjunto $f^k(U) \cap V$ no es vacío, para todo $k \geq n$.

(2) ***Débilmente mezclante*** si para cualesquiera abiertos no vacíos, U_1, U_2, V_1 y V_2 de X, existe un número natural k tal que el conjunto $f^k(U_i) \cap V_i$ no es vacío, para todo $i \in \{1, 2\}$.

(3) ***Totalmente transitiva*** si f^n es transitiva, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4) ***Caótica*** si f es transitiva y el conjunto $Per(f)$ es denso en X.

(5) ***Localmente sobreyectiva*** si para cada abierto no vacío U de X, existe un número natural n tal que $f^n(U) = X$.

(6) ***Minimal*** si $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$, para cualquier $x \in X$.

Nos interesa saber de qué forma están relacionadas estas propiedades entre ellas y con la transitividad topológica.

La propiedad localmente sobreyectiva implica que la función es sobreyectiva.

Proposición 3.1.6. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es localmente sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que f es localmente sobreyectiva. Sea y cualquier punto de X. Consideremos un abierto no vacío U de X. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$. Sea $y \in f^k(U)$. Se sigue que, existe $x \in U$ tal que $f(f^{k-1}(x)) = f^k(x) = y$. Por lo tanto, f es sobreyectiva. ■

Esta última proposición nos ayuda a probar la Proposición 3.1.7.

Proposición 3.1.7. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Se sigue que f es localmente sobreyectiva si y sólo si para cada U abierto no vacío de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$, para todo $k \geq N$.

Demostración. Supongamos que f es localmente sobreyectiva. Sea U un abierto no vacío de X. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) = X$. Notemos que, para cualquier abierto no vacío V, $f^N(U) \cap V$ no es vacío. Por la Proposición 3.1.6, f es sobreyectiva. Sea $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pongamos $k = l + N$. Luego, $f^k(U) = f^l(f^N(U)) = f^l(X) = X$. Así, $f^k(U) = X$, para todo $k \geq N$.

El recíproco es inmediato. ■

La Proposición 3.1.7, nos ayuda a probar que la propiedad localmente sobreyectiva implica que la función dada es mezclante.

Proposición 3.1.8. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función localmente sobreyectiva, entonces f es mezclante.

Demostración. Supongamos que f es localmente sobreyectiva. Sean U y V dos subconjuntos abiertos no vacíos de X. Puesto que f es localmente sobreyectiva, por la Proposición 3.1.7, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$, para todo $k \geq N$. Luego, $f^k(U) \cap V$ no es vacío, para $k \geq N$; esto significa que f es mezclante. ■

La propiedad mezclante implica la propiedad débilmente mezclante.

Proposición 3.1.9. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función mezclante, entonces f es débilmente mezclante.

Demostración. Supongamos que f es mezclante. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por hipótesis, existen n_1 y $n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_1}(U_1) \cap V_1$ y $f^{k_2}(U_2) \cap V_2$ no son vacíos, para todo $k_1 \geq n_1$ y $k_2 \geq n_2$. Si tomamos $n = \max\{n_1, n_2\}$, se tiene que $f^k(U_i) \cap V_i$, para $i \in \{1, 2\}$ y cada $k \geq n$; es decir, f es débilmente mezclante. ■

La propiedad mezclante también implica la propiedad totalmente transitiva.

Proposición 3.1.10. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función mezclante, entonces f es totalmente transitiva.

Demostración. Supongamos que f es mezclante. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y n cualquier número natural. Probemos que f^n es transitiva. Puesto que f es mezclante, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V$ no es vacío, para todo $k \geq N$. Observemos que podemos tomar un múltiplo de n que sea mayor o igual a N; es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot m \geq N$. Pongamos $k = n \cdot m$. Notemos que $f^k(U) = (f^n)^m(U)$. Ya que $f^k(U) \cap V$ no es vacío, tenemos que $(f^n)^m(U) \cap V$ no es vacío. En consecuencia, f^n es transitiva, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, f es totalmente transitiva. ■

La propiedad débilmente mezclante implica la propiedad transitiva.

Proposición 3.1.11. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función débilmente mezclante, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante. Sean U y V dos subconjuntos abiertos abiertos no vacíos de X. Pongamos $U_1 = U_2 = U$ y $V_1 = V_2 = V$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i$ no es vacío, para todo $i \in \{1, 2\}$. Así, $f^k(U) \cap V$ no es vacío y por lo tanto, f es transitiva. ■

Una implicación que es casi inmediata por definición es que la propiedad totalmente transitiva implica la transitividad.

Proposición 3.1.12. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función totalmente transitiva, entonces f es una función transitiva.

Demostración. Supongamos que f es totalmente transitiva. De aquí, f^n es transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, si $n = 1$, obtenemos que f es transitiva. ■

Una función minimal implica que la función es transitiva. La siguiente proposición también se tiene casi inmediatamente de la definición.

Proposición 3.1.13. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función minimal, entonces f es una función transitiva.

Demostración. Supongamos que f es minimal. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y x un punto de U. Por hipótesis, tenemos que $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$, esto es que $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Luego, $\mathcal{O}(x, f) \cap V$ no es vacío. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in V$. Así, $f^k(U) \cap V$ no es vacío. Por lo tanto, f es transitiva. ■

Una función caótica implica la transitividad.

Proposición 3.1.14. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una función caótica, entonces f es transitiva.

Demostración. Por definición, una función caótica es transitiva. ■

De estas proposiciones, se obtiene el Diagrama 1, donde podemos observar que todas las propiedades mencionadas implican la transitividad:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Localmente sobreyectiva} \arrow[d] & \\
\text{Mezclante} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{Totalmente transitiva} \arrow[d] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[dl] \\
\text{Transitiva} & \text{Minimal} \arrow[l] \\
\text{Caotica} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 1: Relación entre funciones topológicas.

Hasta aquí, hemos visto las relaciones que existen entre las propiedades mencionadas; sin embargo, estas propiedades no son las únicas, existen más propiedades que se relacionan entre ellas [10]. De ahora en adelante nos enfocaremos en el estudio de la transitividad topológica y los resultados que surgen dependiendo del espacio topológico en el que trabajemos. Para ir aclarando el concepto de transitividad, en la siguiente sección presentamos tres ejemplos de funciones que tienen la propiedad transitiva.

3.2. Ejemplos de funciones transitivas

La importancia y claridad de la propiedad transitiva tienen mayor fuerza cuando se muestran ejemplos donde, de alguna forma, se pueda visualizar la transitividad topológica. Los ejemplos de funciones transitivas son muchas, a continuación, mostramos tres ejemplos de funciones transitivas, dos de las cuales ya hemos tratado en el capítulo anterior: la tienda, la logística y la *rotación irracional*.

El primer ejemplo es la función tienda. Para ver que esta función es transitiva, necesitamos dos resultados, Lema 3.2.1 y Lema 3.2.2. Vayamos al primer resultado que nos dice que toda iteración de la tienda es un homeomorfismo.

Lema 3.2.1. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ se cumple que la función T restringida:

$$T^n|_{\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \to [0,1],$$

definida por $T^n(x) = \alpha + (-1)^l 2^n x$, es un homeomorfismo.

donde α es un número entero. (Como hemos mencionado en el Capítulo 2, en cada intervalo $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ la gráfica de T^n es un segmento de recta con pendiente 2^n si l es par, y $-(2^n)$ si l es impar).

Demostración. Procedamos por inducción:

Para el caso $n = 1$ se tiene que $l \in \{0, 1\}$. Si $l = 0$, se sigue de manera inmediata que $T : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo, ya que en este intervalo:

$$T(x) = 0 + (-1)^0 2x = 2x.$$

Para el caso $l = 1$, tenemos que $T : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0, 1]$ también es un homeomorfismo, pues:

$$T(x) = 2 + (-1)^1 2x = 2 - 2x.$$

Ahora, supongamos que se cumple para $n = k$; es decir, para cada $l \in \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$:

$$T^k|_{\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]} : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0, 1]$$

es un homeomorfismo, donde la regla de correspondencia es la siguiente:

$$T^k(x) = \alpha + (-1)^l 2^k x, \text{ donde } \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Veamos que se cumple para $n = k + 1$ y para todo $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$.

Primero notemos que:

Si $l \leq 2^{k-1}$, entonces:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{3.1}$$

pues para $l = 0$, $\left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y, para $l = 2^{k-1}$, $\left[\frac{2^k - 1}{2^{k+1}}, \frac{2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2}\right]$, donde $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Si $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, entonces:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right], \tag{3.2}$$

ya que, si $l = 2^k$, se tiene que $\left[\frac{2^k}{2^{k+1}}, \frac{2^k+1}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\right]$, donde $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Y para $l = 2^{k+1} - 1$, se tiene que $\left[\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}\right] = \left[1 - \frac{1}{2^{k+1}}, 1\right]$, donde $\left[1 - \frac{1}{2^{k+1}}, 1\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

De aquí, aplicando T sobre $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]$, tenemos dos casos:

Caso 1:

$l \leq 2^{k-1}$. De (3.1), se tiene que $T\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) = 2\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) = \frac{l}{2^k}$ y $T\left(\frac{l+1}{2^{k+1}}\right) = 2\left(\frac{l+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{l+1}{2^k}$. Luego, puesto que T es continua:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1]$$

Por el caso base y la hipótesis de inducción, T y T^k son homeomorfismos. Como la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo, se tiene que:

$$T^{k+1}\mid_{\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]} : \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \longrightarrow [0,1]$$

es un homeomorfismo. Más aún:

$$x \xrightarrow{T} 2x \xrightarrow{T^k} \alpha + (-1)^l 2^k(2x).$$

Por lo tanto, la regla de correspondencia para T^{k+1} restringido a $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]$ es:

$$T^{k+1}(x) = \alpha + (-1)^l 2^{k+1} x.$$

Caso 2:

$2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$. Por (3.2), se tiene que $T\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) = \frac{2^{k+1}-l}{2^k}$ y $T\left(\frac{l+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}$. Luego, T^{k+1} es:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-l}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1]$$

Puesto que T y T^k es un homeomorfismo, tenemos que T^{k+1} es un homeomorfismo. Para este caso, hallemos la regla de correspondencia. Como $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} -2^k \geq -l &\geq 1 - 2^{k+1}, \\ 2^{k+1} - 2^k - 1 \geq 2^{k+1} - l - 1 &\geq 0, \\ 2^k - 1 \geq 2^{k+1} - l &\geq 2^{k+1} - l - 1. \end{aligned}$$

De aquí, $2^{k+1} - l - 1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$, por la hipótesis de inducción, tenemos que T^k restringido a $\left[\frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-l}{2^k}\right]$ es un homeomorfismo.

En este caso, si $x \in \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]$, entonces:

$$\begin{aligned} T^{k+1}(x) = T^k(T(x)) = T^k(2-2x) &= \alpha + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^k (2-2x) \\ &= \alpha + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^{k+1} + (-1)^{2^{k+1}-l} 2^{k+1} x. \end{aligned}$$

Pongamos $\alpha' = \alpha + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^{k+1}$.

Notemos que l y $2^{k+1} - l$ son pares o impares simultáneamente, luego:

$$T^{k+1}(x) = \alpha' + (-1)^l 2^{k+1} x,$$

donde $\alpha \in \mathbb{Z}$. Con esto concluimos que:

$$T^n|_{\left[\frac{l}{2^n},\frac{l+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \to [0,1]$$

es un homeomorfismo, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

En el siguiente lema se expone que al tomar un subintervalo abierto contenido en $[0,1]$, iterando T un número finito de veces, la imagen de esa iteración se convierte en $[0,1]$.

Lema 3.2.2. Sean a y b números reales, con $a < b$ tales que $(a,b) \subset [0,1]$. Se tiene que, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a,b) = [0,1]$.

Demostración. Puesto que $a < b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. De aquí, existe un valor $l \in \{0,1,2,\ldots,2^N-1\}$ de tal forma que:

$$\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+a}{2^N}\right] \subset (a,b).$$

Por el Lema 3.2.1, se tiene que $T^N\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+a}{2^N}\right] = [0,1]$. y, por lo tanto, $T^N(a,b) = [0,1]$. ■

La Figura 3.2, ilustra esta idea para el caso T^3:

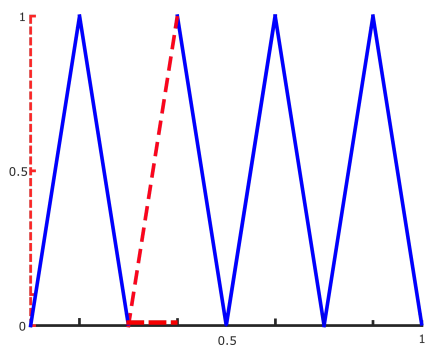


Figura 3.2: Transformación del intervalo $\left[\frac{l}{2^3}, \frac{l+1}{2^3}\right]$ en $[0,1]$ mediante T^3. Observemos que el segmento punteado marcado sobre el eje x representa uno de los intervalos $\left[\frac{l}{2^3}, \frac{l+1}{2^3}\right]$, el segmento punteado sobre la gráfica de T es la imagen, que a la vez se ve proyectada sobre el eje y, también punteado.

Los Lemas 3.1 y 3.2 son herramientas suficientes para probar que la función tienda es transitiva.

Ejemplo 3.2.3. La función tienda, $T : [0,1] \to [0,1]$, es transitiva.

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de $[0,1]$. Luego, existe un intervalo abierto (a,b), donde $a < b$, contenido en U. Por el Lema 3.2.2, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a,b) = [0,1]$. Puesto que $(a,b) \subset U$, se sigue que $T^N(U) = [0,1]$. En consecuencia, $T^N(U) \cap V$ no es vacío. Por lo tanto, T es transitiva. ■

La prueba de que T es transitiva es bastante elegante. Otro ejemplo de función transitiva, no menos elegante, es la función *rotación irracional*. Definamos esta función. Recordemos que $\mathbb{C}$ denota el conjunto los números complejos y $\mathbb{S}^1$ representa el círculo unitario.

Definición 3.2.4. Sea $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y consideremos θ un número irracional. Definimos la función ***rotación irracional*** $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ como:

$$f(z) = e^{2\pi i\theta} z, \text{ para todo } z \in \mathbb{S}^1.$$

Ejemplo 3.2.5. Sean $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ función rotación irracional. Se tiene que f es transitiva.

Demostración. Primero observemos que para cada $z \in \mathbb{S}^1$, se tiene que:

$$d(z, f(z)) = \| z - e^{2\pi i\theta} z \| = \| z \| \| 1 - e^{2\pi i\theta} \| = \| 1 - e^{2\pi i\theta} \|;$$

esto significa que $d(z, f(z))$ es un valor constante.

Ahora veamos que f es transitiva. Por la Proposición 3.1.4, basta probar que existe un punto en $\mathbb{S}^1$ que sea transitivo. Supongamos que, para k y $m \in \mathbb{N}$, $f^k(z) = f^m(z)$; esto implica que $e^{2\pi i(k\theta)} z = e^{2\pi i(m\theta)} z$. Observemos que $z \neq 0$. Luego, $e^{2\pi i(k-m)\theta} = 1$, lo cual ocurre si $(k-m)\theta = 0$. Puesto que θ es irracional, se tiene que $k - m = 0$. En consecuencia, $k = m$. Por lo tanto, si $k \neq m$, entonces $f^k(z) \neq f^m(z)$. Con esto vemos que $z, f(z), f^2(z), \ldots$ son todos diferentes; es decir, $\mathcal{O}(z, f)$ es un conjunto infinito, para cada $z \in \mathbb{S}^1$.

Sea $\epsilon > 0$. Por el Ejemplo 1.3.23, sabemos que $\mathbb{S}^1$ es compacto. Dado que $\mathcal{O}(z, f)$ es infinito, por la Proposición 1.3.25, $\mathcal{O}(z, f)$ tiene un punto de acumulación, digamos z_0. De aquí, $(B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}) \cap \mathcal{O}(z, f)$ no es vacío. Luego, existen m y $r \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^m(z), f^{m+r}(z)) < \epsilon$, donde $f^m(z)$ y $f^{m+r}(z) \in (B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}) \cap \mathcal{O}(z, f)$. Pongamos $g = f^r$. Con esto tenemos que g también es función rotación irracional, pues $g(z) = e^{2\pi i(r\theta)}$. De aquí, para cualquier $x \in \mathbb{S}^1$:

$$d(x, g(x)) = d(f^m(z), g(f^m(z))) = d(f^m(z), f^{m+r}(z)) < \epsilon,$$

Notemos que $\mathcal{O}(z, g) = \{z, g(z), g^2(z), \ldots\}$ son puntos tales que:

$$d(g^k(z), g^{k+1}(z)) = d(g^k(z), g(g^k(z))) = d(f^{kr}(z), g(f^{kr})) < \epsilon.$$

Con esto vemos que $d(g^k(z), g^{k+1}(z))$ es constante y, además, menor a ϵ. Así, dado $y \in \mathbb{S}^1$ y $\epsilon > 0$, $\mathcal{O}(z, g) \cap B(\epsilon, y) \neq \emptyset$, pues g nunca dará un salto mayor que ϵ. Con esto hemos demostrado que $\mathcal{O}(z, g)$ es denso en $\mathbb{S}^1$. Como $g = f^r$, se tiene que $\mathcal{O}(z, g) \subset \mathcal{O}(z, f)$. Así, tenemos que $\mathcal{O}(z, f)$ es denso en $\mathbb{S}^1$; es decir, z es transitivo. Por la Proposición 3.1.4, f es transitiva. ■

Ejemplo 3.2.6. La función *logística* $L : [0,1] \to [0,1]$ definida como:

$$L(x) = 4x(1-x), \text{ para todo } x \in [0,1]$$

es transitiva.

Para demostrar esto, hacemos uso de una herramienta muy importante llamada *Conjugación topológica*; de hecho, se puede probar que la función logística es equivalente a la función tienda. La siguiente sección muestra algunos resultados que se pueden obtener con la *Conjugación topológica*.

3.3. Conjugación topológica

Ante la dificultad del estudio de propiedades de ciertas funciones por sí mismas, se han inventado herramientas que permiten su estudio a través de otras funciones. De hecho, en un grupo de funciones *equivalentes*, el estudio de ellas se reduce al estudio de un representante. En esta sección presentamos una herramienta llamada *Conjugación topológica*, con la cual se puede ver la equivalencia de funciones. Particularmente, para este trabajo, necesitamos la conjugación topológica para probar que la función tienda y la función logística son equivalentes.

Definición 3.3.1. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones continuas. Decimos que f y g son ***topológicamente conjugadas***, si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que, para todo punto $x \in X$, se tiene que $h(f(x)) = g(h(x))$.

También se dice que f y g son topológicamente equivalentes o, simplemente, equivalentes o conjugadas.
En el siguiente diagrama se puede apreciar la relación de las funciones g y f mediante el homeomorfismo h:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}.$$

Ejemplo 3.3.2. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por:

$$f(x) = x + c \quad \text{y} \quad g(x) = x + k, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

donde c y k son números reales.

