

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Instituto de Física y Matemáticas

Ingeniería en Física Aplicada



TESIS

DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTO FINITO
DE LA ECUACIÓN DE PRESIÓN TRANSITORIA
DE UN FLUJO FRACTAL CONTINUO TRIDIMENSIONAL

QUE PRESENTA:

CÉSAR ALEJANDRO LÓPEZ ORTIZ

Director

DR. HUGO DAVID SÁNCHEZ CHÁVEZ

Huajuapán de León, Oaxaca, Junio 2017

e-mail: phy.aalejandro@gmail.com

RESUMEN

Debido a la existencia de confirmaciones experimentales de que los cuerpos rígidos porosos pueden poseer propiedades de escalamiento fractal sobre un rango amplio de longitudes de escala, el modelado físico y matemático de los fenómenos de transporte sobre medios fractales ha tenido mayor interés en los últimos años. Por lo que, el presente trabajo tiene como objetivo principal contribuir al desarrollo del modelado referido y para ello primeramente se hace uso de las ecuaciones de continuidad, de transporte (ecuación de Darcy) y de estado (fluidos ligeramente compresibles) para mostrar los pasos de la obtención de la ecuación de difusión de presión (reproducción del resultado reportado en [14, 15], acto seguido, se obtiene el sistema de ecuaciones fundamentales de la ecuación diferencial fraccionaria de presión transitoria de un flujo fractal continuo tridimensional por medio de la aplicación del Método del Elemento Finito para un elemento tetraédrico lineal, partiendo del hecho de que se puede tratar a un sistema fractal (un medio poroso o fracturado) como un sistema continuo por medio de un conjunto de funciones de transformación, teniendo en cuenta que lo anterior forma parte de un modelo auto-consistente de un continuo fractal basado en operadores diferenciales fraccionarios locales en términos de operadores diferenciales usuales. Esto con el fin de aterrizar las teorías desarrolladas en hidrodinámica fraccionaria a problemas prácticos de la ingeniería en la modelación de la mecánica de fluidos y en los fenómenos de transporte a través de medios porosos.

Para lograr dicho objetivo se recopiló información acerca de los modelos que hacen uso de la geometría fractal y del cálculo fraccionario con el fin de explicar y describir fenómenos naturales que presenten características fractales en un intervalo de longitudes de escala conocidos como pre-fractales, elaborando un marco teórico para futuras referencias.

Debido a que el uso de los algoritmos que se encuentran en los programas de diversos softwares, como son ANSYS o COMSOL, tienen sus bases en el cálculo ordinario, se espera que al aplicar estos nuevos resultados (cálculo fraccional en el continuo fractal) a la simulación computacional se puedan obtener mejores descripciones a problemas más complejos.

ASPECTOS PRELIMINARES

Planteamiento del Problema

Haciendo uso de la ecuación de balance de masa y de la generalización de la ley de Darcy se obtiene la ecuación de difusión de presión para un flujo fractal continuo anisotrópico tridimensional, que es una ecuación diferencial parcial no lineal, misma que, debido a la complejidad y al fuerte impacto potencial que tiene en la ingeniería y la modelación computacional de la mecánica de fluidos, a falta de una solución analítica, se pretende realizar el proceso de discretización de la ecuación referida empleando para tal fin el Método del Elemento Finito auxiliándose del uso de una geometría de tipo tetraédrica lineal.

Justificación

Existen confirmaciones experimentales de que los cuerpos rígidos porosos pueden poseer propiedades de escalamiento fractal sobre un amplio rango de longitudes de escala, sin embargo, debido a la complejidad intrínseca de la geometría, el modelado matemático del transporte sobre fractales no ha sido bien desarrollado como en el caso del continuo Euclidiano. Por lo que, existe la necesidad de modelos más rigurosos y precisos para describir y/o predecir los fenómenos de transporte en un medio poroso. En ese sentido en el presente trabajo se busca contribuir a la solución de problemas relacionados con el análisis de transitorios de presión de fluidos provenientes de medios fractales, cabe señalarse que, hasta el momento las simulaciones reportadas en la literatura y programadas en los softwares comerciales no han incluido otro tipo de geometría que no sea la euclidiana, por lo tanto, es importante la realización del presente trabajo ya que por primera vez se toma en cuenta la geometría real involucrada, misma que no es euclidiana sino fractal.

Hipótesis

Basados en el hecho de que se puede tratar a un sistema fractal (un medio poroso o fracturado) como un sistema continuo por medio de un conjunto de transformaciones adecuadas, es decir, pasar de un material poroso a un material sin huecos, y teniendo en cuenta que lo anterior forma parte de un modelo auto consistente de un continuo fractal basado en operadores diferenciales fraccionarios locales en términos de operadores diferenciales usuales, se supone que es posible realizar el proceso de discretización de la ecuación de presión transitoria para un flujo fractal continuo, siguiendo la metodología tradicional del MEF para problemas de transitorios y poder escribir el sistema fundamental de ecuaciones del MEF para el caso presente.

Objetivo General

Obtener el sistema de ecuaciones fundamentales de la ecuación diferencial fraccionaria de presión transitoria de un flujo fractal continuo tridimensional por medio de la aplicación del Método del Elemento Finito para un elemento tetraédrico lineal y su respectiva solución (numérica o analítica según sea el caso).

Objetivo Específico

1. Enriquecer los conocimientos adquiridos en mecánica de fluidos para comprender y asimilar la teoría de los Modelos Pre-Fractales aplicados a los flujos a través de medios porosos.
2. Desarrollar la ecuación del transiente de presión en términos de operadores del cálculo ordinario.
3. Aplicar el MEF tradicional, con un elemento tetraédrico lineal, aprendido en los cursos básicos en los estudios profesionales, a la ecuación de transiente de presión obtenida anteriormente.
4. Resolver analíticamente (o numéricamente, sea el caso) los procesos de integración que resulten para el sistema de ecuaciones fundamentales obtenidas.
5. Obtener el sistema fundamental de ecuaciones de un elemento finito tetraédrico.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría aprovechar este espacio para agradecer a todas las personas que estuvieron presentes, tanto durante la tesis, como durante mi paso por la universidad

Quiero agradecer primeramente a mis padres, por proporcionarme la ayuda y la paciencia necesaria durante mi recorrido por la universidad así como el tiempo extra que me llevo acabar el presente trabajo. Gracias por todo el esfuerzo que me brindaron.

Quiero agradecer al profesor Dr. Hugo David Sánchez Chávez, por la confianza que me brindo, a la hora de acogerme bajo su asesoramiento para el presente trabajo y brindarme todo el apoyo necesario para su cumplimiento. Le agradezco también al profesor Leonardo por brindar parte de su tiempo en la elaboración del presente trabajo. También a los profesores que se hicieron cargo de mi educación, con mención especial a Salomón, a Santana, Tijerina, Ricardo Rosas, Alejandro Teyo, Maxwell.

También me gustaría de agradecer a mis compañeros que estuvieron conmigo a lo largo de la carrera, a Marvin y a Irving por ser un buenos amigos y motivarme cuando más lo necesitaba, a Karen y a Karina por brindarme su apoyo y amistad incondicional.

Quiero agradecer especialmente a Nani por estar presente en el momento más difícil, quien me apoyo, y estuvo conmigo en los últimos años en mi estadía en la universidad, tiempo que nunca olvidare y recuerdos que atesoraré.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	IV
Aspectos Preliminares	VII
Agradecimientos	VIII
Introducción	1
1. Marco Teórico	3
1.1. Geometría Fractal	3
1.1.1. Fractales Geométricos	5
1.1.2. Pre-Fractales	8
1.2. Modelo del Medio Continuo para un Medio Fractal	9
1.2.1. Densidad Local del Medio Fractal	10
1.3. Homogeneización del medio fractal por medio de la regularización Dimensional	11
1.3.1. Ley de Potencia de masa y el producto de la medida	11
1.3.2. Producto de la medida	12
1.4. Ecuaciones no convencionales de la Mecánica del Continuo	14
1.5. Método del Elemento Finito	15
1.5.1. Método de Galerkin	17
1.5.2. Funciones de interpolación	20
2. Teoría Clásica de la Mecánica de Fluidos	23
2.1. Aspectos Preliminares	24
2.2. Leyes de Conservación	25
2.2.1. Conservación de Masa	25
2.2.2. Ecuación de Cantidad de Movimiento	25
2.2.3. Conservación de la Energía	27
2.3. Medios Porosos	28
2.3.1. Yacimientos Naturalmente Fracturados	29
2.3.2. Modelos Fractales de Medios Permeables	30

2.3.3. Ley de Darcy	31
2.3.4. Ecuación de un Transiente de Presión	32
2.4. Mecánica de Fluidos Computacional	33
2.4.1. Punto de Vista Computacional-Científico	35
3. Descripción del Modelo Pre-Fractal	39
3.1. El concepto de flujo continuo fractal	39
3.1.1. Métrica Fractal del continuo fractal	40
3.1.2. Cálculo fraccionario del continuo fractal	41
3.1.3. Cinemática y dinámica del continuo fractal	44
3.2. Leyes de conservación para el flujo continuo fractal	46
3.2.1. Ecuación del Balance de Masa	46
3.2.2. Ecuación del Balance de Momento	47
3.2.3. Ecuación del Balance de Energía	48
3.3. Hidrodinámica del continuo fractal	49
3.3.1. Mapeo del flujo fluido en un medio fractalmente permeable dentro del flujo continuo fractal	49
4. Resultados y Discusión	53
4.1. Discretización de la Ecuación de difusión de Presión en un flujo continuo fractal tridimensional anisotrópico	53
Conclusiones	59
Apéndices	60
A. Función Gamma, Función Beta e Integral de Dirichlet	61
Apéndice A. Función Gamma, Función Beta e Integral de Dirichlet	61
B. Resolución de Integrales	63
Apéndice B. Resolución de Integrales	63

INTRODUCCIÓN

El flujo de fluidos, así como la distribución de masa y el transporte de calor a través de medios porosos y fracturados, se produce en diversas ramas de la ingeniería y de la ciencia [1, 2, 3]. Principalmente, es de especial interés aquellos procesos que ocurren en los yacimientos naturalmente fracturados, ya que dentro de los huecos de poros, fracturas, canales, cavidades y otros espacios no sólidos de las formaciones geológicas se desarrollan diversos procesos como el movimiento de fluidos, solutos (especies químicas) y calor [3]. Sin embargo, el estudio del flujo de fluidos en medios porosos se encuentra limitado debido a la complejidad matemática que pueda presentarse al tratar casos complejos, estas limitaciones están impuestas tanto a las características del fluido, restringiéndolo a ser homogéneo, como a la naturaleza del medio poroso, forzado por conveniencia a ser continuo, comunicado y homogéneo [4, 5]. Pese a que las ecuaciones de Navier-Stokes son fundamentales para describir la dinámica de fluidos más usuales, no son de aplicación inmediata para describir la dinámica del flujo a través de estos medios, pues el fluido avanza por los huecos de la estructura (o matriz) sólida y es preciso tener en cuenta la geometría compleja y la resistencia ofrecida [6].

Un modelo estándar para caracterizar las propiedades hidráulicas de los medios porosos se encuentra en las pruebas de presión [7], las cuales se utilizan ampliamente para analizar y pronosticar el desempeño tanto de depósitos de petróleo [8, 9] como de mantos acuíferos [3] así como de cualquier yacimiento naturalmente fracturado [10]. El objetivo central de las pruebas transitorias de presión, es la caracterización del sistema yacimiento-pozo. Entre los parámetros estimados más comunes se tienen la permeabilidad y porosidad, la presión promedio en el área de drenaje, la detección de heterogeneidades, el grado de comunicación entre zonas del yacimiento, la determinación del estado de flujo del pozo, el volumen poroso del yacimiento, las características de una fractura que intersecta el pozo, la estimación de condiciones de entrada de agua, la estimación del avance del frente de desplazamiento en procesos de inyección, la determinación de daño por penetración parcial, perforaciones, entre otros [11].

Las pruebas transitorias de presión parten del estudio de la ecuación de difusividad, la cual es una combinación de la ecuación de continuidad, la ecuación de transporte (ecuación de Darcy) y una ecuación de estado (fluidos ligeramente compresibles), lo que da como resultado una ecuación diferencial parcial [13, 14]. Esta ecuación diferencial requiere de dos condiciones de frontera, una condición interna (de pozo) y una condición externa (de frontera de flujo), así como una condición inicial. Generalmente, las condiciones de frontera interna que se emplean son de producción o gasto constante o a presión constante, y las de frontera externa son de comportamiento infinito, cerrado o a presión constante [11].

Sin embargo, dada la gran irregularidad que ofrece la matriz sólida, el análisis del flujo según las leyes clásicas de los fluidos con la interacción fluido-estructura resulta un tanto compleja, planteando así una nueva

problemática dentro de la mecánica de fluidos: hallar un procedimiento alternativo que permita describir de forma eficaz tales flujos [4]. Por lo que en [14, 15], tomando en cuenta la formidable estructura de los medios naturales porosos, se propuso un modelo auto-consistente, tomando conceptos útiles de escala de la geometría fractal para cuantificar el transporte de fluidos en medios fractalmente permeables, llevando el estudio de los medios porosos a diferentes enfoques dirigidos a problemas relacionados al flujo de fluidos en depósitos fractales. En dicho modelo se trabaja con un flujo fractal discontinuo Φ^D en un medio fractalmente permeable como un flujo continuo fractal $\Phi_D^3 \subset E^3$, el cual está descrito dentro de un marco continuo, desarrollando de esta manera un modelo del flujo continuo fractal que hace uso de operadores fraccionarios locales en términos de operadores convencionales. Una vez aplicado el modelo al medio poroso se derivan las leyes de conservación fundamentales así como la ecuación de difusión para un flujo fractal continuo. Cabe destacar que el marco geométrico del continuo fractal es el espacio euclidiano con una métrica fractal definida.

En la presente investigación, considerando el flujo continuo hidrodinámico y la topología del flujo fractal, se emplea el método del elemento finito para dar una solución aproximada a la ecuación de un transiente de presión para un flujo fractal continuo anisotrópico tridimensional empleando elementos finitos tetraédricos lineales. Para esto se presenta el trabajo de la siguiente manera: En el CAPITULO 1 se muestran las características y propiedades de los fractales, así como el desarrollo del modelo de medios continuo para medios fractales realizados por Vasily E. Tarasov [17, 18, 19] y Martin Ostoja-Starzewski [20, 21, 22]. También se presenta la formulación del Método del Elemento Finito, sus características y las funciones de interpolación para un elemento tetrédrico lineal. En el CAPITULO 2 se incluye la teoría clásica de la mecánica de fluidos presentando las leyes de conservación de masa, de momento y de energía, además de presentar las propiedades fractales de los medios porosos y como son abordados a partir de la mecánica de fluidos computacional.

En el CAPITULO 3 se generaliza el concepto de flujo fractal continuo propuesto y desarrollado por Balankin tomando en cuenta la topología y la dinámica (no trivial) del continuo fractal, presentando el cálculo vectorial fractal, con los operadores diferenciales fraccionarios locales asociados con la derivada de Hausdorff y las formas generalizadas de los teoremas de Green-Gauss y Kelvin-Stokes. Además de mostrar el Jacobiano fraccionario para el flujo continuo fractal, la derivada material de Hausdorff y el teorema del transporte de Reynolds para el flujo continuo fractal. Se establecen las leyes fundamentales de conservación y se definen la distribución de presión gravitacional y la distribución de presión hidrostática en el continuo fractal. Se trabaja con el análogo de la ley de Darcy y se deriva la ecuación de difusión para el estudio de pruebas de presión transitoria. En el CAPITULO 4 se aplica el Método del Elemento Finito a la ecuación de presión transitoria para un flujo fractal continuo anisotrópico tridimensional abordando la ecuación diferencial de tres formas diferentes, llegando al mismo sistema de ecuaciones elementales para un elemento tetraédrico lineal. Resumiendo y resaltando todo los puntos importantes y algunas conclusiones del trabajo en el CAPITULO 5.

MARCO TEÓRICO

El flujo a través de medios porosos es un tema que se encuentra en muchas ramas de la ingeniería y la ciencia, por ejemplo, la hidrología del agua subterránea, la ingeniería de yacimientos, la ciencia del suelo, la mecánica del suelo y la ingeniería química [1, 2, 3]. Su estudio se puede clasificar en tres períodos importantes. En la primera época, siglo XVIII, se desarrollaron los principios de la mecánica, se fundó la teoría de los fluidos ideales y se estableció el concepto de fracción de volumen. En la época clásica, siglo XIX, se derivó la elasticidad lineal, se obtuvieron las leyes fundamentales de la mecánica continua y la termodinámica, las cuales no son independientes del desarrollo de la teoría de los medios porosos, además se proporcionó el término de plasticidad y se desarrolló la teoría de la mezcla. Durante el último siglo se ha visto el comienzo de la era moderna. En el período comprendido entre 1910 y 1960 se realizaron los primeros intentos de aclarar la interacción mecánica entre líquidos y gases con los sólidos rígidos porosos [25].

Sin embargo a pesar de todos los modelos propuestos, la teoría de los medios porosos aun no se encuentra bien desarrollada, abriendo paso a la elaboración de nuevos modelos [26, 27, 28]. Dentro de estos se encuentran los modelos que hacen uso de conceptos y propiedades de la geometría fractal, llamando a los medios porosos, que cuentan con propiedades de escalamiento fractal, como objetos Pre-Fractales [29, 30, 31]. Mostrando en este capítulo algunas de las propiedades de los fractales, así como algunos ejemplos. También se realizó una recopilación de algunos de los modelos para medio fractales llevados a cabo por Tarasov y Ostoja, siendo trabajos precursores al modelo propuesto por Balankin. Además de presentar la formulación del Método del Elemento Finito desarrollando las funciones de interpolación para un elemento tetraédrico lineal.

1.1. Geometría Fractal

La geometría fractal es una rama de las matemáticas que abrió camino al estudio de objetos geométricos complejos conocidos como **monstruos matemáticos**. El matemático francés Benoit B. Mandelbrot asoció a estos monstruos, del siglo pasado, el nombre de **fractales** en su trabajo “*La geometría fractal de la naturaleza*” [32] donde lo describió como *una figura geométrica fragmentada que puede ser subdividida en partes, cada una de las cuales es una copia reducida en tamaño del original*. La palabra fractal se deriva del latín *Fractus* que significa fracturado y se le atribuyen las siguientes características:

- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Es autosimilar, su forma es hecha de copias más pequeñas de la misma figura.

- Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
- Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

Sin embargo, estas propiedades por si solas no describen todos los objetos que deberían ser considerados como fractales, por lo que se usarán todas las propiedades anteriores para describirlos.

La geometría fractal no solamente es una idea abstracta, si no que se les puede asociar los objetos de la naturaleza, los cuales a menudo tienen propiedades fractales [32, 33, 34, 35]. Por esta razón el concepto fractal se ha empezado a usar para aproximarse más a la realidad y modelar dichos objetos naturales en lugar de usar las geometrías euclidianas. Algunos objetos con propiedades fractales podrían ser árboles, nubes, líneas costeras, montañas, rayos, entre algunos otros más.

En general, los sistemas fractales se dividen en dos clases: La primera clase contiene aquellos sistemas cuya morfología exhibe propiedades fractales, **fractales geométricos**. En la segunda clase están aquellos sistemas cuya dinámica posee propiedades fractales, **fractales dinámicos**, como únicamente se tomará en cuenta la morfología del fractal, se concentrará solamente en ellos [30]. Para estudiar estos conjunto fractales es necesario introducir conceptos como la dimensión Euclidiana, la dimensión Topológica, la dimensión Fractal y el concepto de autosimilaridad, las cuales conducen a las dimensiones enteras y fraccionarias.

Dimensión

El concepto de dimensión está asociado a las *Figuras geométricas de Euclides* por lo que la **dimensión euclidiana** d_E es simplemente el número de coordenadas necesarias para especificar el objeto, por ejemplo la dimensión de un punto es cero; la línea tiene dimensión uno; la dimensión del plano es dos; la dimensión de un cubo sólido es tres.

La **dimensión topológica** d_T considera principalmente la forma del objeto. La topología hace referencia a la manera en que los objetos pueden ser distorsionados de una forma u otra sin perder sus características esenciales, i.e., la dimensión topológica es la misma bajo cualquier transformación del objeto. La dimensión topológica se puede definir de forma sencilla por $d_T = d_{corte} + 1$. Donde d_{corte} es la dimensión de corte, la cual es la dimensión con que corta el espacio con el que se desea calcular su dimensión topológica [12]. Existen 5 dimensiones topológicas, que son: conjunto vacío ($d_T = -1$), un punto ($d_T = 0$) una línea ($d_T = 1$), un plano ($d_T = 2$) y un volumen ($d_T = 3$).

Sin embargo, la dimensión característica de un fractal es su **Dimensión fractal** D_f que es por lo general una dimensión no-entera, mayor que su dimensión topológica d_T y menor que su dimensión euclidiana d_E . La cual se puede definir de las siguientes maneras [30, 32]:

- I. Cubriendo el sistema fractal por hipersferas d -dimensionales que no se traslapan de radio euclidiano R , se cuenta el número de tales esferas $N(R)$ que son requeridas, para tal sistema fractal el número de esferas de radio R que lo cubren se relaciona con el tamaño de las mismas con la expresión del tipo ley

de potencias:

$$N(R) \sim R^{-D}, \quad (1.1)$$

Donde $(N(R))$ es un número adimensional que disminuye conforme R crece. La ecuación (1.1) se puede reescribir de la siguiente forma

$$D = \frac{\ln N}{\ln(1/R)}, \quad (1.2)$$

así, para objetos euclidianos tales como líneas, planos o esferas se tiene $N(R) \sim R^{-1}, R^{-2}$ y R^{-3} respectivamente, y su dimensión fractal efectiva coincide con la dimensión euclidiana.

II. La otra manera es considerando un segmento de un sistema fractal de dimensión lineal L , luego estudiar su volumen $V(L)$ cuando varia L . Si $V(L)$ se calcula cubriendo el sistema por esferas de radio unitario, entonces $V(L) = N(L)$, en donde N es el número de tales esferas requeridas para cubrir el sistema. Para un sistema fractal uno tiene que

$$N(L) \sim L^D, \quad (1.3)$$

se debe tener en cuenta que, con esta definición, implícitamente se asume la existencia del corte inferior y superior para el comportamiento fractal del sistema, esto es, los radios de las hiperesferas (el corte inferior) y el tamaño lineal L del sistema (el corte superior). Calculando D utilizando la ecuación (1.3) se conoce como el *Método box-counting* [33, 34, 35].

Autosimilitud

Según B. Mandelbrot, un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferentes escalas y pueden estar ligeramente deformadas. Los fractales pueden presentar 2 tipos de autosimilitud:

- **Autosimilitud exacta.** Este es el tipo más restrictivo de autosimilitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo se encuentran en fractales definidos por sistemas de funciones iterada.
- **Autosimilitud estadística.** Es el tipo más débil de autosimilitud, se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo [32].

1.1.1. Fractales Geométricos

Algunas estructuras fractales son consecuencia simplemente de un proceso iterativo que consta de un iniciador (estado inicial) y un generador (operación iterativa). En un fractal geométrico la parte es una copia de la totalidad, es decir, la estructura del fractal se repite en cualquier escala de longitud, lo que implica que el sistema tiene *autosimilitud exacta* y de *escala invariante*. Algunos sistemas de este tipo son: el conjunto de Cantor, la Curva de Koch, la carpeta de Sierpinski y la esponja de Menger, entre otros [32, 36].

El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor básico es un conjunto infinito de puntos dentro de un intervalo unitario $[0, 1]$. Se construye de modo recursivo dando los siguientes pasos:

1. El primer paso es tomar el intervalo $[0, 1]$.
2. El segundo paso es quitarle su tercio interior, es decir el intervalo abierto $(1/3; 2/3)$.
3. El tercer paso es quitar a los dos segmentos restantes sus respectivos tercios interiores, es decir los intervalos abiertos $(1/9; 2/9)$ y $(7/9; 8/9)$
4. Los pasos siguientes son idénticos: quitar el tercio de todos los intervalos que quedan. El proceso no tiene fin.

