



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

UN ACERCAMIENTO A LA DINÁMICA COLECTIVA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

SERGIO FLORES RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JESÚS FERNANDO TENORIO ARVIDE

CO-DIRECTOR:

DR. FRANCO BARRAGÁN MENDOZA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO, JULIO DEL 2017

A mis padres, Claudia y Margarito
A mi hermano Margarito

Agradecimientos

Agradezco enteramente:

A mi madre por siempre apoyarme en cada aspecto de mi vida.

A mi hermano por ser cómplice de mis proyectos.

Al Dr. Jesús Tenorio Arvide por su labor, como guía, en este trabajo de tesis.

Al Dr. Franco Barragán Mendoza por motivarme siempre y por sus acertadas observaciones, las cuales han enriquecido este trabajo.

A mis sinodales por sus certeras correcciones.

A mis amigos por hacer mi estadía en la universidad una experiencia inolvidable.

Índice general

Introducción	VII
1. Conceptos preliminares	1
1.1. Funciones	1
1.2. Propiedades topológicas en espacios métricos	5
1.3. Conceptos básicos en hiperespacios	14
2. Nociones de dinámica individual y dinámica colectiva	25
2.1. Notaciones y conceptos básicos en sistemas dinámicos	25
2.2. Funciones dinámicas, dinámica individual	34
2.3. Funciones dinámicas inducidas, dinámica colectiva	49
3. Los resultados principales	55
3.1. Resultados preliminares	55
3.2. Transitividad de 2^f y $C(f)$	67
3.3. Un poco más de dinámica colectiva	74
4. Aproximación a fractales	77
4.1. Preliminares	78
4.2. Aproximación a fractales mediante sucesiones	80
Conclusiones	93
Apéndice	95
Bibliografía	103

Introducción

La temática de la tesis pertenece a las ramas de la Topología conocidas como Teoría de los continuos y sus hiperespacios, así como en sistemas dinámicos. Como bien sabemos, la importancia de los sistemas dinámicos la encontramos en distintas áreas de la matemática aplicada, por ejemplo en la biología matemática o biomatemática. Particularmente, los sistemas dinámicos discretos los encontramos en todo lo relativo al estudio del crecimiento de poblaciones, donde la idea general es la de elaborar modelos matemáticos apropiados que, de cierto modo, representen la situación de una población que se esté estudiando, y que estos modelos nos permitan entender, y mejor aún, predecir su comportamiento posterior.

Dado un espacio métrico X y una función continua $f : X \rightarrow X$ al par (X, f) le denominamos sistema dinámico. Es bien sabido [6] que un sistema dinámico (X, f) induce los sistemas dinámicos $(2^X, 2^f)$ y $(C(X), C(f))$, donde 2^X y $C(X)$ son hiperespacios de X y 2^f y $C(f)$ son funciones inducidas por f . Cuando se estudia el sistema dinámico (X, f) se dice que se analiza la dinámica individual y cuando se consideran algunos de sus sistemas dinámicos inducidos se dice que se investiga la dinámica colectiva. Un problema natural es estudiar las conexiones entre propiedades dinámicas de f y de las funciones inducidas 2^f y $C(f)$. Es importante indicar que el estudio de la dinámica topológica en sistemas dinámicos inducidos ha tomado fuerza en los últimos años y existe ya un buen número de artículos relacionados con este tema por mencionar algunos tenemos [1, 2, 8, 16, 12]. Cabe mencionar que el objetivo general del presente trabajo de tesis es brindar las bases en el estudio de la dinámica colectiva, enfocándonos principalmente en la transitividad de funciones.

En el Capítulo 1 se abordan los conceptos preliminares para el desarrollo del presente trabajo. Prácticamente es una recopilación de nociones y resultados que permiten comprender esta tesis, de tal forma que sea lo más autocontenida posible. En la Sección 1.1 se realiza un breve repaso de algunas propiedades de funciones entre conjuntos, se le da especial atención a algunas propiedades de la composición de funciones y algunos hechos conocidos de la función producto. Además, en la Sección 1.2 se recuerdan algunos hechos generales de espacios métricos, así como algunas propiedades topológicas de éstos. En particular, analizamos las nociones de densidad, conexidad, compacidad y completez. Asimismo, se destacan algunas propiedades de funciones continuas entre espacios métricos. Más aún, en la Sección 1.3 se realiza un breve análisis de hiperespacios de un espacio métrico, describimos la topología de Vietoris, así como dos maneras de pensar la métrica de Hausdorff. Además, se da la noción de función inducida y algunas de

sus propiedades.

En el Capítulo 2 se analizan conceptos básicos respecto a sistemas dinámicos discretos. Asimismo, se analiza la dinámica individual y colectiva. En la Sección 2.1 se analiza las nociones de órbita, puntos fijos y puntos periódicos. Además, en la Sección 2.2 se estudia la dinámica individual. Particularmente, se estudian funciones dinámicas de diversos tipos, como son: transitivas, caóticas, totalmente transitivas, débilmente mezclantes y minimales. En la Sección 2.3 se inicia el estudio de la dinámica colectiva, particularmente, la dinámica colectiva de la función tienda.

En el Capítulo 3 se exponen los resultados principales del trabajo de tesis. En la Sección 3.1 se exhiben algunos resultados típicos de la dinámica topológica, principalmente exponemos de manera accesible la demostración del famoso Teorema de Furstenberg. En la Sección 3.2 se atiende uno de los objetivos principales del presente trabajo. A saber, se enfoca a resolver el siguiente problema: descubrir todas las posibles implicaciones entre las afirmaciones siguientes:

- (1) f es transitiva;
- (2) 2^f es transitiva;
- (3) $C(f)$ es transitiva;

Además, en la Sección 3.3 se exhiben algunas consecuencias obtenidas a partir del la resolución del problema planteado.

Finalmente, en el Capítulo 4 se muestra una aplicación de las funciones inducidas, la cual es la construcción de fractales. En el Apéndice se incluyen scripts que permiten la ilustración gráfica de diversos hechos en el presente trabajo. Cabe mencionar que dichos scripts fueron implementados en el lenguaje de programación Matlab.

Espero que el presente trabajo sea útil para aquellos interesados en el área.

Un acercamiento a la dinámica colectiva

Sergio Flores Rodríguez

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este capítulo se revisan conceptos preliminares para el desarrollo del presente trabajo. Básicamente, se hace una recopilación de la herramienta necesaria para comprender esta tesis, siempre con la mira de contar con un escrito lo más autocontenido posible. Cabe señalar que en este trabajo usamos la notación estándar de la teoría de conjuntos y sus operaciones, y en general de la matemática actual. Denotamos por \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{R} el conjunto de los números naturales, el de los números enteros y el de los números reales, respectivamente. El conjunto vacío se denota por \emptyset .

En la Sección 1.1 hacemos un repaso de algunas propiedades de funciones entre conjuntos. Asimismo, nos enfocamos en propiedades de la composición de funciones. Además, presentamos algunos hechos conocidos de la función producto.

La Sección 1.2 está dedicada a recordar hechos generales de espacios métricos, así como algunas propiedades topológicas de éstos. En particular, analizamos las nociones de densidad, conexidad, compacidad y completitud. Finalmente, se destacan algunas propiedades de funciones continuas entre espacios métricos.

Por último, en la Sección 1.3 se realiza un breve análisis de hiperespacios de un espacio métrico, describimos la topología de Vietoris, así como dos maneras de interpretar la métrica de Hausdorff. Más aún, a partir de una función f de un espacio métrico X en si mismo se define la función inducida al hiperespacio 2^X , $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$. Principalmente, demostramos que la función 2^f es continua cuando f lo es y analizamos cómo es la composición de 2^f consigo misma.

Sección 1.1

Funciones

En esta sección revisamos algunas propiedades de funciones entre conjuntos. Analizamos propiedades de la composición de funciones. También presentamos algunos hechos conocidos de la función producto.

Comenzamos recordando que si X y Y son conjuntos, una *función* f de X en Y es una correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y . Se denota por $f : X \rightarrow Y$ una función de X en Y , donde a X se le conoce como dominio y a Y como contradominio.

Definición 1.1.1. Sean X y Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Dados A un subconjunto de X y B un subconjunto de Y , se denota y define la *imagen* de A bajo f como:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x), \text{ para algún } x \in A\}.$$

La *imagen inversa* de B bajo f se denota y define como:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

En seguida, se expone una observación que se sigue de la definición de función.

Observación 1.1.2. Sean X y Y conjuntos, $f : X \rightarrow Y$ una función y $k \in \mathbb{N}$. Si $A \subset X$ tal que A tiene a lo más k elementos, entonces $f(A)$ tiene a lo más k elementos.

La siguiente definición relaciona dos funciones.

Definición 1.1.3. Sean X , Y y Z conjuntos y sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones. Se dice que la función $h : X \rightarrow Z$ es la *composición* de f con g si $h(x) = g(f(x))$, para todo $x \in X$. En tal caso h se le denota por $g \circ f$.

Se sabe que la composición de funciones es asociativa, esto es, si $f_1 : X_1 \rightarrow X_2$, $f_2 : X_2 \rightarrow X_3$ y $f_3 : X_3 \rightarrow X_4$ son funciones, entonces $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$. Con las Definiciones 1.1.1 y 1.1.3, se tiene la siguiente observación.

Observación 1.1.4. Sean X un conjunto, $f : X \rightarrow X$ una función y $k \in \mathbb{N}$. Si A es un subconjunto de X , se denota por f^k la composición de f consigo misma k veces. Además, si $A \subset X$, la imagen de A bajo f^k lo denotamos por $f^k(A)$ y la imagen inversa de A bajo f^k lo denotamos por $f^{-k}(A)$. Es decir, $f^{-k}(A) = (f^k)^{-1}(A)$.