Probemos que f y g son equivalentes. Para esto debemos encontrar un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo punto $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $h(f(x)) = g(h(x))$. Consideremos el homeomorfismo $h(x) = \alpha x + \beta$. Se sigue que:

$$
\begin{aligned}
&h(f(x)) = \alpha(x+c)+\beta = \alpha x + \alpha c + \beta \quad y \\
&g(h(x)) = \alpha x + \beta + k.
\end{aligned}
$$

Con esto vemos que $\alpha = \frac{c}{k}$ y que β puede tomar cualquier valor. Así, f y g son conjugadas a través del homeomorfismo $h(x) = \frac{k}{c}x$.

La importancia de la conjugación topológica radica en que, a través de las propiedades de una función, se pueden encontrar las propiedades de otra función. Por ejemplo, supongamos que f y g son conjugadas; si sabemos que existen puntos con órbitas periódicas de periodo n determinadas por f; se pueden hallar puntos con órbitas periódicas también de periodo n determinadas por g. Esta y otras propiedades serán estudiadas en la siguiente sección. La que más nos interesa es que si f es transitiva, entonces g es transitiva.

Propiedades que se preservan bajo la conjugación

La primera proposición que exponemos nos dice que si f y g son funciones topológicamente conjugadas, entonces las n-ésimas iteraciones de ellas también son conjugadas, esto es que f^n y g^n son conjugadas, para cualquier natural n.

Proposición 3.3.3. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas, donde X y Y son espacios topológicos y f y g son conjugadas bajo el homeomorfismo $h : X \to Y$. Para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)).$$

Demostración. Procedamos por inducción. Por hipótesis, tenemos que $h(f(x)) = g(h(x))$; por lo tanto, se cumple para $n = 1$. Supongamos que la proposición es verdadera para $n = k$. Esto significa que:

$$h(f^k(x)) = g^k(h(x)), \quad \text{para todo } x \in X.$$

Veamos que se cumple para $n = k+1$. Utilizando la última suposición y el hecho de que f y g son conjugadas, podemos ver las siguientes igualdades:

$$h(f^{k+1}(x)) = h(f^k(f(x))) = g^k(h(f(x))) = g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x)).$$

Así, f^{k+1} y g^{k+1} son conjugadas. De aquí, f^n y g^n son conjugadas, para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$, para todo $x \in X$. ∎

La siguiente proposición nos ayuda a encontrar otro homeomorfismo bajo el cual f y g son conjugadas; éste es h^{-1}.

Proposición 3.3.4. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones continuas. Si f y g son conjugadas bajo el homeomorfismo $h : X \to Y$, entonces g y f son conjugadas bajo el homeomorfismo $h^{-1} : Y \to X$.

Demostración. Supongamos que f y g son conjugadas bajo el homeomorfismo $h : X \to Y$. Sea y un punto de Y. Puesto que f y g son conjugadas, tenemos que:

$$g(y) = g(h(h^{-1}(y))) = h(f(h^{-1}(y))).$$

Observemos que h^{-1} es un homeomorfismo. Además, $h^{-1}(g(y)) = h^{-1}(h(f(h^{-1}(y))))$. De aquí, $h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y))$.

Por lo tanto, g y f también son conjugadas bajo el homeomorfismo h^{-1}. ■

Profundicemos un poco más. Supongamos que f y g son funciones conjugadas y supongamos que conocemos un punto fijo o una órbita periódica o más aún, con un periodo determinado de f; la siguiente proposición nos da un método a través del cual podemos hallar un punto fijo o una órbita periódica de g.

Proposición 3.3.5. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas, donde X y Y son espacios topológicos y f y g son conjugadas bajo el homeomorfismo $h : X \to Y$. Consideremos el punto x de X. Se cumple lo siguiente:

a) Si x es un punto fijo bajo f, entonces $h(x) \in Y$ es un punto fijo bajo g.

b) Si x es un punto periódico de f de periodo N, entonces $h(x)$ es un punto periódico de g de periodo N, donde $N > 1$.

c) Si $y \in Per(g)$, entonces $h^{-1}(y) \in Pef(f)$.

Demostración. .

a) Supongamos que x es punto fijo de X bajo f. Evaluando g en $h(x)$ tenemos que:

$$g(h(x)) = h(f(x)) = h(x).$$

Así, $h(x)$ es punto fijo bajo g.

b) Supongamos que x es un punto periódico de f de periodo $N > 1$; esto es que $f^N(x) = x$. En consecuencia, para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq j < N$, $f^j(x) \neq x$. De aquí, por la Proposición 3.3.3, tenemos:

$$g^N(h(x)) = h(f^N(x)) = h(x).$$

Por otro lado, como h es inyectiva , para cada j, donde $1 \leq j < N$, se tiene por la Proposición 3.3.3 que:

$$g^j(h(x)) = h(f^j(x)) \neq h(x).$$

Así, $h(x)$ es un punto periódico bajo g de periodo N.

c) Sean $y \in Per(g)$ y N el periodo de y. Luego, $g^N(y) = y$. Pongamos $x = h^{-1}(y)$. Por la Proposición 3.3.4:

$$f^N(x) = f^N(h^{-1}(y)) = h^{-1}(g^N(y)) = h^{-1}(y) = x.$$

De donde, $h^{-1}(y) \in Per(f)$.

Con esto queda completa la prueba. ■

Observemos que el homeomorfismo h transforma el conjunto $Per(f)$ en el conjunto $Per(g)$; es decir, $h(Per(f)) = Per(g)$ [3].

La proposición que sigue nos ayuda a saber si el conjunto de puntos periódicos de una función es denso, sabiendo que es denso el conjunto de puntos perióoos de su función conjugada.

Proposición 3.3.6. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas, donde X y Y son espacios topológicos y f y g son conjugadas bajo el homeomorfismo $h : X \to Y$. El conjunto $Per(f)$ es denso en X si y sólo si el conjunto $Per(g)$ es denso en Y.

Demostración. Supongamos que $Per(f)$ es denso en X. Sea V un subconjunto abierto y no vacío de Y. Observemos que $h^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X, pues h^{-1} es un homeomorfismo. Por hipótesis, $Per(f) \cap h^{-1}(U)$ no es vacío, por lo que exite $x_0 \in Per(f)$ de tal forma que $x_0 \in h^{-1}(V)$. Pongamos $y_0 = h(x_0)$. Luego, por el inciso $b)$ de la Proposición 3.3.5, $y_0 \in Per(g)$. Notemos que $y_0 \in V$. Así, $Per(g) \cap V$ no es vacío. Por lo tanto, $Per(g)$ es denso en X.

El recíproco es análogo si consideramos la Proposición 3.3.4. ■

Nuestro objetivo principal en esta sección es probar que la función logística es transitiva. La Proposición 3.3.7, nos ayuda a cumplir el objetivo.

Proposición 3.3.7. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones continuas tales que f y g son topológicamente conjugadas bajo el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es transitiva en X si y sólo si g es transitiva en Y.

Demostración. Supongamos que f es transitiva en X. Sean V y W dos abiertos no vacíos de Y. Observemos que $h^{-1}(V)$ y $h^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos y no vacíos de X. Como f es transitiva en X, existen $N \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in h^{-1}(V)$ tales que $f^N(x_0) \in h^{-1}(W)$. De aquí, $h(x_0) \in V$. Usando la Proposición 3.3.3, tenemos lo siguiente:

$$g^N(h(x_0)) = h(f^N(x_0)).$$

Notemos que $h(f^N(x_0)) \in W$. Así, $g^N(h(x_0)) \in W$. Dado que $h(x_0) \in V$, se sigue que $g^N(V) \cap W$ no es vacío. Por lo tanto, g es transitiva en Y.

Para el recíproco basta considerar la Proposición 3.3.4 ■

Existen otras propiedades de funciones que se pueden hallar con esta herramienta; por ejemplo, se puede saber si una función es caótica si su conjugada lo es [3]. Sin embargo, lo que sigue para nosotros es probar la equivalencia de la tienda con la logística.

Proposición 3.3.8. La función tienda es equivalente a la función logística.

Demostración. Debemos hallar el homeomorfismo h tal que $h(T(x)) = L(h(x))$.

Consideremos la función $h : [0,1] \to [0,1]$ definida por:

$$h(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

para todo $x \in [0,1]$.

Primero probemos que h es un homeomorfismo. Para esto tenemos que ver que h es continua, biyectiva y h^{-1} es continua.

Observemos que h es la composición de las funciones $h_1 = x^2$ y $h_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Puesto que h_1 y h_2 son continuas, tenemos que h es continua.

Ahora veamos que h es inyectiva. Derivando y usando identidades trigonométricas, tenemos que:

$$h'(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{x}\operatorname{sen}(\pi x).$$

Notemos que $h'(x) \geq 0$, para todo $x \in [0,1]$. Por lo tanto, $h(x)$ es estrictamente creciente en $[0,1]$. Ahora, sean x y y dos puntos en $[0,1]$ tales que $x \neq y$. Supongamos que $x < y$. Luego, como h es estrictamente creciente, se tiene que $h(x) < h(y)$. Así, $h(x) \neq h(y)$ y, por lo tanto, h es inyectiva.

También afirmamos que h es sobreyectiva. En efecto, como h es estrictamente creciente y continua y, además, su valor mínimo es 0 y su valor máximo es 1, se tiene que h es sobreyectiva.

Por otro lado, como h es continua y escrictamente creciente, existe h^{-1} definida en $[0,1]$ que es continua. Con todo ésto hemos probado que h es un homeomorfismo.

Finalmente, veamos que efectivamente, h es el homeomorfismo que funciona para ver que L y T son equivalentes; es decir, que $h(T(x)) = L(h(x))$. Para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
L(h(x)) &= L(\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)) \\
&= 4\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\right) \\
&= 4\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right) \\
&= \left[2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\right]^2 \\
&= \operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $h(T(x))$ existen dos casos.

Caso 1: Para todo $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se tiene que:

$$h(T(x)) = h(2x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(2x)}{2}\right) = \operatorname{sen}^2(\pi x).$$

Caso 2: Para todo $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, usando identidades trigonométricas, se tiene que:

$$h(T(x)) = h(2-2x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(2-2x)}{2}\right) = \operatorname{sen}^2(\pi - \pi x) = \operatorname{sen}^2(\pi x).$$

Por lo tanto, concluimos que T y L son funciones conjugadas. ■

3.4. Algunas propiedades de la transitividad topológica

El estudio de la transitividad topológica se ha ido extendiendo a lo largo de los últimos años. En esta sección demostraremos algunos resultados que se han obtenido de tales estudios.

Proposición 3.4.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ un homeomorfismo. Se tiene que f es transitiva si y sólo si todo subconjunto abierto invariante de X es denso.

Demostración. Supongamos que f transitiva. Sea U un subconjunto abierto invariante de X. Probemos que $cl(U) = X$. Consideremos V abierto y no vacío de X. Puesto que f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V$ no es vacío. Como U es invariante, por la Observación 2.5.18, $f^k(U) = U$. Así, $U \cap V$ no es vacío. Por lo tanto, U es denso en X.

Recíprocamente, supongamos que todo abierto invariante de X es denso en X. Debemos probar que f es transitiva. Sean U y V abiertos no vacío de X. Como U es abierto y f es un homeomorfismo, se tiene que $f^n(U)$ es abierto en X, para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí, $\mathcal{O}(U, f)$ es abierto en X. Además, por la Observación 2.5.20, $\mathcal{O}(U, f)$ es $+$invariante. Así, por la Proposición 2.5.31, $N(U, V)$ no es vacío. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V$ no es vacío. En consecuencia, f es transitiva. ■

Proposición 3.4.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función transitiva en X. Si U es abierto y no vacío de X, entonces el conjunto:

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$$

es abierto y denso en X.

Demostración. Sea U un abierto no vacío de X. Como f es una función continua y U es abierto, $f^{-1}(U)$ es abierto. Más aún, $f^{-1}(f^{-1}(U)) = f^{-2}(U)$ también es abierto. De manera inductiva, se tiene que $f^{-n}(U)$ es abierto, para todo natural n. Además, sabemos que la unión arbitraria de abiertos es abierto. Así,

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$$

es abierto.

Por otro lado, consideremos cualquier abierto W no vacío en X. Probemos que $V \cap W$ es un conjunto no vacío. Como f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $W \cap f^{-n}(U)$ no es vacío. Observemos que:

$$f^{-n}(U) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U).$$

Notemos que el último conjunto es V. Así, $W \cap V$ no es vacío. Por lo tanto, V es denso en X.

■

Proposición 3.4.3. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces existe x_0 en X tal que $\mathcal{O}(x_0, f)$ es denso en X.

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Primero veamos la existencia de x_0. Como X es compacto, entonces dado $\epsilon_1 = 1$ existe un número finito de puntos $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{n_1,1} \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_1} B(x_{j,1}, 1)$$

De la misma forma, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n_k,k} \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_k} B\left(x_{j,k}, \frac{1}{k}\right).$$

Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la colección de bolas abiertas en X, donde
$U_1 = B(x_{1,1}, 1), U_2 = B(x_{2,1}, 1), \ldots, U_{n_1} = B(x_{n_1,1}, 1)$,

$$U_{n_1+1} = B\left(x_{1,2}, \frac{1}{2}\right), U_{n_1+2} = B\left(x_{2,2}, \frac{1}{2}\right), \ldots, U_{n_1+n_2} = B\left(x_{n_2,2}, \frac{1}{2}\right).$$

Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto

$$A_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(U_i)$$

Por la Proposición 3.4.2, A_i es abierto y denso en X. Utilizando el teorema de Baire [3] tenemos que:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \varnothing.$$

Sean $x_0 \in A$. Veamos que $cl(\mathcal{O}(x_0, f)) = X$. Sea $U \subset X$ tal que U es abierto y distinto de vacío. Como U es abierto, para $y_0 \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y_0, \epsilon)$ está contenido en U. Sea k un número natural tal que $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}$. Observemos que en la colección $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una de las bolas de radio $\frac{1}{k}$ contiene al punto y_0. Luego, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n_k\}$ tal que:

$$y_0 \in B\left(x_{j,k}, \frac{1}{k}\right).$$

Veamos que $B\left(x_{j,k}, \frac{1}{k}\right) \subset B(y_0, \epsilon)$. Sea $z \in B\left(x_{j,k}, \frac{1}{k}\right)$. Luego:

$$d(z, y_0) \leq d(z, x_{j,k}) + d(x_{j,k}, y_0) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así, $B\left(x_{j,k}, \frac{1}{k}\right) \subset B(y_0, \epsilon)$. Como $x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_i \neq \varnothing$. Se sigue que, $x_0 \in A_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(U_i)$.

Luego, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n_k\}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) \in U_j$.

De aquí, $f^n(x_0) \in B\left(x_{j,k}, \frac{1}{k}\right) \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x_0, f) \cap U$ no es vacío. Así, $\mathcal{O}(x_0, f)$ es densa en X. ■

Proposición 3.4.4. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua y transitiva. Sea U un subconjunto abierto no vacío en X. Se cumple que, para toda colección finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X, $U_1, U_2, ..., U_n$, existe $x_0 \in U$ y n números naturales: $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$, tales que:

$$f^{m_1}(x_0) \in U_1, f^{m_2}(x_0) \in U_2, \ldots, f^{m_n}(x_0) \in U_n.$$

Demostración. Procedamos por inducción. Si la colección está conformada por un sólo elemento, U_1, entonces, por la propiedad transitiva de f, existe $x_0 \in U$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{n_1}(x_0) \in U_1$.

Ahora, supongamos que se cumple para una colección de k subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_k$ en X. Veamos que la afirmación es cierta para una colección de $k+1$ subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_k, U_{k+1}$ en X. Como f es transitiva, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^N(U_k) \cap U_{k+1} \quad \text{no es vacío.}$$

Luego, como f^N es continua, $U \cap f^N(U_{k+1})$ es abierto y no vacío. Consideremos la nueva colección de k elementos:

$$U_1, U_2, \ldots, U_k \cap f^{-N}(U_{k+1}).$$

Utilizando la hipótesis inductiva, existe $x_0 \in U$ y k números naturales, $m_1 < m_2 < \cdots < m_{k-1}, m_k$, tales que:

$$f^{m_1}(x_0) \in U_1, f^{m_2}(x_0) \in U_2, \ldots, f^{m_{k-1}}(x_0) \in U_{k-1},$$

y

$$f^{m_k}(x_0) \in U_k \cap f^{-N}(U_{k+1}).$$

Con esto vemos que $f^{m_k}(x_0) \in U_k$ y que $f^{m_k+N}(x_0) \in U_{k+1}$. Poniendo $m_{k+1} = m_k + N$, la proposición queda demostrada. ■

Capítulo 4

Nociones relacionadas con la transitividad topológica

A lo largo del tiempo se han encontrado distintas nociones que se relacionan con la transitividad topológica, por ésto, las investigaciones han sido más profundas y los resultados se han extendido más. En este capítulo probamos las relaciones que existen entre las nociones relacionadas con la transitividad en un espacio topológico general. Después trabajamos en espacios topológicos con condiciones adicionales tales como espacios perfectos, de Hausdorff y espacios con puntos aislados para ampliar las relaciones existentes. Empezamos exponiendo dichas nociones.

4.1. Nociones

A continuación mostramos algunas de las nociones que se relacionan con el concepto de transitividad topológica [1].

Definición 4.1.1. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes propiedades definen nociones relacionadas con la transitividad topológica:

(IN) El espacio X no es la unión de dos subconjuntos propios, cerrados y $+$invariantes bajo f.

(TT) Para cualesquiera par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $N(U, V)$ no es vacío.

(TT_+) Para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $N_+(U, V)$ no es vacío (esta propiedad es equivalente a la transitividad topológica).

(TT_{++}) Para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $N_+(U, V)$ es infinito.

(DO) Existe una órbita sucesión, $\langle x_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ o $\langle x_k : k > n\rangle$, que es denso en X.

(DO_+) Existe un punto $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. En este caso, se dice que el sistema dinámico (X, f) es ***punto transitivo***. También se dice que x es un *punto transitivo* de X. El conjunto de puntos transitivos se denota como $Trans_f$.

(DO_{++}) Existe $x \in X$ tal que el conjunto *omega límite* $\omega f(x) = X$

4.2. Relaciones en un espacio topológico

Las nociones relacionadas con la transitividad topológica mecionadas previamente las estudiamos en esta sección. Para empezar, consideremos un espacio topológico sin ninguna propiedad adicional. En seguida se presentan algunas implicaciones que son obtenidas de las definiciones, a su consideración, proporcionamos sus respectivas demostraciones.

En la primera proposición, demostramos que si se cumple la propiedad DO_{++}, entonces pueden existir una infinidad de puntos transitivos.

Proposición 4.2.1. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x un punto de X. Si $\omega f(x) = X$, entonces $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es denso en X, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Supongamos que $\omega f(x) = X$. Probemos que $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por definición:

$$\omega f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\{f^k(x) : k \geq n\}).$$

Por la Observación 2.5.3:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\{f^k(x) : k \geq n\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)).$$

Luego, por hipótesis, se sigue que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X.$$

De aquí, $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la Proposición 1.2.16, se tiene que $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es denso en X, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ∎

De la Proposición 4.2.1, se puede observar que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^n(x)$ es puntos transitivo. Puesto que $Trans_f$ es el conjunto de puntos transitivos, también podemos observar que $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es un subconjunto de $Trans_f$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por lo tanto, en este caso, $Trans_f$ es un conjunto denso.

Un resultado interesante es que el conjunto $Trans_f$ es un conjunto -invariante. En seguida probamos este resultado.

