UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

SOBRE EL ESPACIO CUASI-MÉTRICO DE LAS FUNCIONES DE COMPLEJIDAD

TESIS

Para obtener el título de:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Presenta:

DIANA CITLALLI CASTAÑEDA ÁLVAREZ

Director de Tesis:

JOSÉ MARGARITO HERNÁNDEZ MORALES

Codirectora de Tesis:

LUZ DEL CARMEN ÁLVAREZ MARÍN

Huajuapan de León, Oaxaca. Junio de 2018.

Dedicatoria

A mis padres,

"Muy cierto que presiden con su ejemplo
mi paso vacilante;
muy cierto que su savia
inflama mi engranaje,
pero fue con sus lágrimas y su habmbre
que ellos pavimentaron mi sendero..."
-H. Castañeda Bringas

para ustedes,
todos los frutos de nuestro esfuerzo compartido,
el peso de cada paso, de cada logro,
y mi más profundo amor y gratitud por siempre.

A mi hermana,

Sin importar el tamaño de tus pasos
ni los senderos que decidas recorrer,
siempre tendrás el cobijo de mi mirada atenta
y este cariño inmenso
que no responde a condiciones.

A ti,
te concedo una página más
de anonimato.

Agradecimientos

Quisiera evitar cargar estas letras de tanto pasado,
me remonto a él y encuentro tantos momentos de dicha,
profundos sentires que exceden el alcance limitado de mi verbo.

Acuden a mi mente, enfilados, momentos y nombres; trozos de memorias que tapizan, cual mosaico, el sendero de estos últimos -casi- seis años. Extiendo mi gratitud a cada pequeña parte del camino, cada cruce que de algún modo me ha conducido hasta aquí, y sobre todo a todas aquellas personas que han formado parte de esta bella jornada.

A mis padres, por su apoyo incondicional e incansable, por ayudarme a mantenerme siempre en pie y avanzando. No hay empresa que parezca imposible con el abrazo de su guía, son y siempre serán mi meta, mis raíces, mi abono y mi sol; sin importar cuán lejos me lleve la vida, los llevaré siempre conmigo.

"Cuánto debe estirarse mi alma
para sin verte tenerte
y dejarte correr sin perderte".
-C. Castañeda Roldán

A mi hermana, mi compañera de viaje, mi pequeña gran sonãdora. Gracias por darme fuerza e impulso, por llenar mis días de tu colorida vivacidad y tu alegría (y por alimentarme en estos últimos días de caos). Eres uno de los grandes tesoros de mi vida.

A Rogelio Cruz Márquez, por su apoyo siempre paciente, resiliente y constante; por devolverme la calma en mis arranques de frustración, por el cariño con el que me has acompañado en el sinuoso camino para recuperarme a mí misma. Gracias por escuchar cada una de mis quimeras, y los inumerables ensayos de exposición de este trabajo.

A mis grandes amigos de la facultad: Sonia Venancio, Edgar Padilla, Heriberto Jiménez, Elide Luna, Brenda Policarpo, Iván Vega, Yaretzi López, Antonio Méndez, Tomás Cariño, y los que restan; gracias por estar siempre presentes, por brindarme su apoyo y su mano amiga. Son los mejores compañeros de aventuras y han hecho de este recorrido algo memorable.

Agradezco ampliamente también a mi director de tesis, el Dr. José Margarito Hernández Morales, y a mi co-directora, la M.C. Luz del Carmen Álvarez Marín, por su guía y apoyo en la elaboración de este trabajo. A mis revisores, el M.C. Juan Luis Hernández López y el M.C. Vulfrano Tochihuitl Bueno, y a mi revisor extra oficial, el Dr. Cuauhtémoc Héctor Castañeda Roldán. Toda mi admiración y respeto para ustedes, su dedicación e ingenio son inspiración para continuar cultivándome en esta área. Al resto de los profesores que han contribuido a mi formación personal y profesional, muchas gracias por su guía y apoyo.

"Creo que la melancolía es, en suma,
un problema musical: una disonancia,
un ritmo trastornado.
Mientras afuera todo sucede
con un ritmo vertiginoso de cascada,
adentro hay una lentitud exhausta
de gota de agua cayendo de tanto en tanto".

-A. Pizarnik

Índice general

Introducción

La noción de simetría en el estudio de los espacios métricos parece bastante intuitiva cuando casi involuntariamente asociamos la definición abstracta de la métrica con la idea bastante arraigada desde edad temprana que se tiene de 'distancia'. Gran parte de la teoría sobre espacios métricos está basada en esta propiedad -la simetría-, y resulta curioso analizar cómo cambian los resultados al debilitar la definición de la métrica privándola de ella. En principio podría parecer mero entretenimiento metódico del ocioso, acostumbrado al proceder matemático que busca la generalización en su expresión más elevada; sin embargo, lejos de las predicciones inmediatas, este tipo de espacios resultan de mucha utilidad para el análisis de estructuras en las cuales la dirección de comparación importa, donde se intenta formalizar la noción del 'beneficio' obtenido al sustuir un elemento del espacio por otro. Tal es el caso del Espacio de Funciones de Complejidad definido por Schellekens en 1997, el cual busca dotar de rigor matemático formal a la teoría de complejidad de algoritmos.

En principio, la teoría usual de complejidad de algoritmos permite hacer comparaciones respecto a la eficiencia entre dos algoritmos distintos para resolver un mismo problema, y así elegir el más adecuado de acuerdo a requerimientos de espacio y tiempo. Está demás decir que en la mayoría de los casos es deseable trabajar con el algoritmo que requiera menores cantidades de tiempo y de espacio para obtener la solución, pero determinar cuál de los algoritmos disponibles lo es, no siempre es tarea sencilla, debido a que lo que usualmente se hace para clasificarlos es acotar superiormente a su función de complejidad con la función más cercana y más "sencilla", y con ello asignarle un orden. Dado que naturalmente existen muchos algoritmos del mismo órden, la comparación entre ellos puede ser difícil de definir derivando en el problema anteriormente mencionado. El espacio particular que propone Schellekens en [16], el Espacio de Funciones de Complejidad al que denotaremos como C, ofrece una alternativa para esta comparación, aplicable para cualquier par de algoritmos.

Uno de los objetivos principales de este trabajo es mostrar una aplicación directa de los espacios asimétricos en el área de la complejidad de algoritmos. Para ello resulta necesario hacer mención de algunos conceptos fundamentales de la teoría de complejidad, así como sobre espacios asimétricos, con la intención de bien lograr la combinación que pretende hacerse.

En los capítulos 1 y 2 ponemos sobre la mesa algunos fundamentos de la teoría de complejidad de algoritmos y sobre los espacios que prescinden de simetría, tales como los espacios cuasi-uniformes, los espacios cuasi-métricos, los espacios normados asimétricamente y finalmente los conos normados asimétricamente, dado que esta última es precisamente la estructura que poseen el espacio de complejidad y su espacio dual como los presentamos en este trabajo. En el capítulo 3 definiremos propiamente el espacio de complejidad C así como su espacio dual C^*, y mencionaremos algunas propiedades topológicas de estos espacios, las cuales utilizaremos posteriormente en el capítulo 4 para mostrar una aplicación a los algoritmos divide y vencerás probabilistas.

Capítulo 1

Preliminares

La complejidad de algoritmos es un área de estudio muy extensa que aplica diversas herramientas de la teoría de aproximación y del análisis funcional, entre otras. Para los fines de este trabajo, es suficiente con bosquejar algunos principios de la teoría de complejidad usual para después conjugarlos con la teoría del espacio de funciones de complejidad C propuesta recientemente por Schellekens y Romaguera en [16].

En este capítulo presentaremos algunos conceptos importantes en relación a la complejidad de algoritmos, haremos referencia al significado de la función de complejidad asociada a un algoritmo, a la forma de calcularla -para algunos casos sencillos- y a la manera usual de acotar estas funciones mediante otras de expresión más simple con el fin de agruparlas en clases, las cuales permiten realizar algunos tipos de comparaciones respecto a su eficiencia. Posteriormente dedicamos una breve sección a los algoritmos probabilistas y a los algoritmos divide y vencerás, ya que en un capítulo posterior se aplicará la teoría del espacio de complejidad -como fue definida por Schellekens y Romaguera- al caso particular de los algoritmos divide y vencerás probabilistas.

El lector interesado puede encontrar información más extensa sobre estos temas en [15] y [5].

1.1. Complejidad de algoritmos

La palabra algoritmo surge como una deformación del nombre de un matemático del siglo IX, "Al-Jowarizmi", quien publicó un libro de numerales hindúes los cuales sentaron las bases para la notación decimal moderna. Originalmente, el término comenzó a ser utilizado para denotar las reglas de la aritmética, utilizando notación decimal, para posteriormente adquirir un significado más general y ser aplicado para referirse a la secuencia específica de pasos que debían seguirse para resolver un problema cualquiera, y no necesariamente cálculos aritméticos.

Específicamente, un algoritmo es un conjunto finito de instrucciones precisas cuyo seguimiento conduce a la solución de un problema o cálculo.

Generalmente, un algoritmo debe tener ciertas propiedades, tales como:

- **Entrada:** Un algoritmo debe recibir valores de entrada que son elementos de un conjunto especificado.
- **Salida:** Para cada conjunto de valores de entrada, el algoritmo devuelve valores de salida en un conjunto específico, las cuales son las soluciones para el problema con esa entrada fija.
- **Definición:** Los pasos a seguir deben estar definidos claramente.
- **Corrección:** El algoritmo debe arrojar valores correctos para cada conjunto de entrada.
- **Duración finita:** El algortimo debe ser capaz de resolver el problema tras ejecutar una cantidad finita de pasos, sin importar el tamaño del conjunto de valores de entrada.
- **Efectividad:** Debe ser posible realizar cada uno de los pasos que indica el algoritmo en un periodo finito de tiempo.
- **Generalidad:** El algoritmo debe ser capaz de resolver el problema para cualquier conjunto de entrada de valores permitidos, no sólo para un conjunto particular de datos de entrada.

Dado un algoritmo, es útil preguntarse por la cantidad de operaciones que éste necesita realizar para resolver un problema de tamaño n. Puede hablarse tanto de la complejidad espacial como de la complejidad temporal de un algoritmo, y esto es lo que a grandes rasgos puede entenderse como la complejidad temporal, debido a que la cantidad de operaciones requeridas para resolver un problema está relacionada directamente con el tiempo de ejecución. La mayoría de la literatura existente sobre complejidad se enfoca en la complejidad temporal y este trabajo no es la excepción. Claramente el tiempo que le tomará al algoritmo obtener la solución depende en gran medida de la capacidad de la computadora en la cual se ejecute, por ello se introduce una constante indicando dicha capacidad. Con el objetivo de prescindir de esa constante, se acota la función de complejidad del algoritmo mediante la función inmediata "más cercana"que además resulte ser la "más simple", y con ello se introduce la notación O.

Entendamos como función de complejidad de un algoritmo a la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que indica el tiempo que le toma al algoritmo resolver un problema de tamaño n. De acuerdo a lo anterior, es de esperarse que el valor de $f(n)$ aumente al crecer el valor de n, así estas funciones son crecientes. En la práctica es de gran interés analizar estas funciones de complejidad para valores de n muy grandes.

El tiempo total que le toma a un algoritmo resolver un problema de tamaño n puede calcularse como la suma del tiempo que le toma al ordenador realizar cada una de las operaciones elementales indicadas en dicho algoritmo. Estas operaciones pueden ser comparaciones u operaciones aritméticas. Sin embargo, el tiempo que le toma al ordenador realizar cada una de estas operaciones depende de las características propias del ordenador, por lo cual, para facilitar el análisis, la complejidad temporal puede ser vista como la cantidad de operaciones elementales que realiza el algoritmo para resolver el problema de tamaño n, en lugar del tiempo que le toma al ordenador realizarlas.

En la práctica es de mucha utilidad acotar estas funciones de complejidad, (ya sea superiormente, inferiormente o una combinación de ambas) para obtener una referencia útil respecto a su velocidad de crecimiento. La sub-sección a continuación muestra cómo encontrar las cotas más comunmente utilizadas en la teoría de complejidad de algoritmos. Estas cotas pueden ser utilizadas para cualquier función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, por lo cual la teoría siguiente se enuncia para ese tipo de funciones en general.

1.1.1. Crecimiento de funciones

Antes de ejemplificar el cálculo de las funciones de complejidad de algoritmos específicos y comparar la eficiencia de aquellos que resuelven un mismo problema, introduciremos algunas medidas comunes de referencia que resultan muy útiles para dicha comparación. Estas medidas son cotas que sirven para aproximar el crecimiento de funciones, y las más comunes en relación a la complejidad de algoritmos son las que se presentan en esta sub-sección.

Cota superior: Notación *O*

Una manera de establecer una referencia respecto al crecimiento de la función de complejidad de un problema o algoritmo, es encontrar otra función de expresión "más simple"que acote su imagen superiormente a partir de algún n fijo. Para ello se introduce la notación que se define a continuación.

Definición 1.1 *Dadas las funciones* $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *se dice que la función* g *domina a* f *(o que* f *es dominada por* g*) si existen constantes* $M \in \mathbb{R}^+$ *y* $k \in \mathbb{N}$, *tales que* $f(n) \leq M\ g(n)$, *siempre que* $n \geq k$, *o de forma equivalente, si* $\frac{f(n)}{g(n)} \leq M$ *para todo* $n \geq k$. *A las constantes* M *y* k *se les llama"testigos".*

Cuando f es dominada por g se utiliza la notación $f \in O(g)$ lo cual se lee como *"f es de orden g"*. Con lo anterior, $O(g)$ representa el conjunto de todas las funciones con dominio $\mathbb{N}$ y contradominio $\mathbb{R}^+$ que son dominadas por g.

Es claro que si $f \in O(g)$ y $g \in O(h)$ entonces $f \in O(h)$. Sin embargo, a menos que $h \in O(g)$, la proposición $f \in O(g)$ es mejor que $f \in O(h)$, es decir, nos interesa encontrar la mejor ("la más económica") g para la cual $f \in O(g)$.

Algunos de los órdenes que con mayor frecuencia se utilizan para comparar las funciones de complejidad son los siguientes (en orden creciente):

Forma	**Nombre**
O(1)	Constante
O(log n)	Logarítmico
O(n)	Lineal
O(n log n)	nlog n
O(n^2)	Cuadrático
O(n^3)	Cúbico
O(n^m)	Polinomial
O(C^n)	Exponencial
O(n!)	Factorial

Un método útil para encontrar constantes M, k (o testigos) de la relación $f \in O(g)$, es comenzar por seleccionar un valor de k para el cual pueda estimarse el valor de $f(n)$

para $n \geq k$ y posteriormente utilizar esa estimación para encontrar una constante M que permite que se cumpla $f(n) \leq Mg(n)$ para todo $n \geq k$.

Notemos también que la existencia de un par de testigos para la relación, garantiza la existencia de infinitos de ellos. Esto es fácil de mostrar, dado que teniendo a M y a k como testigos entonces para cualesquiera constantes M' y k' con $M' > M$ y $k' > k$ se cumple que $f(n) \leq Mg(n) < M'g(n)$ para $n > k' > k$.

Tomemos como ejemplo un algoritmo cuya función de complejidad está dada por $f(n) = 2n^4 + 2n^2 + 1$, veamos que $f \in O(n^4)$ utilizando el método anterior. Notemos que para $n > 1$ se cumple que $n^2 < n^4$ y que $1 < n^4$, luego podemos acotar el valor de $f(n)$ como sigue:

$$f(n) = 2n^4 + 2n^2 + 1 \leq 2n^4 + 2n^4 + n^4 = 5n^4$$

así se tiene que para las constantes $M = 5$ y $k = 1$ se cumple que

$$f(n) \leq Mn^4$$

para todo $n \geq k$ y $f \in O(n^4)$.

Como se mencionó anteriormente, podemos encontrar otro par de testigos para esta relación, tomemos por ejemplo $k' = 2$, así para $n > k'$ se tiene que

$$f(n) = 2n^4 + 2n^2 + 1 \leq 2n^4 + n^4 + n^4 = 4n^4$$

luego la constante $M' = 4$ funciona también como testigo de la relación. Nótese con esto que M' no necesariamente tiene que ser mayor que M.

Puede verse que $f(n) \in O(n^m)$ sólo para $m \geq 4$, pero como se mencionó anteriormente, se busca "la mejor" g para la cual la relación se cumpla. Como ejemplo de esto, mostremos que la función f definida anteriormente es $O(n^5)$, en efecto, para $n > 2$ se tiene que $n^5 > 2n^4$, luego

$$f(n) = 2n^4 + 2n^2 + 1 \leq n^5 + n^5 + n^5 = 3n^5$$

de donde $k = 2$ y $M = 3$ son testigos de la relación $f \in O(n^5)$. Sin embargo, dado que se busca la función de menor orden que acote a f, lo conveniente en este caso es considerar a f de orden $O(n^4)$.

Nótese también que dado que $n^4 \leq 2n^4 + 2n^2 + 1$ para $n \geq 1$, se cumple que $n^4 \in O(f)$, esto es, las funciones $f(n) = 2n^4 + 2n^2 + 1$ y $g(n) = n^4$ son del mismo orden.

El ejemplo anterior da pauta a una generalización importante que resulta útil para calcular el orden de las funciones de complejidad polinomiales. El enunciado de este resultado es el siguiente:

Teorema 1.1 *Sea* $f(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_o$ *con* $a_m, ..., a_0 \in \mathbb{R}$. *Entonces* $f \in O(n^m)$.

Demostración: Notemos que para $n > 1$ se cumple que

$$\begin{aligned} f(n) &= a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_o \\ &\leq \mid a_m \mid n^m + \mid a_{m-1} \mid n^{m-1} + ... + \mid a_1 \mid n + \mid a_o \mid \\ &= n^m(\mid a_m \mid + \mid \tfrac{a_{m-1}}{n} \mid + \cdots + \mid \tfrac{a_1}{n^{m-1}} \mid + \mid \tfrac{a_0}{n^m} \mid) \\ &\leq n^m(\mid a_m \mid + \mid a_{m-1} \mid + \cdots + \mid a_1 \mid + \mid a_0 \mid). \end{aligned}$$

Esto es, para $M = \mid a_m \mid + \mid a_{m-1} \mid + \cdots + \mid a_1 \mid + \mid a_0 \mid$ y $n > 1$ se cumple que $f(n) \leq Mn^m$, de donde $f \in O(n^m)$. ■

Cabe hacer una distinción entre la complejidad de un problema específico y la complejidad de un algoritmo que lo resuelve. Entendamos la complejidad de un problema como la complejidad del algortimo "más eficiente" con el que se llega a la solución.

A continuación veamos unos ejemplos que ilustran la manera de calcular la O para las funciones de complejidad de algunos problemas.

Ejemplos:

1. Consideremos el problema de la suma de los primeros n enteros positivos. Dado que

$$1 + 2 + \cdots + n \leq n + n + \cdots + n = n^2,$$

se tiene que $1 + 2 + \cdots + n \in O(n^2)$, tomando las constantes $M = 1$ y $k = 1$.

2. Consideremos la función factorial $f(n) = n!$. Notemos que para $n \geq 1$ se cumple que

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \leq n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^n,$$

de donde, con $M = 1$ y $k = 1$ como testigos, la relación $n! \in O(n^n)$ se cumple.

3. Consideremos ahora la función $f(n) = \log(n!)$. De la relación $n! \leq n^n$ del ejemplo anterior se tiene que $\log(n!) \leq \log(n^n) = n\log(n)$, de donde $\log(n!) \in O(n\log(n))$.

4. Utilizando inducción matemática puede probarse que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n < 2^n$. De aquí es fácil deducir que con $k = 1$ y $M = 1$ como testigos, $n \in O(2^n)$. Tomando logaritmo base 2 en la desigualdad anterior, se tiene que $\log_2(n) < n$, luego $\log_2(n) \in O(n)$, nuevamente con $M = k = 1$ como testigos.

Para logaritmos base $b \neq 2$ se tiene que

$$\log_b(n) = \frac{\log_2(n)}{\log_2(b)} < \frac{n}{\log_2(b)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, tomando $M = \frac{1}{\log_2(b)}$ y $k = 1$ como testigos se obtiene nuevamente la relación $\log_b(n) \in O(n)$.

Cota inferior: Notación Omega

En la sección anterior se mostró que la notación O ofrece una manera efectiva de acotar superiormente las funciones de complejidad para valores grandes de n. Sin embargo también en muchas ocasiones se requiere acotar inferiormente la función de complejidad, utilizando otra función de expresión más simple. Con el objeto de atender esta necesidad, se ha introducido la notación omega que se define a continuación.

Definición 1.2 *Sean $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, se dice que $f(n)$ es $\Omega(g(n))$ si existen constantes k y M tales que*

$$f(n) \geq Mg(n)$$

para todo $n > k$.

Puede verse que hay una fuerte relación entre la notación O y la notación Ω. Esta relación está enunciada en la siguiente proposición, la cual es fácil de verificar.

Proposición 1.1 *Dadas las funciones $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, f es $\Omega(g)$ si y sólo si g es $O(f)$.*

Mostremos un ejemplo para ilustrar la forma de encontrar las cotas Ω.

Ejemplo: Consideremos la función $f(n) = 5n^4 + 3n^3 + 2n$. Mostremos que ésta es $\Omega(n^4)$. En efecto, nótese que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$f(n) = 5n^4 + 3n^3 + 2n \geq 5n^4$$

así, tomando a $k = 1$ y $M = 5$ como testigos, se cumple la relación $f(n) \in \Omega(n^4)$. Por la proposición anterior, esto puede deducirse también probando que $g(n) = n^4$ es $O(f(n))$, lo cual se satisface tomando $M = 1$ y $k = 1$ como testigos.