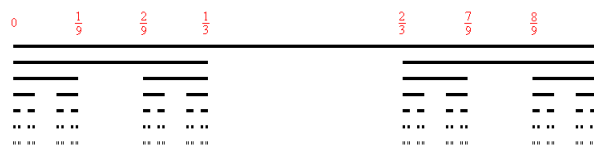


Figura 1.1: Primeros pasos de la construcción del conjunto de Cantor

La curva de Koch

Primero se toma un segmento, se lo divide en tres partes iguales, se reemplaza la parte central por dos partes de igual longitud haciendo un ángulo de 60° . Luego, con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera, lo que da lugar a 16 segmentos más pequeños en la segunda iteración. y así sucesivamente. La figura representa las primeras seis etapas de la construcción.

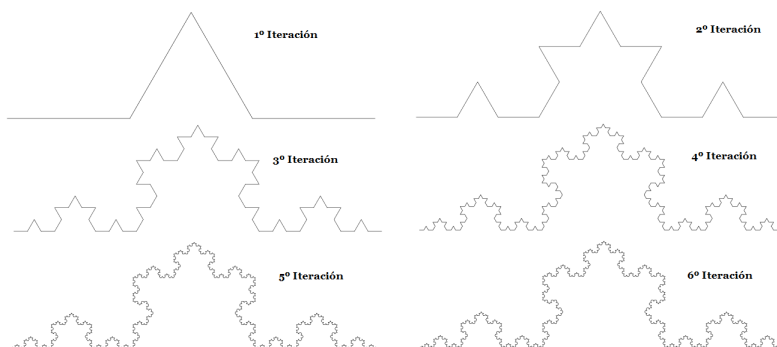


Figura 1.2: Primeros 6 pasos de la construcción de la curva de Koch

Si se considera de nuevo la primera figura, es posible notar que para pasar de una línea a la siguiente se reemplaza tres segmentos por cuatro de igual longitud, o sea que la longitud total es multiplicada por $4/3$. Después de n pasos iterativos en la construcción recursiva la longitud de la curva es $3(4/3)^n$, el límite de la sucesión geométrica anterior de razón $3/4$ es infinito, lo que significa que la figura final tiene una longitud infinita (lo que Mandelbrot denomina *infinito interno*).

La alfombra de Sierpinski

La alfombra de Sierpinski es un conjunto fractal descrito por primera vez por Waclaw Sierpinski en 1916. Constituye una generalización a dos dimensiones del conjunto de Cantor. Su dimensión fractal es $D_f = \log 8 / \log 3 \approx 1,892789\dots$. La construcción de la alfombra de Sierpinski se define de forma recursiva:

1. Se comienza con un cuadrado
2. El cuadrado se corta en 9 cuadrados congruentes, y eliminamos el cuadrado central.
3. El paso anterior vuelve a aplicarse recursivamente a cada uno de los 8 cuadrados restantes.

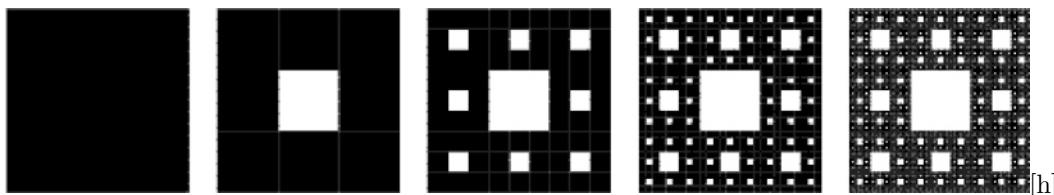


Figura 1.3: Primeros pasos de la construcción de la alfombra de Sierpinski

La esponja de Menger

La esponja de Menger es un conjunto fractal descrito por primera vez en 1926 por Karl Menger mientras exploraba el concepto de dimensión topológica. Al igual que la alfombra de Sierpinski constituye una generalización bidimensional del conjunto Cantor, esta es una generalización tridimensional de ambos. Su dimensión fractal es $D_f = \log 20 / \log 3 \approx 2,7268\dots$. La esponja tiene una superficie infinita y al mismo tiempo encierra un volumen cero. La construcción de la esponja de Menger se define de forma recursiva:

1. Se comienza con un cubo.
2. Se divide cada cara del cubo en 9 cuadrados. Esto subdivide el cubo en 27 cubos más pequeños, como le sucede al cubo de Rubik.
3. Se eliminan los cubos centrales de cada cara (6) y el cubo central (1), dejando solamente 20 cubos.
4. Se repiten los pasos 1, 2 y 3 para cada uno de los veinte cubos menores restantes.

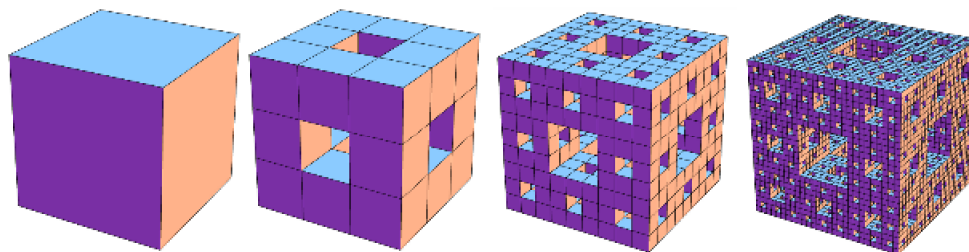


Figura 1.4: Primeros pasos de la construcción de la esponja de Menger

1.1.2. Pre-Fractales

Los sistemas naturales que exhiben propiedades fractales normalmente pierden su fractalidad en escalas de longitud suficientemente pequeñas o suficientemente grandes, es decir, existen piezas del sistema por encima de una cierta escala de longitud (escala de corte inferior para la fractalidad del sistema) que puede ser ampliada para recuperar la estructura del sistema hasta otra escala de longitud (escala de corte superior para su fractalidad), estos sistemas naturales son conocidos como *Pre-fractales* [30, 31].

Desde el punto de vista puramente matemático, las estructuras o patrones en los yacimientos naturalmente fracturados no son fractales porque no completan los requerimientos fundamentales de la fractalidad: No son autosimilares en un rango de escala infinito. En contraste con los patrones fractales matemáticos, las estructuras geológicas presentan un comportamiento aleatorio causado por la falta de homogeneidad del material y por la interacción de los diferentes procesos naturales. Como consecuencia se tienen tres propiedades principales que son geológicamente significativas [31]

1. Las estructuras geológicas tienen diferentes cortes de escalamiento a lo largo del medio.
2. Las estructuras naturales no son homogéneas.
3. La estructuras naturales son diferentes dependiendo de su dirección (anisotropía).

Dentro de las propiedades que se pueden encontrar en los fractales naturales se encuentran:

El **escalamiento de propiedades** de una estructura rocosa, la cual no es constante en varios ordenes de magnitud. La autosimilaridad de los patrones naturales puede variar dependiendo de la escala por lo que una fractalidad diferente en escalas diferentes es regular y no un excepción. El escalamiento es una característica fundamental en los materiales, por ejemplo, los granos de mineral y un aglomerado del mismo poseen diferente fractalidad. Sin embargo, existen estructuras auto-similares en varios órdenes de magnitud. Específicamente, la fractalidad de patrones de fractura puede ser constante desde milímetros hasta algunos kilómetros. La razón de esto aún es desconocida y solo se especula que tienen que ver ciertas características del campo de esfuerzos.

La **inhomogeneidad** es una característica de las estructuras rocosas, consecuencia de varios procesos. Por lo tanto, los estudios para la inhomogeneidad deben ser una parte integral de la cuantificación de la estructura. Una roca pequeña y sus patrones tienden hacia la inhomogeneidad, y en consecuencia, ganan homogeneidad con el incremento de tamaño. La cuantificación de los patrones cerca al tamaño de pequeñas

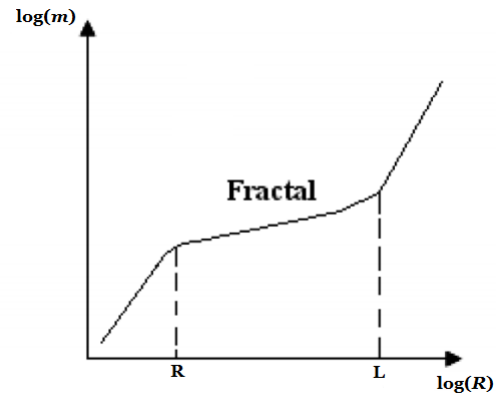


Figura 1.5: Corte inferior (R) y corte superior (L) del comportamiento fractal de un sistema.

fracturas depende de en donde son colocados la línea, el área o el volumen de análisis con respecto a las porciones del patrón. Esto significa a su vez que el patrón se vuelve inhomogéneo a su límite de resolución más baja. Por otro lado un patrón homogéneo se puede volver inhomogéneo a una escala mayor.

La inhomogeneidad con respecto a la escala significa que las sub-estructuras pueden mostrar diversas dimensiones fractales o incluso pueden no ser un fractal. La deformación es un proceso fluido y por lo tanto direccional, en consecuencia, la deformación deja estructuras anisotrópicas que pueden proveer información importante sobre el proceso de la formación de la estructura.

1.2. Modelo del Medio Continuo para un Medio Fractal

Se entiende por **Medio Continuo** un conjunto infinito de partículas que va a ser estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico. En consecuencia, se admite que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas [37].

En general, el medio fractal no se puede considerar como un medio continuo debido a la existencia de puntos y dominios que se encuentran vacíos. Estos dominios, para medios fractales reales, son mejor conocidos como poros. Sin embargo, podemos considerar el medio fractal como un medio continuo para escalas mucho más grandes que el valor medio del tamaño de poro R_p . Este modelo del medio continuo se desarrolló en [17] por Tarasov, del cual se mostraron algunas de sus características.

Considerando una región W_A del medio fractal en un espacio euclidiano tridimensional E^3 , donde A es el punto medio, $V(W_A)$ el volumen, $M(W_A)$ la masa de esta región y $\bar{\rho}(W_A)$ la densidad de masa promedio definida por

$$\bar{\rho}(W_A) = \frac{M(W_A)}{V(W_A)},$$

el medio fractal está caracterizado por las siguientes propiedades:

- (1) **Fractalidad:** Significa que la masa de este medio en cualquier región del espacio euclidiano E^3 se incrementa más lentamente que el volumen de esta región, en otras palabras “*para todas las regiones W_A y W_B en el medio fractal tal que $W_A \subset W_B$ y $V(W_A) < V(W_B)$, se tiene que densidad de masa promedio correspondiente satisface la desigualdad $\bar{\rho}(W_A) > \bar{\rho}(W_B)$ ” [17], i.e.,*

$$W_A \subset W_B, \quad V(W_A) < V(W_B) \Rightarrow \bar{\rho}(W_A) > \bar{\rho}(W_B). \quad (1.4)$$

- (2) **Homogeneidad:** Los medios fractales son llamados homogéneos si la siguiente propiedad se satisface: “*Para todas las regiones W_A y W_B del medio fractal homogéneo tal que los volúmenes sean iguales $V(W_A) = V(W_B)$, las densidades promedio de estas regiones son también iguales $\bar{\rho}(W_A) = \bar{\rho}(W_B)$ ”*, i.e.,

$$V(W_A) = V(W_B) \Rightarrow \bar{\rho}(W_A) = \bar{\rho}(W_B). \quad (1.5)$$

El medio fractal es llamado un medio fractal homogéneo si el valor de la densidad promedio de la región no depende en la traslación de esta región. Considerando esta propiedad, una amplia clase de medios fractales satisface la propiedad de homogeneidad, en muchos casos, se puede considerar el medio poroso, polímeros, agregados coloidales, y aerogel como medios fractales homogéneos [17].

Es posible generalizar la propiedad de fractalidad (1.4) para medios fractales homogéneos. Tomando dos regiones del medio fractal, las cuales satisfacen la condición $W_A \cap W_B = \emptyset$, se tiene la siguiente propiedad: “Para todas las regiones W_A y W_B del medio fractal homogéneo en el espacio euclidiano E^3 que satisface la desigualdad $V(W_A) < V(W_B)$, las densidades promedio están conectadas por la desigualdad $\bar{\rho}(W_A) > \bar{\rho}(W_B)$.”

1.2.1. Densidad Local del Medio Fractal

En muchos casos, el medio está descrito por ecuaciones con integración entera. Sin embargo, esta descripción puede ser incorrecta para medios fractales. Por ejemplo, la masa del medio se deriva mediante la ecuación

$$M(W) = \int_W \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Describiendo la densidad local $\rho(\mathbf{r})$ como una función uni-valuada, entonces no se puede usar la ecuación (1.6) con la integral entera para el medio fractal homogéneo [17]. Y como resultado, las propiedades de fractalidad y homogeneidad del medio no se pueden satisfacer simultáneamente por la ecuación (1.6).

Con el fin de satisfacer estas propiedades, se usa la generalización de (1.6) tal que las propiedades de fractalidad y homogeneidad se puedan ver en la forma [17]

- (1) **Fractalidad:** La masa de la región W del medio fractal obedece una relación de la ley de potencias

$$M(W) = M_0 \left(\left(\frac{V(W_A)}{R_p} \right)^{1/3} \right)^D, \quad (1.7)$$

donde $D < 3$.

- (2) **Homogeneidad:** La densidad local del medio fractal homogéneo es invariante a traslaciones y su valor tiene la forma

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const.} \quad (1.8)$$

Trabajando de esta manera, en lugar de (1.6), con la ecuación

$$M(W) = \int_W \rho(\mathbf{r}) d\mu_D(\mathbf{r}),$$

donde μ_D es una nueva medida del espacio E^3 . Usando la ecuación (1.8), se tiene

$$M(W) = \rho_0 \int_W d\mu_D(\mathbf{r}) = \rho_0 V_D(W),$$

donde $V_D(W)$ es el volumen de la región W . Por lo tanto se obtiene que el medio fractal homogéneo está descrito por el espacio de medida (E, μ) tal que

$$V_D(W) = \frac{\rho_0}{M_0} \left(\frac{V(W)}{R_p} \right)^{D/3},$$

donde $V(W)$ es el volumen usual de la región W , i.e., tenemos $V_D(W) \sim (V(W))^{D/3}$.

1.3. Homogeneización del medio fractal por medio de la regularización Dimensional

1.3.1. Ley de Potencia de masa y el producto de la medida

La aproximación básica para homogeneizar del medio fractal por un continuo fue realizado por Tarasov, donde la masa obedece la ley de potencia

$$m(R) \sim R^D, \quad D < 3, \quad (1.9)$$

con R siendo la longitud de escala de medida (o resolución) y D la dimensión fractal de masa. Notar que la relación (1.9) se puede aplicar a un *pre-fractal*, i.e., a un objeto fractal físico con cortes de autosimilaridad superior e inferior. Más específicamente, Tarasov uso una integral para representar la masa en una región W inmersa en el espacio euclidiano tridimensional E^3 como:

$$m(W) = \int_W \rho(R) dV_D = \int_W \rho(R) c_3(D, R) dV_3, \quad (1.10)$$

donde usando la integral fraccionaria de Riesz, definió los coeficientes de transformación, $c_3(D, R)$, $c_2(d, R)$ y $c(D, d, R)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} c_3(D, R) &= |\mathbf{R}|^{D-3} \frac{2^{3-D} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)} \\ c_2(d, R) &= |\mathbf{R}|^{d-2} \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)} \\ c(D, d, R) &= c_2^{-1}(D, R) c_2(d, R), \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma. Con estas funciones de transformación, usó los siguientes operadores (o derivadas generalizadas):

$$\begin{aligned} \nabla_k^D f &= c_3^{-1}(D, R) \frac{\partial}{\partial x_k} [c_2(d, R) f] \equiv c_3^{-1}(D, R) \nabla_k [c_2(d, R) f], \\ \left(\frac{d}{dt} \right)_D f &= \frac{\partial f}{\partial t} + c(D, d, R) v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Las primera y segunda igualdades de (1.10), involucran una integral fraccionaria (integral fraccionaria de Riesz) y una integral convencional. En (1.10) el coeficiente $c_3(D, R)$ provee una transformación entre las dos integrales, dV_D es un elemento de volumen infinitesimal en el espacio fractal, y dV_3 es el volumen infinitesimal en E^3 . Notar que la expresión (1.10) expresa la idea de una regularización dimensional en física teórica. Para una función $f(x)$ este procedimiento es representado por

$$\int_W f(x) d^D x = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty f(x) x^{D-1} dx. \quad (1.13)$$

Esto es, se comienza con un objeto fractal inmerso en E^3 , cuya dimensión espacial es diferente de 3 pero es algún número real $2 < D < 3$. Lo mismo se hace con la superficie del objeto, el cual tiene su propia dimensión fractal d , con d no necesariamente igual a $D - 1$. Una vez hecha esta aproximación, se escriben las leyes de conservación las cuales involucran integrales de volumen y superficiales sobre el objeto fractal.

Sin embargo, la formulación anterior tiene los siguiente inconvenientes:

1. Involucra una derivada fraccionaria del lado-izquierdo (Riemann-Liouville), la cual, cuando opera sobre una constante, no es generalmente cero.
2. La ecuación obtenida de la derivación mecánica de la ecuación de onda es diferente a la obtenida de la derivación variacional.
3. La ecuación de onda tridimensional no se reduce a la ecuación de onda unidimensional.
4. Esta limitado a medios isotrópicos.

Debido a estos inconvenientes fue necesario el desarrollo de una nueva formulación. Esta nueva formulación toma en general medios anisotrópicos, el medio fractal por lo tanto se encuentra gobernado por una relación de la ley de potencia más general que (1.9) con respecto a cada coordenada (la cual fue originalmente reconocida por Tarasov)

$$m(L_1, L_2, L_3) \sim L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} L_3^{\alpha_3}. \quad (1.14)$$

Entonces la masa esta definida por el producto de la medida

$$m(W) = \int_W \rho(x_1, x_2, x_3) dl_{\alpha_1}(x_1) dl_{\alpha_2}(x_2) dl_{\alpha_3}(x_3), \quad (1.15)$$

mientras la medida de longitud a lo largo de cada coordenada esta dada a través de los coeficientes de transformación $c_1^{(k)}$ (donde $k = 1, 2, 3$ son superíndices que indican que eje representan)

$$dl_{\alpha_k}(x_k) = c_1^{(k)}(\alpha_k, x_k) dx_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.16)$$

La ecuación (1.14) implica que la dimensión de masa fractal $D = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ a lo largo de las diagonales $|x_1| = |x_2| = |x_3|$, donde cada α_k juega el rol de una dimensión fractal en la dirección x_k . Sin embargo en otras direcciones la dimensión fractal del cuerpo fractal anisotrópico no es necesariamente la suma de las dimensiones fractales proyectadas.

1.3.2. Producto de la medida

En el desarrollo de algunos de los modelos para explicar el comportamiento de los Pre-fractales, en los trabajos [22, 39] se desarrolló el producto de la medida de relaciones fraccionarias, con el fin de empezar a trabajar con un espacio entero en lugar de espacios fraccionarios. Empezando con la relación (1.16) lo cual implica que el elemento de volumen fractal infinitesimal, dV_D , esta dado como:

$$dV_D = dl_{\alpha_1}(x_1) dl_{\alpha_2}(x_2) dl_{\alpha_3}(x_3) = c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)} dx_1 dx_2 dx_3 = c_3 dV_3 \quad (1.17)$$

con $c_3 = c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)}$

Para el coeficiente de transformación superficial $c_2^{(k)}$, se considera un elemento de volumen cubico, $dV_3 = dx_1 dx_2 dx_3$, donde sus elementos de superficie están caracterizados por el vector normal a lo largo de los ejes i, j o k . Por lo tanto $c_2^{(k)}$ asociado con la superficie $S_d^{(k)}$ es:

$$c_2^{(k)} = c_1^{(i)} c_1^{(j)} = \frac{c_3}{c_1^{(k)}}, \quad i \neq j, \quad i, j \neq k \quad (1.18)$$

La suma $d^{(k)} = \alpha_i + \alpha_j$, $i \neq j$, $i, j \neq k$, es la dimensión fractal de la superficie $S_d^{(k)}$ a lo largo de las diagonales $|x_i| = |x_j|$ en $S_d^{(k)}$. Esta igualdad no es necesariamente verdadera, pero se espera que se mantenga para fractales que se encuentren en la practica.

En el trabajo [20] se optó por usar la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de Jumarie para la obtención de los coeficientes $c_1^{(k)}$,

$$c_1^{(k)} = \alpha_k \left(\frac{l_k - x_k}{l_{k0}} \right)^{\alpha_k - 1}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.19)$$

donde l_k es la longitud total a lo largo del eje x_k y l_{k0} es la longitud característica en la dirección dada, como el tamaño de poro medio. En la formulación del producto de la medida, la resolución de la longitud de escala es: $R\sqrt{l_k l_k}$. En este mismo trabajo se consideran dos casos especiales:

I. MASA UNIFORME: La masa esta distribuida isotrópicamente en una región cúbica con la relación de la ley de potencia (1.14). Denotando la densidad de masa de referencia por ρ_0 y la longitud del cubo por l , se obtiene

$$m(W) = \rho_0 \frac{l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} l^{\alpha_3}}{l_0^{D-3}} = \rho_0 \frac{l^D}{l_0^{D-3}}, \quad (1.20)$$

la cual es consistente con la ley de potencia de masa (1.9). En general, sin embargo, $D \neq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

II. MASA PUNTUAL: La distribución de masa esta concentrada en un punto, tal que la densidad de masa esta denotada por la función de Dirac $\rho(x_1, x_2, x_3) = m_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$. La integral fraccionaria que representa la masa se convierte en:

$$m(W) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \frac{l^{\alpha_1 - 1} l^{\alpha_2 - 1} l^{\alpha_3 - 1}}{l_0^{D-3}} m_0 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{D-3} m_0, \quad (1.21)$$

cuando $D \rightarrow 3(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rightarrow 1)$, $m(W) \rightarrow m_0$ se recupera el concepto convencional de masa puntual. Notar que la integral fraccionaria de Riesz no esta bien definida excepto cuando $D = 3$ lo que por otro lado muestra una transición no suave de la masa con respecto a sus dimensiones fractales. Esto también sustenta el no usar la integral fraccionaria de Riesz para la obtención de las expresiones $c_1^{(k)}$.

Sin embargo, la formulación anterior ya había sido considerada por Tarasov en [38] y formalizada años después en [39] en donde para cada coordenada x_k se le asocia una dimensión α_k que se relacionan con la expresión:

$$d\mu_k(x_k) = \frac{2\pi^{\alpha_k/2}}{\Gamma(\alpha_k/2)} |x_k|^{\alpha_k - 1} dx_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.22)$$

definiendo de esta manera los coeficientes de transformación $c_1^{(k)}$ como:

$$c_1^{(k)} = \frac{2\pi^{\alpha_k/2}}{\Gamma(\alpha_k/2)} |x_k|^{\alpha_k-1} \quad (1.23)$$

Por lo tanto, la conexión entre la medida $d\mu(\alpha_k, x_k)$ del espacio dimensional no entero y la medida $d\mu(1, x_k)$ del espacio dimensional entero es

$$d\mu(\alpha_k, x_k) = c_1(\alpha_k, x_k) d\mu(1, x_k). \quad (1.24)$$

La función $c_1(\alpha_k, x_k)$ es considerada como una **densidad de estados** del material fractal a lo largo del eje x_k definida por la ecuación

$$c_1(\alpha_x, x) = \frac{c_3(D, x, y, x)}{c_2(d_{yz}, y, z)} \quad (1.25)$$

donde $c_3(D, x, y, x)$ es la densidad de estados en el volumen material, y $c_2(d_{xy}, x, y)$, $c_2(d_{yz}, y, z)$, $c_2(d_{xz}, x, z)$ son las densidades de estado de las secciones transversales XY , YZ , XZ , respectivamente.

Las densidades de estado c_n describen cuan estrechamente empaquetados se encuentran los estados permitidos de las partículas en el espacio \mathbb{R}^n .

1.4. Ecuaciones no convencionales de la Mecánica del Continuo

Las integrales fraccionarias también se pueden usar para describir el proceso dinámico en el medio fractal. Usando las integrales fraccionarias, se describen las ecuaciones dinámicas generalizadas fraccionarias: la ecuación del balance de la densidad de masa, de la densidad de momento y de la densidad de energía, desarrollando de esta manera un marco teórico de la mecánica del continuo en conjuntos fractales, obtenido de los trabajos de Vasily E. Tarasov y Martin Ostoja-Starzewski.