Proposición 4.2.2. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Tenemos que el conjunto $Trans_f$ es -invariante en X.

Demostración. Probemos que $f^{-1}(Trans_f) \subset Trans_f$; para esto, sea $x \in f^{-1}(Trans_f)$. Luego, $f(x) \in Trans_f$. Dado que $Trans_f$ es el conjunto de puntos transitivos, tenemos que $\mathcal{O}(f(x), f)$ es densa en X. Por el Corolario 2.5.11, se sigue que $\mathcal{O}(f(x), f) \subset \mathcal{O}(x, f)$. En consecuencia, $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Por lo tanto, $x \in Trans_f$. ■

Además, si el espacio topológico X es perfecto y de Hausdorff, el conjunto $Trans_f$ es un conjunto $+$invariante. Este resultado se probará en la siguiente sección. Mientras tanto, de la Proposición 4.2.1, se obtiene el Teorema 4.2.3.

Teorema 4.2.3. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. La propiedad DO_{++} implica la propiedad DO_{+}.

Demostración. Sea x un punto de X tal que $\omega f(x) = X$. Luego, por la Proposición 4.2.1, $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. ■

A través de la órbita de un punto, podemos construir una órbita-sucesión. Por lo tanto, si tenemos un punto transitivo, podemos obtener una órbita-sucesión densa. Vemos este resultado en seguida.

Proposición 4.2.4. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si existe $x \in X$ tal que la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X, entonces existe una órbita-sucesión $\langle x_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle$ que es densa en X.

Demostración. Sea x un punto de X tal que la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Contruyamos una órbita sucesión. Observemos que la órbita de x es $\mathcal{O}(x, f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. De aquí, podemos definir:

$$\begin{gathered} x_0 = x \\ x_1 = f(x) \\ x_2 = f^2(x) \\ \vdots \\ x_k = f^k(x) \\ \vdots \end{gathered}$$

Siguiendo este mismo proceso, de manera general, definimos $x_k = f^k(x)$, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X, concluimos que $\langle x_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle$ es densa en X.

■

El siguiente teorema se obtiene de la Proposición 4.2.4:

Teorema 4.2.5. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. La propiedad DO_+ implica la propiedad DO.

Por otro lado, notemos que para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, si el conjunto $N_+(U, V)$ es infinito, entonces $N_+(U, V)$ no es vacío. Así, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.2.6. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que la propiedad TT_{++} implica la propiedad TT_+.

Para la siguiente proposición recordemos la Definición 2.5.1, 5).

Proposición 4.2.7. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y consideremos U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Si el conjunto $N_+(U, V)$ no es vacío, entonces $N(U, V)$ no es vacío.

Demostración. Por definición, $N_+(U, V) = N(U, V) \cap \mathbb{N}$. Como $N_+(U, V)$ no es vacío, se tiene que $N(U, V)$ no es vacío. ■

Como consecuencia de la Proposición 4.2.7, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.2.8. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. La propiedad TT_+ implica la propiedad TT.

En el siguiente resultado podemos ver la relación entre una órbita-sucesión densa y el conjunto $N(U, V)$, donde U y V son abiertos no vacíos de un espacio topológico.

Proposición 4.2.9. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si X tiene una órbita sucesión densa en X, entonces $N(U, V)$ no es vacío, para cualesquiera U y V abiertos no vacíos de X.

Demostración. Supongamos que X tiene una órbita sucesión densa en X, $\langle x_k : k \in \mathbb{Z} \rangle$. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como $\langle x_k : k \in \mathbb{Z} \rangle$ es denso, existen n y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $x_n \in U$ y $x_m \in V$.
Pongamos $x = x_1$. Se sigue que:

$$f(x) = f(x_1) = x_2,$$

$$f^2(x) = f(x_2) = x_3.$$

De manera general,

$$f^{k-1}(x) = f(x_{k-1}) = x_k.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m \leq n$. Luego, $n - m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Notemos que:

$$f^{m-1}(x) = f(x_{m-1}) = x_m,$$

$$f^m(x) = f(x_m) = x_{m+1},$$

$$\vdots$$

$$f^{n-1}(x) = f(x_{n-1}) = x_n,$$

Siguiendo esta forma, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_n &= f^{n-(m+1)}(f^m(x)) \\ &= f^{n-(m+1)}(x_{m+1}) \\ &= f^{n-(m+1)}(f(x_m)) \\ &= f^{n-m}(x_m). \end{aligned}$$

Como $x_m \in V$, se sigue que $x_n \in f^{n-m}(V)$. Por lo tanto, $x_n \in U \cap f^{n-m}(V)$. Con ésto vemos que $U \cap f^{n-m}(V)$ no es vacío. Así, $n - m \in N(U, V)$. Por lo tanto, $N(U, V)$ no es vacío. ∎

De la Proposición 4.2.9, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.2.10. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. La propiedad DO implica la propiedad TT.

La Proposición 4.2.11 es bastante interesante, pues tenemos una razón suficiente para que el conjunto $N_+(U, V)$ no sólo sea no vacío, sino infinito.

Proposición 4.2.11. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si existe $x \in X$ tal que $\omega f(x) = X$, entonces, para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, se tiene que $N_+(U, V)$ es infinito.

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $\omega f(x) = X$ y consideremos U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por la Proposición 4.2.1, $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es densa en X, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, por el Teorema 1.2.16, tenemos que:

$$U \cap \mathcal{O}(f^n(x), f) \quad \text{no es vacío, para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{4.1}$$

y

$$V \cap \mathcal{O}(f^n(x), f) \quad \text{no es vacío, para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.2}$$

En particular, por (4.1), $U \cap \mathcal{O}(x, f)$ no es vacío, por lo que existe $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$f^j(x) \in U. \tag{4.3}$$

Por (4.2), $V \cap \mathcal{O}(f^{j+1}(x), f)$ no es vacío. Luego, existe $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_1+j+1}(x) \in V$. Sea $l_1 = k_1 + j + 1$. Notemos que $l_1 > j$. Así, $l_1 - j \in \mathbb{N}$. Por otra parte, puesto que $f^{l_1}(x) \in V$, se sigue que $f^{l_1-j}(f^j(x)) \in V$. De donde, $f^j(x) \in f^{-(l_1-j)}(V)$. Además, por (4.3), obtenemos que:

$$f^j(x) \in U \cap f^{-(l_1-j)}(V).$$

Así, $l_1 - j \in N_+(U, V)$.

Por otra parte, por (4.2), se tiene que $V \cap \mathcal{O}(f^{l_1+1}(x), f)$ no es vacío. En consecuencia, existe $k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_2+l_1+1}(x) \in V$. Pongamos $l_2 = k_2 + l_1 + 1$. Notemos que $l_2 > l_1$. Además, como $l_1 > j$, tenemos que $l_2 > j$. Por lo tanto, $l_2 - j \in \mathbb{N}$. Como $f^{l_2}(x) \in V$, obtenemos que $f^{l_2-j}(f^j(x)) \in V$. De donde, $f^j(x) \in f^{-(l_2-j)}(V)$. Por (4.3), se obtiene que:

$$f^j(x) \in U \cap f^{-(l_2-j)}(V).$$

De aquí, tenemos que, $l_2 - j \in N_+(U, V)$. En resumen, $l_1 - j$ y $l_2 - 1 \in N_+(U, V)$, donde $l_1 - j < l_2 - j$. Siguiendo este proceso, de manera inductiva, podemos construir una sucesión creciente de números naturales tales que:

$$l_1 - j < l_2 - j < l_3 - j < \ldots < l_n - j < \ldots$$

donde $l_n - j \in N_+(U, V)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tenemos que $N_+(U, V)$ es un conjunto infinito. ■

El siguiente teorema se obtiene de la Proposición 4.2.11:

Teorema 4.2.12. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. La propiedad DO_{++} implica la propiedad TT_{++}.

En la Proposición 4.2.11, si en lugar de considerar el conjunto $N_+(U, V)$, se considera el conjunto $N_+(\{x\}, U)$, obtenemos un resultado similar, el cual se muestra en la Proposición 4.2.13.

Proposición 4.2.13. Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función continua y x un punto de X. Se cumple que, $\omega f(x) = X$ si y sólo si $N_+(\{x\}, U)$ es infinito, para todo U abierto no vacío de X.

Demostración. Supongamos que $\omega f(x) = X$. Sea U un abierto no vacío de X. Probemos que $N_+(\{x\}, U)$ es infinito.

Por la Observación 2.5.3, tenemos que:

$$\omega f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)),$$

Esto implica que $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En otras palabras, $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es densa en X, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego:

$$\mathcal{O}(f^n(x), f) \cap U \quad \text{no es vacío, para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.4}$$

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k_0 \geq n$ tal que $f^{k_0}(x) \in U$. Como $f^{k_0}(x) \in U$, tenemos que $f^{k_0}(\{x\}) \cap U$ no es vacío. De aquí, $k_0 \in N_+(\{x\}, U)$. Por (4.4), tenemos que $\mathcal{O}(f^{k_0+1}(x), f) \cap U$ no es vacío, por lo que existe $l_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{l_0}(f^{k_0+1}(x)) \in U$. Observemos que $f^{l_0}(f^{k_0+1}(x)) = f^{l_0+k_0+1}(x)$. Definamos $k_1 = l_0 + k_0 + 1$. Dado que $f^{k_1}(x) \in U$, se tiene que $f^{k_1}(\{x\}) \cap U$ no es vacío. Así, $k_1 \in N_+(\{x\}, U)$. Notemos que $k_0 < k_1$. Utilizando otra vez (4.4), podemos ver que $\mathcal{O}(f^{k_1+1}(x), f) \cap U$ no es vacío, por lo cual existe $l_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{l_1}(f^{k_1+1}(x)) \in U$, donde $f^{l_1}(f^{k_1+1}(x)) = f^{l_1+k_1+1}(x)$. Definiendo $k_2 = l_1 + k_1 + 1$, se tiene que $f^{k_2}(\{x\}) \cap U$ no es vacío. De donde, $k_2 \in N_+(\{x\}, U)$. Observemos que $k_1 < k_2$.

Siguiendo el mismo proceso, de manera inductiva, existe $k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de tal forma que $k_0 < k_1 < \ldots < k_{n-1} < k_n$. Por (4.4), $\mathcal{O}(f^{k_n+1}(x), f) \cap U$ no es vacío. En consecuencia, existe $l_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{l_n}(f^{k_n+1}(x)) \in U$. Notemos que $f^{l_n}(f^{k_n+1}(x)) = f^{l_n+k_n+1}(x)$. Con ésto vemos que $f^{l_n+k_n+1}(\{x\}) \cap U$ no es vacío. Definiendo $k_{n+1} = l_n + k_n + 1$, obtenemos que $k_{n+1} \in N_+(\{x\}, U)$. Observemos que $k_n < k_{n+1}$.

Por lo tanto, $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N_+(\{x\}, U)$. Notemos que hemos construído una sucesión creciente $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Luego, $N_+(\{x\}, U)$ es un conjunto infinito.

Recíprocamente, supongamos que para cualquier abierto no vacío V de X se tiene que $N_+(\{x\}, V)$ es infinito. Probemos que $\omega f(x) = X$. Para esto, veamos que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X.$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. Veamos que $\mathcal{O}(f^n(x), f) \cap U$ no es vacío. Por lo supuesto, $N_+(\{x\}, U)$ es infinito. Así, existe $k \in N_+(\{x\}, U)$ tal que $k > n$. Tenemos que $f^k(\{x\}) \cap U$ no es vacío, esto es que $f^k(x) \in U$. Observemos que $k - n > 0$. Definamos $m = k - n$. Luego, $f^{m+n}(x) = f^{(k-n)+n}(x) = f^k(x)$. Puesto que $f^k(x) \in U$ y $f^m(f^n(x)) = f^{m+n}(x)$, se tiene que $f^m(f^n(x)) \in U$. Además, notemos que $f^m(f^n(x)) \in \mathcal{O}(f^n(x), f)$. Así, obtenemos que $f^m(f^n(x)) \in \mathcal{O}(f^n(x), f) \cap U$. Con esto vemos que $\mathcal{O}(f^n(x), f) \cap U$ no es vacío. Así, $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X$. En consecuencia, $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por lo tanto:

$$\omega f(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)),$$

es decir, $\omega f(x) = X$. ■

En la siguiente proposición se muestra la relación que existe entre las propiedades IN y TT, además se agrega una propiedad más, la cual será útil para resultados posteriores:

Proposición 4.2.14. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) Para cualesquiera U y V abiertos no vacíos de X, el conjunto $N(U, V)$ no es vacío (TT).

ii) El espacio X no contiene dos subconjuntos disjuntos, abiertos y -invariantes.

iii) El espacio X no es la unión de dos subconjuntos propios, cerrados y $+$invariantes (IN).

Demostración. Veamos que la propiedad i) implica la propiedad ii):

Supongamos que existen dos subconjuntos U y V abiertos disjuntos y -invariantes de X. Por la Proposición 2.5.27, se tiene que $N_+(U,V)$ es vacío. Más aún, puesto que U y V son disjuntos, $N(U,V)$ también es vacío, pues $N(U,V) = N_+(U,V) \cup -N_+(V,U) \cup \{0\}$. Esto último contradice la hipótesis. Por lo tanto, X no contiene dos subconjuntos disjuntos, abiertos y -invariantes.

Ahora, probemos que la propiedad ii) implica la propiedad i).

Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por la Proposición 1.4.11, f^k es continua, para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, $f^{-k}(U)$ y $f^{-k}(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X. Más aún, $\mathcal{O}_-(U,f)$ y $\mathcal{O}_-(V,f)$ también son conjuntos abiertos no vacíos de X y, por la Observación 2.5.20, 2), también son -invariantes. Por hipótesis, X no contiene subconjuntos disjuntos, abiertos y -invariantes; por lo que, $\mathcal{O}_-(U,f) \cap \mathcal{O}_-(V,f)$ no es vacío. Sea $x \in \mathcal{O}_-(U,f) \cap \mathcal{O}_-(V,f)$. Luego, existen k_1 y $k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x \in f^{-k_1}(U)$ y $x \in f^{-k_2}(V)$. Así, $f^{k_1}(x) \in U$ y $f^{k_2}(x) \in V$. Pongamos $z = f^{k_1}(x)$. Así, $z \in U$. Sea $l = k_2 - k_1$. De aquí, $f^l(z) = f^{k_2-k_1}(f^{k_1}(x)) = f^{k_2}(x)$. Como $f^{k_2}(x) \in V$, se tiene que $f^l(z) \in V$. En consecuencia, $z \in f^{-l}(V)$. En resumen, $z \in U \cap f^{-l}(V)$. Por lo tanto, $U \cap f^{-l}(V)$ no es vacío. Así, $l \in N(U,V)$.

Probemos que, la propiedad ii) implica la propiedad iii).

Supongamos que X no contiene dos subconjuntos disjuntos, abiertos y -invariantes. Sean A y B subconjuntos propios, cerrados y $+$invariantes de X. Veamos que $X \neq A \cup B$. Para verificar lo último, supongamos que $X = A \cup B$. Notemos que $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son abiertos no vacíos. Por la Proposición 2.5.19, $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son -invariantes. Probemos que $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ es vacío. Sea $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. Luego, $x \in X \setminus A$ y $x \in X \setminus B$. Como $X = A \cup B$, se tiene que $X \setminus A \subseteq B$. Así, $x \in B$, pero $x \in X \setminus B$, lo cual es una contradicción. Por lo que, $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ es vacío. Así, X contiene dos subconjuntos propios, abiertos y -invariantes, lo cual contradice lo supuesto. En consecuencia, $X \neq A \cup B$. Por lo tanto, X no puede ser la unión de dos subconjuntos propios, cerrados y $+$invariantes.

Por último, veamos que la propiedad iii) implica la propiedad ii).

Supongamos que X no es la unión de dos subconjuntos propios, cerrados y $+$invariantes. Sean U y V subconjuntos propios, abiertos y -invariantes de X. Veamos que $U \cap V$ no es vacío. Para esto, supongamos que $U \cap V$ es vacío. Notemos que $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son conjuntos cerrados; además, por la Proposición 2.5.19, se tiene que $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son $+$invariantes. Como U y V son subconjuntos propios, se tiene que $X \setminus U$ y $X \setminus V$ también son propios. Notemos que

$$(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus (U \cap V) = X \setminus \emptyset = X,$$

lo cual contradice la hipótesis. En consecuencia, $U \cap V$ no es vacío. Así, X no contiene dos subconjuntos disjuntos, abiertos y -invariantes. ■

De la Proposición 4.2.14, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.2.15. Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que la propiedad TT es equivalente a la propiedad IN.

De acuerdo a los resultados obtenidos en esta sección, la relación que existe entre las nociones mencionadas en la Definición 4.1.1, en un espacio topológico general, se describe gráficamente en el Diagrama 2 de la Figura 4.1:

$$
\begin{tikzcd}
DO_{++} \arrow[r, "4.2.3"] \arrow[d, "4.2.12"'] & DO_{+} \arrow[r, "4.2.5"] & DO \arrow[d, "4.2.10"] & \\
TT_{++} \arrow[r, "4.2.6"'] & TT_{+} \arrow[r, "4.2.8"'] & TT \arrow[r, leftrightarrow, "4.2.15"'] & IN
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.1: Diagrama 2

Hasta este punto hemos considerado solamente espacios topológicos generales, en la siguiente sección agregamos algunas propiedades al espacio; de esta manera se obtienen nuevos resultados.

4.3. Condiciones en el espacio topológico

En esta sección consideraremos espacios topológicos que tienen la propiedad de Hausdorff. Los espacios perfectos y los espacios con puntos aislados tienen un papel importante para obtener algunas equivalencias entre las nociones relacionadas con la transitividad topológica. Comenzamos trabajar con los espacios perfectos.

4.3.1. Espacios topológicos perfectos

A partir de aquí, se trabaja en espacios topológicos perfectos y de Hausdorff y se obtienen nuevas relaciones entre las nociones de la Definición 4.1.1. Además, comenzamos a introducir espacios topológicos con puntos aislados.

Los Teoremas 4.2.6 y 4.2.8, nos muestran que la propiedad TT_{++} implica la propiedad TT_{+} y que TT_{+} implica TT en un espacio topológico general, respectivamente. Ahora, si el espacio topológico es perfecto y de Hausdorff, las propiedades TT_{++}, TT_{+} y TT son equivalentes. La Proposición 4.3.3 nos muestra estas equivalencias.

Para probar la Proposición 4.3.3, es necesario demostrar la Proposición 4.3.1.

Proposición 4.3.1. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si X es perfecto y, para cualesquiera V y W abiertos no vacíos de X, se tiene que $N(V, W)$ no es vacío, entonces para cualquier abierto no vacío U de X, se tiene que $N_+(U, U)$ es infinito.

Demostración. Supongamos que X es perfecto y que, para cualesquiera V y W abiertos no vacíos de X, se tiene que $N(V, W)$ no es vacío. Sea U un conjunto abierto no vacío de X. Veamos que $N_+(U, U)$ es infinito, para ésto, por inducción matemática, encontraremos una sucesión creciente $\{k_n\} \subseteq N_+(U, U)$.