Notación Zeta

Tanto la notación O como la Ω proporcionan una buena referencia para entender el crecimiento de las funciones. Sin embargo, lo ideal sería poder relacionar ambas notaciones para establecer el órden de crecimiento de las funciones, esto es, encontrar una función g tal que multiplicada por algunas constantes, acote tanto inferiormente como superiormente a la función f para valores grandes de n. La notación Zeta ofrece precisamente esto, y se define de la manera siguiente.

Definición 1.3 *Sean $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, decimos que f es $\Theta(g)$ si f es $O(g)$ y f es $\Omega(g)$. En este caso se dice que f es del orden de g.*

La definición anterior dice que si f es $\Theta(g)$ entonces existen constantes M_1, M_2 y k tales que

$$M_1 g(n) \leq f(n) \leq M_2 g(n)$$

para todo $n > k$.

Proposición 1.2 *Si f es $\Theta(g)$ entonces g es $\Theta(f)$.*

La proposición anterior es trivial, sin embargo resulta de importancia pues sienta la noción de equivalencia (relación de equivalencia) de funciones de complejidad respecto a la notación zeta, debido a que dota a la relación de simetría.

Al igual que en las otras notaciones, se busca que la función de referencia $g(n)$ tenga una representación simple, para así facilitar la clasificación respecto al órden de las funciones. A continuación mostraremos algunos ejemplos sobre la notación Θ.

Ejemplos:

1. Consideremos nuevamente la suma de los primeros n enteros positivos, esto es, $f(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n$. Veamos si este problema es de orden n^2. Ya se ha mostrado anteriormente que f es $O(n^2)$, resta probar que f es $\Omega(n^2)$ y para ello es suficiente encontrar una constante M tal que $f(n) \geq Mn^2$ para valores de n lo suficientemente grandes. Para encontrar esta constante M, consideremos la sumatoria de los enteros mayores que $\frac{n}{2}$ y acotemos inferiormente la sumatoria total por esta sumatoria reducida, es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} j \geq \sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} j \geq \sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} \left[\frac{n}{2}\right] = \left(n + 1 - \left[\frac{n}{2}\right]\right)\left[\frac{n}{2}\right] \geq \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4},$$

(donde [n/2] representa la parte entera de n/2). Así $M = \frac{1}{4}$ es una constante que permite establecer la relación $f \in \Omega(n^2)$, y cumpliéndose ambas relaciones se concluye que f es $\Theta(n^2)$.

2. Probemos que la función $f(n) = 5n^3 + 4n \log_2(n)$ es de orden $g(n) = n^3$. Comencemos por probar que $f(n)$ es $O(n^3)$, en efecto, ya se ha probado que $\log_2(n) < n$, de donde para $n > 1$ se tiene que $4n \log_2(n) < 4n^2 < 4n^3$. De aquí

$$f(n) = 5n^3 + 4n \log_2(n) < 5n^3 + 4n^3 = 9n^3$$

de donde, tomando $k = 1$ y $M = 9$ como testigos, se cumple la relación $f(n)$ es $O(n^3)$.

Resta probar que f es $\Omega(n^3)$, para ello utilicemos la proposición 1.1, esto es, probemos que n^3 es $O(f)$. Esto es claro, ya que

$$n^3 < 5n^3 + 4n\log_2(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, f es $\Theta(n^3)$.

Para la notación Θ existe un resultado importante análogo al que se probó anteriormente para la notación O. La importancia de este resultado reside en el hecho de que ofrece una manera sencilla de calcular el orden de una función polinomial, considerando solamente el grado del polinomio. Este resultado se enuncia de la manera siguiente y es fácil de verificar.

Proposición 1.3 *Sea* $f(n) = a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ *donde* $a_i \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, ..., m$ *y* $a_m \neq 0$. *Entonces* f *es* $\Theta(n^m)$.

1.1.2. Combinaciones de funciones

Existen algoritmos que llevan a cabo procesos separados de manera simultánea, es decir, dividen el problema que buscan resolver en sub-problemas que resuelven independientemente. Obtener una estimación de su notación O requiere hacer el cálculo de la notación O de cada uno de dichos procesos y combinar las estimaciones. En muchas ocasiones es útil hacer el cálculo del comportamiento de la notación O para la suma y el producto de funciones cuyas estimaciones O son conocidas.

Sean $f_1, f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ con $f_1 \in O(g_1)$ y $f_2 \in O(g_2)$, esto es, existen $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^+$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$f_1(n_1) \leq M_1 \; g_1(n_1) \quad \text{y} \quad f_2(n_2) \leq M_2 \; g_2(n_2),$$

para $n_1 \geq k_1$ y $n_2 \geq k_2$.

Estimemos la suma de $f_1(n)$ y $f_2(n)$. Nótese que para $n \geq \text{máx}(k_1, k_2)$,

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2)(n) &= f_1(n) + f_2(n) \\
&\leq M_1 \; g_1(n) + M_2 \; g_2(n) \\
&\leq M_1 \,\text{máx}\{g_1(n), g_2(n)\} + M_2 \,\text{máx}\{g_1(n), g_2(n)\} \\
&= (M_1 + M_2) \,\text{máx}\{g_1(n), g_2(n)\}.
\end{aligned}$$

Con esto tenemos que $f_1 + f_2 \in O(\text{máx}\{g_1(n), g_2(n)\})$.

Estimemos ahora el orden del producto de $f_1(n)$ y $f_2(n)$. Para $n \geq \text{máx}(k_1, k_2)$,

$$(f_1 f_2)(n) \;=\; f_1(n) f_2(n) \;\leq\; M_1\; g_1(n)\; M_2\; g_2(n) = \; M_1 M_2\; g_1 g_2(n),$$

de aquí se sigue que $f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$.

De este modo, por ejemplo, puede deducirse fácilmente el orden de la función $f(n) = 5n^3 \log_2(n!) + (2n^2 + 4)\log_2(n)$:

Como se mencionó anteriormente, $\log_2(n!) \in O(n \log_2(n))$ y $5n^3 \in O(n^3)$, de donde $5n^3 \log_2(n!) \in O(n^4 \log_2(n))$. Por otro lado, como $2n^2 + 4 \in O(n^2)$, se tiene que $(2n^2 + 4)\log_2(n) \in O(n^2 \log_2(n))$. Finalmente, al combinar la suma se tiene que $f(n) = 5n^3 \log_2(n!) + (2n^2 + 4)\log_2(n) \in O(n^4 \log_2(n))$.

En la práctica es común trabajar únicamente con la notación O, pues basta con poder garantizar que el crecimiento de la función de complejidad de un algoritmo está acotado superiormente por una función de crecimiento conocido (y preferentemente no tan acelerado) para decidir si es conveniente trabajar con dicho algoritmo o no.

A continuación detallaremos algunos algoritmos de ordenación y búsqueda comunes y deduciremos su función de complejidad y su notación O, con el fin de ejemplificar el cálculo de dichas funciones y la forma en que estas son útiles para realizar comparaciones en cuanto a la eficiencia de distintos algoritmos que resuelven un mismo problema.

1.1.3. Funciones de complejidad de algunos algoritmos

Con la intención de ilustrar los conceptos anteriores, mencionemos como ejemplo el cálculo y clasificación respecto al orden de las funciones de complejidad de algunos algoritmos comunes.

Búsquedas

Un problema de búsqueda se define como el problema de localizar un elemento x en una lista de elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ o determinar si dicho elemento no está en la lista. Un algoritmo que resuelve este problema debe devolver la posición del elemento en la lista o un valor indicativo (por ejemplo 0) en caso de que el elemento no se encuentre en dicha lista. Existen diversos algoritmos para resolver este tipo de problemas, algunos de ellos son más eficientes que otros en cuanto a complejidad temporal. A continuación se mencionarán y compararán dos de ellos.

Búsqueda Lineal: Este algoritmo realiza comparaciones entre el elemento buscado x y cada uno de los elementos de la lista $a_1, a_2, ..., a_n$ en el orden en que estos aparecen, es decir, se comienza por comparar x con a_1, de ser iguales el algoritmo termina devolviendo el valor 1, de lo contrario continúa comparando x con el siguiente elemento, a_2. El algorirmo continúa hasta encontrar un valor i tal que $x = a_i$ o hasta determinar que x no está en la lista tras revisar todos los elementos.

Supongamos que se desea encontrar el elemento x en una lista de tamaño n, el algoritmo realiza dos comparaciones para cada elemento que revisa, una para determinar si x es igual a dicho elemento y otra para verificar que el elemento revisado no sea el último en la lista y continuar la búsqueda. Así, si el elemento x se encuenta en la j-ésima posición de la lista, se habrán realizado hasta entonces $2j + 1$ comparaciones, debido a que aun cuando el elemento es encontrado, se comprueba que no se ha llegado al final de la lista. En el peor de los casos, cuando el elemento x no se encuentra en la lista, ha sido necesario revisar uno a uno los n elementos que la conforman, lo cual conduce a un total de $2n + 1$ comparaciones. Al hacer el análisis de complejidad es necesario considerar el peor de los casos, ya que ahí se tienen todas las operaciones necesarias para garantizar que se obtendrá una solución al problema. Por tanto la función de complejidad de este algoritmo es $f(n) = 2n + 1$, la cual es de orden $O(n)$.

Otro caso importante a considerar en el análisis de complejidad del algoritmo es el llamado caso promedio, este se calcula como el promedio de operaciones que el algoritmo necesita realizar para resolver un problema de tamaño fijo considerando todas las posibles entradas. En este caso, calculémoslo suponiendo que el elemento buscado x se encuentra en la lista. Las entradas posibles (listas arbitrarias con la condición de contener a x) sólo difieren en una característica importante: la posición en la que se ubica x, por tanto se consideran n entradas posibles distintas. Ahora, en la revisión de la j-ésima entrada de la lista se han hecho $2j + 1$ comparaciones, por tanto la función de complejidad para el caso promedio sería

$$f(n) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(2j+1)}{n} = \frac{n + 2\sum_{j=1}^{n} j}{n} = 1 + \frac{2}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = n + 2$$

la cual es igualmente de orden $O(n)$.

Búsqueda Binaria: Esta búsqueda puede hacerse cuando los elementos de la lista están ordenados. Comienza comparándose x con el elemento central de la lista $a_1, a_2, ..., a_n$, sea éste a_m donde m es igual a la parte entera de $\frac{n+1}{2}$. De esta comparación se tienen los siguientes casos: si $x \leq a_m$, la búsqueda se restringe a la lista $a_1, a_2, ..., a_m$ ignorando el resto de los elementos, en caso contrario, la lista se reduce a $a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_n$ y la búsqueda continúa allí. Este proceso se repite comparando x con el término central de la lista reducida, determinando en cuál de las dos mitades de ésta se encuentra y continuando la búsqueda de x en la nueva restricción. El algoritmo termina cuando la lista reducida cuenta con un sólo elemento a_i, y se determina si este elemento es igual a x o si x no se encuentra en la lista; así, en caso de encontrarse x, el algoritmo devuelve el valor de i.

Supongamos que se necesita encontrar el elemento x en una lista de tamaño n. Debido a que este tipo de búsqueda va recortando la lista en dos para cada iteración, es conveniente considerar $k = \log_2 n$ para así tener $n = 2^k$. En caso de que k no sea entero, puede acotarse n de la forma $2^k < n < 2^{k+1}$ y así considerar el menor entero i tal que 2^i es mayor o igual que n.

En cada paso del algoritmo, se hace una revisión a la lista restringida para ver si esta cuenta con más de un elemento y de ser así, se busca el elemento central para ser comparado con el elemento buscado x, (esto es, en cada paso se realizan dos operaciones). Dependiendo del resultado de esta comparación la búsqueda se restringe a una de las dos mitades de la lista original, por tanto puede considerarse que esta lista reducida es de longitud 2^{k-1}, y en esta lista nuevamente se realizan dos comparaciones. Puede verse entonces que antes de llegar a tener una lista reducida de longitud uno (2^0), son necesarias $2k = 2\log_2 n$ comparaciones. Por tanto la función de complejidad de este algoritmo es $f(n) = 2\log_2 n$, la cual es de orden $O(\log_2(n))$. De aquí puede notarse que la búsqueda binaria es más eficiente que la búsqueda lineal, en el peor caso.

Búsqueda del mayor elemento: Éste es un problema de búsqueda particular, en el cual el objetivo es encontrar el mayor elemento en una lista de elementos comparables, bajo el supuesto de que los elementos listados no están ordenados. Este algoritmo comienza por considerar el primer elemento listado como el "máximo provisional" y tras verificar que éste no es el último elemento de la lista, lo compara con el siguiente para establecer cuál de ellos es de mayor valor y así realizar una actualización del máximo provisional de ser necesario; el algoritmo continúa hasta haber revisado todos los elementos de la lista en busca del de mayor valor.

Analicemos el número de comparaciones que realiza este algoritmo para encontrar el elemento máximo en una lista de tamaño n, como medida de su complejidad temporal. Debido a que para cada elemento x_i de la lista, donde $i = 1, ..., n$, el algoritmo hace la verificación de que este no sea el último elemento de la lista y posteriormente lo compara con el máximo provisional, para cada elemento a partir del segundo se realizan dos comparaciones, además desde el primer elemento se verifica que no se haya llegado al final de la lista, por tanto en total se requieren $2(n-1)+1 = 2n-1$ operaciones. Así, la función de complejidad de este algoritmo es $f(n) = 2n-1$, y esta es de orden $O(n)$.

Ordenación

Cuando se cuenta con un conjunto de elementos comparables, en los cuales es posible establecer un orden, es común requerir que estos se encuentren de forma ordenada. Una ordenación consiste en construir una lista en la cual los elementos se encuentren dispuestos en forma creciente (o decreciente).

Debido a la utilidad de la ordenación, se han desarrollado muchos algoritmos que resuelven este problema, algunos de ellos más eficientes que otros y que funcionan mejor para algunos casos específicos. A continuación se muestran dos de ellos.

Método de la burbuja: Este algoritmo consiste en la comparación de elementos adyacentes en la lista, con esta comparación puede hacerse o no un intercambio de estos elementos dependiendo de cuál de ellos sea mayor. Generalmente se colocan en forma creciente. Una vez ordenados estos dos elementos, se prosigue haciendo la revisión y comparación de los siguientes dos elementos adyacentes en la lista para colocarlos en orden. Esto es, en una lista de tamaño n, para cada $i = 1, ..., n-1$, se compara el elemento i-ésimo con el $i + 1$-ésimo.

Es de esperarse que no sea suficiente con hacer una sola revisión completa de la lista, sino que sea necesario iterar varias veces hasta que no haya elementos desordenados, es por eso que aunque simple, el algoritmo no es muy eficiente.

Analicemos la complejidad del peor caso para este algoritmo. El algoritmo garantiza que para la revisión j-ésima de la lista, los primeros $j-1$ elementos están bien ordenados, y durante esta revisión se realizan $n-j$ comparaciones, por tanto la función de complejidad del peor caso quedaría descrita como sigue:

$$f(n) = \sum_{j=1}^{n-1}(n-j) = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

Y como sabemos, esta función es de orden $O(n^2)$.

Ordenación por inserción: Este tipo de ordenación comienza por comparar el segundo elemento de la lista con el primero para colocarlos en el orden correcto de forma creciente, a continuación se toma el tercer elemento y se compara con los dos anteriores para determinar su posición respecto a ellos y se inserta en dicha posición; de este modo los primeros tres elementos ya se encuentran ordenados respecto a ellos mismos. El algoritmo continúa hasta haber revisado e insertado todos los elementos de la lista en su posición correcta. En otras palabras, en una lista de longitud n, para cada $j = 1, ...n$, el algoritmo recurre a una variante de la búsqueda lineal sobre los primeros j

elementos para determinar la posición correcta del elemento j-ésimo y así colocarlo en su sitio correspondiente, de este modo, la lista se encuentra parcialmente ordenada hasta el elemento j y completamente ordenada cuando $j = n$.

Dado que este método coloca al j-ésimo elemento en su posición correcta respecto a los primeros $j-1$ elementos ejecutando una búsqueda lineal, para el acomodo del j-ésimo elemento se requieren, en el peor de los casos, j comparaciones, esto conduce a la función de complejidad siguiente:

$$f(n) = 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

la cual es de orden $O(n^2)$.

Algunos de los algoritmos anteriores tienen una característica que es de especial interés en este trabajo de tesis: dividen recursivamente la tarea a realizar con el fin de reducir el tamaño del problema y acelerar el proceso de ejecución. En general, el análisis de complejidad de este tipo de algoritmos es menos directo y puede requerir el uso de otro tipo de herramientas, algunas de las cuales se exponen en capítulos posteriores y están basadas en las propiedades del espacio de complejidad (que será definido y estudiado posteriormente en el capítulo 3).

Específicamente, las aplicaciones del espacio de complejidad que se abordarán en este trabajo están orientadas al cálculo del orden de las funciones de complejidad de algunos tipos de algoritmos divide y vencerás probabilistas, por lo cual, la siguiente sección presenta nociones introductorias sobre estos tipos de algoritmos.

1.2. Algoritmos probabilistas

Existen algunos problemas en los cuales encontrar una solución óptima puede tomar mucho tiempo y el beneficio que el óptimo ofrece no difiere mucho del obtenido con otras soluciones alternativas. En estos casos muchas veces es conveniente desarrollar un algoritmo que sea capaz de tomar decisiones aleatorias y probarlas, en vez de ocupar mucho tiempo calculando la mejor alternativa. Este es uno de los fundamentos de los algoritmos probabilistas, están dotados de la capacidad de manejar la incertidumbre y de encontrar soluciones de manera relativamente rápida comparados con los algoritmos deterministas.

Otra característica importante de estos algoritmos es que pueden comportarse de diferente manera y devolver soluciones distintas para el mismo conjunto de datos, en diferentes ejecuciones. Esto conduce a otra posible ventaja de este tipo de algoritmos: en caso de existir muchas soluciones para el problema, el algorimo puede obtener muchas de ellas ejecutándose varias veces con los mismos datos, a diferencia de un algoritmo determinista, el cual obtendría siempre la misma solución.

Pueden mencionarse muchas otras diferencias entre los algoritmos deterministas y los probabilistas, por ejemplo, en general en los primeros se elimina la posibilidad de que se realicen operaciones inválidas o de que se entre a un bucle infinito, sin embargo esto es permisible en los segundos manteniendo muy baja la probabilidad de ocurrencia: si llegara a darse el caso de un estancamiento en el algoritmo, después de determinado tiempo éste se aborta y se repite su ejecución con los mismos datos. Los algoritmos probabilistas tienen también la posibilidad -a diferencia de los deterministas- de encontrar soluciones equivocadas; se busca que la probabilidad de que esto ocurra sea muy baja, y es posible reducirla ejecutando sucesivamente el algoritmo con los mismos datos hasta obtener el grado de confianza deseado. Para problemas en los cuales no se tiene absoluta certeza sobre la veracidad o el comportamiento de los datos de las posibles soluciones, muchas veces es más conveniente ejecutar un algoritmo probabilista que encuentre la solución relativamente rápido y con cierta probabilidad baja de error, a recurrir a uno determinista que requiera mucho tiempo de cálculo e igualmente pueda caer en una solución erronea.

Debido a la aleatoriedad en el comportamiento de estos algoritmos, es de esperarse que resulte más difícil el análisis de su complejidad. A continuación mencionaremos algunos ejemplos, con el fin de ilustrar su forma de proceder. El ejemplo 1 es probablemente uno de los más antiguos.

Ejemplos:

1. Supongamos que se tiene una aguja de longitud λ y se arroja sobre un suelo hecho de tiras de madera de ancho $\omega \geq \lambda$. De acuerdo al teorema de Buffon, la probabilidad de que la aguja toque más de una tira de madera es de $\rho = \frac{2\lambda}{\omega\pi}$. Si $\lambda = \frac{\omega}{2}$, entonces

$\rho = \frac{1}{\pi}$. Arrojando la aguja sobre el suelo un número n de veces suficientemente grande y contando la cantidad k de ocasiones en las que ésta cae sobre más de una tira de madera, es posible estimar el valor de π:

$$k \approx \frac{n}{\pi} \Longrightarrow \pi \approx \frac{n}{k}.$$

Esta no es una manera conveniente de resolver el problema debido a la lentitud que implica el conteo, sin embargo probablemente no haya algún algoritmo determinista capaz de resolverlo.

2. Supongamos que se desea calcular la integral I de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continua en el intervalo $[a, b]$. Esto es, buscamos calcular

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Nótese que la altura media de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b) puede aproximarse como $h_m = \frac{I}{b-a}$. Un posible algoritmo probabilista para hacer este cálculo elige n valores aleatorios $x_i, i = 1, ..., n$ distribuidos uniformemente en el intervalo $(a, b]$, calcula $f(x_i)$, con $i = 1, ..., n$ y encuentra la media $m = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$ y la multiplica por $b - a$.

Puede verse que la varianza de esta estimación es inversamente proporcional al número n de muestras generadas, y que la distribución del estimador es cercana a la normal para valores grandes de n. Una versión determinista de este algoritmo consisitiría en elegir los puntos x_i equidistantes -a una distacia δ entre sí-, calcular $f(x_i)\delta$ para cada $i = 1, ..., n$ y hacer la suma de los n productos. Es de esperarse que este cálculo sea más preciso que el realizado por la versión probabilista, sin embargo es posible encontrar funciones con las cuales la versión determinista genere problemas, por ejemplo la función $f(x) = \sin^2(100!\pi x)$. En muchas ocasiones es conveniente desarrollar algoritmos híbridos, que combinen eficientemente ambos tipos de algorimos.

Lo anterior sirve para dar un bosquejo general sobre la importancia de los algoritmos probabilistas y definirlos de forma muy general, sin embargo existen algoritmos probabilistas muy complejos. Específicamente, el tipo de algoritmos probabilistas cuya complejidad se estudiará en el capítulo de aplicaciones es el de los algoritmos divide y vencerás probabilistas. Sin hacer mención al funcionamiento de algunos de estos algoritmos particulares, se aprovechará su estructura recursiva conocida para deducir resultados importantes respecto a su complejidad. Para poder abordar estos algoritmos, comenzaremos por presentar los algoritmos divide y vencerás en su forma general.