Ecuación de continuidad fractal

Considerando la ecuación de conservación de masa para W

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dV_D = 0 \quad (1.26)$$

Ostoja obtiene la siguiente relación para la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho c_1^{(k)} \nabla_k^D (\rho v_k) = 0 \quad (1.27)$$

mientras que Tarasov obtiene una expresión similar dada por

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D \rho + \rho \nabla_k^D v_k = 0 \quad (1.28)$$

Ecuación de momento lineal fractal

Por otro lado, considerando la ley de balance del momento lineal para W

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{v} dV_D = \mathbf{F}^B + \mathbf{F}^S, \quad (1.29)$$

donde \mathbf{F}^B son las fuerzas de cuerpo y \mathbf{F}^S las fuerzas de superficie, Ostoja obtiene la siguiente relación para la ecuación de momento lineal fractal:

$$\rho \dot{v}_k = X_k + \nabla_l^D \sigma_{lk}, \quad (1.30)$$

donde X_K es la densidad de energía de cuerpo, mientras que Tarasov obtiene:

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D u_k = \rho f_k + \nabla_l^D p_{kl}, \quad (1.31)$$

notando que tienen la misma forma y los mismo términos, cada uno con su respectiva notación.

Ecuación de energía fractal

Partiendo de que la energía total es la suma de la energía cinética (T) y la energía interna (E) es igual al trabajo realizado por las fuerzas de superficies (A_S), más las fuerzas de cuerpo (A_M) más el flujo de calor Q_S que se genera dentro de la región:

$$t \int_W \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV_D = A_M + A_S + Q_S \quad (1.32)$$

Ostoja obtiene en [20] la siguiente relación para la ecuación de energía fractal,

$$\dot{e} = \tau_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \mu_{ij} \dot{\kappa}_{ij} \quad (1.33)$$

mientras que Tarasov obtiene en [19]

$$\rho \left(\frac{d}{dt} \right)_D e = c(D, d, R) p_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \nabla_k^D q_k. \quad (1.34)$$

1.5. Método del Elemento Finito

La aplicación de principios físicos, tales como el balance de masa, la conservación de la energía, el equilibrio, a situaciones de análisis en ingeniería se convierten en ecuaciones diferenciales, las cuales pueden tener la siguiente forma:

$$m \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) + p \bar{\phi} + q = 0 \quad (1.35)$$

Una gran variedad de métodos se han desarrollado para obtener soluciones exactas para varias clases de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, estos métodos no son aplicables a muchos de los problemas prácticos debido a que las ecuaciones diferenciales obtenidas no caen en esta clase o involucran geometrías complejas. Como consecuencia encontrar soluciones analíticas que satisfagan las condiciones de frontera dadas sobre

regiones arbitrarias en 2 o 3 dimensiones se convierte en una tarea muy difícil. Por lo que los métodos numéricos son ampliamente usados para problemas prácticos en todas las ramas de la ingeniería.

El Método del Elemento Finito (MEF) es un de los métodos numéricos matemáticos para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias. Es especialmente útil cuando se tratan condiciones de frontera definidas sobre geometrías complejas que son comunes en aplicaciones prácticas. Otros métodos numéricos tal como el de diferencias finitas o método de elementos de contorno pueden competir o incluso ser superiores al MEF para ciertas clases de problemas. Sin embargo, debido a su versatilidad en el manejo de dominios arbitrarios y disponibilidad de softwares sofisticados comerciales del elemento finito, sobre las últimas décadas, el método del elemento finito se ha convertido en el método preferido para dar solución a muchos problemas prácticos. La aplicación del MEF involucra los pasos siguientes:

1. Desarrollo de las ecuaciones elementales.
2. Discretización de un dominio solución dentro de un mallado de elementos finitos.
3. Ensamble de las ecuaciones elementales.
4. Introducción de las condiciones de frontera.
5. Soluciones para los nodos desconocidos.
6. Cálculo de la solución y relación de cantidades sobre cada elemento.

La idea principal del MEF es discretizar el dominio solución en un número de dominios más simples llamados *elementos*. Una solución aproximada se asume sobre un elemento en términos de soluciones en puntos seleccionados llamados *nodos*. Este proceso resulta en una sistema grande de ecuaciones que deben ser resueltos para determinadas variables nodales.

Desde un punto de vista matemático, el Método del Elemento Finito es una forma especial de los métodos de Galerkin y Rayleigh-Ritz para encontrar una solución aproximada a ecuaciones diferenciales. En ambos métodos, la ecuación diferencial gobernante se convierte primero en una forma integral equivalente, sin embargo el tratamiento varia según el método:

- EL MÉTODO RAYLEIGH-RITZ emplea el cálculo variacional para definir un funcional variacional o de energía equivalente. Una función que minimiza este funcional representa una solución de la ecuación diferencial gobernante.
- EL MÉTODO DE GALERKIN propone una solución aproximada, con uno o más parámetros desconocidos, la cual no satisfará la ecuación diferencial. La forma integral representa el residuo obtenido integrando el error sobre el dominio de la solución. El empleo de un criterio adoptado para minimizar el residuo proporciona ecuaciones para encontrar los parámetros desconocidos.

Para la mayoría de los problemas prácticos, se requieren soluciones de ecuaciones diferenciales para satisfacer no solo la ecuación diferencial sino también las condiciones de frontera en uno o más puntos a lo largo

del dominio de la solución. En ambos métodos, las condiciones de frontera se dividen en dos categorías: las **Condiciones de Frontera Esenciales** son aquellas que deben ser explícitamente satisfechas y las **Condiciones de Frontera Naturales** las cuales se incorporan en la formulación integral. En general, por lo tanto, las soluciones aproximadas no satisfarán exactamente las condiciones de frontera naturales [23].

1.5.1. Método de Galerkin

En el método de Galerkin se propone una forma general de la solución. Esta solución propuesta debe contener algunos parámetros desconocidos cuyos valores son determinados tal que el error entre la solución propuesta y la solución exacta sea tan pequeña como sea posible. La solución propuesta puede tener cualquier forma. Como un ejemplo, se considera una solución en la forma de un polinomial lineal:

$$\bar{\phi} = N_1 + N_2x + N_3y + N_4z \quad (1.36)$$

donde los coeficientes N_i son los parámetros a optimizar. En general esta solución no satisface la ecuación diferencial. Cuando esta solución se sustituyen en una ecuación diferencial el error de la ecuación diferencial gobernante es:

$$e(x, y, z) = m \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) + p\bar{\phi} + q \neq 0$$

El error total, llamado RESIDUAL, se puede obtener integrando $e(x, y, z)$ sobre todo el dominio solución. Sin embargo, en una integración directa de $e(x, y, z)$, los errores positivos y negativos en diferentes puntos se pueden cancelar entre ellos. Para abordar esta cancelación, se multiplica el error por FUNCIONES DE PESO adecuadas y luego se integra sobre el dominio. Debido a que existen n parámetros desconocidos, se necesitan n funciones de peso para establecer la ECUACIÓN RESIDUAL PONDERADA como:

$$\int_{\Omega} e(x, y, z) w_i(x, y, z) dV = 0; \quad i = 0, 1 \dots, n \quad (1.37)$$

Para problemas de campo transitorio, tal como el flujo de fluidos o el flujo de calor, que están gobernados por una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + p\phi + q = m \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.38)$$

donde k_x, k_y, k_z, p, q y m son funciones conocidas de (x, y, z) . La variable solución ϕ es una función de las variables espaciales (x, y, z) y del tiempo t , donde las posibles condiciones de frontera son:

- (i) Condición de Frontera Esencial: u conocida
- (ii) Condición de Frontera Natural: Derivada Normal conocida a lo largo de la frontera

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z \right) = \alpha \phi + \beta$$

donde α y β son parámetros conocidos a lo largo de la frontera.

(iii) Con respecto al tiempo, la ecuación diferencial es de primer orden y por lo tanto es necesario una condición inicial de la forma siguiente:

$$\phi(x, y, z, t = 0) = \phi_0(x, y, z) \quad \text{conocida}$$

Ecuaciones del Elemento Finito

Con el fin de usar el Método de Galerkin, es necesario obtener la Ecuación Residual Ponderada (1.37). Asumiendo W un volumen de un elemento arbitrario, moviendo todos los términos de (1.38) del lado izquierdo, luego multiplicando por las funciones de peso, o funciones de interpolación, N_i e integrando sobre todo el volumen, se obtiene el residual ponderado de Galerkin

$$\iiint_W \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + p\phi + q - m \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) N_i dV = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.39)$$

donde $dV = dx dy dz$ es un volumen diferencial. Usando el teorema de Green-Gauss sobre los primeros tres términos en el residual ponderado, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z \right) N_i dS \\ + \iiint_W \left(-k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} - k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} - k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} + p\phi N_i + qN_i - m \frac{\partial \phi}{\partial t} N_i \right) dV = 0 \end{aligned}$$

donde ∂W es la superficie del elemento. Sobre la superficie existe la posibilidad de encontrar dos condiciones de frontera. Designando la superficie sobre la cual ϕ está definida, dada como ∂W_e y otra sobre la cual su derivada normal se defina como ∂W_n , la integral de superficie se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z \right) N_i dS \\ = \iint_{\partial W_e} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z \right) N_i dS + \iint_{\partial W_n} (\alpha\phi + \beta) N_i dS \end{aligned}$$

Requiriendo que la solución propuesta satisfaga las condiciones de frontera esenciales resulta en que las funciones de peso sean cero sobre ∂W_e . Así obtenemos la forma débil equivalente al problema con valores en la frontera como sigue:

$$\begin{aligned} \iiint_W \left(-k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} - k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} - k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} + p\phi N_i + qN_i - m \frac{\partial \phi}{\partial t} N_i \right) dV \\ + \iint_{\partial W_n} (\alpha\phi + \beta) N_i dS = 0; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Reagrupando todos los términos moviendo del lado izquierdo de la igualdad los que tienen la variable solución y los que no del lado derecho se obtiene el residual ponderado de Galerkin de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \iiint_W \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} - p\phi N_i + m \frac{\partial \phi}{\partial t} N_i \right) dV \\ - \iint_{\partial W_n} \alpha\phi N_i dS = \iiint_W qN_i dV + \iint_{\partial W_n} \beta N_i dS; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.40) \end{aligned}$$

La solución propuesta sobre un elemento se define como:

$$\phi(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} N_1(x, y, z) & N_2(x, y, z) & \cdots & N_n(x, y, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} = N^T \mathbf{d} \quad (1.41)$$

donde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ son las soluciones en los nodos que son funciones del tiempo. Notar que las funciones de interpolación N_i son funciones que solamente dependen de las variables espaciales. Derivando la solución propuesta se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_x^T \mathbf{d} & \frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_y^T \mathbf{d} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_z^T \mathbf{d} & \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \begin{pmatrix} N_1 & \cdots & N_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\phi}_n(t) \end{pmatrix} = N^T \dot{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Sustituyendo las relaciones (1.42) en la ecuación (1.40), se obtiene la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{aligned} \int_W \left\{ N_i N^T \dot{\mathbf{d}} + g_1 \mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T \mathbf{d} + g_2 \mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T \mathbf{d} + g_3 \mathbf{B}_z \mathbf{B}_z^T \mathbf{d} \right\} dV \\ - \mathbf{d} \iint_{\partial W_n} \alpha N_i N^T dS = \iiint_W q N_i dV + \iint_{\partial W_n} \beta N_i dS; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Reagrupando los términos de la integral se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}} \int_W N_i N^T dV + \mathbf{d} \int_W \{ g_1 \mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T + g_2 \mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T + g_3 \mathbf{B}_z \mathbf{B}_z^T \} dV \\ - \mathbf{d} \int_{\partial W_n} \alpha N_i N^T dS = \iiint_W q N_i dV + \iint_{\partial W_n} \beta N_i dS; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Los términos dentro de la segunda integral de volumen se puede acomodar de una forma más compacta colocando las matrices de la siguiente manera:

$$g_1 \mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T + g_2 \mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T + g_3 \mathbf{B}_z \mathbf{B}_z^T = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_x^T \\ \mathbf{B}_y^T \\ \mathbf{B}_z^T \end{pmatrix} \equiv \mathbf{BCB}^T$$

donde

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}$$

sustituyendo se obtiene

$$\dot{\mathbf{d}} \int_{\tilde{W}} N_i N^T dV + \mathbf{d} \int_{\tilde{W}} \mathbf{BCB}^T dV - \mathbf{d} \int_{\partial W_n} \alpha N_i N^T dS = \iiint_W q N_i dV + \iint_{\partial W_n} \beta N_i dS$$

Nombrando las integrales como:

$$M = \int_{\tilde{W}} N_i N^T dV; \quad K_k = \int_{\tilde{W}} \mathbf{BCB}^T dV; \quad K_\alpha = - \int_{\partial W_n} \alpha N_i N^T dS;$$

$$r_\beta = \int_{\partial W_n} \beta N_i dS; \quad r_q = - \int_W q N_i dV$$

obteniendo de esta manera una ecuación diferencial de primer orden con respecto al tiempo:

$$\boxed{M \dot{\mathbf{d}} + (K_k + K_\alpha) \mathbf{d} = r_\beta + r_q} \quad (1.43)$$

Con el fin de evaluar las integrales que definen al elemento, es necesario considerar la forma del elemento finito que se esta considerando y desarrollar las funciones de interpolación apropiadas. Cualquier tipo de elemento finito se puede usar, para el presente trabajo se desarrollaran las funciones de interpolación para un tetraedro lineal (con cuatro nodos) [23, 24].

1.5.2. Funciones de interpolación

Esta sección se centra en la formulación e implementación del elemento sólido más simple: Un tetraedro de 4 nodos. También llamado como *tetraedro lineal* debido a que la forma de las funciones de interpolación son polinomios lineales [24].

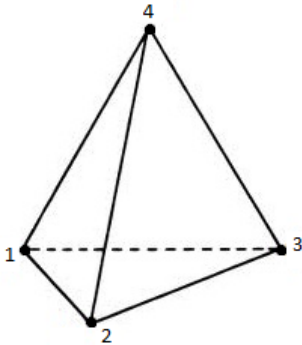


Figura 1.6: Tetraedro Lineal

La geometría de un tetraedro lineal (Figura 1.6) está definida por la posición de los 4 nodos colocados en las esquinas del elemento con respecto al sistema coordenado global (x, y, z) :

$$\begin{aligned} \text{nodo 1} &\longrightarrow (x_1, y_1, z_1) \\ \text{nodo 2} &\longrightarrow (x_2, y_2, z_2) \\ \text{nodo 3} &\longrightarrow (x_3, y_3, z_3) \\ \text{nodo 4} &\longrightarrow (x_4, y_4, z_4) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Además, de asumir que las cuatro esquinas son no-coplanares. El elemento tiene seis lados (conocidos también como bordes) y 4 caras.

Los lados son rectos debido a que están definidos por los dos puntos en las esquinas. Las caras son planas por que están definidas por tres puntos. En cada esquina se encuentran tres lados y tres caras.

Cualquier función lineal en x, y, z , digamos $F(x, y, z)$, toma los valores $F_i (i = 1, 2, 3, 4)$ en las esquinas del tetraedro lineal se puede interpolar en términos de las coordenadas tetraedricas como:

$$F(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = F_1 \eta_1 + F_2 \eta_2 + F_3 \eta_3 + F_4 \eta_4. \quad (1.45)$$

Transformación de Coordenadas

Las cantidades que están ligadas a la geometría del elemento (es decir, las funciones de forma) se expresan mejor en coordenadas tetraedricas. Por otra parte, las cantidades tal como las componentes de los desplazamientos, esfuerzos y tensiones son expresados en coordenadas cartesianas (x, y, z) . Es decir, es necesario las ecuaciones de transformación para pasar de un sistema coordinado a otro. La descripción geométrica del elemento en términos de las coordenadas tetraedricas se obtiene aplicando la interpolación lineal (1.45) a x , y y z , tal que $x = x_i\eta_i$, $y = y_i\eta_i$, y $z = z_i\eta_i$. Anteponiendo la identidad de suma de coordenadas tetraédricas

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 1 \quad (1.46)$$

como parte del sistema de ecuaciones, se construye la siguiente relación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

obteniendo la matriz inversa, y considerando las siguientes abreviaciones para la diferencia de las esquinas coordenadas:

$$x_{i,j} = x_i - x_j, \quad y_{i,j} = y_i - y_j, \quad z_{i,j} = z_i - z_j, \quad i, j = 1, \dots, 4, \quad (1.48)$$

se tiene que las funciones de interpolación (o coordenadas tetraedricas) se encuentran dadas por:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6V} \right) \begin{pmatrix} 6V_{01} & a_1 & b_1 & c_1 \\ 6V_{02} & a_2 & b_2 & c_2 \\ 6V_{03} & a_3 & b_3 & c_3 \\ 6V_{04} & a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

donde

$$\begin{aligned} 6V &= x_{21}(y_{23}z_{34} - y_{34}z_{23}) + x_{32}(y_{34}z_{12} - y_{12}z_{34}) + x_{43}(y_{12}z_{23} - y_{23}z_{12}), \\ 6V_{01} &= x_2(y_3z_4 - y_4z_3) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_4(y_2z_3 - y_3z_2), \\ 6V_{02} &= x_1(y_4z_3 - y_3z_4) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_4(y_3z_1 - y_1z_3), \\ 6V_{03} &= x_1(y_2z_4 - y_4z_2) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_4(y_1z_2 - y_2z_1), \\ 6V_{04} &= x_1(y_3z_2 - y_2z_3) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_2z_1 - y_1z_2), \\ a_1 &= y_{42}z_{32} - y_{32}z_{42}, \quad b_1 = x_{32}z_{42} - x_{42}z_{32}, \quad c_1 = x_{42}y_{32} - x_{32}y_{42}, \\ a_2 &= y_{31}z_{43} - y_{34}z_{13}, \quad b_2 = x_{43}z_{31} - x_{13}z_{34}, \quad c_2 = x_{31}y_{43} - x_{34}y_{13}, \\ a_3 &= y_{24}z_{14} - y_{14}z_{24}, \quad b_3 = x_{14}z_{24} - x_{24}z_{14}, \quad c_3 = x_{24}y_{14} - x_{14}y_{24}, \\ a_4 &= y_{13}z_{21} - y_{12}z_{31}, \quad b_4 = x_{21}z_{13} - x_{31}z_{12}, \quad c_4 = x_{13}y_{21} - x_{12}y_{31}. \end{aligned}$$

Por otro lado partiendo de (1.36) en su forma matricial

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

y evaluando para cada valor de la función del campo variable se tiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= N_1 + N_2x_1 + N_3y_1 + N_3z_1 \\ \phi_2 &= N_1 + N_2x_2 + N_3y_2 + N_3z_2 \\ \phi_3 &= N_1 + N_2x_3 + N_3y_3 + N_3z_3 \\ \phi_4 &= N_1 + N_2x_4 + N_3y_4 + N_3z_4 \end{aligned} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix}.$$

Despejando el vector $(N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4)^T$ y sustituyendo en (1.50) se obtiene

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6V} \right) \begin{pmatrix} 6V_{01} & 6V_{02} & 6V_{03} & 6V_{04} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Obteniendo que las funciones de interpolación son las mismas expresiones obtenidas del cambio de coordenadas tetratedricas (1.49). De esta manera se tiene que las funciones de interpolación están dadas por

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6V} \right) \begin{pmatrix} 6V_{01} & a_1 & b_1 & c_1 \\ 6V_{02} & a_2 & b_2 & c_2 \\ 6V_{03} & a_3 & b_3 & c_3 \\ 6V_{04} & a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

TEORÍA CLÁSICA DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Para analizar, comprender y utilizar el modelo formulado en el marco teórico, se requiere primero conocer la teoría clásica de la mecánica de fluidos, con el fin de comparar las ecuaciones ya obtenidas en la literatura con las ecuaciones obtenidas en los modelos mencionados anteriormente. Ya que la mecánica de fluidos estudia el comportamiento de los fluidos, en reposo o en movimiento, relacionando características de los mismos con modelos físicos matemáticos, permite un amplio uso de sus ecuaciones fundamentales en diversas aplicaciones de ingeniería. La astrofísica, meteorología, oceanografía, aerodinámica, hidrodinámica, lubricación, ingeniería marina, turbomaquinaria, ingeniería de yacimientos e ingeniería de la combustión, son algunos de los campos donde la mecánica de fluidos se emplea [3, 40].

La mecánica de fluidos es la rama de la física, comprendida dentro de la *mecánica de medios continuos*, que estudia este fenómeno a partir de la **Hipótesis del medio continuo**[41]. Los fluidos pueden dividirse en: líquidos y gases. Las diferencias esenciales entre estos son que los líquidos son prácticamente incompresibles y los gases son compresibles por lo que muchas veces hay que tratarlos como tales. Los líquidos ocupan un volumen definido, mientras que una masa de gas se expande hasta ocupar todas las partes del recipiente que lo contenga esto al adaptarse a la forma del recipiente que lo contiene, cuando están en equilibrio los fluidos no pueden soportar fuerzas tangenciales con lo cual tenemos que mencionar que todos los fluidos son compresibles en cierto grado y ofrecen poca resistencia a los cambios de forma.

Existen principalmente dos formas de describir el movimiento de un fluido. La primera forma de hacerlo es seguir cada partícula fluida en su movimiento, de manera que se encuentren funciones que nos den la posición, así como las propiedades de la partícula fluida en cada instante (*Descripción Lagrangiana*). Una segunda forma es asignar a cada punto del espacio y en cada instante, un valor para las propiedades o magnitudes fluidas sin importar que en ese instante, la partícula fluida ocupa ese volumen diferencial (*Descripción Euleriana*), que no está ligada a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido.

Las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos que se obtienen de las descripciones anteriores son leyes de conservación resultado de aplicar ciertos principios físicos a un modelo apropiado del fluido. Los principios físicos de los que se parten son el de conservación de la masa, el de conservación de la cantidad de movimiento (o Segunda ley de Newton) y el de conservación de la energía aplicados a un volumen fluido, obteniendo un conjunto de ecuaciones integrales, o bien a un volumen de control, obteniendo un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales son:

1. La Ecuación de continuidad,

2. la Ecuación de cantidad de movimiento,
3. la Ecuación de la conservación de la energía.

A este conjunto de ecuaciones dadas en su forma diferencial se le denomina ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.

Las formas diferencial e integral de las ecuaciones de conservación no son más que dos maneras de representar los mismo principios. La forma diferencial se utiliza en aquellos casos en que el conocimiento del detalle resulte relevante, la forma integral nos relaciona magnitudes fluidas dentro de una región finita del espacio sin preocuparse de los detalles del flujo en su interior. Se puede obtener la formulación integral a partir de la formulación diferencial y viceversa, dependiendo del problema, mediante el **Teorema de transporte de Reynolds** y el **Teorema de la divergencia de Gauss** [41, 42].

2.1. Aspectos Preliminares

Para desarrollar las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido es necesario definir el campo de velocidades \mathbf{u} en función de la posición y del tiempo como [41]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_1(x_1, x_2, x_3, t)\hat{i} + u_2(x_1, x_2, x_3, t)\hat{j} + u_3(x_1, x_2, x_3, t)\hat{k},$$

así como el campo de aceleración \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

definiendo de esta manera el operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.1)$$

avces llamada derivada material o derivada substancial, la cual se puede aplicar a cualquier variable. Además, el análisis para la obtención de las ecuaciones de la mecánica de fluidos, como se mencionó anteriormente, requiere que las ecuaciones se encuentren tanto en su forma integral como en su forma diferencial, las cuales pueden derivarse entre si por medio de dos teoremas importantes [41]

1. EL TEOREMA DE DIVERGENCIA DE GAUSS:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.2)$$

donde $F(\mathbf{x}, t)$ es un tensor de *cualquier* rango (incluyendo vectores y escalares), V es tanto un volumen de control como un volumen material, y A es la superficie de frontera.

2. EL TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS:

El teorema relaciona la derivada Lagrangiana de una integral de volumen de un sistema, con una integral en derivadas Eulerianas:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_f(t)} \alpha(t) dV = \int_{V_c(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV + \int_{S_c(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.3)$$

Aplicado a un volumen de control estacionario ($\mathbf{u}_c = 0$) [41].