Como X es perfecto, por la Proposición 1.3.18, U es infinito. Luego, existen dos puntos distintos en U, digamos x_1 y x_2. Por la propiedad de Hausdorff, existen dos subconjuntos abiertos V_1 y W_1 de U tales que $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in W_1$ y además, $V_1 \cap W_1$ es vacío. Por hipótesis, tenemos que $N(V_1, W_1)$ no es vacío. Además, como V_1 y W_1 son disjuntos, se tiene que $N(V_1, W_1) \setminus \{0\}$ no es vacío. Por la Proposición 2.5.8, tenemos que $N_+(V_1, W_1)$ no es vacío, por lo que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $V_1 \cap f^{-k_1}(W_1)$ no es vacío. Notemos que $V_1 \cap f^{-k_1}(W_1)$ es un conjunto abierto en X, pues f^{k_1} es continua (Proposición 1.4.11). Pongamos $U_1 = V_1 \cap f^{-k_1}(W_1)$. Así, U_1 es un abierto no vacío de X. Notemos que $U_1 \subset U$. Veamos que:

$$f^{k_1}(U_1) \subset U.$$

Claramente, $f^{k_1}(U_1) = f^{k_1}(V_1 \cap f^{-k_1}(W_1))$; más aún, $f^{k_1}(V_1 \cap f^{-k_1}(W_1)) \subset f^{k_1}(f^{-k_1}(W_1))$. Notemos que $f^{k_1}(f^{-k_1}(W_1)) \subset W_1$. Así, $f^{k_1}(U_1) \subset W_1$. Ya que $W_1 \subset U$, se obtiene que $f^{k_1}(U_1) \subset U$.

Por otra parte, como $U_1 \subset U$, se tiene que $f^{k_1}(U_1) \subset f^{k_1}(U)$. Así, $f^{k_1}(U_1) \subset f^{k_1}(U) \cap U$. Dado que U_1 no es vacío, tenemos que $f^{k_1}(U_1)$ no es vacío y, en consecuencia, $f^{k_1}(U) \cap U$ no es vacío. Por lo tanto, $k_1 \in N_+(U, U)$.

Ahora hallaremos el siguiente término de la sucesión creciente que deseamos. Puesto que X es perfecto, por la Proposición 1.3.18, existen puntos distintos y_1 y y_2 en U_1. También, por la propiedad de Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos V_2 y W_2 de U_1 tales que $y_1 \in V_2$ y $y_2 \in W_2$. Por hipótesis, $N(V_2, W_2)$ no es vacío. Por la Proposición 2.5.8, $N_+(V_2, W_2)$ no es vacío. Dado que V_2 y W_2 son disjuntos, existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $V_2 \cap f^{-j_2}(W_2)$ no es vacío. Por la Proposición 1.4.11, f^{j_2} es continua. De aquí, $V_2 \cap f^{-j_2}(W_2)$ es abierto en X. Sea $U_2 = V_2 \cap f^{-j_2}(W_2)$. Así, U_2 es abierto no vacío de X. Notemos que $U_2 \subset U_1$. Probemos que:

$$f^{j_2}(U_2) \subset U_1.$$

Observemos que $f^{j_2}(U_2) = f^{j_2}(V_2 \cap f^{-j_2}(W_2))$. De aquí, $f^{j_2}(U_2) \subset W_2$. Dado que $W_2 \subset U_1$, tenemos que $f^{j_2}(U_2) \subset U_1$.

De aquí, $f^{k_1}(f^{j_2}(U_2)) \subset f^{k_1}(U_1)$; esto es, $f^{k_1+j_2}(U_2) \subset f^{k_1}(U_1)$. Pongamos $k_2 = k_1 + j_2$. Notemos que $k_1 < k_2$. Ya que $f^{k_1}(U_1) \subset U$, $f^{k_2}(U_2) \subset U$. También, puesto que $U_2 \subset U$, se sigue que $f^{k_2}(U_2) \subset f^{k_2}(U)$. Por lo tanto, $f^{k_2}(U_2) \subset f^{k_2}(U) \cap U$. En consecuencia, $f^{k_2}(U) \cap U$ no es vacío. Así, $k_2 \in N_+(U, U)$.

Ahora, supongamos que, para $n \in \mathbb{N}$, existen un abierto no vacío $U_n \subset U$ y $k_n \in \mathbb{N}$ tales que:

$$f^{k_n}(U_n) \subset U.$$

Como X es perfecto, por la Proposición 1.3.18, existen z_1 y z_2 en U_n con $z_1 \neq z_2$ y, por la propiedad de Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos V_{n+1} y W_{n+1} en U_n tales que $z_1 \in V_{n+1}$ y $z_2 \in W_{n+1}$. Por lo supuesto, $N(V_{n+1}, W_{n+1})$ no es vacío. Luego, por la Proposición 2.5.8, $N_+(V_{n+1}, W_{n+1})$ no es vacío. Además, como V_{n+1} y W_{n+1} son disjuntos, existe $j_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n+1} \cap f^{-j_{n+1}}(W_1)$ no es vacío. Pongamos $U_{n+1} = V_{n+1} \cap f^{-k_1}(W_{n+1})$. Notemos que U_{n+1} no es vacío. Dado que f^{n+1} es continua, se tiene que U_{n+1} es abierto de X. Además, $U_{n+1} \subset U_n$. Veamos que:

$$f^{j_{n+1}}(U_{n+1}) \subset U_n.$$

Observemos que $f^{j_{n+1}}(U_{n+1}) = f^{j_{n+1}}(V_{n+1} \cap f^{-k_1}(W_{n+1}))$. Luego, $f^{j_{n+1}}(U_{n+1}) \subset W_{n+1}$. Como $W_{n+1} \subset U_n$, tenemos que $f^{j_{n+1}}(U_{n+1}) \subset U_n$.

Notemos que $f^{k_n}(f^{j_{n+1}}(U_{n+1})) = f^{k_n+j_{n+1}}(U_{n+1})$. Como $f^{j_{n+1}}(U_{n+1}) \subset U_n$, tenemos que $f^{k_n+j_{n+1}}(U_{n+1}) \subset f^{k_n}(U_n)$. Haciendo $k_{n+1} = k_n + j_{n+1}$, se sigue que $f^{k_{n+1}}(U_{n+1}) \subset f^{k_n}(U_n)$. De donde, $f^{k_{n+1}}(U_{n+1}) \subset U$. Además, puesto que $U_{n+1} \subset U_n$ y $U_n \subset U$, tenemos que, $f^{k_{n+1}}(U_{n+1}) \subset f^{k_{n+1}}(U)$. Por lo tanto, $f^{k_{n+1}}(U_{n+1}) \subset f^{k_{n+1}}(U) \cap U$. Así, $f^{k_{n+1}}(U) \cap U$ no es vacío. Luego, $k_{n+1} \in N_+(U, U)$. Además, como $k_{n+1} = k_n + j_{n+1}$, claramente, $k_n < k_{n+1}$.

En consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $k_n \in N_+(U, U)$ y además, $\{k_n\}$ es una sucesión creciente. Así, $N_+(U, U)$ es infinito. ■

Con ayuda de la Proposición 4.3.1, podemos probar lo siguiente:

Proposición 4.3.2. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si X es perfecto y para cada par de abiertos no vacíos F y G de X, el conjunto $N(F, G)$ no es vacío, entonces para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, $N_+(U, V)$ no es vacío si y sólo si $N_+(V, U)$ no es vacío.

Demostración. Supongamos que X es perfecto y para cada par de abiertos no vacíos F y G de X, el conjunto $N(F, G)$ no es vacío. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Supongamos que $N_+(U, V)$ no es vacío; probemos que $N_+(V, U)$ no es vacío. Consideremos $n \in N_+(U, V)$. Luego, $U \cap f^{-n}(V)$ no es vacío. Pongamos $W = U \cap f^{-n}(V)$. Notemos que W es un abierto no vacío de X. Por hipótesis, y por la Proposición 4.3.1, obtenemos que $N_+(W, W)$ es infinito, por lo cual existe $k \in N_+(W, W)$ tal que $k > n$. Notemos que $f^k(W) = f^k(U \cap f^{-n}(V))$. Observemos que $f^k(U \cap f^{-n}(V)) \subset f^k(f^{-n}(V))$ y que $f^k(f^{-n}(V)) = f^{k-n}(V)$. Así, $f^k(W) \subset f^{k-n}(V)$. Dado que $W \subset U$, se sigue que $f^k(W) \cap W \subset f^{k-n}(V) \cap U$. Puesto que $f^k(W) \cap W$ no es vacío, se tiene que $f^{k-n}(V) \cap U$ no es vacío, equivalentemente $V \cap f^{-(k-n)}(U)$ no es vacío. Así, $k - n \in N_+(V, U)$. En conclusión, $N_+(V, U)$ no es vacío.

Para probar el recíproco básta intercambiar el orden de los conjuntos U y V y seguir el mismo procedimiento. ■

La Proposición 4.3.1 es útil para probar la siguiente proposición:

Proposición 4.3.3. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si X es perfecto y para cada par de abiertos no vacíos F y G de X, el conjunto $N(F, G)$ no es vacío, entonces para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, $N_+(U, V)$ es infinito.

Demostración. Supongamos que X es perfecto y que para cada par de abiertos no vacíos F y G de X, el conjunto $N(F, G)$ no es vacío. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Veamos que $N_+(U, V)$ es infinito. Por hipótesis, tenemos que $N(U, V)$ no es vacío. De aquí, $N_+(U, V)$ no es vacío. De manera inductiva, hallaremos una sucesión creciente $\{n_i\} \subset N_+(U, V)$.

Sea $n_1 \in N_+(U, V)$. Luego, $U \cap f^{-n_1}(V)$ no es vacío. Pongamos $W_1 = U \cap f^{-n_1}(V)$. Notemos que W_1 no es vacío y, dado que f^{n_1} es continua, por el Teorema 1.4.6, se tiene que W_1 es abierto en X. Por la Proposición 4.3.1, podemos afirmar que $N_+(W_1, W_1)$ es un conjunto infinito. En consecuencia, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k_1 > 2n_1$ y $f^{k_1}(W_1) \cap W_1$ no es vacío, donde $f^{k_1}(W_1) = f^{k_1}(U \cap f^{-n_1}(V))$. Puesto que $f^{k_1}(U \cap f^{-n_1}(V)) \subset f^{k_1}(f^{-n_1}(V))$ y $f^{k_1}(f^{-n_1}(V)) = f^{k_1-n_1}(V)$, obtenemos que, $f^{k_1}(W_1) \subset f^{k_1-n_1}(V)$. Luego, $f^{k_1}(W_1) \cap W_1 \subset f^{k_1-n_1}(V)$. Más aún, dado que $f^{k_1}(W_1) \cap W_1 \subset W_1$ y $W_1 \subset U$, se tiene que $f^{k_1}(W_1) \cap W_1 \subset U$. Así, tenemos que $f^{k_1}(W_1) \cap W_1 \subset U \cap f^{k_1-n_1}(V)$. Como $f^{k_1}(W_1) \cap W_1$ no es vacío, claramente, $U \cap f^{k_1-n_1}(V)$ no es vacío. Puesto que $k_1 > 2n_1$, se tiene que $k_1 > n_1$, esto es, $k_1 - n_1 > 0$. Por lo tanto, $k_1 - n_1 \in N_+(U, V)$.

Haciendo $n_2 = k_1 - n_1$, tenemos que $n_2 > n_1$ y $n_2 \in N_+(U, V)$.

Ahora, supongamos que, para $i \in \mathbb{N}$, existe $n_i \in N_+(U, V)$, donde $n_i > n_{i-1}$. Así, podemos definir el conjunto $W_i = U \cap f^{-n_i}(V)$. Notemos que W_i no es vacío. Además, ya que f^{n_i} es continua, por el Teorema 1.4.6, se tiene que W_i es abierto en X. Por la Proposición 4.3.1, tenemos que $N_+(W_i, W_i)$ es infinito. Así, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $k_i > 2n_i$ y $f^{k_i}(W_i) \cap W_i$ no es vacío. Observemos que $f^{k_i}(W_i) = f^{k_i}(U \cap f^{-n_i}(V))$ y, dado que $f^{k_i}(U \cap f^{-n_i}(V)) \subset f^{k_i}(f^{-n_i}(V))$ y $f^{k_i}(f^{-n_i}(V)) = f^{k_i-n_i}(V)$, tenemos que $f^{k_i}(W_i) \subset f^{k_i-n_i}(V)$. Así, $f^{k_i}(W_i) \cap W_i \subset f^{k_i-n_i}(V)$. Además, puesto que $f^{k_i}(W_i) \cap W_i \subset W_i$ y $W_i \subset U$, obtenemos que $f^{k_i}(W_i) \cap W_i \subset U$. Por lo tanto, $f^{k_i}(W_i) \cap W_i \subset U \cap f^{k_i-n_i}(V)$. Como $f^{k_i}(W_i) \cap W_i$ no es vacío, se sigue que $U \cap f^{k_i-n_i}(V)$ no es vacío. Definimos $n_{i+1} = k_i - n_i$. Como $k_i > 2n_i$, se tiene que $k_i > n_i$. De aquí, $k_i - n_i > 0$. Por lo que, $n_{i+1} \in N_+(U, V)$. Notemos que $n_i < n_{i+1}$.

En resumen, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $n_i \in N_+(U, V)$ y además, $\{n_i\}$ es una sucesión creciente. En consecuencia, $N_+(U, V)$ es infinito. ■

Como consecuencia del Teorema 4.2.7 y de la Proposición 4.3.3, se obtiene el Teorema 4.3.4.

Teorema 4.3.4. Sean X un espacio topológico perfecto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que la propiedad TT_+ es equivalente a la propiedad TT.

Además, de la Proposición 4.3.3 y el Teorema 4.2.6, se obtiene el Teorema 4.3.5.

Teorema 4.3.5. Sean X un espacio topológico perfecto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que la propiedad TT_{++} es equivalente a la propiedad TT_{+}.

Hemos visto que las propiedades TT_{++}, TT_{+} y TT son equivalentes. También se cumple que TT_{+} implica la propiedad TT_{++}, si los espacios topológicos tienen puntos aislados.

Por otro lado, con el Teorema 4.2.3, vemos que la propiedad DO_{++} implica la propiedad DO_{+}, en un espacio topológico en general. Ahora, agregando las propiedades de Hausdorff y perfecto, podemos ver que DO_{++} es equivalente a DO_{+}. Esto lo vemos en la siguiente proposición:

Proposición 4.3.6. Sean X un espacio topológico de Hausdoff y perfecto y $f : X \to X$ una función continua. Si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X, entonces $\omega f(x) = X$.

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Probemos que $\omega f(x) = X$. Para ésto, veamos que $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es densa en X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Procedamos por inducción.

Veamos que $\mathcal{O}(f(x), f)$ es denso en X. Supongamos que existe un abierto no vacío U de X tal que $\mathcal{O}(f(x), f) \cap U$ es vacío. Como $\mathcal{O}(x, f) \cap U$ no es vacío, y ya que $\mathcal{O}(f(x), f) = \mathcal{O}(x, f) \setminus \{x\}$, tenemos que $\mathcal{O}(x, f) \cap U = \{x\}$. Luego, $(U \setminus \{x\}) \cap \mathcal{O}(x, f)$ es vacío. Dado que X es perfecto, por la Proposición 1.3.15, U tiene más de un punto. De donde $U \setminus \{x\}$ no es vacío. Además, como X es de Hausdorff, por la Proposición 1.3.7, $\{x\}$ es cerrado en X. Así, $U \setminus \{x\}$ es abierto en X, pero $(U \setminus \{x\}) \cap \mathcal{O}(x, f)$ es vacío; lo cual contradice que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Por lo tanto, $\mathcal{O}(f(x), f) \cap U$ no es vacío, esto es, $\mathcal{O}(f(x), f)$ es densa en X; en otras palabras:

$$cl(\mathcal{O}(f(x), f)) = X.$$

Ahora, supongamos que, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es densa en X. Probemos que $\mathcal{O}(f^{n+1}(x), f)$ también es densa en X. Supongamos que existe un abierto no vacío U de X de tal forma que $\mathcal{O}(f^{n+1}(x), f) \cap U$ es vacío. Por lo supuesto, $\mathcal{O}(f^n(x), f) \cap U$ no es vacío, y puesto que $\mathcal{O}(f^{n+1}(x), f) = \mathcal{O}(f^n(x), f) \setminus \{f^n(x)\}$, tenemos que $\mathcal{O}(f^n(x), f) \cap U = \{f^n(x)\}$. Se sigue que $(U \setminus \{f^n(x)\}) \cap \mathcal{O}(f^n(x), f)$ es vacío. Como X es perfecto, por la Proposición 1.3.15, se tiene que U tiene más de un punto, por lo que $U \setminus \{f^n(x)\}$ no es vacío. Más aún, por la Proposición 1.3.7, $\{f^n(x)\}$ es cerrado. Luego, $U \setminus \{f^n(x)\}$ es abierto en X. Pero $(U \setminus \{f^n(x)\}) \cap \mathcal{O}(f^n(x), f)$ es vacío, lo cual es una contradicción, ya que $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es denso en X. En consecuencia, $\mathcal{O}(f^{n+1}(x), f) \cap U$ no es vacío. De aquí, $\mathcal{O}(f^{n+1}(x), f)$ es denso en X. Con ésto, hemos visto que:

$$cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X.$$

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X;$$

es decir, $\omega f(x) = X$. ■

Como consecuencia de la Proposición 4.3.6 y el Teorema 4.2.3, se obtiene el Teorema 4.3.7.

Teorema 4.3.7. Sea X un espacio topológico perfecto y de Hausdorff y sea $f : X \to X$ una función continua. Se cumple que la propiedad DO_{++} es equivalente a la propiedad DO_{+}.

Con ayuda de la Proposición 4.3.6, podemos demostrar el siguiente resultado:

Corolario 4.3.8. Sean X es un espacio topológico de Hausdorff y perfecto y $f : X \to X$ una función continua. Si el conjunto $Trans_f$ no es vacío, entonces el $Trans_f$ es un subconjunto $+$invariante y denso en X.

Demostración. Supongamos que $Trans_f$ no es vacío. Probemos que $Trans_f$ es un conjunto $+$invariante. Sea $y \in f(Trans_f)$. Luego, existe $x \in Trans_f$ tal que $f(x) = y$. Se sigue que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Por la Proposición 4.3.6, $\omega f(x) = X$. De aquí, por la Observación 2.5.3, podemos ver que $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; esto es $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es densa en X, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así, $\mathcal{O}(f(x), f))$ es densa en X. Por lo tanto, puesto $y = f(x)$, se tiene que $y \in Trans_f$. En consecuencia, $f(Trans_f) \subset Trans_f$. Así, $Trans_f$ es un conjunto $+$invariante.

Ahora, veamos que $Trans_f$ es un conjunto denso. Tenemos que $\mathcal{O}(f^n(x), f)$ es densa en X, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\} \subset Trans_f$; esto significa que $\mathcal{O}(x, f) \subset Trans_f$. Como $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X, se obtiene que $Trans_f$ es denso en X. ■

De la Proposición 4.2.2 y el Corolario 4.3.8, se tiene la Observación 4.3.9.

Observación 4.3.9. Sean X un espacio topológico perfecto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si $Trans_f$ no es vacío, entonces $Trans_f$ es invariante y denso en X.