1.3. Algoritmos divide y vencerás

Antes de definir directamente los algoritmos divide y vencerás, presentaremos una introducción sobre relaciones de recurrencia. Esto es de gran importancia dado que cada uno de estos algoritmos tiene asociada una de ellas, cuya solución resulta ser precisamente la función de complejidad del algoritmo. Cabe mencionar que los algoritmos divide y vencerás pueden clasificarse en dos categorías: los deterministas y los probabilistas. Sobre el caso particular de los segundos se ahondará en el último capítulo. En esta sección se tratará el caso general de los algoritmos divide y vencerás.

Relaciones de recurrencia

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real, una relación de recurrencia para esta sucesión es una ecuación que determina el término a_n en función de los términos anteriores, a partir de algún a_{n_0} inicial cuyo valor es conocido. Una sucesión es una solución de una ecuación de recurrencia si sus términos satisfacen la relación para todo $n \geq n_0$.

Por ejemplo, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n = 3n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ es solución de la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n \geq 2$. En efecto,

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n = a_n$$

Las condiciones iniciales y la relación de recurrencia determinan de manera única una sucesión, proporcionando una definición recursiva de ésta.

Existen muchos problemas que pueden resolverse implementando algoritmos que hacen uso de estas relaciones de recurrencia. Como ejemplo ilustrativo, podemos suponer que se desea calcular la cantidad de elementos en la hora n de una población que se duplica cada hora, sabiendo que en el instante inicial la población contaba con 5 elementos. Esto puede ser modelado por la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1}$ con condición inicial $a_{n_0} = 5$, y así utilizar un algoritmo que calcule el tamaño de la población término a término hasta llegar al instante n deseado.

Dado que las relaciones de recurrencia son la base de los algoritmos recursivos y los divide y vencerás, mencionaremos algunos otros ejemplos breves.

Ejemplos:

1. Supongamos el siguiente problema: una pareja de conejos recién nacidos son soltados en una isla, la pareja no puede reproducirse hasta cumplidos los dos meses de edad y una vez cumplidos, tienen como descendencia otra pareja de conejos. Las siguientes generaciones de conejos se reproducen de la misma forma en el mismo periodo. Se desea calcular el número de parejas de conejos al cabo del n-ésimo mes suponiendo que ningún conejo muere. Veamos que esta relación de recurrencia define la sucesión de Fibonacci.

En el primer y segundo mes el número de parejas de conejos es igual a 1, pues la primera pareja no se ha reproducido aún, esto es $f_1 = f_2 = 1$. Notemos que la cantidad de parejas que hay en el mes n es igual a la cantidad de parejas que había en el mes anterior, f_{n-1}, -pues estamos bajo el supuesto de que los conejos no mueren- más la cantidad de parejas nuevas (la cual es igual a la cantidad de parejas que pueden reproducirse, es decir los que tienen ya más de dos meses de edad, esta cifra está dada por f_{n-2}). Así, la relación de recurrencia sería $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, que es precisamente la que define la sucesión de Fibonacci.

2. Supongamos que una persona hace un depósito bancario de 10,000 pesos en su cuenta de ahorros, la cual le ofrece un 12 por ciento de interés anual sobre el monto actual. Se desea calcular la cantidad de dinero, P_n, que resultará en la cuenta al cabo del año n. La relación de recurrencia que define esta situación es $P_n = P_{n-1} + (0{,}12)P_{n-1} = (1{,}12)P_{n-1}$, con condición inicial $P_0 = 10,000$. Puede definirse una fórmula no recursiva para encontrar el valor de P_n, nótese que dado que

$$\begin{aligned} P_1 &= (1{,}12)P_0 \\ P_2 &= (1{,}12)P_1 = (1{,}12)^2 P_0 \\ P_3 &= (1{,}12)P_2 \ = (1{,}12)^3 P_0 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

se sigue que $P_n = (1{,}12)^n P_0$. Se puede probar facilmente la validez de esta fórmula utilizando inducción.

3. Las torres de Hanoi Consideremos el problema de las torres de Hanoi definido de la manera usual. Sea H_n el número de movimientos necesarios para resolver las torres con n discos. Busquemos una relación de recurrencia que defina la sucesión (H_n).

Supongamos que se tienen los n discos colocados -en orden correcto- en la barra inicial, como se define el instante inicial en el problema. Los $n - 1$ discos superiores pueden moverse a la barra auxiliar, siguiendo las reglas del juego, empleando H_{n-1} movimientos. El disco más grande continúa en la barra inicial y puede moverse a la barra final empleando un sólo movimiento. A continuación, para llevar el resto de los discos a la barra final se requieren nuevamente H_{n-1} movimientos, y esto finaliza el juego. Así puede verse que $H_n = 2H_{n-1} + 1$, con $H_1 = 1$, y puede probarse también que el problema no puede resolverse con menos movimientos que los descritos. Busquemos ahora una fórmula explícita para el cálculo de H_n:

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 = 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\;\;\vdots \\ &= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1. \end{aligned}$$

La validez de esta fórmula es fácil de verificar utilizando inducción.

Como ilustran los ejemplos anteriores, dada una relación de recurrencia muchas veces es posible encontrar una fórmula explícita (es decir, una fórmula que ya no esté definida como función de términos anteriores) para definir los términos de la sucesión que es la solución. Existen ciertos tipos de relaciones de recurrencia que pueden expresarse de esa forma de manera sistemática, un ejemplo de ellos se da con la siguiente definición.

Definición 1.4 *Una relación de recurrencia se dice lineal y homogénea de orden k con coeficientes constantes si puede expresarse de la forma*

$$a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \cdots + m_k a_{n-k},$$

donde $m_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., k$ y $m_k \neq 0$.

Nótese que las relaciones de recurrencia de los ejemplos 1 y 2 son de este tipo, sin embargo la relación del ejemplo 3 no es homogénea.

El enfoque comunmente utilizado para resolver este tipo de relaciones de recurrencia consiste en buscar soluciones de la forma $a_n = r^n$ donde r es una constante. Obsérvese que esto ocurre si y sólo si

$$r^n = m_1 r^{n-1} + m_2 r^{n-2} + \cdots + m_k r^{n-k},$$

dividiendo ambos lados entre r^{n-k} y acomodando se llega a

$$r^k - m_1 r^{k-1} - m_2 r^{k-2} - \cdots - m_{k-1} r^1 - m_k = 0,$$

a esta última ecuación se le llama ecuación característica de la relación de recurrencia, y a sus soluciones, raíces características. A continuación se enuncia un resultado general para encontrar la fórmula explícita de este tipo de ecuaciones de recurrencia. Dado que éste no es el tema central de este trabajo, la prueba se omite.

Teorema 1.2 *Sea la relación de recurrencia lineal homogénea de orden k*

$$a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \cdots + m_k a_{n-k}$$

con $m_1, m_2, ..., m_k \in \mathbb{R}$ y $m_k \neq 0$ y

$$r^k - m_1 r^{k-1} - m_2 r^{k-2} - \cdots - m_{k-1} r^1 - m_k = 0$$

su ecuación característica. Supongamos que esta ecuación tiene t raíces distintas, $r_1, r_2, ..., r_t$ con multiplicidades $l_1, l_2, ..., l_t$ respectivamente y tales que $l_i \geq 1$ para $i = 1, .., t$ y $l_1 + l_2 + \cdots + l_t = k$. Entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de la ecuación de recurrencia si y sólo si

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,l_1-1} n^{l_1-1}) r_1^n + \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,l_t-1} n^{l_t-1}) r_t^n,$$

para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y donde $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ con $i = 1, ..., t$ y $j = 0, ..., l_t - 1$.

Mostremos un ejemplo sencillo para ilustrar la utilidad de este teorema:

Supongamos que se desea encontrar la solución de la ecuación de recurrencia definida por $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, y las condiciones iniciales $a_0 = 1, a_1 = -2$ y $a_2 = -1$. La ecuación característica de esta relación es

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0$$

la cual tiene una única raíz, $r = -1$, de multiplicidad 3. De acuerdo al teorema anterior, las soluciones de la relación de recurrencia son de la forma

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \alpha_{1,2} n^2)(-1)^n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1} n (-1)^n + \alpha_{1,2} n^2 (-1)^n.$$

Para calcular las constantes $\alpha_{i,j}$ utilizamos las condiciones iniciales:

$$a_0 = \alpha_{1,0} = 1$$

$$a_1 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} = -2$$

$$a_2 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} = -1$$

de donde $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3$ y $\alpha_{1,2} = -2$. Por tanto la solución de la ecuación de recurrencia está dada por

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n.$$

Existe otro método para resolver relaciones de recurrencia lineales no homogéneas con coeficientes constantes, es decir, relaciones de recurrencia de la forma

$$a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \cdots + m_k a_{n-k} + F(n),$$

donde $m_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., k$ y $F(n)$ es una función no nula. A la parte de la relación $a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \cdots + m_k a_{n-k}$, se le llama relación de recurrencia homogénea asociada.

Los siguientes teoremas muestran cómo son las soluciones de este tipo de relaciones de recurrencia.

Teorema 1.3 *Sea* $(a_n^{(P)})$ *una solución particular de la relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes. Entonces toda solución es de la forma* $(a_n^{(P)} + a_n^{(h)})$*, donde* $(a_n^{(h)})$ *es solución de la relación de recurrencia homogénea asociada.*

Demostración: Dado que $(a_n^{(P)})$ es una solución particular de la relación de recurrencia lineal no homogénea, se tiene que

$$a_n^{(P)} = m_1 a_{n-1}^{(P)} + \cdots + m_k a_{n-k}^{(P)} + F(n).$$

Claramente, si (b_n) es otra solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea, entonces $b_n = m_1 b_{n-1} + m_2 b_{n-2} + \cdots + m_{n-k} b_{n-k} + F(n)$. Restando ambas igualdades se tiene que

$$b_n - a_n^{(P)} = m_1(b_{n-1} - a_{n-1}^{(P)}) + m_2(b_{n-2} - a_{n-2}^{(P)}) + \cdots + m_{n-k}(b_{n-k} - a_{n-k}^{(P)}).$$

Luego $(b_n - a_n^{(P)})$ es solución de la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, denotada por $(a_n^{(h)})$. Por tanto, $(b_n) = (a_n^{(P)} + a_n^{(h)})$. ∎

De acuerdo a este teorema, la clave para resolver la relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes está en encontrar una solución particular, y con ello contruir soluciones para la relación de recurrencia sumando soluciones de la relación homogénea asociada. Encontrar una solución particular no representa muchas complicaciones cuando $F(n)$ es un polinomio, tomemos como ejemplo la relación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ con la condición inicial $a_1 = 3$. La relación lineal homogénea asociada $a_n = 3a_{n-1}$ tiene soluciones de la forma $a_n = \alpha 3^n$ con α constante. Para la búsqueda de una solución particular, consideremos que dado que $F(n) = 2n$ es un polinomio de grado uno, es razonable buscar soluciones de la forma $cn+d$ donde c y d son constantes. Para verificar la existencia de este tipo de soluciones particulares, sustituimos $cn+d$ en la relación de recurrencia y así obtenemos $cn+d = 3(c(n-1)+d)+2n$, de donde $(2+2c)n+(2d-3c) = 0$. Con esto tenemos que $cn+d$ es una solución particular si y sólo si $c = -1$ y $d = -3/2$, con lo cual $a_n^{(P)} = -n-3/2$ es una solución particular. De acuerdo al teorema anterior, todas las soluciones son de la forma $-n-3/2+\alpha 3^n$. Finalmente, para encontrar el valor de α se utiliza la condición inicial $a_1 = 3$, sustituyendo se tiene que $3 = -1 - 3/2 + 3\alpha$, de donde $\alpha = 11/6$. Por tanto la solución buscada de la relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes es $a_n = -n-3/2+(11/6)3^n$.

El teorema siguiente da una guía para la búsqueda de soluciones particulares para algunos casos especiales de $F(n)$. La prueba de este resultado se omite en este trabajo.

Teorema 1.4 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = m_1a_{n-1} + m_2a_{n-2} + \cdots + m_ka_{n-k} + F(n)$, con $m_1, ..., m_k \in \mathbb{R}$ y $F(n)$ definida por $F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + \cdots + b_1n + b_0)s^n$, con $b_0, ..., b_t \in \mathbb{R}$. Si s no es raíz de la ecuación característica de la relación lineal homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma*

$$(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \cdots + p_1n + p_0)s^n.$$

Además, si s es una raíz de multiplicidad m de dicha ecuación característica, entonces existe una solución particular de la forma

$$n^m(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \cdots + p_1n + p_0)s^n.$$

Nótese que si s es una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica de la relación de recurrencia homogénea asociada, el factor n^m asegura que la solución particular propuesta no es una de las soluciones encontradas de la relación de recurrencia homogénea asociada.

Para ilustrar la aplicación de este teorema, tomemos como ejemplo la relación de recurrencia $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (n^2 + 1)3^n$. Nótese que la ecuación característica para la relación de recurrencia homogénea asociada $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ es $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$, la cual tiene una única raíz $r = 3$ de multiplicidad dos. Para aplicar el teorema es necesario verificar si s es o no raíz de la ecuación característica. En este caso $s = 3$ y como ya se vió, es raíz de multiplicidad dos de dicha ecuación, luego el teorema garantiza la existencia de una solución particular de la forma $a_n^{(P)} = n^2(p_2n^2 + p_1n + p_0)3^n$. Los valores de las p_i pueden encontrarse en algunos casos al sustituir la solución particular en la relación de recurrencia original.

Los resultados anteriores son de gran utilidad para la resolución de relaciones de recurrencia generales. Los algoritmos divide y vencerás suelen tener asociado un tipo especial de relaciones de recurrencia, las cuales se presentan a continuación acompañadas de resultados importantes para su resolución, o en su defecto, para el cálculo de su orden de complejidad en notación O.

Algoritmos divide y vencerás

Existen algunos algoritmos cuya estrategia consiste en dividir el problema en subproblemas de menor tamaño y resolverlos de forma separada. El objetivo de esta reducción es que los sub-problemas en los que se divide el problema original sean suficientemente simples para ser resueltos de forma sencilla, y posteriormente obtener la solución total del problema combinando las soluciones parciales. Esta es la estrategia que siguen los algoritmos recursivos: el problema se va reduciendo sucesivamente hasta llegar al caso base cuya solución es conocida, y a partir de allí se construye la solución del problema total. Un ejemplo de este tipo de algoritmos es la búsqueda binaria: la lista de búsqueda se va reduciendo sucesivamente a la mitad hasta obtener una lista de un sólo elemento. A este tipo de algoritmos se les llama algoritmos divide y vencerás.

Sea un problema de tamaño n, supongamos que el algortimo divide y vencerás divide este problema en a sub-problemas de tamaño $\frac{n}{b}$ donde, suponemos para simplificar, n es múltiplo de b. Supongamos además que se requieren $g(n)$ operaciones para combinar las soluciones de los subproblemas y así calcular la solución total. Entonces, el número de operaciones necesarias, $f(n)$, para resolver el problema original de tamaño n, satisface la siguiente relación de recurrencia

$$f(n) = af(\frac{n}{b}) + g(n),$$

la cual es denominada **relación de recurrencia de divide y vencerás.** Veamos algunos ejemplos de este tipo de relaciones de recurrencia para algunos algoritmos particulares.

Ejemplos:

1. Como ya se mencionó, la búsqueda binaria pertenece a este tipo de algoritmos. En ella, el problema de tamaño n se reduce a la mitad en cada iteración. Para lograr esta reducción se requieren dos operaciones: una para elegir en qué mitad de la lista se continuará la búsqueda y otra para verificar que esa sublista sea no vacía, por tanto la relación de recurrencia para este algoritmo es $f(n) = f(\frac{n}{2}) + 2$ para n par.

2. Un ejemplo similar consiste en la búsqueda de los elementos máximo y mínimo en una lista, utilizando un algoritmo que divide la lista en dos listas de igual tamaño (suponiendo que el tamaño n de la lista original es un número par), encuentra los elementos máximo y mínimo en ambas sublistas y luego los compara para determinar cuáles de ellos son el mínimo y el máximo global. Esto conduce a que la relación de recurrencia de este algoritmo es $f(n) = 2f(\frac{n}{2}) + 2$, cuando n es par.

3. Un ejemplo un poco más complejo está dado por un algoritmo divide y vencerás para agilizar la multiplicación de matrices. Utilizando la definición usual del producto, puede verse que la multiplicación de dos matrices de tamaño $n \times n$ requiere de $n^3 + n^2(n-1)$ operaciones, esto es, un algoritmo que resuelve este problema de forma usual es de orden $O(n^3)$. Existe un algoritmo divide y vencerás que resuelve de forma más eficiente este problema para n par, reduciéndolo a siete multiplicaciones de matrices de tamaño $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ y a quince sumas de matrices de igual tamaño, lo que conduce a la relación de recurrencia

$$f(n) = 7f(\frac{n}{2}) + 15\frac{n^2}{4}.$$

Resolver este tipo de relaciones de recurrencia puede resultar muy complicado, sin embargo es posible encontrar estimaciones respecto al orden de las soluciones. Esto puede hacerse de la manera siguiente: supongamos que f satisface la relación de recurrencia

$$f(n) = af(\frac{n}{b}) + g(n)$$

donde $n = b^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned}
f(n) &= af(\tfrac{n}{b}) + g(n) = a(af(\tfrac{n}{b^2}) + g(\tfrac{n}{b})) + g(n) \\
&= a^2 f(\tfrac{n}{b^2}) + ag(\tfrac{n}{b}) + g(n) \\
&= a^3 f(\tfrac{n}{b^3}) + a^2 g(\tfrac{n}{b^2}) + ag(\tfrac{n}{b}) + g(n) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&= a^k f(\tfrac{n}{b^k}) + \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} a^j g(\tfrac{n}{b^j}) \\
&= a^k f(1) + \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} a^j g(\tfrac{n}{b^j})
\end{aligned}$$

ya que $\dfrac{n}{b^k} = 1$. A partir de esta última relación deduciremos un resultado que brinda una estimación del orden de las soluciones de la relación de recurrencia de divide y vencerás, para el caso particular en el que $g(n)$ es igual a una constante real positiva y n no es necesariamente una potencia de b. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *Sea f una función creciente que satisface la relación de recurrencia*

$$f(n) = af(\frac{n}{b}) + c$$

donde n es divisible por b, $a \geq 1$, $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$ y $c \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$f(n) \in \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > 1 \\ O(\log_b n) & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Más aún, si $n = b^k$, con $k \in \mathbb{N}$ y $a \neq 1$, entonces

$$f(n) = \left[f(1) + \frac{c}{a-1} \right] n^{(\log_b a)} - \frac{c}{a-1}.$$

Demostración: Sea k entero positivo tal que $n = b^k$. Si $g(n) = c$ con c real positivo, de la relación de recurrencia previa al teorema, se tiene

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c = a^k f(1) + c \sum_{j=0}^{k-1} a^j. \tag{1.1}$$

Caso 1: Sea $a = 1$ entonces $f(n) = f(1) + ck$. Si $n = b^k$, se tiene que $k = \log_b n$, de donde $f(n) = f(1) + c\log_b n$.

En el caso en el que n no sea una potencia de b, puede contarse con la existencia de algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $b^k < n < b^{k+1}$. Dado que f es creciente, se cumple que

$$f(n) < f(b^{k+1}) = f(1) + c(k+1) = f(1) + c + ck \leq f(1) + c + c\log_b n.$$

Por tanto, queda probado que para $a = 1$ se cumple que $f(n) \in O(\log_b n)$.

Caso 2: Supongamos ahora $a > 1$. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = b^k$, entonces de (1.1) se sigue que

$$\begin{aligned} f(n) &= a^k f(1) + c\frac{a^k - 1}{a-1} = a^k\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] - \frac{c}{a-1} \\ &= \left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] a^{\log_b n} - \frac{c}{a-1} \\ &= \left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] n^{\log_b a} - \frac{c}{a-1}. \end{aligned}$$

Análogamente, si n no es potencia de b consideremos $k \in \mathbb{N}$ tal que $b^k < n < b^{k+1}$, luego, $k \leq \log_b n \leq k+1$. Dado que f es creciente, se sigue que

$$\begin{aligned} f(n) &\leq f(b^{k+1}) = \left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] a^{k+1} - \frac{c}{a-1} \\ &\leq a\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] a^{\log_b n} - \frac{c}{a-1} \\ &\leq a\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] n^{\log_b a} - \frac{c}{a-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, para $a > 1$, se ha probado que $f(n) \in O(n^{\log_b a})$. ■

Como ejemplo consideremos el algoritmo de búsqueda binaria. Anteriormente ya se mencionó que su ecuación de recurrencia está dada por $f(n) = f(\frac{n}{2}) + 2$ para n par. Luego, aplicando el teorema anterior, se tiene que $f(n) \in O(\log_2 n)$.

El siguiente resultado es más general y resulta muy útil en el cálculo del orden de complejidad de una gran variedad de algoritmos divide y vencerás.

Teorema 1.6 *Sea f una función creciente que satisface la relación de recurrencia*

$$f(n) = af(\frac{n}{b}) + cn^d$$

para $n = b^k$ con k entero positivo, $a \geq 1$, $b \in \mathbb{N} - \{1\}$, $c, d \in \mathbb{R}^+$, con $d \neq 0$. Entonces

$$f(n) \quad es \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log_b n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

La prueba de este teorema es un poco más compleja que la del resultado anterior y no se incluye en este trabajo.

Utilizando este resultado, es inmediato ver que el algoritmo de ordenación por mezcla cuya ecuación de recurrencia es $f(n) = 2f(\frac{n}{2}) + n$, es de orden $O(n \log_2 n)$.

