



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

“Valuación de opciones europeas sobre el tipo de cambio peso-dólar con procesos acotados”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

CITLALLIY HERRERA VÁSQUEZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. GUILLERMO ARTURO LANCHO ROMERO
DRA. MARISOL LÓPEZ CERINO

A mi familia, mis padres, mi esposo y sobre todo a mi hermano Josué.

Agradecimientos

Primeramente le agradezco a Dios por la oportunidad que me ha brindado para hacer realidad este sueño.

A mis directores de tesis el Dr. Guillermo Arturo Lancho Romero y la Dra. Marisol López Cerino les agradezco por la paciencia, la dirección y el aporte de sus conocimientos en la elaboración de este trabajo.

De manera muy especial le agradezco a mi esposo por el apoyo brindado durante todo este tiempo y por estar siempre a mi lado.

Por último quiero agradecer a mis padres por ser un pilar en todo el trayecto de mi vida y sobre todo a mi hermano Josué Herrera Vásquez ya que sin su ayuda nada de esto sería posible.

Resumen

El propósito del presente trabajo de investigación es hacer un estudio y comparación de dos modelos para la valuación de opciones europeas sobre el tipo de cambio peso-dólar. El primero y más utilizado es el de Black-Scholes (BS) modificado para acciones que pagan dividendos. El segundo modelo es el de Jonathan Ingersoll, el cual propone un proceso estocástico acotado. Ambos modelos están en función de los siguientes parámetros: el precio actual del dólar, la volatilidad de los rendimientos, el precio de ejercicio, el plazo de la opción, el tipo de interés local y extranjero.

En ambos modelos se valoraron las opciones europeas de compra y de venta sobre el precio del dólar con distintos parámetros. Por ejemplo la volatilidad se calculó para 3, 6 y 12 meses, además de que se tomaron diferentes precios del activo subyacente. Después se hizo una comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de Black-Scholes (BS) y el modelo con un proceso estocástico acotado. Para realizar los cálculos requeridos en la valuación de las opciones, se utilizaron los datos del tipo de cambio peso-dólar, los cuales se obtuvieron de la página del banco de México (Banxico) y fueron procesados con la ayuda del programa RStudio. Al final se comprobó que los resultados obtenidos con el modelo de procesos estocásticos acotados disminuyeron el precio de la opción para el tipo de cambio peso-dólar, en comparación con el modelo de BS modificado para divisas.

El trabajo comprende seis capítulos, los cuales se presentan de la siguiente manera. En el capítulo 1 se tiene la introducción, donde se observa el planteamiento del problema, la historia relacionada con las opciones y las definiciones que serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo. En el capítulo 2 se presenta los conceptos de probabilidad y procesos estocásticos. En el capítulo 3 se exponen las definiciones de estadística, junto con su aplicación a los datos del tipo de cambio peso-dólar. En el capítulo 4 se presentan los modelos de valuación de opciones, es decir el modelo de BS, el modelo de BS modificado para divisas y el modelo de BS con un proceso acotado. En el capítulo 5 se realiza una comparación entre los resultados obtenidos de los modelos del capítulo 4. En un apéndice se encuentran los resultados obtenidos con el modelo de BS y con el modelo de BS acotado. Finalmente se presentan las conclusiones a las que se llegaron observando los resultados de los dos modelos.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Justificación	1
1.3. Historia de los mercados de opciones	2
1.4. Objetivos	3
1.5. Definiciones	3
1.6. Opciones sobre el dólar	5
2. Probabilidad y procesos estocásticos	7
2.1. Espacios de Probabilidad	7
2.2. Variables aleatorias y sus distribuciones	8
2.2.1. Variables aleatorias continuas	10
2.2.2. Distribuciones de probabilidad	10
2.2.3. Esperanza	11
2.3. Movimiento Browniano	13
3. Fundamentos Estadísticos	19
3.1. Estadísticas de los datos del tipo de cambio	19
3.1.1. Medidas de tendencia central, medidas de dispersión, medidas de asimetría y curtosis	19
3.2. Rendimiento	21
3.3. Análisis de los datos del tipo de cambio peso-dólar	22
3.3.1. Comparación de los rendimientos en las diferentes monedas	32
3.4. Paridad de las tasas de interés	33
3.5. Volatilidad	34
4. Modelos de valuación de opciones europeas	39
4.1. Modelo de Black-Scholes	39
4.1.1. Deducción de la fórmula de Black-Scholes	40
4.1.2. Fórmula de Black-Scholes con enfoque de ecuaciones diferenciales parciales	45
4.2. Modelo de Black-Scholes modificado para divisas	46
4.3. Modelo de valuación con un proceso acotado	49
4.3.1. Limite superior e inferior del tipo de cambio	49
4.3.2. Modelo para el tipo de cambio acotado	50
4.4. Perfil de rendimiento de la opción de compra	55
4.5. Perfil de rendimiento para la opción de venta	56

5. Comparación: Black-Scholes y Black-Scholes acotado	59
5.1. Comparación de la opción europea de compra	60
5.2. Comparación de la opción europea de venta	62
6. Conclusiones	65
Bibliografía	67
A. Valuación: Black-Scholes y Black-Scholes acotado	69
A.1. Valuación de una opción europea de compra	69
A.2. Valuación de la opción europea de venta	72

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

En este trabajo se estudia el modelo de Black-Scholes (BS), en donde el subyacente es modelado con un movimiento geométrico Browniano (MGB), para luego aplicarlo en la valuación de opciones europeas de compra y venta sobre el dólar. En seguida se estudia un modelo de valuación de opciones europeas donde se supone que el activo subyacente está modelado por un proceso estocástico acotado, utilizando este modelo se valúan las opciones de compra y venta sobre el tipo de cambio peso-dólar. Además se analizan las implicaciones que resultan de asumir cotas en las variaciones del tipo de cambio y se comparan los precios que se obtienen en ambos modelos. Para estimar los parámetros se emplean los datos históricos del tipo de cambio que publica Banxico.

1.2. Justificación

En los últimos 50 años ha surgido un gran interés por los productos derivados, los cuales tienen como finalidad reducir el riesgo que resulta de variaciones en los precios de algún bien subyacente (precio de acciones, tasa de interés, tipo de cambio, productos básicos, etc), a lo que se le llama riesgo de mercado. Los empresarios pueden controlar muchos aspectos de la producción y mantenerlos de acuerdo con su demanda, pero ¿qué pasaría si el costo de la materia prima se incrementa debido a una variación adversa en el tipo de cambio? Esto seguramente modificará la planeación financiera de la empresa para hacer frente a las nuevas condiciones del mercado [5]. En la actualidad ningún agente económico escapa a los fuertes impactos de las fluctuaciones en el tipo de cambio. Y debido a que nos encontramos en un país con una economía tan abierta al intercambio comercial (exportaciones e importaciones), el tipo de cambio es crucial para una buena relación comercial entre países, no obstante la paridad más importante que existe es la del peso con respecto al dólar americano, por la enorme relación de intercambio comercial que existe con Estados Unidos de América [8]. Por tal motivo es importante estudiar los modelos para la valuación de opciones sobre el tipo de cambio, el más utilizado es el modelo de BS

modificado para divisas, en el que se supone que el precio del activo subyacente sigue un MGB.

Los tipos de cambio han estado sujetos a periodos de controles más estrictos o más flexibles a medida que diversas fuerzas políticas y económicas han aumentado y disminuido. Cuando las monedas estaban respaldadas por oro, había tipos de cambio fijos. En México se acordó adoptar el tipo de cambio flotante el 22 de diciembre de 1994 mismo que permanece hasta la fecha. Este tipo de cambio se determina libremente en el mercado sin la intervención de las autoridades es decir que el valor del peso frente a otras divisas se determina por la oferta y demanda entre la moneda nacional y otras monedas. Por lo cual el banco central generalmente no interviene en el mercado cambiario. Sin embargo, en contadas ocasiones, en momentos de extrema volatilidad, y casi siempre con un esquema predeterminado, el Banco de México, ha intervenido para restaurar el orden de los mercados, pero nunca para determinar una paridad específica. El 16 de febrero del 2016, Banxico determinó que se reserva el derecho de vender dólares al mercado el día que lo estime conveniente y por la cantidad que juzgue necesario (intervenir discrecionalmente). Esto cambia las cosas en el sentido que los especuladores ahora no sabrán en que día habrá mayor liquidez de dólares en el mercado (antes sabían con seguridad que diario se subastaban 200 mdd) y tendrán que tomar posiciones más reservadas, lo que elimina la presión sobre el tipo de cambio. Las operaciones de compra-venta de divisas que realice el banco central pueden afectar las condiciones del mercado cambiario. En la medida en que el banco central puede llegar a ser un oferente o demandante importante en dicho mercado, las intervenciones del banco central podrían llegar a influir en el tipo de cambio [12]. Por ejemplo cuando la moneda local se deprecia el Banco de México vende dólares con el fin de aumentar la cantidad de dólares en el mercado y con eso contribuir a que el peso no se deprecie más de lo deseado [6].

El modelo de valuación de opciones de Black-Scholes (BS), parece describir los mercados de opciones razonablemente bien, pero no es perfecto, ya que los supuestos lo limitan a un mundo ideal, por lo cual es necesario adaptarlos o modificarlos para mejorar el modelo de acuerdo con nuestros intereses. Por ejemplo, los precios de las acciones no siguen en realidad un MGB, puesto que el tipo de cambio se mantiene dentro de cierto rango por las acciones de uno o ambos gobiernos y su volatilidad varía de forma impredecible [10]. Por lo tanto en este documento se pretende calcular los precios de las opciones para los mercados financieros, cuando el tipo de cambio está gobernado por un proceso estocástico acotado, en cuyo caso se modifica el supuesto de que el precio del dólar sigue un MGB y se adapta a un MGB acotado.

1.3. Historia de los mercados de opciones

En abril de 1973, el “Chicago Board of Trade” abrió un nuevo mercado organizado, el “Chicago Board Options Exchange”, con la finalidad de negociar opciones sobre acciones de empresas que coticen en la bolsa. Y hasta 1982 solo se ofrecían opciones de divisas en el mercado Over The Counter (OTC) hechas a la medida [9].

En 1983 la Philadelphia Stock Exchange (PSE, por sus siglas en inglés) introdujo los contratos de opciones. Dado el éxito que tuvieron, otras bolsas siguieron su ejemplo. En nuestro país, el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) inició operaciones en diciembre de 1999 [3]. También es importante destacar que el mercado estadounidense de derivados de mercancías ha tenido un crecimiento significativo en las dos últimas décadas. El Grupo “Chicago Mercantile Exchange” (CME), es el mercado más grande del mundo y en él se cotiza y negocia una gran diversidad de contratos futuros y opciones de bienes (v.g. trigo, arroz, maíz, sorgo, soya, olivo, canela, café, jugo de naranja, tocino, ganado vivo, leche en polvo, algodón, mantequilla, etc.)

1.4. Objetivos

Objetivo general. Valuar opciones europeas sobre el dólar con la fórmula de Black-Scholes y con un modelo que considere el precio de un activo subyacente gobernado por un proceso estocástico acotado, para poder realizar una comparación entre ellos y estudiar las implicaciones que se obtengan.

Objetivos específicos

1. Estudiar el modelo de Black-Scholes.
2. Valuar opciones europeas sobre el dólar con el modelo de BS.
3. Estudiar un modelo que considere el precio de un activo subyacente gobernado por un proceso estocástico acotado.
4. Valuar opciones europeas sobre el tipo de cambio peso-dólar, utilizando un modelo estocástico acotado.
5. Estudiar las implicaciones que se obtienen al considerar un proceso estocástico acotado, para modelar la dinámica del tipo de cambio. La idea es ver si al proponer cotas inferiores y superiores, implica que los precios de las opciones sean menores, comparados con los resultados que se consiguen con el modelo de BS.

1.5. Definiciones

Para desarrollar este trabajo son necesarias las siguientes definiciones, algunas de ellas se pueden encontrar en el libro de Kozikowski (2013) o en el libro de Alfonso (2008).

Definición 1.5.1. *Un activo subyacente es un activo, en el que se basan contratos de compra-venta. Los activos subyacentes pueden ser: acciones, bienes, tasas de interés, tipo de cambio, etc. En este caso el activo subyacente es el tipo de cambio peso-dólar.*

Definición 1.5.2. *Un futuro es un acuerdo entre dos partes, por el cual una de ellas, se compromete a comprar y la otra se compromete a vender un activo subyacente, en un momento futuro, a un precio de ejercicio, que se determina a la firma del contrato.*

Definición 1.5.3. *Un producto derivado es un contrato que firman dos partes en un momento determinado del tiempo, donde los pagos futuros dependen del precio que tome otro activo, llamado activo subyacente.*

Definición 1.5.4. *El arbitraje es una estrategia de negociación que comienza con capital igual a cero y al final del plazo hay una probabilidad positiva de obtener una ganancia y una probabilidad cero de pérdida.*

El objetivo principal es determinar el precio teórico de un producto derivado. Para esto es necesario construir un portafolio (el portafolio de cobertura) que elimina los riesgos del producto derivado (tipo de cambio peso-dólar). En particular, se requiere que el portafolio de cobertura replique el mismo patrón de rendimiento del producto derivado, de tal manera que las dos alternativas (el portafolio de cobertura y el producto derivado) sean exactamente el mismo. En el caso en el que ambos tengan el mismo rendimiento pero distinto precio, se podría presentar un arbitraje.

El presente trabajo se enfoca en un producto derivado específico, que es la opción europea. Los cuales tienen la finalidad de que el comprador de la opción se proteja de variaciones adversas en los precios del activo subyacente en el mercado. En los siguientes párrafos se encuentran las definiciones correspondientes a contratos de opciones.

Definición 1.5.5. *La opción es un instrumento derivado, que da a su poseedor el derecho, pero no la obligación de comprar o vender un activo subyacente a un precio y tiempo determinado. El precio al que se puede ejercer el derecho de compra o de venta del activo se denomina precio de ejercicio (strike price). Para poseer este derecho es necesario pagar una prima (valor de la opción) al vendedor de la opción.*

Existen diversos tipos de opciones, los cuales se clasifican en distintas categorías, por ejemplo las opciones que se muestran a continuación están en función del plazo de ejercicio.

Definición 1.5.6. *Opción americana: Se puede ejercer en cualquier momento entre la fecha del inicio del contrato y la fecha de expiración.*

Definición 1.5.7. *Opción europea: Se puede ejercer únicamente en su fecha de vencimiento.*

Esta investigación se enfoca en las opciones europeas sobre el tipo de cambio peso-dólar, para determinar su valor se utilizan dos modelos, el modelo de BS y el modelo con un proceso estocástico acotado.

Otra forma de clasificar las opciones es, según el derecho que otorgan, las cuales son:

Definición 1.5.8. *La opción de compra (call): Da el derecho pero no la obligación de comprar un activo subyacente. Si el precio del bien subyacente es más alto que el precio de ejercicio, el derecho será ejercido y la ganancia para el comprador será la diferencia entre el precio del bien subyacente y la suma del precio de ejercicio con el valor de la prima.*

Definición 1.5.9. *La opción de venta (put): Da el derecho pero no la obligación de vender. Este derecho será ejercido si el precio del bien subyacente está por abajo del precio de ejercicio y la ganancia para el tenedor de la opción será la diferencia entre el precio de ejercicio y la suma del precio de ejercicio del subyacente con el valor de la prima.*

En los contratos de opciones existen dos partes:

- El comprador o el que toma una posición larga (Long): Es el que tiene el derecho pero no la obligación de ejercer la compra o la venta del activo subyacente.
- El vendedor o posición corta (Short): Es el que está obligado a comprar o vender el activo subyacente al precio pactado, si el comprador decide ejercer su derecho.

Como todos los instrumentos derivados, las opciones pueden ser bursátiles o sobre mostrador. Las opciones bursátiles son estandarizadas, sus plazos de vencimiento cortos y el monto del contrato es relativamente pequeño. En cambio, las opciones OTC están hechas a la medida, pueden abarcar periodos largos y el monto del contrato es grande.

1.6. Opciones sobre el dólar

En esta sección se escriben las definiciones anteriores enfocadas a las opciones sobre el dólar. Así según el autor Kozikowski (2013), las definiciones quedan escritas de la siguiente manera.

Definición 1.6.1. *Una divisa es la moneda de otro país libremente convertible en el mercado cambiario.*

Definición 1.6.2. *Una opción en moneda extranjera es un instrumento financiero que confiere al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender una cantidad específica de moneda extranjera, a un precio fijo, durante un periodo específico (hasta la fecha de expiración).*

Cada opción contiene tres precios relacionados entre sí:

- * El precio al contado del activo subyacente. En el caso de las opciones sobre divisas es el tipo de cambio spot (S_0) de la divisa del contrato.
- * El precio de ejercicio (K) al que el dueño del contrato tiene el derecho de comprar (o vender) la divisa al vencimiento.

- * El precio de la opción. Es el valor de la prima al inicio del contrato. Designamos con C , en caso de la opción de compra, o P en caso de la opción de venta.

Una opción cuyo precio de ejercicio es igual al tipo de cambio *spot* ($K = S_t$) de la moneda base se dice que está *en el dinero*. Una opción que generaría ganancia si se ejecutara de inmediato se dice que está *dentro del dinero*. Una opción call está *dentro del dinero* si su precio de ejercicio es menor que el tipo de cambio spot: $K < S_T$. Una opción que no generaría ganancias si se ejecutara inmediatamente se conoce como *fuera del dinero*. Una opción call está *fuera del dinero* si $K > S_T$. Estas opciones se negocian en el mercado global de divisas.

Definición 1.6.3. *El mercado global de divisas es el mercado financiero más grande y líquido del mundo. También se le conoce como mercado cambiario, Forex, o simplemente FX. El mercado de divisas es el marco organizacional dentro del cual los bancos, las empresas y los individuos compran y venden monedas extranjeras.*

Desde el punto de vista mexicano, el dólar estadounidense (USD) es una divisa. Una de las funciones del mercado de divisas es determinar los precios de diferentes divisas (tipo de cambio). Una característica del mercado de divisas es su continuidad, porque nunca cierra por lo cual los tipos de cambio se modifican constantemente y en el caso de las monedas muy líquidas, el tipo de cambio puede variar hasta 20 veces por minuto.

La competencia entre los numerosos agentes mantienen los diferenciales cambiarios bajos, por lo que el mercado de divisas es eficiente. Los agentes están dispuestos a comprar la divisa en que negocian a un precio de compra y venderla a un precio de venta. Los bancos centrales también intervienen comprando o vendiendo divisas pero con el objetivo explícito de afectar el tipo de cambio. Cuando el banco central quiere fortalecer la moneda nacional vende la moneda extranjera y cuando quiere evitar que se aprecie de manera exagerada, el banco central compra la moneda extranjera [3].

La manera más frecuente de cotizar el tipo de cambio es en términos europeos, lo que significa que para comprar un dólar de Estados Unidos se requiere una cierta cantidad de unidades de moneda extranjera. Por ejemplo el tipo de cambio en México se cotiza en términos europeos (es decir 18.52 pesos por dólar).

CAPÍTULO 2

Probabilidad y procesos estocásticos

2.1. Espacios de probabilidad

Se utiliza un espacio de probabilidad para modelar una situación en la que se lleva a cabo un experimento aleatorio. En finanzas cuantitativas siempre existe el interés de determinar modelos matemáticos que describan los cambios en el precio de las acciones. El concepto básico sobre el que descansa toda la teoría de probabilidad es el de experimento aleatorio. Por lo cuál son necesarias las siguientes definiciones los cuales se pueden consultar en Steven (2004) o en Venegas (2008).

Definición 2.1.1. *Un experimento aleatorio es aquel que presenta las siguientes tres propiedades:*

- (i) *Tiene al menos dos posibles resultados,*
- (ii) *el conjunto de posibles resultados se conoce antes de que el experimento se realice, y*
- (iii) *puede repetirse esencialmente bajo las mismas condiciones.*

Definición 2.1.2. *El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, es llamado espacio muestral y se denota por Ω . Los subconjuntos de Ω son llamados eventos, y en ocasiones sucesos.*

El concepto de σ -álgebra es uno de los pilares de la teoría de probabilidad. Una σ -álgebra es un conjunto de eventos cuyos elementos contienen información relevante, por lo cual solo se necesita asignar las probabilidades a sus elementos.