En la Proposición 4.3.10, se hace presente el concepto de punto aislado, concepto que en la Sección 4.3.2 es de suma importancia para obtener más resultados. Hasta ahora, hemos omitido los puntos aislados, pues hemos trabajado con espacios topológicos perfectos.

Proposición 4.3.10. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $f : X \to X$ una función continua y A un subconjunto $+$invariante de X. Si para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $N(U, V)$ no es vacío, entonces el interior de $f^{-1}(A) \setminus A$ es vacío o consiste sólo de un punto aislado.

Demostración. Supongamos que para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $N(U, V)$ no es vacío. Definamos $U = int(f^{-1}(A) \setminus A)$. Probemos que U es vacío o consiste sólo de un punto aislado.

Supongamos que U tiene por lo menos dos puntos, digamos x_1 y x_2. Por la propiedad de Hausdorff, existen U_1 y U_2 subconjuntos disjuntos, abiertos y no vacíos en U tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$. Veamos que $f(U_i) \subset A$, para $i \in \{1, 2\}$. Sea $x \in f(U_i)$. Luego, existe $w \in U_i$ tal que $f(w) = x$. Como $w \in U_i$ y $U_i \subset U$, tenemos que $w \in U$. Dado que $U = int(f^{-1}(A) \setminus A)$, se tiene que $w \in int(f^{-1}(A) \setminus A)$. En consecuencia, $f(w) \in A$ y, puesto que $x = f(w)$, obtenemos que $x \in A$. Por lo tanto, $f(U_i) \subset A$, para $i \in \{1, 2\}$. Más aún, como A es +invariante, por la Observación 2.5.16, se tiene que, $f^k(U_i) \subset A$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para $i \in \{1, 2\}$.

Por otra parte, por hipótesis, tenemos que el conjunto $N(U_1, U_2)$ no es vacío. Puesto que U_1 y U_2 son disjuntos, por la Proposición 2.5.9, $N_+(U_1, U_2)$ no es vacío; por lo que existe $m \in N_+(U_1, U_2)$. Así, $U_1 \cap f^{-m}(U_2)$ no es vacío. Por la Proposición 1.4.15, se tiene que $f^m(U_1) \cap U_2$ no es vacío. Así, podemos tomar $z \in U_1$ tal que $f^m(z) \in f^m(U_1)$ y $f^m(z) \in U_2$. Por un lado, ya hemos probado que $f^k(U_1) \subset A$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo que $f^m(U_1) \subset A$. De donde, $f^m(z) \in A$. Por otro lado, ya que $U_2 \subset U$ y $U \subset f^{-1}(A) \setminus A$, podemos ver que $U_2 \cap A$ es vacío. Puesto que $f^m(z) \in U_2$, se sigue que $f^m(z) \notin A$. Esto último es una contradicción. Por lo tanto, se tiene que U es vacío o $U = \{x\}$, donde $x \in X$. Por la Proposición 1.3.13, x es un punto aislado de X. En consecuencia, U es vacío o consiste sólo de un punto aislado. ■

De la Proposición 4.3.10, se derivan los siguientes dos corolarios:

Corolario 4.3.11. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, se tiene que $N(U, V)$ no es vacío, entonces $f(X)$ es denso o $X \setminus cl(f(X))$ consiste de un punto aislado.

Demostración. Pongamos $A = cl(f(X))$. Notemos que A es cerrado en X.

Como $cl(f(X)) = A$ y $A \subset X$, tenemos que $f(A) \subset A$. Por lo tanto, A es +invariante. Observemos que el conjunto $f^{-1}(A) \setminus A$ es abierto en X. Así, $int(f^{-1}(A) \setminus A) = f^{-1}(A) \setminus A$. Utilizando la Proposición 4.3.10, tenemos que $f^{-1}(A) \setminus A$ tiene un punto aislado o es vacío; si este último conjunto es vacío, entonces $A = X$. De donde, A es un conjunto denso en X. Puesto que $cl(f(X)) = A$, tenemos que $f(X)$ es denso en X. En otro caso, $X \setminus cl(f(X))$ consiste de un punto aislado. ■

Corolario 4.3.12. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si X es perfecto y, para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, se tiene que si $N(U, V)$ no es vacío, entonces $f(X)$ es denso en X.

Demostración. Supongamos que X es perfecto. Por lo supuesto y por la Proposición 4.3.10, tenemos que $X \setminus cl(f(X))$ es vacío. Por lo que $cl(f(X)) = X$. Así, $f(X)$ es denso en X. ■

En la Proposición 4.3.6, probamos que la propiedad DO_+ implica la propiedad DO_{++}. De manera alternativa, esta proposición se puede probar utilizando el Corolario 4.3.12. A consideración del lector, se muestra la prueba a continuación:

Proposición 4.3.13. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si X es perfecto y $x \in Trans_f$, entonces $\omega f(x) = X$.

Demostración. Supongamos que X es perfecto y sea $x \in Trans_f$. Luego, $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Por la Proposición 4.2.4 y por la Proposición 4.2.9 , $N(V, W)$ no es vacío, para todo par de abiertos no vacíos V y W de X. Como X es perfecto, por el Corolario 4.3.12, obtenemos que $f(X)$ es denso en X. Sea U un abierto no vacío de X. Dado que f es continua, por el Teorema 1.4.6, $f^{-1}(U)$ es abierto y no vacío de X. Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la Proposición 1.4.11, se puede ver que $f^{-k}(U)$ es abierto y no vacío en X. Puesto que $x \in Trans_f$, tenemos que $\mathcal{O}(x, f) \cap f^{-k}(U)$ no es vacío. Por la Proposición 1.4.15, $f^k(\mathcal{O}(x, f)) \cap U$ no es vacío. Por la Observación 2.5.14, $f^k(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(f^k(x), f)$. Así, $\mathcal{O}(f^k(x), f) \cap U$ no es vacío. Por lo tanto, $cl(\mathcal{O}(f^k(x), f)) = X$. Puesto que k es arbitrario, tenemos que, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $cl(\mathcal{O}(f^k(x), f)) = X$. Así:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\mathcal{O}(f^k(x), f)) = X$$

El último conjunto es $\omega f(x)$. Por lo tanto, $\omega f(x) = X$. Así, hemos probado que DO_+ implica DO_{++}. ■

Combinando los resultados obtenidos en la Sección 4.3.2 y los resultados obtenidos en esta sección, se obtiene un nuevo diagrama:

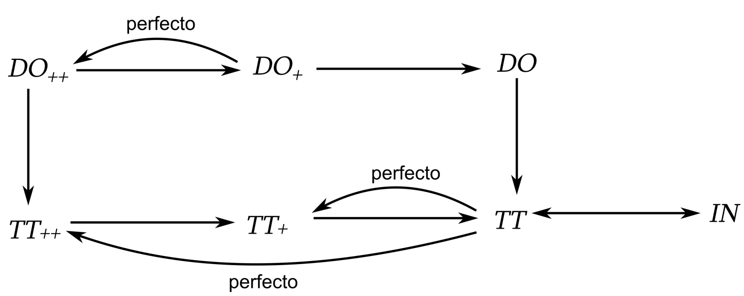


Figura 4.2: Diagrama 3

Hasta este momento le hemos dado importancia sólo a los espacios topológicos perfectos. En la siguiente sección omitiremos esta propiedad; es decir, trabajaremos con espacios topológicos con puntos aislados.

4.3.2. Espacios topológicos con puntos aislados

En esta sección asumiremos que X es un espacio topológico de Hausdorff con al menos un punto aislado y que cumple la propiedad TT.

Proposición 4.3.14. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, x un punto aislado de X y $f : X \to X$ una función continua. Si para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $N_+(U, V)$ no es vacío, entonces X es finito y coincide con la órbita de x.

Demostración. Supongamos que para todo par de abiertos no vacíos V y W de X, se tiene que el conjunto $N_+(V, W)$ no es vacío. Por la Observación 1.3.13, tenemos que $\{x\}$ es un conjunto abierto en X. Luego, por lo supuesto, $N_+(\{x\}, \{x\})$ es un conjunto no vacío. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = \text{mín}\, N_+(\{x\}, \{x\})$. Observemos que $f^k(x) = x$. De aquí, podemos ver que x es un punto periódico de periodo k, por lo que $\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), ..., f^{k-1}(x)\}$. Puesto que X es de Hausdorff, por la Proposición 1.3.6, tenemos que $\{f^n(x)\}$ es cerrado en X, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que $\mathcal{O}(x, f)$ es la unión finita de conjuntos cerrados, se tiene que, $\mathcal{O}(x, f)$ es cerrada en X. En consecuencia, $X \setminus \mathcal{O}(x, f)$ es abierto en X.

Supongamos que $X \setminus \mathcal{O}(x, f)$ no es vacío. Ya que $X \setminus \mathcal{O}(x, f)$ es abierto en X, existe un subconjunto abierto y no vacío U de X de tal forma que $U \subset X \setminus \mathcal{O}(x, f)$. Por lo supuesto, tenemos que $N_+(\{x\}, U)$ no es vacío; por lo cual existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(\{x\}) \cap U$ no es vacío. De aquí, $f^m(x) \in U$. Como $U \subset X \setminus \mathcal{O}(x, f)$, se sigue que $f^m(x) \in X \setminus \mathcal{O}(x, f)$. Por otro lado, sabemos que $f^m(x) \in \mathcal{O}(x, f)$; con lo cual hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto, $X \setminus \mathcal{O}(x, f)$ es vacío. Así, $X = \mathcal{O}(x, f)$ y en consecuencia, X es finito. ■

Además, con las mismas condiciones, si $N_+(U, V)$ no es vacío, resulta que $N_+(U, V)$ es infinito. Este resultado se muestra en la Proposición 4.3.15 y se prueba con ayuda de la Proposición 4.3.14.

En la Sección 4.3.1, probamos que las propiedades TT, TT_+ y TT_{++} son equivalentes, en espacios topológicos perfectos. Cuando el espacio topológico contiene al menos un punto aislado, es decir, cuando no es perfecto, se obtiene que TT_+ implica TT_{++}. A continuación exponemos este resultado:

Proposición 4.3.15. Sean X un espacio topológico de Hausdorff con al menos un punto aislado y $f : X \to X$ una función continua. Si para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $N_+(U, V)$ no es vacío, entonces $N_+(U, V)$ es infinito.

Demostración. Supongamos que, para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, $N_+(U, V)$ no es vacío. Veamos que $N_+(U, V)$ es infinito. Por la Proposición 4.3.14, X es finito. Pongamos $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Como X es finito, por la Observación 1.3.8, los conjuntos $\{x_i\}$ son conjuntos abiertos en X, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo tanto, $N_+(\{x_i\}, \{x_i\})$ no es vacío, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. De aquí, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_i}(x_i) = x_i$. Así, x_i es un punto periódico, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Ahora, consideremos $x_k \in U$ y $x_l \in V$. Supongamos que k_1 es el periodo de x_k. Por hipótesis, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_1}(\{x_k\}) \cap \{x_l\}$ no es vacío; por lo que $f^{m_1}(x_k) = x_l$. Luego, tenemos que $x_l \in \mathcal{O}(x_k, f)$. Observemos que $f^{m_1+jk_1}(x_k) = f^{m_1}(f^{jk_1}(x_k)) = f^{m_1}(x_k) = x_l$, para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; esto significa que $f^{m_1+jk_1}(\{x_k\}) \cap \{x_l\}$ no es vacío. En consecuencia, $m_1 + jk_1 \in N_+(\{x_k\}, \{x_l\})$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $N_+(\{x_k\}, \{x_l\})$ es infinito. Puesto que $\{x_k\} \subset U$ y $\{x_l\} \subset V$, concluimos que $N_+(U, V)$ es infinito. ■

Por el Teorema 4.2.6, se tiene que TT_{++} implica TT_+. Ahora, en la Proposición 4.3.15, se prueba el recíproco con condiciones adicionales. Con ésto, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.3.16. Sean X un espacio topológico con al menos un punto aislado y $f : X \to X$ una función continua. La propiedad TT_{++} es equivalente a la propiedad TT_+

Ahora veamos cómo se relacionan las propiedades TT_+ y DO_{++} en un espacio con puntos aislados.

Proposición 4.3.17. Sean X un espacio topológico de Hausdorff con al menos un punto aislado y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que, para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, $N_+(U, V)$ no es vacío si y sólo si existe un punto $x \in X$ tal que $\omega f(x) = X$.

Demostración. Supongamos que, para cualesquiera par de abiertos U y V de X, el conjunto $N_+(U, V)$ no es vacío. Veamos que existe $y \in X$ tal que $\omega f(y) = X$.

Por la Proposición 4.3.14, tenemos que X es finito. Supongamos que, para todo $x \in X$, se tiene que $\omega f(x) \neq X$. Sea x_0 un punto en X. Luego, $\omega f(x_0) \neq X$. De aquí, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $cl(\mathcal{O}(f^k(x_0), f)) \neq X$. Puesto que X es finito, por la Observación 1.3.8, cualquier subconjunto de X es cerrado (y abierto) en X; por lo cual $\mathcal{O}(f^k(x_0), f)$ es un conjunto cerrado (y abierto) en X. Observemos que $\mathcal{O}(f^k(x_0), f) = cl(\mathcal{O}(f^k(x_0), f))$. Puesto que $cl(\mathcal{O}(f^k(x_0), f)) \neq X$, se tiene que $\mathcal{O}(f^k(x_0), f)$ es un subconjunto propio de X. Además, por la Proposición 2.5.20, $\mathcal{O}(f^k(x_0), f)$ es $+$invariante. Por otro lado, notemos que $X \setminus \mathcal{O}(f^k(x_0), f)$ es propio y cerrado en X. Veamos que $X \setminus \mathcal{O}(f^k(x_0), f)$ también es $+$invariante. Para esto, por la Proposición 2.5.19, basta probar que $\mathcal{O}(f^k(x_0), f)$ es -invariante. Sea $z \in f^{-1}(\mathcal{O}(f^k(x_0), f))$. Luego, $f(z) \in \mathcal{O}(f^k(x_0), f)$. Puesto que $\{x_0\}$ es un conjunto abierto (Observación 1.3.8), tenemos que x_0 es periódico, y por la Observación 2.2.12, $f(z)$ también es periódico. De aquí, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(z) = z$; dado que $f^m(z) \in \mathcal{O}(f^k(x_0), f)$, obtenemos que $z \in \mathcal{O}(f^k(x_0), f)$. Así, $f^{-1}(\mathcal{O}(f^k(x_0), f)) \subset \mathcal{O}(f^k(x_0), f)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(f^k(x_0), f)$ es un conjunto -invariante. En consecuencia, $X \setminus \mathcal{O}(f^k(x_0), f)$ es $+$invariante. Más aún, tenemos que $X = \mathcal{O}(x_0, f) \cup (X \setminus \mathcal{O}(x_0, f))$. Esto último contradice el inciso iii) de la Proposición 4.2.14. Por lo tanto, existe $y \in X$ tal que $\omega f(y) = X$.

Recíprocamente, supongamos que existe $x \in X$ tal que $\omega f(x) = X$. Sean U y V dos abiertos no vacíos de X. Veamos que $N_+(U, V)$ no es vacío. Por hipótesis:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X$$

De aquí, $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la Proposición 4.3.14, tenemos que X es finito. Además, por la Observación 1.3.8, cualquier subconjunto de X es cerrado (y abierto) en X. En consecuencia, $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = \mathcal{O}(f^n(x), f)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Consideremos $x_m \in U$ y $x_l \in V$. Por lo supuesto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(\{x_m\}) \cap \{x_l\}$ no es vacío. Puesto que $\{x_m\} \subset U$ y $\{x_l\} \subset V$, obtenemos que $f^k(U) \cap V$ no es vacío. Por lo tanto, $N_+(U, V)$ no es vacío. ■

Como resultado de las Proposiciones 4.3.14, 4.3.15 y 4.3.17, se tiene el siguiente Teorema:

Teorema 4.3.18. Sean X un espacio topológico con al menos un punto aislado y $f : X \to X$ una función continua que cumple la propiedad TT. Se tiene que TT_+, TT_{++} y DO_{++} son equivalentes.

Con las mismas hipótesis del Teorema 4.3.18, podemos ver que el conjunto de puntos aislados de X está contenido en alguna órbita de un punto, la cual es densa en X. Esto lo podemos ver formalmente en la Proposición 4.3.19.

Proposición 4.3.19. Sean X un espacio topológico de Hausdorff con al menos un punto aislado y $f : X \to X$ una función continua. Si para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $N(U, V)$ no es vacío, entonces el conjunto de puntos aislados de X está contenida en la órbita de algún punto de X, la cual es densa en X.

Demostración. Sea x un punto aislado de X. Supongamos que para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $N(U, V)$ no es vacío. Por la Proposición 1.3.13, $\{x\}$ es un conjunto abierto en X. De aquí, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f^k(\{x\}) \cap \{x\}$ no es vacío; lo cual significa que x es periódico. Si $Iso_X = \{x\}$, tenemos $Iso_X \subseteq \mathcal{O}(x, f)$. Supongamos que Iso_X contiene más de un punto. Consideremos $y \in Iso_X$ tal que $y \neq x$. Veamos que $y \in \mathcal{O}(x, f)$. Por la Observación 1.3.13, $\{y\}$ es abierto en X. Por lo supuesto, $N(\{x\}, \{y\})$ no es vacío. Puesto que $\{x\}$ y $\{y\}$ son conjuntos disjuntos, $0 \notin N(\{x\}, \{y\})$. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = y$. Así, $y \in \mathcal{O}(x, f)$. Luego, $Iso_X \subseteq \mathcal{O}(x, f)$; esto es que el conjunto de puntos aislados está contenido en una órbita.

Ahora, veamos que $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Sea U un abierto no vacío de X. Como $\{x\}$ es abierto en X, por lo supuesto, $N(\{x\}, U)$ no es vacío. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(\{x\}) \cap U$ no es vacío. En consecuencia, $\mathcal{O}(x, f) \cap U$ no es vacío, por lo que $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. ■

De la Proposición 4.3.19, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.20. Sean X un espacio topológico de Hausdorff con al menos un punto aislado y $f : X \to X$ un función continua. La propiedad TT implica la propiedad DO_+.

Puesto que DO_+ implica la propiedad DO tenemos lo siguiente:

Teorema 4.3.21. Sean X un espacio topológico de Hausdorff con al menos un punto aislado y $f : X \to X$ un función continua. La propiedad TT implica la propiedad DO.

Para la siguiente proposición debemos recordar lo que es un homeomorfismo.

Proposición 4.3.22. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, x un punto aislado de X y $f : X \to X$ un homeomorfismo que satisface la propiedad TT. Se cumple que $\mathcal{O}_\pm(x, f) = Iso_X$, el cual es denso en X. Además, f es punto transitivo si y sólo si X es finito. En este caso, X consiste de la órbita periódica de un punto en X, el cual es x.

Demostración. Veamos que $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) = Iso_X$. Puesto que x es aislado en X, tenemos que $\{x\}$ es abierto (Observación 1.3.13). Más aún, dado que f es un homeomorfismo, por la Proposición 1.4.21, f es continua y abierta y, así, f^k es continua y abierta, para todo $k \in \mathbb{Z}$, por lo que $\{f^k(x)\}$ es abierto en X, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y por tanto, $f^k(x)$ es aislado en X, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Así, $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) \subset Iso_X$. Ahora probemos que $Iso_X \subset \mathcal{O}_{\pm}(x,f)$. Sea $z \in Iso_X$. Se sigue que $\{z\}$ es un conjunto abierto en X. Dado que $\{x\}$ es abierto en X, por hipótesis, tenemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f^k(\{x\}) \cap \{z\}$ no es vacío, esto es que $f^k(x) = z$, pues f es un homeomorfismo. Con esto obtenemos que $z \in \mathcal{O}_{\pm}(x,f)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) = Iso_X$.