Como ya se mencionó, existe un tipo especial de algoritmos divide y vencerás: los algoritmos divide y vencerás probabilistas, estos algoritmos definen una relación de recurrencia un tanto distinta a la que presentan los algoritmos divide y vencerás deterministas, y puede ser resuelta utilizando la teoría que presentaremos más adelante en el capítulo 3. Los detalles sobre las relaciones de recurrencia que definen estos algoritmos se dejan para el capítulo de aplicaciones, en este, se utilizan las propiedades cuasi-métricas del espacio de complejidad para encontrar una función g de tal forma que la solución de su relación de recurrencia sea de orden $O(g)$.

Antes de adentrarnos a la definición formal del espacio de complejidad C, es necesario abordar algunas clases especiales de espacios no simétricos. Esto debido a que el análisis algebraico y topológico de C requiere de estas nociones, pues la estructura que presenta es precisamente no simétrica. El siguiente capítulo está destinado al estudio de este tipo de espacios.

Capítulo 2

Espacios no simétricos

Para comenzar con la formalización matemática del análisis de complejidad de algoritmos, es necesario mencionar algunas nociones introductorias sobre algunos tipos de espacios cuya estructura es relevante para el entendimiento del espacio de complejidad.

Una de las propiedades topológicas más relevantes que se mencionan y se utilizan en este trabajo es la completitud de Smyth, la cual se definió originalmente para espacios cuasi-uniformes como parte del estudio de la semántica denotacional. De hecho, muchas de las técnicas que se utilizan en la teoría de complejidad (tal como fue definida por Schellekens en [16]) surgen como adaptaciones de las herramientas desarrolladas en semántica denotacional, la cual puede entenderse a grandes rasgos como la formalización matemática del significado de los lenguajes de programación; en ella se construyen objetos matemáticos (llamados denotaciones) los cuales describen los significados de expresiones escritas en lenguajes de programación específicos evitando problemas de ambigüedad en los programas computacionales. En los inicios de la semántica denotacional, se propuso la denotación (o significado) de un programa de cómputo como una función que definía un mapeo entre entradas y salidas, sin embargo, más tarde se buscó la extensión de esta teoría a los programas recursivos, para los cuales se decidió definir a las denotaciones como funciones continuas entre órdenes parciales completos. Cabe mencionar que los espacios cuasi-uniformes definen precisamente un orden parcial, con lo cual en este contexto, la completación de Smyth tiene una importante aplicación: la completación topológica de un espacio cuasi-uniforme (el cual respresenta un orden parcial), en un espacio cuasi-uniforme topológico que respresenta un orden parcial completo.

Otro concepto importante (que se definirá con detalle en la siguiente sección) es el de los espacios Smyth completables, los cuales tienen una completación de Smyth cuasi-unimórfica a su bicompletación, lo cual permite trabajar con esta última en “sustitución”de la primera. Aclaremos también que toda completación de Smyth de un espacio cuasi-uniforme Smyth completable es nuevamente un espacio cuasi-uniforme.

Para los espacios uniformes, la completación (usual) está caracterizada mediante filtros de Cauchy, sin embargo, para espacios uniformes con una base de filtros numerable la completación puede ser definida mediante sucesiones de Cauchy, a este tipo de completación se le llama "completación secuencial". Para el caso de los espacios cuasi-uniformes, existe también una completación secuencial, sin embargo no existe una caracteríźación de la completación de Smyth mediante sucesiones, usualmente esta es definida mediante filtros llamados "round S-Cauchy", o mediante redes de Cauchy. Esto puede ser "resuelto"suponiendo una codición extra: la completabilidad de Smyth, con ello puede verse que en lugar de buscar una completación secuencial de Smyth, esta búsqueda puede remplazarse por la de una bicompletación secuencial. Los espacios cuasi-métricos (que se definirán posteriormente), generan un espacio cuasi-uniforme de base numerable, con lo cual puede definirse su bicompletación secuencial (esto tiene sentido puesto que la bicompletación de un espacio cuasi-uniforme está relacionada con la completación del espacio uniforme que genera). Además, más adelante se mostrará que la distancia de complejidad es una cuasi-métrica, y que el espacio de complejidad C es Smyth-completable, lo cual permitirá trabajar con su completitud de Smyth mediante sucesiones, y así transportar todos estos resultados de la teoría de los espacios cuasi-uniformes a los espacios cuasi-métricos. La aplicación que se aborda en el útimo capítulo está precisamente basada en la completitud secuencial de Smyth del espacio C. Con el fin de explicar esto con más detalle, dedicamos una sección al estudio de algunos conceptos de los espacios cuasi-uniformes y definimos en ella a los espacios Smyth completos y Smyth completables como fueron propuestos originalmente para los espacios cuasi-uniformes. Posteriormente, en este capítulo definiremos otros espacios no simétricos, entre ellos los espacios cuasi-métricos, los espacios normados asimétricamente y los conos normados asimétricamente, con el fin de tener las herramientas necesarias para analizar la estructura del espacio de complejidad. Se puede encontrar información más extensa sobre el tema en [2] y [16].

2.1. Espacios Cuasi-uniformes

Con la intención de definir propiamente la completabilidad y la completitud de Smyth como fueron propuestas originalmente para los espacios cuasi-uniformes, presentaremos algunas nociones necesarias para tener una idea general sobre el significado de estos conceptos.

Filtros

Definición 2.1 *Un filtro Γ sobre un conjunto X es un subconjunto no vacío de $P(X)$ tal que*

1. *Para cualesquiera* $F, G \in \Gamma$, $F \cap G \in \Gamma$.

2. *Para todo* $G \subseteq X$, *si existe* $F \in \Gamma$ *con* $F \subseteq G$, *entonces* $G \in \Gamma$.

3. $\emptyset \notin \Gamma$

donde $P(X) = \{U : U \subseteq X\}$ *es el conjunto potencia de* X.

Ejemplo 1: Sean X un conjunto y $A \subseteq X$ no vacío. Entonces

$$\Gamma_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$$

es un filtro sobre X. En efecto, para cualesquiera $F, G \in \Gamma_A$, se tiene que $A \subseteq F \cap G$, de donde $F \cap G \in \Gamma_A$. Ahora, para $G \subseteq X$ arbitrario, si existe $H \in \Gamma_A$ tal que $H \subseteq G$, se tiene que $A \subseteq G$, con lo cual $G \in \Gamma_A$. Finalmente $\emptyset \notin \Gamma_A$, pues $A \nsubseteq \emptyset$, [21].

Un filtro puede converger a un elemento x de un espacio topológico X (lo cual permite visualizarlos como una generalización de las sucesiones). De forma más general, la convergencia puede definirse en términos de bases de filtros, donde para un conjunto X, $\beta \subseteq P(X)$ (no vacío) es base de filtro sobre X si cumple las siguientes propiedades

1. Para cualesquiera $B_1, B_2 \in \beta$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, y

2. $\emptyset \notin \beta$

Así podemos definir la convergencia como sigue:

Sean (X, τ) un espacio topológico, Γ una base de filtro sobre X y x un punto en X. Se dice que Γ converge a x, $\Gamma \longrightarrow x$, si para toda V vecindad de x en X, existe $F \in \Gamma$ tal que $F \subset V$.

Nótese que de las definiciones anteriores es fácil ver que un filtro sobre X es una base de filtro sobre X, con lo cual la convergencia queda definida para ambos.

Espacios cuasi-uniformes

Definición 2.2 *Un espacio cuasi-uniforme es la dupla* (X, Ψ) *donde*

1. Ψ *es un filtro sobre* $X \times X$.

2. *Para todo* $U \in \Psi$, *existe* $V \in \Psi$ *tal que* $V \circ V = V^2 \subseteq U$

3. *Para todo* $U \in \Psi$, $\triangle(X) \subseteq U$, *donde* $\triangle(X) = \{(x, x) : x \in X\}$,

y para cualesquiera $M, N \subseteq X \times X$, $M \circ N$ se define como

$$M \circ N = \{(x,z) \in X \times X : \exists y \in X \quad \textit{tal que} \quad (x,y) \in M \ \ y \ \ (y,z) \in N\}.$$

A Ψ se la llama una cuasi-uniformidad sobre X, y a los elementos de Ψ se les llama séquitos o entornos.

Nótese que dado que $\triangle(X) \subseteq U$ para todo $U \in \Psi$, si $V^2 \subseteq U$, entonces $V \subseteq U$.

Si además de cumplir las condiciones anteriores, (X, Ψ) cumple que

4. Para todo $U \in \Psi$, $U^{-1} \in \Psi$, donde
   $U^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in U\}$,

(X, Ψ) es llamado un espacio uniforme, y nos referimos a Ψ como una uniformidad sobre X.

De forma análoga a como se define para los espacios topológicos, una base β para una cuasi-uniformidad Ψ es un subconjunto de Ψ tal que para todo $U \in \Psi$, existe $B \in \beta$ tal que $B \subseteq U$. Mostremos un ejemplo sencillo para ilustrar algunos de los conceptos anteriores.

Ejemplo 2: Considérense los conjuntos

$$X = \{1,2,3\} \quad \text{y} \quad W = \{(x,y) : x \leq y\},$$

donde $\leq$ representa el orden usual en $\mathbb{R}$. Claramente se tiene que $\Delta(x) \subset W$ y $W \circ W = W$, con lo cual el conjunto $\Psi_X = \{U \subseteq (X \times X) : W \subseteq U\}$ es una cuasi-uniformidad sobre X.

Una función $f : (X, \Psi) \longrightarrow (Y, \Upsilon)$ entre dos espacios cuasi-uniformes es cuasi-uniformemente continua si para toda $V \in \Upsilon$, existe $U \in \Psi$ tal que $f^2(U) \subseteq V$, donde $f^2(x,y) = (f(x), f(y))$. Un cuasi-uniformismo es una biyección $f : (X, \Psi) \longrightarrow (Y, \Upsilon)$ entre espacios cuasi-uniformes tal que f y f^{-1} son cuasi-uniformemente continuas.

En los espacios cuasi-uniformes pueden definirse vecindades para puntos y subconjuntos de X, de la manera siguiente: para todo $U \in \Psi$, $x \in X$ y $Z \subseteq X$,

$$U(x) = \{y \in X : (x,y) \in U\} \quad \text{y} \quad U[Z] = \cup \{U(z) : z \in Z\}.$$

Una cuasi-uniformidad Ψ genera una topología $\tau(\Psi)$ sobre X, llamada “la topología asociada a la cuasi-uniformidad Ψ”, ésta se define de la manera siguiente:

La topología $\tau(\Psi)$ en X asociada con la cuasi-uniformidad (X, Ψ) es la topología generada por la familia de vecindades de cada punto $x \in X$, $\{U(x) : U \in \Psi\}$.

De la definición anterior puede verse que una función cuasi-uniformemente continua f es continua respecto a las topologías $\tau(\Psi)$ y $\tau(\Upsilon)$.

Dada una cuasi-uniformidad Ψ en X, la familia

$$\Psi^{-1} = \left\{U^{-1} : U \in \Psi\right\}$$

es otra cuasi-uniformidad sobre X conocida como la cuasi-uniformidad conjugada.

Notemos que tomando esto en cuenta, el espacio X puede verse como un espacio bitopológico respecto a las topologías $\tau(\Psi)$ y $\tau(\Psi^{-1})$.

Una topología es T_0 si para cualesquiera puntos distintos x y y, existe una vecindad V de x tal que $y \notin V$ o existe una vecindad W de y tal que $x \notin W$, y una topología es T_1 si para cualesquiera puntos distintos x y y, existe una vecindad V de x tal que $y \notin V$ y existe una vecindad W de y tal que $x \notin W$.

Los espacios cuasi-uniformes (X, Ψ), definen un preorden en X mediante la intersección de los elementos de la cuasi-uniformidad, esto es, $\cap\Psi$ cumple las propiedades reflexiva y transitiva. A éste se le llama preorden asociado a Ψ, y se denota por $\leq_\Psi$. Tomemos como ejemplo de esto a W del ejemplo 2, nótese que W es reflexiva y transitiva, y que $\cap\Psi_X = W$, con lo cual se tiene que $\cap\Psi_X$ es un preorden.

Nótese que dada una relación reflexiva y transitiva R, sobre un conjunto X (es decir, R un preorden sobre X), el filtro sobre $X \times X$ generado por la base $\{R\}$ es una cuasi-uniformidad sobre X. Esto queda ilustrado con los siguientes ejemplos, [20], [22].

Ejemplo 3: Sea C_c el conjunto de los números complejos, considérese el conjunto $T = \{(a, b) \in C_c \times C_c :\mid a \mid\leq\mid b \mid\}$, donde $\mid a \mid, \mid b \mid$ representan los módulos de a y b respectivamente. Claramente T es un preorden sobre C_c, pues es relfexiva y transitiva. Luego el conjunto

$$\Psi_{C_c} = \{U \subseteq C_c \times C_c : T \subseteq U\}$$

es una cuasi-uniformidad sobre C_c (pues $\Delta(C_c) \subset T$ y $T \circ T = T$); esto es, podemos generar una cuasi-uniformidad sobre C_c utilizando como base a T. Además, $\cap\Psi_{C_c} = T$ es un preorden en C_c.

Ejemplo 4: Sea X un conjunto arbitrario. Consideremos el conjunto potencia de X, $P(X)$, y la relación sobre éste definida por

$$R = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) : A \subseteq B\}.$$

Claramente esta relación es relfexiva y transitiva, es decir, $\Delta(X) \subset R$ y $R \circ R = R$, con lo cual $\Psi_{P(X)} = \{U \subseteq P(X) \times P(X) : R \subseteq U\}$ es una cuasi-uniformidad sobre $P(X)$. Además, $\cap\Psi_{P(X)} = R$ es un preorden en $P(X)$.

Los siguientes resultados, respecto a la relación de la topología asociada con el preorden asociado, se cumplen:

1. La topología $\tau(\Psi)$ es T_0, si y sólo si, $\cap\Psi$ es un orden parcial.
2. La topología $\tau(\Psi)$ es T_1, si y sólo si, $\cap\Psi = \triangle$.

La uniformidad Ψ^*

Sea $U \in \Psi$, definimos $U^* = U \cap U^{-1}$.

Para una cuasi-uniformidad Ψ , Ψ^* se define por

$$\Psi^* = \{U \subseteq X \times X : \exists B \in \beta, B \subseteq U\}$$

donde $\beta = \{U^* : U \in \Psi\}$, esto es, Ψ^* es la uniformidad generada por la base β.

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice de Ψ^*-Cauchy, si para todo $U^* \in \Psi^*$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq n_0$, se cumple que $x_m U^* x_n$, o dicho de otro modo, que $(x_m, x_n) \in U^*$.

En un espacio uniforme (X, Ψ^*), un filtro Γ sobre X se dice que es un filtro de Cauchy si para cada $V \in \Psi^*$ existe $F \in \Gamma$ tal que $F \times F \subset V$. Consideremos el siguiente ejemplo, [21].

Ejemplo 5: Sea (X, Ψ^*) un espacio uniforme, y x un punto en X. Sea $F(x)$ la familia de vecindades de x definida como $F(x) = \{U(x) : U \in \Psi^*\}$, donde como se definió anteriormente, $U(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$. Nótese que $F(x)$ es un filtro sobre X, pues $\emptyset \notin F(x)$ y las intersecciones de vecindades de x, al igual que los super conjuntos, son nuevamente vecindades de x. Ahora veamos que $F(x)$ es un filtro de Cauchy, en efecto, sea $U \in \Psi^*$, por definición existe $V \in \Psi^*$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Notemos que

$$V(x) \times V(x) = \{(z, w) \in X \times X : (x, z) \in V \text{ y } (x, w) \in V\} \subseteq V \circ V \subseteq U,$$

pues $V(x) \times V(x)$ es simétrica. Por tanto $F(x)$ es un filtro de Cauchy.

Un espacio uniforme es completo si todo Γ filtro de Cauchy sobre X es convergente. Decimos que un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es bicompleto si el espacio uniforme (X, Ψ^*) es completo.

Espacios Smyth-Completables

Una bicompletación de un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es un espacio cuasi-uniforme bicompleto (Y, Υ) que posee un subespacio $\tau(\Upsilon^*)$-denso cuasi-unimórfico a (X, Ψ). Los espacios cuasi-uniformes T_0 tienen una única (salvo bajo uniformismos) bicompletación T_0, conocida como "la bicompletación".

Es posible hablar de la categoría de los espacios cuasi-uniformes (X,Ψ), cuyos morfismos son las funciones cuasi-uniformemente continuas respecto a la topología $\tau(\Psi)$ generada por la cuasi-uniformidad. Llamemos a esta categoría Π_1. De hecho, dado un espacio topológico (X,τ), podemos generar una cuasi-uniformidad Ψ sobre X de tal forma que la topología generada por Ψ coincida con τ, es decir, que $\tau = \tau(\Psi)$, [20]. Esta cuasi-uniformidad se construye utilizando como base intersecciones finitas de los elementos del conjunto $\{S_G : G \in \tau\}$, donde para cada $G \in \tau$, $S_G = (G^c \times X) \cup (X \times G)$ define un preorden sobre X (pues claramente, $\Delta(X) \subseteq S_G$ y $S_G \circ S_G = S_G$). Consideremos un ejemplo muy sencillo meramente ilustrativo.

Ejemplo 6: Sea el conjunto $X = \{a,b\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ sobre X. Sean los conjuntos

$$S_{\{a\}} = (\{b\} \times X) \cup (X \times \{a\}) = \{(b,a),(b,b),(a,a)\}, \quad \text{y} \quad S_\emptyset = S_X = X \times X,$$

claramente $\Delta(x)$ está contenido en $S_{\{a\}}$, S_X y $S_\emptyset$, y $S_{\{a\}} \circ S_{\{a\}} = S_{\{a\}}$, de donde las intersecciones de $S_{\{a\}}$, S_X y $S_\emptyset$ forman una base para una cuasi-uniformidad Ψ sobre X. Para cada elemento de X, $S_{\{a\}}$, S_X y $S_\emptyset$ generan las siguientes vecindades

$$S_{\{a\}}(a) = \{a\}, \quad S_{\{a\}}(b) = \{a,b\}, \quad \text{y}$$

$$S_X(a) = S_\emptyset(a) = \{a,b\} = S_X(b) = S_\emptyset(b),$$

además, en la familia de vecindades que genera la cuasi-uniformidad Ψ, no existe una vecindad que contenga únicamente al punto $\{b\}$, pues $S_{\{a\}}$ está contenido en cada elemento de la cuasi-uniformidad. Por tanto, la topología generada por la cuasi-uniformidad resulta ser $\tau(\Psi) = \{\emptyset, \{a\}, X\} = \tau$.

Un espacio cuasi-uniforme topológico es una tercia (X,Ψ,τ) donde X es un conjunto no vacío, Ψ una cuasi-uniformidad de X y τ una topología para X (distinta a la generada por Ψ). Retomemos los conjuntos del ejemplo 6, y sea la tercia $(X,\tau(\Psi),\tau_x)$, donde τ_x es la topología discreta en X. Esta tercia es un espacio cuasi-uniforme topológico. Ahora consideremos la categoría Π_2 de los espacios cuasi-uniformes topológicos, en esta categoría los morfismos son las funciones cuasi-uniformemente continuas, esta vez respecto a ambas topologías: $\tau(\Psi)$ y τ. Puede verse que $\Pi_1 \subset \Pi_2$.

Existen espacios cuasi-uniformes cuya bicompletación es un espacio de la categoría de los espacios cuasi-uniformes topológicos Π_2, mas no de la categoría de los espacios cuasi-uniformes Π_1. Un espacio cuasi-uniforme se dice Smyth-Completable si su bicompletación es nuevamente un objeto de la categoría de los espacios cuasi-uniformes. Este concepto es útil para las aplicaciones posteriores.

Estos espacios pueden definirse también mediante filtros de K-Cauchy por la izquierda, donde un filtro Γ sobre un espacio cuasi-uniforme (X,Ψ) es llamado K-Cauchy por la izquierda si para cada $U \in \Psi$ existe un $F \in \Gamma$ tal que $U[x] \in \Gamma$ para cada $x \in F$. Un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es Smyth-completable si y sólo si cada filtro K-Cauchy por la izquierda sobre (X, Ψ), es un filtro de Cauchy en el espacio uniforme (X, Ψ^*), [1].

Espacios Smyth-completos

Un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ) es llamado Smyth-completo si y sólo si cada filtro K-Cauchy por la izquierda en (X, Ψ) converge en (X, Ψ^*).

En seguida damos un breve resumen de una clase particular de espacios cuasi-uniformes, los llamados espacios cuasi-métricos, entre los cuales está el espacio de complejidad que es el actor principal de este trabajo.

2.2. Espacios Cuasi-métricos

La teoría de espacios métricos ha sido ampliamente desarrollada ([17], [18]) y su relevancia en muchas áreas de la matemática es indiscutible; en esta teoría se introduce de manera general la noción de distancia entre dos elementos de un conjunto, valiéndose de una aplicación -la métrica del espacio- la cual cumple ciertas propiedades. Una de estas propiedades es la simetría, si bien esta propiedad permite el desarrollo de resultados importantes, el prescindir de ella abre paso al estudio de otro tipo de espacios, los espacios cuasi-métricos, para los cuales se ha desarrollado una teoría relativamente nueva cuya relevancia es igualmente considerable y en la cual pueden encontrarse resultados análogos a los de espacios métricos. En esta sección se estudiarán algunas propiedades algebráicas y topológicas de este tipo de espacios.