2.2. Leyes de Conservación

Si un sistema no interactúa con su entorno de ninguna manera, entonces determinadas propiedades mecánicas del sistema no pueden cambiar. Algunas veces nos referimos a ellas como “constantes del movimiento”. Estas cantidades se dice que son *conservadas* y las leyes de conservación resultante se pueden considerar como los principios más fundamentales de la mecánica. En la mecánica de medios continuos la energía, el momento y la cantidad de masa, son ejemplo de cantidades conservativas.

2.2.1. Conservación de Masa

La ley de conservación de masa establece que “la masa contenida en un V_f no varía con el tiempo”:

$$\frac{d}{dt}(m) = \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho dV = 0,$$

Esta ecuación puede ser referida a cualquier volumen de control $V_c(t)$ mediante la aplicación del Teorema de transporte de Reynolds (2.3) con $\alpha(t) = \rho$, proporcionando una expresión de la ECUACIÓN DE CONTINUIDAD en forma integral.

$$\int_{V_c(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_c(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = 0. \quad (2.4)$$

Para obtener la forma diferencial puede obtenerse transformando la integral de superficie de (2.4) a una integral de volumen por medio del teorema de divergencia de Gauss (2.2), obteniendo:

$$\int_A \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV.$$

La ecuación (2.4) se convierte entonces:

$$\int_{V_c(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0.$$

Esta relación se mantiene para cualquier volumen de control al que se extienda la integral, podemos tomar un volumen lo suficientemente pequeño (de tamaño infinitesimal) como para poder considerar que el integrando es constante en su interior. Por lo tanto, para ese volumen infinitesimal, se cumple que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.5)$$

obteniendo de esta manera la forma diferencial de la ECUACIÓN DE CONTINUIDAD [42].

2.2.2. Ecuación de Cantidad de Movimiento

La ecuación principal que describe la dinámica de los fluidos deriva del principio físico enunciado por Newton (Segunda ley de Newton) que establece que la variación de la cantidad de movimiento de un objeto se debe a las fuerzas que actúan sobre él.

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) \quad (2.6)$$

Aplicado a un volumen fluido V_f , teniendo en cuenta que $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es la cantidad de movimiento por unidad de volumen de una partícula fluida situada en \mathbf{x} en el instante t , se describe:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_f} \mathbf{f}_v dV + \int_{S_f} \mathbf{f}_n ds, \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t)$ es la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre la partícula fluida situada en \mathbf{x} en el instante t y \mathbf{f}_n es la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre el elemento de superficie $d\mathbf{s}$ de la superficie S_f , que encierra el volumen V_f , orientado según la dirección \mathbf{n} .

Las fuerzas de volumen son aquellas que surgen de “la acción a distancia” (sin contacto físico). Estas resultan del medio siendo colocadas en un cierto *campo de fuerzas*, el cuál puede ser de origen gravitacional, magnético, electrostático, o electromagnético. Están distribuidos a lo largo de la masa del fluido y son proporcionales a la masa. Las fuerzas de volumen son expresadas por unidad de masa o por unidad de volumen. Las fuerzas de volumen por unidad de masa estarán denotadas por:

$$\mathbf{F}_v = \int_V \mathbf{f}_v dV = \int_V \rho \mathbf{f}_m dV. \quad (2.8)$$

Por otra lado, las fuerzas de superficie son aquellas que son ejercidas sobre un elemento de área debido a los alrededores a través del contacto directo. Estas son proporcionales a la extensión de área y son convenientemente expresadas por unidad de área. Las fuerzas de superficie pueden ser determinadas en componentes normales y tangenciales del área. Considerando un elemento de área ds en un fluido. La fuerza sobre la superficie S está definido por el tensor de esfuerzos como:

$$\mathbf{F}_n = \int_S \mathbf{f}_n ds = \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.8) y (2.9) en (2.7) se obtiene la forma adecuada del *Principio de Cantidad de Movimiento*:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m dV + \int_{S_f} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.10)$$

El primer miembro representa la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento de la masa encerrada del volumen fluido y los dos sumandos del segundo miembro representan respectivamente la resultante de fuerzas de superficie y de fuerzas másicas que actúan sobre esta misma masa. Reemplazando el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\tau}$ por la suma de su parte estática, $-p\mathbf{I}$, mas su parte viscosa, $\boldsymbol{\tau}'$, y aplicando el teorema de transporte de Reynolds para el término de lado izquierdo de la igualdad se obtiene la forma integral de la ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$\int_{V_c} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \int_{S_c} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{V_c} \rho \mathbf{f}_m dV + \int_{S_c} \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{n} ds - \int_{S_c} p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.11)$$

que expresa que la variación de la cantidad de movimiento contenida en V_c más el flujo convectivo a través de la superficie que lo engloba es igual a las fuerzas de superficie más las fuerzas másicas que actúan.

La forma diferencial se obtiene aplicando el teorema de divergencia para las integrales de superficie que se encuentran en (2.11), dando como resultado:

$$\int_{V_c} \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f}_m - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla p \right) dV = 0$$

Esta relación se mantiene para cualquier volumen de control al que se extienda la integral, se toma un volumen lo suficientemente pequeño (de tamaño infinitesimal) como para poder considerar que el integrando es constante en su interior. Por lo tanto, para ese volumen infinitesimal, se cumple que:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f}_m - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' + \nabla p = 0$$

usando la relación de la derivada material (2.1) y la ecuación de continuidad (2.5) se obtiene la forma diferencial de la ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p - \rho \mathbf{f}_m - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (2.12)$$

Esta es la ecuación de movimiento que relaciona la aceleración y la fuerza neta en un punto que se mantiene para cualquier continuo, sólido o líquido, no importa como el tensor de esfuerzo τ_{ij} este relacionado al campo de deformación. La ecuación (2.12) es algunas veces llamada *Ecuación de Cauchy de movimiento* [42].

2.2.3. Conservación de la Energía

El primer principio de la termodinámica dice que la variación de la energía de un sistema se debe al trabajo de las fuerzas que actúan sobre él y al ‘calor’ intercambiado con el exterior y generado por el sistema. Teniendo en cuenta que la energía total por unidad de volumen de una partícula fluida situada en el punto \mathbf{x} en un instante t es $\rho(\mathbf{x}, t)[e(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}u^2(\mathbf{x}, t)]$, donde e es su energía interna específica (por unidad de masa) y $\frac{1}{2}u^2 \equiv \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ su energía cinética o mecánica por unidad de masa, este principio físico aplicado a un volumen fluido V_f se escribe:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2}u^2 \right) dV = \int_{V_f} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} dV + \int_{S_f} \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{u} ds + \int_{S_f} q_n ds + \int_{V_f} Q_r dV, \quad (2.13)$$

donde la función escalar q_n es el flujo de calor por unidad de superficie en el elemento ds de la superficie fluida S_f y $Q_r(\mathbf{x}, t)$ representa el calor generado en la partícula fluida situada en \mathbf{x} por unidad de volumen y por unidad de tiempo.

Introduciendo las respectivas fuerzas de volumen (2.8) y de superficie (2.9) y el vector flujo de calor \mathbf{q} , se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2}u^2 \right) dV = \int_{V_f} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u} dV + \int_{S_f} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{S_f} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{V_f} Q_r dV, \quad (2.14)$$

Esta ecuación dice que la velocidad de incremento de la energía total contenida en un volumen fluido es igual al trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas que actúan sobre él, más el calor por unidad de tiempo transferidos a través de las paredes y el calor por unidad de tiempo generado en el interior del volumen.

Aplicando el Teorema de Transporte de Reynolds a esta última ecuación se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) dV = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.15)$$

donde el primer miembro del lado derecho se interpreta como la velocidad de incremento de las energías interna y cinética en el volumen V_f en el instante t mientras que el segundo término representa la velocidad a la que estas energías son transportadas fuera del volumen V_f a través de la superficie S_f por el movimiento del fluido. Esta es la forma integral de la ECUACIÓN DE ENERGÍA.

Aplicando el Teorema de la divergencia de las integrales de superficie a las dos ultimas ecuaciones se tiene:

$$\int_{V_c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] \mathbf{u} \right) dV = \int_{V_c} \left(\rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q_r \right) dV,$$

usando la ecuación de continuidad y el concepto de la derivada material, además de igualar los integrandos se puede reducir esta última ecuación de la forma:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) = \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q_r. \quad (2.16)$$

Obteniendo de esta manera la forma diferencial de la ECUACIÓN DE ENERGÍA [42, 41].

2.3. Medios Porosos

Un material poroso es aquel sólido que contiene huecos o cavidades conectadas o no, dispersos dentro de él de una manera regular o aleatoria y que se presentan con una frecuencia relativamente alta dentro del sólido. En dichos espacios vacíos, sobre todo si son pequeños, las fuerzas moleculares entre el sólido y el fluido, son de gran importancia y en estos casos, la porosidad es llamada de intersticios moleculares; en cambio en los huecos grandes, la pared porosa influye sólo parcialmente en el movimiento de los fluidos; naturalmente que para el fin de este trabajo importará solamente los espacios vacíos o huecos que estén comunicados.

Algunos autores como Bear [3] o Adler [5] definen el medio poroso como el portador de fluidos a través de huecos dejados entre los granos de roca que hace que los fluidos tomen trayectorias impredecibles y que formen redes complicadas de canales de flujo. Precisamente esta conexión múltiple de canales y aberturas que caracteriza al medio poroso, lo diferencia completamente de la hidrodinámica clásica.

La clasificación del medio poroso, puede diversificarse bastante; así puede hablarse del medio poroso homogéneo o heterogéneo; por el tamaño de los poros en intersticio, cavernoso o intermedio entre estos dos, de acuerdo a la distribución de espacios vacíos; en ordenado o disperso; comunicado o no comunicado. En todo caso como la realidad de los yacimientos lo muestra, el medio poroso podrá ser descrito solamente en términos estadísticos y tratando el problema en particular, en forma microscópica, dada la complejidad de las variables que intervienen, así como su difícil determinación.

Algunas de las ecuaciones prácticas del flujo de fluidos en medios porosos se basan en dos conceptos básicos: la ley de Darcy y la ley de conservación de masa. Los conceptos más simples de ingeniería de yacimientos

se basan en la primera de estas leyes, pero los complejos, y generalmente los más útiles, se basan en ambas. Por lo que al combinar estas dos ecuaciones se obtiene la ecuación de difusividad, la cual es una relación que permite describir el comportamiento de la presión de un fluido a través de un medio poroso, con el tiempo y la distancia dependiendo de factores como la geometría del flujo, el tipo de fluidos, el tipo de flujo, el régimen del flujo y las condiciones iniciales y de frontera.

Existen a la fecha muchas teorías que intentan relacionar la distribución de tamaño del poro o hueco, con propiedades macroscópicas del material y aunque ello ha contribuido a comprender los procesos físicos básicos dentro del medio poroso, no ha ayudado a solucionar el problema en una escala macroscópica. La teoría macroscópica del flujo en medios porosos se ha desarrollado en dos formas; una que parte de una teoría estadística microscópica que muestra cómo ello conduce a leyes macroscópicas, tal y como sucede con la teoría cinética de los gases que concluye y concretiza con la ley de Boyle; la otra se basa en leyes macroscópicas establecidas a partir de relaciones empíricas obtenidas experimentalmente. Dado que ninguna de las teorías establecidas encaja satisfactoriamente con todos los fenómenos macroscópicos, se ha aceptado más la primera forma; esto es, la estadística [3, 5].

En virtud de que los materiales porosos naturales poseen una estructura más o menos aleatoria, no es sorprendente que muestras pequeñas del material tengan porosidad y permeabilidad diferentes. Sin embargo, se ha observado que a mayor volumen de las muestras, los valores de los respectivos parámetros son más parecidos. Dentro de los medios porosos naturales se encuentran los yacimientos naturalmente fracturados los cuales se discutirán a continuación [30, 31].

2.3.1. Yacimientos Naturalmente Fracturados

Un yacimiento naturalmente fracturado es un yacimiento que contiene fracturas y/o poros creados por la naturaleza a lo largo del tiempo. Las fracturas y/o los poros pueden tener tanto efectos negativos como positivos en el flujo del fluido. Pero la comparación de la naturaleza con los resultados experimentales o con la teoría y sus modelos solo es efectiva si la estructura puede ser descrita de una forma más rigurosa.

Para la elaboración de modelos para transformar la estructura de un yacimiento de micro a mega escala (o viceversa) es necesario tomar en cuenta la forma de los diversos patrones geométricos relacionados con las fracturas, fallas, uniones o con la porosidad, las cuales se encuentran en un rango de escala que va desde micrómetros a kilómetros, por lo que hacer una cuantificación de estos patrones parece ser una tarea complicada.

En la mayoría de los Yacimientos la estructura resulta ser tan compleja que no es posible analizarlo por geometrías euclidianas, además de presentar varios problemas y restricciones en su modelado. Por lo que con respecto a la cuantificación de sus patrones, la geometría fractal resulta ser una mejor opción. El método ofrece una alta efectividad en la cuantificación de la complejidad de las estructuras naturales y tiene un fuerte potencial para su futuro desarrollo [31].

La fractalidad de los yacimientos y de cualquier estructura rocosa está relacionada con numerosas pro-

piedades y condiciones de formación. El escalamiento de propiedades de uniones y fallas o fracturas está relacionada con varios parámetros: presión confinada, tensión, esfuerzo, intensidad del cortante, conectividad y percolación, flujo de fluidos, y a la distribución de metales y depósitos minerales. La fractalidad de poro-espacio está correlacionada con las propiedades eléctricas de las rocas, así como con los procesos diamagnéticos [30, 31].

2.3.2. Modelos Fractales de Medios Permeables

Se ha comprobado, por medio de procesos experimentales, que la porosidad y las fracturas en los suelos y en las formaciones geológicas exhiben características fractales en muchas escalas de longitud. Estos incluyen las geometrías fractales de redes de espacios porosos o de fracturas, la rugosidad fractal de poro y/o de superficies de fracturas. Un medio donde se presentan una o más de estas características son llamados medios fractalmente permeables. En este contexto es imprescindible distinguir entre tres tipos de medios permeables de escala invariante, tomando en cuenta que las propiedades hidrodinámicas de diferentes materiales fractales son bastante diferentes [30, 31]:

- 1) Un medio poroso en el que la matriz es un pre-fractal, mientras que el espacio poroso es un no fractal, por ejemplo, la esponja de Menger y agregados fractales.
- 2) Un medio fractalmente permeable en el cual el espacio poroso es un pre-fractal, mientras que la matriz no es fractal, por ejemplo, el inverso de la esponja de Menger y medios con redes de poros y/o fracturas fractales.
- 3) Los materiales con las interfaces matriz-poros pre-fractales, por ejemplo superficies de fractura.

Propiedades Fractales de Medios Permeables

La dimensión fractal de masa no dice nada acerca de la conectividad y la tortuosidad de las trayectorias de flujo en el medio fractalmente permeable. De hecho, los fractales caracterizados por la misma dimensión fractal D pueden tener diferentes dimensiones químicas, de pasos mínimos y espectrales. Por lo tanto, para modelar un medio poroso específico y/o fisurado se necesita saber por lo menos tres dimensiones fraccionarias independientes, así como los correspondientes rangos de escalamiento.

Un fractal puede ser caracterizado por su dimensión métrica intrínseca D_ℓ llamada la dimensión química [14]. Esta dimensión cuantifica cómo las unidades “elementales” están unidas entre si para formar todo el objeto fractal y determinar el número de direcciones mutuamente ortogonales en el fractal. A continuación se mencionan diferentes números de dimensión y su definición correspondiente [30, 14].

- **Dimensión fractal del espacio poroso (D):** En general, se define a través del algoritmo del método box-counting. En el caso de fractales determinísticos D es igual a la dimensión de autosimilaridad.

- **Dimensión de conectividad del espacio poroso (d_ℓ):**

$$d_\ell = \lim_{\ell \rightarrow 0} \left[\frac{\ln N(\ell)}{\ln \ell} \right], \quad (2.17)$$

o conocida en [14] como *dimension química* describe la dimensión fractal de un plano en el espacio fraccionario, donde $N(\ell)$ es el número de puntos fractales conectados con un punto arbitrario dentro de la esfera d_ℓ -dimensional de radio ℓ alrededor de este punto.

- **Dimensión fractal de paso mínimo en el espacio poroso (d_{min}):** Está definida por la relación de escalamiento para el paso más corto entre dos puntos elegidos aleatoriamente en el fractal $\ell_{min} \propto R^{d_{min}}$, donde R es la distancia euclidiana entre estos puntos, en general $d_{min} = D/d_\ell$.
- **Dimensión fractal de la tortuosidad del flujo (d_t):** Está definido por la relación de escalamiento para la longitud de flujo a lo largo de la dirección de flujo $L \propto L_0(L_0/d)^{d_t-1}$, donde L_0 es la longitud de un capilar recto y d es el diámetro de un tubo capilar.
- **Dimensión espectral del espacio poroso (d_s)** En general, la dimensión espectral puede ser definida como el número de grados de libertad dinámicos de una trayectoria aleatoria en el fractal poroso. Por consiguiente, la probabilidad de una trayectoria aleatoria de regresar a su punto inicial después de t pasos se comporta como $t^{-d_s/2}$.
- **Números de grados espaciales efectivos de libertad de una trayectoria aleatoria en el espacio poroso (ν):** Se define como el número de direcciones independientes en las que una trayectoria aleatoria puede moverse sin violar ninguna restricción impuesta sobre ella por la topología fractal. En general $\nu = 2d_\ell - d_s$.
- **Dimensión fractal de la caminata aleatoria en el espacio poroso (D_W):** Se define por la relación definida a través del escalamiento para el desplazamiento cuadrático medio de la trayectoria con tiempo $\langle R^2 \rangle \propto t^{2/D_W}$ donde $D_W = 2D/d_s$.
- **Exponente de difusión anómala (θ):** $\theta = D_W - 2$
- **Dimensión de Backbone (d_i):** dimensión fractal que controla las velocidades darcianas del medio fractalmente permeable.

2.3.3. Ley de Darcy

La ley de Darcy juega un papel central en el flujo a través de medios porosos. En muchas situaciones prácticas, el flujo de fluidos en medios porosos se describe por la ley de Darcy, en principio, las mediciones con una sola tasa de flujo constante permiten el cálculo de la permeabilidad a partir de esta ley; sin embargo, por lo general hay errores experimentales considerables en estas mediciones, y es un tanto conveniente y habitual realizar mediciones a diferentes velocidades bajas de flujo, trazar las velocidades de flujo frente a la caída de presión, y ajustar una línea recta a los puntos de datos [5].

Históricamente, la ley de Darcy se introdujo de una manera fenomenológica para el flujo mono-fásico a través de la arena. En su forma original, la ley de Darcy establece que el flujo Q de un fluido mono-fásico está relacionado con la caída de presión Δp sobre la longitud de la muestra L como

$$Q = A_2 \frac{K \Delta p}{\mu L}, \quad (2.18)$$

donde A_2 es el área de la sección transversal y K es la permeabilidad intrínseca del medio poroso. En consecuencia, la velocidad de Darcy, definida como

$$q = \frac{Q}{A_2} = \phi u. \quad (2.19)$$

no es una verdadera velocidad del fluido, pero representa un caudal eficaz a través del medio poroso. Estrictamente hablando, la ley de Darcy sólo es válida para fluidos newtonianos sobre un cierto rango de caudales.

La medida de la permeabilidad se realiza generalmente con muestras de núcleo cilíndricas. El experimento puede ser dispuesto de manera que pueda tener un flujo ya sea horizontal vertical a través de la muestra. Ambos líquidos y gases se han utilizado para medir permeabilidades. Los líquidos, sin embargo, a veces cambian la estructura de los poros y por lo tanto también la permeabilidad, debido a la reorganización de algunas partículas, a la expansión de ciertos materiales en los poros, a las reacciones químicas, etc. Una gran cantidad de ingenio se ha utilizado para diseñar una variedad de diferentes “parámetros” [1, 2, 3].

Históricamente, se introdujo la ley de Darcy de una manera fenomenológica para el flujo de una sola fase a través de arena. La cual simplemente asume que una permeabilidad global k relaciona la velocidad media del fluido en el campo de la caída de presión Δp medida a través del sistema, según la ley de Darcy, el flujo de una sola fase está dada por

$$q = \frac{k \Delta P}{\mu L} \quad (2.20)$$

donde k es la permeabilidad intrínseca del medio poroso, μ la viscosidad del fluido, Δp la caída de presión a través de la muestra y L es la longitud de la muestra en la dirección de flujo. La velocidad de Darcy está basada en el flujo y se define como $v_{Darcy} = q = Q/A$. La ley de Darcy se generalizó más tarde a un flujo tridimensional como [40]

$$\vec{v}_{Darcy} = -\frac{k}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho \vec{g}), \quad (2.21)$$

2.3.4. Ecuación de un Transiente de Presión

Los modelos matemáticos de depósitos de petróleo se han utilizado desde finales del siglo XIX. El objetivo principal de la simulación del yacimiento es predecir el rendimiento futuro del yacimiento y encontrar formas y medios de optimizar la recuperación de algunos de los hidrocarburos en diversas condiciones de operación. Un método estándar para caracterizar las propiedades hidráulicas de los medios porosos y/o fisurados es el análisis de presión-transitorio de los datos del ensayo de bombeo. Técnicas de prueba de transitorios de presión, tales como reducción de presión, acumulación, inyección, barbecho y pruebas de interferencia se utilizan ampliamente para analizar y pronosticar el desempeño del yacimiento. Durante una prueba de pozo,

se controla la respuesta de un depósito a condiciones cambiantes de producción (o inyección). Dado que esta respuesta está relacionada con las propiedades del yacimiento, en muchos casos es posible inferir las propiedades del yacimiento a partir de la respuesta. Por lo tanto, la interpretación de la prueba de pozo es un problema inverso en el cual los parámetros del modelo se deducen analizando la respuesta del modelo a una entrada dada [1, 30, 31].

Durante una prueba de pozo, se crea una respuesta de presión transitoria mediante un cambio temporal en la velocidad de producción. En la mayoría de los casos, el caudal se mide en la superficie mientras la presión se registra en el fondo del pozo. Antes de la apertura, se supone que la presión inicial p_0 es constante y uniforme en el depósito. Durante el periodo de fluencia, la respuesta de presión de estiramiento se define como la caída de presión $\Delta p = p_0 - p(x_i, t)$. Cuando se cierra el pozo, se calcula el cambio de presión de acumulación $p = p(t) - p_*$ desde la última presión de flujo $p_* = p(\Delta t = 0)$. La respuesta de presión se analiza frente al tiempo transcurrido t desde el inicio del periodo (tiempo de apertura o de cierre). En la práctica, durante un período dado de la prueba, el cambio en la presión Δp se representa en las escalas *log-log* frente al tiempo transcurrido t , mientras que el periodo de prueba se define como un periodo de condiciones de flujo constante, por ejemplo, flujo constante para un período de retirada o cierre para la prueba de acumulación [30, 31].

En esencia, el modelo matemático para el análisis de presión transitoria se puede identificar con la expresión analítica de la distribución de presión radial y dependiente del tiempo en un depósito. Tal que una función constituye una base teórica para todos los tipos de pruebas de presión; esto es, presión *build-up*, *draw-down*, inyectividad y *fall-off* [31].

Las ecuaciones del modelo son desarrollados por un flujo radial de una sola fase a través de un medio poroso para las condiciones de un depósito (acting) infinito (sin considerar los efectos de la frontera) y razón de producción constante. La expresión analítica para la variación de presión radial en el tiempo se obtiene resolviendo la ecuación de continuidad donde la velocidad del fluido superficial se asume que sea proporcional al gradiente de presión en el mismo punto. En esta conexión, se debería notar que la naturaleza de la roca porosa no permite la determinación del vector velocidad de la ecuación de momento [40, 44].

2.4. Mecánica de Fluidos Computacional

La construcción de modelos de flujo y transporte con sus implicaciones prácticas y simplificación necesarias, su representación y codificación matemático-numérica, su adquisición de datos y su estimación de parámetros, su desarrollo y simulación de software, su verificación y adaptación de problemas, así como su aplicación y evaluación en un contexto práctico es intrínsecamente interdisciplinario en la naturaleza que une, entre otros, aspectos la termodinámica, la mecánica de fluidos, las matemáticas, la química, la geología, la geofísica, la informática y la ingeniería. Por lo que un equipo interdisciplinario es capaz de abordar los aspectos multifacéticos que ocurren en el modelado práctico.