Ahora veamos que Iso_X es denso en X. Sea U un abierto no vacío de X. Puesto que $\{x\}$ es un conjunto abierto, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) \in U$. Con ésto vemos que $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) \cap U$ no es vacío. Así, $\mathcal{O}_{\pm}(x,f)$ es denso en X. En consecuencia, Iso_X es denso en X.

Por otro lado, supongamos que f es punto transitivo. Probemos que X es finito. Consideremos $x_0 \in Trans_f$. Tenemos que $\mathcal{O}(x_0,f)$ es denso en X. Consideremos $k \in \mathbb{Z}$. Como f es un homeomorfismo y por la Observación 1.4.16, $\{f^k(x)\}$ es abierto en X. Así, $\mathcal{O}(x_0,f) \cap \{f^k(x)\}$ no es vacío. De aquí, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x_0) = f^k(x)$. De donde, $x_0 \in \mathcal{O}_{\pm}(x,f)$. Puesto que hemos probado que $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) = Iso_X$, tenemos que x_0 es aislado en X, y dado que f es abierta (Proposición 1.4.21), $\{f^n(x_0)\}$ es abierto en X, y por tanto, $f^n(x_0)$ es aislado en X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\mathcal{O}(x_0,f) \subset Iso_X$. Más aún, dado que $\{x_0\}$ es abierto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_0}(x_0) = x_0$. Así, x_0 es periódico. En consecuencia, $\mathcal{O}(x_0,f)$ es finito y, por la Observación 1.3.8, es cerrado en X. Observemos que $\mathcal{O}(x_0,f) = cl(\mathcal{O}(x_0,f))$. Dado que x_0 es punto transitivo, tenemos que $cl(\mathcal{O}(x_0,f)) = X$. Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{O}(x_0,f) = X$. Así, X es finito.

Ahora, supongamos que X es finito. Probemos que f es punto transitivo. Como X es finito y por la Observación 1.3.8, para todo $y \in X$, se tiene que $\{y\}$ es abierto en X. Por la Observación 1.3.13, y es aislado en X. De aquí, $X = Iso_X = \mathcal{O}_{\pm}(x,f)$. Dado que hemos probado que x es periódico, tenemos que $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) = \mathcal{O}(x,f)$. Así, $\mathcal{O}(x,f) = X$, con lo cual tenemos que $\mathcal{O}(x,f)$ es densa en X. Así, x es punto transitivo. En resumen, tenemos que X consiste de la órbita de x, donde x es periódico. ■

Si f es un homeomorfismo, en la Proposición 4.3.22, la órbita de x es exactamente el conjunto de puntos aislados de X. Ahora, si f sólo es continua, resulta que la órbita de x al menos contiene todos los puntos aislados de X; esto se prueba en la siguiente proposición:

Proposición 4.3.23. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Si x y y son puntos aislados de X, entonces $x \in \mathcal{O}(y,f)$ y $y \in \mathcal{O}(x,f)$. Por lo tanto, para cualquier punto $x \in Iso_X$, se tiene que $Iso_X \subseteq \mathcal{O}_{\pm}(x,f)$.

Demostración. Sean x y y puntos aislados de X. Por la Observación 1.3.13, se tiene que $\{x\}$ y $\{y\}$ son conjuntos abiertos en X. Por hipótesis, $N(\{x\},\{y\})$ no es vacío. Puesto que $x \neq y$, tenemos que $0 \notin N(\{x\},\{y\})$. En consecuencia, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(\{x\}) \cap \{y\}$

no es vacío. Así, $y \in \mathcal{O}(x, f)$. Por otro lado, $N(\{y\}, \{x\})$ no es vacío. De aquí, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(\{y\}) \cap \{x\}$. Con esto podemos ver que $x \in \mathcal{O}(y, f)$.

Más aún, puesto que $\mathcal{O}(x, f) \subset \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$, tenemos que $y \in \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$. Por lo tanto, para todo $y \in Iso_X$, se tiene que $y \in \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$.

Con esto concluimos que $Iso_X \subseteq \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$. ■

En la siguiente proposición se demuestra que la imagen inversa de un punto aislado contiene a lo más dos puntos, uno de los cuales se encuentra en la órbita futura del punto aislado:

Proposición 4.3.24. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Si x es un punto aislado de X y $f^{-1}(x)$ contiene más de un punto, entonces x es periódico y $f^{-1}(x)$ consiste de exactamente dos puntos, uno de los cuales está en $\mathcal{O}(x, f)$.

Demostración. Sea x un punto aislado y supongamos que el conjunto $f^{-1}(x)$ contiene más de un punto. Sean y y z puntos en $f^{-1}(x)$. Notemos que $f^{-1}(x) \subset X$. Puesto que X es de Hausdorff, también $(f^{-1}(x), \tau \mid_{f^{-1}(x)})$ es de Hausdorff. Así, existen abiertos no vacíos U y V en $f^{-1}(x)$ tales $y \in U$ y $z \in V$ y además, $U \cap V$ es vacío. Puesto que U y V están en $f^{-1}(x)$, existen U_1 y V_1 abiertos no vacíos en X de tal forma que $U = U_1 \cap f^{-1}(x)$ y $V = V_1 \cap f^{-1}(x)$. Por hipótesis, $N(U, V)$ no es vacío. Puesto que U y V son disjuntos, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = \min N_+(U, V)$. Luego, $f^k(U) \cap V$ no es vacío. Sea $y_0 \in U$ tal que $f^k(y_0) \in V$. Notemos que $U \cup V \subset f^{-1}(x)$. Se sigue que $f(y_0) = x$. Más aún, puesto que $f^k(y_0) \in V$, obtenemos que $x = f(f^k(y_0)) = f^k(f(y_0)) = f^k(x)$. Así, $f^k(x) = x$, con esto vemos que x es un punto periódico de periodo k: de aquí, $\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), ..., f^{k-1}(x)\}$. Observemos que $f^{k-1}(x) = f^{k-1}(f(y_0)) = f^k(y_0)$; esto es que $f^k(y_0) \in \mathcal{O}(x, f) \cap f^{-1}(x)$; es decir, $\mathcal{O}(x, f)$ contiene uno de los puntos de $f^{-1}(x)$.

Ahora, veamos que $f^{-1}(x)$ contiene exactamente dos puntos. Supongamos que existe un tercer punto en $f^{-1}(x)$. Como X tiene la propiedad de Hausdorff, podemos tomar W abierto y no vacío de $f^{-1}(x)$ tal que W es disjunto de U y V. Por hipótesis, $N(U, W)$ no es vacío. Puesto que U y W son disjuntos, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap W$ no es vacío. Tomemos $z_0 \in U$ tal que $f^m(z_0) \in W$. Dado que $W \subset f^{-1}(x)$, obtenemos que $f(f^m(z_0)) = x$. Ya que z_0 es un punto de U y $U \subset f^{-1}(x)$, se tiene que $f(z_0) = x$. Con esto se sigue que $f(f^m(z_0)) = f^m(f(z_0)) = f^m(x)$. De aquí, $f^m(x) = x$, con lo cual obtenemos que m es un múltiplo de k. Observemos que $f^m(z_0) = f^{m-1}(x) = f^{k-1}(x)$. Por otro lado, tenemos que $f^{k-1}(x) = f^k(y_0)$. Puesto que $f^k(y_0) \in V$, se sigue que $f^m(z_0) \in V$. En consecuencia, $f^m(z_0) \in W \cap V$, lo cual contradice que W y V son ajenos. Por lo tanto, el conjunto $f^{-1}(x)$ consiste solamente de dos puntos, uno de los cuales está en $\mathcal{O}(x, f)$. ■

Proposición 4.3.25. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Si x es un punto aislado de X, entonces $f^{-1}(x)$ es un conjunto finito y abierto en X y además, consiste solamente de puntos aislados.

Demostración. Sea $x \in X$ un punto aislado. Por la Proposición 4.3.24, el conjunto $f^{-1}(x)$ tiene 0, 1 o 2 puntos, así que $f^{-1}(x)$ es un conjunto finito. Puesto que $\{x\}$ es abierto en X y f es continua, se tiene que $f^{-1}(\{x\})$ es un conjunto abierto en X. Veamos que consiste sólo de puntos aislados. Supongamos que $f^{-1}(x)$ contiene sólo un punto, digamos $f^{-1}(x) = \{y\}$. Puesto que $f^{-1}(x)$ es abierto, se tiene que $\{y\}$ es abierto en X. Por lo tanto, y es aislado en X. Ahora, supongamos que $f^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$. Sabemos que $\{y_1, y_2\}$ es abierto en X. Puesto que X es de Hausdorff, se tiene que $(f^{-1}(x), \tau\ |_{f^{-1}(x)})$ es de Hausdorff. Por lo que existen abiertos no vacíos y disjuntos U_1 y U_2 en $f^{-1}(x)$ tales que $y_1 \in U_1$ y $y_2 \in U_2$. Dado que $f^{-1}(x)$ sólo contiene dos puntos, se sigue que $U_1 = \{y_1\}$ y $U_2 = \{y_2\}$. Así, $\{y_1\}$ y $\{y_2\}$ son abiertos en $f^{-1}(x)$ y por tanto en X. En consecuencia, y_1 y y_2 son puntos aislados de X. En resumen, $f^{-1}(x)$ es un conjunto finito, abierto en X y consiste sólo de puntos aislados. ■

Observemos que de la Proposición 4.3.25, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(x)$ es abierto en X pues f^n es continua, además, $f^{-n}(x)$ es finito ya que es la unión finita de conjuntos finitos, y consiste sólo de puntos aislados de X. Todo esto es útil para demostrar la siguiente proposición:

Proposición 4.3.26. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Si x es un punto aislado de X, entonces $\mathcal{O}_-(x, f) \subseteq Iso_X$. Además, el conjunto Iso_X es -invariante y abierto en X.

Demostración. Sea x un punto aislado de X. Veamos que $\mathcal{O}_-(x, f) \subset Iso_X$. Primero probemos que $f^{-n}(x) \subset Iso_X$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Procedamos por inducción. Por la Proposición 4.3.25, tenemos que $f^{-1}(x)$ consiste de un número finito de puntos aislados. Por lo tanto, se cumple para $n = 1$. Ahora, supongamos que se cumple para $n = k$. Observemos que $f^{-k}(x)$ contiene un número finito de puntos aislados de X. Veamos que $f^{-(k+1)}(x) \subseteq Iso_X$. Supongamos que $f^{-k}(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}\}$, se sigue que, para $i \in \{1, 2, ..., k_1\}$:

$$f^{-(k+1)}(x) = f^{-1}(f^{-k}(x)) = \bigcup_{i=1}^{k_1} \{f^{-1}(x_i)\}.$$

Este último conjunto consiste sólo de puntos aislados de X, pues es una unión finita de conjuntos finitos, donde los elementos de cada conjunto $f^{-1}(x_i)$ son puntos aislados de X. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \subset Iso_X$.

De aquí, puesto que:

$$\mathcal{O}_-(x, f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(x),$$

se concluye que $\mathcal{O}_-(x, f)$ consiste sólo de puntos aislados; es decir, $\mathcal{O}_-(x, f) \subseteq Iso_X$. Ahora, veamos que Iso_X es -invariante y abierto en X. Sea $y \in f^{-1}(Iso_X)$. Luego, existe $z \in Iso_X$ tal que $f(y) = z$. Por la Proposición 4.3.25, $f^{-1}(z)$ consiste de puntos aislados. Dado que $y \in f^{-1}(z)$, $y \in Iso_X$. Por lo tanto, $f^{-1}(Iso_X) \subseteq Iso_X$; esto es que Iso_X es

-invariante y, dado que para cada $y \in Iso_X$, el conjunto $\{y\}$ es abierto en X, tenemos que Iso_X es abierto en X. ■

Hemos visto en la Proposición 4.3.26, que si x es aislado, entonces su órbita pasada es un subconjunto de Iso_X. Si además, x es periódico, resulta que su órbita futura también es subconjunto de Iso_X, este y otro resultado se expone en la siguiente proposición:

Proposición 4.3.27. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Si x es un punto aislado de X y es periódico, entonces $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Iso_X$. Además, si $\mathcal{O}(x, f)$ es un subconjunto propio de X, entonces existe $y \in Iso_X$ tal que $f^{-1}(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(x, f) \cup \{y\}$.

Demostración. Sea $x \in X$ un punto aislado y periódico. Veamos que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Iso_X$. Supongamos que k es el periodo de x. Luego, $\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots f^{k-1}(x)\}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq m \leq k-1$, se tiene que $f^m(x) \in \mathcal{O}(x, f)$. Notemos también que $f^{k-m}(f^m(x)) = f^k(x) = x$. De aquí, $f^m(x) \in f^{-(k-m)}(x)$. Observemos que $k - m > 0$. Puesto que $f^{-(k-m)}(x) \subset \mathcal{O}_-(x, f)$, se sigue que $f^m(x) \in \mathcal{O}_-(x, f)$. Por la Proposición 4.3.26, $\mathcal{O}_-(x, f) \subseteq Iso_X$. Así, obtenemos que $f^m(x) \in Iso_X$, para todo $m \leq k-1$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Iso_X$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{O}(x, f)$ es un subconjunto propio de X. Pongamos $A = \mathcal{O}(x, f)$. Por la Observación 2.5.20, 1), A es +invariante. Además, puesto que A consiste solo de puntos aislados, se tiene que A es abierto en X y, por lo tanto, $f^{-1}(A)$ también es abierto en X y por la Proposición 4.3.25, consiste sólo de puntos aislados. Dado que X es de Hausdorff, por la Observación 1.3.8, se tiene que A también es cerrado en X. De aquí, $f^{-1}(A) \setminus A$ es abierto en X. Por la Proposición 4.3.10, tenemos que el conjunto $f^{-1}(A) \setminus A$ es vacío o consiste de un punto aislado. Observemos que $U = X \setminus A$ es abierto en X. Luego, por hipótesis, $N(U, \{x\})$ no es vacío. Ya que U y $\{x\}$ son disjuntos, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-n}(\{x\})$ no es vacío, por lo que existe $y_0 \in U$ tal que $f^n(y_0) = x$. Notemos que $f^n(y_0) = f(f^{n-1}(y_0)) = x$, de donde podemos ver que $f^{n-1}(y_0) \in f^{-1}(x)$. Puesto que y_0 no es un punto de A, se tiene que $f^{n-1}(y_0) \notin A$, pues A y U son disjuntos. Pongamos $y = f^{n-1}(y_0)$. Por otro lado, como x es periódico y k es su periodo, tenemos que $f^{k-1}(x) \in f^{-1}(x)$, donde $f^{k-1}(x) \neq y$. Por la Proposición 4.3.24, $f^{-1}(x)$ sólo puede tener dos puntos, uno de los cuales está en A. Por lo tanto, $f^{-1}(A) \setminus A$ consiste de un punto aislado de X; es decir, $f^{-1}(A) \setminus A = \{y\}$. En conclusión, $f^{-1}(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(x, f) \cup \{y\}$. ■

Por la Proposición 4.3.24 sabemos que, dado un punto aislado x, el conjunto $f^{-1}(x)$ puede ser vacío o contiene uno o dos puntos, los cuales son aislados. Además, se puede probar que a lo más existe un punto aislado de X tal que su imagen inversa contiene dos puntos. Este resultado se demuestra en la siguiente proposición:

Proposición 4.3.28. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Existe a lo más un punto $x \in Iso_X$ tal que $f^{-1}(x)$ contiene más de un punto.

Demostración. Sean que x_1 y x_2 puntos de X. Supongamos que x_1 y x_2 son puntos aislados tales que los conjuntos $f^{-1}(x_1)$ y $f^{-1}(x_2)$ contienen dos puntos cada uno. Luego, por la

Proposición 4.3.24, x_1 y x_2 son periódicos y uno de sus puntos de $f^{-1}(x_1)$ y $f^{-1}(x_2)$ se encuentran en $\mathcal{O}(x_1, f)$ y $\mathcal{O}(x_2, f)$, respectivamente. Además, por la Proposición 4.3.23, tenemos que $x_2 \in \mathcal{O}(x_1, f)$. Más aún, puesto que x_1 y x_2 son periódicos, se tiene que $\mathcal{O}(x_1, f) = \mathcal{O}(x_2, f)$. Por la Proposición 4.3.27, sabemos que existe $y \in Iso_X$ de tal forma que $f^{-1}(\mathcal{O}(x_1, f)) = \mathcal{O}(x_1, f) \cup \{y\}$. De aquí, $y \in f^{-1}(x_1) \cap f^{-1}(x_2)$, por lo que $f(y) = x_1$ y $f(y) = x_2$. Por lo tanto, $x_1 = x_2$. En resumen, existe a lo más un punto x tal que $f^{-1}(x)$ contiene más de un punto. ■

Ahora veamos que las órbitas de cualesquiera dos puntos aislados coinciden y son densos en X. Esto lo mostramos en la Proposición 4.3.29.

Proposición 4.3.29. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua que saltisface la propiedad TT. Para cualesquiera x y y puntos aislados, se tiene que $\mathcal{O}_{\pm}(x, f) = \mathcal{O}_{\pm}(y, f)$, además $\mathcal{O}_{\pm}(x, f)$ es denso en X. Más aún, $Iso_X \subseteq \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$.

Demostración. Por la Proposición 4.3.23, tenemos que $x \in \mathcal{O}_{\pm}(y, f)$ y $y \in \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$. Veamos que $\mathcal{O}_{\pm}(x, f) = \mathcal{O}_{\pm}(y, f)$:

Sea $y_1 \in \mathcal{O}_{\pm}(y, f)$. Puesto que $x \in \mathcal{O}_{\pm}(y, f)$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f^k(x) = y_1$ (si $k \geq 0$) o $y_1 \in f^k(x)$ (si $k < 0$); notemos que en cualquier caso, $y_1 \in \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$. Así, $\mathcal{O}_{\pm}(y, f) \subset \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$. Similarmente, para $x_1 \in \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f^k(y) = x_1$ o $x_1 \in f^k(y)$, pues $y \in \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$. Con esto, $x_1 \in \mathcal{O}_{\pm}(y, f)$ y, por lo tanto, $\mathcal{O}_{\pm}(x, f) \subset \mathcal{O}_{\pm}(y, f)$. En resume, tenemos que $\mathcal{O}_{\pm}(x, f) = \mathcal{O}_{\pm}(y, f)$

Ahora, probemos que $\mathcal{O}_{\pm}(x, f)$ es denso en X. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Como $\{x\}$ es abierto, por hipótesis, existe $k \in \mathbb{Z}$ de tal forma que $U \cap f^{-k}(\{x\})$ no es vacío, con esto obtenemos que $U \cap \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$ no es vacío. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{\pm}(x, f)$ es denso en X. En particular, si z es un punto aislado distinto de x y $U = \{z\}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = z$. Así, $z \in \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$. En consecuencia, $Iso_X \subseteq \mathcal{O}_{\pm}(x, f)$. ■

En base a las proposiciones que ya se han demostrado, se tienen las siguientes equivalencias:

Proposición 4.3.30. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, x un punto aislado de X y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Iso_X$.

ii) $\mathcal{O}_{\pm}(x, f) = Iso_X$.

iii) Iso_X es $+$invariante.