Al no exigir la propiedad de simetría en una distancia, los espacios resultantes tienen características diferentes en su estructura topológica, esto abre toda una gama de posibilidades para trasladar y comparar conceptos y resultados que se tienen en los espacios con simetría. Esta carencia de simetría en las distancias en estos espacios puede entenderse como que éstas tienen orientación, esto es, para dos elementos del espacio, sean x y y, la distancia de x a y no necesariamente coincide con la distancia de y a x. Ésta asimetría sugiere diferencias considerables entre los espacios métricos y los espacios cuasi-métricos, así como entre los espacios normados y los espacios normados asimétricamente, las cuales han sido estudiadas recientemente debido las aplicaciones que les han encontrado en los últimos años.

Hausdorff estudia y expone este tipo de distancias en su libro sobre Teoría de Conjuntos, igualmente hay constancia del desarrollo en la teoría de espacios cuasi-uniformes y en la aproximación asimétrica entre las décadas de los 60's y 80's. Actualmente, dada la relevancia que estos espacios tienen en la teoría de aproximación y en el análisis de complejidad de algoritmos, existen numerosos trabajos sobre espacios normados asimétricamente así como sobre espacios cuasi-métricos. Un trabajo un poco más reciente y extenso sobre espacios cuasi-métricos, normados asimétricamente y cuasi-uniformes es realizado por Cobzas en [2], donde la presentación sigue las ideas de la teoría de espacios normados ahora con un enfoque asimétrico, enfatizando similitudes, pero también las diferencias que surgen por la carencia de simetría.

En esta sección presentamos la definición de los espacios cuasi-métricos, algunos ejemplos de este tipo de espacios, su relación con los espacios cuasi-uniformes y algunos resultados importantes sobre su comportamiento topológico. Esto puede consultarse con más detalle en [3], [19], [2] y [16].

Definición 2.3 *Una cuasi-semimétrica sobre un conjunto arbitrario X (no vacío) es una función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface las dos condiciones siguientes:*

1. $\rho(x, x) = 0$

2. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in X$.

Más aún, si $x, y \in X$,

3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0$ *implica* $x = y$, *entonces* ρ *se llama una cuasi-métrica.*

El par (X, ρ) *recibe el nombre de espacio cuasi-semimétrico y espacio cuasi-métrico, respectivamente.*

Cuando se cumplen 1), 2) y 4) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, *a* ρ *se le llama una semimétrica.*

Los siguientes ejemplos (1 y 2) ilustran la definición anterior.

Ejemplos:

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, definamos las aplicaciones:
$\rho_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$, mediante

1.

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} y - x & \text{si } x \leq y \\ k > 0 & \text{si } x > y \end{cases}$$

2. $\rho_2(x, y) = máx\,\{y - x, 0\}$.

Notemos que tanto ρ_1 como ρ_2 cumplen con los incisos 1) y 2) de la definición 2.3, más aún, para $i = 1, 2$, $\rho_i(x, y) = \rho_i(y, x) = 0$ sólo ocurre cuando $x = y$; así, tanto ρ_1 como ρ_2 son cuasi-métricas.

Dada una cuasi-semimétrica ρ sobre un conjunto X, siempre es posible construir otra cuasi-semimétrica $\overline{\rho}$ definida por

$$\overline{\rho}(x, y) = \rho(y, x)$$

a la cual se le conoce como cuasi-semimétrica conjugada de ρ.

A partir de ρ y $\overline{\rho}$ se define la semimétrica ρ^s mediante

$$\rho^s(x, y) = máx\,\{\overline{\rho}(x, y), \rho(x, y)\}\,.$$

Nótese que trivialmente se cumple que

$$\rho(x, y) \leq \rho^s(x, y) \text{ y } \overline{\rho}(x, y) \leq \rho^s(x, y).$$

Además, ρ es una cuasi-métrica si y sólo si ρ^s es una métrica. En efecto, supongamos que ρ es una cuasi-métrica y que

$$0 = \rho^s(x, y) = máx \{\rho(x, y), \overline{\rho}(x, y)\},$$

entonces se cumple que $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0$, de donde $x = y$. Se tiene entonces que $\rho^s(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, así ρ^s es una métrica. Recíprocamente, supongamos que $\rho^s(x, y)$ es una métrica y que se cumple la condición $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0$, entonces $\rho^s(x, y) = 0$, de donde $x = y$, luego, ρ es una cuasi-métrica.

Con frecuencia se trabaja con cuasi-semimétricas extendidas, entendiendo que la cuasi-semimétrica puede tomar el valor $+\infty$ para algunos pares (x, y) en $X \times X$.

Una cuasi-métrica ρ sobre X se llama bicompleta si ρ^s es una métrica completa sobre X.

Tal como en los espacios métricos, es posible definir bolas abiertas y cerradas en este tipo de espacios no simétricos, lo cual nos permite definir también la topología que éstas generan. Dado un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), para $x \in X$ y $r > 0$ se definen las bolas abiertas y cerradas con centro en x y radio r como

$$B_\rho(x, r) = \{y \in X : \ \rho(x, y) < r\} \text{ y}$$
$$B_\rho[x, r] = \{y \in X : \ \rho(x, y) \leq r\}.$$

Con esto, los conjuntos abiertos y cerrados se definen de manera análoga a como se hace en los espacios métricos: se dice que un subconjunto G de X es abierto respecto a ρ o que es ρ-abierto, si para cada $x \in G$, existe $r > 0$ tal que $B_\rho(x, r) \subseteq G$. Un subconjunto C de X es cerrado respecto a ρ (o ρ- cerrado), si es complemento de algún ρ-abierto.

Las siguientes proposiciones, 2.1-2.4, describen el comportamiento de la topología inducida por una cuasi-semimétrica (cuasi-métrica).

Proposición 2.1 *En un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), toda bola abierta $B_\rho(x, r)$ es un conjunto ρ-abierto.*

Demostración: Basta con mostrar que para cada $y \in B_\rho(x, r)$, existe un número real r' tal que $B_\rho(y, r') \subseteq B_\rho(x, r)$. Para esto sean $y \in B_\rho(x, r)$ y $r' = r - \rho(x, y) > 0$. Para $z \in B_\rho(y, r')$, se tiene que

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + r' = \rho(x, y) + r - \rho(x, y) = r$$

por lo que $z \in B_\rho(x, r)$ y así $B_\rho(y, r') \subset B_\rho(x, r)$. ■

Para el caso de las bolas cerradas las cosas son un poco distintas ya que éstas no son necesariamente un conjunto cerrado respecto a la cuasi-semimétrica ρ, mas sí lo son respecto a la cuasi-semimétrica conjugada $\overline{\rho}$. Esto lo enuncia la siguiente proposición.

Proposición 2.2 *En un espacio cuasi-semimétrico* (X, ρ)*, toda bola* $B_\rho[x, r]$ *es un conjunto* $\overline{\rho}$*-cerrado.*

Demostración: Probemos que $X - B_\rho[x, r]$ es $\overline{\rho}-$abierto. Para esto, tomemos un $y \in X - B_\rho[x, r]$ y sea $r' = \rho(x, y) - r > 0$. Si $z \in B_{\overline{\rho}}(y, r')$, se cumple

$$\rho(x, z) \geq \rho(x, y) - \rho(z, y) = \rho(x, y) - \overline{\rho}(y, z)$$

$$> \rho(x, y) - r' = \rho(x, y) - \rho(x, y) + r = r,$$

luego, $B_{\overline{\rho}}(y, r') \subset X - B_\rho[x, r]$. ■

Dado un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), es posible definir las topologías τ_ρ, $\tau_{\overline{\rho}}$ y τ_{ρ^s}, correspondientes a las cuasi-semimétricas ρ, $\overline{\rho}$ y ρ^s, respectivamente. Si G es un ρ-abierto entonces para cada $x \in G$, existe $r > 0$, tal que $B_\rho(x, r) \subset G$, pero como $\rho(x, y) \leq \rho^s(x, y)$, se tiene que $B_{\rho^s}(x, r) \subset B_\rho(x, r) \subset G$. Así, G es también ρ^s-abierto, esto es, τ_{ρ^s} es más fina que τ_ρ . Análogamente puede verse también que τ_{ρ^s} es más fina que $\tau_{\overline{\rho}}$.

Con lo anterior, un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ) con las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$ puede ser visto como un espacio bitopológico, entendiendo a un espacio bitopológico como la tercia (X, τ_1, τ_2).

Proposición 2.3 *Sea* (X, ρ) *un espacio cuasi-semimétrico, para cualquier* $x \in X$*, se cumple que* $B_{\rho^s}(x, r) = B_\rho(x, r) \cap B_{\overline{\rho}}(x, r)$*.*

Demostración: En efecto, si $y \in B_{\rho^s}(x, r)$, entonces

$$\rho(x, y) \leq \rho^s(x, y) = \textit{máx}\,\{\rho(x, y), \overline{\rho}(x, y)\} < r$$

y por tanto,

$$B_{\rho^s}(x, r) \subseteq B_\rho(x, r) \cap B_{\overline{\rho}}(x, r).$$

Ahora, si $y \in B_\rho(x, r) \cap B_{\overline{\rho}}(x, r)$ se tiene que $\rho(x, y), \overline{\rho}(x, y) < r$, de donde $\rho^s(x, y) < r$, y así $y \in B_{\rho^s}(x, r)$. Con lo anterior se tiene que

$$B_\rho(x, r) \cap B_{\overline{\rho}}(x, r) \subseteq B_{\rho^s}(x, r).$$

De ambas contenciones tenemos la igualdad. Este resultado permite la construcción de la topología generada. ■

Proposición 2.4 *Sea ρ una cuasi-semimétrica en X. Si τ_ρ, $\tau_{\overline{\rho}}$ y τ_{ρ^s} son las topologías respectivas inducidas por ρ, $\overline{\rho}$ y ρ^s, entonces τ_{ρ^s} es la mínima topología que contiene a $\tau_\rho \cup \tau_{\overline{\rho}}$, esto es, $\tau_{\rho^s} = (\tau_\rho \cup \tau_{\overline{\rho}}) = \cap \{\tau : \tau_\rho \cup \tau_{\overline{\rho}} \subset \tau\}$ donde τ representa una topología de X.*

Demostración: Una de las contenciones es clara, dado que $\tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}} \subset \tau_{\rho^s}$, luego se sigue que $\tau_\rho \cup \tau_{\overline{\rho}} \subset \tau_{\rho^s}$ y por tanto $(\tau_\rho \cup \tau_{\overline{\rho}}) \subset \tau_{\rho^s}$. Ahora, si $B_{\rho^s}(x,r) \in \tau_{\rho^s}$ entonces $B_{\rho^s}(x,r) = B_\rho(x,r) \cap B_{\overline{\rho}}(x,r) \in (\tau_\rho \cup \tau_{\overline{\rho}})$ y por tanto $B_{\rho^s}(x,r) \subset (\tau_\rho \cup \tau_{\overline{\rho}})$, de modo que $\tau_{\rho^s} = (\tau_\rho \cup \tau_{\overline{\rho}})$. ■

Los ejemplos que se dan a continuación muestran la forma de las bolas y de las topologías para algunas cuasi-métricas particulares.

Ejemplos:

1) Sea $X = \{a,b,c\}$ definamos $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$\begin{cases} \rho(b,a) = \rho(a,a) = \rho(b,b) = \rho(c,c) = 0 \\ \rho(a,b) = \rho(b,c) = \rho(c,b) = \rho(c,a) = \rho(a,c) = 1 \end{cases}$$

Claramente ρ es una cuasi-métrica, y

$$B_\rho(a,r) = \begin{cases} X, & \text{si } r > 1 \\ \{a\}, & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

$$B_\rho(b,r) = \begin{cases} X, & \text{si } r > 1 \\ \{a,b\}, & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

$$B_\rho(c,r) = \begin{cases} X, & \text{si } r > 1 \\ \{c\}, & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

De modo que,

$\tau_\rho \ = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$,

$\tau_{\overline{\rho}} \ = \{\varnothing, X, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ y

$\tau_{\rho^s} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$.

Esta última es precisamente la topología discreta de X.

ii) Si la cuasi-métrica $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ está dada por

$$\rho(x,y) = \begin{cases} y - x, & \text{si } x \leq y \\ 1, & \text{si } x > y \end{cases}$$

las bolas abiertas son de la forma:

$$B_\rho(x,r) = \begin{cases} [x, x+r), & \text{si } r < 1 \\ (-\infty, x+r), & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$B_{\overline{\rho}}(x,r) = \begin{cases} (x-r, x], & \text{si } r < 1 \\ (x-r, +\infty), & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Con esto último las bolas abiertas de ρ^s son:

$$B_{\rho^s}(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } r < 1 \\ (x-r, x+r), & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Como se ve, para $r < 1$, se tiene que τ_{ρ^s} es la topología discreta en el conjunto de los números reales.

En los dos ejemplos anteriores la topología τ_ρ^s coincide con la topología discreta, esto no siempre es así, como lo muestra el ejemplo siguiente.

iii) Para la cuasi-métrica $\rho(x,y) = m\acute{a}x\,\{y-x, 0\}$ de uno de los ejemplos anteriores, las bolas abiertas son de la forma

$$\begin{aligned} B_\rho(x,r) &= (-\infty, x+r), \\ B_{\overline{\rho}}(x,r) &= (x-r, +\infty), \text{ y} \\ B_{\rho^s}(x,r) &= (x-r, x+r). \end{aligned}$$

Aquí la topología τ_{ρ^s} es la topología inducida por la métrica del valor absoluto.

Como fue mencionado con anterioridad, existe una estrecha relación entre los espacios cuasi-métricos y los espacios cuasi-uniformes. Una cuasi-semimétrica ρ sobre X genera un espacio cuasi-uniforme (X, Ψ_ρ) mediante la base numerable $\beta_\rho = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$B_n = \left\{(x,y) \in X \times X : \rho(x,y) < \frac{1}{2^n}\right\},$$

esto es,

$$\Psi_\rho = \{U \subseteq X \times X : \exists B_n \in \beta_\rho, B_n \subseteq U\}.$$

De igual manera, la familia

$$\overline{B_n} = \left\{(x,y) \in X \times X : \rho(x,y) \leq \frac{1}{2^n}\right\}$$

genera la misma cuasi-uniformidad Ψ_ρ.

Dado que $B_n(x) = B_\rho(x, \frac{1}{2^n})$ y $\overline{B_n}(x) = B_\rho[x, \frac{1}{2^n}]$, puede verse que las topologías generadas por la cuasi-semimétrica ρ y la cuasi-uniformidad Ψ_ρ coinciden, es decir, se cumple que $\tau_\rho = \tau(\Psi_\rho)$. Esto es, una cuasi-métrica induce un espacio cuasi-uniforme de base numerable, lo cual permite ver la completación de su espacio uniforme inducido (o la bicompletación del espacio cuasi-uniforme) mediante sucesiones.

Como se mencionó anteriormente, una cuasi-uniformidad genera un preorden. De manera similar, una cuasi-métrica ρ tiene un preorden asociado, $\leq_\rho$, el cual se define como

$$x \leq_\rho y \quad \text{si y sólo si} \quad \rho(x, y) = 0.$$

Este preorden coincide con el preorden asociado a Ψ_ρ.

En un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), un mapeo $f : X \longrightarrow X$ es un mapeo ρ-contracción si y sólo si cumple que

$$\exists\ c < 1 \ \text{ tal que } \quad \forall x, y \in X, \quad \rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x, y).$$

Otro tipo de espacios no simétricos intrínsecamente ligados con los espacios cuasi-métricos (tanto como lo están los espacios normados con los espacios métricos) es el de los espacios normados asimétricamente, a los cuales se dedica la siguiente sección.

2.3. Espacios Normados Asimétricamente

Al trabajar con espacios lineales es frecuente la aparición de funcionales parecidos a las normas, en donde no se cumple la condición $p(x) = p(-x)$, este tipo de funcionales se define como sigue. Puede consultarse más al respecto en [2].

Definición 2.4 *Sea X un espacio lineal real. Una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una seminorma asimétrica sobre X, si para toda $x, y \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ se cumple,*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
2. $p(rx) = rp(x)$;

   Si además se verifica que

3. $p(x) = p(-x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$;

entonces a p se le conoce como norma asimétrica.

A un espacio lineal dotado de una seminorma asimétrica se le llama espacio seminormado asimétricamente y en el caso de que p sea norma asimétrica, espacio normado asimétricamente. Al igual que con las cuasi-semimétricas, en algunas instancias el valor $+\infty$ puede ser permitido para p, en cuyo caso p sería una norma -o seminorma- asimétrica extendida.

Como en el caso de cuasi-semimétricas, se puede definir $\overline{p}$, la seminorma asimétrica conjugada de p, por $\overline{p}(x) = p(-x)$. De igual forma, se define $p^s(x) = máx\,\{p(x), p(-x)\}$, la cual resulta ser una seminorma llamada la seminorma asociada a p. Nótese que una seminorma asimétrica p es una norma asimétrica si y sólo si p^s es una norma sobre X.

Además, se cumple que $p(x) \leq p^s(x)$ y que $\overline{p}(x) \leq p^s(x)$ para toda $x \in X$.

Dada una seminorma asimétrica p, siempre es posible definir una cuasi-semimétrica ρ_p mediante $\rho_p(x, y) = p(y - x)$. Análogamente, para un espacio normado asimétricamente (X, p), las bolas abiertas y cerradas con centro en x y radio r están dadas por

$$B_p(x, r) = \{y \in X : p(y - x) < r\}$$

$$B_p[x, r] = \{y \in X : p(y - x) \leq r\}.$$

Los siguientes ejemplos muestran algunas normas asimétricas y el comportamiento de las bolas que inducen mediante la cuasi-métrica asociada. Una norma asimétrica que es utilizada muy frecuentemente en el desarrollo de la teoría del espacio de complejidad es la que se describe en el ejemplo i).

Ejemplos:

i) En $\mathbb{R}$ la norma asimétrica dada por

$$u(x) = \text{máx}\,\{0, x\} = x \vee 0,\ \ x \in \mathbb{R}$$

define la cuasi-métrica de la recta de Sorgenfrey

$$\rho_u(x, y) = u(y - x) = \text{máx}\,\{0, y - x\} = (y - x) \vee 0.$$

ii) En el plano, el funcional $\ \ p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ \ $ dado por

$$p(x, y) = máx\,\{y - x, y + x, 0\}\,,$$

es una norma asimétrica ya que si $\lambda \geq 0$, entonces

$$p(\lambda(x, y)) = máx\,\{\lambda y - \lambda x, \lambda y + \lambda x, 0\} = \lambda máx\,\{y - x, y + x, 0\} = \lambda p(x, y).$$

Además, si $u = (x, y)$ y $v = (a, b)$, entonces

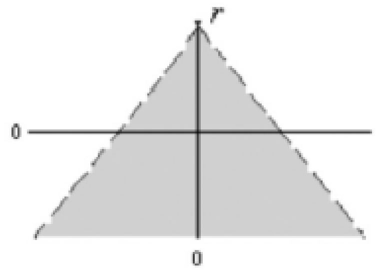
$$\begin{aligned} p(u + v) &= máx\,\{y + b - x - a, y + b + x + a, 0\} \\ &= máx\,\{y - x + b - a, y + x + a + b, 0\} \\ &\leq máx\,\{y - x, y + x, 0\} + máx\,\{b - a, b + a, 0\} \\ &= p(u) + p(v). \end{aligned}$$

Con esto, p es una seminorma asimétrica. Además, si

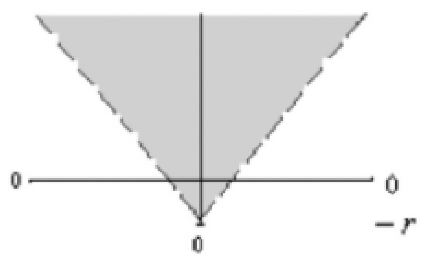
$$p(x, y) = p(-x, -y) = 0,$$

entonces $y + x = 0 = y - x$, luego $x = 0 = y$, por lo que p es una norma asimétrica.

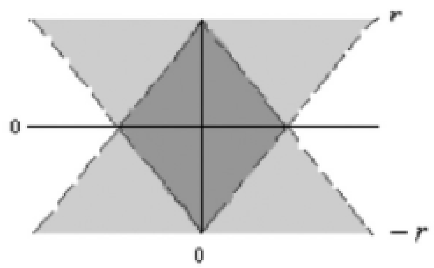
En este ejemplo, $B_p((0,0),r) = \{(x,y) : y - x, x + y < r\}$,



mientras que $B_{\overline{p}}((0,0),r) = \{(x,y) : x - y, -x - y < r\}$,



De donde $B_{p^s}((0,0),r) = \{(x,y) : |y - x|, |x + y| < r\}$



iii) En el conjunto $M_{(m\times n)}(\mathbb{R})$ de matrices de tamaño $m \times n$ con componentes reales, definimos $\quad p : M_{(m\times n)}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad$ mediante

$$p(A) = m\acute{a}x_{i,j}\left\{A_{ij}, 0\right\}.$$

Mostremos que p es una norma asimétrica, en efecto, para $\alpha \geq 0$, tenemos:

$$p(\alpha A) = máx_{i,j}\{\alpha A_{ij}, 0\} = \alpha máx_{i,j}\{A_{ij}, 0\} = \alpha p(A).$$

Ahora, si $A, B \in M_{(m\times n)}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} p(A) + p(B) &= máx_{i,j}\{A_{ij}, 0\} + máx_{i,j}\{B_{ij}, 0\} \\ &\geq máx_{i,j}\{(A+B)_{ij}, 0\} \\ &= p(A+B) \end{aligned}$$

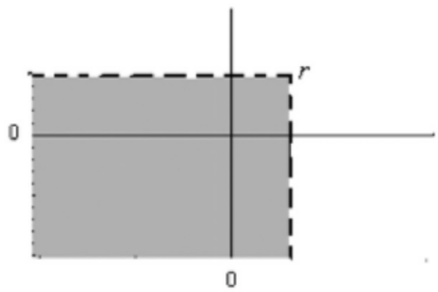
Por último, si $p(A) = p(-A) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = máx_{i,j}\{A_{ij}, 0\} \quad &\geq A_{ij} \quad \text{y} \\ 0 = máx_{i,j}\{-A_{ij}, 0\} &\geq -A_{ij} \end{aligned}$$

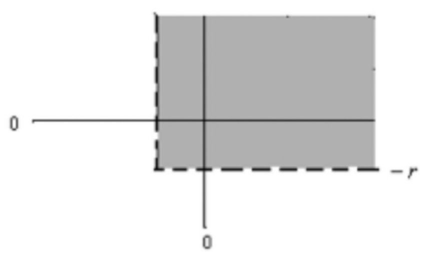
de lo anterior, $A = 0$.