El enfoque del modelo continuo es el método más exitoso para describir los procesos fundamentales de flujo, masa y transporte térmico en medios porosos y fracturados. Sin embargo, no permite que las propiedades se vuelvan infinitas o que salten discontinuamente en un único punto aislado. Como resultado, tal enfoque introduce un medio eficazmente continuo que se caracteriza por un número relativamente pequeño de propiedades a granel, tales como densidad ρ , compresibilidad γ , viscosidad μ , concentración C_k de especies químicas k y temperatura T . Bajo tales condiciones, se escriben leyes fundamentales para este tipo de medios continuos en forma de estados de equilibrio continuo que toman la forma de ecuaciones diferenciales parciales en las coordenadas espaciales (x, y) y en el tiempo t .

Desde el punto de vista matemático, el objetivo principal es la solución de las ecuaciones de equilibrio continuo que gobiernan las condiciones iniciales y de frontera dadas. La materia del análisis matemático se denomina como el *modelo matemático* que es descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (o integro-diferenciales). Sin embargo, para la mayoría de los problemas de interés, las soluciones exactas o analíticas del modelo matemático básico no están disponibles ni son alcanzables y, en consecuencia, los métodos aproximados son comúnmente requeridos.

Hay que subrayar que un modelo matemático ya contiene idealizaciones y aproximaciones de la “realidad”. Esto es una consecuencia de las suposiciones y simplificaciones que se hacen necesariamente en la derivación de las ecuaciones continuas básicas y relaciones constitutivas para hacer el modelo “manejable”. Ahora bien, la propia solución matemática requiere que se realicen aproximaciones mediante el proceso de discretización. Además, la solución de las ecuaciones discretizadas puede introducir errores adicionales, por ejemplo si se resuelven los sistemas de ecuaciones lineales o no lineales resultantes por métodos iterativos. Pueden surgir diferentes fuentes de errores:

- (1) Errores incorporados en el modelo conceptual resultantes de suposiciones y simplificaciones en la derivación de las ecuaciones del modelo matemático básico.
- (2) Los errores de discretización resultante del uso de métodos numéricos para resolver las ecuaciones básicas del modelo.
- (3) Las ecuaciones no lineales tienen que ser linealizadas por técnicas iterativas. En total, los procedimientos iterativos deben ser cuidadosamente controlados y terminados después de satisfacer los criterios de convergencia prescritos como medida de errores tolerados (errores de convergencia).

Es obvio que una realización final del modelo (llamada simulación) es afectada por todos esos errores. Desde un punto de vista matemático, los errores derivados de la conceptualización del modelo y la entrada de parámetros son muy complejos y normalmente están fuera del alcance matemático. Ahora, se puede argumentar: Si es posible controlar los errores de discretización a un nivel óptimamente pequeño podemos excluir (mejor minimizar) las influencias de los errores numéricos en las simulaciones del modelo.

Existen muchos métodos numéricos para abordar las ecuaciones básicas de modelado. Las estrategias más importantes son: el método de las diferencias finitas (FDM), el método del volumen finito (FVM) y el método

de los elementos finitos (FEM). Otros métodos tales como esquemas espectrales, métodos de elementos de límite, técnicas sin malla global y autómatas celulares se limitan a clases especiales de problemas. Entre los métodos anteriores el FEM y el FVM son los métodos más poderosos. Mientras que el FDM se aproxima a la forma diferencial de las ecuaciones de equilibrio básico en una forma de diferencia y se limita a geometrías simples y condiciones de frontera, ambos FEM y FVM se basan en la formulación débil variacional del problema de límite y valor inicial, en la integral de una cantidad sobre un dominio arbitrario. Este enfoque integral es el poder real de FEM y FVM, que es un enfoque natural y adecuado de un estado de balance continuo. De hecho, las leyes de equilibrio de la mecánica de continuo son globales en el sentido de que son leyes integrales aplicadas a una masa dada de material, fluido o sólido. FEM y FVM subdividen el continuo en un número finito de elementos, para lo cual los estados de balance se aplican discretamente. Hay más similitudes que las diferencias entre FEM y FVM, sin embargo, el FEM parece ser el método más general y poderoso, siendo así superior a los otros debido a las siguientes características [44]:

- (a) *Geometrías arbitrarias.* El FEM es esencialmente libre de geometría. En principio, FEM puede aplicarse a dominios de forma arbitraria y con condiciones de fronteras bastante arbitrarias.
- (b) *Mallas no estructuradas.* FEM por su naturaleza conduce a mallas no estructuradas. Esto significa, en principio, que los modeladores pueden colocar elementos finitos donde quieran.
- (c) *Robustez.* En el FEM las contribuciones de las aproximaciones locales sobre los elementos individuales se reúnen de manera sistemática para lograr una aproximación global de una solución a una ecuación diferencial parcial.
- (d) *Fundamentos matemáticos.* Abarca métodos para determinar estimaciones de errores a priori y a posteriori y ayuda a avanzar el FEM para problemas de aplicación importantes (y nuevos) por encima de un nivel tradicional de empirismo.

2.4.1. Punto de Vista Computacional-Científico

El modelo matemático se convierte en soluble después de transferirlo a un modelo numérico apropiado, por ejemplo, empleando FEM. Para realizar un modelo numérico para las necesidades prácticas se codifica adecuadamente el modelo mediante técnicas de programación. Al final, un programa de simulación resultante permite la solución de las ecuaciones básicas de equilibrio para diferentes tipos de problemas, geometrías, intervalos de tiempo, parámetros, condiciones iniciales y de frontera. Además, también es posible ejecutarlo para diferentes niveles de aproximación en diferentes resoluciones espaciales y temporales, así como los tipos y estrategias alternativas de los esquemas numéricos incorporados en el código de simulación.

Se hace evidente que un simulador útil para procesos de flujo y transporte en medios porosos y fracturados tiene que estar equipado con una serie de características adicionales más allá del núcleo de análisis puro del modelo numérico. Normalmente, un modelador se enfrenta continuamente con los cuatro pasos de trabajo principales. Deben recopilarse y analizarse datos de diferentes tipos y de diferentes fuentes. Basándose en

estos datos, el modelador construye una esquematización de las condiciones reales, donde se realizan idealizaciones geométricas y paramétricas apropiadas en el objetivo de la modelización deseada. Esta etapa de preprocesamiento abarca dos aspectos diferentes del trabajo. La primera se refiere al ingenio, la habilidad y la creatividad en la abstracción de las condiciones del mundo real. El aspecto secundario es totalmente técnico/tecnológico.

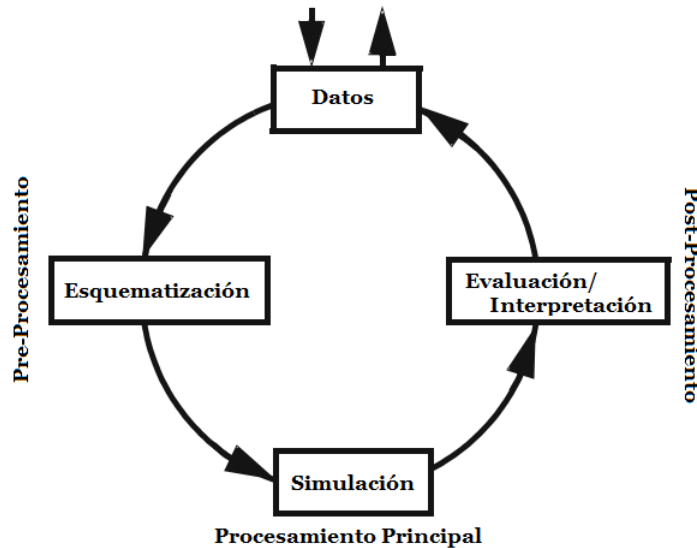


Figura 2.1: Ciclo de trabajo del modelador [44].

A continuación, el modelador realiza la simulación bajo las condiciones y parámetros especificados. Si la simulación termina con éxito, los resultados computacionales deben ser evaluados e interpretados de diferentes maneras. Las herramientas gráficas y de visualización soportan al modelador en esta importante fase de modelado para abordar la salida a menudo voluminosa. Los resultados computacionales obtenidos deben compararse e interferir con los datos básicos y de medición. Como resultado, esto normalmente se alimenta a un cálculo repetido reiniciando el bucle de diseño y análisis.

Los procesos de diseño, simulación y evaluación requieren herramientas eficientes y poderosas en el manejo de datos, manipulación, computación y visualización. Hay dos razones principales para su énfasis. En primer lugar, el trabajo de pre y postprocesamiento suele ser la tarea más demorada y sensible a errores. De hecho, además de los errores derivados de los enfoques conceptuales y numéricos expuestos anteriormente, existe el peligro de introducir errores adicionales que resultan de errores en el manejo de datos y malas interpretaciones de los resultados. El software de simulación debe incorporar capacidades numéricas y visuales para apoyar la detección de tales errores causados por la falta de coincidencia de datos.

En segundo lugar, en la práctica, el ciclo de trabajo (Figura 2.1) tiene que ser sometido a ciclos para el flujo subsuperficial y a los procesos de transporte debido a las siguientes razones[44]

- Incertidumbres en la base de datos (por ejemplo, variabilidad espacial de la información geológica).
- Efectos de escala (los parámetros macroscópicos pueden depender de la escala).

- La necesidad (del cliente) de repetir y comprobar una predicción de modelo (aumentando la objetividad y la transparencia).
- La necesidad de un análisis de escenarios para, por ejemplo,
 - Detectar dependencias causales,
 - Realizar sensibilidades de parámetros y calibración de modelos,
 - Estimación del parámetro de campo y características probabilísticas,
 - Hacer cumplir la ‘epignosis’ (verificación, coincidencia histórica),
 - Hacer cumplir el pronóstico bajo supuestos alterados,
 - Evaluar esquemas correctivos, estrategias tecnológicas y conceptos alternativos de diseño (computación de diseño, ingeniería inversa),
 - Control y diseño de esquemas de monitoreo, y
 - Optimizar los programas de medición in situ.

De lo anterior, los requisitos para un sistema de simulación moderno para calcular procesos de flujo y transporte en medios porosos y fracturados son más bien múltiples. La arquitectura y la programación del simulador tienen que cumplir, entre otros, los siguientes criterios:

- El simulador tiene una sofisticada y gráfica interfaz de usuario.
- El simulador tiene una interfaz de datos abierta y una arquitectura modular.
- El código garantiza una alta portabilidad y capacidad de expansión.
- El código gestiona de forma totalmente dinámica la demanda de memoria física.
- El código funciona de manera eficiente y rápida, permite el cálculo paralelo de problemas grandes y complejos.
- Los lenguajes de programación utilizados proporcionan una codificación legible, verificable, extensible y reutilizable.
- El programa admite la computación distribuida en redes locales y de área amplia.

Es una consecuencia natural que los productos de software de este tipo se desarrollan sobre una base comercial. La proliferación de computadoras potentes hace posible el cálculo de problemas mayores por un mayor número de usuarios. La comercialización somete una distribución de software a las reglas del mercado: tanto como sea posible. Puede conllevar efectos secundarios no deseados. Algunos usuarios tratan el código de simulación como una caja negra. Los resultados a menudo parecen plausibles para los no especialistas, incluso cuando los resultados son groseramente inexactos. Otros usuarios tienden a preferir (exclusivamente)

la solución más compleja proporcionada por el simulador, donde las dependencias causales y los elementos esenciales a menudo permanecen ocultos (no se puede ver la madera en demasiados árboles). Los requisitos computacionales pueden variar enormemente de la aplicación a la aplicación (por ejemplo, flujo clásico del agua subterránea versus simulación de transporte reactiva y multifásica). Hay un atractivo para los desarrolladores de software para intentar satisfacer todas las demandas en un solo producto. Como resultado, el software tiende a convertirse en

- Altamente complejo,
- Difícil de usar correctamente, y
- Disminuye la respuesta a los nuevos requisitos.

Se requiere una cantidad sustancial de entrenamiento. De hecho, algunos usuarios carecen de la experiencia requerida. El éxito y la confianza en el modelado de los procesos de flujo, masa y transporte térmico en medios porosos y fracturados dependen de la fiabilidad de la formulación del modelo, la fiabilidad de los parámetros utilizados, la fiabilidad de la solución numérica y la correcta interpretación de los resultados [44].

DESCRIPCIÓN DEL MODELO PRE-FRACTAL

La elaboración de modelos considerando aspectos geométricos de objetos naturales, la cual varía en tamaño de la escala atómica al tamaño del universo, son de importancia para “entender” la naturaleza. La geometría de las trayectorias de partículas; de líneas hidrodinámicas de flujo, olas, barcos y costas; de paisajes, montañas, islas, ríos, glaciares y sedimentos; de granos en roca, metales y materiales compuestos; de plantas, insectos y células, así como la estructura geométrica de cristales, productos químicos y proteínas es fundamental en los diversos campos de las ciencias. Cada campo tiende a desarrollar conceptos adaptados (por ejemplo, morfología, espacios de cuatro dimensiones, textura, conformación y dislocaciones) utilizados intuitivamente por los científicos en ese campo. Tradicionalmente, las líneas euclidianas, círculos, esferas y tetraedros han servido de base para la comprensión intuitiva de la geometría de la naturaleza.

Por lo que el propio Mandelbrot concibió un nuevo dialecto, la geometría fractal, apropiado para describir las irregularidades de la naturaleza y sus caracteres, los conjuntos fractales o simplemente fractales. En los últimos años su estudio se ha convertido en una nueva rama de las matemáticas, íntimamente conectada con las ciencias naturales y de la computación. Por lo que en el presente capítulo se considera el flujo continuo tomando en cuenta la topología, considerando propiedades fractales, modelando de esta manera el flujo de fluidos en un medio fractal poroso.

3.1. El concepto de flujo continuo fractal

La aproximación del continuo fractal consiste en crear una transformación de un medio fractal intrínsecamente discontinuo a un medio continuo fractal trabajando de esta manera con un sistema continuo. Un fractal Φ^D con $D < 3$ no llena todo el espacio euclidiano E^3 . Sin embargo, se define el continuo fractal tridimensional ${}_{d_t}^{d_s} \Phi_D^3 \subset E^3$ de acuerdo a las propiedades dinámicas y topológicas de la métrica fractal del medio fractal modelado Φ^D , definiendo el continuo fractal $\Phi_D^3 \subset E^3$ como una región tridimensional del espacio euclidiano E^3 lleno con materia continua (sin dejar poros ni espacios vacíos) tal que sus propiedades, por ejemplo, la densidad $\rho(x_i)$, los desplazamientos $v_j(x_i)$, etc., se puedan considerar como funciones continuas y diferenciables con respecto a las variables espaciales y de tiempo.

3.1.1. Métrica Fractal del continuo fractal

La definición mencionada anteriormente del continuo fractal $\Phi_D^3 \subset E^3$ implica que la masa de la región $W \subset \Phi_D^3$ estará dada por

$$m = \int_W \rho(x_i) dV_D = \int_W \rho(x_i) c_3(x_i, D) dV_3 \propto L^D, \quad (3.1)$$

donde $dV_3(dx_i)$ es el elemento de volumen infinitesimal en E^3 , mientras que $dV_D = c_3(x_i, D) dV_3$ es el elemento de volumen infinitesimal de $\Phi_D^3 \subset E^3$, tal que la función que provee la transformación entre el espacio Fractal y el espacio euclidiano se define como

$$c_3(x_i, D) = \frac{dV_D}{dV_3}. \quad (3.2)$$

Físicamente, la función $c_3(x_i, D)$ es conocida como una DENSIDAD DE ESTADOS en el continuo fractal, esto es, describe como los estados permitidos de las partículas que forman el continuo fractal están estrechamente empaquetados en el espacio euclidiano. La forma simétrica y funcional de la función de transformación son determinados por la simetría del fractal en consideración. El elemento de volumen infinitesimal de Φ_D^3 puede ser representado en la forma siguiente [14, 15]:

$$dV_D = d^\zeta x_k dA_d^{(k)}(x_{i \neq k}), \quad (3.3)$$

donde $dA_d^{(k)} = c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, d_k) dA_2^{(k)}$ es el elemento de área infinitesimal en la intersección del continuo fractal con el plano cartesiano $(x_i, x_j) \in E^2$ normal al eje k en Φ_D^3 y $dA_2^{(k)}$ es el elemento de área infinitesimal en E^2 , mientras la función de transformación $c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, \ell_{i \neq k}, d_k) = dA_d^{(k)} / dA_2^{(k)}$ representa la densidad de estados sobre la intersección; $d^\zeta x_k = c_1^{(k)}(x_k, \zeta_k) dx_k$ es el elemento de longitud infinitesimal a lo largo de la normal a la intersección y $c_1^{(k)}(x_k, \zeta_k)$ es la densidad de estados a lo largo de esta dirección.

En el caso de un continuo fractal homogéneo

$$\rho(x_i) = \rho_c = const, \quad (3.4)$$

y de (3.2) y (3.3) la densidad de estados en el continuo fractal homogéneo se representa como:

$$c_3(x_i, D) = \ell_k^{\zeta_k - 1} \left(\frac{x_k}{\ell_k} + 1 \right)^{\zeta_k - 1} c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, \ell_{i \neq k}, d_k), \quad (3.5)$$

donde ℓ_k es el corte inferior a lo largo del eje cartesiano i y el exponente de escalamiento ζ_k , caracterizando la densidad de estados a lo largo de la dirección de la normal a la intersección, se define como

$$\zeta_k = D - d_k, \quad (3.6)$$

tal que, de forma general,

$$\sum_k^3 \zeta_k \neq D; \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.1)-(3.6) definen la métrica del continuo fractal, la cual es independiente de las dimensiones fractales d_ℓ y d_s . Por lo tanto, se asume que el continuo fractal ${}_{d_\ell}^{d_s} \Phi_D^3 \subset E^3$ con diferentes d_ℓ y d_s están caracterizados por la misma métrica fractal definida por las ecuaciones (3.1)-(3.6), mientras que la topología y la dinámica del continuo fractal están caracterizadas por d_ℓ y d_s , respectivamente [14, 15].

3.1.2. Cálculo fraccionario del continuo fractal

Las derivadas fraccionarias no locales son comúnmente empleadas cuando se trata con fractales debido a la no diferenciabilidad de las funciones que los definen. Sin embargo, la formulación anterior del continuo fractal $\frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3$ proporciona las herramientas para la elaboración de un cálculo sobre ellos, es decir, a través del producto de integrales fraccionarias (1.15) que refleja la ley de escalamiento de masa (1.14) del medio fractal. Una de las ventajas que ofrece este modelo es que se puede relacionar el cálculo de orden arbitrario con el cálculo convencional por medio de los coeficientes c_1 , c_2 , c_3 y de esta manera desarrollar la mecánica de medios continuos así como ecuaciones diferenciales parciales para medio fractales.

Por lo tanto, para trabajar con la cinemática y la dinámica del continuo fractal $\frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$ se trabaja con la elección de un cálculo fraccionario apropiado, el cual está estrechamente relacionado con la métrica fractal definida por (3.1)-(3.6) tomando en cuenta las propiedades topológicas y dinámicas del flujo continuo fractal.

Existen algunas definiciones de derivadas fraccionarias locales. En la mayoría de ellos, la derivada fraccionaria local $d^\alpha f/dx^\alpha$ es introducida como un caso especial de la derivada fraccionaria no local. Mientras la derivada fraccionaria local definida de tal forma es automáticamente inversa a la integral fraccionaria correspondiente, la expresión de los operadores fraccionarios locales asociados en términos de derivadas ordinarias es complicado y no siempre existe.

En [14] se muestra que el operador Laplaciano local en E^n fue generalizado para el espacio euclidiano E^α con la dimensión topológica α definida como:

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \frac{D-2}{\tan \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right], \quad (3.8)$$

donde el ángulo ϑ se mide relativo a cualquiera de los ejes en el espacio fraccionario pasando a través del origen. Esta definición fue generalizada a las coordenadas ortogonales tridimensional como

$$\nabla_D^2 = \sum_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\alpha_i - 1}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_i^3 \frac{1}{x_i^{\alpha_i - 1}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{\alpha_i - 1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad (3.9)$$

donde $\alpha_i \leq 1$ son los exponentes topológicos a lo largo de los ejes cartesianos $i = 1, 2, 3$ en E^3 , tal que $\sum_i^3 \alpha_i = D \leq 3$. La generalización de Laplaciano (3.9) puede estar ligado a la topología del continuo fractal $\frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$ caracterizado por la dimensión fractal química d_ℓ , en lugar de su métrica definida por las ecuaciones (3.1)-(3.6).

Sin embargo, en el caso del presente trabajo y haciendo uso de la métrica anteriormente definida, en [14] parten del concepto de la derivada de Hausdorff definida como:

$$\frac{d^H}{dx^\zeta} f = \lim_{x \rightarrow x'} \frac{f(x') - f(x)}{x'^\zeta - x^\zeta}. \quad (3.10)$$

la cual puede definirse en términos de una derivada ordinaria multiplicada por una función de la ley de

potencia de x . Reescribiendo (3.10) en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^H}{dx^\zeta} f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\zeta \Delta f(x)}{\ell_0 \Delta(x/\ell_0 + 1)^\zeta} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \frac{\zeta}{\ell_0 \Delta(x/\ell_0 + 1)^\zeta / \Delta x} \\ &= \zeta \ell_0^{-1} \left[\frac{d(x/\ell_0 + 1)^\zeta}{dx} \right]^{-1} \frac{d}{dx} f = \left(\frac{x}{\ell_0} + 1 \right)^{1-\zeta} \frac{d}{dx} f = \frac{\ell_0^{\zeta-1}}{c_1} \frac{d}{dx} f = \frac{d}{d^\zeta} f, \end{aligned} \quad (3.11)$$

se puede comprobar que la derivada de Hausdorff (3.11) es la inversa de la integral fraccionaria $\int f d^\zeta x = \int f c_1 dx$, donde la densidad de estados a lo largo del eje x $c_1(x_i)$ está definida como en (3.5). Como consecuencia, se define la derivada parcial fraccionaria (derivada de Hausdorff) como:

$$\nabla_k^H = \left(\frac{x_k}{\ell_k} + 1 \right)^{1-\zeta_k} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (3.12)$$

donde los exponentes ζ_k están definidos por (3.6). Por lo tanto, el Laplaciano fraccionario para el continuo fractal ${}^D_3\Phi_D^3$ puede ser definido como:

$$\Delta_H \psi = \nabla_i^H \nabla_i^H \psi = \sum_i^3 \left(\chi^{(i)} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) + \frac{1 - \zeta_i}{x_i + \ell_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right], \quad (3.13)$$

donde

$$\chi^{(i)} = \frac{\ell_i^{\zeta_i-1}}{c_1^{(i)}(x_i)} = \left(\frac{x_i}{\ell_i} + 1 \right)^{1-\zeta_i}, \quad (3.14)$$

La diferencia entre el Laplaciano de Hausdorff (3.13) y el Laplaciano fraccionario (3.9), aunque ambos son convertidos en Laplacianos convencionales en el limite euclidiano $\zeta_i = \alpha_i = 1$, viene desde los orígenes de estos Laplacianos asociados con la métrica fraccionaria y la topología fraccionaria, respectivamente. En este contexto, se introduce el Laplaciano fraccionario generalizado para continuos fractales generales ${}^{d_\ell}_{d_\ell}\Phi_D^3 \subset E^3$ con la dimensión química

$$d_\ell = \sum_i^3 \alpha_i = D \leq 3 \quad (3.15)$$

en la siguiente forma

$$\Delta_D^H \psi = \sum_i^3 \left(\chi^{(i)} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\alpha_i - D + d_i}{x_i + \ell_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right], \quad (3.16)$$

tomando en cuenta la topología fractal, así como la métrica fractal del continuo fractal ${}^{d_s}_{d_\ell}\Phi_D^3 \subset E^3$. Haciendo $d_\ell = 3$, el Laplaciano generalizado (3.16) se convierte en el Laplaciano de Hausdorff (3.13), mientras que cuando $D - d_i = 1$ para toda i (mientras $d_\ell < 3$) se convierte en el Laplaciano fraccionario (3.9) [14, 15].