Definición 2.1.3. *Sea Ω un conjunto no vacío, y sea \mathcal{F} una colección de subconjuntos de Ω . Decimos que \mathcal{F} es una σ -álgebra, siempre que:*

- (i) *El conjunto vacío \emptyset pertenece a \mathcal{F} ;*
- (ii) *si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de \mathcal{F} , entonces*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}; \tag{2.1}$$

(iii) si A está en \mathcal{F} , su complemento A^c también está en \mathcal{F} .

Definición 2.1.4. Sea Ω un conjunto no vacío, y sea \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Una medida de probabilidad \mathbb{P} es una función que, a cada conjunto $A \in \mathcal{F}$, le asigna un número en $[0,1]$, llamada la probabilidad de A y denotada como $\mathbb{P}(A)$, que satisface los siguientes axiomas:

(i) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$;

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(iii) Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathcal{F} con $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Definición 2.1.5. Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constituida por un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y una medida de probabilidad \mathbb{P} definida sobre \mathcal{F} .

Cuando se tiene un espacio de probabilidad infinito, se dice que un evento A ocurre casi seguramente, si tiene una probabilidad igual a uno y no incluye todos los resultados posibles, el conjunto de los elementos que no están en A , tiene una probabilidad igual a cero.

Definición 2.1.6. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Si un conjunto $A \in \mathcal{F}$ satisface $\mathbb{P}(A) = 1$, decimos que el evento A ocurre casi seguramente.

2.2. Variables aleatorias y sus distribuciones

El cálculo de probabilidades utiliza variables numéricas que se denominan aleatorias, porque sus valores vienen determinadas por el azar. En todo proceso de observación o experimento se puede definir una variable aleatoria asignando a cada resultado del experimento un número [1].

Definición 2.2.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria es una función de valor real X definida en Ω con la propiedad de que para cada subconjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}$, el subconjunto de Ω dado por $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$ está en la σ -álgebra \mathcal{F} .

La σ -álgebra de Borel es la σ -álgebra generada por la topología usual de \mathbb{R} y se denota por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Para calcular el valor de la opción europea se modela el precio del activo subyacente (precio del dólar) con el método binomial, ejemplificado con el lanzamiento de una moneda infinitas veces, como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.2.1. (*Lanzamiento de la moneda infinitas veces*). Lanzamos la moneda infinitas veces y sea Ω_∞ el espacio muestral que denota el conjunto de todos los posibles resultados. Un elemento cualquiera de Ω_∞ puede ser denotado por $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\dots$, donde ω_n indica el resultado del n -ésimo lanzamiento de la moneda.

Para el espacio de probabilidad $(\Omega_\infty, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ asumimos que la probabilidad de que caiga cara en cada lanzamiento es $0 < p < 1$, la probabilidad de que caiga cruz es $q = 1 - p > 0$, y los respectivos lanzamientos son independientes.

En este sentido, se supone que el precio inicial de la acción es S_0 y se define el precio de las acciones en los distintos periodos, mediante la siguiente fórmula.

$$S_{n+1}(\omega) = \begin{cases} uS_n(\omega) & \text{si } \omega_{n+1} = H, \\ dS_n(\omega) & \text{si } \omega_{n+1} = T. \end{cases}$$

Donde u es el factor de alza y d es el factor de baja.

Todas estas son variables aleatorias y asignan un valor numérico a cada posible secuencia de lanzamientos de la moneda. Como se supone que el número de periodos es infinito, se tiene que el número de posibles valores que puede tomar el activo subyacente también lo es.

En el ejemplo 2.2.1 una variable aleatoria S_n es una cantidad numérica cuyo valor está determinado por el experimento aleatorio de elegir un $\omega \in \Omega_\infty$ (estaremos interesados en la probabilidad de que S_n tome ciertos valores). A menudo la probabilidad de que S_n tome un valor determinado será cero y, por lo tanto, hablaremos sobre la probabilidad de que S_n tome un valor en algún conjunto en lugar de la probabilidad de que S_n tome un valor particular, es decir $\mathbb{P}\{S_n \in B\}$.

Toda variable aleatoria tiene asociada una función, que es llamada función de distribución. Se puede pensar en la función de distribución de una variable aleatoria, como la que nos dice la densidad o probabilidad de cada subconjunto de \mathbb{R} . En otras palabras, la distribución de una variable aleatoria es en sí misma una medida de probabilidad, pero es una medida sobre subconjuntos de \mathbb{R} en vez de subconjuntos de Ω .

Definición 2.2.2. Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la medida de distribución de X es la medida de probabilidad μ_X que asigna a cada subconjunto de Borel B de \mathbb{R} la masa $\mu_X(B) = \mathbb{P}\{X \in B\}$.

Existen otras formas de registrar la distribución de una variable aleatoria en lugar de especificar la medida de distribución μ_X . Es posible describir la distribución de una variable aleatoria en función de su función de distribución acumulada (cdf).

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Si se conoce la medida de distribución μ_X , entonces se conoce la cdf F por que $F(x) = \mu_X(-\infty, x]$. Por otra parte, si conocemos la cdf F , entonces podemos calcular $\mu_X[x, y] = F(y) - F(x)$ para $x < y$.

Una vez que se conoce la medida de distribución $\mu_X[a, b]$ para cada intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$, se determina para cada subconjunto de Borel de \mathbb{R} . Por lo tanto, en principio, conocer la cdf de $F(x)$ para una variable aleatoria es lo mismo que saber su medida de distribución μ_X .

2.2.1. Variables aleatorias continuas

Se dice que una variable aleatoria es continua cuando puede tomar cualquier valor en un intervalo.

Definición 2.2.3. *Sea $f(x)$ una función de valor real definida en \mathbb{R} . Si para cada subconjunto de Borel B de \mathbb{R} , el conjunto $\{x; f(x) \in B\}$ es también un subconjunto de Borel de \mathbb{R} se dice que f es Borel medible.*

En (2.5) se muestra como calcular la probabilidad para una variable aleatoria continua, cuando existe una función de densidad $f(x)$. Es decir una función no negativa definida para $x \in \mathbb{R}$ tal que el área total encerrada bajo la función $f(x)$ debe ser igual a 1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mathbb{P}\{X \in \mathbb{R}\} = \mathbb{P}(\Omega) = 1. \quad (2.3)$$

Esto significa que existe una función no negativa Borel-medible f definida en \mathbb{R} tal que

$$\mu_X(B) = \int_B f(x)dx \text{ para cada subconjunto de Borel } B \text{ en } \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

De forma particular se tiene que,

$$\mu_X[a, b] = \mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx, \quad -\infty < a \leq b < \infty. \quad (2.5)$$

$$\mu_X(-\infty, a] = \mathbb{P}\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f(x)dx, \quad -\infty < a \leq b < \infty.$$

2.2.2. Distribuciones de probabilidad

Las distribuciones de probabilidad necesarias para esta investigación son la distribución normal, la distribución normal estándar y la distribución log-normal, cuyas funciones de densidad de probabilidad, son las siguientes:

Distribución normal

Se dice que X tiene una distribución normal si, su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \right\}, \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (2.6)$$

La función $f_X(x)$ depende de dos parámetros: μ , que es al mismo tiempo la media, la mediana y la moda de la distribución, y σ , que es la desviación típica.

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se dice que la variable aleatoria X tiene una distribución normal estándar.

Distribución log-normal

Dado que los rendimientos de los activos se caracterizan razonablemente bien mediante una distribución normal, los precios de los mismos se determina mediante una distribución log-normal.

Si Y es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces $X = \exp\{Y\}$ tiene una distribución log-normal (μ, σ) .

La distribución log-normal tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Donde μ y σ son la media y la desviación estándar del logaritmo de la variable X .

Se tiene que [11]

$$\mathbb{E}[X] = \exp \left\{ \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right\},$$

y

$$Var[X] = \exp \{2\mu + \sigma^2\} (\exp \{\sigma^2 - 1\}).$$

2.2.3. Esperanza

Sea X una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se calcula el valor esperado de X de la siguiente forma.

Si Ω es finito, se simplifica el valor promedio por

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega).$$

Si Ω es infinito numerable, sus elementos pueden ser listados en una secuencia $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, y definimos

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} X(\omega_k) \mathbb{P}(\omega_k).$$

Surge la dificultad, sin embargo, si Ω es infinito no numerable. Las sumas no numerables no pueden ser definidas. De modo que, se debe pensar en términos de integrales.

Definición 2.2.4. Sea X una variable aleatoria continua en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La esperanza (o valor esperado) de X se define como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Se ha logrado definir $\mathbb{E}[X]$ cuando X es una variable aleatoria en un espacio de probabilidad abstracto $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la integral es en el sentido de Lebesgue. Para los cálculos, a menudo se utilizan las densidades de la variable aleatoria bajo consideración, y se integra sobre los números reales en lugar de sobre Ω .

El caso más común para los modelos de tiempo continuo en finanzas es cuando X tiene una densidad. Si X tiene una densidad, es posible utilizar esta densidad para calcular la esperanza, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y sea g una función Borel-medible en \mathbb{R} . Supongamos que X tiene una densidad f (i.e., f es una función que satisface (2.4)). Entonces

$$\mathbb{E}[|g(X)|] = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx. \quad (2.7)$$

Si esta cantidad es finita, entonces

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \quad (2.8)$$

Definición 2.2.5. Sea X una variable aleatoria, la varianza de X , denotada por $\text{Var}[X]$, es

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Como $(X - \mathbb{E}[X])^2$ es no negativa, la $\text{Var}[X]$ está siempre definida. La desviación estándar de X es $\sqrt{\text{Var}[X]}$. La linealidad de las esperanzas muestra que

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Definición 2.2.6. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados [14].*

La utilidad de los procesos estocásticos en los modelos financieros radica en la descripción del comportamiento de las variables aleatorias en el tiempo.

2.3. Movimiento Browniano

El fenómeno natural que ahora se conoce como movimiento Browniano se registró en 1828, cuando el botánico Robert Brown reportó en una revista científica que granos de polen suspendidos en una cierta sustancia y vistos a través de un microscopio realizaban un movimiento irregular e inexplicable. Las observaciones del movimiento de los granos de polen sugieren que las trayectorias son continuas y que los desplazamientos son independientes en intervalos de tiempo disjuntos. En esta sección se presenta el modelo matemático para el movimiento Browniano. Es importante destacar que las propiedades de martingala y de Markov son heredadas al movimiento Browniano.

Para entender el movimiento Browniano, es necesario definir la caminata aleatoria escalada como:

$$W^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}. \quad (2.9)$$

Donde el proceso M_{nt} , es la caminata aleatoria simétrica, aumentando el número de pasos por unidad de tiempo.

Teorema 2.3.1. Teorema del Límite Central. *Fijamos $t \geq 0$. Si $n \rightarrow \infty$, la distribución de la caminata aleatoria escalada $W^{(n)}(t)$ evaluada al tiempo t converge a la distribución normal con media cero y varianza t [1].*

El Teorema del Límite Central, Teorema 2.3.1, se puede usar para mostrar que el límite de un modelo binomial de fijación de precios de activos correctamente escalado conduce a una variable aleatoria con una distribución normal logarítmica. Estos resultados muestran que el modelo binomial es una versión en tiempo discreto del movimiento geométrico Browniano, que es la base de la fórmula de Black Scholes para la fijación de precios de opciones.

Se construye un modelo como el del ejemplo 2.2.1 para el precio de las acciones en el intervalo de tiempo de $[0, t]$, escogiendo un entero n y construyendo un modelo binomial para el precio de las acciones que toma n pasos por unidad de tiempo [1].

El precio de las acciones al tiempo t está determinado por el precio inicial S_0 y el resultado de los primeros nt lanzamientos. La suma de el número de caras H_{nt} y el número de cruces es T_{nt} en los primeros nt lanzamientos de la moneda es nt . La caminata aleatoria M_{nt} es el número de caras menos el número cruces en los nt lanzamientos de la moneda:

En este modelo con el factor de alza u_n y el factor de baja d_n , el precio de la acción al tiempo t es

$$S_n(t) = S_0 u_n^{H_{nt}} d_n^{T_{nt}} = S_0 \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt+M_{nt})} \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt-M_{nt})}. \quad (2.10)$$

Con esto se puede identificar la distribución de la variable aleatoria cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 2.3.2. *Cuando $n \rightarrow \infty$, la distribución de $S_n(t)$ en 2.10 converge a la distribución*

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ \sigma W(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\}. \quad (2.11)$$

Donde $W(t)$ es una variable aleatoria normal con media cero y varianza t [1].

La distribución de $S(t)$ en 2.11 se llama log-normal. Más generalmente cualquier variable aleatoria de la forma $c \exp\{x\}$, donde c es una constante y x está distribuida normalmente, tiene una distribución log-normal.

Se obtiene el movimiento Browniano como el límite de la caminata aleatoria escalonada $W^{(n)}(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$. El movimiento hereda las propiedades de la caminata aleatoria. Esto conduce a la siguiente definición [1].

Definición 2.3.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Para cada $\omega \in \Omega$, suponga que existe una función continua $W(t)$ para $t \geq 0$ que satisface $W(0) = 0$ y depende de ω . Entonces $W(t)$, $t \geq 0$ es un movimiento Browniano si para cada conjunto de puntos $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_m\}$ tales que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$, los incrementos*

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}) \quad (2.12)$$

son independientes y cada uno de estos incrementos está normalmente distribuido con

$$\mathbb{E} [W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0, \quad (2.13)$$

$$\text{Var} [W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i. \quad (2.14)$$

Propiedad de martingala y de Markov

Se dice que un proceso estocástico es una martingala si dada la información disponible hasta el tiempo t y un $T > t$, entonces el mejor pronóstico de S_T es

justamente el valor más reciente, S_t .

Según la hipótesis débil de la teoría de los mercados eficientes, los precios de los activos incorporan toda la información histórica acerca de los mismos y, por lo tanto, conocer el pasado de los precios y rentabilidades no sirve para obtener, de forma sistemática, beneficios extraordinarios [11].

Un proceso de Markov es un tipo de proceso estocástico consistente con la hipótesis débil de la teoría de los mercados eficientes, donde únicamente el precio actual de un activo es relevante para predecir su precio futuro. Por tanto, en un proceso de Markov, el recorrido concreto que haya seguido el precio en el pasado es irrelevante para predecir su futuro [11].

Definición 2.3.2. Sea $f(t)$ una función definida para $0 \leq t \leq T$. La variación cuadrática de f al tiempo T es

$$[f, f](T) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2, \quad (2.15)$$

donde $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Teorema 2.3.3. Sea W un movimiento Browniano. Entonces $[W, W](T) = T$, para todo $T \geq 0$ casi seguro [1].

Se debe recordar que la terminología casi seguramente significa que puede haber algunos caminos del movimiento Browniano para los cuales la afirmación $[W, W](T) = T$ no es verdadera. Sin embargo el conjunto de todos esos caminos tiene una probabilidad igual a cero. El conjunto de caminos para los cuales la afirmación del teorema es verdadera tiene probabilidad uno.

Definición 2.3.3. Un proceso generalizado Wiener o movimiento Browniano aritmético es un proceso estocástico que sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.16)$$

Donde μ y σ son constantes y dW_t es un movimiento Browniano.

En un movimiento Browniano aritmético, se tiene que el cambio en los incrementos se distribuye como una variable aleatoria normal con media $\mu(t_{i+1} - t_i)$ y varianza $\sigma^2(t_{i+1} - t_i)$ [11].

Volatilidad del movimiento geométrico Browniano

Sean μ y σ constantes, y se define el movimiento geométrico Browniano como

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ \sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\}.$$

Este es el modelo de precio de acciones, utilizado en la fórmula de valuación de Black-Scholes. Aquí mostramos cómo usar la variación cuadrática del movimiento Browniano para identificar la volatilidad σ de una ruta de este proceso.

Sean $0 \leq T_1 \leq T_2$ dados, y se supone que se observa el movimiento geométrico Browniano. Entonces podemos elegir una partición de ese intervalo, $T_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T_2$, y se observa que

$$\begin{aligned} \ln S(t_{j+1}) - \ln S(t_j) &= \ln \left[\frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)} \right] \\ &= \sigma(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t_{j+1} - t_j), \end{aligned}$$

sobre cada uno de los subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$. La suma de los cuadrados de los rendimientos logarítmicos, a veces denominada volatilidad realizada, es

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\ln \frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)} \right]^2 &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{m-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\quad + 2\sigma \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \sum_{j=0}^{m-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Cuando la norma de la partición $\|\Pi\| = \max_{j=0, \dots, m-1} (t_{j+1} - t_j)$ tiende a cero, entonces el primer término del lado derecho de la ecuación anterior es aproximadamente igual a σ^2 veces la cantidad de variación cuadrática acumulada por el movimiento Browniano en el intervalo $[T_1, T_2]$, que es $T_2 - T_1$. Por lo cual

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\ln \frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)} \right]^2 \approx \sigma^2. \quad (2.17)$$

Si el precio del activo $S(t)$ es realmente un movimiento geométrico Browniano con volatilidad constante σ , entonces se puede identificar a partir de las observaciones de precios calculando el lado izquierdo de (2.17) y tomando la raíz cuadrada. En teoría, es posible hacer que esta aproximación sea tan precisa como se quiera, disminuyendo el tamaño de paso.

La razón de que el movimiento geométrico Browniano haya sido el proceso más ampliamente utilizado para modelar el precio de un activo es que se ajusta al comportamiento de las series de precios observados en la práctica.

Definición 2.3.4. *Un proceso de difusión es un proceso estocástico de tiempo continuo con la propiedad de Markov y para el cual las rutas de muestreo X_t son funciones continuas en t [15].*

Lema de Itô

El lema de Itô se usa para determinar el diferencial de una función de un proceso de difusión.

Sea X_t un proceso de difusión cuya dinámica es

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t. \quad (2.18)$$

Supongamos que $f(X_t, t)$ es función del proceso anterior, siendo $f(X_t, t)$ una función dos veces continuamente diferenciable de X_t y una vez continuamente diferenciable de t , entonces el lema de Itô establece que

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^2}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \sigma_t dW_t. \quad (2.19)$$

CAPÍTULO 3

Fundamentos Estadísticos

3.1. Estadísticas de los datos del tipo de cambio

La representación de un conjunto de datos disponibles de una variable X suele hacerse indicando los valores y sus frecuencias absolutas y relativas.

Definición 3.1.1. *La frecuencia absoluta es simplemente el número de veces que se repite un determinado valor de la variable.*

Definición 3.1.2. *La frecuencia relativa es el número de veces que se observa un valor de la variable (frecuencia absoluta), dividido por el número total de datos.*

Después de calcular la frecuencia de los datos se pueden representar en un histograma. Cuando el número de valores es muy grande suelen agruparse en intervalos o “clases” si se hacen clases cada vez más finas, el histograma tenderá a una curva suave la cual llamamos función de densidad, $f(x)$. En este trabajo aplicaremos los conceptos de estadística para estudiar el rendimiento diario del precio del dólar $(S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$, donde S_t es el precio del dólar al tiempo t . Después de agrupar los datos se representan gráficamente en un histograma y en una gráfica de densidad. El histograma y la gráfica de densidad nos indica cómo se distribuye la variable y es posible observar las características a partir de la gráfica. En la sección (3.3) se presentan los histogramas y las gráficas de densidad para los rendimientos del dólar.

3.1.1. Medidas de tendencia central, medidas de dispersión, medidas de asimetría y curtosis

Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central, nos informan sobre el valor medio de los datos. A continuación se presentan las definiciones de algunas medidas de tendencia central que se utilizan en este trabajo.