Dado un conjunto X , una función muy conocida es la función *identidad* la cual denotamos por $Id_X : X \rightarrow X$ y se define por $Id_X(x) = x$, para todo $x \in X$.

Tenemos las siguientes propiedades referentes a la composición de una función consigo misma.

Proposición 1.1.5. Sean X un conjunto y $f : X \rightarrow X$ una función. Se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) Para cualesquiera números naturales k y m , se cumple $f^{k+m} = f^{m+k}$.
 - (2) Para cualesquiera números naturales k y m , se cumple $f^{km} = (f^k)^m$.
 - (3) Sean A un subconjunto en X y k un número natural. Entonces, A es un subconjunto no vacío si y sólo si $f^k(A)$ es un subconjunto no vacío.
-

(4) Sean A y B subconjuntos de X y k un número natural. Entonces, $f^k(A \cap B)$ es un subconjunto de $f^k(A) \cap f^k(B)$.

Demostración. (1) Sean $k, m \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in X$, usamos la asociatividad de la composición para obtener:

$$\begin{aligned} f^{k+m}(x) &= (f^k \circ f^m)(x) \\ &= \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{k\text{-veces}} \circ \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{m\text{-veces}}(x) \\ &= \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{m\text{-veces}} \circ \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{k\text{-veces}}(x) \\ &= (f^m \circ f^k)(x) \\ &= f^{m+k}(x). \end{aligned}$$

(2) Se sigue de la asociatividad de la composición. (3) Consideremos A un subconjunto de X y $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Es decir, existe $x \in A$. Luego, $f^k(x) \in f^k(A)$. Por lo tanto, $f^k(A) \neq \emptyset$. Por otro lado, supongamos que $f^k(A) \neq \emptyset$. Es decir, existe $y \in f^k(A)$. Esto es, existe $x \in A$ tal que $f^k(x) = y$. Por lo tanto, $A \neq \emptyset$.

(4) Consideremos A y B dos subconjuntos de X y $k \in \mathbb{N}$. Sea $y \in f^k(A \cap B)$. Luego, existe $x \in A \cap B$ tal que $f^k(x) = y$. Como $x \in A$ y $x \in B$, se sigue $f^k(x) \in f^k(A)$ y $f^k(x) \in f^k(B)$. Esto es, $y \in f^k(A) \cap f^k(B)$. Por lo tanto, $f^k(A \cap B) \subset f^k(A) \cap f^k(B)$. \square

Otra propiedad de imagen inversa bajo alguna función.

Proposición 1.1.6. Sean X un conjunto, $f : X \rightarrow X$ una función, A y B subconjuntos de X y $k \in \mathbb{N}$. Se cumple lo siguiente:

(1) $f^k(f^{-k}(B))$ es un subconjunto de B .

(2) $A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset$ si y sólo si $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. (1) Consideremos $y \in f^k(f^{-k}(B))$. Así, existe $x \in f^{-k}(B)$ tal que $f^k(x) = y$. Como $x \in f^{-k}(B)$, se sigue que $f^k(x) \in B$. Por lo tanto, $y \in B$. En conclusión, $f^k(f^{-k}(B)) \subset B$.

(2) Se tiene que $A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset$ si y sólo si existe $x \in A \cap f^{-k}(B)$ si y sólo si $x \in A$ y $x \in f^{-k}(B)$ si y sólo si $f^k(x) \in f^k(A)$ y $f^k(x) \in B$ si y sólo si $f^k(x) \in f^k(A) \cap B$ si y sólo si $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$. \square

Definición 1.1.7. Dados los conjuntos X_1, X_2, \dots, X_k , se define su producto cartesiano como el conjunto:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, k\}\}.$$

Notación 1.1.8. Como es usual, denotamos el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ por $\prod_{i=1}^k X_i$. Además, si para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $X_i = X$ escribimos X^k en lugar de $X \times X \times \cdots \times X$.

Proposición 1.1.9. Sean X un conjunto y $k \in \mathbb{N}$. Si A_1, A_2, \dots, A_k son subconjuntos de X , entonces $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \neq \emptyset$ si y sólo si $A_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Demostración. Sean $A_1, A_2, \dots, A_k \subset X$. Luego, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \neq \emptyset$ si y sólo si existe $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ si y sólo si $x_i \in A_i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ si y sólo si $A_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. \square

Otro concepto destacado es la siguiente definición, la cual es muy valiosa para las pruebas en el Capítulo 3.

Definición 1.1.10. Sean X un conjunto y $k \in \mathbb{N}$. Dada una función $f : X \rightarrow X$, denotamos la *función producto* por $f^{\times k} : X^k \rightarrow X^k$ y se define como:

$$f^{\times k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)), \text{ para cada } (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k.$$

Ahora que conocemos la definición de función producto, es natural saber qué pasa con su composición consigo misma.

Observación 1.1.11. Sean X un conjunto, $f : X \rightarrow X$ una función y $k \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y para cada $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$ se cumple:

$$(f^{\times k})^m(x_1, x_2, \dots, x_k) = (f^m(x_1), f^m(x_2), \dots, f^m(x_k)).$$

En efecto, para $m = 1$ el resultado es trivial. Supongamos que se cumple para $m - 1$. Veamos que se cumple para m . Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$, se sigue que:

$$\begin{aligned} (f^{\times k})^m(x_1, x_2, \dots, x_k) &= f^{\times k} \left((f^{\times k})^{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_k) \right) \\ &= f^{\times k} (f^{m-1}(x_1), f^{m-1}(x_2), \dots, f^{m-1}(x_k)) \\ &= (f(f^{m-1}(x_1)), f(f^{m-1}(x_2)), \dots, f(f^{m-1}(x_k))) \\ &= (f^m(x_1), f^m(x_2), \dots, f^m(x_k)). \end{aligned}$$

Las propiedades que se presentan a continuación son útiles para los resultados que se encuentran en el Capítulo 3.

Proposición 1.1.12. Sean X un conjunto y $f : X \rightarrow X$ una función. Si $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k$ son subconjuntos de X y k y m son números naturales cualesquiera, entonces:

- (1) $(f^{\times k})^m(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = f^m(A_1) \times f^m(A_2) \times \dots \times f^m(A_k)$;
- (2) $((f^{\times k})^m(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)) \cap [B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k] \neq \emptyset$ si y sólo si $f^m(A_1) \cap B_1 \neq \emptyset, f^m(A_2) \cap B_2 \neq \emptyset, \dots, f^m(A_k) \cap B_k \neq \emptyset$.

Demostración. (1) Consideremos $k, m \in \mathbb{N}$ y los subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_k de X . Dado un elemento (y_1, y_2, \dots, y_k) en $(f^{\times k})^m(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$, existe un elemento (x_1, x_2, \dots, x_k) de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ tal que $(f^{\times k})^m(x_1, x_2, \dots, x_k) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$. Por la Observación 1.1.11, se tiene que:

$$(f^{\times k})^m(x_1, x_2, \dots, x_k) = (f^m(x_1), f^m(x_2), \dots, f^m(x_k)).$$

Luego, $f^m(x_i) = y_i \in f^m(A_i)$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Por lo tanto, $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in f^m(A_1) \times f^m(A_2) \times \dots \times f^m(A_k)$.

Por otro lado, sea $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in f^m(A_1) \times f^m(A_2) \times \dots \times f^m(A_k)$. Luego, $y_i \in f^m(A_i)$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Así, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, existe $x_i \in A_i$ tal que $f^m(x_i) = y_i$. Notemos que, por la Observación 1.1.11, se obtiene que $(f^{\times k})^m(x_1, x_2, \dots, x_k) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$. Por lo tanto, $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in (f^{\times k})^m(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$.

(2) Sean $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k \subset X$ y $k, m \in \mathbb{N}$. Supongamos que:

$$\left((f^{\times k})^m(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \right) \cap [B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k] \neq \emptyset.$$

Luego, de (1) se sigue que $[f^m(A_1) \times f^m(A_2) \times \dots \times f^m(A_k)] \cap [B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k] \neq \emptyset$. Es decir, tenemos que $(f^m(A_1) \cap B_1) \times (f^m(A_2) \cap B_2) \times \dots \times (f^m(A_k) \cap B_k) \neq \emptyset$. Por lo que, de la Proposición 1.1.9 se sigue que $f^m(A_1) \cap B_1 \neq \emptyset, f^m(A_2) \cap B_2 \neq \emptyset, \dots, f^m(A_k) \cap B_k \neq \emptyset$. Recíprocamente, supongamos que $f^m(A_1) \cap B_1 \neq \emptyset, f^m(A_2) \cap B_2 \neq \emptyset, \dots, f^m(A_k) \cap B_k \neq \emptyset$. Luego, por la Proposición 1.1.9, $f^m(A_1) \cap B_1 \times f^m(A_2) \cap B_2 \times \dots \times f^m(A_k) \cap B_k \neq \emptyset$. Esto es, $[f^m(A_1) \times f^m(A_2) \times \dots \times f^m(A_k)] \cap [B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k] \neq \emptyset$. En consecuencia, de (1) se tiene $((f^{\times k})^m(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)) \cap [B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k] \neq \emptyset$. \square

Definición 1.1.13. Sean X y Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que:

(A) f es *inyectiva* si para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$.

(B) f es *sobreyectiva* si para cualquier $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(C) f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva.