Aunque la definición del Laplaciano generalizado (3.16) es algo especulativo, se basa sobre la misma fenomenología que la introducida para el Laplaciano fraccionario (3.9) en el espacio euclidiano fraccionario. Desafortunadamente, no se puede definir la derivada fraccionaria local asociada con el Laplaciano generalizado (3.16). Incluso en el caso del flujo continuo fractal generalizado ${}^{d_s}_{d_\ell}\Phi_D^3 \subset E^3$ se puede usar los operadores diferenciales fraccionarios locales asociados con la métrica fractal definida por las ecuaciones (3.1)-(3.6).

Las derivadas parciales de Hausdorff (3.12) obedecen las reglas $\nabla_i^H(\psi\varphi) = \psi\nabla_i^H\varphi + \varphi\nabla_i^H\psi$ y $\nabla_i^H const = 0$. Además, se puede construir los operadores fraccionarios (Hausdorff) locales para el cálculo vectorial sobre el

continuo fractal. Especialmente, el operador nabla fraccionario (Hausdorff) es definido como sigue:

$$\vec{\nabla}^H = \vec{e}_1 \chi^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \chi^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \chi^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (3.17)$$

donde \vec{e}_i es la base vectorial. Por consiguiente, el gradiente de Hausdorff puede definirse como el operador nabla (3.17) aplicado a una función escalar $\psi(x_i)$ como

$$\text{grad}_H \psi = \vec{\nabla}^H \psi = \left(\vec{\nabla}_1^H \psi \right) \vec{e}_1 + \left(\vec{\nabla}_2^H \psi \right) \vec{e}_2 + \left(\vec{\nabla}_3^H \psi \right) \vec{e}_3, \quad (3.18)$$

mientras que la divergencia de Hausdorff del campo vectorial $\vec{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ se puede definir como el producto escalar

$$\text{div}_H \vec{\Psi} = \vec{\nabla}^H \cdot \vec{\Psi} = \sum_1^3 \nabla_i^H \Psi_i, \quad (3.19)$$

Observar que la divergencia de Hausdorff representa la razón total del flujo a través de una superficie cerrada del continuo fractal encerrado por la superficie cuando el volumen se contrae hacia ℓ_0^3 . Esto deja para definir el operador rotacional de Hausdorff de un campo vectorial de la siguiente forma:

$$\text{rot}_H \vec{\Psi} = \vec{\nabla}^H \times \vec{\Psi} = \varepsilon_{kij} \nabla_i^H \Psi_j, \quad (3.20)$$

donde el símbolo \times denota el producto vectorial y ε_{kij} es el símbolo de Levi-Civita.

El conjunto de operadores de Hausdorff (3.16)-(3.20) obedecen las identidades del cálculo vectorial convencional. La cuales son:

$$\text{div}_H \text{rot}_H \vec{\Psi} = \vec{\nabla}^H \cdot \left(\vec{\nabla}^H \times \vec{\Psi} \right) = 0, \quad (3.21)$$

$$\text{rot}_H \text{grad}_H \psi = \vec{\nabla}^H \times \left(\vec{\nabla}^H \psi \right) = 0, \quad (3.22)$$

$$\text{div}_H \text{grad}_H \psi = \vec{\nabla}^H \cdot \vec{\nabla}^H \psi = \Delta_H \psi, \quad (3.23)$$

donde el operador Laplaciano de Hausdorff Δ_H está definido por (3.9), mientras el Laplaciano de Hausdorff de un campo vectorial esta definido como

$$\begin{aligned} \Delta_H \vec{\Psi} &= (\Delta_H \psi_i) \vec{e}_1 + (\Delta_H \psi_j) \vec{e}_2 + (\Delta_H \psi_k) \vec{e}_3 \\ &= \text{grad}_H \text{div}_H \vec{\Psi} - \text{rot}_H \text{rot}_H \vec{\Psi}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

También se encuentran la generalización del teorema de la divergencia de Green-Gauss para un continuo fractal dado como:

$$\begin{aligned} \int_A \vec{\Psi} \cdot \vec{n} dA_d &= \int_A \Psi_k n_k dA_d^{(k)} = \int_A \Psi_k c_2^{(k)}(c_{i \neq k}, d_k) dA_2^{(k)} = \int_W c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, \ell_{i \neq k}, d_k) \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k} dV_3 \\ &= \int_W c_3^{-1}(x_i / \ell_i, D_M) c_2^{(k)}(x_{i \neq k}, \ell_{i \neq k}, d_k) \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k} dV_D = \int_W \nabla_k^H \Psi_k dV_D = \int_W \text{div}_H \vec{\Psi} dV_D, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $\vec{\Psi} = \Psi_k \vec{e}_k$ es cualquier campo vectorial acompañado por el flujo fractal, mientras $\vec{n} = n_k \vec{e}_k$ es vector normal. Por otro lado en [16] se desarrollo el teorema de Green-Gauss Generalizado con la métrica definida

como:

$$\int_{\partial W} g_0 \frac{\partial f_0}{\partial \vec{n}^d} dS = \int_W \{g_0 \nabla_H f_0 + \langle \nabla^H f_0, \nabla^H f_0 \rangle\} dV_D \quad (3.26)$$

Y la generalización del teorema de Kelvin-Stokes, el cual relaciona la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial \vec{f} sobre una superficie A en el espacio euclidiano tridimensional a una integral de línea de un campo vectorial sobre su frontera ∂A , dada como:

$$\oint_{\partial A} \vec{f} \cdot d\vec{x}^{(\zeta)} = \oint_{\partial A} f_k dx_k^{(\zeta)} = \int_{\partial A} c_1^{(k)} f_k dx_k = \int_A n_k \varepsilon_{kji} \nabla_j^H (c_1^i f_i) = \int_A \vec{n} \cdot \text{rot}_H \vec{f} dA_d. \quad (3.27)$$

La métrica Lagrangiana para el continuo fractal ${}_{d_\ell}^d \Phi_D^3 \subset E^3$ se puede tomar en cuenta usando la derivada parcial de Hausdorff del tiempo definida como

$$\nabla_i^H = \chi_\tau(t) \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.28)$$

donde τ_0 es la escala de tiempo característica y

$$\chi_\tau = \left(\frac{t}{\tau_0} + 1 \right)^{1-\alpha_\tau}, \quad (3.29)$$

mientras la dimensión fractal de escala de tiempo esta definida como

$$\alpha_\tau = \frac{d_S}{D} = \frac{2}{D_W} = \frac{2}{2+\theta}, \quad (3.30)$$

donde D_W es la dimensión fractal de la caminata aleatoria en el continuo fractal ${}_{d_\ell}^d \Phi_D^3 \subset E^3$ [15, 16].

3.1.3. Cinemática y dinámica del continuo fractal

La descripción matemática del flujo continuo fractal ${}_{d_\ell}^d \Phi_D^3 \subset E^3$ requiere dos conjuntos de variables: un conjunto para el flujo en el dominio del espacio Euclidiano E^3 y tiempo, llamado variables independientes, y un conjunto para el flujo que toma lugar en el dominio espacio-tiempo fraccionario, llamado variables dependientes.

Suponiendo que el continuo fractal tridimensional ocupa en el tiempo $t = 0$ una región $W_0 \in {}_{d_\ell}^d \Phi_D^3 \subset E^3$ y, en el tiempo $t > 0$, ocupa una región $W_t \in {}_{d_\ell}^d \Phi_D^3 \subset E^3$, donde las regiones W_0 y W_t se asumen que están limitados, abiertos, y conectados. El movimiento del continuo fractal se determina por la posición \vec{x} de los puntos materiales en el espacio euclidiano E^3 como una función de la posición de referencia $\vec{x} \in E^3$ y el tiempo t . Por lo tanto, $\vec{x} = \vec{\Theta}(\vec{x}, t)$, donde la función $\vec{\Theta}$ se define como el mapeo $W_0 \rightarrow \vec{\Theta}(W_0, t) = W_t$, y el vector desplazamiento

$$\vec{v} = \vec{\Theta}(\vec{x}, t) - \vec{x} \quad (3.31)$$

describen el campo de desplazamiento en la configuración inicial (referencia) del continuo fractal. Además, como en el caso de la mecánica continua clásica, se asume que para todo $t > 0$, la función $\vec{\Theta}$ es un mapeo

suave uno a uno de cada punto material de W_0 en W_t , tal que existe un inverso único de (3.31), al menos localmente, si y solo si el determinante de la matriz Jacobiana fractal definida como [14]:

$$J_D^{(ij)} = [\nabla_i^H X_j] = \begin{vmatrix} \nabla_1^H X_1 & \nabla_2^H X_1 & \nabla_3^H X_1 \\ \nabla_1^H X_2 & \nabla_2^H X_2 & \nabla_3^H X_2 \\ \nabla_1^H X_3 & \nabla_2^H X_3 & \nabla_3^H X_3 \end{vmatrix} \quad (3.32)$$

no es idénticamente 0, esto es,

$$0 < J_D = \det J_D^{(ij)} = \varepsilon_{ijk} \nabla_1^H X_i \nabla_2^H X_j \nabla_3^H X_k < \infty, \quad (3.33)$$

donde ε_{ijk} es el símbolo de permutación de Levi-Civita. Notar que la matriz (3.32) no es otra más que el gradiente de deformación de Hausdorff en el continuo fractal $\frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$, mientras el Jacobiano (3.33) depende solamente de la métrica del fractal, pero no sobre la topología del continuo fractal caracterizado por d_ℓ . Esto es fácil de entender ya que J_D mide solamente el cambio local del volumen, tal que una deformación conserva la región de volumen $W \subset \frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3$, si y solamente si $J_D = 1$.

En este contexto, la velocidad del flujo continuo fractal $W \subset \frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3$ se puede definir usando la escala de tiempo intrínseca (fractal) o natural. En el primer caso, la velocidad de la partícula se puede definir como

$$\vec{v} = \nabla_t^H \vec{v}, \quad (3.34)$$

donde la derivada del tiempo de Hausdorff se define por (3.28)-(3.30). Además, usando la regla del diferencial del determinante es fácil obtener la identidad de Euler generalizada para el continuo fractal $\frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$ en la siguiente forma:

$$\nabla_t^H J_D = J_D \nabla_i^H v_i. \quad (3.35)$$

Por consiguiente, se define la derivada material del tiempo fraccionaria fractal como

$$\left(\frac{d}{d^H t} \right)_D \psi = \nabla_t^H \psi + v_k \nabla_k^H \psi = \chi_\tau \frac{\partial}{\partial t} \psi + v_k \chi^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \psi, \quad (3.36)$$

donde $\psi(x_i, t)$ es cualquier cantidad acompañada por una región en movimiento $W_t \subset \frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3$, tal que la generalización del teorema de transporte de Reynolds para el continuo fractal $\frac{d_s}{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$ se leerá como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d^H t} \right)_D \int_{W_t} \psi dV_D &= \left(\frac{d}{d^H t} \right)_D \int_{W_0} \psi J_D dV_D^0 = \int_{W_0} \left[\left(\frac{d}{d^H t} \right)_D \psi J_D + \psi \left(\frac{d}{d^H t} \right)_D J_D \right] dV_D^0 \\ &= \int_{W_0} \left[\left(\frac{d}{d^H t} \right)_D \psi + \psi \nabla_k^H u_k \right] J_D dV_D^0 = \int_{W_t} \left[\left(\frac{d}{d^H t} \right)_D \psi + \psi \nabla_k^H u_k \right] dV_D \\ &= \int_{W_t} (\nabla_t^H \psi + \nabla_k^H (\psi u_k)) dV_D = \int_{W_t} (\nabla_t^H \psi) dV_D + \int_A \psi u_k n_k dA_d^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Observar que en el caso del continuo fractal $\Phi_D^3 \equiv \frac{D}{3} \Phi_D^3 \subset E^3$, (3.35)-(3.37) se convierten en las ecuaciones correspondientes derivadas en [14].

Aquí, se debe señalar que el uso de una escala de tiempo intrínseca (fractal) se justifica cuando se describe una difusión anómala del continuo fractal, pero no cuando el flujo continuo fractal se usa para modelar el flujo

de fluido en un medio poroso fractal. De hecho, valores anómalos de D_W reflejan que la partícula que camina puede visitar el mismo lugar muchas veces. pero esto no es el caso del flujo Darciano en un medio poroso. Por lo tanto, para modelar el flujo Darciano en un medio poroso se debe asumir que el flujo continuo fractal está caracterizado por la dimensión espectral $d_s = D$, en lugar de la dimensión espectral del medio poroso fractal. Por otra parte, en la siguiente sección se muestra que el uso de la derivada de tiempo fraccionaria conduce al fracaso de la conservación del momento, que es esencial para el flujo del fluido, pero no para la difusión. Por lo tanto, la velocidad del flujo continuo fractal debe definirse como

$$\vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \quad (3.38)$$

y también la identidad de Euler para el continuo fractal ${}_{d_t}^D \Phi_D^3 \subset E^3$ se lee como

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D J_D = J_D \nabla_i^H v_i, \quad (3.39)$$

donde la derivada del tiempo material fractal se define como

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_k \nabla_k^H \psi, \quad (3.40)$$

y el teorema de transporte de Reynolds para el continuo fractal tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_D \int_{W_t} \psi dV_D &= \left(\frac{d}{dt} \right)_D \int_{W_0} \psi J_D dV_D^0 = \int_{W_0} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi J_D + \psi \left(\frac{d}{dt} \right)_D J_D \right] dV_D^0 \\ &= \int_{W_0} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi + \psi \nabla_k^H u_k \right] J_D dV_D^0 = \int_{W_t} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_D \psi + \psi \nabla_k^H u_k \right] dV_D \\ &= \int_{W_t} (\nabla_t^H \psi + \nabla_k^H (\psi u_k)) dV_D = \int_{W_t} \frac{\partial}{\partial t} \psi dV_D + \int_A \psi u_k n_k dA_d^{(k)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

lo que implica que una tasa de cambio de la integral de una función sobre un volumen de continuo fractal está relacionada con el cambio en el valor de la función en el volumen y cualquier cambio en el tamaño del volumen debido al movimiento de sus límites [15].

3.2. Leyes de conservación para el flujo continuo fractal

Las leyes fundamentales de conservación se derivaron para el caso especial de un continuo fractal $\Phi_D^3 \equiv {}_3^D \Phi_D^3 \subset E^3$ en [14], sin embargo para un flujo continuo fractal generalizado ${}_{d_t}^D \Phi_D^3 \subset E^3$ las ecuaciones no se ven afectadas.

3.2.1. Ecuación del Balance de Masa

La ECUACIÓN DE CONTINUIDAD para el flujo continuo fractal ${}_{d_t}^D \Phi_D^3 \subset E^3$ puede ser escrita en la forma

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = -div_H(\rho_c \vec{u}), \quad (3.42)$$

la cual implica que el campo de velocidades en un flujo estacionario ($\vec{u} = \text{const}$) de un continuo fractal incompresible ($\rho_c = \text{const}$) es solenoidal en el sentido de que para cualquier superficie cerrada ∂W el flujo total neto a través de la superficie del fractal es igual a cero cuando

$$\text{div}(\vec{u}) = 0, \quad \text{mientras} \quad \text{div}(\vec{u}) = \sum_i^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \neq 0, \quad (3.43)$$

Es pertinente señalar que el campo de velocidad solenoidal del continuo fractal puede expresarse como el rotacional de Hausdorff para un potencial vectorial $\vec{\Phi}$, que es, $\vec{u} = \text{rot}_H(\vec{\Phi})$, donde el rotacional de Hausdorff está definido por (3.20). En este contexto, el flujo irrotacional del continuo fractal debería definirse como el flujo con $\text{rot}_H(\vec{u}) = 0$. Haciendo uso de la terminología de la hidrodinámica clásica, el campo vectorial

$$\vec{\omega} = \text{rot}_H(\vec{u}) \quad (3.44)$$

puede ser denominado como la vorticidad del fractal. Además, usando las identidades del cálculo vectorial fraccionario se puede presentar como $\vec{u} = \text{grad}_H(\psi)$, donde el campo escalar $\psi(x_i)$ obedece la condición $\Delta_H \psi = 0$. Es fácil verificar que cualquier campo de velocidad en el continuo fractal se puede descomponer en una parte irrotacional y en una parte solenoidal como sigue:

$$\vec{u} = \text{rot}_H(\vec{\Phi}) + \text{grad}_H(\psi). \quad (3.45)$$

Obsérvese que en el caso del flujo continuo fractal que obedece a la regla general de Mandelbrot para las intersecciones (3.6), (3.45) coincide con la descomposición utilizada en la hidrodinámica clásica.

3.2.2. Ecuación del Balance de Momento

La conservación del momento es la segunda ley de Newton. Siguiendo los conceptos de la mecánica del continuo clásico, las fuerzas que actúan sobre el continuo fractal o su parte se pueden dividir en dos categorías: las que actúan por contacto con la superficie, llamadas de tracción superficiales (\vec{T}) y las que actúan a distancia, llamadas fuerzas de volumen o de cuerpo (\vec{F}). Además, teniendo en cuenta la definición del fractal jacobiano (3.32), las fuerzas superficiales en el flujo continuo fractal pueden presentarse como el gradiente de Hausdorff (3.12) de las tensiones, es decir,

$$\vec{T} = -\nabla_i^H \sigma_{ij}, \quad (3.46)$$

donde $\sigma_{ij} = p\delta_{ij} - \sigma_{ij}^v$ es el tensor de esfuerzo de Cauchy, p es la presión, y σ_{ij}^v es el tensor de esfuerzos viscosos. La conservación del momento en el flujo continuo fractal $\frac{d_s}{d_t} \Phi_D^3 \subset E^3$ implica que

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_D \int_W \rho_c u_i dV_D = \int_W (\rho_c f_i + \nabla_j^H \sigma_{ij}) dV_D, \quad (3.47)$$

donde f_i es la densidad de las fuerzas de volumen, por ejemplo, la constante gravitacional g , o la densidad de fuerzas magnéticas o eléctricas, mientras la derivada de tiempo material fractal se define por (3.36). Usando

la ecuación de continuidad (3.42), la ECUACIÓN DE LA DENSIDAD DE MOMENTO en el continuo fractal se puede presentar en la siguiente forma:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_D u_i = \frac{\partial}{\partial t} u_i + u_i \nabla_j^H u_j = f_i + \rho_c^{-1} (\nabla_i^H p + \nabla_j^H \sigma_{ij}^v), \quad (3.48)$$

la cual se convierte en la ecuación convencional del balance de la densidad de momento cuando $d_i = D - 1$ para todo i . Notar que (3.48) junto con la ecuación de conservación de masa (3.42) y condiciones de frontera apropiadas, son suficientes para describir el flujo estacionario de un continuo fractal incompresible ($\rho_c = \text{const}$) y no viscoso ($\sigma_{ij}^v = 0$).

3.2.3. Ecuación del Balance de Energía

La energía interna dE de un elemento del continuo fractal de masa M_D es igual a $dE = e(x_i, t)\rho_c(x_i, t)dV_D$, donde $e(x_i, t)$ es la densidad de energía interna, mientras que la energía cinética de la masa dM_D moviéndose con una velocidad $\vec{u}(x_i, t)$ es igual a $dT = 0,5\rho_c|\vec{u}|^2$. Por consiguiente, la energía total de la región W del continuo fractal se define como:

$$U = E + T = \int_W \rho_c \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV_D.$$

El cambio de la energía total de la región W se puede definir como

$$U(t_1) - U(t_2) = \Omega_M + \Omega_S + Q_S,$$

donde Ω_M es el trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo $\vec{f}\rho_c dV_D$, Ω_S es el trabajo realizado por las fuerzas de superficie $\sigma_{ij}n_i \vec{e}_i dV_D$, σ_{ij} es el tensor de esfuerzo de Cauchy, y $\vec{Q}_S = \rho_c \vec{\gamma}$ es el flujo de calor que entra a la región $W \in \frac{D}{d_i} \Phi_D^3 \subset E^3$ a través de la superficie ∂W , mientras $\vec{\gamma} = \gamma_i n_i$ es la densidad de flujo de calor que entra. Por lo tanto, la razón del cambio de la energía total se puede representar como:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho_c \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV_D = \int_W \rho_c u_i f_i dV_D + \int_{\partial W} (u_i \sigma_{ij} n_i e_i + n_i \gamma_i) dA_d. \quad (3.49)$$

Empleando el teorema de la divergencia de Green-Gauss generalizado (3.26), (3.49) se puede reescribir como:

$$\int_W \left[\rho_c \left(\frac{d}{dt} \right)_D e - \sigma_{ij} \nabla_j^H u_i - \rho_c \nabla_i^H \gamma_i \right] dV_D, \quad (3.50)$$

el cual es válido para cualquier región W del continuo fractal $\frac{D}{d_i} \Phi_D^3 \subset E^3$, mientras que la derivada material del tiempo se define por (3.36). Por lo tanto, la ecuación diferencial del balance de la densidad de energía en el flujo continuo fractal tiene la siguiente forma:

$$\rho_c \left(\frac{d}{dt} \right)_D e = \rho_c \frac{\partial e}{\partial t} + u_i \rho_c \nabla_i^H e = \sigma_{ij} \nabla_j^H u_i + \rho_c \nabla_i^H \gamma_i. \quad (3.51)$$

Notar que (3.51) se convierte en la ecuación del balance de la densidad energía convencional cuando cualquier intersección del flujo continuo con los planos cartesianos están caracterizados por la misma dimensión fractal (3.6).

Por lo tanto, es pertinente notar que en el caso de una difusión anómala del continuo fractal con la dimensión de escala de tiempo intrínseca $\alpha_\tau < 1$, la ecuación de continuidad tiene la siguiente forma:

$$\nabla_t^H \rho_c = -dv_H(\rho_c, \vec{v}). \quad (3.52)$$

Tomando en cuenta la definición de la derivada parcial de Hausdorff (3.12) y la velocidad de la partícula (3.34), (3.52) puede reescribirse en la forma de (3.42) con la velocidad del flujo definida como

$$\vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \left(\frac{t}{\tau_0} + 1 \right)^{\alpha_t - 1} \vec{v}.$$

Al mismo tiempo, la ecuación para la densidad del balance de momento en caso de la difusión anómala del continuo fractal se puede representar como:

$$\left(\frac{d}{d^H t} \right)_D v_i = \nabla_t^H v_i + v_i \nabla_J^H v_j = \chi_\tau^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i}{t + \tau_0} + u_i \nabla_j^H u_j \right) = f_i + \rho_c^{-1} (\nabla_t^H p + \nabla_j^H \sigma_{ij}^v). \quad (3.53)$$

(3.53) implica que el momento no puede ser conservado durante una difusión anómala del continuo fractal. Además, se debería señalar que la falla de la ley de conservación del momento es el futuro de los modelos fenomenológicos del flujo fractal que se basan en conceptos de difusión anómalos.

3.3. Hidrodinámica del continuo fractal

Para desarrollar la hidrodinámica del continuo fractal es necesario utilizar dos tipos fundamentales de leyes: las leyes de conservación y las leyes constitutivas. Las leyes de conservación descritas anteriormente describen la conservación de la materia, la energía y el momento, mientras que las leyes constitutivas deben definir la relación entre los desplazamientos en el continuo fractal y las fuerzas aplicadas. Las leyes constitutivas de la mecánica del continuo no pueden deducirse de las leyes de la mecánica de los puntos materiales ni de los cuerpos rígidos, sino que pueden definirse a partir de experimentos físicos, por ejemplo, la ley de elasticidad de Hooke, la ley de viscosidad newtoniana, etc. Para derivar las relaciones constitutivas de la hidrodinámica clásica para el flujo continuo fractal deben ser mapeadas en el marco del continuo fractal. De esta manera, hay una serie de reglas que deben ser utilizadas para producir ecuaciones constitutivas que sean admisibles desde el punto de vista racional y físico.

3.3.1. Mapeo del flujo fluido en un medio fractalmente permeable dentro del flujo continuo fractal

El concepto de continuo es una idealización, que puede aproximar la realidad cuando se observan los promedios de distancia y tiempo apropiados. Por lo tanto, el término “continuo” significa comúnmente que varias propiedades promediadas en una escala de longitud y tiempo de interés varían suavemente dentro de la región excepto, posiblemente, para un pequeño número de discontinuidades. Como consecuencia, los medios heterogéneos se modelan a menudo en un marco continuo usando un medio eficaz o aproximaciones de campo

promedio. En este contexto, la hidrodinámica fractal continua puede proporcionar una descripción general del flujo de fluidos en un medio poroso fractal.