Un caso particular de este ejemplo lo tenemos con $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $p(x,y) = máx\{x, y, 0\}$. Aquí las bolas abiertas centradas en el origen son de la forma:

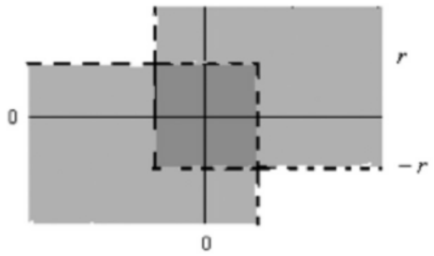
$B_p((0,0), r) = \{(x,y) : x, y < r\}$,



$B_{\overline{p}}((0,0), r) = \{(x,y) : x, y > -r\}$,



y $B_{p^s}((0,0),r) = \{(x,y) : -r < x, y < r\}$.



Nótese que p^s es la norma del supremo en $\mathbb{R}^2$.

iv) Consideremos al conjunto de las funciones continuas definidas en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Definimos el funcional $p : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ mediante

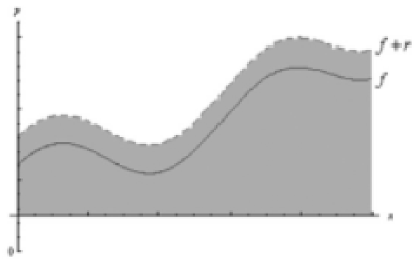
$$p(f) = máx_{a \leq x \leq b} \{f(x), 0\}.$$

En este caso, $\overline{p}(f) = máx_{a \leq x \leq b} \{-f(x), 0\}$. y

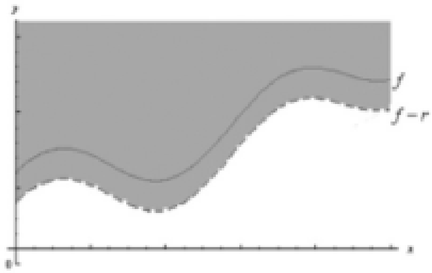
$$B_p(f,r) = \{g : g(x) < f(x) + r\}, \ B_{\overline{p}}(f,r) = \{g : f(x) - r < g(x)\}.$$

Geométricamente las bolas abiertas son:

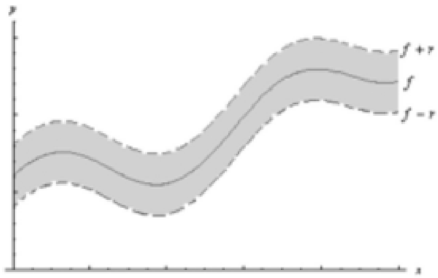
$B_p(f,r)$



$B_{\overline{p}}(f, r)$:



y $B_{p^s}(f, r)$:



v) Sea $X = \left\{(x_k) \in l_\infty : \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = 0\right\}$, definamos $p(x) = sup_k \{x_k, 0\}$. Es fácil ver que p es una norma asimétrica.

Si d es una semimétrica y ρ una cuasi-semimétrica, entonces $d + \rho$ es una cuasi-semimétrica. Más aún, si ρ es una cuasi-métrica, $d + \rho$ es una cuasi-métrica; ésta es una forma de generar más cuasi-métricas en X. En efecto, sea $\rho_0 = d + \rho$, entonces es claro que para cualesquiera $x, y, z \in X$, $\rho_0(x, y) \geq 0$ y $\rho_0(x, x) = 0$.

Además,

$$\begin{aligned} \rho_0(x, y) &= d(x, y) + \rho(x, y) \\ &\leq d(x, z) + d(z, y) + \rho(x, z) + \rho(z, y) \\ &= \rho_0(x, z) + \rho_0(y, z) \end{aligned}$$

Finalmente, si $\rho_0(x, y) = \rho_0(y, x) = 0$, entonces

$$d(x, y) + \rho(x, y) = d(y, x) + \rho(y, x) = 0,$$

de donde $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$, lo cual implica que $x = y$. Más aún, también es fácil ver que $\rho_0^s = d + \rho^s$.

En general, si $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ son cuasi-semimétricas y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n > 0$, entonces la aplicación $\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + ... + \alpha_n\rho_n$ es una cuasi-semimétrica.

Otro tipo de espacios no simétricos cuyo estudio es relevante para este trabajo es el de los conos normados asimétricamente, esto debido a la particular estructura del espacio de complejidad C. Los conos normados asimétricamente se definen en la siguiente sección.

2.4. Conos normados asimétricamente

Una estructura algebraica que aparece con mucha frecuencia en matemáticas es la del cono, la cual es un poco más débil que la de un espacio lineal. Veamos unos conceptos previos necesarios para la definición de un cono.

Un semigrupo es un par $(X,+)$ donde X es conjunto no vacío y $+$ es una operación binario en X que cumple la propiedad asociativa. Mientras que un monoide es un semigrupo $(X,+)$ con elemento neutro o cero.

Definición 2.5 *Un cono sobre $\mathbb{R}^+$ es una terna $(X,+,\cdot)$ tal que $(X,+)$ es un monoide abeliano, y $\cdot : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ una función tal que para cada $x,y \in X$ y $r,s \in \mathbb{R}^+$:*

1. $r \cdot (s \cdot x) = (rs) \cdot x$
2. $r \cdot (x+y) = (r \cdot x) + (r \cdot y)$
3. $(r+s) \cdot x = (r \cdot x) + (s \cdot x)$
4. $1 \cdot x = x.$

Un cono $(X,+,\cdot)$ se dice cancelativo si para toda $x,y,z \in X$, $x+y = x+z$ implica que $y = z$.

Todo espacio lineal $(X,+,\cdot)$ puede ser considerado como un cono cancelativo cuando restringimos la operación $\cdot$ de $\mathbb{R} \times X$ a $\mathbb{R}^+ \times X$.

Decimos que un subconjunto A de un espacio lineal X es un cono de X si A es un cono con la restricción a A de las operaciones del espacio lineal X.

Definición 2.6 *Una seminorma asimétrica sobre un cono $(X,+,\cdot)$ es una función $q : X \to \mathbb{R}^+$ tal que para cualesquiera $x,y \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$*

1. $x = 0$ *si y sólo si existe* $-x \in X$ *tal que* $q(x) = q(-x) = 0.$
2. $q(r \cdot x) = r \cdot q(x)$
3. $q(x+y) \leq q(x) + q(y).$

   Cuando la seminorma asimétrica q satisface

4. $q(x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$*, entonces q es llamada norma asimétrica sobre el cono* $(X,+,\cdot)$

Un cono seminormado asimétricamente (cono normado asimétricamente) es un par (X, q) donde X es un cono y q es una seminorma asimétrica (norma asimétrica) sobre X. Cuando el cono X es de hecho un espacio lineal, el par (X, q) es llamado un espacio lineal normado asimétricamente. Un cono B de un espacio lineal X se dice punteado si $B \cap (-B) = 0$.

Un caso particular de cono normado asimétricamente es el que desarrollaremos en el siguiente capítulo, este fue introducido en 1995 por Schellekens y lo llamó espacio (normado asimétricamente) de complejidad.

Capítulo 3

El espacio de complejidad y su dual

En 1995, Schellekens introdujo el espacio de complejidad, conformado por el conjunto de funciones de complejidad de algoritmos y dotado de una función distancia (no simétrica) entre ellas, con la intención de dar un sustento métrico y topológico al análisis de complejidad de algoritmos.

Reciéntemente, investigadores como Romaguera, García Raffi, Valero, entre otros, han obtenido una gran cantidad de resultados sobre las propiedades métricas de este espacio de complejidad, algunas por medio del análisis de su espacio dual, que han resultado de gran interés desde el punto de vista computacional, donde el tiempo de ejecución de los cálculos es la medida de complejidad.

El espacio de complejidad da un sustento topológico para el análisis de complejidad de programas y algoritmos, basado en la noción de una distancia de complejidad, es decir, una cuasi-métrica que intuitivamente mide el progreso relativo que se hace con respecto a la complejidad al pasar de un algoritmo a otro. Puede consultarse más al respecto en [1], [14] y [16].

3.1. El espacio de complejidad C

Para analizar un algoritmo y medir qué tanto tarda en resolver un problema con un cierto tamaño, se encuentra una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ llamada **función de complejidad**.

Schellekens define el espacio de complejidad como el par (C, d_C), donde

$$C = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} < \infty\}$$

y d_C es la cuasi-métrica sobre C dada por

$$d_C(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left[\left(\frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right) \vee 0 \right]$$

para cada $f, g \in C$.

Para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, podríamos cuantificar el beneficio obtenido (en términos de reducción de complejidad) al remplazar el algoritmo con función de complejidad f por el algoritmo con función de complejidad g de mediante $f(n) - g(n)$. Con el fin de obtener una medida de progreso relativo podemos remplazar esa diferencia por $\frac{f(n)-g(n)}{f(n)}$. Sin embargo, si $f(n)$ toma un valor muy grande comparado con el valor de $g(n)$, esta última expresión tiende a 1, pues $1 - \frac{g(n)}{f(n)} \longrightarrow 1$ cuando $\frac{g(n)}{f(n)} \longrightarrow 0$. Dado que se busca poder distinguir el nivel de beneficio para distintos valores de $g(n)$ (aun cuando se tengan valores de $f(n)$ muy grandes), se remplaza la última expresión por $\frac{f(n)-g(n)}{f(n)g(n)} = \frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)}$. Nótese que el factor 2^{-n} garantiza la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)}$.

La asimetría de d_C ocasiona pérdida de cierta información, sin embargo éste es un costo necesario pues es precisamente la no simetría la que guía la elección del algoritmo más eficiente.

Un poco después, Romaguera y Schellekens introdujeron el **espacio de complejidad dual** (cono normado asimétricamente) y han estudiado varias propiedades del espacio de complejidad original que son interesantes desde el punto de vista computacional, por medio del análisis de su dual.

De hecho, mientras que el espacio de complejidad no puede ser modelado como un cono normado asimétricamente, el espacio dual admite una estructura de cono (o espacio semilineal) normado asimétricamente y, por otra parte, este puede ser usado directamente para el análisis de cierto tipo de algoritmos, donde el tiempo de ejecución es la medida de complejidad.

3.2. El dual del espacio de complejidad C^*

El espacio de complejidad dual es denotado por (C^*, d_{C^*}), y definido por

$$C^* = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f(n) < \infty\}$$

y d_{C^*} es la cuasi-métrica sobre C^* dada por

$$d_{C^*}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} [(g(n) - f(n)) \vee 0]$$

para cada $f, g \in C^*$.

De hecho, C^* resulta ser un cono normado asimétricamente por la función real no negativa $q_{C^*}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(f(n))$ de tal forma que la cuasi-métrica d_{C^*} puede ser obtenida de la norma asimétrica q_{C^*} de la manera siguiente:

$$d_{C^*}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} u(g(n) - f(n))$$

para cada $f, g \in C^*$.

Mediante un breve desarrollo se puede verificar que el mapeo inversión $\Psi : C^* \to C$, $\Psi(f) = \frac{1}{f}$, es una isometría de (C^*, d_{C^*}) a (C, d_C) (con la convención de que $\frac{1}{0} = \infty$), esto permite transportar algunas propiedades del espacio dual al espacio de complejidad (aquellas que se mantienen bajo isometría).

Como se ha mencionado, la distancia de complejidad entre dos funciones $f, g \in C$ es $d_C(f,g)$ y mide el progreso relativo que se hace al bajar la complejidad reemplazando un programa P con función de complejidad f por un programa Q con función de complejidad g.

Puesto que para $f, g \in C^*$ se tiene $d_{C^*}(f,g) = d_C(1/f, 1/g)$, deducimos que $d_{C^*}(f,g)$ mide el progreso relativo que se hace al tratar de bajar la complejidad remplazando P por Q.

En particular, $d_{C^*}(f,g) = 0$ puede ser interpretado como que g es “mas eficiente” que f.

3.3. Propiedades Métricas del Espacio de Complejidad

Uno de los objetivos de este trabajo de tesis es explorar las aplicaciones del espacio de complejidad en algoritmos particulares, especialmente en los del tipo divide y vencerás probabilistas. Para ello es necesario valerse de algunas propiedades algebraicas y topológicas que posee este espacio y que serán enunciadas y demostradas en este capítulo.

Específicamente, el objetivo principal del presente capítulo es demostrar la completitud según Smyth del espacio de complejidad C y de su espacio dual C^*, por tanto, todos los resultados mencionados en esta sección nos conducirán a dicho fin.

Espacios pesables

Una propiedad importante que pueden presentar los espacios cuasi-métricos es la de ser pesables, ésta propiedad resulta de mucha utilidad para nuestros fines pues está estrechamente relacionada con la completabilidad de Smyth.

Se dice que un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es pesable si existe una función (llamada "función peso") $w : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple:

$$\rho(x, y) + w(x) = \rho(y, x) + w(y)$$

En los siguientes teoremas se muestra que tanto el espacio de complejidad C como su espacio dual C^* cumplen con esta definición.

Teorema 3.1 *El espacio de complejidad (C, d_c) es pesable con $w(f) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)}$.*

Demostración: Para darle mayor claridad a la prueba, definamos los siguientes conjuntos:

$$A_f = \{n \in \mathbb{N} : f(n) < g(n)\}\,,$$
$$A_= = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \text{ y}$$
$$A_g = \{n \in \mathbb{N} : g(n) < f(n)\}\,.$$

Claramente $A_f \cup A_= \cup A_g = \mathbb{N}$, con lo cual se tiene que

$$d_C(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\left(\frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right) \vee 0 \right] = \sum_{A_g} \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right)$$

y

$$d_C(g,f)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{g(n)}\right)\vee 0\right]=\sum_{A_f}\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{g(n)}\right).$$

De estas observaciones se sigue que

$$\begin{aligned}
d_C(f,g)+w(f) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{1}{g(n)}-\frac{1}{f(n)}\right)\vee 0\right]+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1}{f(n)}\\
&= \textstyle\sum_{A_g}\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{g(n)}-\frac{1}{f(n)}\right)+\sum_{A_f\cup A_=}\frac{1}{2^n}\frac{1}{f(n)}+\sum_{A_g}\frac{1}{2^n}\frac{1}{f(n)}\\
&= \textstyle\sum_{A_g}\frac{1}{2^n}\frac{1}{g(n)}+\sum_{A_f\cup A_=}\frac{1}{2^n}\frac{1}{f(n)}\\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1}{g(n)}-\sum_{A_f\cup A_=}\frac{1}{2^n}\frac{1}{g(n)}+\sum_{A_f\cup A_=}\frac{1}{2^n}\frac{1}{f(n)}\\
&= \textstyle w(g)+\sum_{A_f\cup A_=}\frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{g(n)}\right)\vee 0\right]\\
&= \textstyle w(g)+\sum_{A_f}\frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{g(n)}\right)\vee 0\right]\\
&= \textstyle w(g)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{g(n)}\right)\vee 0\right]\\
&= d_C(g,f)+w(g).
\end{aligned}$$

■

Para el espacio dual se tiene un resultado análogo, el cual se enuncia a continuación.

Teorema 3.2 *El espacio de complejidad dual* (C^*, d_{C^*}) *es pesable con la función peso* $w(f)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f(n)$.

Demostración: Esta prueba es análoga a la anteior, utilicemos los conjuntos anteriores A_f, $A_=$ y A_g definidos en ésta. Nótese que en este caso

$$d_{C^*}(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[(g(n)-f(n))\vee 0\right]=\sum_{A_f}\frac{1}{2^n}\left(g(n)-f(n)\right)$$

y

$$d_{C^*}(g,f)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[(f(n)-g(n))\vee 0\right]=\sum_{A_g}\frac{1}{2^n}\left(f(n)-g(n)\right).$$

Luego se sigue que

$$\begin{aligned}
d_{C^*}(f,g) + w(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \left[(g(n) - f(n)) \vee 0\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} f(n) \\
&= \sum_{A_f} \tfrac{1}{2^n} \left(g(n) - f(n)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} f(n) \\
&= \sum_{A_f} \tfrac{1}{2^n} \left(g(n) - f(n)\right) + \sum_{A_f} \tfrac{1}{2^n} f(n) + \sum_{A_g \cup A_=} \tfrac{1}{2^n} f(n) \\
&= \sum_{A_f} \tfrac{1}{2^n} g(n) + \sum_{A_g \cup A_=} \tfrac{1}{2^n} f(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} g(n) - \sum_{A_g \cup A_=} \tfrac{1}{2^n} g(n) + \sum_{A_g \cup A_=} \tfrac{1}{2^n} f(n) \\
&= w(g) + \sum_{A_g \cup A_=} \tfrac{1}{2^n} \left[(f(n) - g(n)) \vee 0\right] \\
&= w(g) + \sum_{A_g} \tfrac{1}{2^n} \left[(f(n) - g(n)) \vee 0\right] \\
&= w(g) + \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \left[(f(n) - g(n)) \vee 0\right] \\
&= d_{C^*}(g,f) + w(g).
\end{aligned}$$

■

NOTA: Todo espacio métrico es pesable con w igual a la función cero.

Espacios Smyth-completables

Como se mencionó en la sección anterior, es posible definir a los espacios Smyth-completables y a los espacios Smyth-completos mediante sucesiones, lo cual permite transportar estos conceptos al contexto de los espacios cuasi-métricos. La completitud y completabilidad de Smyth se definen mediante un tipo especial de sucesiones: las sucesiones de K-Cauchy por la izquierda, las cuales se definen de la siguiente manera.

Definición 3.1 *Una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en un espacio cuasi-métrico (X,ρ) se dice de K-Cauchy por la izquierda si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\rho(x_n, x_m) < \epsilon$$

siempre que $n_0 \leq n \leq m$.

Obsérvese que de forma análoga pueden definirse las sucesiones K-Cauchy por la derecha. Para ilustrar esto, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sea la aplicación $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\rho(x,y) = \begin{cases} x-y, & \text{si } y \leq x, \\ 1, & \text{si } y > x, \end{cases}$$

como se había mostrado en el capítulo anterior, esta es una cuasi-métrica.

Ahora consideremos la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio cuasi-métrico $(\mathbb{R}, \rho)$.

Probemos que en este espacio, la sucesión anterior es de K-Cauchy por la izquierda pero no es K-Cauchy por la derecha.

Sea $\epsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, de donde $\epsilon > \frac{1}{n_\epsilon}$.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n_\epsilon \leq n \leq m$, luego $\frac{1}{n_\epsilon} \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$. Así,

$$\rho(x_n, x_m) = \rho\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$$

por tanto, esta sucesión es de K-Cauchy por la izquierda.

Sin embargo $\rho(x_m, x_n) = 1 > \epsilon$ para cualesquiera $n < m$ y $\epsilon < 1$, lo cual muestra que la convergencia no se da en la dirección opuesta.

Se ha mencionado ya que un espacio cuasi-métrico genera un espacio cuasi-uniforme, si este espacio es además Smyth completable (como fue definido para los espacios cuasi-uniformes) entonces el espacio cuasi-métrico cumple lo siguiente:

Teorema 3.3 *Un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es Smyth-completable si y sólo si toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de K-Cauchy por la izquierda en (X, ρ), es de Cauchy en (X, ρ^s).*

Nótese que el espacio $(\mathbb{R}, \rho)$ del ejemplo anterior no es Smyth-completable. En efecto, sea $\epsilon < 1$, por la definición de ρ, se tiene que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\rho^s(x,y) = máx\left\{\rho(x,y), \rho(y,x)\right\} \geq 1 > \epsilon$$

de donde no toda sucesión de K-Cauchy por la izquierda en $(\mathbb{R}, \rho)$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, \rho^s)$.

Existe un resultado muy importante, el cual permite relacionar los espacios pesables con los Smyth-completables. Este resultado es utilizado para probar que tanto el espacio C como el espacio C^* son Smyth-completbles. Este resultado es el siguiente y la prueba puede encontrarse en [7].

Teorema 3.4 *Todo espacio pesable es Smyth-completable.*

Como ya se probó, los espacios C y C^* son pesables, lo cual conduce al corolario siguiente.

Corolario 3.1 *Los espacios cuasi-métricos (C, d_c) y (C^*, d_{c^*}) son Smyth-completables.*

Espacios Smyth-completos

Un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es Smyth-completo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en (X, ρ) de K-Cauchy por la izquierda es convergente en (X, ρ^s).

Otro concepto importante en los espacios cuasi-métricos, el cual se define de manera análoga a como se define en los espacios cuasi-uniformes, es la bicompletitud: un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es bicompleto si (x, ρ^s) es completo.

Utilizando los dos conceptos anteriores, es fácil deducir el siguiente teorema.

Teorema 3.5 *Un espacio cuasi-métrico (X, ρ) Smyth-completable y bicompleto es Smyth completo.*

Demostración: Este resultado es consecuencia directa de las definiciones anteriores. En efecto, sea (X, ρ) un espacio cuasi-métrico Smyth-completable y bicompleto, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en (X, ρ) una sucesión arbitraria de K-Cauchy por la izquierda. Dado que (X, ρ) es Smyth-completable, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, ρ^s). Por otro lado, dado que (X, ρ) es bicompleto, (X, ρ^s) es completo y por tanto la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en (X, ρ^s). Así, el espacio cuasi-métrico (X, ρ) es Smyth-completo. ■

Como se mencionó con anterioridad, nuestro objetivo es probar que los espacios C y C^* son Smyth-completos. Dado que la completitud de Smyth es una propiedad que se mantiene bajo isometría, podemos reducir esta tarea a probar que el espacio dual C^* la cumple. El teorema anterior muestra un bosquejo del camino que seguiremos para cumplir nuestro objetivo: dado que el espacio cuasi-métrico C^* es Smyth-completable, basta con probar que es bicompleto para deducir su completitud de Smyth.