Notemos que, de manera equivalente, una función f es inyectiva si para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$. A las funciones inyectivas también se le conoce como funciones uno a uno y a las funciones sobreyectivas se les conoce como funciones suprayectivas. Por último, no es difícil demostrar lo siguiente.

Observación 1.1.14. La composición de funciones biyectivas es biyectiva.

Definición 1.1.15. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Se dice que $g : Y \rightarrow X$ es la *función inversa* de f si $f \circ g = Id_Y$ y $g \circ f = Id_X$. A g se le denota por f^{-1} .

Propiedades topológicas en espacios métricos

En esta sección recordamos lo que es un espacio métrico, así como algunas propiedades topológicas de estos. En particular, analizamos las nociones de densidad, conexidad, compacidad y completitud. Finalmente, se destacan algunas propiedades de funciones continuas entre espacios métricos.

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto. Se dice que la función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una *métrica* o *distancia* sobre X si d satisface las siguientes condiciones:

- (A) $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$.
- (B) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, para todo $x, y \in X$.
- (C) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$.
- (D) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

A la pareja (X, d) se le llama *espacio métrico*. El número real $d(x, y)$ es la distancia entre x y y , para cualesquiera $x, y \in X$.

En algunos casos particulares denotamos por d_X la métrica de un espacio métrico X . La propiedad (D) de la Definición 1.2.1 se conoce como desigualdad triangular. A continuación, mostramos ejemplos muy conocidos de espacios métricos.

Ejemplo 1.2.2. Sea M un conjunto no vacío. Consideremos la función $d_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x, y \in M$ por:

$$d_M(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Se tiene que d_M es una métrica. A la pareja (M, d_M) se le conoce como *espacio métrico discreto*.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos la función $d_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia, $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. No es difícil ver que $d_{\mathbb{R}}$ es una métrica para \mathbb{R} . Se le conoce como *métrica euclidiana* para \mathbb{R} . Con esto, $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.2.4. Consideremos la función $d_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia, $d_{\mathbb{R}^2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, para cualesquiera $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Se conoce que $d_{\mathbb{R}^2}$ es una métrica para \mathbb{R}^2 . A $d_{\mathbb{R}^2}$ se le conoce como *métrica euclidiana* para \mathbb{R}^2 . Así, $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ es un espacio métrico.

Para nuestros fines, analizamos el siguiente espacio métrico.

Definición 1.2.5. El *conjunto de sucesiones infinitas de ceros y unos* se denota y define como:

$$\Sigma_2 = \{(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) : s_k \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Los elementos de Σ_2 los denotamos con las letras $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$, etc. Usamos $\mathbf{0}$ para denotar el elemento de Σ_2 tal que $s_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir, $\mathbf{0} = (0000\dots)$. De igual forma $\mathbf{1}$ lo reservamos para el elemento de Σ_2 tal que $s_0 = 1$ y $s_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, esto es, $\mathbf{1} = (1000\dots)$.

Al conjunto de sucesiones infinitas de ceros y unos le asociamos una métrica. Esto se expone en la Proposición 1.2.6.

Proposición 1.2.6. La función $d_{\Sigma_2} : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde su regla de correspondencia está dada por $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$, para cada $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$, $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 t_3 \dots) \in \Sigma_2$, es una métrica sobre Σ_2 .

Demostración. Veamos que se cumplen las condiciones (A)-(D) de la Definición 1.2.1. Sean $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$, $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 t_3 \dots)$, $\mathbf{u} = (u_0 u_1 u_2 u_3 \dots) \in \Sigma_2$ cualesquiera.

(A) Notemos que, $|s_k - t_k| \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así, $\frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

En consecuencia, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq 0$. Por lo tanto, $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \geq 0$.

(B) Tenemos que, $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = 0$ si y sólo si $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = 0$ si y sólo si $|s_k - t_k| = 0$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si y sólo si $s_k = t_k$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto es, $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{s} = \mathbf{t}$.

(C) Se tiene que $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t_k - s_k|}{2^k} = d_{\Sigma_2}(\mathbf{t}, \mathbf{s})$. Por lo tanto, $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = d_{\Sigma_2}(\mathbf{t}, \mathbf{s})$.

(D) Es claro que $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - u_k| + |u_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - u_k|}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|u_k - t_k|}{2^k} \leq d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) + d_{\Sigma_2}(\mathbf{u}, \mathbf{t})$. Por lo tanto, $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) + d_{\Sigma_2}(\mathbf{u}, \mathbf{t})$.

En conclusión, d_{Σ_2} es una métrica sobre Σ_2 . □

De la Proposición 1.2.6, se tiene que la pareja (Σ_2, d_{Σ_2}) es un espacio métrico. Este espacio métrico es conocido como el *espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos*. Más adelante destacaremos, entre otros hechos, algunas propiedades que cumple el espacio métrico Σ_2 .

Por otro lado, dado un espacio métrico (X, d) y tomando un subconjunto no vacío A de X y un punto x en X , el conjunto $\{d(x, a) : a \in A\}$ es un subconjunto de los números reales \mathbb{R} . Además, 0 es una cota inferior del conjunto $\{d(x, a) : a \in A\}$. Luego, se sigue que existe $\inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Con esto, pasamos a la siguiente definición.

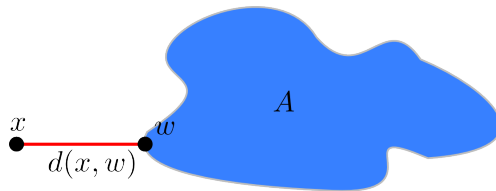


Figura 1.1: Distancia de un punto a un conjunto.

Definición 1.2.7. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean A un subconjunto no vacío de X y x un elemento de X . Se denota y define la *distancia del punto x al conjunto A* como:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Esquemáticamente, la distancia de un punto a un conjunto puede verse en la Figura 1.1.

Un concepto indispensable en un espacio métrico es el de bola abierta.

Definición 1.2.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $a \in X$ y $\varepsilon > 0$. Se denota y define la *bola abierta* con centro en a y radio ε como el conjunto:

$$B_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}.$$

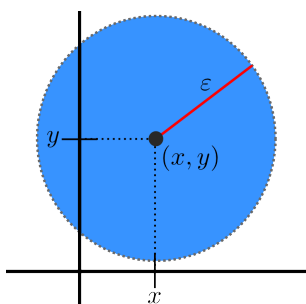


Figura 1.2: La bola abierta en \mathbb{R}^2 con centro en (x, y) y radio ε .

Considerando $X = \mathbb{R}^2$, se puede ver gráficamente en la Figura 1.2 la bola con centro en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y radio ε , $B_{d_{\mathbb{R}^2}}((x, y), \varepsilon)$.

Por otro lado, tomando un espacio métrico (X, d) y un subconjunto A de X , se dice que $x \in X$ es un *punto interior* de A si existe $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subset A$. Además, al conjunto:

$$\text{Int}(A) = \{x \in A : x \text{ es un punto interior de } A\},$$

se le conoce como *interior del conjunto* A . Se dice que A es un subconjunto *abierto* en X si $A = \text{Int}(A)$. En [11, Teorema 1, pág. 35] se demuestra que la bola abierta es un conjunto abierto. Más aún, es fácil ver que X mismo y el conjunto vacío \emptyset son conjuntos abiertos, así como la unión arbitraria y la intersección finita de subconjuntos abiertos son subconjuntos abiertos.

Otro concepto topológico importante en espacios métricos es el siguiente.

Definición 1.2.9. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto F de X es un subconjunto cerrado en X si y sólo si $X - F$ es un conjunto abierto en X . Si A es un subconjunto de X , se define y denota la *cerradura* o *clausura* de A como la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a A . En símbolos, $\text{Cl}(A) = \bigcap \{F \subset X : F \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subset F\}$.

La demostración del teorema siguiente se encuentra en [11, Teorema 2, pág. 46].

Teorema 1.2.10. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea A un subconjunto de X tal que la clausura de A , $\text{Cl}(A)$, es no vacío. Entonces, para cualquier elemento x en X , son equivalentes:

- (1) $x \in \text{Cl}(A)$;
- (2) $d(x, A) = 0$;
- (3) Para cualquier subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$.

Ahora, pasamos a la definición de conjunto denso la cual es trascendental en el Capítulo 2.

Definición 1.2.11. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X . El conjunto A es *denso* en X si $Cl(A) = X$.

La demostración de la siguiente Proposición se sigue del Teorema 1.2.10.

Proposición 1.2.12. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X . Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1) El conjunto A es denso en X .
- (2) Para cualquier subconjunto abierto no vacío U en X , $U \cap A \neq \emptyset$.

A continuación recordamos el concepto de conexidad y algunas variantes de éste.

Definición 1.2.13. Sea X un espacio métrico.

- (A) Se dice que X es *disconexo* si existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V en X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$.
- (B) El espacio X es *conexo* si no es desconexo.
- (C) Se dice que C_x es la *componente conexa* de $x \in X$ si C_x es el mayor subconjunto conexo en X (con respecto a la inclusión) que contiene a x .
- (D) El espacio X es *totalmente desconexo* si para cada $x \in X$ la componente conexa de x es $C_x = \{x\}$.

Ejemplo 1.2.14.

- (1) Cualquier espacio métrico totalmente desconexo es desconexo.
- (2) El espacio métrico del Ejemplo 1.2.2 es totalmente desconexo.
- (3) El espacio métrico Σ_2 es totalmente desconexo [9, Ejercicio 6.2.4, pág. 261].
- (4) Cualquier intervalo en \mathbb{R} , es conexo, en particular, el intervalo cerrado $[0, 1]$ es conexo.