Demostración. Veamos que $i)$ implica $ii)$.

Supongamos que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Iso_X$. Por la Proposición 4.3.26, $\mathcal{O}_-(x, f) \subseteq Iso_X$. Puesto que $\mathcal{O}_\pm(x, f) = \mathcal{O}(x, f) \cup \mathcal{O}_-(x, f)$, tenemos que $\mathcal{O}_\pm(x, f) \subseteq Iso_X$. Por otro lado, usando la Proposición 4.3.29, se tiene que $Iso_X \subseteq \mathcal{O}_\pm(x, f)$. Así, $\mathcal{O}_\pm(x, f) = Iso_X$.

Ahora, veamos que *ii*) implica *iii*).

Supongamos que $\mathcal{O}_\pm(x, f) = Iso_X$. Por la Proposición 2.5.21 $\mathcal{O}_\pm(x, f)$ es un conjunto $+$invariante. Luego, Iso_X es un conjunto $+$invariante.

Por último, veamos que *iii*) implica *i*).

Supongamos que Iso_X es $+$invariante. Dado que $x \in Iso_X$ e Iso_X es $+$invariante, obtenemos que $f^k(x) \in Iso_X$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Iso_X$. ■

Con todos los resultados obtenidos en esta sección podemos dar una descripción de cómo los puntos aislados influyen en un sistema dinámico. Recordemos que, dado un punto aislado, su imagen inversa sólo consiste de 0, 1 o 2 puntos aislados; estos tres casos los consideramos por separado. La Proposición 4.3.31 considera el primer caso, cuando la imagen inversa es vacía. La Proposición 4.3.35, estudia el caso de dos puntos y por último, en la Proposición 4.3.37 tenemos el caso de un solo punto. Veamos el primer caso.

Proposición 4.3.31. Sean X un espacio topológico de Hausdorff que contiene puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Si existe un punto $x \in Iso_X$ tal que $f^{-1}(x) = \emptyset$, entonces x es único. Además, x no es periódico, $Trans_f = \{x\}$ y $f(X)$ no es denso en X.

Demostración. Supongamos que existe un punto $x \in Iso_X$ tal que $f^{-1}(x) = \emptyset$. Veamos que x es único. Para esto, supongamos que existe otro punto $x' \in Iso_X$ distinto de x, tal que $f^{-1}(x') = f^{-1}(x) = \emptyset$. Observemos que $\{x\}$ y $\{x'\}$ son conjuntos abiertos de X. Puesto que se cumple la propiedad TT, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \cap f^{-k}(\{x'\})$ no es vacío. De aquí, tenemos que $f^k(x) = x'$, por lo que $f^{k-1}(x) \in f^{-1}(x')$. Lo cual contradice que $f^{-1}(x') = \emptyset$. Por lo tanto, x es único.

Por otro lado, observemos que x no es periódico, esto porque $f^{-1}(x) = \emptyset$. Ahora, veamos que $Trans_f = \{x\}$. Primero veamos que $Trans_f$ no es vacío. Sea U un abierto no vacío de X. Puesto que x es aislado de X, $\{x\}$ es abierto en X. De aquí, por la propiedad TT tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in U$; esto significa que $\mathcal{O}(x, f) \cap U$ no es vacío. Por lo tanto, $x \in Trans_f$. Ahora, supongamos que existe $x' \in Trans_f$ tal que $x' \neq x$. Por definición, $\mathcal{O}(x', f)$ es denso en X. Luego, $\mathcal{O}(x', f) \cap \{x\}$ no es vacío; por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x') = x$. En consecuencia, $f^{k-1}(x') \in f^{-1}(x)$, lo cual contradice que $f^{-1}(x) = \emptyset$. En conclusión, $x' = x$; es decir, $Trans_f = \{x\}$.

Por último, probemos que $f(X)$ no es denso en X. Observemos que $x \notin f(X)$, ya que $f^{-1}(x) = \emptyset$. Más aún, como $\{x\}$ es abierto en X, se tiene que $x \notin cl(f(X))$. Por lo tanto, $x \in X \setminus cl(f(X))$. Puesto que x es aislado de X, por el Corolario 4.3.11, $f(X)$ no es denso en X. ■

De la Proposición 4.3.31, se cumple DO_+, pues x es punto transitivo. Pero no se cumple TT_+, pues para todo U abierto no vacío de X, $N_+(U, \{x\}) = \emptyset$, es porque $f^{-1}(x) = \emptyset$. Por consiguiente, TT_{++} no se cumple. Además, observemos que $\mathcal{O}(f^n(x), f) \cap \{x\} = \emptyset$, para $n \geq 1$. Por lo tanto, $\omega f(x) \neq X$, ésto significa que DO_{++} no se cumple.

De la Proposición 4.3.31, se derivan los siguientes tres corolarios, de los cuales sólo uno puede ocurrir a la vez; esto es por lo siguiente: En el Corolario 4.3.32, Iso_X es $+$invariante y el punto x no es pre-periódico, mientras que en Corolario 4.3.33 Iso_X es $+$ invariante, pero x sí es pre-periódico; en el Corolario 4.3.34, Iso_X no es $+$invariante.

Corolario 4.3.32. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $x \in Iso_X$ y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT y $f^{-1}(x) = \emptyset$. Si Iso_X es $+$invariante, entonces $Iso_X = \mathcal{O}_\pm(x, f) = \mathcal{O}(x, f)$. Además, si x no es pre-periódico, entonces $\mathcal{O}(x, f)$ contiene una infinidad de puntos aislados distintos y el conjunto Iso_X es denso en X.

Demostración. Supongamos que Iso_X es $+$invariante. Por la Proposición 4.3.30, se cumple que $Iso_X = \mathcal{O}_\pm(x, f)$. Además, puesto que $f^{-1}(x) = \emptyset$, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}_\pm(x, f)$. Así, $Iso_X = \mathcal{O}_\pm(x, f) = \mathcal{O}(x, f)$.

Por otro lado, supongamos que x no es pre-periódico, pero además, por la Proposición 4.3.31, x no es periódico. En consecuencia, la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es infinito y contiene sólo puntos aislados. También por la Proposición 4.3.31, $x \in Trans_f$, por lo cual $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X y dado que $\mathcal{O}(x, f) = Iso_X$, concluimos que Iso_X es denso en X. ■

Corolario 4.3.33. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $x \in Iso_X$ y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT y $f^{-1}(x) = \emptyset$. Si Iso_X es $+$invariante y x tiene una órbita pre-periódica de periodo l, entonces $Iso_X = \mathcal{O}_\pm(x, f) = \mathcal{O}(x, f) = X$ y X es finito. Además, existe $y \in X$ periódico de periodo k tal que $f^{-1}(y) = \{f^{k-1}(x), f^{l-1}(y)\}$.

Demostración. De manera similiar al Corolario 4.3.32, tenemos que $Iso_X = \mathcal{O}_\pm(x, f) = \mathcal{O}(x, f)$. Ahora probemos que $\mathcal{O}(x, f) = X$. Por hipótesis, x es pre-periódico, por lo cual $\mathcal{O}(x, f)$ es finito y por la Proposición 1.3.7, es cerrado. En consecuencia $\mathcal{O}(x, f) = cl(\mathcal{O}(x, f))$. Usando la Proposición 4.3.31, tenemos que $x \in Trans_f$, esto es que $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. De aquí, $cl(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(x, f) = X$. Por lo tanto, X es finito.

Por otro lado, puesto que x es pre-periódico, existe $y \in \mathcal{O}(x, f)$, distinto de x, periódico de periodo l; es decir, $f^l(y) = y$. Además, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = y$. De aquí, $f^k(x) = f^l(y) = y$. En consecuencia, $f^{-1}(y) = \{f^{l-1}(y), f^{k-1}(x)\}$. ■

Corolario 4.3.34. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $x \in Iso_X$ y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT y $f^{-1}(x) = \emptyset$. Si x no es pre-periódico y $Iso_X = \{f^k(x) : 0 \leq k \leq n-1\}$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces X es infinito y el conjunto Iso_X no es denso en X. Además, $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}_\pm(x, f)$ y $\mathcal{O}_\pm(x, f)$ es denso en X.

Demostración. Por la Proposición 4.3.31, tenemos que x no es periódico; además, por hipótesis, x no es pre-periódico, por lo que $\mathcal{O}(x, f)$ es infinito. En consecuencia, X es infinito. Observemos que, para $k \geq n$, $f^k(x)$ no es aislado. Por lo tanto, Iso_X es un subconjunto propio y finito de X.

Ahora probemos que Iso_X no es denso en X. Puesto que Iso_X es propio, tomemos un abierto no vacío U de $X \setminus Iso_X$. Ya que $\{x\}$ es abierto en X y como se cumple la propiedad TT, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\{x\} \cap f^{-k}(U)$ no es vacío; equivalentemente, $f^k(\{x\}) \cap U$ no es vacío. Puesto que $f^{-1}(x) = \emptyset$, aseguramos que $k \in \mathbb{N}$. Así, $f^k(x) \in U$. Observemos que $f^k(x) \notin Iso_X$, pues $U \subset X \setminus Iso_X$. Por lo tanto, $Iso_X \cap U$ es vacío. En resumen, Iso_X no es denso en X. Además, $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}_\pm(x, f)$ ya que $f^{-1}(x) = \emptyset$ y como $x \in Trans_f$, $\mathcal{O}_\pm(x, f)$ es denso en X. ■

Vamos con el segundo caso de la imagen inversa de un punto aislado, en el que se tienen dos puntos.

Proposición 4.3.35. Sean X un espacio topológico de Hausdorff que contiene puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Supongamos que para todo $z \in Iso_X$, $f^{-1}(z)$ no es vacío. Si existe $x \in Iso_X$ tal que $f^{-1}(x)$ contiene dos puntos, entonces x es único y periódico y $f^{-1}(x) = \{y, f^{l-1}(x)\}$, donde l es el periodo de y y para algún $y \in X$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k}(y)$ es aislado.

Demostración. Por la Proposición 4.3.28, tenemos que x es único y por la Proposición 4.3.24, x es periódico. Pongamos a l como el periodo de x. Puesto que $f^{-1}(x)$ contiene dos puntos, tenemos que $f^{-1}(x) = \{y,\ f^{l-1}(x)\}$, para algún punto $y \in X$. Observemos que $f^{l-1}(x) \in \mathcal{O}(x, f)$, por lo que, utilizando otra vez la Proposición 4.3.24, $y \notin \mathcal{O}(x, f)$. Además, por la Proposición 4.3.25, y es aislado. Como que x es único y por hipótesis, $f^{-1}(y)$ consiste de un punto aislado. De aquí, para $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k}(y)$ consiste de un solo punto aislado. ■

Corolario 4.3.36. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Asumamos que para todo $z \in Iso_X$, $f^{-1}(z)$ no es vacío y que existe $x \in Iso_X$ tal que $f^{-1}(x)$ contiene dos puntos. Luego, $\mathcal{O}_\pm(x, f) = Iso_X$ y $\mathcal{O}_\pm(x, f)$ es infinito. Además, $Trans_f = \emptyset$ y los conjuntos Iso_X y $f(X)$ son densos.

Demostración. Probemos que $\mathcal{O}_\pm(x, f) = Iso_X$. Usando la Proposición 4.3.35, tenemos que x es periódico y de la Proposición 4.3.27, obtenemos que $\mathcal{O}(x, f) \subseteq Iso_X$. De aquí, por la Proposición 4.3.30, concluimos que $\mathcal{O}_\pm(x, f) = Iso_X$.

Por otro lado, veamos que $\mathcal{O}_\pm(x, f)$ es infinito. Como x es periódico, tenemos que $\mathcal{O}(x, f)$ es finito; queda probar que $\mathcal{O}_-(x, f)$ es infinito. Por la Proposición 4.3.35, si l es el periodo de x, tenemos que $f^{-1}(x) = \{y,\ f^{l-1}(x)\}$, para algún $y \in X \setminus \mathcal{O}(x, f)$, además, por la misma proposición, $f^{-k}(y)$ consiste de un sólo punto aislado, para todo $k \in \mathbb{N}$, y afirmamos que todos son distintos. Para probar esto último supongamos que existe m y $n \in \mathbb{N}$ distintos tales que $f^{-n}(y) = f^{-m}(y)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n > m$. Luego, $y = f^{n-m}(y)$; esto significa que y es periódico. Puesto que $f(y) = x$, se tiene que $x \in \mathcal{O}(y, f)$ y como x también es periódico, por la Observación 2.2.13, obtenemos que $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}(y, f)$. En consecuencia, $y \in \mathcal{O}(x, f)$, pero esto contradice que

$y \notin \mathcal{O}(x,f)$. Por lo tanto, $f^{-n}(y) \neq f^{-m}(y)$. Así, $\bigcup\{f^{-k}(y) : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de puntos distintos; es decir, es infinito. Observemos que $\bigcup\{f^{-k}(y) : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{O}_{\pm}(x,f)$. En conclusión, $\mathcal{O}_{\pm}(x,f)$ es infinito.

Ahora demostremos que $Trans_f = \emptyset$. Veamos que para todo $z \in X$, $\mathcal{O}(z,f)$ no es densa en X. Recordemos que $\mathcal{O}_{-}(x,f)$ es infinito. De aquí, para cada $z \in X$, existe $x_1 \in \mathcal{O}_{-}(x,f)$ tal que $x_1 \notin \mathcal{O}(z,f)$, por lo que $\{x_1\} \cap \mathcal{O}(z,f) = \emptyset$. Ya que $\{x_1\}$ es abierto en X, se sigue que $\mathcal{O}(z,f)$ no es denso en X. En resumen, $Trans_f = \emptyset$.

Finalmente, veamos que Iso_X y $f(X)$ son densos en X. Sea U un abierto no vacío de X. Por la Proposición 4.3.26, Iso_X es -invariante y abierto en X. Por la propiedad TT, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $U \cap f^{-n}(Iso_X)$ no es vacío. Puesto que $Iso_X = \mathcal{O}_{\pm}(x,f)$ y como $\mathcal{O}_{\pm}(x,f)$ es $+$invariante, tenemos que $f^{-n}(Iso_X) \subset Iso_X$, por lo que $U \cap Iso_X$ no es vacío. Así, Iso_X es denso en X. En consecuencia, $\mathcal{O}_{\pm}(x,f)$ también es denso en X. Observemos que:

$$f(\mathcal{O}_{\pm}(x,f)) = f(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(\{x\})) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f(f^k(\{x\})) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{k+1}(\{x\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(\{x\}) = \mathcal{O}_{\pm}(x,f).$$

De aquí, $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) \subset f(X)$. Por lo tanto, $f(X)$ es denso en X. ■

Proposición 4.3.37. Sean X un espacio topológico de Hausdorff con puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Supongamos que para todo $z \in Iso_X$, $f^{-1}(z)$ consiste de un sólo punto. Luego, ocurre exactamente uno de los siguientes casos:

(a) Si existe $x \in Iso_X$ tal que x es periódico, entonces $X = f(X) = Trans_f = Iso_X$.

(b) Si Iso_X es $+$invariante y ninguno de sus puntos es periódico, entonces para cada $x \in Iso_X$, $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) = Iso_X$; además, los conjuntos Iso_X y $f(X)$ son densos en X y $Tras_f = \emptyset$.

(c) Si existe $y \in Iso_X$ tal que $f(y) \notin Iso_X$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^k(y)$ no es aislado. Además, $Trans_f = \emptyset$ y $f(X)$ es denso en X. En este caso Iso_X puede o no ser denso en X.

Demostración. (a) Supongamos que $x \in Iso_X$ es periódico. Por hipótesis, para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k}(x)$ consiste de un sólo punto, el cual es aislado. Además, como x es periódico , tenemos que $f^{-k}(x) \subset \mathcal{O}(x,f)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De aquí, $\mathcal{O}_{\pm}(x,f) = \mathcal{O}(x,f)$. Luego, utilizando la Proposición 4.3.27 y la Proposición 4.3.30, obtenemos que $\mathcal{O}(x,f) = \mathcal{O}_{\pm}(x,f) = Iso_X$. Ahora probemos que $x \in Trans_f$. Sea U un abierto no vacío de X; como $\{x\}$ es abierto y se cumple la propiedad TT, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x\} \cap f^{-k_1}(U)$ no es vacío, por lo cual se sigue que $U \cap \mathcal{O}(x,f)$ no es vacío; esto significa que $\mathcal{O}(x,f)$ es denso en X. Notemos también que $\mathcal{O}(x,f) \subseteq Trans_f$. Además, puesto que $\mathcal{O}(x,f)$ es finito y X es de Hausdorff, $\mathcal{O}(x,f)$ es un conjunto cerrado de X. En consecuencia, tenemos que $\mathcal{O}(x,f) = cl(\mathcal{O}(x,f)) = X = Trans_f$. Además, dado que $f(\mathcal{O}(x,f)) = \mathcal{O}(f(x),f) = \mathcal{O}(x,f) = X$, se tiene que $f(X) = X$. En resumen, obtenemos que $X = f(X) = Trans_f = Iso_X$.

(b) Sea $x \in Iso_X$. Como Iso_X es $+$invariante, por la Proposición 4.3.30, $\mathcal{O}_{\pm}(x, f) = Iso_X$. Por otro lado, sea U un abierto no vacío de X, puesto que $\{x\}$ es abierto en X y se cumple la propiedad TT, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $U \cap f^{-k}(x)$ no es vacío y dado que $f^{-k}(x) \subset Iso_X$, se tiene que $U \cap Iso_X$ no es vacío. Así, Iso_X es denso en X. Más aún, como:

$$f(\mathcal{O}_{\pm}(x, f)) = f(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(\{x\})) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{k+1}(\{x\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(\{x\}) = \mathcal{O}_{\pm}(x, f)),$$

tenemos que $\mathcal{O}_{\pm}(x, f)) \subset f(X)$. Ya que $\mathcal{O}_{\pm}(x, f))$ es denso en X, se sigue que $f(X)$ es denso en X.

Ahora veamos que $Trans_f = \emptyset$. Para esto, probemos que para todo $z \in X$, $\mathcal{O}(z, f)$ no es denso en X. Observemos que, como x no es periódico y para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k}(x)$ consiste de un punto aislado, se tiene que $\mathcal{O}_{-}(x, f)$ es infinito. Luego, para $z \in X$, existe $x_1 \in \mathcal{O}_{-}(x, f)$ tal que $x_1 \notin \mathcal{O}(z, f)$. De aquí, $\{x_1\} \cap \mathcal{O}(z, f) = \emptyset$ y como $\{x_1\}$ es abierto en X, tenemos que $\mathcal{O}(z, f)$ no es denso en X. En conclusión, $Trans_f = \emptyset$.

(c) Sea $y \in Iso_X$ tal que $f(y) \notin Iso_X$. Puesto que Iso_X es -invariante, tenemos que $X \setminus Iso_X$ es $+$invariante; observemos que $f(y) \in X \setminus Iso_X$. Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^k(f(y)) \in X \setminus Iso_X$; ésto es, $f^k(y) \notin Iso_X$.