Definición 3.1.3. *Dado un conjunto de datos de una variable x , que denotaremos por x_1, x_2, \dots, x_n se define la media aritmética, o simplemente media (μ) como:*

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

La media aritmética es la medida de tendencia central más utilizada e indica el centro de los datos. Aunque puede ser afectada por valores atípicos. Es decir, la existencia de valores anormales altos o anormales bajos, aunque se produzca rara vez, va a afectar considerablemente al valor de la media. Otra medida de tendencia central es la mediana, y se define de la siguiente manera.

Definición 3.1.4. *La mediana es el valor tal que, si ordenamos los datos de la variable de menor a mayor, el 50 % de los mismos es menor que ella y el otro 50 % es mayor. Es decir la mediana es el valor que ocupa la posición central.*

Medidas de dispersión

Otro grupo de medidas son las de dispersión de una variable. Las cuales se estarán utilizando en los datos del tipo de cambio peso-dólar, en seguida se mencionan sus definiciones.

La medida de dispersión más utilizada es la varianza, que mide el grado de dispersión de una variable respecto a su media. Se representa mediante las siglas “*Var*” y se define como la media de las desviaciones respecto a la media elevadas al cuadrado:

$$Var[x] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

El inconveniente de la varianza es que, al elevar al cuadrado las desviaciones respecto a la media, está medida en el cuadrado de las unidades de la variable. Para evitar este inconveniente se define la desviación típica ($\sigma[x]$) como la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma[x] = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Medidas de asimetría

Se define el coeficiente de asimetría como:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{n \cdot \sigma^3[x]}.$$

Es decir, es la media de las desviaciones cúbicas respecto a la media, dividida por la desviación típica al cubo. Observemos que, al dividir por la desviación típica al cubo, se elimina el efecto de las unidades de medida, con lo que el coeficiente de asimetría no tiene unidades.

El signo del coeficiente de asimetría indica la forma de la distribución de la variable

(es decir, del histograma). Así, si el coeficiente de asimetría es negativo, la distribución se alarga para valores inferiores a la media. Si, por el contrario, el coeficiente de asimetría es positivo, la distribución se alarga para valores superiores a la media.

Medida de curtosis

El coeficiente de curtosis indica si la distribución de la variable tiene colas más o menos “pesadas”, es decir, si los valores extremos concentran o no una alta frecuencia.

Se define el coeficiente de curtosis como la media de las desviaciones cuartas respecto a la media, dividida por la desviación típica a la cuarta,

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{n \cdot \sigma^4[x]}.$$

Se observa que, al elevar a la cuarta las desviaciones respecto a la media, los valores extremos van a tener una gran influencia, sobre el coeficiente de curtosis. Por lo tanto, si el coeficiente de curtosis es elevado, la distribución de la variable tendrá alta frecuencia en las colas (colas “pesadas”). Si, por el contrario, el coeficiente de curtosis es bajo, la distribución de la variable tendrá baja frecuencia en las colas (colas “ligeras”).

Para definir el grado de curtosis “medio”, se compara el coeficiente de curtosis de la variable en cuestión con el de una variable normal, que es la más utilizada en la práctica, cuyo coeficiente de curtosis es igual a 3.

Si el grado de curtosis es “medio”, es decir, tiene curtosis igual a 3, se dice que la distribución es “mesocúrtica”.

Si el grado de curtosis es mayor que 3, se dice que la distribución es “leptocúrtica”.

Si el grado de curtosis es menor que 3, se dice que la distribución es “platicúrtica”.

3.2. Rendimiento

En economía el rendimiento de un activo en un periodo determinado se define como la ganancia obtenida con dicho activo durante ese periodo por cada unidad monetaria invertida [11].

Para conocer los modelos que miden el riesgo, se necesita conocer como medir el rendimiento diario del tipo de cambio.

Los precios del tipo de cambio se comportan de acuerdo con una caminata aleatoria, es decir, que el precio del dólar el día de hoy es independiente de los precios observados en días anteriores y que, por tanto, los mercados no tienen memoria y no son predecibles.

Una variable importante para poder calcular decisiones de inversión es el rendimiento [2]).

Definición 3.2.1. *El rendimiento de un activo o portafolio es el cambio de valor que registra en un periodo con respecto a su valor inicial:*

$$R_d = \frac{\Delta \text{Precio}}{\text{Precio}_{\text{inicial}}} = \frac{\text{Precio}_{\text{final}} - \text{Precio}_{\text{inicial}}}{\text{Precio}_{\text{inicial}}}. \quad (3.1)$$

El rendimiento también se puede definir en función de los rendimientos logarítmicos, lo que nos daría el rendimiento continuamente compuesto.

$$R = \ln(1 + R_d) \text{ donde } R_d \text{ es el rendimiento diario.} \quad (3.2)$$

Más adelante se va a calcular la volatilidad de los rendimientos diarios del dólar, para poder calcular la volatilidad anualizada de un conjunto de datos.

3.3. Análisis de los datos del tipo de cambio peso-dólar

Enseguida se muestra en la Figura 3.1 el comportamiento del precio del dólar durante el periodo comprendido entre 1993 hasta 2017, en el eje de las abscisas se encuentran los años de los cuales se tomaron los datos del tipo de cambio peso-dólar, en el eje de las ordenadas se ubican los precios del dólar. Los datos para la elaboración de la gráfica fueron obtenidos de la página de Banxico [13].

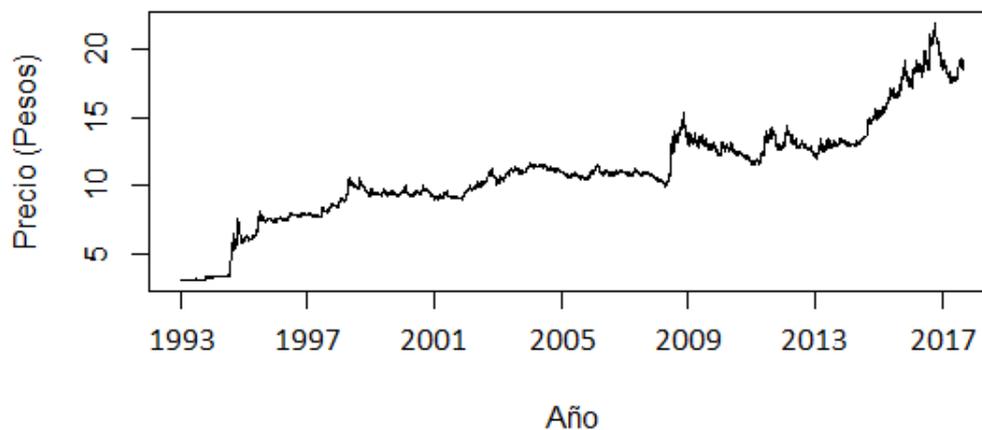


Figura 3.1: Variación del tipo de cambio de 1993-2017.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.1 se observa que el precio del dólar a través del tiempo tiene una tendencia a subir, aunque no de forma constante, ya que se observan subidas y bajadas. Se puede percibir que en los años 2009 y 2017 se encuentran algunos picos, lo que nos dice que el dólar tuvo una subida drástica. De acuerdo con este comportamiento es necesario protegerse de los cambios a futuro para evitar pérdidas

catastróficas. Las opciones europeas de compra y de venta sobre el tipo de cambio peso-dólar, pueden ayudar a administrar estos riesgos.

Para poder analizar el comportamiento del tipo de cambio peso-dólar, se toma en cuenta los datos de un tiempo igual al que se va a evaluar la opción, pero de un periodo anterior. De acuerdo con el MexDer, las opciones tienen vencimiento cada tres, seis y doce meses. Por tal motivo se deben analizar las gráficas del precio del dólar para estos tres periodos diferentes. Como se muestra a continuación.

Análisis de las gráficas con datos de un año

Para analizar el comportamiento del tipo de cambio peso-dólar en un año, se toman los datos del tipo de cambio de cierre determinados por el Banco de México [13]. Se consideran los datos de un periodo anterior al que se evalúa la opción, este periodo comprende del 19 de diciembre del 2015 al 18 de diciembre del 2016. En el que se tiene un total de 252 días hábiles.

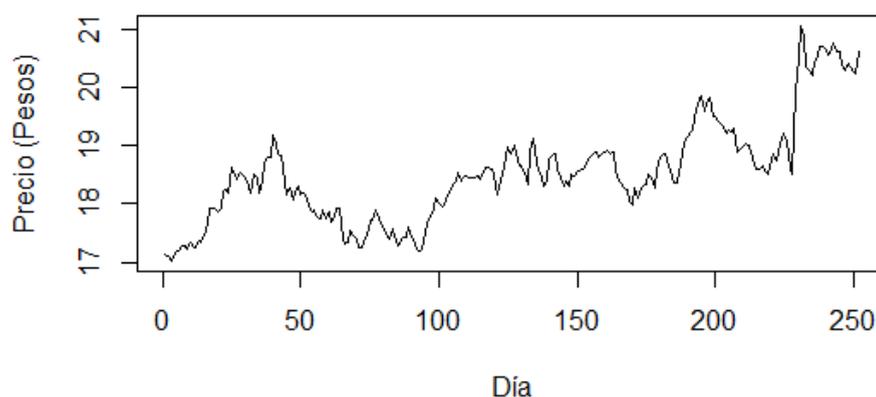


Figura 3.2: Precios del dólar del 19 de diciembre de 2015 al 18 de diciembre de 2016.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.2 se muestra como varía el precio del dólar en un año, en el eje de las abscisas se encuentran los días hábiles durante el periodo en el que se analizan los datos, en el eje de las ordenadas se localiza la paridad del tipo de cambio peso-dólar. Se puede observar que en este tiempo, el precio del dólar varía entre los 17 pesos y los 21 pesos. Además se observa que el tipo de cambio peso-dólar tiene una tendencia a subir, pero con picos en distintos días durante este año, lo que significa que el precio del dólar tiene una alta volatilidad y por consiguiente representa un alto riesgo para las instituciones que manejen importaciones y exportaciones a Estados Unidos. Por lo anterior es necesario protegerse contra el riesgo de cambio en el precio del dólar y una alternativa de protección son las opciones europeas de compra y de venta.

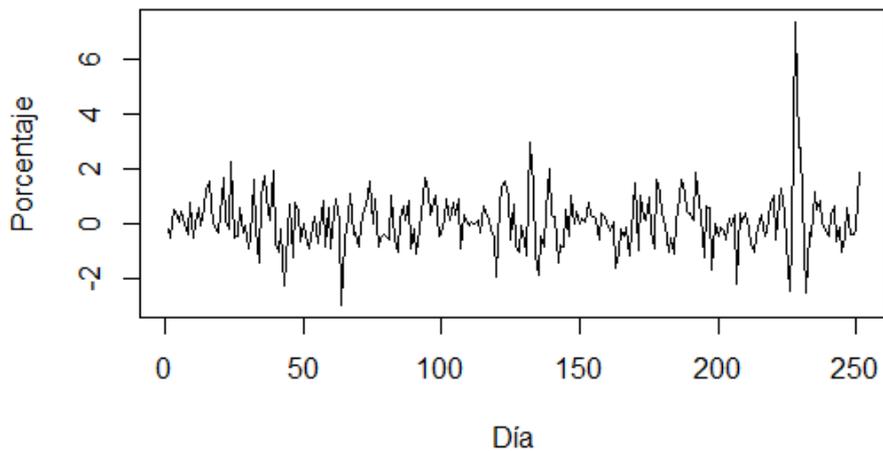


Figura 3.3: Rendimientos diarios del dólar del 19 de diciembre de 2015 al 18 de diciembre de 2016.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.3 se encuentran los rendimientos diarios del dólar para un año, en el eje de las abscisas se tiene los días hábiles correspondientes al periodo de un año, en el eje de las ordenadas se tiene los rendimientos diarios del tipo de cambio peso-dólar, los rendimientos están representados por el porcentaje. Se observa que la serie de rendimientos en la Figura 3.3 tiende a presentar un comportamiento de reversión a la media. Sin embargo, las fluctuaciones que presenta la serie alrededor de su media en algunos casos son muy pronunciadas y aunado a que la serie de precios en un año en la Figura 3.2 presenta una tendencia a subir, permite suponer que es importante protegerse ante un cambio pronunciado en el precio del dólar.

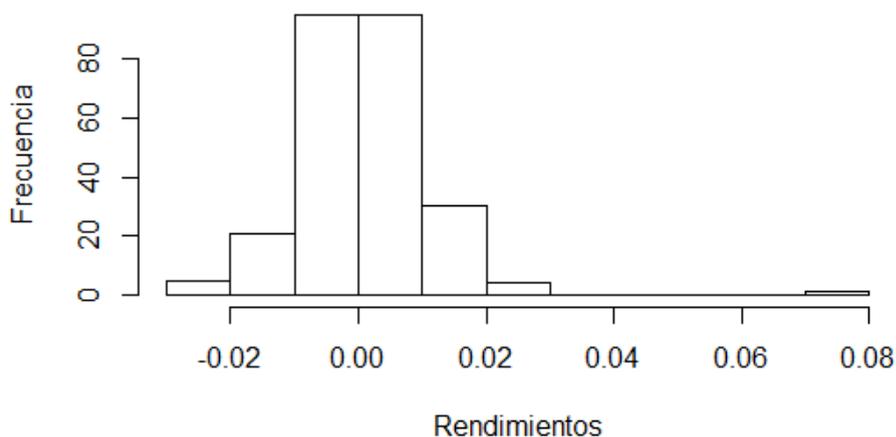


Figura 3.4: Histograma de los rendimientos del dólar del 19 de diciembre de 2015 al 18 de diciembre de 2016.

Fuente: Elaboración propia

En el histograma de rendimientos de la Figura 3.4 en el eje de las abscisas se encuentran los intervalos de clase de los rendimientos del tipo de cambio peso-dólar para un año, en el eje de las ordenadas se tiene la frecuencia con que se encuentra cada intervalo de clase. Se observa que la mayor concentración de valores está entre -0.01 y 0.01, donde se localizan aproximadamente 180 valores de los 252, es decir el 71 % de los valores, además se puede observar que existe muy pocos valores atípicos, los cuales se ubican en el intervalo de 0.07 a 0.08.

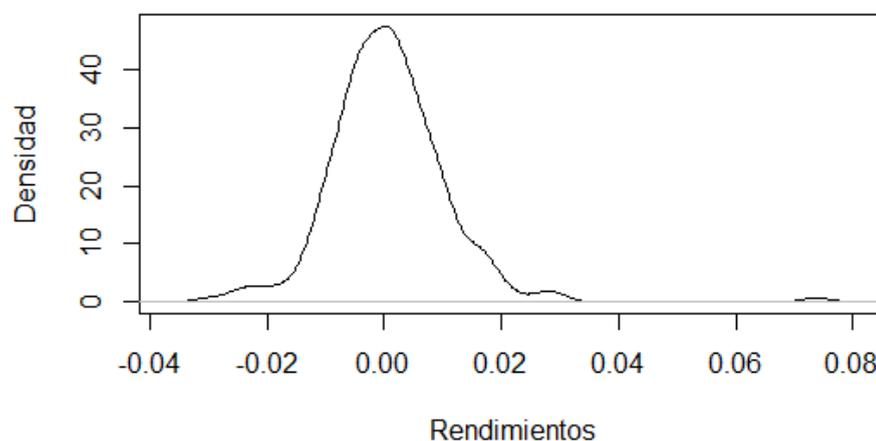


Figura 3.5: Densidad de los rendimientos del dólar del 19 de diciembre de 2015 al 18 de diciembre de 2016.

Fuente: Elaboración propia

Plazo de un año	
Media	0.00073
Mediana	0.00026
Varianza	0.00010
Desviación estándar	0.01013
Coefficiente de asimetría	1.47196
Coefficiente de curtosis	13.19875

Tabla 3.1: Medidas de tendencia central, medidas de dispersión, medidas de asimetría y curtosis de los rendimientos diarios del dólar en un año.

Fuente: Elaboración propia

Para la gráfica de densidad en la Figura 3.5 se tiene que el coeficiente de asimetría es 1.471962 como es positivo, la distribución se alarga para valores superiores a la media. Por otro lado tenemos que el coeficiente de curtosis es 13.19875, como es mayor a 3, entonces se puede decir que la variable presenta una distribución **leptocúrtica**. Observando esta gráfica de densidad, se podría pensar que la distribución de los rendimientos del dólar, aunque tienen cierto grado de asimetría y colas ligeramente pesadas, es aproximadamente normal, pero al realizar la prueba de normalidad de Lilliefors (prueba de corrección para Kolmogorov-Smirnov) resulta que

el valor de la significación estadística (p) ha sido 0.01616, o sea, menor de 0.05 y, por tanto, se rechaza que la muestra procede de una distribución normal. Las medidas de tendencia central y de dispersión para estos datos son las que se muestran en la Tabla 3.1.

Análisis de las gráficas con datos de seis meses

Otro periodo de tiempo en el que se valúa la opción, es a seis meses, por tal motivo es importante ver como se comporta el tipo de cambio en este plazo. Para poder realizar este análisis se tomaron los datos que publica la página de Banxico [13], donde se pueden observar 125 días hábiles, en los cuales varía diariamente el tipo de cambio.

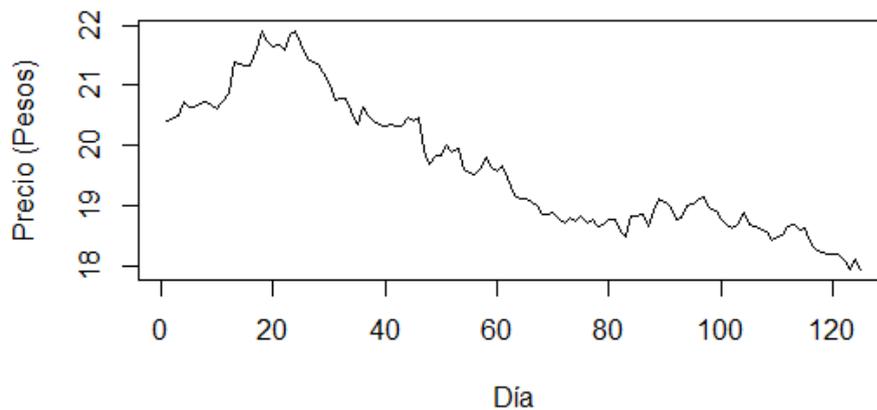


Figura 3.6: Precios del dólar del 19 de diciembre de 2016 al 18 de junio de 2017.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.6 se tiene la variación del tipo de cambio durante seis meses, en el eje de las abscisas se localizan los días hábiles correspondientes a seis meses y en el eje de las ordenadas se encuentran los precios que toma el dólar en este periodo. Al analizar esta gráfica se observa que el precio del dólar se encuentra entre los 18 y los 22 pesos durante este lapso, lo cual es una variación muy grande. Por tal motivo se analiza el comportamiento de su trayectoria, así se tiene que el 19 de diciembre del 2016 el dólar cerró en 20.4 pesos, después de aproximadamente un mes alcanzó su máximo, para luego comenzar una caída que al llegar al 18 de junio de 2017 el tipo de cambio peso-dólar cerró en 17.9 pesos. De acuerdo con este análisis se puede suponer que se debe tomar medidas para evitar los riesgos de cambio en el precio del dólar. Por ejemplo en este caso hubiera sido una buena estrategia obtener una opción de venta.

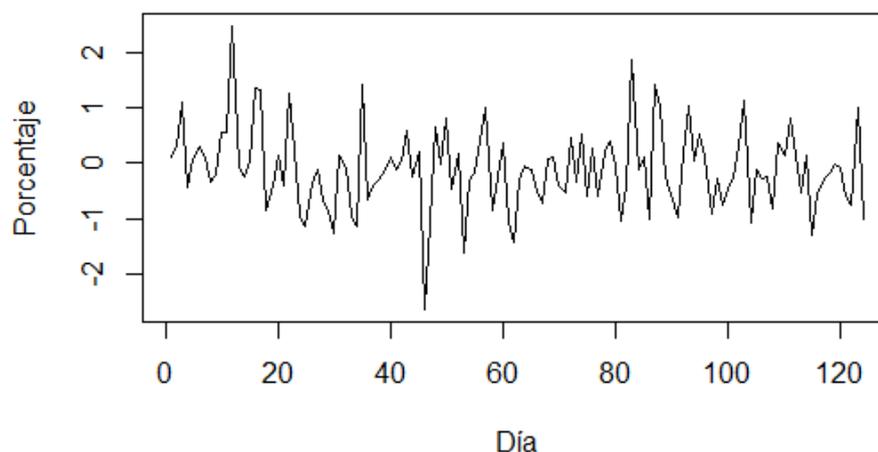


Figura 3.7: Rendimientos del dólar del 19 de diciembre del 2016 al 18 de junio de 2017.