Antes de enunciar y probar este resultado, definamos $d_p : C^* \times C^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$d_p(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}[(g(n) - f(n) \vee 0) \wedge 1] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} m\acute{\imath}n \left\{ m\acute{a}x \left\{ g(n) - f(n), 0 \right\}, 1 \right\},$$

puede verse facilmente que ésta es una cuasi-métrica. Además, notemos que se cumple

$$d_p \leq d_{c^*} \leq d^s_{c^*}$$

$$\overline{d_p} \leq \overline{d_{c^*}} \leq d^s_{c^*}$$

de donde

$$d^s_p \leq d^s_{c^*}. \tag{3.1}$$

Y por último nótese que

$$d^s_p(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}[\mid g(n) - f(n) \mid \wedge 1].$$

Utilizaremos la definición anterior para probar el siguiente lema.

Lema 1 *Dada* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* (C^*, d^s_p)*, existe una única función* $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *tal que* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{p} g$ *con la métrica euclidiana, esto es, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $\mid f_k(n) - g(n) \mid \xrightarrow[k \longrightarrow \infty]{} 0$.

Demostración: Sean $r_0 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$, probemos que $(f_k(r_0))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana, así, por la completitud de este espacio, $(f_k(r_0))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y llamaremos a su límite $g(r_0)$.

Por la propiedad Arquimediana, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\log_2(\frac{1}{\epsilon}) + r_0 < n_0$, luego se cumple que $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2^{r_0}}$. Dividamos el problema en los siguientes casos: $r_0 \leq n_0$ y $r_0 > n_0$.

CASO $r_0 \leq n_0$: Dado que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (C^*, d^s_p), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, k \in \mathbb{N}$ con $m, k \geq n_1$ se cumple que

$$d^s_p(f_m, f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}[\mid f_k(n) - f_m(n) \mid \wedge 1] < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2^{r_0}}$$

Nótese que debido a la ecuación anterior, ocurre que $\mid f_k(n) - f_m(n) \mid \leq 1$, para todo $n = 0, ..., n_0$. Luego

$$\sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{2^n} \mid f_k(n) - f_m(n) \mid < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2^{r_0}}.$$

Como $r_0 \leq n_0$, se tiene que

$$\frac{1}{2^{r_0}} \mid f_k(r_0) - f_m(r_0) \mid < \frac{\epsilon}{2^{r_0}}, \quad \text{de donde} \quad \mid f_k(r_0) - f_m(r_0) \mid < \epsilon.$$

Por tanto, para este caso ya se tiene que $(f_k(r_0))_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, \mid \quad \mid)$ lo cual implica que la serie converge a $h_0 = g(r_0)$.

CASO $r_0 > n_0$: en este caso se tiene que

$$r_0 + 1 > n_0 \Longrightarrow 2^{r_0+1} > 2^{n_0} \Longrightarrow \frac{1}{2^{r_0+1}} < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2^{r_0}}.$$

Dado que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (C^*, d_p^s), existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, k \in \mathbb{N}$ con $m, k \geq n_2$ se cumple que

$$d_p^s(f_m, f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} [\mid f_k(n) - f_m(n) \mid \wedge 1] < \frac{1}{2^{r_0+1}} < \frac{\epsilon}{2^{r_0}}.$$

Luego, para todo $n = 1, ..., r_0 + 1$, $\mid f_k(n) - f_m(n) \mid \leq 1$. De donde

$$\sum_{n=0}^{r_0+1} \frac{1}{2^n} \mid f_k(n) - f_m(n) \mid < \frac{\epsilon}{2^{r_0}},$$

lo cual implica que $\frac{1}{2^{r_0}} \mid f_k(r_0) - f_m(r_0) \mid < \frac{\epsilon}{2^{r_0}}$, luego $\mid f_k(r_0) - f_m(r_0) \mid < \epsilon$.

Por tanto, $(f_k(r_0))_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, \mid\ \mid)$, y dada la completitud de este espacio, $(f_k(r_0))_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, teniendo como límite $g(r_0)$. ■

Usaremos el lema 1 para finalmente probar que el espacio C^* es bicompleto, con lo cual su completitud de Smyth queda probada.

Teorema 3.6 *El espacio de complejidad dual (C^*, d_{c^*}) es bicompleto.*

Demostración: Probar que (C^*, d_{c^*}) es bicompleto es equivalente a probar que $(C^*, d_{c^*}^s)$ es completo. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico $(C^*, d_{c^*}^s)$.

Nótese que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (C^*, d_p^s). En efecto, sea $\epsilon > 0$, dado que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(C^*, d_{c^*}^s)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq k_0$ se cumple

$$d_p^s(f_n, f_m) \leq d_{c^*}^s(f_n, f_m) < \epsilon$$

debido a la ecuación (3.1), de donde $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (C^*, d_p^s).

Por el lema anterior, existe $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ única tal que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \to g$ con la métrica euclidiana.

Probemos ahora que $g \in C^*$, es decir, que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(n) < +\infty$. Hagamos la prueba por contradicción: supongamos que para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $m_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$j < \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} g(n).$$

Dado que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio métrico $(C^*, d^s_{C^*})$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_1$ se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mid f_k(n) - f_{k_1}(n) \mid < 1. \tag{3.2}$$

Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ fijo. Como $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{p}} g$, para cada $n = 0, 1, ..., m_j$ existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N_n$ se cumple que $\mid g(n) - f_k(n) \mid < \frac{1}{2^j}$.

Sea $N_0 = máx\,\{N_n : 1 \leq n \leq m_j\}$, luego para todo $k \geq N_0$ se tiene que

$$\mid g(n) - f_k(n) \mid < \frac{1}{2^j}$$

con $n = 0, 1, ..., m_j$.

Si $k_0 \geq máx\,\{N_0, k_1\}$, se tiene $\mid g(n) - f_{k_0}(n) \mid < \frac{1}{2^j}$ para $n = 0, ..., m_j$. De lo anterior se tiene que

$$\sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} \mid g(n) - f_{k_0}(n) \mid < \frac{1}{2^j} \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^j} = \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Dado que

$$\sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} g(n) - \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} f_{k_0}(n) \leq \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} \mid g(n) - f_{k_0}(n) \mid < \frac{1}{2^{j-1}},$$

se tiene que

$$j < \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} g(n) < \frac{1}{2^{j-1}} + \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} f_{k_0}(n). \tag{3.3}$$

Mientras que por (3.2) y dado que $k_0 \geq k_1$,

$$\sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} f_{k_0}(n) - \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} f_{k_1}(n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mid f_{k_0}(n) - f_{k_1}(n) \mid < 1,$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} f_{k_0}(n) < 1 + \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} f_{k_1}(n), \tag{3.4}$$

luego por (3.3) y (3.4),

$$j < \frac{1}{2^{j-1}} + 1 + \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} f_{k_1}(n) < 2 + \sum_{n=0}^{m_j} \frac{1}{2^n} f_{k_1}(n)$$

esto es,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_{k_1}(n) \longrightarrow \infty \Longrightarrow f_{k_1} \notin C^*,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $g \in C^*$.

Ahora resta probar que $d^s_{C^*}(g, f_k) \xrightarrow[k \longrightarrow \infty]{} 0$. Sea $j \in \mathbb{N}$. Como $(f_k)_{k \in N}$ es de Cauchy en $(C^*, d^s_{C^*})$, existe $k(j) \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, k \geq k(j)$,

$$d^s_{C^*}(f_m, f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mid f_k(n) - f_m(n) \mid < \frac{1}{2^{3j}}.$$

Dado que $f_{k(j)}, g \in C^*$, existe $n_0 \in N$ con $\frac{n_0}{2^{n_0-1}} < \frac{1}{2^{3j}}$ de tal forma que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_{k(j)}(n) < \frac{1}{2^{3j}} \quad \text{y}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(n) < \frac{1}{2^{3j}}.$$

Por ser $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $(C^*, d^s_{C^*})$, existe $k_j \geq k(j)$ tal que para todo $m, k \geq k_j$ se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mid f_k(n) - f_m(n) \mid < \frac{1}{2^{n_0}}. \tag{3.5}$$

Ahora, si $k \geq k_j \geq k(j)$, por la convergencia puntual que se probó en el lema anterior, para todo $n = 0, ..., n_0 - 1$, existe $m_n \geq k$ tal que

$$\mid g(n) - f_{m_n}(n) \mid < \frac{1}{2^{n_0}}. \tag{3.6}$$

Por (3.5) se tiene que

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{2^n} \mid f_k(n) - f_{m_n}(n) \mid < \frac{1}{2^{n_0}}$$

de donde

$$\frac{1}{2^n} \mid f_k(n) - f_{m_n}(n) \mid < \frac{1}{2^{n_0}}$$

o de manera equivalente

$$\mid f_k(n) - f_{m_n}(n) \mid < \frac{2^n}{2^{n_0}} \tag{3.7}$$

para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$.

Nótese que por (3.6) y (3.7), se cumple que para todo $n = 0, ..., n_0 - 1$,

$$| g(n) - f_k(n) | \leq | g(n) - f_{m_n}(n) | + | f_{m_n}(n) - f_k(n) | \leq \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{2^n}{2^{n_0}} = \frac{1 + 2^n}{2^{n_0}},$$

luego,

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{2^n} | g(n) - f_k(n) | < \frac{1}{2^{n_0}} \sum_{n=0}^{n_0-1} (\frac{1}{2^n} + 1) < \frac{2n_0}{2^{n_0}} < \frac{1}{2^{3j}}.$$

Además,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} | g(n) - f_k(n) | \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} [| g(n) | + | f_k(n) |]$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(n) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_k(n). \tag{3.8}$$

Dado que $k \geq k(j)$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_k(n) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_{k(j)}(n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} | f_k(n) - f_{k(j)}(n) | < \frac{1}{2^{3j}}$$

y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_k(n) < \frac{1}{2^{3j}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_{k(j)}(n). \tag{3.9}$$

Finalmente, de (3.8) y (3.9) se obtiene

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} | g(n) - f_k(n) | < \frac{1}{2^{3j}} + \frac{1}{2^{3j}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_{k(j)}(n) < \frac{3}{2^{3j}}.$$

Con esto concluimos que para todo $j \in \mathbb{N}$, existe un $k_j \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_j$, se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} | g(n) - f_k(n) | = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{2^n} | g(n) - f_k(n) | + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} | g(n) - f_k(n) |$$

$$< \frac{1}{2^{3j}} + \frac{3}{2^{3j}} = 2^{2-3j} \leq \frac{1}{2^j},$$

esto es, $d^s_{C^*}(g, f_k) \xrightarrow[k \longrightarrow \infty]{} 0$.

Por tanto hemos probado que el espacio $(C^*, d^s_{c^*})$ es bicompleto. ■

Finalmente hemos llegado al resultado deseado: la completitud de Smyth del espacio de complejidad. Esto se enuncia formalmente en los siguientes corolarios.

Corolario 3.2 *El espacio de complejidad dual C^* es Smyth-completo.*

Este resultado es inmediato debido a lo mencionado anteriormente en el teorema 3.5.

Corolario 3.3 *El espacio de complejidad C es Smyth-completo.*

Dada la isometría entre C y C^*, el resultado anterior es inmediato también, con lo cual se concluye nuestra tarea de esta sección.

Estos resultados serán de mucha utilidad en el siguiente capítulo, en el cual se explota la completitud de Smyth de C para calcular la complejidad de algunos tipos especiales de algoritmos divide y vencerás probabilistas.

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Algoritmos divide y vencerás probabilistas

Como se mencionó en capítulos anteriores, una relación de recurrencia hace referencia a una ecuación que define una secuencia de forma recursiva, esto es, cada término de la secuencia queda definido como una función de los términos anteriores. Sea $T(n)$ el n-ésimo término de la secuencia definido por la relación de recurrencia T, una solución de T es una función sobre $\mathbb{N}$ que satisface la relación de recurrencia para todo $n \in \mathbb{N}$.

Un ejemplo usual, ya mencionado en el capítulo 1, es la relación de recurrencia T que define la función factorial $f(n) = n!$ de la forma $T(0) = 1$, $T(n) = nT(n-1)$. Consideremos ahora, para este ejemplo, el funcional Φ definido por $\Phi f(n) = nf(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Phi f(0) = 1$, así este funcional transforma la función f en un relación de recurrencia Φf. De forma análoga pueden asociarse funcionales a cada relación de recurrencia.

La asociación de un funcional a un programa recursivo es de mucha utilidad para los propósitos que se expondrán en esta sección, pues de la noción de este funcional surge la formalización de los programas recursivos: estos son obtenidos como el punto fijo del funcional Φ sobre el espacio de funciones correspondiente. En este caso, y como una simplificación deliberada, consideramos el funcional sobre el espacio de funciones que tienen por dominio $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\mathbb{N}$ por codominio, admitiendo algunas indeterminaciones. De igual forma, este funcional Φ es útil en la formalización de las funciones de complejidad, ya que estas pueden ser vistas como los únicos puntos fijos de los funcionales asociados con las ecuaciones de recurrencia que especifican la complejidad de un programa. El contenido de esta sección puede consultarse con más detalle en [6].

Sea $C_0 = \{f \in C : f(n) < \infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ donde C es el espacio de complejidad ya definido anteriormente.

Definición 4.1 *Sea $\Phi : (C, d_c) \longrightarrow (C, d_c)$ un funcional, se dice que éste es un funcional de mejora respecto a una función $f \in C_0$ si para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que $\Phi^{n+1} f \leq \Phi^n f$.*

Nótese que si Φ es monótono creciente (es decir, si $\Phi f \leq \Phi g$ siempre que $f \leq g$), para probar que Φ es un funcional de mejora respecto a f, basta con mostrar que $\Phi f \leq f$.

Intuitivamente, un funcional de mejora es un funcional que corresponde a una transformación de los algoritmos, de tal forma que las aplicaciones iterativas de dicha transformación a un algoritmo dado conducen a un algoritmo mejorado en cada paso de la iteración.

Uno de los objetivos de esta sección es mostrar que para muchas relaciones de recurrencia en las cuales se basa la estructura recursiva de los algoritmos divide y vencerás probabilistas, los funcionales asociados a estos algoritmos tienen un único punto fijo, el cual es la solución para su ecuación de recurrencia. Esto se logra construyendo un funcional monótono decreciente Φ asociado a una relación de recurrencia dada T, para el cual existe una función de complejidad g tal que $g \leq \Phi g$, y dada la completitud según Smyth del espacio (C, d_c), la secuencia de iteraciones $(\Phi^k g)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en (C, d_c^s) a alguna función $f_T \in C$ la cual es el único punto fijo de Φ, y por tanto, también la solución a la relación de recurrencia T. Además, si Φ es un funcional de mejora para alguna $g \in C_0$, entonces $f_T \leq g$ y por tanto $f_T(n) \in O(g(n))$.

Enunciaremos algunos resultados auxiliares con el objetivo de probar la existencia de puntos fijos para funcionales $\Phi : (C, d_c) \longrightarrow (C, d_c)$.

Proposición 4.1 *Sea $\Phi : C \longrightarrow C$ un funcional monótono creciente. Si existe $g \in C$ tal que $g \leq \Phi g$, entonces existe $f \in C$ que satisface*

i) $\lim_{k \longrightarrow \infty} d_C^s(f, \Phi^k g) = 0$

ii) $\Phi^k g \leq f \leq \Phi f$*, para toda* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración: Dado que Φ es monótona creciente y $g \leq \Phi g$, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que $\Phi^k g \leq \Phi^{k+1} g$. De aquí que $d_C(\Phi^k g, \Phi^{k+1} g) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, esto es $(\Phi^k g)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión K-Cauchy por la izquierda en (C, d_c). Ahora, dado que (C, d_c) es Smyth completo, existe $f \in C$ tal que $\lim_{k \longrightarrow \infty} d_C^s(f, \Phi^k g) = 0$, de este modo el inciso i) queda probado.

Ahora, sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, dada la convergencia mostrada en el inciso anterior, existe $j \geq k$ tal que $d_c^s(f, \Phi^j g) < \epsilon$. Luego, por la desigualdad triangular y dado que $d_c(\Phi^k g, \Phi^j g) = 0$, se tiene

$$d_c(\Phi^k g, f) \leq d_c(\Phi^k g, \Phi^j g) + d_c(\Phi^j g, f) = d_c(\Phi^j g, f) \leq d_c^s(\Phi^j g, f) < \epsilon.$$

De aquí que $d_c(\Phi^k g, f) = 0$, lo cual conduce a $\Phi^k g \leq f$.

Para la otra desigualdad, dado que Φ es monótona creciente, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple $\Phi^{k+1} g \leq \Phi f$ y

$$d_c(f, \Phi f) \leq d_c(f, \Phi^{k+1} g) + d_c(\Phi^{k+1} g, \Phi f) = d_c(f, \Phi^{k+1} g) \leq d_{c^s}(f, \Phi^{k+1} g) \longrightarrow 0,$$

de aquí se sigue que $d_c(f, \Phi f) = 0$, lo cual conduce a que $f \leq \Phi f$, con lo cual concluye la prueba del inciso ii). ■

Proposición 4.2 *Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en C_0. Si existe $f \in C_0$ tal que $\lim_{k\longrightarrow\infty} d_c^s(f, f_k) = 0$, entonces $(f_k)_k$ converge puntualmente a f respecto a la métrica euclidiana, es decir, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ se cumple que $\mid f(n) - f_k(n) \mid < \epsilon$.*

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, y sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Dado que $\lim_{k\longrightarrow\infty} d_c^s(f, f_k) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mid \frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f_k(n)} \mid = 0$, se tiene que se cumple $\lim_{k\longrightarrow\infty} \mid \frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f_k(n)} \mid = 0$, de donde existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$,

$$\left| \frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f_k(n)} \right| < \frac{\epsilon}{f(n)(f(n) + \epsilon)}.$$

De aquí que para todo $k \geq k_0$

$$f_k(n) f(n) \left| \frac{f_k(n) - f(n)}{f(n) f_k(n)} \right| < \frac{f_k(n)\epsilon}{(f(n) + \epsilon)},$$

equivalentemente

$$|f(n) - f_k(n)| < \frac{f_k(n)\epsilon}{(f(n) + \epsilon)} \tag{4.1}$$

Además

$$\frac{1}{f(n)} - \frac{\epsilon}{f(n)(f(n) + \epsilon)} = \frac{f(n)(f(n) + \epsilon) - f(n)\epsilon}{f(n)^2 (f(n) + \epsilon)} < \frac{1}{f_k(n)}$$

de donde

$$f_k(n) < \frac{f(n)^2 (f(n) + \epsilon)}{f(n)(f(n) + \epsilon - \epsilon)} = f(n) + \epsilon$$

para todo $k \geq k_0$. Por tanto, de (4.1) y de la desigualdad anterior, se obtiene

$$|f(n) - f_k(n)| < \epsilon$$

para toda $k \geq k_0$, con lo cual queda probado el resultado. ■

Una vez probados estos resultados auxiliares, procederemos a la prueba del resultado principal de esta sección, el cual se presenta acontinuación.

Teorema 4.1 *Sea T una relación de recurrencia, supongamos que existe $n_0 \geq 2$ tal que para todo $n \geq n_0$*

$$T(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)T(k),$$

donde $u \in C_0$ y $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en $\mathbb{N}$ que cumplen que para algún $K > 0$ y para todo $n > n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} v_k(n) \leq K.$$

Entonces el funcional $\Phi : C \longrightarrow C$ definido para toda $f \in C$ de la forma $\Phi f(0) = T(1)$, $\Phi f(n) = T(n)$ para $n = 1, ..., n_0 - 1$, y

$$\Phi f(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)f(k)$$

para todo $n \geq n_0$, tiene un único punto fijo $f_T \in C_0$ el cual es la solución de la relación de recurrencia T. Más aún, si Φ es un funcional de mejora para alguna $g \in C$, entonces $f_T \leq g$, esto es, la solución de la relación de recurrencia es de orden $O(g)$.

Demostración: Notemos que para toda $f \in C$, efectivamente $\Phi f \in C$, pues dado que $u \in C$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\Phi f(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{u(n)} < \infty, \text{ pues } u(n) \leq \Phi f(n).$$

Podemos observar que Φ es monótono creciente, en efecto, sean $f, g \in C$ con $f \leq g$, por definición $\Phi f(0) = T(1) = \Phi g(0)$ y $\Phi f(n) = T(n) = \Phi g(n)$ para $n = 1, ..., n_0 - 1$. Además, para $n \geq n_0$

$$\Phi f(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)f(k) \leq u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)g(k) = \Phi g(n).$$

Sea la función $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow (0, \infty)$ definida como $g(0) = T(1)$, $g(n) = T(n)$ para $n = 1, ..., n_0 - 1$, y $g(n) = u(n)$ para todo $n \geq n_0$. Claramente $g \in C_0$, pues $u \in C_0$. Más aún, dada la construcción de Φ y de g, se tiene que

$$g(0) = T(1) = \Phi g(0),$$

además, para $n = 1, ..., n_0 - 1$

$$g(n) = T(n) = \Phi g(n),$$

y para $n \geq n_0$

$$g(n) = u(n) \leq u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)g(k) = \Phi g(n),$$

de donde Φ y g cumplen las condiciones de la proposición 4.1, la cual garantiza la existencia de $f_T \in C$ tal que $\lim_{k\longrightarrow\infty} d_C^s(f_T, \Phi^k g) = 0$ y $\Phi^k g \leq f_T \leq \Phi f_T$ para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Debido a la contrucción de Φ y dado que $g, u \in C_0$, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Phi^k g \in C_0$. Lo siguiente es probar que $f_T \in C_0$, hagamos esto por contradicción: sea j el primer entero no negativo tal que $f_T(j) = \infty$. Luego, dado que $f_T \leq \Phi f_T$, se sigue que $\Phi f_T(j) = \infty$, esto es, ya no está definido por una relación de recurrencia, de donde $j \geq n_0$ y

$$\Phi f_T(j) = u(j) + \sum_{k=1}^{j-1} v_k(j) f_T(k) < \infty,$$

lo cual es una contradicción, por tanto, $f_T \in C_0$. De esto último se tiene que f_T y $(\Phi^k g)_k$ satisfacen las condiciones de la proposición 4.2, lo cual asegura la convergencia puntual de $(\Phi^k g)_k$ a f_T.