Ahora veamos que $Trans_f = \emptyset$. Afirmamos que $\mathcal{O}_{-}(y, f)$ es infinito, de otra forma y sería periódico; si se cumpliera este último caso, para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^k(y) \in \mathcal{O}_{-}(y, f)$ y como $\mathcal{O}_{-}(y, f) \subset Iso_X$, tenemos que $f^k(y) \in Iso_X$, pero ya hemos demostrado que $f^k(y) \notin Iso_X$. Afirmamos también que para cada $z \in X$, $\mathcal{O}(z, f)$ no es densa en X; en efecto, puesto que $\mathcal{O}_{-}(y, f)$ es infinito, existe $y_1 \in \mathcal{O}_{-}(y, f)$ tal que $y_1 \notin \mathcal{O}(z, f)$; esto significa que $\{y_1\} \cap \mathcal{O}(z, f)$ es vacío y como $\{y_1\}$ es abierto en X, concluimos que $\mathcal{O}(z, f)$ no es denso en X.

Con ésto, queda demostrada la proposición. ■

Para terminar esta sección, mostramos los resultados obtenidos sobre las nociones en espacios topológicos de Hausdorff con puntos aislados, esto se muestra en el Diagrama 4 de la Figura 4.3.

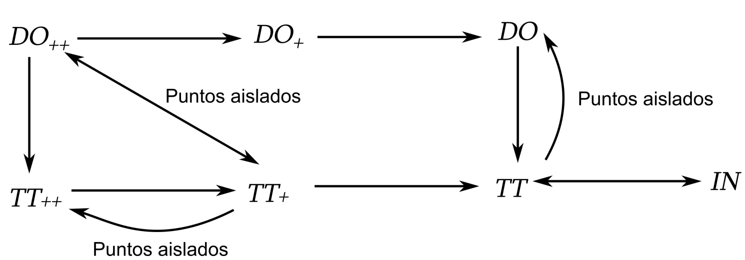


Figura 4.3: Diagrama 4

4.3.3. Espacios topológicos no Hausdorff

En esta sección removeremos la propiedad de Hausdorff y probaremos sólo dos resultados.

Proposición 4.3.38. Sean X un espacio topológico perfecto y T_1 y $f : X \to X$ una función continua. Si existe una órbita sucesión $\langle x_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle$ densa en X, entonces para cualesquiera par de abiertos U y V de X, el conjunto $N_+(U, V)$ no es vacío.

Demostración. Sean U y V dos conjuntos abiertos no vacíos de X y $\mathcal{O} = \langle x_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle$ una órbita sucesión densa en X. Veamos que $N_+(U, V)$ no es vacío. Primero definamos los siguientes conjuntos: $N = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_n \in U\}$ y $M = \{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_m \in V\}$. Como $\mathcal{O}$ es densa en X, N y M no son vacíos. Además, por la Definición 2.5.1, $f(x_k) = x_{k+1}$; esto lo podemos ver como $f^k(x_0) = x_k$, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ahora, supongamos que para todo $p \in \mathbb{N}$, $f^p(U) \cap V = \emptyset$. Se sigue que para todo $p \in \mathbb{N}$ y $n \in N$, $f^p(x_n) \notin V$, donde $f^p(x_n) = x_{p+n}$. De aquí, $x_{p+n} \notin V$, para todo $p \in \mathbb{N}$. En consecuencia, los elementos de N son mayores que los elementos de M. Pongamos $n = \min N$ y $m = \max M$. Luego, $m - n < 0$. Dado que f es continua, tenemos que $f^{m-n}(U) \cap V$ es abierto. Además, puesto que $f^n(x_0) = x_n$ y $x_n \in U$, tenemos que $x_0 \in f^{-n}(U)$; más aún, $f^m(x_0) \in f^m(f^{-n}(U))$. Ya que $f^m(x_0) = x_m$ y $f^m(f^{-n}(U)) = f^{m-n}(U)$, tenemos que $x_m \in f^{m-n}(U)$. Como $m \in M$, se tiene que $x_m \in f^{m-n}(U) \cap V$.

Probemos que $\mathcal{O} \setminus \{x_m\}$ es denso en X. Supongamos que existe un abierto no vacío U de X tal que $U \cap \mathcal{O} = \{x_m\}$. De aquí, $(U \setminus \{x_m\}) \cap \mathcal{O} = \emptyset$. Por la Proposición 1.3.15 y puesto que X es T_1, tenemos que $U \setminus \{x\}$ es abierto en X; esto contradice la densidad de $\mathcal{O}$. Por lo tanto, $\mathcal{O} \setminus \{x_m\}$ es denso en X. De manera inductiva, esto se puede probar para un número finito de puntos.

Puesto que $f^{m-n}(U) \cap V$ es abierto en X y $\mathcal{O} \setminus \{x_m\}$ es denso, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in f^{m-n}(U) \cap (V \setminus \{x_m\})$. Observemos que $k \in M$ y $x_k \neq x_m$. Dado que $m = \max M$, tenemos que $k < m$. De aquí, podemos definir $m_1 = \max M \setminus \{m\}$. De manera similar, observemos que $\mathcal{O} \setminus \{x_m, x_{m_1}\}$ es denso en X, por lo cual existe $m_2 \in M$ tal que $m_2 < m_1$ y $x_{m_2} \in f^{m-n}(U) \cap (V \setminus \{x_m, x_{m_1}\})$. Observemos que podemos repetir este proceso cuantas veces sean necesarias, por lo que existe $k \in M$, arbitrariamente pequeño, de tal forma que $x_k \in f^{m-n}(U) \cap V$; en particular, podemos encontrar $k \in M$ tal que $2m - n - k > 0$. Notemos que $x_m = f^m(x_0) = f^m(f^{-k}(x_k)) = f^{m-k}(x_k)$. Más aún, puesto que $x_k \in f^{m-n}(U)$, se tiene que $f^{m-k}(x_k) \in f^{m-k}(f^{m-n}(U))$ y $f^{m-k}(f^{m-n}(U)) \in f^{2m-n-k}(U)$. En consecuencia, $x_m \in f^{2m-n-k}(U) \cap V$. Esto contradice que $f^p(U) \cap V = \emptyset$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(U) \cap V$ no es vacío. En conclusión, $N_+(U, V)$ no es vacío. ■

De la última proposición tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.39. Sean X un espacio topológico perfecto y T_1 y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que la propiedad DO implica la propiedad TT_+.

Proposición 4.3.40. Sean X un espacio topológico perfecto y $f : X \to X$ una función continua y sobreyectiva. Si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X, entonces $\omega f(x) = X$.

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X. Luego, $cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Puesto que f es continua y sobreyectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$X = f^n(X) = f^n(cl(\mathcal{O}(x, f))) = cl(f^n(\mathcal{O}(x, f))).$$

Por la Proposición 2.5.14, $cl(f^n(\mathcal{O}(x, f))) = cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)$. De aquí, $cl(\mathcal{O}(f^n(x), f) = X$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, tenemos que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl(\mathcal{O}(f^n(x), f)) = X;$$

es decir, $\omega f(x) = X$. ■

De aquí, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.41. Sean X un espacio topológico perfecto y $f : X \to X$ una función continua y sobreyectiva. Se tiene que la propiedad DO_+ implica la propiedad DO_{++}.

La equivalencia de las propiedades TT_+ y DO_+ se da para espacios métricos. Si el espacio métrico no tiene puntos aislados, entonces DO_+ implica TT_+; si es espacio es *separable* y *non-meager* [1], entonces TT_+ implica DO_+, esto se puede ver en [20]. Además, la equivalencia de las propiedades DO y TT se da en espacios métricos si el espacio es compacto [21].

En el Diagrama 5 de la Figura 4.4, damos una descripción de los resultados que hemos probado en espacios topológicos en general y con propiedades adicionales. En el Diagrama 5 consideremos que el espacio topológico es de Hausdorff; las propiedades que se requieren además de ésta están indicadas en cada flecha.

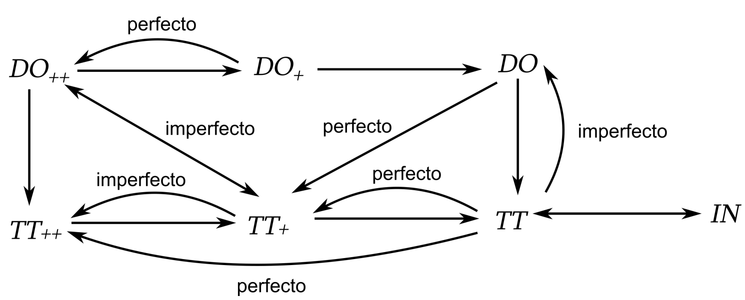


Figura 4.4: Diagrama 5

Conclusiones

La unión de la topología y los sistemas dinámicos ha permitido ahondar en el estudio de los sistemas dinámicos discretos, particularmente, los que tienen la propiedad de la transitividad topológica, la cual mencionamos en la Definición 3.1.1. Además de esta propiedad, se han definido otros tipos de sistemas dinámicos discretos, los mezclantes, los débilmente mezclantes, totalmente transitivos, caóticos, minimales, entre otros (Definición 3.1.5); un hecho importante que se ha obtenido es que todos éstos tienen la propiedad transitiva, lo cual hemos sintetizado en el Diagrama 1.

Por otro lado, han surgido algunas nociones que se relacionan con la transitividad topológica, las cuales hemos señalado en la Definición 4.1.1. En principio, se han estudiado las relaciones entre estas nociones en un espacio topológico general y se han obtenido las siguientes implicaciones que resumimos en la Figura 4.5:

$$\begin{tikzcd}
DO_{++} \arrow[r] \arrow[d] & DO_{+} \arrow[r] & DO \arrow[d] & \\
TT_{++} \arrow[r] & TT_{+} \arrow[r] & TT \arrow[r, leftrightarrow] & IN
\end{tikzcd}.$$

Figura 4.5: Espacio topológico general

Cuando se trabaja en un espacio topológico de Hausdorff y perfecto, se obtienen algunas equivalencias. Por ejemplo, la propiedad DO_{++} es equivalente a DO_{+}; TT_{+} es equivalente a TT y la Propiedad TT_{++} es equivalente a TT. Cuando el espacio tiene puntos aislados, DO_{++} es equivalente a TT_{+}, DO es equivalente a TT y TT_{++} es equivalente TT_{+}. En resumen, tenemos la Figura 4.6.

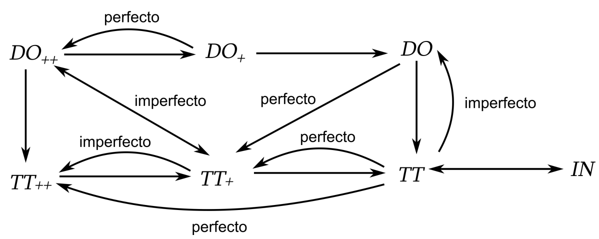


Figura 4.6: Resultados obtenidos

Otros resultados muy importantes que hemos reunido en este trabajo está relacionado con los puntos aislados. Lo podemos resumir de la siguiente manera:

Sean X un espacio topológico de Hausdorff con puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua que satisface la propiedad TT. Exactamente uno de los siguientes casos ocurre:

(1) Si existe $x \in Iso_X$ tal que $f^{-1}(x) = \emptyset$, entonces x es único, $Trans_f = \emptyset$ y $f(X)$ es denso. En este caso, DO_+ se cumple, pero no se cumple TT_+, TT_{++} y tampoco DO_{++}. Con todo esto, uno de los siguientes caso ocurre:

   a) Si Iso_X es $+$invariante, entonces $Iso_X = \mathcal{O}_\pm(x, f) = \mathcal{O}(x, f)$. Si x es pre-periódico, $\mathcal{O}(x, f)$ es infinito y el conjunto Iso_X es denso en X.

   b) Si Iso_X es $+$invariante y x es pre-periódico, $Iso_X = \mathcal{O}_\pm(x, f) = \mathcal{O}(x, f) = X$, X es finito y existe $y \in X$ periódico de periodo k tal que $f^{-1}(y) = \{f^{k-1}(x), f^{l-1}(y)\}$.

   c) Si x no es pre-periódico e $Iso_X = \{f^k(x) : 0 \leq k \leq n-1\}$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces X es infinito, Iso_X no es denso en X y $\mathcal{O}(x, f) = \mathcal{O}_\pm(x, f)$ y $\mathcal{O}_\pm(x, f)$ es denso en X.

(2) Si $z \in Iso_X$, $f^{-1}(z) \neq \emptyset$, entonces existe un único $x \in Iso_X$ tal que $f^{-1}(x)$ contiene dos puntos, $f^{-1}(x) = \{y, f^{l-1}(x)\}$ donde l es el periodo de x y para algún $y \in X$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k}(y)$ es aislado. De aquí, tenemos lo siguiente:

   a) $\mathcal{O}_\pm(x, f) = Iso_X$ y $\mathcal{O}_\pm(x, f)$ es infinito, $Trans_f = \emptyset$ e Iso_X y $f(X)$ son densos.

(3) Si para todo $z \in Iso_X$, $f^{-1}(z)$ consiste de un solo punto, entonces exactamente uno de los siguientes casos ocurre:

   a) Si existe $x \in Iso_X$ tal que x es periódico, entonces $X = f(X) = Trans_f = Iso_X$.

   b) Si Iso_X es $+$invariante y ninguno de sus puntos es periódico, entonces para cada $x \in Iso_X$, $\mathcal{O}_\pm(x, f) = Iso_X$; además, los conjuntos Iso_X y $f(X)$ son densos en X y $Tras_f = \emptyset$.

   c) Si existe $y \in Iso_X$ tal que $f(y) \notin Iso_X$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^k(y)$ no es aislado. Además, $Trans_f = \emptyset$ y $f(X)$ es denso en X. En este caso Iso_X puede o no ser denso en X.

Idea de la transitividad

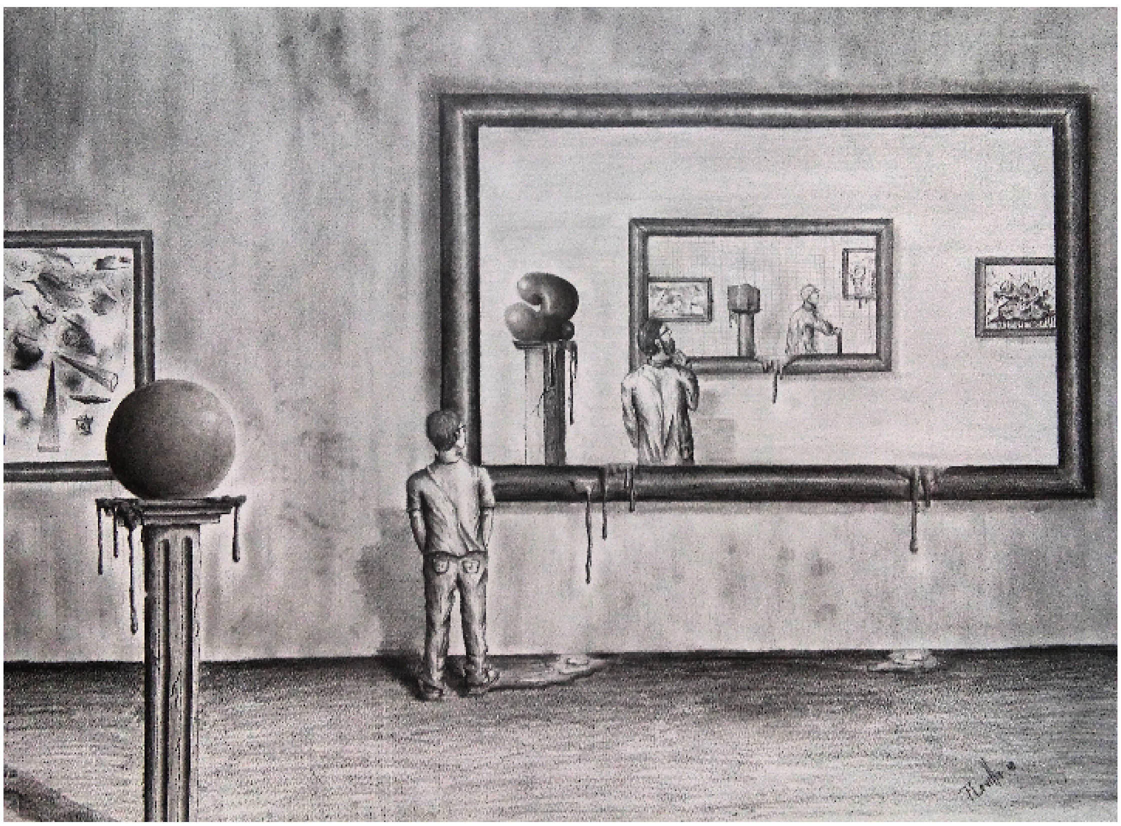


Figura 4.7: **"Idea de la transtividad" (Grafito)** A. Revilla

Índice alfabético

Bibliografía

[1] E. Akin y J. D. Carlson, *Conceptions of topological transitivity*, Topology Appl. 159 (2012) 2815-2830.

[2] James R. Munkres, *Topología*, segunda edición, Madrid 2002.

[3] J. E. King Dávalos y H. Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, (2014).

[4] E. A. Lacomba, *Los sistemas dinámicos, qué son y para qué sirven?*, Micelánea Matemática, SMM, 32 (2000), 39-50.

[5] M. Brin y G. Struck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2003.

[6] G. D. Birkhoff, *Dinamical System*, American Math. Soc., Colloquium publications, Volume IX, 1927.

[7] Sandefur J. T. *Discrete Dynamical Systems*, Oxford University Press (1990).

[8] Misiurewicz M. *Remarks on Sharkovsky's Theorem*, The American Matematical Montly, 104(1997),346-847.

[9] Sandefur J. T. *Discrete Dynamical Modeling*, The College Mathematics Jounal, 22(1991)13-22.

[10] J. Mai y W. Sun, *Transitivities of maps of general topological spaces*, Topology App., 157 (2010), 946-953.

[11] J. P. Salinas y J. M. Gutiérrez Jiménez, *Dinámica del método de Newton*, Serie: Material didáctico matemáticas, Universidad de la Rioja (2013).

[12] Robert L. Devaney, *A first course in chaotic dinamical system, theory and experiment*, by Perseus Books Publishing, L.L.C, 1992.

[13] Sergiy Kolyada, L'ubomír Snoha, *Topological transitivity.* Scholarpedia 4 (2) (2009) 5802, http://www.scholarpedia.org/article/Topological_transitivity.

[14] Spivak M., *Calculus*, segunda edición, Editorial Reverte, México D. F., 1999.

[15] Walter Rudin, *Principios de Anaálisis Matemático*, Tercera edición, 1980.

[16] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda edición, Editorial Reverté.

[17] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., San Diego, 1998.

[18] W. Bauer y K. Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. 79 (1975), 81-92.

[19] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology App. 156 (2009), no. 5, 1013-1033.

[20] Stephen Silverman, *On maps with dense orbits and the definition of chaos*, Rocky Mountain J. Math. 22(1992) 353-375.

[21] Jan Vries, *Elements of Topological Dynamics*, Math. Appl., vol. 257, kruwer, Dordrecht, 1993.