Fuente: Elaboración propia

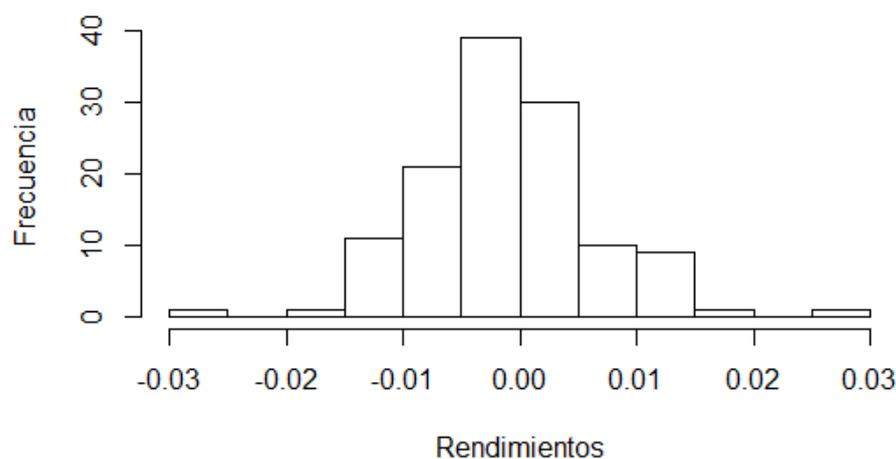


Figura 3.8: Histograma de los rendimientos del dólar del 13 de junio de 2016 al 12 de marzo de 2017.

Fuente: Elaboración propia

Se observa en la Figura 3.7 la serie de rendimientos del tipo de cambio peso-dólar para seis meses, en el eje de las abscisas se encuentran los días hábiles para este periodo y en el eje de las ordenadas se localizan los rendimientos diarios del precio del dólar. La gráfica tiende a presentar un comportamiento de reversión a la media. Sin embargo, las fluctuaciones que presenta la serie de rendimientos alrededor de su media son muy pronunciadas, incluso en el día 43 aproximadamente se observa un pico muy profundo, que nos dice que en este día el precio del dólar bajo de forma considerable con respecto al día anterior. También se pueden observar que sobresalen

muchos picos por arriba de la media. De acuerdo con este análisis y aunado a que la serie de precios a seis meses en la Figura 3.6 presenta una tendencia a bajar, permite concluir que es importante protegerse ante un cambio pronunciado en el precio del dólar en seis meses.

En la Figura 3.8 se encuentra el histograma de rendimientos para los precios del dólar, en el eje de las abscisas se encuentran los intervalos de clase de los rendimientos y en el eje de las ordenadas se encuentra la frecuencia de cada intervalo de clase. Es posible observar que la mayor concentración de valores está entre -0.005 y 0.005 , donde se concentran aproximadamente 70 valores de los 125, es decir el 56% de los valores. Además se encuentran algunos valores atípicos en ambos extremos de la gráfica.

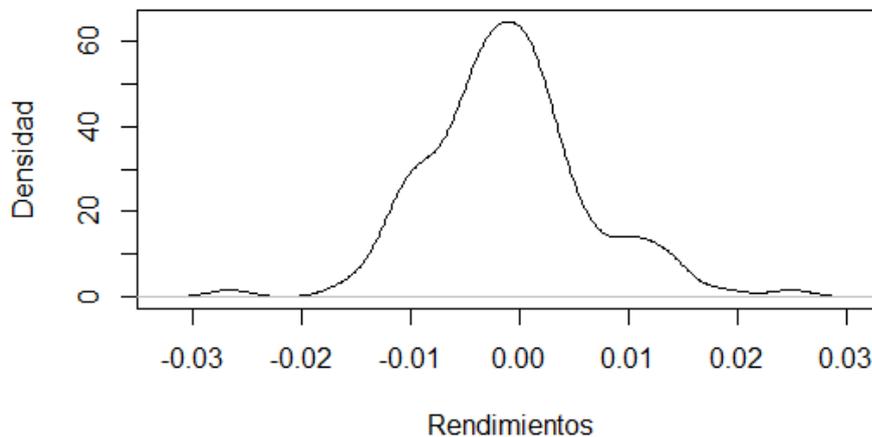


Figura 3.9: Densidad de los rendimientos del dólar del 13 de junio del 2016 al 12 de marzo de 2017.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.9 se observa la gráfica de densidad para los rendimientos del dólar. Como el coeficiente de asimetría es 0.3162847 casi cero se puede decir que los datos son simétricos. También se tiene que la curtosis es 4.360629 por lo cual la variable representa una distribución **leptocúrtica**, las medidas de tendencia central y de dispersión para los rendimientos de tipo de cambio peso-dólar se encuentran en la Tabla 3.2.

Al realizar la prueba de normalidad de Lilliefors (prueba de corrección para Kolmogorov-Smirnov) resulta que el valor de la significación estadística (p) es de 0.02174 , o sea, menor que 0.05 y, por tanto, se rechaza que la muestra procede de una distribución normal.

Plazo de seis meses	
Media	-0.00104
Mediana	-0.00123
Varianza	0.00005
Desviación estándar	0.00744
Coefficiente de asimetría	0.31628
Coefficiente de curtosis	4.36062

Tabla 3.2: Medidas de tendencia central, medidas de dispersión, medidas de asimetría y curtosis de los rendimientos diarios del dólar para seis.

Fuente: Elaboración propia

Análisis de las gráficas con datos de tres meses

El último plazo para analizar es el de tres meses, los datos del tipo de cambio peso-dólar que se utilizan son publicados en la página de Banxico [13], el total de datos correspondientes a este periodo son 64 días hábiles.

Se muestra la gráfica del precio del dólar en la Figura 3.10, donde en el eje de las abscisas se encuentran los días hábiles en los que varía el precio del dólar y en el eje de las ordenadas se localizan los precios del dólar correspondientes a este periodo. Se observa que el precio del dólar para tres meses varía muy poco, este oscila entre los 16.6 y 18.9 pesos aproximadamente. También se nota una tendencia a la baja, encontrando el precio máximo y mínimo en el intervalo comprendido entre el día 10 y el día 25. Después de alcanzar el precio mínimo se mantiene entre cierto rango para terminar en 17.65 pesos y como el precio al inicio del periodo era de 17.99 pesos, se puede observar que la diferencia entre ambos precios fue muy pequeña. Se supone que es importante protegerse del riesgo que involucra el cambio en el precio del dólar, ya que en un intervalo muy pequeño puede variar de forma drástica.

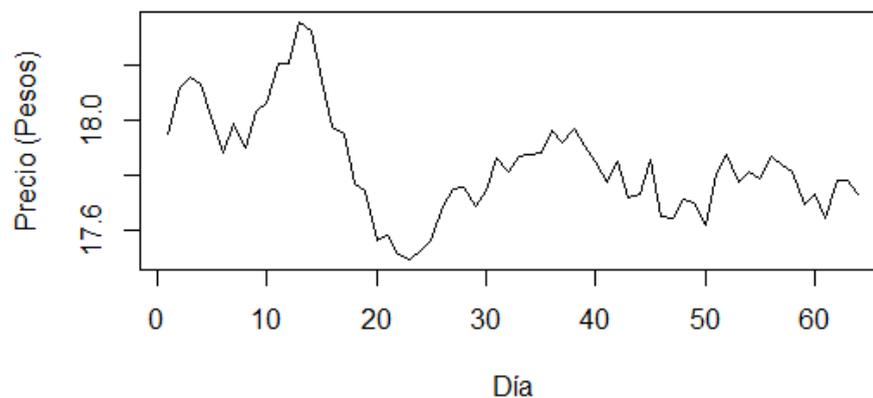


Figura 3.10: Precios del dólar del 19 de junio al 17 de septiembre de 2017.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.11 se encuentran los rendimientos del dólar en un lapso de tres meses, en el eje de las abscisas se encuentran los datos de los días hábiles y en el eje de las ordenadas se localizan los rendimientos del tipo de cambio peso-dólar. Se aprecia que la serie de rendimientos en la Figura 3.11 tiende a presentar un comportamiento de reversión a la media. Sin embargo, las fluctuaciones que presenta la serie de rendimientos alrededor de su media y al observar que el precio del dólar baja y sube de forma violenta se puede suponer que es importante protegerse ante un cambio repentino en el precio del dólar.

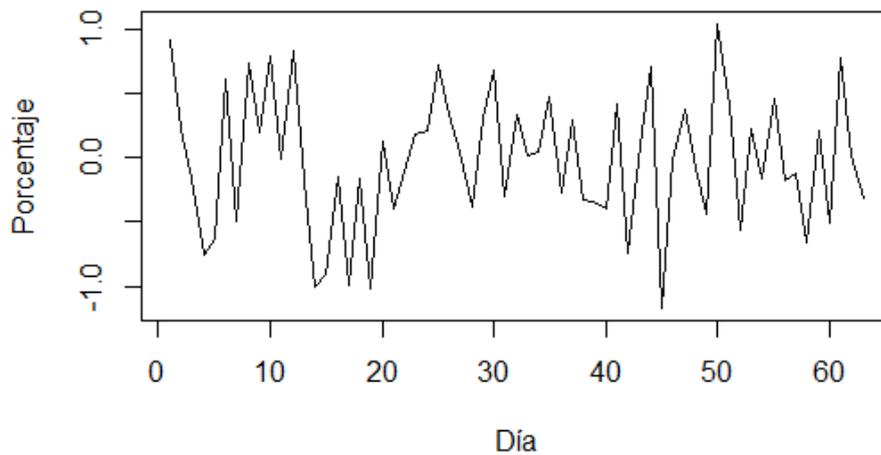


Figura 3.11: Rendimientos diarios del dólar del 19 de junio al 17 de septiembre de 2017.

Fuente: Elaboración propia

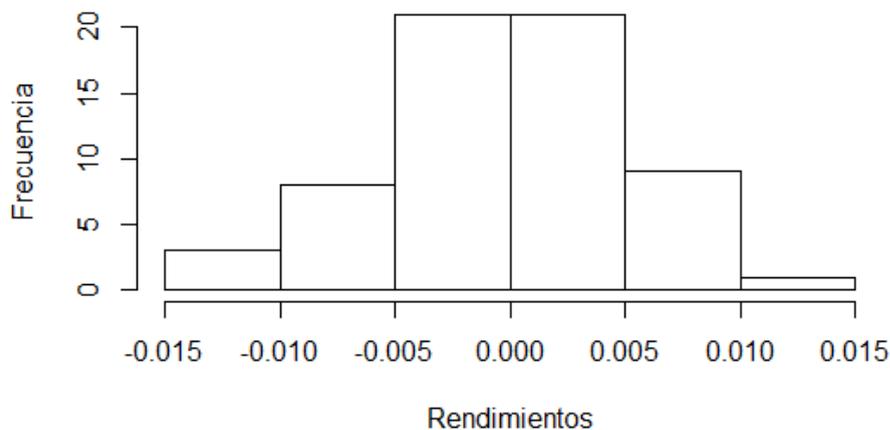


Figura 3.12: Histograma de los rendimientos del dólar del 19 de junio al 17 de septiembre de 2017.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 3.12 se presenta el histograma de los rendimientos, en el eje de las

abscisas se localizan los rendimientos del dólar, en el eje de las ordenadas se ubica la frecuencia de los intervalos de clase. Se aprecia que la mayor concentración de valores está entre -0.005 y 0.005, donde se encuentran aproximadamente 40 valores de los 64, es decir el 62.5 % de los valores.

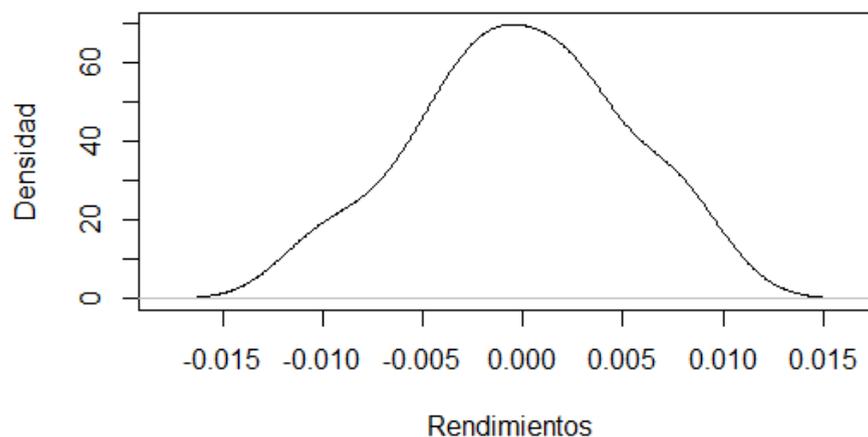


Figura 3.13: Densidad de los rendimientos del dólar del 19 de junio al 17 de septiembre de 2017.

Fuente: Elaboración propia

La gráfica de densidad para los rendimientos del dólar a tres meses se puede observar en la Figura 3.13. El análisis nos dice que su coeficiente de asimetría es -0.1239055, como el coeficiente de asimetría es negativo, la distribución se alarga para valores inferiores a la media. También se calcula el coeficiente de curtosis el cual es 1.963388, como es menor a 3 se dice que la variable presenta una distribución **platicúrtica**.

Plazo de tres meses	
Media	-0.00040
Mediana	-0.00015
Varianza	0.00002
Desviación estándar	0.00525
Coficiente de asimetría	-0.12390
Coficiente de curtosis	1.96338

Tabla 3.3: Medidas de tendencia central, medidas de dispersión, medidas de asimetría y curtosis de los rendimientos diarios del dólar para tres meses.

Fuente: Elaboración propia

Al realizar la prueba de normalidad de Lilliefors (prueba de corrección para Kolmogorov-Smirnov) resulta que el valor de la significación estadística (p) ha sido 0.9485, o sea, mayor que 0.05 y, por tanto, se acepta que la muestra procede de una distribución normal, con medidas de tendencia central, de dispersión, de asimetría y curtosis como se muestran en la Tabla 3.3.

3.3.1. Comparación de los rendimientos en las diferentes monedas

La información que se muestra a continuación se encuentra en Kozikowski (2013). Para que se puedan comparar los rendimientos de los activos, denominados en diferentes monedas, tienen que expresarse en la misma unidad que normalmente es la moneda del país del inversionista. Los rendimientos, es el tipo de interés libre de riesgo en el país al que corresponda la divisa y es llamado bono del tesoro.

La demanda de activos en moneda extranjera depende de lo que los participantes del mercado piensan acerca del valor futuro de dichos activos. El valor futuro está relacionado con el rendimiento en la moneda extranjera y el tipo de cambio vigente al vencimiento de los activos [3].

Para un estadounidense el valor futuro de las inversiones en pesos mexicanos, por ejemplo, está sujeto al rendimiento que ofrecen los instrumentos financieros en pesos y el tipo de cambio peso/dólar al vencimiento de estos por lo cual un inversionista compara continuamente el rendimiento de las inversiones en diferentes monedas expresándolo en términos de su propia moneda. De la misma manera para un inversionista mexicano el valor futuro de las inversiones en dólares está determinado por el rendimiento que ofrecen los instrumentos financieros en dólares y el tipo de cambio peso/dólar.

Si invertimos un dólar con los rendimientos en Estados Unidos tendremos $(1+r_E)$ de rendimientos en dólares y si invertimos el equivalente en pesos (el precio del dólar en ese momento S_t) con los rendimientos en México tendremos $S_t(1+r_M)$. Como ambos rendimientos deben de ser iguales para evitar el arbitraje, regresamos a dólares lo invertido en pesos, dividiendo entre z_{tT} . Así tenemos que $(1+r_E) = S_t(1+r_M)/z_{tT}$, por lo tanto tenemos:

$$z_{tT}(1+r_E) = S_t(1+r_M). \quad (3.3)$$

Donde:

- S_t es el tipo de cambio actual (spot).
- z_{tT} es el tipo de cambio al contado (spot) esperado en el futuro.
- r_E es el rendimiento o tasa de interés libre de riesgo en Estados Unidos.
- r_M es el rendimiento o tasa de interés libre de riesgo en México.
- t el tiempo presente.
- T es el tiempo hasta la fecha de expiración del contrato.

La demanda de depósitos en una divisa depende de su rendimiento comparado con los de otras divisas ya que los inversionistas depositan sus activos en los países donde les genere mayor rendimiento, generando un arbitraje. Con la paridad entre las tasas de interés, es posible evitar el arbitraje. Para la paridad de las tasas de interés los rendimientos en pesos de la inversión en dólares, debe ser la misma que los rendimientos en pesos de la inversión en dicha moneda.

3.4. Paridad de las tasas de interés

Las condiciones de paridad son un conjunto de relaciones que vinculan las tasas de interés, los tipos de cambio, las tasas de inflación y los costos de la mano de obra cuando los mercados están en equilibrio. La paridad de las tasas de interés (PTI) es la relación más importante dentro de este conjunto y es la que se desarrolla [3].

Según la paridad de las tasas de interés, los mercados de divisas y de dinero están en equilibrio si la diferencia entre las tasas de interés en dos monedas cualquiera compensa exactamente la prima a futuros de la moneda más fuerte.

La fórmula que expresa la PTI se escribe de la siguiente manera (se obtiene de la fórmula (3.3)):

$$\frac{z_{tT}}{S_t} = \frac{1 + r_M}{1 + r_E}. \quad (3.4)$$

La moneda más débil debe ofrecer la tasa de interés lo suficientemente alta para compensar exactamente la apreciación de la moneda más fuerte. Si se cumple la paridad de las tasas de interés al inversionista le da igual invertir en pesos o en dólares. En este caso el rendimiento en pesos de los depósitos en dólares debe ser igual al rendimiento en pesos de los depósitos en pesos, el cual denotamos con la siguiente fórmula, que se obtiene al despejar de la fórmula (3.3),

$$\frac{z_{tT}}{S_t}(1 + r_E) - 1 = r_M. \quad (3.5)$$

Si el rendimiento en pesos es más alto que el rendimiento en dólares convertido a pesos, sería un incentivo para que el capital se desplace de EU hacia México. En cambio, si el rendimiento en pesos es menor que el rendimiento en dólares convertido a pesos. Esto es un incentivo para que el capital financiero salga de México. En la práctica siempre existen pequeñas desviaciones de la paridad de las tasas de interés que no provocan movimientos internacionales de capital.

Dado que las tasas de interés siempre se expresan en términos anuales y el horizonte de la inversión es usualmente, menos de un año, es necesario desanualizar las tasas. La fórmula (3.4) se refiere a un año. Para periodos más cortos o más largos es necesario ajustar la tasa de interés a plazos. El método para hacerlo depende del supuesto acerca de la frecuencia de capitalización, en este trabajo la capitalización es continua y para la explicación utilizaremos lo siguiente:

- m el número de periodos por año,
- k número de períodos transcurridos,
- $T - t$ longitud de tiempo medido en años.