Un concepto más que requerimos saber es el de compacidad.

Definición 1.2.15. Sea X un espacio métrico.

- (A) Se dice que una familia

$$\mathcal{F} \subset \{U \subset X : U \text{ es un subconjunto abierto en } X\}$$

es una cubierta abierta de X si $X \subset \bigcup \mathcal{F}$.

- (B) se dice que \mathcal{G} es una subcubierta finita de \mathcal{F} si \mathcal{G} es un subconjunto finito de \mathcal{F} tal que \mathcal{G} es una cubierta de X .

- (C) El espacio métrico X es *compacto* si cualquier cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.
- (D) El espacio métrico X es *totalmente acotado* o *precompacto* si para todo $r > 0$, existen $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$, para algún $k \in \mathbb{N}$, tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, r)$.

Ejemplo 1.2.16. Algunos ejemplos de espacio métricos compactos son:

- (1) Cualquier intervalo cerrado y acotado en \mathbb{R} es compacto, en particular, el intervalo $[0, 1]$;
- (2) Si X es compacto y F es un subconjunto cerrado de X , entonces F es compacto;
- (3) El espacio métrico Σ_2 es compacto [9, Teorema 8.3.1, pág. 377].

Cabe mencionar que la noción de totalmente acotado es más débil que la de compacidad. Esto se ve en el siguiente teorema cuya demostración se puede consultar en [11, Teorema 2, pág. 93].

Teorema 1.2.17. Si X es un espacio métrico compacto, entonces X es totalmente acotado.

Por otra parte, una herramienta muy utilizada al estudiar los espacios métricos son las sucesiones.

Definición 1.2.18. Sea X un conjunto. Una *sucesión en X* es una función $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. El valor que la sucesión f asume en k se indica por x_k y se le conoce como *término k -ésimo* de la sucesión.

Usamos la notación $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ para una sucesión.

Definición 1.2.19. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Se dice que la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *converge* en X si existe $x \in X$ que cumple con la siguiente condición: para cada $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq m$, entonces $d(x_k, x) < \varepsilon$. Se dice que la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x . Además, si la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ no converge, se dice que la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *diverge*.

En el Capítulo 4 se muestran ejemplos interesantes de sucesiones convergente y no convergentes. Un tipo de sucesiones ampliamente estudiadas son las sucesiones de Cauchy.

Definición 1.2.20. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (A) Una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en X , se dice que es de *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, n \geq k$, se cumple que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.
- (B) Se dice que X es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge en X .

Notemos que el recíproco del Teorema 1.2.17 se cumple si el espacio es totalmente acotado y completo.

Terminamos esta sección recordando un concepto básico de la topología de espacios métricos: la continuidad.

Definición 1.2.21. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es *continua en un punto* $a \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$:

$$\text{si } d_X(x, a) < \delta, \text{ entonces } d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Se dice que f es *continua* en X si f es continua en cada punto $a \in X$.

Observación 1.2.22. Sean X, Y y Z espacios métricos y k un número natural.

- (1) Si $f : X \rightarrow Y$ es continua en X y $g : Y \rightarrow Z$ es continua en Y , entonces la composición f con g , $g \circ f$, es continua en X [11, Teorema 4, pág. 154].
- (2) Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua y $k \in \mathbb{N}$, entonces $f^k : X \rightarrow X$ es continua.

Una equivalencia conocida y muy útil de funciones continuas en términos de subconjuntos abiertos es el teorema que sigue y su demostración se encuentra en [5, Teorema 1.F.4, pág. 28].

Teorema 1.2.23. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces, f es continua en X si y sólo si para cada subconjunto abierto V en Y , el subconjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto en X .

Resultados muy conocidos que involucran conjuntos compactos, conexos y funciones continuas se exponen en seguida.

Observación 1.2.24. Sean X y Y espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ una función continua y A un subconjunto de X .

- (1) Si A es compacto, entonces $f(A)$ es un subconjunto compacto de Y [11, Teorema 1, pág. 164].
- (2) Si A es conexo, entonces $f(A)$ es un subconjunto conexo de Y [11, Teorema 1, pág. 169].

Recordemos que si X y Y son espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ es una función, dado un subconjunto B de X , se denota por $f|_B : B \rightarrow Y$ la *restricción de f a B* y se define como $f|_B(x) = f(x)$, para todo $x \in B$. El siguiente hecho nos ayuda a ver la continuidad de funciones definidas por partes, una demostración se puede consultar en [5, Teorema 1.F.6, pág. 29]. Cabe mencionar que dicho resultado generalmente se conoce como Teorema del empalme.

Teorema 1.2.25. Sean X y Y espacios métricos. Sean A y B subconjuntos cerrados en X . Si $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ son funciones continuas en A y B , respectivamente, tales que $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$, entonces la función $h : A \cup B \rightarrow Y$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A; \\ g(x), & x \in B, \end{cases}$$

es continua en $A \cup B$.

A continuación, se muestran dos ejemplos en los que se utiliza el Teorema 1.2.25.

Ejemplo 1.2.26. Consideremos la función $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Notemos que las funciones $T_1 : (-\infty, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ y $T_2 : [\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $T_1(x) = 2x$ y $T_2(y) = 2 - 2y$, para todo $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$ y para cada $y \in [\frac{1}{2}, \infty)$, son funciones continuas en $(-\infty, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, \infty)$, respectivamente. En vista de que $T_1(\frac{1}{2}) = T_2(\frac{1}{2})$, por el Teorema 1.2.25, la función $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbb{R} . La función $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es conocida como la *función tienda*. La gráfica de la función T se puede ver en la Figura 1.3-(a).

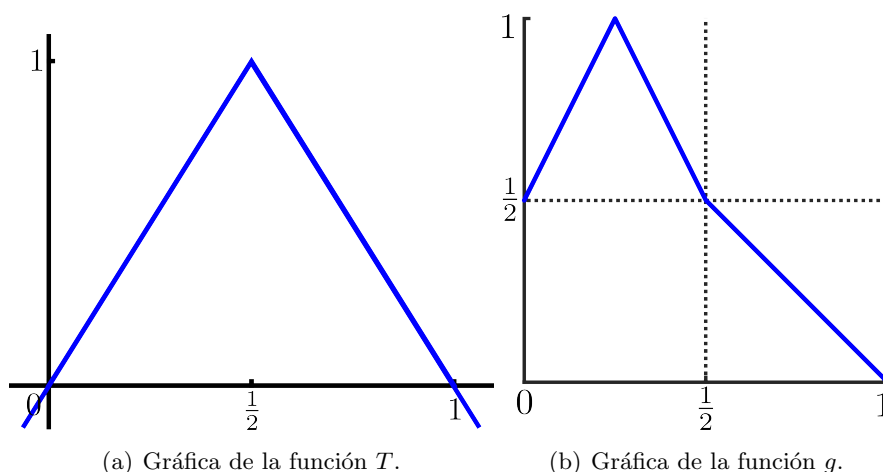


Figura 1.3: Gráficas de las funciones $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Ejemplo 1.2.27. Sea $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ -2x + \frac{3}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -x + 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que las funciones $g_1 : [0, \frac{1}{4}] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$, $g_2 : [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ y $g_3 : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$, definidas por $g_1(x) = 2x + \frac{1}{2}$, $g_2(y) = -2y + \frac{3}{2}$ y $g_3(z) = -z + 1$, para todo $x \in [0, \frac{1}{4}]$, para todo $y \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ y para todo $z \in [\frac{1}{2}, 1]$, son funciones continuas en $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$, respectivamente. En vista de que $g_1(\frac{1}{4}) = g_2(\frac{1}{4})$ y $g_2(\frac{1}{2}) = g_3(\frac{1}{2})$, por el Teorema 1.2.25, la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua en $[0, 1]$. La gráfica de la función g la encontramos en la Figura 1.3-(b).

El resultado que presentamos a continuación es muy conocido y su demostración se puede encontrar en la mayoría de los libros de cálculo, dicho resultado es conocido como Teorema del Valor Intermedio.

Teorema 1.2.28. Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Sean $a, b \in A$, con $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$. Si alguna de las siguientes dos condiciones se cumple:

$$(1) f(a) < c < f(b),$$

$$(2) f(a) > c > f(b),$$

entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

En el área de la topología una herramienta muy usada son los homeomorfismos, los cuales nos ayudan a conocer propiedades de un espacio a partir de otro.

Definición 1.2.29. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es un *homeomorfismo* si f es continua, es biyectiva y su inversa f^{-1} es una función continua en Y .

Las siguientes dos proposiciones nos ayudan a mostrar cuándo ciertas funciones reales son homeomorfismos, la Proposición 1.2.30 es para funciones crecientes y la Proposición 1.2.31 es para funciones decrecientes. Esto será de utilidad en varias demostraciones del Capítulos 2.

Proposición 1.2.30. Sean $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $\alpha > 0$. La función $f : [a, b] \rightarrow [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$, con regla de correspondencia $f(x) = \alpha x + \beta$, para toda $x \in [a, b]$, es un homeomorfismo.