El flujo en un medio fractalmente permeable se mapea a un flujo del continuo fractal ${}^D_{d_\ell}\Phi_D^3 \subset E^3$ con la métrica fractal definida por una distribución no uniforme. El caso más simple de flujo fractal en medios permeables es el flujo de una sola fase fluida homogénea a través de un sólido poroso y/o fisurado. El mapeo del flujo de fluido en un medio fractalmente permeable en el flujo continuo fractal implica que la densidad del continuo fractal ρ_c está relacionada con la densidad del fluido ρ_f como

$$\rho_c = \phi\rho_f, \quad (3.54)$$

donde ϕ es la porosidad efectiva del medio fractal permeable. Consecuentemente, la viscosidad dinámica del flujo continuo fractal esta relacionada a la viscosidad del fluido $\mu_f = \rho_f\eta_f$ como

$$\mu_c = \eta_c\rho_c = \eta\phi\rho_f = \phi\mu_f, \quad (3.55)$$

mientras la viscosidad cinemática del continuo fractal η_c se asume que sea igual para la viscosidad cinemática del fluido, esto es, $\eta_c = \eta_f = \eta$.

Considerando el flujo fractal continuo ${}^D_{d_\ell}\Phi_D^3 \subset E^3$ está gobernado por las ecuaciones de equilibrio (3.42), (3.48) y (3.51) asociadas con la métrica fractal definida por (3.1)-(3.6), mientras que la forma de la ecuación constitutiva deende de la topología del flujo fractal caracterizada por la dimensión química d_ℓ , mientras que la dimensión espectral del flujo hidrodinámico (Darciano) es siempre $d_s = D$, incluso cuando la dimensión espectral del medio poroso fractalmente permeable es menor que su dimensión fractal de masa.

En este trabajo es de interés especial el flujo estacionario a través de un medio poroso y/o fisurado, descrito convencionalmente por la ley de Darcy, o la presión transitoria en los depósitos porosos (fisurados), comúnmente descritos usando las ecuaciones derivadas por la sustitución de la ley de Darcy en la ecuación de continuidad. Ambos casos se discuten a continuación.

El trabajo de Balankin proporciona el siguiente desarrollo con respecto a la ley de Darcy: Primeramente hace mención sobre la discusión de la geometría fractal de los medios porosos sobre el flujo Darciano. Además de recopilar un conjunto de trabajos donde se propuso una versión convolucionada de la ley de Darcy basada en una integral fraccionaria, donde se sugirió la ley de Darcy generalizada que emplea la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. Dentro de estos trabajos la ley de Darcy fue modificada, introduciendo formalismos de memoria generales que operan en el flujo, así como en el gradiente de presión, lo que implica una filtración del gradiente de presión sin singularidades, proponiendo de esta manera que la geometría fractal sea un medio para modelar y explicar las desviaciones de la velocidad de Darcy debido a las rocas fracturadas en los yacimientos naturalmente fracturados y en los mantos acuíferos.

Siguiendo la derivación de la ley de Darcy empleando operadores fraccionarios de Hausdorff (3.17)-(3.20) y anticipando que la ley de Darcy generalizada para el flujo continuo fractal ${}^D_3\Phi_D^3 \subset E^3$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$u_i = \frac{K_{ij}^{(c)}}{\mu_c} \nabla_i^H(p - h_g), \quad (3.56)$$

donde la presión $p(x_i)$ y el cabezal gravitacional $h_g(x_i)$ de un campo de gravedad dado son funciones de las coordenadas cartesianas

$$p(z) = p_0 - g(D - d_z)\rho_0\ell_z \left(\frac{z}{\ell_z} + 1 \right)^{D-d_z}, \quad (3.57)$$

donde $p_0 = p(z = 0)$ es la presión sobre la normal de la superficie libre al campo gravitacional. Notar que cuando $D - d_z < 1$, el cabezal gravitacional incrementa con la elevación del fluido más lentamente que en el caso Euclidiano.

Sin embargo, los modelos convencionales de transición de presión se han desarrollado bajo el supuesto de un depósito homogéneo. Un ejemplo de ello es la ecuación de difusión de presión transitoria en un flujo radial isotrópico dada por:

$$c\mu\phi \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K_r}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (3.58)$$

donde la dimensión de flujo n refleja cómo cambia el área de flujo aparente con la distancia desde la fuente y no está necesariamente relacionada con la naturaleza de llenado de espacio del flujo, en el sentido de que la superficie aparente del flujo unidimensional es constante independientemente de la distancia desde el pozo, mientras que la superficie del flujo bidimensional es proporcional a r^1 y la del flujo tridimensional es proporcional a r^2 . Por lo tanto, en el caso del flujo unidimensional $n = 1$, mientras que en el caso del flujo radial en la geometría cilíndrica $n = 2$, y $n = 3$ en el caso de la simetría esférica del flujo radial.

Por consiguiente, para describir la presión transitoria en un depósito poroso, se hace uso de la ecuación de Darcy (3.56) la cual se combina con la ecuación de continuidad y una ecuación de estado para el fluido considerado. Para el caso de un fluido ligeramente compresible, se supone que $\partial\rho_f/\partial p = c_f\rho_f$, donde c_f es el coeficiente de compresibilidad del fluido. Si un medio poroso es también ligeramente compresible, el derivado temporal de la densidad del fluido puede ser reemplazado por

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t} = c\rho_f \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.59)$$

donde $c = c_f + c_m$ es el sistema de compresibilidad, mientras c_m es el coeficiente de la matriz de compresibilidad.

Aunque la ecuación de presión transitoria (3.58) y sus análogos en las coordenadas cartesianas se usan a veces en la ingeniería petrolera, hoy en día es ampliamente aceptado que en muchos casos los datos de campo experimental no pudieron describirse satisfactoriamente usando modelos euclidianos de yacimientos naturales. Esto estimula el uso de la geometría fractal para el modelado de yacimientos. En este contexto, en [14] menciona que Berker propuso una ecuación de presión-transitorio que implica la dimensión fraccional del flujo, manteniendo los supuestos de flujo radial y homogeneidad del medio fracturado. La famosa ecuación de Barker puede escribirse en la siguiente forma adimensional:

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D^{D^*-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D^*-1} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{D^* - 1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D}, \quad (3.60)$$

donde $0 < D^* \leq 3$ es la dimensión de flujo que se puede suponer que es fraccional. Para derivar la ecuación de presión transitorio para un flujo continuo fractal ${}^D_3\Phi_D^3 \subset E^3$, se observa que en el caso de un continuo

fractal ligeramente compresible $\partial\rho_c/\partial p = c\rho_c$ y así

$$\frac{\partial\rho_c}{\partial t} = c\rho_c \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.61)$$

como se suele suponer en la hidrodinámica de los líquidos ligeramente compresibles (3.61), mientras que el coeficiente de compresibilidad del fractal continuo c se determina por la compresibilidad del fluido $c_f = \partial \ln \rho_f / \partial p$ y la compresibilidad del medio poroso $c_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial p}$ como

$$c = c_f + \phi c_\phi \quad (3.62)$$

sustituyendo (3.56) y (3.61) en (3.42) se obtiene la siguiente ecuación para la difusión de presión de un flujo continuo fractal tridimensional anisotrópico

$$\begin{aligned} c\mu_c \frac{\partial p}{\partial t} &= \text{div}_H \left[K_{ii}^{(c)} \text{grad}_H (p - h_g) \right] \\ &= \sum_i^3 k_{ii}^{(c)} \left(\frac{x_i}{\ell_i} + 1 \right)^{2(1-d_i-D)} \left[\left(\frac{\partial^2 (p - h_g)}{\partial x_i^2} \right) + \frac{1 - d_i - D}{x_i + \ell_i} \left(\frac{\partial (p - h_g)}{\partial x_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde h_g es la altura gravitacional definida por (4.2).

Para depósitos y pozos de geometría conocida, la ecuación (3.63) junto con las condiciones internas y externas adecuadas y las condiciones iniciales pueden usarse para modelar los transitorios de presión del flujo fractal. Obsérvese que en el caso de la porosidad euclidiana, así como en el caso de la porosidad fractal isotrópica ($K_{ij}^{(0)} \equiv K_0$) que obedece a la regla de pulgar de Mandelbrot (3.6), (3.63) se convierte en la ecuación clásica de transitorios de presión

$$c\mu_f \phi \frac{\partial p}{\partial t} = K_0 \Delta (p - h_g), \quad (3.64)$$

que en el caso de flujo isotrópico radial ($h_g = 0$) a través de una esfera n -dimensional toma la forma de (3.58).

En el flujo continuo fractal ${}^D_{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$, haciendo uso del laplaciano fraccionario generalizado (3.13) para el flujo continuo fractal generalizado ${}^D_{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$ el mapeo puede asociarse con una forma específica (aunque desconocida) de ecuación constitutiva para el flujo continuo fractal generalizado ${}^D_{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$, la cual hace posible obtener la ecuación fenomenológica presión-transitoria, cuando la igualdad (3.6) se mantiene, mientras que la dimensión de flujo $n = d_\ell < 3$ es fraccional. En las coordenadas cartesianas, la ecuación transitorio-presión generalizada para un flujo continuo fractal anisotrópico ${}^D_{d_\ell} \Phi_D^3 \subset E^3$ tiene la siguiente forma:

$$c\mu_c \frac{\partial p}{\partial t} = \sum_i^3 K_{ii}^{(c)} \left(\frac{x_i}{\ell_i} + 1 \right)^{2(d_i+1-D)} \left[\left(\frac{\partial^2 (p - h_g)}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\alpha_i - d_i - D}{x_i + \ell_i} \left(\frac{\partial (p - h_g)}{\partial x_i} \right) \right], \quad (3.65)$$

mientras la relación (3.15) se mantiene [14, 15]

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Discretización de la Ecuación de difusión de Presión en un flujo continuo fractal tridimensional anisotrópico

El principio de conservación de masa aplicado al sistema pre-fractal resulta en una ecuación de continuidad que combinada con la ecuación de transporte (la ecuación de Darcy) y una ecuación de estado (fluido ligeramente compresible), permite obtener la expresión siguiente, denominada en la literatura como ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD:

$$c\mu_c \frac{\partial p}{\partial t} = \vec{\nabla}^H \cdot \left(K_{ii}^{(c)} \vec{\nabla}^H (p - h_g) \right) \quad (4.1)$$

donde h_g es el cabezal de presión gravitacional dado por la ecuación:

$$h_g = p_0 - g\zeta_z \rho_0 \ell_3 \left(\frac{x_3}{\ell_3} + 1 \right)^{\zeta_z}. \quad (4.2)$$

Para dar una solución a la ecuación diferencial (4.1) se requiere de dos condiciones de frontera, y una condición inicial, sin embargo, no es una ecuación diferencial que se pueda resolver analíticamente, por lo que para su solución, se aplica el método del elemento finito usando elementos tetraédricos lineales formulado en la SECCIÓN 1.5.

Con el fin de usar el Método de Galerkin, primero se obtiene la Ecuación Residual Ponderada (1.37). Asumiendo W un volumen de un elemento arbitrario, moviendo todos los términos de (4.1) del lado izquierdo, luego multiplicando por las funciones de peso, o funciones de interpolación, N_i e integrando sobre todo el volumen, se obtiene el residual ponderado de Galerkin. Este procedimiento se llevará a cabo de tres formas diferentes para la ecuación de Difusividad.

Primer Tratamiento

Para esta primera parte se sustituyen los operadores locales fraccionarios (3.18) y (3.19) a la ecuación de difusividad (4.1) obteniendo la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$c\mu_c \frac{\partial \phi}{\partial t} = \chi^{(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11}^{(c)} \chi^{(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \chi^{(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22}^{(c)} \chi^{(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \chi^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{33}^{(c)} \chi^{(z)} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right),$$

con el fin de obtener una ecuación diferencial análoga a la ecuación (1.38) y hacer uso de las condiciones de frontera mencionadas en la SECCIÓN 1.5, se multiplica la ecuación anterior por $A = c\mu_c (\chi^{(x)} \chi^{(y)} \chi^{(z)})^{-1}$ y

reagrupando términos se obtiene la expresión

$$\frac{c\mu_c}{\chi^{(x)}\chi^{(y)}\chi^{(z)}} \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11}^{(c)} \frac{\chi^{(x)}}{\chi^{(y)}\chi^{(z)}} \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22}^{(c)} \frac{\chi^{(y)}}{\chi^{(x)}\chi^{(z)}} \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{33}^{(c)} \frac{\chi^{(z)}}{\chi^{(x)}\chi^{(y)}} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right),$$

pasando todo del lado izquierdo de la igualdad se tiene

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{A} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11}^{(c)} A_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22}^{(c)} A_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{33}^{(c)} A_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right\} = 0.$$

Obteniendo el Residual Ponderado de Galerkin y separando las integrales se tiene

$$\int_W \frac{\partial\phi}{\partial t} N_i dV_D - \int_W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11}^{(c)} A_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22}^{(c)} A_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{33}^{(c)} A_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right\} \frac{c_3}{A} N_i dV_3 = 0,$$

haciendo $\frac{c_3}{A} = \gamma$ e integrando por partes la segunda integral

$$\int_W \frac{\partial\phi}{\partial t} N_i dV_D - \sum_{j=0}^3 \int_{\partial W} A_j K_{jj}^{(c)} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} N_i n_j \gamma dS_2 + \sum_{j=0}^3 \int_W A_j K_{jj}^{(c)} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \gamma dV_3 = 0. \quad (4.3)$$

Segundo Tratamiento

En esta segunda parte se sustituye los operadores locales fraccionarios (3.18) y (3.19), desarrollando las respectivas derivadas, en la ecuación (4.1) obteniendo la siguiente expresión:

$$c\mu_c \frac{\partial\phi}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 K_{jj}^{(c)} \left(\chi^{(i)} \right)^2 \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} + \frac{1 - \zeta_i}{x_i + \ell_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right]$$

Pasando la sumatoria del lado izquierdo de la igualdad, obtenido el Residual Ponderado de Galerkin y separando las integrales se tiene

$$\int_W \frac{\partial\phi}{\partial t} N_i dV_D - \sum_{j=1}^3 \int_W \frac{K_{jj}^{(c)}}{c\mu_c} \left(\chi^{(i)} \right)^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} N_i dV_D + \sum_{j=1}^3 \int_W \frac{K_{jj}^{(c)}}{c\mu_c} \left(\chi^{(i)} \right)^2 \frac{1 - \zeta_i}{x_i + \ell_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} N_i dV_D = 0$$

Colocando los coeficientes en términos propuestos en el tratamiento anterior se tiene:

$$\int_W \frac{\partial\phi}{\partial t} N_i dV_D - \sum_{j=1}^3 \int_W A_j K_{jj}^{(c)} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} N_i \gamma dV_3 + \sum_{j=1}^3 \int_W A_j K_{jj}^{(c)} \frac{1 - \zeta_i}{x_i + \ell_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} N_i \gamma dV_3 = 0$$

Integrando por partes la segunda integral y eliminando términos tenemos la expresión:

$$\int_W \frac{\partial\phi}{\partial t} N_i dV_D - \sum_{j=0}^3 \int_{\partial W} A_j K_{jj}^{(c)} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} N_i n_j \gamma dS_2 + \sum_{j=0}^3 \int_W A_j K_{jj}^{(c)} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \gamma dV_3 = 0 \quad (4.4)$$

la cual es exactamente la misma expresión que (4.3).

Tercer Tratamiento

Para este último tratamiento se hace uso de la ecuación (4.1) sin sustituir ningún operador, trabajando únicamente con operadores fraccionarios locales. Se pasan todos los términos al lado izquierdo de la igualdad e integrando, se obtiene el Residual Ponderado de Galerkin en la forma:

$$\int_W \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla}^H \cdot \left(\frac{K_{ii}^{(c)}}{c\mu_c} \vec{\nabla}^H \phi \right) \right\} N_i dV_D = 0$$

separando las integrales y aplicando el teorema de Green-Gauss Generalizado (3.26) se tiene la siguiente expresión:

$$\int_W \frac{\partial \phi}{\partial t} N_i dV_D - \frac{K_{jj}^{(c)}}{c\mu_c} \int_{\partial W} N_i \langle \vec{n}^d, \vec{\nabla}^H \phi \rangle dS + \frac{K_{jj}^{(c)}}{c\mu_c} \int_W \langle \vec{\nabla}^H N_i, \vec{\nabla}^H \phi \rangle dV_D = 0$$

donde

$$\langle \vec{f}_0, \vec{g}_0 \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3$$

obteniendo la siguiente expresión

$$\int_W \frac{\partial \phi}{\partial t} N_i dV_D - \sum_{j=0}^3 \frac{K_{jj}^{(c)}}{c\mu_c} \int_{\partial W} c_2^{(j)} \chi^{(j)} N_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dS + \sum_{j=0}^3 \frac{K_{jj}^{(c)}}{c\mu_c} \int_W (\chi^{(j)})^2 \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} c_3 dV_3 = 0$$

colocando los coeficientes en términos de los tratamientos anteriores se tiene la ecuación

$$\int_W \frac{\partial \phi}{\partial t} N_i dV_D - \sum_{j=0}^3 \int_{\partial W} A_j K_{jj}^{(c)} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} N_i n_j \gamma^{(j)} dS_2 + \sum_{j=0}^3 \int_W A_j K_{jj}^{(c)} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \gamma dV_3 = 0. \quad (4.5)$$

A excepción de los términos $\gamma^{(j)}$, la ecuación (4.5) es igual a las ecuaciones (4.3) y (4.4). Aplicando la condición natural de frontera (ii) que dice que la derivada normal es conocida a lo largo de la frontera:

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z \right) = \alpha \phi + \beta$$

donde α y β son parámetros conocidos a lo largo de la frontera, la ecuación (4.3) queda de la forma:

$$\int_W \frac{\partial \phi}{\partial t} N_i dV_D - \int_{\partial W} (\alpha \phi + \beta) N_i \gamma dS_2 + \sum_{j=0}^3 \int_W K_{jj}^{(c)} A_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \gamma dV_3 = 0 \quad (4.6)$$

Sustituyendo ahora la variable de aproximación $\phi = p(x_i, t) - h_g(x_i)$ haciendo $p = N^T d$ en (4.6) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{d} \int_W N_i N^T dV_D - d \int_{\partial W} \alpha N_i N^T \gamma dS_2 + \int_{\partial W} \alpha h_g N_i \gamma dS_2 - \int_{\partial W} \beta N_i \gamma dS_2 \\ + \sum_{j=0}^3 d \int_W K_{jj}^{(c)} A_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} \gamma dV_3 - \int_W K_{33}^{(c)} A_3 \frac{\partial h_g}{\partial x_3} \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \gamma dV_3 = 0 \end{aligned}$$

reemplazando el cabezal gravitacional (4.2) en la última integral de la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{d} \int_W N_i N^T dV_D - d \int_{\partial W} \alpha N_i N^T \gamma dS_2 + \int_{\partial W} \alpha h_g N_i \gamma dS_2 - \int_{\partial W} \beta N_i \gamma dS_2 \\ + \sum_{j=0}^3 d \int_W K_{jj}^{(c)} A_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} \gamma dV_3 - \int_W K_{33}^{(c)} g \zeta_z^2 \ell_z^{1-\zeta_z} (z + \ell_z)^{\zeta_z - 1} \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \gamma dV_3 = 0. \end{aligned}$$

Obteniendo el integrando de la última integral se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{d} \int_W N_i N^T dV_D - d \int_{\partial W} \alpha N^T N_i \gamma dS_2 + \int_{\partial W} \alpha h_g N_i \gamma dS_2 - \int_{\partial W} \beta N_i \gamma dS_2 \\ + \sum_{j=0}^3 d \int_W K_{jj}^{(c)} A_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} \gamma dV_3 - K_{33}^{(c)} g \zeta_z^2 \ell_z^{\zeta_z - 1} \int_W c_1^{(x)} c_1^{(y)} \frac{\partial N_i}{\partial x_3} dV_3 = 0. \end{aligned}$$

Colocando las integrales donde se encuentra el vector \mathbf{d} del lado izquierdo de la igualdad y el resto de los términos del lado derecho se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{d} \int_W N_i N^T dV_D + \sum_{j=0}^3 d \int_W K_{jj}^{(c)} A_j \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} \gamma dV_3 - d \int_{\partial W} \alpha N_i N^T \gamma dS_2 \\ = K_{33}^{(c)} g \zeta_z^2 \ell_z^{\zeta_z - 1} \int_W c_1^{(x)} c_1^{(y)} \frac{\partial N_i}{\partial x_3} dV_3 + \int_{\partial W} \beta N_i \gamma dS_2 - \int_{\partial W} \alpha h_g N_i \gamma dS_2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Acomodando los términos que se encuentran dentro de la segunda integral de volumen se obtiene una forma más compacta colocando las matrices de la siguiente manera:

$$g_1 \mathbf{B}_x \mathbf{B}_x^T + g_2 \mathbf{B}_y \mathbf{B}_y^T + g_3 \mathbf{B}_z \mathbf{B}_z^T = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_x^T \\ \mathbf{B}_y^T \\ \mathbf{B}_z^T \end{pmatrix} \equiv \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T$$

donde

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} A_1 K_{11}^{(c)} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & A_2 K_{22}^{(c)} \gamma & 0 \\ 0 & 0 & A_3 K_{33}^{(c)} \gamma \end{pmatrix}$$

y haciendo

$$q = K_{33}^{(c)} g \zeta_z^2 \ell_z^{\zeta_z - 1} c_1^{(x)} c_1^{(y)}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (4.7) se tiene

$$\dot{d} \int_W \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV_D + d \int_W \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T dV_3 - d \int_{\partial W} \alpha \mathbf{N} \mathbf{N}^T \gamma dS_2 = \int_W q \frac{\partial N_i}{\partial x_3} dV_3 + \int_{\partial W} \beta N_i \gamma dS_2 - \int_{\partial W} \alpha h_g N_i \gamma dS_2.$$

Renombrando a cada una de las integrales siguientes se obtiene una ecuación diferencial matricial de primer orden con respecto al tiempo.

$$\boxed{M \dot{\mathbf{d}} + (K_k + K_\alpha) \mathbf{d} = r_q + r_\beta + r_\alpha} \quad (4.8)$$

A la hora de resolver estas integrales analíticamente se encontraron diversas dificultades:

- I.- Primeramente, al tratar de resolverlas directamente, llevamos a cabo una serie de integraciones por partes, dando como resultado una expresión de n -términos siendo el n -ésimo término otra integral, lo que no permitía obtener un resultado para la integral a resolver, buscando una forma de resolverlas u optar por resolverlas por algún método numérico.
- II.- Otra dificultad con la que se encontró surgió a la hora de definir los límites de integración, considerando de esta manera únicamente los límites de un tetraédro canónico anclado en el origen, resolviendo de esta manera este problema.
- III.- También se observó que las integrales tienen la forma de la función Beta, la cual se encuentra definida por la función gamma, mostradas en el Apéndice A, sin embargo, existían algunas complicaciones a la

hora de acomodar los límites de integración para poder hacer uso de esta función. Investigando más a fondo algunas propiedades de esta función, se encontró la integral de Dirichlet, la cual proporcionó el camino para lograr resolver las integrales resultantes de la ecuación (4.8).

Una vez resuelta una integral de cualquier elemento de la ecuación (4.8) se realiza el mismo procedimiento para los elementos de las matrices M , K_k y r_q , mientras que para K_α , r_α y r_β se resolverán para las condiciones de frontera impuestas por el problema que se vaya a resolver.