De la fórmula (3.4) cuando la capitalización es m veces por año tenemos:

$$z_{tT} = S_t \frac{[1 + \frac{r_M}{m}]^k}{[1 + \frac{r_E}{m}]^k}.$$

Si se toma m lo suficientemente grande tenemos que $T - t = \frac{k}{m}$ despejando obtenemos $k = m(T - t)$, así

$$\begin{aligned} z_{tT} &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_t \frac{[1 + \frac{r_M}{m}]^{m(T-t)}}{[1 + \frac{r_E}{m}]^{m(T-t)}}, \\ &= S_t \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[(1 + \frac{r_M}{m})^m]^{(T-t)}}{[(1 + \frac{r_E}{m})^m]^{(T-t)}}, \\ &= S_t \frac{\exp\{r_M(T-t)\}}{\exp\{r_E(T-t)\}}, \\ &= S_t \exp\{r_M(T-t) - r_E(T-t)\}, \\ &= S_t \exp\{(r_M - r_E)(T-t)\}. \end{aligned}$$

Esta es la paridad de los tasas de interés, por lo tanto si esta paridad no se cumple generaría un arbitraje.

3.5. Volatilidad

Con excepción de la volatilidad, todas las variables necesarias para calcular el precio de una opción son directamente observables en los mercados financieros.

Definición 3.5.1. *La volatilidad mide la frecuencia e intensidad con que se pueden producir cambios en el precio de un activo. Se denomina volatilidad de una cartera a la desviación típica de sus rendimientos. Esta medida se usa con frecuencia para medir el riesgo de un instrumento financiero.*

De acuerdo a lo anterior la volatilidad en este caso es la variable que mide la frecuencia e intensidad de los cambios en los precios del dólar.

En la Figura 3.4 y la Tabla 3.4 se muestran las volatilidades anuales de los rendimientos compuestos continuamente calculadas con base en los datos históricos.

Según la hipótesis de caminata aleatoria, los rendimientos compuestos continuamente tienen una distribución normal con la media μ y varianza constante σ^2 [3]. Utilizamos las siguientes fórmulas para calcular la volatilidad:

$$R_d = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}. \quad (3.6)$$

De donde

$$1 + R_d = S_t/S_{t-1}.$$

Donde R_d es el rendimiento diario, S_t es el precio del dólar al final del intervalo y S_{t-1} el precio del dólar al inicio del intervalo. De donde se tiene el rendimiento continuamente compuesto,

$$R = \ln(1 + R_d).$$

También es posible calcularlo de la siguiente manera,

$$R = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right).$$

Después se calcula el rendimiento medio μ y la desviación estándar diaria σ_{diaria} como:

$$\sigma_{diaria} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R - \mu)^2}. \quad (3.7)$$

Para calcular la desviación estándar anual, se multiplica la desviación estándar diaria por la raíz cuadrada de n , donde n es el número total de días hábiles por periodo en que varía el tipo de cambio. Obteniendo la siguiente fórmula,

$$\sigma_{anual} = \sqrt{n} \cdot \sigma_{diaria}.$$

En la Tabla 3.4 y en la Figura 3.14 se muestra la volatilidad anual de los rendimientos del tipo de cambio peso-dólar del 2013 al 2107.

Año	Volatilidad
2013	0.10237866
2014	0.06134360
2015	0.10373379
2016	0.16145809
2017	0.09557782

Tabla 3.4: Volatilidad anualizada de los rendimientos.

Fuente: Elaboración propia

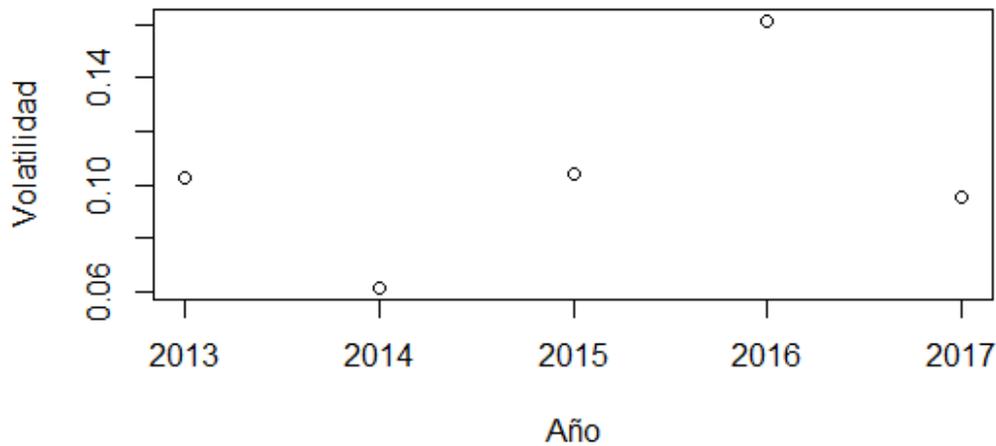


Figura 3.14: Volatilidad anualizada de los rendimientos.

Fuente: Elaboración propia

Escoger un valor adecuado para el número de datos n no es muy fácil. Se supone que entre más datos, mayor exactitud. Pero los valores de σ demasiado antiguos pueden no ser apropiados para predecir el futuro. Para obtener la volatilidad se utiliza el número de datos igual al número de días al que aplicamos la volatilidad pero de un periodo anterior [9]. Es decir si la volatilidad va a usarse para valorar una opción a un año, se utilizan los datos históricos correspondientes a un año anterior.

En este caso se valúan opciones con periodos de tiempo de doce, seis, y tres meses. Por lo tanto se calcula la volatilidad histórica correspondiente a cada uno de los periodos anteriores. Se sabe que en el MexDer las opciones se negocian y vencen el lunes de la semana correspondiente al tercer miércoles del mes de vencimiento [12]. Por consiguiente se calcula la volatilidad histórica para opciones que se pactan y vencen en las siguientes fechas:

- (i) Del 19 de diciembre de 2016 al 18 de diciembre de 2017 (periodo 1 año).
- (ii) Del 19 de junio al 18 de diciembre de 2017 (periodo 6 meses).
- (iii) Del 18 de septiembre al 18 de diciembre de 2017 (periodo 3 meses).

Para (i) ocupamos los precios del dólar a partir del 17 de diciembre de 2015 al 18 de diciembre de 2016.

Para (ii) requerimos los datos del 19 de diciembre de 2016 al 18 de junio de 2017.

En (iii) tomaremos los datos del 19 de junio al 17 de septiembre de 2017.

En la Tabla 3.5 se muestra la volatilidad de los periodos antes mencionados y su respectiva gráfica en la Figura 3.5.

Periodo (meses)	Volatilidad
3	0.04206694
6	0.08320468
12	0.1609614

Tabla 3.5: Volatilidad para los distintos periodos.

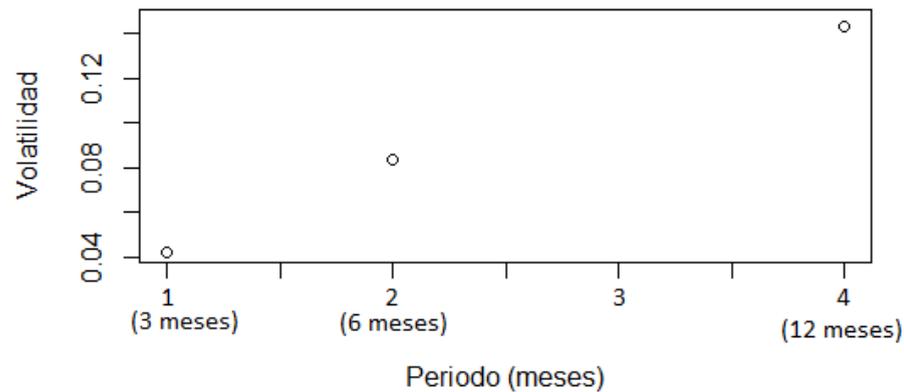


Figura 3.15: Volatilidad para los distintos periodos.

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 3.6 se muestra un ejemplo de como se calculan los rendimientos logarítmicos para 30 días, los cuales nos sirven para calcular la volatilidad histórica. Primero se calcula la desviación estándar diaria de los rendimientos logarítmicos en estos 30 días, que es $\sigma_{diaria} = 0.005804514$. Luego se calcula la volatilidad histórica anualizada, para calcularla se multiplica σ_{diaria} por $\sqrt{30}$, quedando de la siguiente forma $\sigma = 0.005804514(\sqrt{30}) = 0.04643611$.

Día	Precio del dólar	$1 + R_d$	$R = \ln(1 + R_d)$
1	17.9519		
2	18.1167	1.00918	0.00913
3	18.1570	1.00222	0.00222
4	18.1270	0.99834	-0.00165
5	17.9900	0.99244	-0.00758
6	17.8775	0.99374	-0.00627
7	17.9862	1.00608	0.00606
8	17.8973	0.99505	-0.00495
9	18.0279	1.00729	0.00727
10	18.0626	1.00192	0.00192
11	18.2064	1.00796	0.00792
12	18.2036	0.99984	-0.00015
13	18.3556	1.00835	0.00831
14	18.3227	0.99820	-0.00179
15	18.1394	0.98999	-0.01005
16	17.9751	0.99094	-0.00909
17	17.9482	0.99850	-0.00149
18	17.7708	0.99011	-0.00993
19	17.7422	0.99839	-0.00161
20	17.5613	0.98980	-0.01024
21	17.5836	1.00126	0.00126
22	17.5134	0.99600	-0.00400
23	17.4937	0.99887	-0.00112
24	17.5260	1.00184	0.00184
25	17.5618	1.00204	0.00204
26	17.6893	1.00726	0.00723
27	17.7492	1.00338	0.00338
28	17.7561	1.00038	0.00038
29	17.6886	0.99619	-0.00380
30	17.7435	1.00310	0.00309

Tabla 3.6: Rendimientos del dólar para 30 días, donde R es el rendimiento continuamente compuesto y R_d es el rendimiento diario.

Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 4

Modelos de valuación de opciones europeas

4.1. Modelo de Black-Scholes

En 1973, Fischer, Scholes y Merton desarrollaron un modelo para la evaluación de opciones europeas sobre acciones que no pagan dividendos y cuya dinámica es conducida por un movimiento geométrico Browniano. En este Capítulo se estudia y utiliza este modelo modificándolo para valorar opciones europeas de compra y venta sobre el tipo de cambio peso-dólar. Antes de analizar el modelo de BS modificado para divisas y el modelo de BS acotado, se presenta el modelo de BS para valorar opciones europeas sobre acciones que no pagan dividendos, y se comenta los supuestos sobre los que se basa.

Supuestos del modelo de Black-Scholes

Un modelo de valuación de opciones tiene varios supuestos, para este modelo son los siguientes [7]:

- i) el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
- ii) el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio sigue una distribución lognormal;
- iii) la volatilidad del precio el activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;
- iv) las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
- v) el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción del título;
- vi) no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
- vii) el mercado opera en forma continua, es decir, no hay sábados, domingos ni días festivos;

- viii) existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa);
- ix) todos los agentes comparten exactamente la misma información, es decir, la información es simétrica; y
- x) los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

Bajo estos supuestos el valor de la opción dependerá solo del precio actual de la acción, del tiempo de vencimiento y de un conjunto de parámetros que intervienen en los términos del contrato, tales como:

- el precio de ejercicio K ,
- la fecha de compra de la opción t y la fecha de vencimiento T , donde $T - t$ es el plazo de la opción,
- la volatilidad σ ,
- la tasa de interés r .

Por lo tanto el precio de la opción europea de compra se puede escribir como

$$C(S_t, t; K, T, \sigma, r),$$

y el precio de una opción europea de venta como,

$$P(S_t, t; K, T, \sigma, r). \quad (4.1)$$

El problema principal a la hora de tratar con instrumentos financieros es poder determinar el precio de la opción. Para determinar el precio de la opción se toman en cuenta dos formas de obtener la fórmula de Black-Scholes. La primera es mediante valoración neutral al riesgo y la segunda es por ecuaciones diferenciales parciales.

4.1.1. Deducción de la fórmula de Black-Scholes: Enfoque probabilista

En esta sección se presenta la fórmula de Black-Scholes para calcular el precio de una opción europea de compra mediante el enfoque probabilista. Se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que su precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano neutral al riesgo [7]. El precio o la prima de la opción se calcula como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco. Con este propósito se determina, primero, la función de densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Posteriormente, se calcula la integral que define el valor presente del valor intrínseco esperado, cantidad que proporciona el precio teórico del producto derivado en cuestión.

La fórmula de la opción europea es neutral al riesgo, ya que en ella no aparece la rentabilidad esperada del activo subyacente [11]. En un mundo neutral al riesgo la rentabilidad esperada de cualquier activo es el tipo de interés libre de riesgo, ya que los inversores no necesitan obtener una prima en forma de mayor rentabilidad esperada, en relación con el activo seguro, por invertir en activos arriesgados.

Por tanto, una forma de obtener soluciones, para la ecuación de Black-Scholes, en derivadas parciales es calcular el valor esperado del activo derivado en el momento del vencimiento, suponiendo que $\mu = r$, y actualizar dicho valor esperado hasta el momento actual al tipo de interés libre de riesgo.

El valor esperado de la opción en el momento del vencimiento, $t = T$, en un mundo neutral al riesgo es: $\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)]$, donde \mathbb{E} denota esperanza en un mundo neutral al riesgo. Por tanto, el valor teórico actual, en $t = 0$, de la opción debe ser dicho valor esperado, actualizado al tipo de interés libre de riesgo es decir el valor presente del valor esperado de la opción al vencimiento:

$$f(S_0, t = 0) = \exp\{-rT\}\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)], \quad (4.2)$$

$$f(S_0, t = 0) = \exp\{-rT\} \int_K^\infty (S_T - K)g(S_T)dS_T. \quad (4.3)$$

Donde $g(S_T)$ es la función de densidad de probabilidad de S_T en un mundo neutral al riesgo.

Para obtener la distribución de probabilidad, se supone que S_t sigue un movimiento geométrico Browniano en un entorno de neutralidad al riesgo, es decir, $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW$, como podemos ver $\mu = r$. Se supone que $t = 0$ es el momento actual y S_0 el precio actual del activo, además sea $h(S_t, t) = \ln S_t$. Se aplica el lema de $It\hat{o}$, la función h sigue el siguiente proceso de $It\hat{o}$.

$$\begin{aligned} dh &= \left(\frac{\partial h}{\partial S_t}(S_t, t)rS_t + \frac{\partial h}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial S_t^2}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial h}{\partial S_t}(S_t, t)\sigma S_t dW \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW. \end{aligned}$$

Como la media y la desviación típica no dependen ni de S_t ni de t , entonces $h(S_t, t) = \ln S_t$ sigue un proceso generalizado de Wiener con media y varianza por unidad de tiempo $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y σ^2 respectivamente.

Como $\ln S_t$ sigue un movimiento aritmético browniano, entonces el cambio en la función h durante un período de amplitud T se distribuye como una variable aleatoria normal:

$$\Delta h = \ln S_T - \ln S_0 \sim N \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right). \quad (4.4)$$

Es decir el rendimiento logarítmico tiene una distribución normal. Por lo tanto tenemos que S_T tiene una distribución de probabilidad log-normal, es decir:

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right). \quad (4.5)$$

Para simplificar la notación, se definen los siguientes parámetros:

$$\mu^* = \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,$$

$$\sigma^* = \sigma\sqrt{T}.$$

Se descompone la integral como suma de dos integrales y se obtiene:

$$\exp\{-rT\} \int_K^\infty (S_T - K)g(S_T)dS_T = \exp\{-rT\} \left(\int_K^\infty S_T g(S_T)dS_T - \int_K^\infty K g(S_T)dS_T \right).$$

Calculamos la primera integral

$$\int_K^\infty S_T g(S_T)dS_T.$$

Para trabajar con la densidad de la normal en lugar de la log-normal, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = \ln S_T,$$

luego

$$\exp\{y\} = \exp\{\ln S_T\}.$$

Por lo cual

$$\exp\{y\} = S_T \implies \frac{dS_T}{dy} = \exp\{y\}. \quad (4.6)$$

Sea $\phi(y) = g(\exp\{y\}) \exp\{y\}$ la función de densidad de la variable $y \sim N(\mu^*, \sigma^{*2})$. Luego se tiene

$$\begin{aligned} \int_K^\infty S_T g(S_T)dS_T &= \int_{\ln K}^\infty \exp\{y\} g(\exp\{y\}) \exp\{y\} dy \\ &= \int_{\ln K}^\infty \exp\{y\} \phi(y) dy. \end{aligned}$$

Se sustituye $\phi(y)$ por su expresión, se obtiene:

$$\int_K^\infty S_T g(S_T)dS_T = \int_{\ln K}^\infty \exp\{y\} \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y - \mu^*)^2}{2\sigma^{*2}}\right\} dy.$$

Para resolver la integral en términos de la función de distribución de una variable normal estándar, se realiza un nuevo cambio de variable:

$$x = \frac{y - \mu^*}{\sigma^*}.$$

Con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} \int_K^\infty S_T g(S_T) dS_T &= \int_{\frac{\ln K - \mu^*}{\sigma^*}}^\infty \exp\{x\sigma^* + \mu^*\} \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \sigma^* dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\mu^* + \frac{\sigma^{*2}}{2}\right\} \int_{-d_2}^\infty \exp\left\{-\frac{(x - \sigma^*)^2}{2}\right\} dx. \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} \frac{\ln K - \mu^*}{\sigma^*} &= \frac{\ln K - \ln S_0 - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \\ &= -\frac{\ln S_0 - \ln K + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \\ &= -\frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \\ &= -d_2. \end{aligned}$$

Donde

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

Para tener dentro de la integral la función de distribución de una variable normal estándar, realizamos otro cambio de variable: $z = x - \sigma^*$ y como tenemos que:

$$\begin{aligned} \mu^* + \frac{\sigma^{*2}}{2} &= \ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T + \frac{(\sigma \sqrt{T})^2}{2} \\ &= \ln S_0 + rT. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_K^\infty S_T g(S_T) dS_T &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{\ln S_0 + rT\} \int_{-d_2 - \sigma^*}^\infty \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\ &= S_0 \exp\{rT\} \int_{-d_1}^\infty \frac{\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= S_0 \exp\{rT\} \int_{-\infty}^{d_1} \frac{\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= S_0 \exp\{rT\} \Phi(d_1). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Donde se define $d_1 = d_2 + \sigma^* = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ y la función $\Phi(x)$ es la función de distribución acumulada de probabilidad para una variable normal estándar.

Por lo tanto

$$\int_K^\infty S_T g(S_T) dS_T = S_0 \exp\{rT\} \Phi(d_1).$$

Ahora resolvemos la segunda integral

$$\begin{aligned} \int_K^\infty K g(S_T) dS_T &= K \int_{\ln K}^\infty g(\exp\{y\}) \exp\{y\} dy \\ &= \int_{\ln K}^\infty \phi(y) dy. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Donde $\phi(y) = g(\exp\{y\}) \exp\{y\}$ es la función de la variable $y \sim N(\mu^*, \sigma^{*2})$. Sustituyendo $\phi(y)$ por su expresión, se obtiene

$$\int_K^\infty K g(S_T) dS_T = K \int_{\ln K}^\infty \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y - \mu^*)^2}{2\sigma^{*2}}\right\} dy. \quad (4.10)$$

Realizamos un cambio de variable para resolver la integral en términos de la función de distribución de una variable normal estándar $x = \frac{y - \mu^*}{\sigma^*}$, por lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} \int_K^\infty K g(S_T) dS_T &= K \int_{\frac{\ln K - \mu^*}{\sigma^*}}^\infty \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \sigma^* dx \\ &= K \int_{-d_2}^\infty \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \sigma^* dx \\ &= K \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \sigma^* dx \\ &= K \Phi(d_2), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Por lo tanto, el valor teórico de una opción de compra europea es:

$$\begin{aligned} C(S_t, t; K, T, \sigma, r) &= f(S_0, t = 0) = \exp\{-rT\} \int_K^\infty (S_T - K) g(S_T) dS_T \\ &= \exp\{-rT\} (\exp\{rT\} S_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)), \end{aligned} \quad (4.11)$$

es decir

$$C(S_t, t; K, T, \sigma, r) = S_0 \Phi(d_1) - K \exp\{-rT\} \Phi(d_2). \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) es la fórmula de Black-Scholes para el valor de una opción europea de compra que no paga dividendos.