Demostración. Notemos que f es una función continua en $[a, b]$ por ser una función lineal. Veamos que f es una función inyectiva. En efecto, consideremos $x, y \in [a, b]$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $\alpha x + \beta = \alpha y + \beta$. Así, $x = y$. Por lo que f es una función inyectiva. Por otro lado, veamos que f es una función sobreyectiva. Dado $y \in [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$, se sigue que $\alpha a + \beta \leq y \leq \alpha b + \beta$. Es decir, $a \leq \frac{y - \beta}{\alpha} \leq b$. Tomando $x = \frac{y - \beta}{\alpha} \in [a, b]$, se tiene que $f(x) = \alpha \left(\frac{y - \beta}{\alpha} \right) + \beta = y$. En consecuencia, f es una función sobreyectiva. Ahora, veamos que f tiene inversa. En efecto, consideremos la función $g : [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta] \rightarrow [a, b]$ con regla de correspondencia, $g(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}$, para toda $x \in [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$. Luego, para todo $x \in [a, b]$, se tiene que $g(f(x)) = \frac{1}{\alpha}(\alpha x + \beta) - \frac{\beta}{\alpha} = x = Id_{[a, b]}(x)$. Por lo tanto, g es la función inversa de f . Observemos que por la linealidad de g , se tiene que g es continua en $[\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$. Con todo, f es un homeomorfismo. \square

La demostración de la siguiente proposición es similar a la demostración de la Proposición 1.2.30.

Proposición 1.2.31. Sean $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $\alpha > 0$. La función $f : [a, b] \rightarrow [-\alpha b + \beta, -\alpha a + \beta]$, con regla de correspondencia $f(x) = -\alpha x + \beta$, para toda $x \in [a, b]$, es un homeomorfismo.

Demostración. Puesto que f es una función lineal, se tiene que f es continua en $[a, b]$. Veamos que f es una función inyectiva. En efecto, consideremos $x, y \in [a, b]$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $-\alpha x + \beta = -\alpha y + \beta$. De donde, $x = y$. Por lo que f es una función inyectiva. Por otro lado, veamos que f es una función sobreyectiva. Dado $y \in [-\alpha b + \beta, -\alpha a + \beta]$, se sigue que

$-\alpha b + \beta \leq y \leq -\alpha a + \beta$. Es decir, $a \leq \frac{y-\beta}{-\alpha} \leq b$. Tomando $x = \frac{y-\beta}{-\alpha} \in [a, b]$, se tiene que $f(x) = -\alpha \left(\frac{y-\beta}{-\alpha} \right) + \beta = y$. En consecuencia, f es una función sobreyectiva. Ahora, veamos que f tiene inversa. En efecto, consideremos la función $g : [-\alpha b + \beta, -\alpha a + \beta] \rightarrow [a, b]$ con regla de correspondencia, $g(x) = -\frac{1}{\alpha}x + \frac{\beta}{\alpha}$, para toda $x \in [-\alpha b + \beta, -\alpha a + \beta]$. Luego, para todo $x \in [a, b]$, se tiene que $g(f(x)) = -\frac{1}{\alpha}(-\alpha x + \beta) + \frac{\beta}{\alpha} = x = Id_{[a,b]}(x)$. En consecuencia, g es la función inversa de f . Observemos que g es una función continua en $[-\alpha b + \beta, -\alpha a + \beta]$. Por lo tanto, f es un homeomorfismo. \square

El siguiente resultado es muy conocido y nos será de provecho para la construcción de homeomorfismos. Su demostración se desprende de las Observaciones 1.1.14 y 1.2.22-(1).

Teorema 1.2.32. Sean X, Y y Z espacios métricos y funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$. Si f y g son homeomorfismos, entonces $g \circ f$ es un homeomorfismo.

Finalizamos esta sección señalando el concepto de función uniformemente continua y una propiedad de este tipo de funciones.

Definición 1.2.33. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es *uniformemente continua* en X si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } d_X(x_1, x_2) < \delta, \text{ entonces } d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon, \text{ para todo } x_1, x_2 \in X.$$

Una equivalencia de continuidad uniforme, en espacios compactos, es la que se muestra en el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [11, Teorema 4, pág. 185].

Teorema 1.2.34. Sean X y Y espacios métricos tales que X es compacto y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces, f es continua si y sólo si f es uniformemente continua.

Sección 1.3

Conceptos básicos en hiperespacios

En esta sección se presentan nociones referentes a hiperespacios. Analizamos brevemente la topología de Vietoris, así como dos maneras de describir la métrica de Hausdorff. A partir de una función $f : X \rightarrow X$ se define la función inducida al hiperespacio 2^X , $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$. Vemos que 2^f es continua cuando f lo es y analizamos cómo es la composición de 2^f consigo misma.

Comenzamos recordando lo siguiente que será útil en el desarrollo de los Capítulos 2 y 3.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio métrico. Se denota y define el siguiente subconjunto del conjunto potencia de X :

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es compacto}\}.$$

A la familia 2^X se le dota de una topología como sigue. Sean A_1, A_2, \dots, A_k subconjuntos de X . Se define la familia $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$ como:

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^k A_i \text{ y } A \cap A_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, k\} \right\}.$$

Teorema 1.3.2. Sea X un espacio métrico. La familia

$$\mathcal{B}_V = \{ \langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle : U_i \text{ es abierto en } X, \text{ para cada } i \text{ y } k \in \mathbb{N} \},$$

es base para una topología de 2^X , dicha topología se denota por τ_V y se llama topología de Vietoris.

Una demostración del Teorema 1.3.2 se encuentra en [10, Teorema 1.2, pág. 3]. A la pareja $(2^X, \tau_V)$ se le denomina el *hiperespacio de los subconjuntos compactos* de X .

A partir del hiperespacio 2^X de X se pueden definir otros hiperespacios de X , para esto recordemos el siguiente concepto.

Definición 1.3.3. Un espacio métrico X es un *continuo* si X es compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto Y de un espacio métrico X es un *subcontinuo* de X si Y es un continuo con la métrica de subespacio.

Definición 1.3.4. Sea X un espacio métrico. Se definen los hiperespacios de X , con la topología de subespacio inducida por τ_V :

$$C(X) = \{ A \in 2^X : A \text{ es conexo} \}, \text{ y}$$

$$F_n(X) = \{ A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos} \}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

A $C(X)$ se le conoce como el *hiperespacio de los subcontinuos* de X y a $F_n(X)$ se le denomina *n-ésimo producto simétrico* de X . En particular, para $n = 1$, se tiene que $F_1(X) = \{ \{x\} : x \in X \}$.

La demostración del siguiente teorema puede realizarse utilizando las siguientes referencias: [15, Teorema 4.13, pág. 59], [15, Teorema 4.17, pág. 61], [10, Teorema 14.9, pág. 113], [13, Corolario 1.8.8, pág. 62].

Teorema 1.3.5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un espacio métrico. Si X es compacto, entonces 2^X , $C(X)$ y $F_n(X)$ son compactos. Más aún, si X es un continuo, entonces 2^X , $C(X)$ y $F_n(X)$ son continuos.

Antes de pasar a definir una métrica para 2^X mencionamos la siguientes propiedades del conjunto $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$ en 2^X .

Proposición 1.3.6. Sea X un espacio métrico. Sean A y B subconjuntos de X , se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle = \langle A \cap B \rangle$.
- (2) $\langle A \rangle \neq \emptyset$ si y sólo si $A \neq \emptyset$.

Demostración. (1) Notemos que $C \in \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$ si y sólo si $C \in \langle A \rangle$ y $C \in \langle B \rangle$ si y sólo si $C \subset A$ y $C \subset B$ si y sólo si $C \subset A \cap B$ si y sólo si $C \in \langle A \cap B \rangle$.

(2) Si $\langle A \rangle \neq \emptyset$, entonces existe $C \in \langle A \rangle$. Luego, $C \subset A$. Como $C \neq \emptyset$, se sigue que $A \neq \emptyset$. Recíprocamente, si $A \neq \emptyset$, entonces existe $u \in A$. Luego, $\{u\} \in 2^X$ y $\{u\} \subset A$. Así, $\{u\} \in \langle A \rangle$. En consecuencia, $\langle A \rangle \neq \emptyset$. \square

Por otro lado, dado un espacio métrico (X, d) , sabemos que al hiperespacio 2^X se le asocia una métrica. En lo que sigue vemos algunas definiciones al respecto para construir una métrica para 2^X . Notemos que para cualesquiera $A, B \in 2^X$ y $a \in X$, $d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\}$ ya que B es compacto. Más aún, el conjunto $\{d(a, B) : a \in A\}$ tiene máximo ya que A es compacto.

Definición 1.3.7. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $A, B \in 2^X$. Se denota y define:

$$\rho(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Dado un espacio métrico X , notemos que ρ no es una métrica sobre 2^X ya que en general no se cumple la condición (B) de la Definición 1.2.1. En efecto, si $A \subset B$ y $A \neq B$, puede ocurrir que $\rho(A, B) = 0$. En particular, para $\{a\}, \{a, b\} \subset X$, se tiene que $\{a\} \neq \{a, b\}$ y $\rho(\{a\}, \{a, b\}) = 0$. Sin embargo, ρ cumple con la desigualdad triangular de la Definición 1.2.1, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados A, B y C elementos de 2^X , se tiene que:

$$\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B).$$

Demostración. Sean $a \in A$ y $c \in C$. Notemos que para cualquier $b \in B$, se cumple $d(a, B) \leq d(a, b)$. Como $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ y dado que $b \in B$ es arbitrario, $d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B)$. Luego, $d(a, B)$ es cota inferior del conjunto $\{d(a, c) + d(c, B) : c \in C\}$. Así,

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq \min\{d(a, c) + d(c, B) : c \in C\} \\ &= \min\{d(a, c) : c \in C\} + \min\{d(c, B) : c \in C\} \\ &= d(a, C) + \min\{d(c, B) : c \in C\} \\ &\leq d(a, C) + \max\{d(c, B) : c \in C\} \\ &\leq \rho(A, C) + \rho(C, B). \end{aligned}$$

Dado que $a \in A$ es arbitrario, $\rho(A, C) + \rho(C, B)$ es una cota superior del conjunto $\{d(a, B) : a \in A\}$. Por lo tanto, $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$. \square

La proposición previa es parte importante en la demostración del siguiente resultado.