Ahora probemos que f_T es un punto fijo de Φ ($\Phi f_T = f_T$), y por tanto es solución de la relación de recurrencia T. Para esto recuérdese primero que, por la definición de Φ y la de g,

$$\Phi f_T(0) = T(1) = \Phi g(0) = g(0) \quad \text{y,}$$
$$\Phi f_T(n) = T(n) = \Phi g(n) = g(n)$$

con $n = 1, ..., n_0 - 1$. Esto es, tenemos que $\Phi f_T(n) = \Phi g(n) = g(n)$, para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$, de donde $\Phi f_T(n) = \Phi^k g(n)$ para todo $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$ y todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además por la proposición 4.1, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Phi^k g \leq f_T \leq \Phi f_T ...(*)$, lo cual conduce a la conclusión de que $f_T(n) = \Phi f_T(n)$ para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$. Además, dada la construcción de Φ,

$$\Phi g(n_0) = u(n_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n_0)g(k) = u(n_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n_0) f_T(k) = \Phi f_T(n_0)$$

de donde por (*) se cumple que $\Phi f_T(n_0) = f_T(n_0)$. Resta probar el caso en el que $n > n_0$, para esto sean $n > n_0$ fijo y $\epsilon > 0$. Por la convergencia puntual, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que para $k = n_0, ..., n - 1$,

$$\left| f_T(k) - \Phi^j g(k) \right| < \epsilon.$$

Nótese que $f_T(n) = \Phi^j g(n)$ para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$. Luego se sigue que

$$\Phi f_T(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n) f_T(k)$$

$$
\begin{aligned}
&< u(n) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n) f_T(k) + \sum_{k=n_0}^{n-1} v_k(n)(\epsilon + \Phi^j g(k)) \\
&= \epsilon \sum_{k=n_0}^{n-1} v_k(n) + u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)\Phi^j g(k) \\
&= \epsilon \sum_{k=n_0}^{n-1} v_k(n) + \Phi^{j+1} g(n) \leq K\epsilon + f_T(n),
\end{aligned}
$$

esto es, para todo $n > n_0$, $\Phi f_T(n) \leq f_T(n)$, luego por (*), se tiene la igualdad. Por tanto concluimos que $\Phi f_T = f_T$, con lo cual f_T es un punto fijo de Φ y por tanto solución de la relación de recurrencia T.

A continuación, nos ocupamos de probar que f_T es el único punto fijo de Φ. Para esto supongamos que existe $f'_T \in C$ otro punto fijo de Φ (esto es, $\Phi f'_T = f'_T$). Por la construcción de Φ se tiene que

$$
\begin{aligned}
f'_T(0) = \Phi f'_T(0) = T(1) = \Phi f_T(0) = f_T(0), \qquad \text{y} \\
f'_T(n) = \Phi f'_T(n) = T(n) = \Phi f'_T(n) = f_T(n).
\end{aligned}
$$

para $n = 1, ..., n_0 - 1$. Luego

$$\Phi f'_T(n_0) = u(n_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n_0) f'_T(k) = u(n_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n_0) f_T(k) = \Phi f_T(n_0)$$

de donde $f'_T(n_0) = f_T(n_0)$. Aplicando inducción, se llega a que $f'_T(n) = f_T(n)$ para todo $n > n_0$. Por todo lo anterior, f_T es el único punto fijo de Φ.

Finalmente, supongamos que Φ es un funcional de mejora para alguna $g \in C$. Como se mencionó anteriormente, esto implica que $\Phi g \leq g$. Así, se tiene que $f_T(n) = \Phi g(n) \leq g(n)$ para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$. Por tanto,

$$f_T(n_0) = u(n_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n_0) f_T(k) \leq u(n_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n_0) g(k) = \Phi g(n_0) \leq g(n_0),$$

y por inducción, es fácil concluir que $f_T(n) \leq g(n)$ para todo $n > n_0$. Con todo lo anterior, la prueba queda concluida. ■

A continuación, ilustraremos cómo se utiliza este resultado para analizar la complejidad de algoritmos divide y vencerás probabilistas

Ejemplos

Para comenzar, es necesaria una observación respecto al resultado anterior, la cual será útil para los fines del análisis de complejidad de los algoritmos en esta sección.

Observación: Si la relación de recurrencia T es tal que $T(1) = 0$ y $T(n) > 0$ para todo $n \geq 2$, podemos construir la relación de recurrencia S definida como $S(n) = T(n+1)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema anterior, S tiene una solución única en C_0, sea esta f_s. Luego, la función $f_T : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f_T(1) = 0$ y $f_T(n) = f_s(n-1)$ para todo $n \geq 2$ es la única solución de T.

Los algoritmos divide y vencerás probabilistas presentan una ecuación de recurrencia que en el caso general se ve como sigue:

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \sum_{k=1}^{n-1} q(n,k)T(k)$$

donde $T(1) \geq 0$, $c_1 > 0$ y $2c_1 + c_2 > 0$, y para todo $k \geq n-1$, y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $q(n,k)$ es no negativa y proporcional a las probabilidades marginales correspondientes a la división de una tarea de tamaño n en sub-tareas de tamaño $k < n$. Nótese que dado que $2c_1 + c_2 > 0$, se tiene que se cumple $T(2) = 2c_1 + c_2 + T(1)q(2,1) > 0$, por tanto $T(n) > 0$ para todo $n \geq 2$.

Existen muchas formas posibles para la función $q(n,k)$, algunos ejemplos típicos son:

$$A)\frac{\alpha}{n}, \qquad B)\frac{2\alpha(n-k)}{n(n+1)}, \qquad C)\frac{\alpha}{n}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j}, \qquad D)\frac{2\alpha(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)},$$

con $\alpha > 0$, los cuales aparecen en algoritmos divide y vencerás probabilistas, en árboles de búsqueda binaria, en búsquedas completamente especificadas y consultas parciales en árboles cuaternarios y algoritmos Quicksort de mediana-de-tres.

En este trabajo sólo ahondaremos en los primeros dos casos mencionados, A) y B), para ilustrar el empleo del resultado principal de este capítulo en el análisis de complejidad de algoritmos con estas ecuaciones de recurrencia.

CASO A): En este caso, la relación de recurrencia T está dada por

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n-1} T(k), \qquad \text{para toda } n \geq 2.$$

Por la observación anterior, podemos asumir que $T(1) > 0$, con lo cual podemos aplicar el teorema 4.1, con $n_0 = 2$, $u(n) = c_1 n + c_2$ para $n \geq n_0$, $u(0) = u(1) = c > 0$ con c

arbitrario y $v_k(n) = \frac{\alpha}{n}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto T tiene una solución única $f_T \in C_0$. Nótese que para todo $n > 2 = n_0$ se cumple

$$\sum_{k=2}^{n-1} v_k(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\alpha}{n} = \frac{\alpha(n-2)}{n} < \alpha.$$

Lo siguiente es obtener una clase de funciones de complejidad para las cuales el funcional Φ asociado a T es un funcional de mejora. Esto con el fin de acotar a f_T con estas funciones (cuyo orden O busca también obtenerse), y encontrar el orden O de f_T.

Notemos que para cada $n \geq 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
T(n+1) &= c_1(n+1) + c_2 + \frac{\alpha}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T(k) \\
&= c_1(n+1) + c_2 + \frac{\alpha}{n+1} \left(T(n) + \sum_{k=1}^{n-1} T(k) \right) \\
&= c_1(n+1) + c_2 + \frac{\alpha}{n+1} \Big(T(n) + \frac{n}{\alpha}(T(n) - (c_1 n + c_2)) \Big) \\
&= c_1(n+1) + c_2 + \frac{\alpha}{n+1} T(n) + \frac{\alpha n}{\alpha(n+1)} T(n) - \frac{\alpha n}{\alpha(n+1)}(c_1 n + c_2) \\
&= c_1(n+1) + c_2 - \frac{n(c_1 n + c_2)}{n+1} + \frac{n+\alpha}{n+1} T(n) \\
&= \frac{c_1(2n+1) + c_2}{n+1} + \frac{n+\alpha}{n+1} T(n) = h(n+1) + \frac{n+\alpha}{n+1} T(n),
\end{aligned}$$

donde $h(n+1) = \dfrac{c_1(2n+1)+c_2}{n+1}$ para todo $n \geq 2$.

Así, utilizando la definición original de T,

$$T(2) = 2c_1 + c_2 + \frac{\alpha}{2} T(1),$$

y mediante la relación descrita anteriormente, para $n \geq 3$

$$T(n) = h(n) + \frac{n+\alpha-1}{n} T(n-1).$$

Por tanto, podemos expresar Φ como $\Phi f(0) = \Phi f(1) = T(1)$, $\Phi f(2) = T(2)$ (por la observación al inicio de la sección de ejemplos), y

$$\Phi f(n) = h(n) + \frac{n+\alpha-1}{n} f(n-1)$$

para $n \geq 3$, con $h(n) = \dfrac{c_1(2n-1)+c_2}{n}$.

Luego nótese que para funciones $g \in C$ que satisfagan que $T(n) \leq g(n)$ considerando $n = 0, 1, 2$, y

$$h(n) + \frac{n+\alpha-1}{n} g(n-1) \leq g(n) \qquad \text{para } n \geq 3, \tag{4.2}$$

Φ es un funcional de mejora, pues $\Phi g \leq g$, y luego, por el teorema principal de este capítulo, la solución f_T de la relación de recurrencia T satisface $f_T \leq g$.

Dicho lo anterior, mostremos que para $0 < \alpha \leq 2$ y $a > 1$, $f_T(n) \in O(n \log_a n)$. En efecto, notemos que para $K, r > 0$ y $a > 1$ aplicando L'Hopital dos veces se llega a

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{K[x^2(\log_a x - \log_a(x-1)) + \log_a(x-1)]}{rx+s} = \frac{K}{r \ln a},$$

luego, si $K > r \ln a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$

$$Kn \log_a n > \frac{n+1}{n} K(n-1) + \frac{rn+s}{n}.$$

Así para el caso particular en que $r = 2c_1$ y $s = c_2 - c_1$, obtenemos que para $0 < \alpha \leq 2$ y $n \geq n_0$,

$$Kn \log_a n > \frac{n+\alpha-1}{n} K(n-1)\log_a(n-1) + \frac{c_1(2n-1)+c_2}{n}. \tag{4.3}$$

Por lo tanto $g(n) = Kn \log_a n$, con $K > 2c_1 \ln a$, y $n \geq n_0$, satisface la desigualdad (4.2), es decir, pertenece a la clase de funciones para las cuales Φ es un funcional de mejora, lo cual nos lleva a concluir que $f_T(n) \in O(n \log_a n)$ siempre que $0 < \alpha \leq 2$.

CASO B): En este caso, la relación de recurrencia T está dada por

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \frac{2\alpha}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)T(k), \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Al igual que en el caso A), podemos asumir que $T(1) > 0$, con lo cual T satisface las condiciones del teorema para $n_0 = 2$. Así se tiene que
$v_k(n) = \dfrac{2\alpha(n-k)}{n(n+1)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $u \in C_0$, con $u(0) = u(1) = c > 0$ (para c arbitrario) y $u(n) = c_1 n + c_2$ para $n \geq 2$. Nótese que

$$\sum_{k=2}^{n-1}(n-k) = \sum_{k=2}^{n-1} n - \sum_{k=2}^{n-1} k = n(n-2) - \left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right] = \frac{n^2-3n+2}{2},$$

de donde

$$\sum_{k=2}^{n-1} v_k(n) = \frac{2\alpha}{n(n+1)} \sum_{k=2}^{n-1}(n-k) = \frac{\alpha(n^2-3n+2)}{n(n+1)} < \frac{\alpha(n-2)}{n+1},$$

para todo $n > 2$, pues $n - 3 + \frac{2}{n} < n - 2$ siempre que $n > 2$.

Por el teorema 4.1, podemos deducir que la relación de recurrencia T tiene una única solución $f_T \in C_0$. Como hicimos en el caso anterior, buscaremos una clase de funciones de complejidad para las cuales el funcional Φ asociado a la relación de recurrencia T sea un funcional de mejora. Esto con el fin de acotar a f_T por estas funciones (preferentemente de orden O conocido) y encontrar el orden O de f_T. Para esto notemos que para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} T(n+1) &= c_1(n+1) + c_2 + \tfrac{2\alpha}{(n+1)(n+2)} \textstyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)T(k) \\ &= c_1(n+1) + c_2 + \tfrac{2\alpha}{(n+1)(n+2)} \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)T(k) + \sum_{k=1}^{n} T(k)\right) \\ &= c_1(n+1) + c_2 \\ &\quad + \tfrac{2\alpha}{(n+1)(n+2)} \left(\tfrac{n(n+1)}{2\alpha}(T(n) - (c_1 n + c_2)) + \textstyle\sum_{k=1}^{n} T(k)\right) \\ &= \left(c_1(n+1) + c_2 - \tfrac{n(c_1 n + c_2)}{n+2}\right) + \tfrac{n}{n+2}T(n) + \tfrac{2\alpha}{(n+1)(n+2)} \textstyle\sum_{k=1}^{n} T(k). \end{aligned}$$

Por tanto, de la definición original de T tenemos que

$$T(2) = 2c_1 + c_2 + \frac{\alpha}{3}T(1),$$

y utilizando la ecuación anterior, obtenemos que para $n \geq 3$

$$T(n) = h(n) + \frac{n-1}{n+1}T(n-1) + \frac{2\alpha}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} T(k),$$

donde

$$h(n) = c_1 n + c_2 - \frac{(n-1)(c_1(n-1)+c_2))}{n+1} = \frac{c_1(3n-1)+2c_2}{n+1}.$$

Así, el funcional Φ asociado a T puede expresarse como

$$\Phi f(0) = \Phi f(1) = T(1), \qquad \Phi f(2) = T(2),$$

$$\Phi f(3) = h(3) + \frac{1}{2}T(2) + \frac{\alpha}{6}(T(1) + T(2)), \quad \text{y}$$

$$\Phi f(n) = h(n) + \frac{n-1}{n+1} f(n-1) + \frac{2\alpha}{n(n+1)} \left(T(1) + T(2) + \sum_{k=3}^{n-1} f(k) \right)$$

para todo $n \geq 4$. Luego si $g \in C$ es monótona decreciente (es decir, si se cumple que $g(n) \leq g(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) y satisface que $T(n) \leq g(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3$ y

$$\frac{c_1(3n-1) + 2c_2}{n+1} + \frac{(n-1)(n+2\alpha)}{n(n+1)} g(n-1) \leq g(n) \quad \text{para } n \geq 4,$$

entonces Φ es un funcional de mejora para g (pues $\Phi g(n) \leq T(n) \leq g(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3$ y

$$\Phi g(n-1) \leq \frac{c_1(3n-1) + 2c_2}{n+1} + \frac{(n-1)(n+2\alpha)}{n(n+1)} g(n-1) \quad \text{para } n \geq 4),$$

y por tanto, la solución f_T de la relación de recurrencia T satisace que $f_T \leq g$.

De manera análoga a como se hizo en el caso A), mostremos que para $a > 1$ y $0 < \alpha \leq 3/2$, la función $g(n) = n \log_a n$ satisface las condiciones anteriores, con lo cual podremos deducir que $f_T(n) \in O(n \log_a n)$. Para esto, nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n+1 > \frac{(n-1)(n+3)}{n+1}$, de donde, retomando la inecuación (4.3) se sigue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$,

$$Kn \log_a n > \frac{(n-1)(n+2\alpha)}{n(n+1)} K(n-1) \log_a (n-1) + \frac{c_1(3n-1) + 2c_2}{n+1},$$

siempre que $K > 3c_1 \ln a$ y y $0 < \alpha \leq 3/2$. Esto es, $g(n) = Kn \log_a n$ cumple la condición citada anteriormente, con $K > 3c_1 \ln a$ y $n \geq n_0$. Por lo tanto podemos concluir que para $0 < \alpha \leq 3/2$, se cumple que $f_T(n) \in C(n \log_a n)$.

Conclusiones

En este trabajo, el objetivo fue estudiar la complejidad de algoritmos de programación por medio de la utilización de técnicas del análisis funcional asimétrico aplicado al espacio cuasi-métrico de funciones de complejidad. Como resultado tenemos un escrito con una teoría unificada que engloba muchos resultados de diferentes áreas de la matemática referentes al tema tratado.

Teniendo en mente un trabajo entendible y accesible a un gran número de lectores con conocimientos básicos de matemáticas, este escrito ha sido desarrollado gradualmente. En una primera etapa se proporcionan los conceptos elementales sobre algoritmos y las principales clases de clasificación de acuerdo a su orden de complejidad, haciendo incapié en un tipo especial de algoritmos: los algoritmos divide y vencerás probabilistas. Posteriormente describimos de manera organizada la teoría sobre espacios cuasi-uniformes, cuasi-métricos y normados asimétricamente, ya que en la literatura existente ésta se encuentra dispersa en artículos de diferentes autores. Después describimos el espacio de complejidad de algoritmos que fue establecido por el matemático belga Schellekens en el año de 1995, así como su espacio de complejidad dual y varias propiedades topológicas de estos espacios que han sido obtenidos por el mismo Schellekens y por un grupo de investigadores españoles liderados por Salvador Romaguera en una gran cantidad de artículos. Finalmente tratamos de mostrar con la mayor claridad posible la aplicabilidad de la teoría del espacio cuasi-métrico de funciones de complejidad en la obtención del orden de complejidad de algoritmos divide y vencerás probabilistas.

Bibliografía

[1] Bonilla, S. R., Schellekens, M. (1998). *On the structure of the dual complexity space: The general case*. Extracta mathematicae, 13(2), 249-253.

[2] Cobzas S., *Functional Analysis in Asymmetric normed Spaces*, Mathematics FA arXiv: 006.117v, 2010.

[3] J. M. Hernández Morales, C. H. Castañeda Roldán, L. C. Álvarez Marín, J. L. Hernández López, V. Tochihuitl Bueno, J. L. Carrasco Pacheco, M. A. Ramírez Solano, R. Vázquez Huerta, *Espacios con distancias no simétricas*.

[4] Dugundji James. Topology. *Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London.Sydney, (1966).

[5] Grimaldi, R. P. (1998). *Matemáticas discreta y combinatoria: introducción y aplicaciones*. Pearson Educación.

[6] García-Raffi, L. M., Romaguera, S., Schellekens, M. P. (2008). *Applications of the complexity space to the general probabilistic divide and conquer algorithms*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 348(1), 346-355.

[7] H.P.A Künzi, *Nonsymmetric topology*, in: Proc. Colloquium on Topology, 1993, Szekszárd, Hungary, Colloq. Math. Soc. János Bolyai Math. Studies 4 (1995) 303-338.

[8] García-Raffi L.M., S. Romaguera and E. A. Sánchez Pérez, *Sequence spaces and asymetric norms in the theory of computational complexity*, Math. Comput. Model. 36, (2002), 1-11.

[9] García-Raffi L.M., S. Romaguera and E. A. Saánchez Pérez, *The bicompletition of an asymetric normed linear space*, Acta Math. Hungar. 97, (2002), 183-191.

[10] García-Raffi L.M., S. Romaguera and E. A. Saánchez Pérez, *The dual space of an asymetric normed linear space*, Quaestiones Mathematicae 26, (2003), 83-96.

[11] García-Raffi L.M., S. Romaguera and E. A. Saánchez Pérez and O. Valero, *Metrizability of the unit ball of the dual of quasi-normed cone*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 7 (2004), no. 2, 483-492.

[12] Kelly J. C. *Bitopological spaces*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 13. (1963), 71-89.

[13] Oltra S and Valero O, *Isometries on quasi-normed cones and bicompletation*, New Zeland J. Math. 33 (2004) 83-90.

[14] Romaguera, S., Schellekens, M. (1999). *Quasi-metric properties of complexity spaces.* Topology and its Applications, 98(1), 311-322.

[15] Rosen, K. H., Krithivasan, K. (2012). *Discrete mathematics and its applications: with combinatorics and graph theory.* Tata McGraw-Hill Education.

[16] Schellekens, M. (1995). *The Smyth completion: a common foundation for denotational semantics and complexity analysis.* Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 1, 535-556.

[17] Rudin, W. (1964). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3). New York: McGraw-hill.

[18] Royden, H. L.,Fitzpatrick, P. (1968). *Real analysis* (Vol. 2). New York: Macmillan.

[19] Hernández Morales, J. M., Jiménez Pozo, M. A., *Espacios de Lipschitz con normas asimétricas.*

[20] Künzi, H. P. A. (2009). *An introduction to quasi-uniform spaces.* Contemp. Math, 486, 239-304.

[21] Yescas Aparicio, C., Tenorio Arvide, J. F., Barragán Mendoza, F. *Filtros en topología y algunas aplicaciones.*

[22] Hicks, T. L., Carlson, J. W. (1972). *Some quasi-uniform space examples.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 39(3), 712-716.