Por un análisis similar al anterior se puede mostrar que el precio de una opción europea de venta, $P(S_t, t; T, K, r, \sigma)$, tomando $t = 0$ está dado por

$$P(S_t, t; T, K, r, \sigma) = K \exp\{-rT\} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1). \quad (4.13)$$

4.1.2. Fórmula de Black-Scholes con enfoque de ecuaciones diferenciales parciales

Para determinar el precio de una opción es necesario elegir el proceso de evolución estocástico que se le asigna al activo. Uno de los modelos más utilizados es el de movimiento geométrico Browniano, y utilizándolo como base se construye la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, la solución de esta ecuación determina el precio de una opción europea cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento. Esta ecuación representa la base para valorar diversos productos derivados, ya que cambiando las condiciones de frontera, sus soluciones representan los precios de los distintos productos derivados.

Por ejemplo en este modelo se supone que el activo subyacente S_t evoluciona en el tiempo como si fuera un movimiento geométrico Browniano con media μ que es el rendimiento medio esperado y varianza σ que es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. Es decir su ecuación diferencial estocástica esta dada por:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (4.14)$$

Este proceso recibe el nombre de movimiento geométrico Browniano y puede expresarse alternativamente en forma de proceso de $It\hat{o}$ a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (4.15)$$

Donde $dW_t \sim N(0, dt)$ y la tasa de rendimientos del activo $(\frac{dS_t}{S_t}) \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$.

La razón de que el movimiento geométrico Browniano dado por la expresión 4.15 haya sido el proceso más utilizado para modelar el precio de un activo es que se ajusta razonablemente bien al comportamiento de las series de precios observados en la práctica, cabe destacar que, aunque se han encontrado ciertas discrepancias entre este modelo teórico y los datos reales, el movimiento geométrico Browniano es un buen punto de partida para plantear modelos más complicados [11].

Suponiendo que $f(S_t, t)$ es una función cualquiera del precio de estas acciones y el tiempo, en concreto $f(S_t, t)$ podría ser el precio de una opción de compra. Aplicando el lema de $It\hat{o}$ se obtiene la ecuación diferencial estocástica:

$$df = \left(\mu S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} dW_t. \quad (4.16)$$

Se toman algunas condiciones para llegar a la ecuación diferencial en derivadas parciales que se conoce como ecuación diferencial en derivadas parciales de Black-Scholes-Merton.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} = r f. \quad (4.17)$$

Esta ecuación tiene muchísimas soluciones, una por cada función $f(S_t, t)$ que se pueda definir, y para buscar una solución concreta hay que establecer condiciones de contorno que reflejen el derivado en concreto que se está tratando. En el caso de una opción de compra europea se debe cumplir que $f(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$, siendo T el momento de vencimiento de la citada opción. De aquí en adelante denotaremos el valor de la opción de compra por $C(S_t, t, r) = C(S_t, t, T, K, \sigma, r)$. La solución de esta ecuación es el precio de la opción de compra [11]:

$$C(S_t, t, r) = S_t \Phi(d_1) - K \exp\{-r(T - t)\} \Phi(d_2). \quad (4.18)$$

Procediendo de manera análoga para el caso de una opción de venta se tiene:

$$P(S_t, t, r) = K \exp\{-r(T - t)\} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1), \quad (4.19)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma \sqrt{(T - t)}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{(T - t)}} = d_1 - \sigma \sqrt{(T - t)}.$$

La función $\Phi(x)$ es la función de distribución de probabilidad para una variable normal estándar.

Dado el precio de ejercicio, la opción de compra vale más mientras más alto sea el precio del dólar en el momento de la transacción. Si se tiene una opción de compra de dólares, su valor aumenta cuando el dólar se aprecia y disminuye cuando el dólar se deprecia.

4.2. Modelo de Black-Scholes modificado para divisas

Las opciones europeas sobre divisas, se negocian en los mercados over the counter y en mercados organizados. Para una empresa que desea cubrir su exposición a los tipos de cambio, las opciones sobre divisas son una alternativa bastante viable. Para una empresa que va a recibir dólares en algún momento futuro, puede cubrirse comprando una opción de venta sobre dólares que venza en el mismo momento en el

que recibe los dólares. Esto garantiza que el valor del dólar, no bajará del precio de ejercicio. De igual manera, si una empresa debe pagar dólares en el futuro, puede adquirir una opción de compra, garantizando que el costo del dólar no será mayor que cierta cantidad. Para obtener este derecho es necesario pagar una cierta cantidad, llamada precio de la opción y denotada por $C(S_t, t, K, \sigma, T, r_M, r_E)$, de aquí en adelante se denotará el precio de la opción de compra para divisas por $C(S_t, t; r_M, r_E)$, donde cada uno de los parámetros representa lo siguiente:

- Tipo de cambio “spot” S_t (precio de un dólar en el tiempo t),
- precio de ejercicio K ,
- volatilidad del activo subyacente medida por la desviación estándar de los rendimientos del tipo de cambio σ ,
- la vida del contrato $T - t$, donde T es la fecha de vencimiento, y t la fecha de inicio del contrato.
- denotamos con r_M a la tasa de interés en México y con r_E a la de Estados Unidos, ambas se consideran constantes.

Hasta el momento se ha considerado que las acciones sobre las que se emitió la opción no paga dividendos. Sin embargo una divisa extranjera es análoga a acciones que pagan dividendos. Por lo tanto para valuar las opciones en esta sección se utiliza una modificación del modelo de Black-Scholes, el cual fue desarrollado por Garman-Kohlhagen, donde se consideran que las acciones pagan dividendos, el dividendo en este caso es el tipo de interés libre de riesgo en Estados Unidos r_E .

Se supone que el precio de una divisa S_t , es conducido por el movimiento geométrico Browniano.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (4.20)$$

utilizando el lema de Itô se tiene la ecuación diferencial parcial,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + (r_M - r_E) S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - r_M f = 0, \quad (4.21)$$

junto con la condición final,

$$f(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

La ecuación (4.21) puede ser reescrita como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t r - r f - r_E f = 0, \quad (4.22)$$

donde $r = r_M - r_E$. Sea $f = \exp\{-r_E(T - t)\}C$.

La derivada parcial de f con respecto a t es,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} \exp\{-r_E(T-t)\} + r_E f, \quad (4.23)$$

la derivada parcial de f con respecto a S_t es,

$$\frac{\partial f}{\partial S_t} = \exp\{-r_E(T-t)\} \frac{\partial C}{\partial S_t}, \quad (4.24)$$

y la segunda derivada parcial de f con respecto a S_t es,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = \exp\{-r_E(T-t)\} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}. \quad (4.25)$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la ecuación (4.22), se tiene

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r - rC = 0. \quad (4.26)$$

Donde (4.26) es la ecuación diferencial parcial de BS, cuya solución fue encontrada en la sección 4.1.1, luego,

$$\begin{aligned} f(S_t, t) &= \exp\{-r_E(T-t)\} C(S_t, t, r) \\ &= \exp\{-r_E(T-t)\} (S_t \Phi(d_1) - K \exp\{-r(T-t)\} \Phi(d_2)) \\ &= \exp\{-r_E(T-t)\} (S_t \Phi(d_1) - K \exp\{-(r_M - r_E)(T-t)\} \Phi(d_2)) \\ &= S_t \exp\{-r_E(T-t)\} \Phi(d_1) - \exp\{-r_M(T-t)\} K \Phi(d_2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Se denota con $C(S_t, t; r_M, r_E)$ a la opción europea de compra para divisas, luego

$$C(S_t, t; r_M, r_E) = S_t \exp\{-r_E(T-t)\} \Phi(d_1) - \exp\{-r_M(T-t)\} K \Phi(d_2). \quad (4.28)$$

De donde se tiene que

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r_M - r_E + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r_M - r_E - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Para calcular la opción europea de venta se utiliza la fórmula de paridad put-call:

$$C(S_t, t; r_M, r_E) + K \exp\{-r_M(T-t)\} = P(S_t, t; r_M, r_E) + S_0 \exp\{-r_E(T-t)\}, \quad (4.29)$$

de donde

$$P(S_t, t; r_M, r_E) = C(S_t, t; r_M, r_E) + K \exp\{-r_M(T-t)\} - S_0 \exp\{-r_E(T-t)\}. \quad (4.30)$$

Donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de probabilidad para una variable normal estándar.

El precio de mercado depende de la demanda y la oferta de las opciones específicas. Independientemente del modelo de valuación, el precio teórico calculado no siempre coincide con el precio observado en el mercado. Una discrepancia entre el valor teórico y el precio de mercado no necesariamente indica errores de cálculo u oportunidad de arbitraje. Las pequeñas diferencias pueden deberse a las fuerza de la oferta y la demanda en un momento dado o a evaluaciones divergentes de la volatilidad del activo subyacente [3].

Con excepción de la volatilidad, todas las variables necesarias para calcular el precio de una opción son directamente observables en los mercados financieros. En este documento se utiliza la volatilidad histórica calculada en el Capítulo 3.

4.3. Modelo de valuación con un proceso acotado

Se presentan los efectos del tipo de cambio peso-dólar con límites estrictos, sobre las opciones europeas. Un proceso estocástico acotado limita la variación del tipo de cambio en la fecha de vencimiento de la opción (S_T) y, por lo tanto, la incertidumbre de la función de pago $(S_T - K)^+$. Esto tiende a disminuir el valor de una opción de compra y de venta. Por otro lado, los límites también mantienen el tipo de cambio en un rango pequeño alrededor del precio de ejercicio.

Cuando se considera un proceso estocástico acotado para modelar la dinámica del tipo de cambio se utilizan los parámetros de la sección 4.2 junto con los siguientes, la cota inferior $a(t)$ y la cota superior $b(t)$ ambas simétricas al precio de ejercicio, el valor presente de un dólar y un peso en el momento t , se denota con $B^*(t, T) = \exp\{-r_E(T - t)\}$ y $B(t; T) = \exp\{-r_M(T - t)\}$ respectivamente y la volatilidad se transforma en $\sigma^* = \frac{z}{(z-a)(1-z/b)}\sigma$, donde σ es la volatilidad histórica calculada en el Capítulo 3.

4.3.1. Limite superior e inferior del tipo de cambio

Se modela la dinámica del tipo de cambio bajo el supuesto de que uno o ambos gobiernos interceden para estabilizar el mercado de divisas. Específicamente, se supone que los gobiernos actúan, juntos o solos, para mantener el tipo de cambio entre $a(t)$ y $b(t)$ en el tiempo t . El comportamiento del tipo de cambio spot y las tasas de interés de los dos países deben estar vinculados para evitar oportunidades de arbitraje. En particular, las condiciones necesarias para la ausencia de arbitraje son

$$a(T) \leq a(t) \frac{B^*(t; T)}{B(t; T)} = a(t) \exp\{(r_M - r_E)(T - t)\},$$

$$b(T) \geq b(t) \frac{B^*(t; T)}{B(t; T)} = b(t) \exp\{(r_M - r_E)(T - t)\}, \quad (4.31)$$

para todo $T > t$.

Por ejemplo supongamos que la última condición no se cumple, es decir:

$$b(T) < b(t) \exp\{(r_M - r_E)(T - t)\}.$$

Luego tenemos que:

$$b(T) \exp\{r_E(T - t)\} < b(t) \exp\{r_M(T - t)\},$$

como $b(t) < b(T)$,

entonces,

$$b(t) \exp\{r_E(T - t)\} < b(T) \exp\{r_E(T - t)\} < b(t) \exp\{r_M(T - t)\},$$

así tenemos que

$$b(t) \exp\{r_E(T - t)\} < b(t) \exp\{r_M(T - t)\}.$$

Que quiere decir que se gana más invirtiendo en el mercado nacional, que invirtiendo en el mercado de bonos extranjeros, lo que generaría un arbitraje. Luego se tiene en la ecuación (4.31) la relación entre las tasas de interés y el tipo de cambio para evitar el arbitraje.

Se utiliza el precio futuro del dólar como base para la opción ya que el comportamiento de las barreras en el precio futuro es directo, como se muestra a continuación.

Proposición 1. *Si la tasa de cambio spot en el tiempo T está limitada entre $a(T)$ y $b(T)$, el precio futuro en el tiempo t para la entrega en el tiempo T también debe estar limitado entre $a(T)$ y $b(T)$ para todo $t \leq T$.*

Prueba: Para cualquier distribución de probabilidad, la esperanza con respecto a cualquier conjunto de información debe estar dentro del rango del soporte de la variable aleatoria, entonces $a(T) \leq E_t[S_T] \leq b(T)$, y la proposición se sigue inmediatamente de que el valor futuro es igual al valor esperado neutral al riesgo del precio spot al vencimiento $z_{tT} = E_t[S_T]$ [4].

4.3.2. Modelo para el tipo de cambio acotado

Se supone que el precio futuro para la entrega de dólares en el momento T sigue el proceso de difusión

$$dz = \mu(\cdot)dt + \Upsilon(z; t; T)dW_t. \quad (4.32)$$

En la región limitada $a(T) \leq z_{tT} \leq b(T)$. Solo la función de difusión, Υ , afectará el precio de los derivados. Asumimos que Υ depende solo de z , t y T .

Para definir completamente el proceso estocástico se debe especificar el comportamiento del tipo de cambio en las barreras, las barreras pueden ser accesibles o inaccesibles. Las barreras accesibles pueden ser reflejantes o absorbentes. La accesibilidad de una barrera depende de μ y Υ . En particular para que una barrera inferior sea inaccesible ya sea $\Upsilon \rightarrow 0$ o $\mu \rightarrow \infty$ debe mantenerse cuando $z \rightarrow a$. Para que una barrera superior sea inaccesible $\Upsilon \rightarrow 0$ o $\mu \rightarrow -\infty$ debe mantenerse cuando $z \rightarrow b$, el comportamiento de las barreras inaccesibles no necesita ser descrito ya que no puede ser alcanzado [4]. Modelar las barreras para el precio de futuros como barreras absorbentes accesibles parece inapropiado ya que corta toda incertidumbre adicional una vez que se alcanza la barrera. Bajo esta suposición, la tasa de cambio finalmente se fijaría en una barrera u otra. Hacer que las barreras sean accesibles y reflejantes parece ser una mejor opción, pero en realidad admite el arbitraje. En una barrera reflectante superior (inferior), el precio de futuros solo puede caer (aumentar). Adoptar barreras inaccesibles parece ser la mejor opción. Las barreras inaccesibles podrían ser el resultado de que el (los) gobierno (s) tomaran medidas de estabilización cada vez más drásticas a medida que se abordaba la barrera para que nunca se pudiera llegar a ella.

El modelo lognormal de Black-Scholes, es el estándar para la fijación de precios de opciones y ha sido empleado por muchos en el mercado de divisas. La extensión natural del caso lognormal para un proceso estocástico de tipo de cambio acotado con barreras inaccesibles es un coeficiente de difusión $\Upsilon(z, t, T) = (z - a)(1 - z/b)\sigma^*$. Para esta elección el proceso estocástico de riesgo neutral equivalente a la ecuación (4.32), es [4]

$$dz = (z - a)(1 - z/b)\sigma^* dW_t. \quad (4.33)$$

Este modelo es una extensión natural del modelo lognormal por dos razones. Primero incluye el modelo lognormal como el caso especial $a = 0$ y $b = \infty$. En segundo lugar, como en el modelo lognormal, la evolución del recíproco de la base (y, por lo tanto, del tipo de cambio peso-dólar) tiene la misma forma funcional para su varianza que la base con barreras inferiores y superiores de $1/b$ y $1/a$. Por el lema de Itô

$$d\left(\frac{1}{z}\right) = \mu_{1/z}(\cdot)dt + \sigma^*\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{z}\right)dW_t. \quad (4.34)$$

El proceso estocástico anterior nos dice que cumple con la condición de que las opciones de compra y de venta sobre divisas son simétricas. Es decir, una opción put para vender dólares por pesos, a un precio de ejercicio K , es igual a obtener una opción call, para comprar pesos por dólares a $1/K$. La demostración de la siguiente proposición se encuentra en [4].

Proposición 2. *Suponiendo que σ^* es uniformemente acotada, las barreras a y b para el proceso estocástico de riesgo neutral en (4.33) son inaccesibles. Una condición*

suficiente para que las barreras sean inaccesibles para el proceso estocástico original (4.32) es que la deriva tiene una tendencia débil fuera de cada barrera, es decir ($\exists a' > a$) tal que $\mu(z) \geq 0$ ($\forall z < a'$) y $\exists b' < b$ tal que $\mu(z) \leq 0$ ($\forall z > b'$).

Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes con procesos acotados

Siempre que la tasa de interés doméstica, r_M , sea constante, la ecuación diferencial parcial para el precio de las opciones europeas para la dinámica del tipo de cambio postulado en (4.33) es [4].

$$\frac{1}{2}\sigma^{*2}(z-a)^2(1-z/b)^2f_{zz} - rf + f_t = 0, \quad (4.35)$$

junto con la condición de frontera:

$$f(z, T) = \max(z - K, 0). \quad (4.36)$$

Podríamos valorar los contratos tomando la esperanza de la función de pago con respecto a la distribución de probabilidad neutral al riesgo, pero un enfoque más simple es definir una nueva función $g(z; t) = (1 - a/b)f(z, t)/[(1 - K/b)(1 - z/b)]$ en términos de la nueva variable $\zeta = (z - a)/(1 - z/b)$. Como se muestra a continuación.

Sea

$$f(z, t) = (1 - K/b)(1 - z/b)g(\zeta, t)/(1 - a/b), \quad (4.37)$$

y

$$\zeta = \frac{z - a}{1 - z/b}. \quad (4.38)$$

Se calcula la derivada parcial de ζ con respecto de z , para sustituirla en las derivadas parciales de f

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{1 - z/b} + \frac{1}{b} \frac{z - a}{(1 - z/b)^2} = \frac{1 - a/b}{(1 - z/b)^2}. \quad (4.39)$$

Enseguida se encuentran las derivadas parciales de la ecuación (4.35). Primero se calcula la derivada parcial de f con respecto de t .

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(1 - K/b)(1 - z/b)}{1 - a/b} \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (4.40)$$

Después se calculan las derivadas parciales de f con respecto de z . La primera derivada parcial de f respecto de z es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1 - K/b}{1 - a/b} \left[-\frac{1}{b}g + (1 - z/b) \frac{\partial g}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{1 - K/b}{b - a}g + \frac{1 - K/b}{1 - z/b} \frac{\partial g}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

La segunda derivada parcial de f con respecto de z es,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \left[-\frac{1 - a/b}{b - a} \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{1 - K/b}{1 - z/b} \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2} \right] \frac{1 - a/b}{(1 - z/b)^2} + \frac{1 - K/b}{(1 - z/b)^2} \frac{1}{b} \frac{\partial g}{\partial \zeta} \\ &= \frac{(1 - K/b)(1 - a/b)}{(1 - z/b)^3} \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2}.\end{aligned}\quad (4.42)$$

Sustituyendo estas derivadas parciales en la ecuación (4.35) y acomodando términos tenemos que,

$$\frac{(1 - K/b)(1 - z/b)}{1 - a/b} \left[\frac{1}{2} \sigma^{*2} (1 - a/b)^2 \frac{(z - a)^2}{(1 - z/b)^2} g_{\zeta\zeta} - r_M g + g_t \right] = 0. \quad (4.43)$$

Si se sustituye $\zeta = (z - a)/(1 - z/b)$ y se divide la ecuación (4.43) entre $(1 - K)(1 - z/b)/(1 - a/b)$, se tiene la ecuación diferencial parcial (4.44).