Proposición 1.3.9. Sea (X, d) un espacio métrico. La función $H : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $A, B \in 2^X$ por:

$$H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\},$$

es una métrica sobre 2^X , la cual se conoce por *métrica de Hausdorff*.

Demostración. Veamos que H cumple las condiciones (A)-(D) descritas en la Definición 1.2.1. Tomemos $A, B, C \in 2^X$.

(A) Verifiquemos que $H(A, B) \geq 0$. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Observemos que para todo $b_1 \in B$ y para todo $a_1 \in A$, $d(a, b_1) \geq 0$ y $d(b, a_1) \geq 0$. Luego, $d(a, B) \geq 0$ y $d(b, A) \geq 0$. Así, $\rho(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\} \geq 0$ y $\rho(B, A) = \max\{d(b, A) : b \in B\} \geq 0$. Esto implica que, $\max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} \geq 0$. Por lo tanto, $H(A, B) \geq 0$.

(B) Demostremos que $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$. Supongamos que $H(A, B) = 0$. Sea $a_0 \in A$. Veamos que $a_0 \in B$. En efecto, dado que $H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$, se tiene que $\max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} = 0$. En particular, $\rho(A, B) = 0$. En vista de que $\rho(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}$, para cada $a \in A$ se tiene que $d(a, B) = 0$. Así, $d(a_0, B) = 0$. Como $d(a_0, B) = \min\{d(a_0, b) : b \in B\}$, existe $b_0 \in B$ tal que $d(a_0, b_0) = 0$. En consecuencia, $a_0 = b_0$. Es decir, $a_0 \in B$. Por lo tanto, $A \subset B$.

Análogamente, sea $b_0 \in B$. Veamos que $b_0 \in A$. En efecto, en vista de que $H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$, se tiene que $\max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} = 0$. En particular, $\rho(B, A) = 0$. Como $\rho(B, A) = \max\{d(b, A) : b \in B\}$, para cada $b \in B$ se tiene que $d(b, A) = 0$. Por lo que, $d(b_0, A) = 0$. Dado que $d(b_0, A) = \min\{d(b_0, a) : a \in A\}$, existe $a_0 \in A$ tal que $d(b_0, a_0) = 0$. En consecuencia, $b_0 = a_0$. Es decir, $b_0 \in A$. Por lo tanto, $B \subset A$. En conclusión, $A = B$.

Ahora, supongamos que $A = B$. Veamos que $H(A, B) = 0$. En efecto, dado que $H(A, A) = \max\{\rho(A, A), \rho(A, A)\}$, entonces $H(A, A) = \rho(A, A)$. En vista de que $\rho(A, A) = \max\{d(a, A) : a \in A\}$ y para cualquier $a \in A$, se tiene que $d(a, A) = 0$, entonces $\rho(A, A) = 0$. Por lo tanto, $H(A, B) = 0$.

(C) Se cumple que $H(A, B) = H(B, A)$, pues

$$H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} = \max\{\rho(B, A), \rho(A, B)\} = H(B, A).$$

(D) Por último, veamos que $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$. En efecto, por la Proposición 1.3.8, se tiene que,

$$\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B) \text{ y } \rho(B, A) \leq \rho(B, C) + \rho(C, A).$$

Luego,

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} \\ &\leq \max\{\rho(A, C) + \rho(C, B), \rho(B, C) + \rho(C, A)\} \\ &\leq \max\{\rho(A, C), \rho(C, A)\} + \max\{\rho(C, B), \rho(B, C)\} \\ &= H(A, C) + H(C, B) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B)$.

En conclusión, H es una métrica para 2^X . □

De la Proposición 1.3.9, tenemos que la pareja $(2^X, H)$ es un espacio métrico. En particular, para el espacio métrico $(2^{\mathbb{R}^2}, H)$, algunos elementos del hiperespacio $2^{\mathbb{R}^2}$ se pueden ver en la Figura 1.4, los cuales son subconjuntos compactos, cerrados y acotados, de \mathbb{R}^2 .

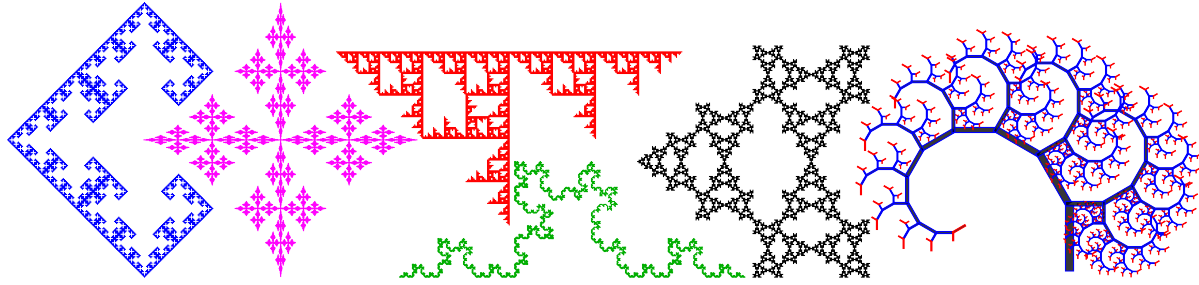


Figura 1.4: Algunos subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.3.10. Si X es un espacio métrico compacto, entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Vietoris en 2^X .

Una demostración del Teorema 1.3.10 se puede consultar en [10, Teorema 3.1, pág. 16].

Observación 1.3.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{a\}, \{b\}, \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \in 2^X$. Se cumple lo siguiente:

- (1) $H(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$;
- (2) $H(\{a\}, \{b_1, b_2, \dots, b_m\}) = \max\{d(a, b_i) : b_i \in \{b_1, b_2, \dots, b_m\}\}$.

Proposición 1.3.12. Sean X un espacio métrico y $A, B \in 2^X$. Si $A \subset B$, entonces $H(A, B) = \rho(B, A)$.

Demostración. Supongamos que $A \subset B$. Luego, de la Proposición 1.2.10, $d(a, B) = 0$, para cada $a \in A$. Así, $\rho(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\} = 0$. Dado que, por la Proposición 1.3.9, $H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$, se tiene que $H(A, B) = \rho(B, A)$. \square

A continuación, se describe una equivalencia de la métrica de Hausdorff. Para lo cual, se requiere tener la noción de nube alrededor de un conjunto o también conocido como entorno de un conjunto.

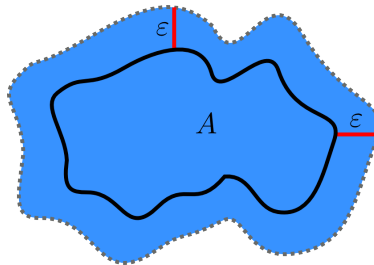


Figura 1.5: La nube alrededor de A y radio ε .

Definición 1.3.13. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean A un elemento de 2^X y $\varepsilon > 0$. Se denota y define la *nube alrededor de A y radio ε* como el conjunto:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}.$$

Algunas propiedades de la nube alrededor de un conjunto se muestran en el siguiente resultado.

Proposición 1.3.14. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean A y B elementos de 2^X y $\varepsilon > 0$, se cumplen las siguientes propiedades:

(1) Si $a \in X$, entonces $N(\varepsilon, \{a\}) = B_d(a, \varepsilon)$;

(2) $N(\varepsilon, A) = \bigcup \{B_d(a, \varepsilon) : a \in A\}$;

(3) $N(\varepsilon, A) = \bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$.

Demostración. (1) Sea $a \in A$. Luego, $N(\varepsilon, \{a\}) = \{x \in X : d(x, \{a\}) < \varepsilon\} = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\} = B_d(a, \varepsilon)$.

(2) Sea $x \in N(\varepsilon, A)$. Veamos que $x \in \bigcup \{B_d(a, \varepsilon) : a \in A\}$. En efecto, como $d(x, A) < \varepsilon$, entonces, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Luego, $x \in B_d(a, \varepsilon)$. Se sigue que, $x \in \bigcup \{B_d(a, \varepsilon) : a \in A\}$. Por lo tanto, $N(\varepsilon, A) \subset \bigcup \{B_d(a, \varepsilon) : a \in A\}$.

Por otro lado, sea $x \in \bigcup \{B_d(a, \varepsilon) : a \in A\}$. Veamos que $x \in N(\varepsilon, A)$. En efecto, como $x \in \bigcup \{B_d(a, \varepsilon) : a \in A\}$, existe $a \in A$ tal que $x \in B_d(a, \varepsilon)$. Esto es, $d(x, a) < \varepsilon$. Como $d(x, A) \leq d(x, a)$, entonces, $d(x, A) < \varepsilon$. De donde, $x \in N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $\bigcup \{B_d(a, \varepsilon) : a \in A\} \subset N(\varepsilon, A)$. En conclusión, $N(\varepsilon, A) = \bigcup \{B_d(a, \varepsilon) : a \in A\}$.

(3) Sea $x \in N(\varepsilon, A)$. Es decir, $d(x, A) < \varepsilon$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, A) < \delta < \varepsilon$. Así, $x \in N(\delta, A)$. Lo cual implica que, $x \in \bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$. Por lo tanto, $N(\varepsilon, A) \subset \bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$.