Una vez que se resolvieron las integrales de cada matriz, se obtiene la siguiente ecuación diferencial (se muestra el elemento (i, j) de la ecuación diferencial matricial):

$$(M)_{ij} \dot{\mathbf{d}} + ((K_k)_{ij} + K_\alpha) \mathbf{d} = (r_q)_i + r_\beta + r_\alpha \quad (4.9)$$

el cual tiene asociada la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6V} \right)^2 \left[6V_{0i}6V_{0j}\theta + (6V_{0i}a_j + 6V_{0j}a_i) \left(\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \right) \theta + \right. \\ & (6V_{0i}b_j + 6V_{0j}b_i) \left(\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_y \right) \theta + (6V_{0i}c_j + 6V_{0j}c_i) \left(\frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_z \right) \theta \\ & + (a_i b_j + a_j b_i) \left(\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_y \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x \ell_y \right) \theta \\ & + (a_i c_j + a_j c_i) \left(\frac{\zeta_x \zeta_z}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_z \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x \ell_z \right) \theta \\ & + (b_i c_j + b_j c_i) \left(\frac{\zeta_y \zeta_z}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_z \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_y \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_y \ell_z \right) \theta \\ & + a_i a_j \left(\frac{\zeta_x(\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_x \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x^2 \right) \theta \\ & + b_i b_j \left(\frac{\zeta_y(\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_y \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_y^2 \right) \theta \\ & + c_i c_j \left(\frac{\zeta_z(\zeta_z + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_z \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_z^2 \right) \theta \left. \right] \dot{\mathbf{d}} \\ & + \left(a_i a_j \frac{\Gamma(2 - \zeta_x)\Gamma(\zeta_y)\Gamma(\zeta_z)}{\Gamma(3 - \zeta_x + \zeta_y + \zeta_z)} \rho_x^{2(\zeta_x - 1)} + b_i b_j \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(2 - \zeta_y)\Gamma(\zeta_z)}{\Gamma(3 + \zeta_x - \zeta_y + \zeta_z)} \rho_y^{2(\zeta_y - 1)} + c_i c_j \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)\Gamma(2 - \zeta_z)}{\Gamma(3 + \zeta_x + \zeta_y - \zeta_z)} \rho_z^{2(\zeta_z - 1)} + K_\alpha \right) \mathbf{d} \\ & = 2K_{33}^{(c)} g \zeta_z^2 \ell_z^{\zeta_z - 1} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x + \zeta_y + 2)} c_i + r_\beta + r_\alpha. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Esta ecuación diferencial contiene la información asociada a la geometría del medio fractal bajo estudio a través de las dimensionalidades fractales correspondientes, ζ_i , D , d_i , límites inferiores de corte ℓ_i y funciones de estado c_3 , $c_2^{(k)}$, $c_1^{(i)}$, proporcionando de esta manera un nuevo modelo que puede implementarse en algún lenguaje de programación y generar un software de simulación como producto final, se remarca el hecho de que en la bibliografía científica actual este trabajo es el primero en su clase, es decir, no existe ningún reporte o publicación previo en el que se emplee el cálculo fraccionario del continuo fractal para resolver una ecuación diferencial (como se llevó a cabo en el presente trabajo, al menos para la parte espacial). Por lo tanto, la importancia de los desarrollos que exponemos en esta tesis radica en que no hay precedente alguno que haga

referencia a la solución de un problema del campo de la hidrodinámica relacionado con la aplicación de la herramienta matemática referida anteriormente (cálculo fraccionario) en relación a la ecuación de difusión de presión colocando el presente trabajo como de vanguardia.

También se menciona que las fórmulas integrales que se han obtenido analíticamente son generales en el sentido de que fueron resueltas para valores de parámetros fraccionarios no particulares por lo que sería de interés y como parte de un trabajo a futuro investigar el rango de validez de tales parámetros.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se emplean los conocimientos adquiridos en la materia del Elemento Finito para llevar a cabo el proceso de discretización de la ecuación del transitorio de presión fraccionaria para un flujo fractal continuo tridimensional. Para efectuar tal proceso de discretización se hizo uso de los operadores fraccionarios definidos en [14, 15] que son muy similares a los operadores vectoriales tradicionales que se han manejado en los cursos básicos de formación y que relacionan un sistema discontinuo con uno continuo a través del conjunto de funciones de transformación definidas en las ecuaciones (3.1)-(3.6). Sin embargo, se resalta el hecho de que tales operadores llevan la información fractal del medio bajo estudio a través de las dimensionalidades fractales correspondientes contenidas en los factores de escalamiento, esta información fractal proporciona la información referente a la estructura del medio, abordando el estudio de los medios porosos con las ecuaciones de conservación fractales, las cuales se transforman en las ecuaciones de conservación convencionales a través de ciertas consideraciones que hace que las dimensiones fractales se conviertan en enteras (para casos continuos).

Se señala también que, de acuerdo a la gran cantidad de información presentada en la literatura y las múltiples definiciones para los operadores, crean una falta de formalismo concreto para un operador integro-diferencial, dando lugar de esta manera a diversos modelos o definiciones para un mismo concepto, como es el caso de las funciones de densidades de estado c_3 , $c_2^{(k)}$, $c_1^{(i)}$ definidas por (1.17), (1.18) y (1.25) por los autores; Balankin, Tarasov y Ostoja respectivamente (esto se debe a la forma de la integral fraccionaria que considera cada uno). Por lo que el uso de operadores fraccionarios aun se encuentra en una constante evolución, creando nuevos modelos o adaptando los conceptos fractales a teorías ya formuladas, como es el caso de la Mecánica de fluidos, la teoría electromagnética o la física cuántica.

Tomando en cuenta lo anterior se trabajó únicamente con la definición proporcionada por Balankin para desarrollar el proceso de discretización que se realizó de tres modos diferentes: En el primer caso, se manipuló la ecuación del transiente de presión para un flujo fractal continuo obteniéndose la forma general de una ecuación diferencial con operadores convencionales. En el segundo caso se desarrolló la ecuación diferencial sustituyendo los operadores fraccionarios locales por los operadores convencionales obteniendo una ecuación diferencial diferente (en forma) a la ecuación obtenida en el primer caso, sin embargo, al aplicar el MEF a esta ecuación, las expresiones elementales en ambos casos son exactamente las mismas. Por otro lado, para el tercer caso se trabajó directamente con el teorema de Green-Gauss generalizado fraccionario aplicado a la ecuación del transiente de presión (4.1), el resultado obtenido fue ligeramente diferente que en los dos casos anteriores por un factor ℓ_i para cada coeficiente A_i y esto se debe a cómo se encuentra definido el teorema de Green-Gauss generalizado fraccionario, sin embargo, se observa que se tiene la misma forma que la obtenida en los dos casos

anteriores. Una vez aplicado el teorema de Green-Gauss se sustituye en las funciones de interpolación para un elemento tetraédrico lineal (4 nodos), lo que arrojó un conjunto de integrales con argumentos fraccionarios. Estas integrales las resolvimos de manera analítica (Apéndice B), para un tetraedro canónico anclado en el origen, empleando un proceso muy similar al que se lleva a cabo en la literatura de los métodos matemáticos para obtener la fórmula integral de Dirichlet. Una vez obtenidas las ecuaciones elementales, es necesario crear el mallado del dominio, para dar lugar a la matriz de Ensamble Global.

Se concluye resumiendo que los resultados más importantes obtenidos en este trabajo de tesis sientan las bases de futuras implementaciones en software que permitan ver de manera gráfica los contrastes que tiene la inclusión de la geometría intrínseca del medio en la modelación de un problema de aplicación real. Esta implementación requiere una serie de pruebas en software conocidos para comprobar su validez, para luego poder crear códigos para que formen parte de las bases de un software de simulación.

FUNCIÓN GAMMA, FUNCIÓN BETA E INTEGRAL DE DIRICHLET

La **función gamma** denotada por $\Gamma(n)$ está definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (\text{A.1})$$

la cual es convergente para $n > 0$.

Por otro lado la **Función Beta**, denotada por $B(m, n)$ está definida por

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad (\text{A.2})$$

la cual es convergente para $m, n > 0$.

La función beta esta conectada por la función gamma de acuerdo a la relación

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (\text{A.3})$$

Una función especial que hace uso de las funciones beta y gamma, es la **integral de Dirichlet**, dada por:

$$\iiint_V x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} dx dy dz = \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2)}{8\Gamma[(\alpha + \beta + \gamma)/2 + 1]} \quad (\text{A.4})$$

donde V es la región en el primer octante rodeado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y los planos coordenados [45].

RESOLUCIÓN DE INTEGRALES

En esta sección se obtendrán los valores de las matrices definidas en la ecuación (4.8).

$$M = \int_W NN^T dV_D$$

donde

$$NN^T = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1\eta_1 & \eta_1\eta_2 & \eta_1\eta_3 & \eta_1\eta_4 \\ \eta_2\eta_1 & \eta_2\eta_2 & \eta_2\eta_3 & \eta_2\eta_4 \\ \eta_3\eta_1 & \eta_3\eta_2 & \eta_3\eta_3 & \eta_3\eta_4 \\ \eta_4\eta_1 & \eta_4\eta_2 & \eta_4\eta_3 & \eta_4\eta_4 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde se obtiene el término M_{ij} como

$$M_{ij} = \left(\frac{1}{6V}\right)^2 \int_W [6V_{0i}6V_{0j} + (6V_{0i}a_j + 6V_{0j}a_i)x + (6V_{0i}b_j + 6V_{0j}b_i)y + (6V_{0i}c_j + 6V_{0j}c_i)z \\ + (a_ib_j + a_jb_i)xy + (a_ic_j + a_jc_i)xz + (b_ic_j + b_jc_i)yz + a_ia_jx^2 + b_ib_jy^2 + c_ic_jz^2] c_3(x_i, D)dV_3$$

Como el medio con el que estamos trabajando se supone que es un medio homogéneo, trasladamos el espacio (x, y, z) a un espacio $(x + \ell_x, y + \ell_y, z + \ell_z)$, haciendo el siguiente cambio de variables $u_x = (x + \ell_x)$, $u_y = (y + \ell_y)$ y $u_z = (z + \ell_z)$. Como consecuencia la función de transformación $c_3(u_i, D)dV_3$ se convierte en $u_x^{\zeta_x-1}u_y^{\zeta_y-1}u_z^{\zeta_z-1}du_zdu_ydu_x$. Trabajando el tetraedro en este mismo espacio se obtienen las siguientes 10 integrales a resolver, las cuales son:

1. $6V_{0i}6V_{0j} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$
2. $(6V_{0i}a_j + 6V_{0j}a_i) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$
3. $(6V_{0i}ab_j + 6V_{0j}b_i) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$
4. $(6V_{0i}c_j + 6V_{0j}c_i) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_z - \ell_z) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$
5. $(a_ib_j + a_jb_i) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x)(u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$
6. $(a_ic_j + a_jc_i) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x)(u_z - \ell_z) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$
7. $(b_ic_j + b_jc_i) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_y - \ell_y)(u_z - \ell_z) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$

$$\begin{aligned}
8. \quad & (a_i a_j) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x, \\
9. \quad & (b_i b_j) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_y - \ell_y)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x, \\
10. \quad & (c_i c_j) \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_z - \ell_z)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x.
\end{aligned}$$

Resolviendo cada una de las integrales a continuación:

$$\begin{aligned}
1. \quad & \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x \\
& = \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} \left(\frac{u_z^{\zeta_z}}{\zeta_z} \right)_0^{1-u_x-u_y} du_y du_x = \frac{1}{\zeta_z} \int_0^1 \int_0^{1-u_x} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} (1-u_x-u_y)^{\zeta_z} du_y du_x
\end{aligned}$$

Haciendo $u_y = (1-u_x)t \rightarrow du_y = (1-u_x)dt$, cambiando los límites de integración por $t(u_y = 0) = 0$ y $t(u_y = 1-u_x) = 1$, y reagrupando las integrales se obtiene la siguiente expresión:

$$= \frac{1}{\zeta_z} \left(\int_0^1 u_x^{\zeta_x-1} (1-u_x)^{\zeta_y+\zeta_z} du_x \right) \left(\int_0^1 t^{\zeta_y-1} (1-t)^{\zeta_z} dt \right)$$

Haciendo uso de la función Beta se tiene

$$\frac{1}{\zeta_z} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y+\zeta_z+1)}{\Gamma(\zeta_x+\zeta_y+\zeta_z+1)} \frac{\Gamma(\zeta_y)\Gamma(\zeta_z+1)}{\Gamma(\zeta_y+\zeta_z+1)} = \frac{1}{\zeta_z} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)\Gamma(\zeta_z+1)}{\Gamma(\zeta_x+\zeta_y+\zeta_z+1)}$$

De la propiedad $\Gamma(\beta+1) = \beta\Gamma(\beta)$ de la función Γ se tiene:

$$\int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x = \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)\Gamma(\zeta_z)}{\Gamma(\zeta_x+\zeta_y+\zeta_z+1)} = \theta \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x \\
& = \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} u_x^{\zeta_x} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x - \ell_x \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x
\end{aligned}$$

Desarrollando la expresión anterior con el mismo procedimiento que se llevo acabo en la **Integral 1** y ocupando la ecuación (B.2), entonces

$$\int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x = \left(\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \right) \theta$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento se obtiene la expresión para las integrales restantes.

$$3. \quad \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x = \left(\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_y \right) \theta$$

$$4. \quad \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_z - \ell_z) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x = \left(\frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_z \right) \theta$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x)(u_y - \ell_y) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x \\
& = \left(\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_y \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x \ell_y \right) \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. & \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x)(u_z - \ell_z) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x \\
& = \left(\frac{\zeta_x \zeta_z}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_z \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x \ell_z \right) \theta \\
7. & \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_y - \ell_y)(u_z - \ell_z) u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x \\
& = \left(\frac{\zeta_y \zeta_z}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_z \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_y \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_y \ell_z \right) \theta \\
8. & \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_x - \ell_x)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x \\
& = \left(\frac{\zeta_x(\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_x \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x^2 \right) \theta \\
9. & \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_y - \ell_y)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x \\
& = \left(\frac{\zeta_y(\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_y \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_y^2 \right) \theta \\
10. & \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} (u_z - \ell_z)^2 u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x \\
& = \left(\frac{\zeta_z(\zeta_z + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_z \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_z^2 \right) \theta
\end{aligned}$$

Por lo tanto la M_{ij} esta dada por:

$$\begin{aligned}
M_{ij} = & \left(\frac{1}{6V} \right)^2 \left[6V_{0i}6V_{0j}\theta + (6V_{0i}a_j + 6V_{0j}a_i) \left(\frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \right) \theta + \right. \\
& (6V_{0i}b_j + 6V_{0j}b_i) \left(\frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_y \right) \theta + (6V_{0i}c_j + 6V_{0j}c_i) \left(\frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_z \right) \theta \\
& + (a_i b_j + a_j b_i) \left(\frac{\zeta_x \zeta_y}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_y \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x \ell_y \right) \theta \\
& + (a_i c_j + a_j c_i) \left(\frac{\zeta_x \zeta_z}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_z \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_x \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x \ell_z \right) \theta \\
& + (b_i c_j + b_j c_i) \left(\frac{\zeta_y \zeta_z}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - \ell_z \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} - \ell_y \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_y \ell_z \right) \theta \\
& + a_i a_j \left(\frac{\zeta_x(\zeta_x + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_x \frac{\zeta_x}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_x^2 \right) \theta \\
& + b_i b_j \left(\frac{\zeta_y(\zeta_y + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_y \frac{\zeta_y}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_y^2 \right) \theta \\
& \left. + c_i c_j \left(\frac{\zeta_z(\zeta_z + 1)}{(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 2)(\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1)} - 2\ell_z \frac{\zeta_z}{\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z + 1} + \ell_z^2 \right) \theta \right]
\end{aligned}$$

$$K_k = \int_W \mathbf{BCB}^T dV_3$$

donde

$$\mathbf{BCB}^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

por lo que el término $(K_k)_{ij}$ está dado por

$$(K_k)_{ij} = \int_W (a_i a_j g_1 + b_i b_j g_2 + c_i c_j g_3) dV_3 \quad (\text{B.3})$$

obteniendo de esta manera 3 integrales enlistadas a continuación:

1. $a_i a_j \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} \ell_x^{2(\zeta_x-1)} u_x^{1-\zeta_x} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$
2. $b_i b_j \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} \ell_y^{2(\zeta_y-1)} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{1-\zeta_y} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x,$
3. $c_i c_j \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} \ell_z^{2(\zeta_z-1)} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{1-\zeta_z} du_z du_y du_x.$

Trabajando las integrales con el mismo procedimiento con el que se resolvieron las integrales de la matriz anterior se obtuvieron las siguientes expresiones:

1. $a_i a_j \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} \ell_x^{2(\zeta_x-1)} u_x^{1-\zeta_x} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x = \frac{\Gamma(2-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)\Gamma(\zeta_z)}{\Gamma(3-\zeta_x+\zeta_y+\zeta_z)} \ell_x^{2(\zeta_x-1)}$
2. $b_i b_j \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} \ell_y^{2(\zeta_y-1)} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{1-\zeta_y} u_z^{\zeta_z-1} du_z du_y du_x = \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(2-\zeta_y)\Gamma(\zeta_z)}{\Gamma(3+\zeta_x-\zeta_y+\zeta_z)} \ell_y^{2(\zeta_y-1)}$
3. $c_i c_j \int_0^1 \int_0^{1-u_x} \int_0^{1-u_x-u_y} \ell_z^{2(\zeta_z-1)} u_x^{\zeta_x-1} u_y^{\zeta_y-1} u_z^{1-\zeta_z} du_z du_y du_x = \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)\Gamma(2-\zeta_z)}{\Gamma(3+\zeta_x+\zeta_y-\zeta_z)} \ell_z^{2(\zeta_z-1)}.$

obteniendo de esta manera el término $(K_k)_{ij}$

$$(K_k)_{ij} = a_i a_j \frac{\Gamma(2-\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)\Gamma(\zeta_z)}{\Gamma(3-\zeta_x+\zeta_y+\zeta_z)} \ell_x^{2(\zeta_x-1)} + b_i b_j \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(2-\zeta_y)\Gamma(\zeta_z)}{\Gamma(3+\zeta_x-\zeta_y+\zeta_z)} \ell_y^{2(\zeta_y-1)} + c_i c_j \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)\Gamma(2-\zeta_z)}{\Gamma(3+\zeta_x+\zeta_y-\zeta_z)} \ell_z^{2(\zeta_z-1)}. \quad (\text{B.4})$$

$$r_q = \int_W q \frac{\partial N_i}{\partial x_3} dV_3$$

donde

$$q \frac{\partial N_i}{\partial x_3} = K_{33}^{(c)} g \zeta_z^2 \ell_z^{\zeta_z-1} c_1^{(x)} c_1^{(y)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \Rightarrow r_q = 2K_{33}^{(c)} g \zeta_z^2 \ell_z^{\zeta_z-1} \frac{\Gamma(\zeta_x)\Gamma(\zeta_y)}{\Gamma(\zeta_x+\zeta_y+2)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- [1] Szymkiewicz, A. (2012). *Modelling water flow in unsaturated porous media: accounting for nonlinear permeability and material heterogeneity*. Springer Science & Business Media.
- [2] Ingham, D. B., & Pop, I. (1998). *Transport phenomena in porous media*. Elsevier.
- [3] Bear, J. (2013). *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation.
- [4] Diersch, H. J. (2013). *FEFLOW: finite element modeling of flow, mass and heat transport in porous and fractured media*. Springer Science & Business Media.
- [5] Adler, P. (2013). *Porous media: geometry and transports*. Elsevier.
- [6] Vazquez, J. L. (1999). Las ecuaciones de la filtración de fluidos en medios porosos. Bol. Soc. Espanola Mat. Apl, 14, 37-83.
- [7] Escobar, F. (2000). *Fundamentos de ingeniería de yacimientos*. Universidad Surcolombiana.
- [8] Ahmed, T., & McKinney, P. (2011). *Advanced reservoir engineering*. Gulf Professional Publishing.
- [9] Horne, R. N. (1995). *Modern well test analysis*. Petroway Inc.
- [10] Acevedo, M. A. A., & Agudelo, A. D. J. N. (2009). *Análisis de pruebas de presión en yacimientos naturalmente fracturados y sensibles a esfuerzos*. Dyna, 76(160), 51-61.
- [11] Ramírez Juárez, J. and Zepeda Alcantar, J. (2009). *Manual de interpretación de pruebas de variación de presión en posos de gas*. Ingeniero petrolero. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [12] Godino, J. D., & Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- [13] Naranjo, A. D. J. (2009). *Evaluación de Yacimientos de Hidrocarburos*. Centro de Publicaciones Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Medellín, COL, 38.
- [14] Balankin, A. S., & Elizarraraz, B. E. (2012). *Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow*. Physical Review E, 85(5), 056314.
- [15] Balankin, A. S., & Elizarraraz, B. E. (2012). *Hydrodynamics of fractal continuum flow*. Physical Review E, 85(5), 025302.

- [16] Balankin, A. S., Bory-Reyes, J., & Shapiro, M. (2016). Towards a physics on fractals: differential vector calculus in three-dimensional continuum with fractal metric. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 444, 345-359.
- [17] Tarasov, V. E. (2005). *Continuous medium model for fractal media*. *Physics Letters A*, 336(2), 167-174.
- [18] Tarasov, V. E. (2005). *Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles*. *Physics of plasmas*, 12(8), 082106.
- [19] Tarasov, V. E. (2005). *Fractional hydrodynamic equations for fractal media*. *Annals of Physics*, 318(2), 286-307.
- [20] Ostoja-Starzewski, M. (2009). *Continuum mechanics models of fractal porous media: Integral relations and extremum principles*. *Journal of mechanics of materials and structures*, 4(5), 901-912.
- [21] Ostoja-Starzewski, M., Li, J., Joumaa, H., & Demmie, P. N. (2014). *From fractal media to continuum mechanics*. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 94(5), 373-401.
- [22] Li, J., & Ostoja-Starzewski, M. (2009, August). *Fractal solids, product measures and fractional wave equations*. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Vol. 465, No. 2108, pp. 2521-2536). The Royal Society.
- [23] Bhatti, M.A. (2005). *Fundamental Finite Element Analysis and Applications*. New Jersey:WILEY
- [24] Bathe, K.J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey, USA: Prentice Hall.
- [25] De Boer, R. (2012). *Theory of porous media: highlights in historical development and current state*. Springer Science & Business Media.
- [26] Chemingui, N. (2001). *Modeling 3-D anisotropic fractal media*. Stanford Exploration Project, Report, 80, 1-586.
- [27] Türk, C., Carbone, A., & Chiaia, B. M. (2010). *Fractal heterogeneous media*. *Physical Review E*, 81(2), 026706.
- [28] Tarasov, V. E. (2005). Possible experimental test of continuous medium model for fractal media. *Physics Letters A*, 341(5), 467-472.
- [29] TARASOV, E.V.(2005). Fractional hydrodynamic equations for fractal media. *Annals of Physics*,318, 286-307.
- [30] Valdivia Corona, J. C. (2017). *Estudio de Flujos lentos a través de medios fractales determinísticos* (Tesis de Doctorado), Instituto Politécnico Nacional.

- [31] Guerrero E. J. (2014). *Modelación Fractal de Yacimientos Fracturados Naturalmente* (Tesis de grado), Instituto Politécnico Nacional, Unidad Zacatenco.
- [32] Mandelbrot, B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: METATEMAS 49.
- [33] Feder J. (1988). *Fractals (Physics of solids and liquids)*. New York: Plenum.
- [34] Falconer, K. (2004). *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons.
- [35] Kigami, J. (2001). *Analysis on fractals* (Vol. 143). Cambridge University Press.
- [36] Mandelbrot, B. B. (1977). *Fractals*. John Wiley & Sons, Inc.
- [37] Olivella, X. O., & de Saracíbar Bosch, C. A. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros* (Vol. 92). Univ. Politéc. de Catalunya.
- [38] Tarasov, V. E. (2006). *Electromagnetic fields on fractals*. Modern Physics Letters A, 21(20), 1587-1600.
- [39] Tarasov, V. E. (2014). *Anisotropic fractal media by vector calculus in non-integer dimensional space*. Journal of Mathematical Physics, 55(8), 083510.
- [40] Jansen, J. D. (2013). *A systems description of flow through porous media*. New York: Springer.
- [41] White, F. M. (1999). *Fluid mechanics*, WCB. Ed McGraw-Hill Boston.
- [42] Chorin, A. J., Marsden, J. E., & Marsden, J. E. (1990). *A mathematical introduction to fluid mechanics* (Vol. 3). New York: Springer.
- [43] Mandelbrot, B. B., & Llosa, J. (1996). *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. Tusquets.
- [44] Diersch, H. J. G. (2013). *FEFLOW: finite element modeling of flow, mass and heat transport in porous and fractured media*. Springer Science & Business Media.
- [45] DuChateau, P. (2013). *Advanced mathematics for engineers and scientists*. Courier Corporation.