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^{*2} (1 - a/b)^2 \zeta^2 g_{\zeta\zeta} - r_M g + g_t, \quad (4.44)$$

Si $f(z; t)$ es una opción de compra, la condición de frontera para $g(\zeta; t)$ es

$$\begin{aligned}g(\zeta, T) &= \frac{1 - a/b}{(1 - K/b)(1 - z/b)} f(z, T) \\ &= \text{Max} \left[\frac{1 - a/b}{(1 - K/b)(1 - z/b)} (z - K), 0 \right] \\ &= \text{Max} \left[\frac{(z - a)(1 - K/b) - (1 - z/b)(K - a)}{(1 - K/b)(1 - z/b)}, 0 \right] \\ &= \text{Max} \left[\zeta - \frac{K - a}{1 - K/b}, 0 \right].\end{aligned}$$

Esto es la ecuación diferencial parcial estándar de Black-Scholes para una opción de compra con un precio de ejercicio de $(K - a)/(1 - K/b)$ sobre un activo base ζ con dividendo continuo al rendimiento constante r_M . Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \sigma^{*2} (1 - a/b)^2 \zeta^2 g_{\zeta\zeta} - r_M g + g_t = 0, \quad (4.45)$$

sujeto a

$$g(\zeta, T) = \text{Max} \left[0, \zeta - \frac{K - a}{1 - K/b} \right]. \quad (4.46)$$

Luego tenemos que

$$g(\zeta, t) = C \left(\zeta \exp\{-r_M(T-t)\}, T-t; \frac{K-a}{1-K/b}, \frac{\sigma^{*2}(1-a/b)^2(T-t)^2}{T-t}, r_M \right). \quad (4.47)$$

Donde $C(S_t, T-t; K, \sigma^{*2}, r_M)$ es la función de una opción call de Black-Scholes que vence en $T-t$ años, con un precio de ejercicio K , tipo de cambio en el tiempo t de S_t y varianza logarítmica de σ^{*2} donde la tasa de interés es r_M .

Expresándola en la función original

$$f(z, t) = (1-K/b)(1-z/b)g(\zeta, t)/(1-a/b), \quad (4.48)$$

y se sustituye ζ por

$$\zeta = (z-a)/(1-z/b), \quad (4.49)$$

luego se tiene

$$\begin{aligned} f(z, t; K, T) &= \frac{(1-K/b)(1-z/b)}{1-a/b} \\ &* C \left(\frac{z-a}{1-z/b} \exp\{-r_M(T-t)\}, T-t; \frac{K-a}{1-K/b}, \frac{\sigma^{*2}(1-a/b)^2(T-t)^2}{T-t}, r_M \right) \\ &= \frac{(1-K/b)(1-z/b)}{(1-a/b)} * \\ &\left[\frac{z-a}{1-z/b} \exp\{-r_M(T-t)\} \Phi(h^+) - \frac{K-a}{1-K/b} \exp\{-r_M(T-t)\} \Phi(h^+) \right] \\ &= \frac{1}{1-a/b} * \\ &\exp\{-r_M(T-t)\} [(z-a)(1-K/b)\Phi(h^+) - (K-a)(1-z/b)\Phi(h^-)] \\ &= \frac{1}{1-a/b} \exp\{-r_M(T-t)\} \\ &* C \left((z-a)(1-K/b), T-t; (K-a)(1-z/b), \frac{\sigma^{*2}(1-a/b)^2(T-t)^2}{T-t}, 0 \right). \end{aligned}$$

Se denotará la opción europea de compra con procesos acotados con $C(z, t)$ luego se tiene que,

$$\begin{aligned} C(z, t) &= \frac{1}{1-a/b} * \\ &\exp\{-r_M(T-t)\} [(z-a)(1-K/b)\Phi(h^+) - (K-a)(1-z/b)\Phi(h^-)]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Donde

$$h^{\pm} = \frac{1}{\sigma^*(1-a/b)\sqrt{(T-t)}} \left[\ln \left(\frac{z-a}{K-a} \frac{1-K/b}{1-z/b} \right) \pm \frac{1}{2} \sigma^{*2} (1-a/b)^2 (T-t) \right].$$

Donde $\Phi(x)$ es la función de distribución acumulada normal estándar.

Para obtener el precio de un put europeo, se utiliza la paridad de las opciones de compra y venta,

$$P(z, t) = C(z, t) - S_t B^*(t, T) + KB(t, T). \quad (4.51)$$

En el siguiente Capítulo se muestra una comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de BS y el modelo de BS acotado.

4.4. Perfil de rendimiento de la opción de compra

En la Figura 4.1 se encuentra la gráfica de perfil de rendimiento donde se relacionan las ganancias y pérdidas del comprador de una opción call sobre el tipo de cambio peso-dólar. Con un precio de ejercicio $K=18.1519$ y el valor de la opción de compra $C=0.1860$ por dólar, cuando el número de unidades es de diez mil dólares. Cuando el tipo de cambio al tiempo T es menor que el precio de ejercicio $S_T \leq K$ tenemos que la opción no se ejerce. Si este fuera el caso el poseedor de la opción tiene una pérdida igual al valor de la opción. Si $K < S_T < K + C$ la opción se ejerce, pero aun sigue con una pérdida, aunque menor al valor de la opción. Si $S_T = K + C$ se dice que obtenemos el punto de equilibrio, ya que no se generan ni pérdidas ni ganancias. Si $S_T > K + C$ se tienen ganancias de un centavo por cada centavo que el precio del dólar rebasa la suma del precio de ejercicio más la opción. En la Figura 4.1 se puede observar éste comportamiento, como se puede ver la pérdida está limitada a 1860, pero la ganancia puede ser ilimitada.

El perfil de rendimiento para una posición corta (el que vende la opción call) es un reflejo con respecto al eje horizontal de la gráfica del comprador de la opción, esto se percibe en la Figura 4.2. Lo que gana el que compra la opción el vendedor lo pierde y viceversa. Su ganancia es limitada pero cree que el precio del dólar no rebasa el precio de ejercicio, por lo cual tendrá una ganancia segura que es el precio de la opción.

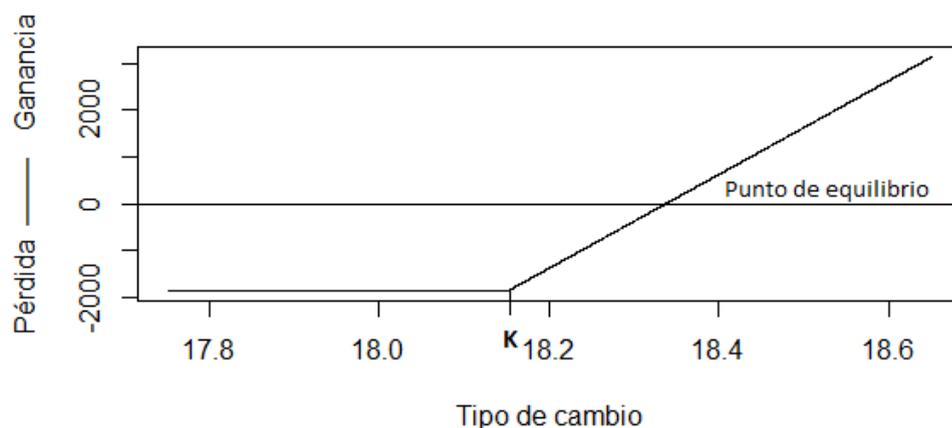


Figura 4.1: Gráfica del perfil de rendimiento de un comprador de la opción call.

Fuente: Elaboración propia

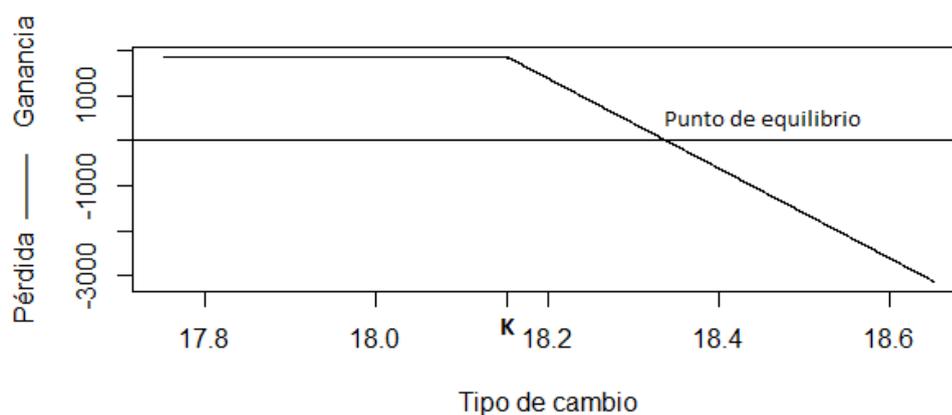


Figura 4.2: Gráfica del perfil de rendimiento de un vendedor de la opción call.

Fuente: Elaboración propia

4.5. Perfil de rendimiento para la opción de venta

El que adquiere esta posición pretende beneficiarse con una baja del tipo de cambio. En caso de que ocurra lo contrario la pérdida máxima será el valor de la opción. Si en la fecha de expiración el tipo de cambio es mayor que el precio de ejercicio la opción no se ejerce, esta posibilidad está representada en la parte horizontal de la gráfica en la Figura 4.3. Si al finalizar el periodo el tipo de cambio está por debajo

del precio de ejercicio, el tenedor ejerce el derecho y obtiene una ganancia igual al precio de ejercicio menos la suma del tipo de cambio spot con el valor de la opción, multiplicado por el monto del contrato. Para ejemplificar este comportamiento se tiene en la Figura 4.3 la gráfica para un comprador de la opción put con un precio de ejercicio $K = 18.1519$ y el valor de la opción de compra $C = 0.1184$, cuando el número de unidades es de diez mil dólares.

El tipo de cambio de equilibrio es igual al precio de ejercicio menos la prima. El perfil de rendimiento del vendedor de la opción put es simétrico al del comprador. En este caso su ganancia se limita al monto de la prima pero su pérdida puede ser ilimitada si la moneda base se desploma. En la Figura 4.4 se muestra este comportamiento.

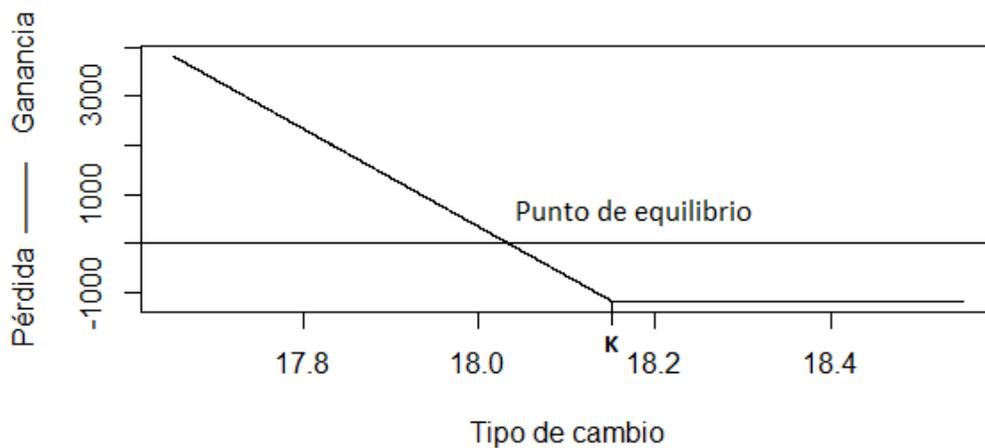


Figura 4.3: Gráfica del perfil de rendimiento de un comprador de la opción put.
Fuente: Elaboración propia

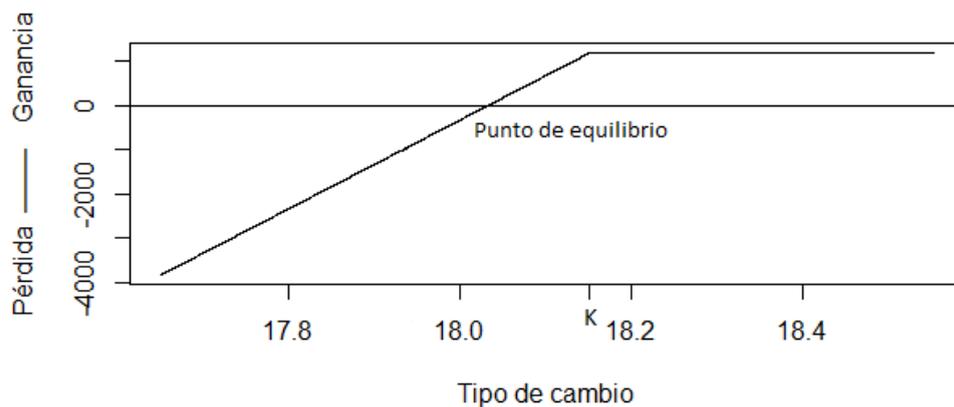


Figura 4.4: Gráfica del perfil de rendimiento para un vendedor de la opción put.
Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 5

Comparación de los modelos: Black-Scholes y Black-Scholes acotado

En este Capítulo se calculan los precios teóricos de las opciones europeas de compra y de venta, utilizando los modelos descritos en el Capítulo 4 y se realiza una comparación de los resultados obtenidos, con el fin de determinar como se afectan los precios de las opciones al suponer que el tipo de cambio sigue un movimiento geométrico Browniano acotado, comparado con el modelo de BS modificado para divisas. Además se analiza el comportamiento de los precios de la opción cuando estas se encuentran dentro del dinero, fuera del dinero y en el dinero. Los resultados obtenidos se encuentran en el Apéndice A.

De la Figura 5.1 a la Figura 5.6 se muestra el comportamiento de los precios de las opciones europeas de compra y venta para el tipo de cambio peso-dólar, con el modelo de BS y el modelo de BS acotado. Considerando los parámetros de los modelos descritos en el Capítulo 4, los cuales aparecen en los renglones de la Tabla 5.1 para la opción europea de compra y en la Tabla 5.2 para la opción europea de venta, en las columnas se encuentra el número de Figura correspondiente a los parámetros. Entre los parámetros se encuentran el precio de ejercicio (K), el activo subyacente (S_t), el plazo durante el cual se valúa la opción (T) y se mide como proporción de un año, la tasa de interés local (r_M), la tasa de interés de Estados Unidos (r_E), la volatilidad histórica calculada en el Capítulo 3 (σ) y por último se encuentran la cota inferior (a) y la cota superior (b), las cuales solo se utilizan en el modelo de BS acotado, son simétricas y se toman como un porcentaje del precio de ejercicio. Para determinar el porcentaje se analiza el comportamiento del dólar en un periodo anterior al que se aplica la fórmula y se toma de acuerdo a la variación de los precios, por tal motivo el porcentaje utilizado, varía conforme al precio máximo y mínimo de cada plazo. Por ejemplo para tres meses el precio del dólar varía menos que para un año, entonces el porcentaje utilizado para tres meses es menor que para un año.

5.1. Comparación de la opción europea de compra

En esta sección se realiza una comparación entre los resultados obtenidos para una opción europea de compra, con el modelo de BS y el modelo de BS acotado. Se efectúa la comparación de los precios de la opción de compra para doce, seis y tres meses, los cuales se encuentran en la Figura 5.1, 5.2 y 5.3 respectivamente. En el eje de las abscisas se encuentra el precio del activo subyacente y en el eje de las ordenadas se encuentra el valor de la opción, correspondiente a cada subyacente. Para realizar la comparación entre los precios de la opción se varía el subyacente alrededor del precio de ejercicio (K), y se observa que el modelo de BS modificado con un proceso estocástico acotado (MGB acotado) disminuye el precio de la opción de compra, comparado con el precio que se obtiene con el modelo de BS. Además se observa que la diferencia entre ambos precios de la opción es más notoria para un año que para tres meses. Los parámetros que se utilizan para cada Figura se encuentran en la Tabla 5.1.

Parámetro	Figura 5.1	Figura 5.2	Figura 5.3
K	20.5973	18.1154	17.7278
S_t	[17.5973, 21.5973]	[16.1154, 19.1154]	[16.0278, 18.7278]
T	1	0.5	0.25
r_M	0.0620	0.0714	0.0707
r_E	0.0087	0.0111	0.0104
σ	0.16096	0.08320	0.04206
a	$0.85K$	$0.87K$	$0.89K$
b	$K/0.85$	$K/0.87$	$K/0.89$

Tabla 5.1: Parámetros de la opción de compra.

Fuente: Elaboración propia

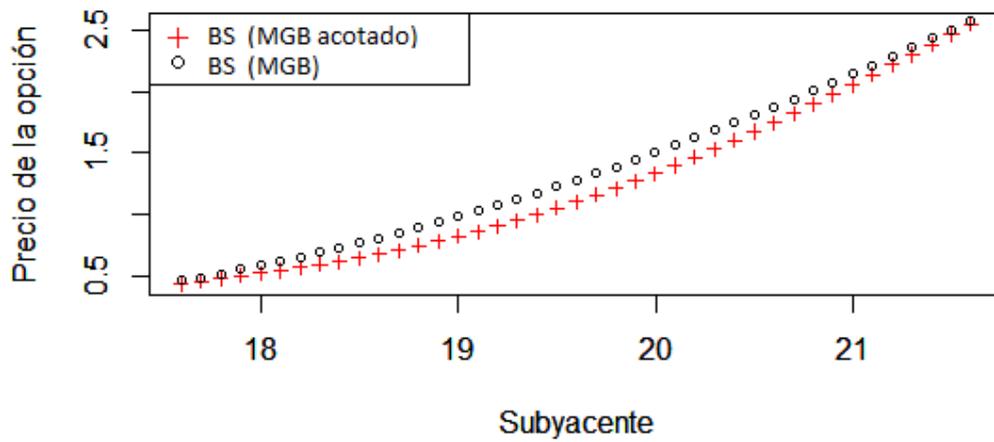


Figura 5.1: Valuación de una opción de compra, con plazo de un año: BS (MGB) VS BS (MGB acotado)

Fuente: Elaboración propia

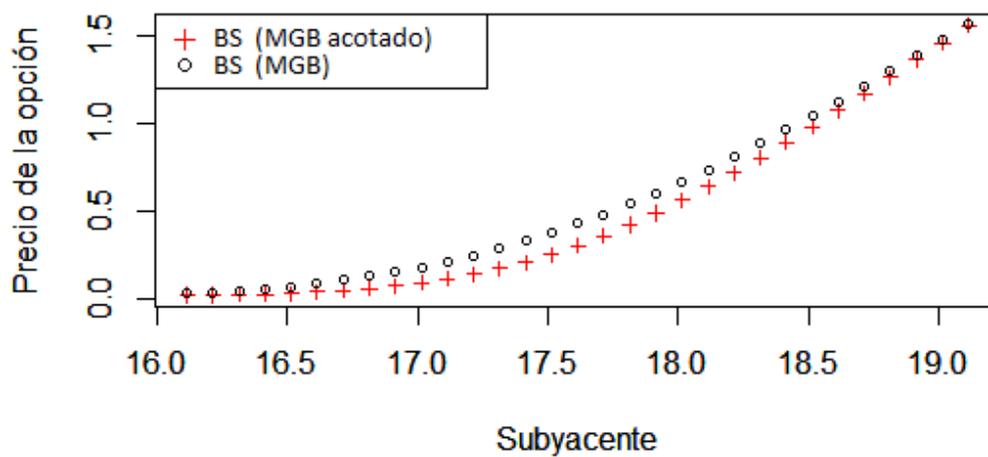


Figura 5.2: Valuación de una opción de compra, con plazo de seis meses: BS (MGB) VS BS (MGB acotado).

Fuente: Elaboración propia

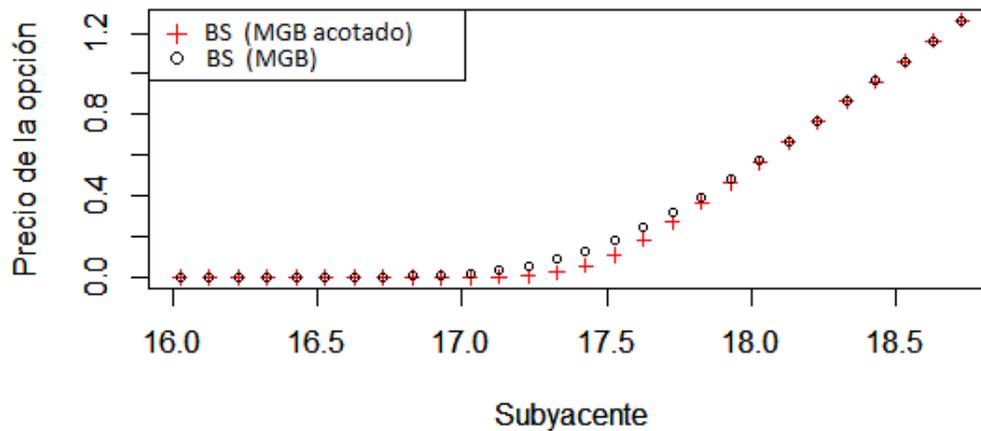


Figura 5.3: Valuación de una opción de compra, con plazo de tres meses: BS (MGB) VS BS (MGB acotado).