Por otro lado, sea $x \in \bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$. Luego, existe $\delta > 0$ y $\delta < \varepsilon$ tal que $x \in N(\delta, A)$. Lo cual implica, $d(x, A) < \delta$. De donde, $d(x, A) < \varepsilon$. Así, $x \in N(\varepsilon, A)$. En consecuencia, $\bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\} \subset N(\varepsilon, A)$. En conclusión, $N(\varepsilon, A) = \bigcup \{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$. \square

Observemos que la parte (2) de la Proposición 1.3.14 nos dice que la $N(\varepsilon, A)$ es un conjunto abierto en X . A continuación, veamos la siguiente equivalencia.

Proposición 1.3.15. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean A y B elementos de 2^X y $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$\rho(A, B) < \varepsilon \text{ si y sólo si } A \subset N(\varepsilon, B).$$

Demostración. Supongamos que $\rho(A, B) < \varepsilon$. Veamos que $A \subset N(\varepsilon, B)$. Sea $a \in A$. Observemos que, $d(a, B) \leq \rho(A, B)$. Así, $d(a, B) < \varepsilon$. Luego, $a \in N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto, $A \subset N(\varepsilon, B)$.

Por otro lado, supongamos que $A \subset N(\varepsilon, B)$. Por la Proposición 1.3.14-(3), $\bigcup \{N(\delta, B) : 0 < \delta < \varepsilon\}$ es una cubierta abierta de A . Como A es compacto, existen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^k N(\delta_i, B)$. Consideremos $\delta = \max\{\delta_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$. Observemos que $\delta < \varepsilon$. Sea $a \in A$. Así, existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $a \in N(\delta_j, B)$. Luego, $d(a, B) < \delta_j \leq \delta$. Dado que $a \in A$ es arbitrario, δ es cota superior de $\{d(a, B) : a \in A\}$. Por lo cual, $\rho(A, B) \leq \delta$. Esto implica que, $\rho(A, B) < \varepsilon$. \square

La siguiente equivalencia será útil para la demostración de diversos resultados en los Capítulos 2 y 3.

Proposición 1.3.16. Sea X un espacio métrico. Sean A y B elementos de 2^X y $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$H(A, B) < \varepsilon \text{ si y sólo si } A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A).$$

Demostración. Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$. Luego, $\rho(A, B) < \varepsilon$ y $\rho(B, A) < \varepsilon$. Así, por la Proposición 1.3.15, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Por otro lado, supongamos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Luego, de la Proposición 1.3.15, $\rho(A, B) < \varepsilon$ y $\rho(B, A) < \varepsilon$. Por lo tanto, $H(A, B) < \varepsilon$. \square

Como ya mencionamos, ahora, mostramos una equivalencia de la métrica de Hausdorff.

Proposición 1.3.17. Sea X un espacio métrico. Sean A y B elementos de 2^X y $\varepsilon > 0$. Luego:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Demostración. Sea $\varepsilon_1 \in \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$. Luego, $A \subset N(\varepsilon_1, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_1, A)$. Así, por la Proposición 1.3.16, $H(A, B) < \varepsilon_1$, lo cual implica que, $H(A, B)$ es cota inferior de $\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$. Por lo que, $H(A, B) \leq \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$. Veamos que $H(A, B)$ es la mayor cota inferior. Sea $r > 0$. Consideremos $\varepsilon_2 = H(A, B) + \frac{r}{2}$. Como $H(A, B) < \varepsilon_2$, entonces, de la Proposición 1.3.16, $A \subset N(\varepsilon_2, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_2, A)$. Así, $\varepsilon_2 \in \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$. Además, $H(A, B) < \varepsilon_2 < H(A, B) + r$. Por lo tanto, $H(A, B)$ es la mayor de las cotas inferiores de $\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$. Con todo, $H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$. \square

A continuación, mostramos ejemplos donde se muestra gráficamente la métrica de Hausdorff.

Ejemplo 1.3.18. Consideremos el intervalo cerrado en \mathbb{R} , $X = [-20, 20]$, con la métrica inducida de \mathbb{R} (vea el Ejemplo 1.2.3). Sean $A_1 = \{4\}$, $A_2 = \{5\}$, $A_3 = \{6\}$, $A_4 = \{5, 9\}$, $A_5 = \{1, 3, 5\}$, $A_6 = \{3, 4, 9\}$, $A_7 = \{2, 5, 8\} \in F_3(X)$. Es fácil ver que $H(A_2, A_3) = 1$. Como $H(A_2, A_3) < 2$, por la Proposición 1.3.16, se tiene que $A_2 \subset N(2, A_3)$ y $A_3 \subset N(2, A_2)$. En la Figura 1.6-(a) puede verse gráficamente este hecho.

Similarmente, $H(A_3, A_4) = 3$. Como $H(A_3, A_4) < 4$, se obtiene que $A_3 \subset N(4, A_4)$ y $A_4 \subset N(4, A_3)$. En la Figura 1.6-(b) puede verse gráficamente este hecho.

Asimismo, $H(A_1, A_5) = 3$. Dado que $H(A_1, A_5) < 4$, se sigue que $A_5 \subset N(4, A_1)$ y $A_1 \subset N(4, A_5)$. En la Figura 1.6-(c) puede verse gráficamente este hecho.

Por último, $H(A_6, A_7) = 1$. En vista de que $H(A_6, A_7) < 2$, se tiene que $A_6 \subset N(2, A_7)$ y $A_7 \subset N(2, A_6)$. En la Figura 1.6-(d) puede verse gráficamente este hecho.

Cabe señalar que las gráficas que presentamos en el Ejemplo 1.3.18 se obtienen usando los Scripts 1, 2, 3 y 4 que incluimos en el Apéndice de esta tesis.

Ejemplo 1.3.19. Sea $X = [-20, 20]^2 \subset \mathbb{R}^2$, con la métrica inducida de \mathbb{R}^2 (vea el Ejemplo 1.2.4). Consideremos los elementos $C_1 = \{(0, 0)\}$, $C_2 = \{(1, 2)\}$, $C_3 = \{(5, 4), (0, -3), (-3, 0)\}$, $C_4 =$

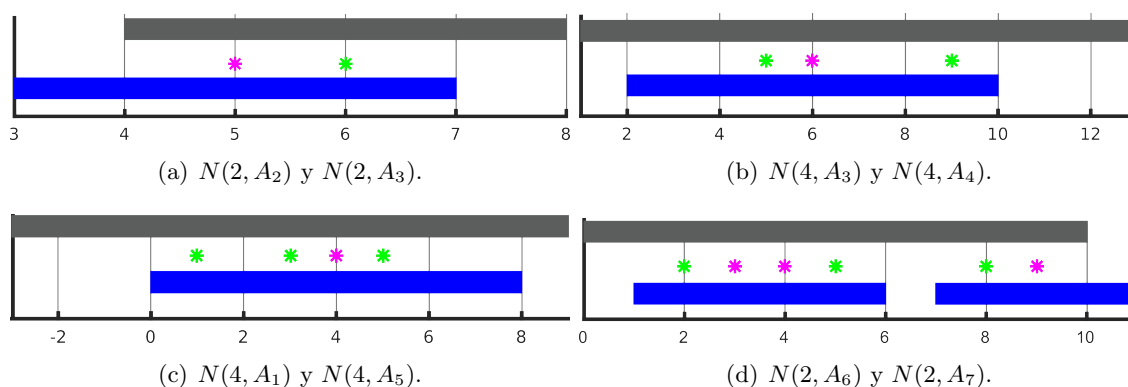


Figura 1.6: Gráfica de las nubes alrededor de los conjuntos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ y A_7 .

$\{(-3, 0), (1, -1), (2, 1)\}$, $C_5 = \{(-2, 0), (0, -1), (1, 1)\} \in F_3(X)$. Es fácil ver que $H(C_1, C_2) = \sqrt{5}$. Como $H(C_1, C_2) < 3$, por la Proposición 1.3.16, obtenemos que $C_1 \subset N(3, C_2)$ y $C_2 \subset N(3, C_1)$. En la Figura 1.7-(a) puede verse gráficamente este hecho.

Similarmente, $H(C_1, C_3) = \sqrt{41}$. Como $H(C_1, C_3) < 7$, se tiene que $C_1 \subset N(7, C_3)$ y $C_3 \subset N(7, C_1)$. En la Figura 1.7-(b) puede verse gráficamente este hecho.

Por último, $H(C_4, C_5) = 1$. Dado que $H(C_4, C_5) < 2$, se sigue que $C_4 \subset N(2, C_5)$ y $C_5 \subset N(2, C_4)$. En la Figura 1.7-(c) puede verse gráficamente este hecho.

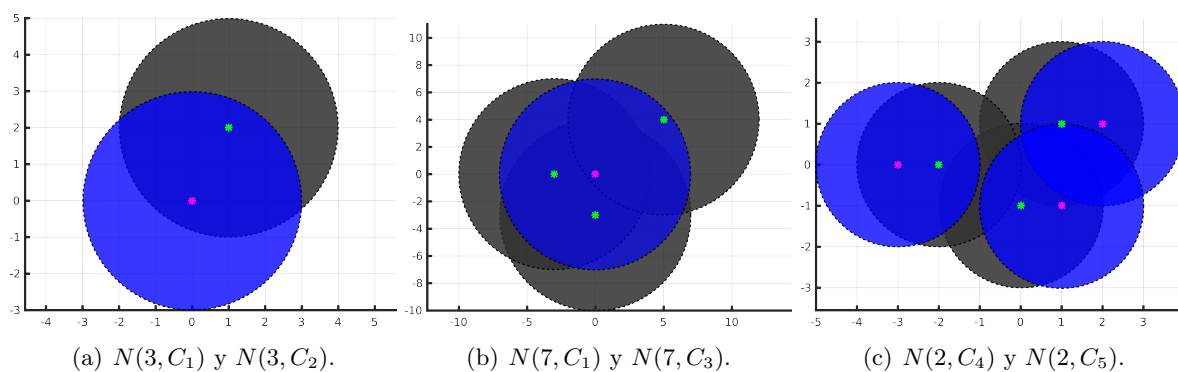


Figura 1.7: Gráfica de las nubes alrededor de los conjuntos C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 .