Fuente: Elaboración propia

5.2. Comparación de la opción europea de venta

Se analiza el comportamiento de las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6 de una opción europea de venta correspondientes a doce, seis y tres meses respectivamente, que se valúan utilizando el modelo de BS modificado para divisas y el modelo de BS acotado, es decir cuando el precio del activo subyacente sigue un MGB acotado. En el eje de las abscisas se encuentra el precio del activo subyacente y en el eje de las ordenadas se ubican el valor de la opción correspondiente a cada subyacente. Se percibe que el valor de la opción de venta disminuye con el modelo de procesos acotados, es decir el precio de la opción de venta es más pequeño que con el modelo de BS. Además se tiene que mientras más grande sea el plazo es mayor la diferencia entre el precio de ambos modelos. Los parámetros utilizados se encuentran en la Tabla 5.2.

Parámetro	Figura 5.4	Figura 5.5	Figura 5.6
K	20.5973	18.1154	17.7278
S_t	[17.5973, 21.5973]	[16.1154, 19.1154]	[16.0278, 18.7278]
T	1	0.5	0.25
r_M	0.0620	0.0714	0.0707
r_E	0.0087	0.0111	0.0104
σ	0.16096	0.08320	0.04206
a	$0.85K$	$0.87K$	$0.89K$
b	$K/0.85$	$K/0.87$	$K/0.89$

Tabla 5.2: Parámetros de la opción de venta.

Fuente: Elaboración propia

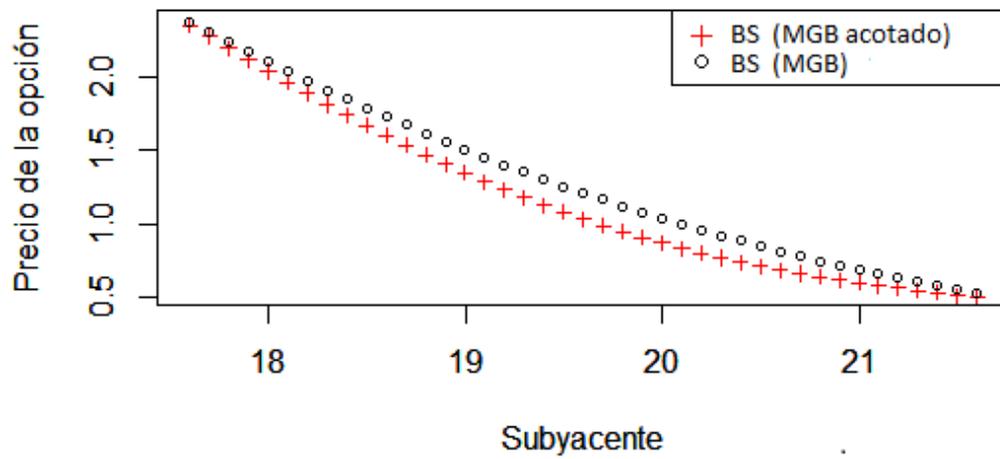


Figura 5.4: Valuación de una opción de venta, con plazo de un año: BS (MGB) VS BS (MGB acotado).

Fuente: Elaboración propia

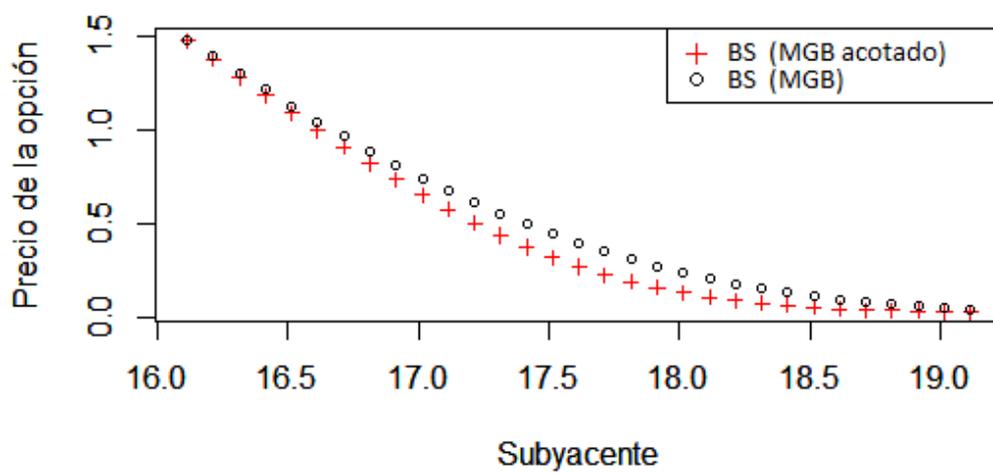


Figura 5.5: Valuación de una opción de venta, con plazo de seis meses: BS (MGB) VS BS (MGB acotado).

Fuente: Elaboración propia

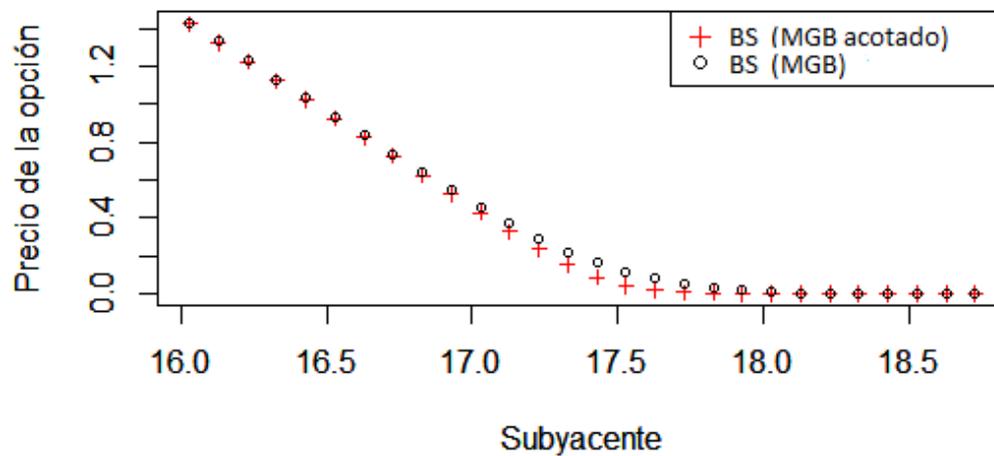


Figura 5.6: Valuación de una opción de venta, con plazo de tres meses: BS (MGB) VS BS (MGB acotado)

Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 6

Conclusiones

En este trabajo se presentan dos modelos para valorar opciones europeas sobre el dólar. El primer modelo es el de Black-Scholes, el cual se modifica para valorar opciones sobre divisas, el segundo modelo es el de Black-Scholes acotado. En el primer modelo se asume que el precio del dólar sigue un movimiento geométrico Browniano, para el segundo modelo el supuesto es que el precio del dólar sigue un movimiento geométrico Browniano acotado. Este modelo se ajusta un poco más a la realidad, ya que generalmente los gobiernos intervienen comprando o vendiendo divisas para estabilizar el precio del dólar, y así mantenerlo dentro de ciertas cotas. Las cotas limitan las ganancias pero también limitan las pérdidas, ya que los precios de la opción que se obtiene con el modelo de BS acotado, son inferiores con respecto a los precios que se obtiene con el modelo de Black-Scholes. Es precisamente lo que se esperaba, por que al existir cotas el precio de dólar solo podría oscilar entre ellas, con lo cual bajaría la volatilidad y por supuesto el valor de la opción.

Entre mayor es el plazo, mayor es la diferencia entre el precio de ambos modelos, se observa este comportamiento en las Figuras del Capítulo 5. Por ejemplo la diferencia entre los precios de ambos modelos a tres meses es muy poca. Más sin embargo cuando el plazo es a un año, los precios de la opción están más alejados. Esto se debe a que el precio del dólar a tres meses varía menos que a un año.

Para las gráficas de la opción de compra se tiene el siguiente análisis. El modelo de BS acotado disminuye en casi todo momento el precio de la opción, aunque en algunas partes los precios de la opción que se obtiene con ambos modelos están más apartados. Como se puede observar cuando la opción está muy dentro del dinero el precio de la opción que se obtuvo con el modelo de BS acotado tiende al precio que se obtuvo con el modelo de BS, cuando la opción está en el dinero o cerca las diferencias son significativas. Para el caso en el que la opción está muy fuera del dinero, las diferencias entre los resultados de ambos modelos son mínimas y el precio de la opción tiende a cero para ambos modelos.

Es posible observar el comportamiento de la opción de venta para ambos modelos, casi en todo momento los precios de la opción que se obtuvieron con el modelo de Black-Scholes acotado son inferiores a los precios del modelo de BS modificado

para divisas. Sin embargo cuando la opción está muy en el dinero la diferencia entre los precios de ambos modelos es mínima. Cuando la opción está en el dinero o a sus alrededores la diferencia es significativa. En cambio cuando la opción está muy fuera del dinero el precio de la opción tiende a cero en ambos modelos.

Bibliografía

- [1] SHEREVE, STEVEN E *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous Time-Models* (Springer Science+Business Media, Inc.), 2004.
- [2] ALFONSO DE LARA-HARO, A. L. *Medición y control de riesgos financieros*, tercera edición, Limusa, 2008.
- [3] ZBIGNIEW KOZIKOWSKI-ZARSKA. *Finanzas internacionales*, tercera edición, Mc Graw Hill, 2013.
- [4] JONATHAN E. INGERSOLL, JR. *Valuing Foreign Exchange Rate Derivatives with a Bounded Exchange Process*.
- [5] VALDIVIESO, R. *Un análisis del mercado de derivados en México (mexder)* Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2001.
- [6] GUERRERO, F. *¿Qué significan las intervenciones discrecionales del Banco de México y cómo influyen en las inversiones?*, *The visionary México*, Febrero, 2016. Disponible en: <http://www.finamex.com.mx/the-visionary/actualidad/que-significan-las-intervenciones-discrecionales-de-banco-de-mexico-y-como-influyen-en-las-inversiones/>
- [7] F. VENEGAS. *Riesgos Financieros y Económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, (2ª edición). México: Cengage Learning, Inc, 2006.
- [8] HERNÁNDEZ, A.S *¿Por qué nos influye el tipo de cambio?*, *Forbes México*, Abril, 2014. Disponible en: <https://www.forbes.com.mx/por-que-nos-influye-el-tipo-de-cambio/>
- [9] HULL, J. *Introducción a los mercados de futuros y opciones* (4ª edición). Pearson-Prentice Hall, 2002.
- [10] E.DERMAN. *The Volatility Smile*, (1ª edición).Estados Unidos: John Wiley, 2016.
- [11] POBLACIÓN, P. *Finanzas Cuantitativas Básicas*, (1ª edición). Ediciones Paraninfo, 2015.
- [12] BANCO DE MÉXICO *Sistema Financiero*. Disponible en: <http://www.banxico.org.mx/divulgacion/sistema-financiero/sistema-financiero.html#Mercadocambiario>.

- [13] BANCO DE MÉXICO *Sistema de Información económica*. Disponible en: <http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF373>
- [14] LUIS RINCÓN *Introducción a los procesos estocásticos*, Ciudad Universitaria, UNAM, 2012.
- [15] JONATHAN INGERSOLL *Theory Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield Publishers, 1987.

APÉNDICE A

Tablas de valuación: modelos de Black-Scholes y Black-Scholes acotado

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al evaluar la opción europea con el modelo de BS, tomando en cuenta los parámetros utilizados en los modelos del Capítulo 4. Para el activo subyacente (S_t), es decir el tipo de cambio peso-dólar, se presentan los precios de la opción obtenidos cuando se toma el valor de S_t alrededor del precio de ejercicio, con diez decimales por abajo y por arriba.

A.1. Valuación de una opción europea de compra

En esta sección se presenta el valor de la opción de compra para un año, seis y tres meses. Los parámetros correspondientes a cada plazo se muestran en la Tabla A.1.

Parámetro	Tabla A.2	Tabla A.3	Tabla A.4
K	20.5973	18.1154	17.7278
S_t	[19.5973, 21.5973]	[17.1154, 19.1154]	[16.7278, 18.7278]
T	1	0.5	0.25
r_M	0.0620	0.0714	0.0707
r_E	0.0087	0.0111	0.0104
σ	0.16096	0.08320	0.04206
a	0.85 K	0.87 K	0.89 K
b	$K/0.85$	$K/0.87$	$K/0.89$

Tabla A.1: Parámetros de la opción de compra.

Fuente: Elaboración propia

Subyacente (S_t)	BS (MGB)	BS (MGB acotado)
19.5973	1.27852	1.10261
19.6973	1.33276	1.15760
19.7973	1.38823	1.21482
19.8973	1.44492	1.27424
19.9973	1.50282	1.33583
20.0973	1.56192	1.39953
20.1973	1.62221	1.46529
20.2973	1.68365	1.53306
20.3973	1.74625	1.60276
20.4973	1.80999	1.67433
20.5973	1.87483	1.74768
20.6973	1.94077	1.82273
20.7973	2.00779	1.89935
20.8973	2.07587	1.97744
20.9973	2.14498	2.05685
21.0973	2.21511	2.13741
21.1973	2.28624	2.21892
21.2973	2.35833	2.30113
21.3973	2.43138	2.38373
21.4973	2.50537	2.46633
21.5973	2.58026	2.54846

Tabla A.2: Precio de la opción de compra con plazo de un año, variando S_t , utilizando la fórmula de BS y la fórmula de BS con un proceso acotado.

Fuente: Elaboración propia

Subyacente (S_t)	BS (MGB)	BS (MGB acotado)
17.1154	0.21590	0.11540
17.2154	0.25114	0.14220
17.3154	0.29009	0.17425
17.4154	0.33284	0.21199
17.5154	0.37942	0.25570
17.6154	0.42985	0.30550
17.7154	0.48410	0.36137
17.8154	0.54210	0.42311
17.9154	0.60376	0.49041
18.0154	0.66895	0.56280
18.1154	0.73753	0.63979
18.2154	0.80932	0.72081
18.3154	0.88413	0.80533
18.4154	0.96177	0.89281
18.5154	1.04202	0.98277
18.6154	1.12467	1.07481
18.7154	1.20951	1.16855
18.8154	1.29632	1.26373
18.9154	1.38491	1.36011
19.0154	1.47508	1.45757
19.1154	1.56665	1.55601

Tabla A.3: Precio de la opción de compra con plazo de seis meses, variando S_t , utilizando la fórmula de BS y la fórmula de BS con un proceso acotado.

Fuente: Elaboración propia

Subyacente (S_t)	BS (MGB)	BS (MGB acotado)
16.7278	0.00270	4.8e-06
16.8278	0.00566	0.00002
16.9278	0.01109	0.00013
17.0278	0.02035	0.00063
17.1278	0.03510	0.00257
17.2278	0.05714	0.00876
17.3278	0.08814	0.02457
17.4278	0.12932	0.05689
17.5278	0.18125	0.11025
17.6278	0.24372	0.18359
17.7278	0.31581	0.27110
17.8278	0.39607	0.36622
17.9278	0.48280	0.46452
18.0278	0.57432	0.56388
18.1278	0.66915	0.66353
18.2278	0.76611	0.76326
18.3278	0.86437	0.86299
18.4278	0.96336	0.96273
18.5278	1.06274	1.06247
18.6278	1.16232	1.16221
18.7278	1.26200	1.26195

Tabla A.4: Precio de la opción de compra con plazo de 3 meses, variando S_t , utilizando la fórmula de BS y la fórmula de BS con un proceso acotado.

Fuente: Elaboración propia

A.2. Valuación de la opción europea de venta

En seguida se presenta el valor de una opción europea de venta para los plazos de un año, seis y tres meses, con los parámetros que se encuentran en la Tabla A.5

Parámetro	Tabla A.6	Tabla A.7	Tabla A.8
K	20.5973	18.1154	17.7278
S_t	[19.5973, 21.5973]	[17.1154, 19.1154]	[16.7278, 18.7278]
T	1	0.5	0.25
r_M	0.0620	0.0714	0.0707
r_E	0.0087	0.0111	0.0104
σ	0.16096	0.08320	0.04206
a	0.85 K	0.87 K	0.89 K
b	$K/0.85$	$K/0.87$	$K/0.89$

Tabla A.5: Parámetros de la opción de venta.

Fuente: Elaboración propia

Subyacente (S_t)	BS (MGB)	BS (MGB acotado)
19.5973	1.21003	1.03412
19.6973	1.16513	0.98997
19.7973	1.12146	0.94806
19.8973	1.07902	0.90835
19.9973	1.03779	0.87080
20.0973	0.99776	0.83536
20.1973	0.95891	0.80199
20.2973	0.92122	0.77063
20.3973	0.88469	0.74120
20.4973	0.84929	0.71363
20.5973	0.81500	0.68785
20.6973	0.78181	0.66376
20.7973	0.74969	0.64126
20.8973	0.71864	0.62021
20.9973	0.68862	0.60049
21.0973	0.65961	0.58191
21.1973	0.63160	0.56429
21.2973	0.60457	0.54736
21.3973	0.57848	0.53083
21.4973	0.55333	0.51429
21.5973	0.52909	0.49729

Tabla A.6: Precio de la opción de venta con plazo de un año, variando S_t , utilizando la fórmula de BS y la fórmula de BS con un proceso acotado.

Fuente: Elaboración propia

Subyacente (S_t)	BS (MGB)	BS (MGB acotado)
17.1154	0.67531	0.57482
17.2154	0.61110	0.50216
17.3154	0.55061	0.43478
17.4154	0.49391	0.37307
17.5154	0.44105	0.31732
17.6154	0.39203	0.26768
17.7154	0.34683	0.22410
17.8154	0.30539	0.18640
17.9154	0.26760	0.15425
18.0154	0.23335	0.12720
18.1154	0.20248	0.10474
18.2154	0.17482	0.08632
18.3154	0.15019	0.07139
18.4154	0.12838	0.05942
18.5154	0.10918	0.04994
18.6154	0.09239	0.04252
18.7154	0.07778	0.03682
18.8154	0.06515	0.03255
18.9154	0.05429	0.02949
19.0154	0.04502	0.02750
19.1154	0.03713	0.02649

Tabla A.7: Precio de la opción de venta con plazo de 6 meses, variando S_t , utilizando la fórmula de BS y la fórmula de BS con un proceso acotado.

Fuente: Elaboración propia

Subyacente (S_t)	BS (MGB)	BS (MGB acotado)
16.7278	0.73555	0.72576
16.8278	0.63877	0.62600
16.9278	0.54446	0.52634
17.0278	0.45397	0.42711
17.1278	0.36899	0.32945
17.2278	0.29129	0.23635
17.3278	0.22255	0.15337
17.4278	0.16399	0.08737
17.5278	0.11617	0.04257
17.6278	0.07891	0.01746
17.7278	0.05126	0.00600
17.8278	0.03178	0.00175
17.9278	0.01877	0.00044
18.0278	0.01055	0.00010
18.1278	0.00563	0.00002
18.2278	0.00286	4.6e-06
18.3278	0.00137	1.0e-06
18.4278	0.00062	2.6e-07
18.5278	0.00027	8.2e-08
18.6278	0.00011	3.3e-08
18.7278	4.3e-05	1.8e-08

Tabla A.8: Precio de la opción de venta con plazo de 3 meses, variando S_t , utilizando la fórmula de BS y la fórmula de BS con un proceso acotado.

Fuente: Elaboración propia