Las gráficas que presentamos en el Ejemplo 1.3.19 se obtienen usando los Scripts 5, 6, 7 y 8 que incluimos en el Apéndice de esta tesis.

De manera intuitiva, la métrica de Hausdorff mide que tan bien empalmados están dos conjuntos, $A, B \in 2^{\mathbb{R}^2}$, en la Figura 1.8-(a) los conjuntos no se empalman, es decir, los conjuntos A y B están lejos uno del otro. Sin embargo, en la Figura 1.8-(b) los conjuntos se empalman, lo cual significa que distancia entre los conjuntos A y B se ha reducido. Más aún, en la Figura 1.8-(c) los conjuntos se empalman mejor que en la Figura 1.8-(b), esto significa que distancia entre los conjuntos ha reducido mucho más. Así, la distancia $H(A, B)$ es igual a cero si $A = B$.

Una propiedad útil del hiperespacio $F_1(X)$ es la que muestra a continuación.

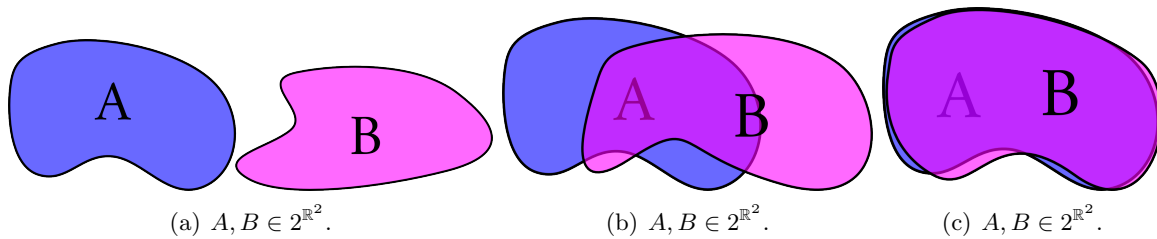


Figura 1.8: Algunos subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 .

Proposición 1.3.20. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, existe un homeomorfismo entre X y $F_1(X)$.

Demostración. Consideremos la función $h : X \rightarrow F_1(X)$ definida como $h(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$. Demostremos que h es un homeomorfismo. Para esto primero, veamos que h es inyectiva. Sean $x, y \in X$ y supongamos que $h(x) = h(y)$. Luego, $\{x\} = \{y\}$. Esto implica que, $x = y$. Por lo que h es inyectiva. Ahora, probemos que h es sobreyectiva. En efecto, sea $\{x\} \in F_1(X)$. Así, $x \in X$. De donde, $h(x) = \{x\}$. En consecuencia, h es sobreyectiva. Por lo tanto, h es biyectiva. Veamos que h es continua. Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in X$. Si $d(a, x) < \varepsilon$, entonces de la Observación 1.3.11-(1), obtenemos $H(\{a\}, \{x\}) = d(a, x) < \varepsilon$. Esto es, $H(h(a), h(x)) < \varepsilon$. Lo cual implica que, h es continua en X . Notemos que la función $h^{-1} : F_1(X) \rightarrow X$, definida como $h^{-1}(\{x\}) = x$, es la función inversa de h . Veamos que h^{-1} es continua. En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $\{a\} \in F_1(X)$. Si $H(\{a\}, \{x\}) < \varepsilon$, entonces de la Observación 1.3.11-(1), se obtiene que $H(\{a\}, \{x\}) = d(a, x) < \varepsilon$. Esto es, $d(h^{-1}(a), h^{-1}(x)) < \varepsilon$. Lo cual implica que, h^{-1} es continua en $F_1(X)$. En conclusión, h es un homeomorfismo. \square

En seguida, definimos un tipo especial de funciones en un hiperespacio. Puesto que son las funciones inducidas las cuales juegan un papel principal en el desarrollo de nuestro trabajo.

Definición 1.3.21. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Se define la función $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ por:

$$2^f(A) = f(A), \text{ para cada } A \in 2^X.$$

La función $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es conocida como *función inducida* por f al hiperespacio 2^X .

Observemos que dado un espacio métrico compacto X y una función continua $f : X \rightarrow X$, de la Observación 1.2.24-(1), se sigue que $f(A)$ es compacto. Por lo tanto, 2^f está bien definida.

Por otra parte, si $A \in C(X)$, entonces por la Observación 1.2.24-(2) se obtiene que $f(A) \in C(X)$. Asimismo, si $A \in F_n(X)$, entonces en vista de la Observación 1.1.2 se sigue que $f(A) \in F_n(X)$. Lo anterior nos permite tener las siguientes funciones.

Definición 1.3.22. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X .

- (A) Se define la *función inducida por f al hiperespacio $C(X)$* , $C(f) : C(X) \rightarrow C(X)$, por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$.
- (B) Se define la *función inducida por f al hiperespacio $F_n(X)$* , $F_n(f) : F_n(X) \rightarrow F_n(X)$, por $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$.

Una de las propiedades de una función inducida a los hiperespacios bajo una función continua es que preserva la continuidad. Formalmente, tenemos lo siguiente.

Proposición 1.3.23. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Entonces, la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es continua en 2^X .

Demostración. Consideremos $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Veamos que existe $\delta > 0$ tal que si $B \in 2^X$ con $H(A, B) < \delta$, entonces $H(2^f(A), 2^f(B)) < \varepsilon$. Equivalentemente, por la Proposición 1.3.16, veamos que $2^f(A) \subset N(\varepsilon, 2^f(B))$ y $2^f(B) \subset N(\varepsilon, 2^f(A))$. En vista de que f es una función continua en X y X es compacto, por el Teorema 1.2.34, f es uniformemente continua en X . Es decir, existe δ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$, si $d(x_1, x_2) < \delta$, entonces $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Sea $B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \delta$. Veamos que $2^f(A) \subset N(\varepsilon, 2^f(B))$. En efecto, sea $y \in 2^f(A)$, esto es $y \in f(A)$. Luego, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Dado que $H(A, B) < \delta$, por la Proposición 1.3.16, en particular se tiene que $A \subset N(\delta, B)$. Así, $d(x, B) < \delta$. Esto implica que, existe $b \in B$ tal que $d(x, b) < \delta$. Se sigue que $d(f(x), f(b)) < \varepsilon$, es decir, $d(y, f(b)) < \varepsilon$. Por lo que, $y \in B(f(b), \varepsilon)$. Por la Proposición 1.3.14-(2), $y \in N(\varepsilon, f(B))$. Entonces, $f(A) \subset N(\varepsilon, f(B))$. Por lo tanto, $2^f(A) \subset N(\varepsilon, 2^f(B))$. Análogamente, veamos que $2^f(B) \subset N(\varepsilon, 2^f(A))$. En efecto, sea $y \in 2^f(B)$, es decir, $y \in f(B)$. Luego, existe $x \in B$ tal que $f(x) = y$. Dado que $H(A, B) < \delta$, por la Proposición 1.3.16, en particular se tiene que $B \subset N(\delta, A)$. Así, $d(x, A) < \delta$. Esto implica que, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta$. Se sigue que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Es decir, $d(y, f(a)) < \varepsilon$. Por lo que, $y \in B(f(a), \varepsilon)$. Así, por la Proposición 1.3.14-(2), $y \in N(\varepsilon, f(A))$. Luego, $f(B) \subset N(\varepsilon, f(A))$. Por lo tanto, $2^f(B) \subset N(\varepsilon, 2^f(A))$. En consecuencia, $2^f(A) \subset N(\varepsilon, 2^f(B))$ y $2^f(B) \subset N(\varepsilon, 2^f(A))$. Así, por la Proposición 1.3.16, $H(2^f(A), 2^f(B)) < \varepsilon$. En conclusión, 2^f es una función continua en 2^X . \square

Para nuestro trabajo es importante conocer cómo se comporta la composición de la función inducida 2^f consigo misma.

Proposición 1.3.24. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Entonces, para cualquier número natural k y para cada elemento A de 2^X se tiene que:

$$(2^f)^k(A) = f^k(A).$$

Demostración. Se procede por inducción matemática sobre k . Para $k = 1$, se cumple $(2^f)^1(A) = 2^f(A) = f(A) = f^1(A)$. Supongamos que se cumple para k . Veamos que se cumple para $k + 1$. En efecto, $(2^f)^{k+1}(A) = 2^f((2^f)^k(A)) = 2^f(f^k(A)) = f(f^k(A)) = f^{k+1}(A)$. \square

Concluimos esta sección con una propiedad que relaciona los subconjuntos $\langle A \rangle$ de 2^X con la composición de la función inducida 2^f consigo misma.

Proposición 1.3.25. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Sean A un subconjunto de X y k un número natural. Entonces, $(2^f)^k(\langle A \rangle) \subset \langle f^k(A) \rangle$.

Demostración. Si $D \in (2^f)^k(\langle A \rangle)$, entonces existe $C \in \langle A \rangle$ tal que $(2^f)^k(C) = D$. Luego, $f^k(C) = D$ y dado que $C \subset A$ se tiene que $f^k(C) \subset f^k(A)$. Así, $D \subset f^k(A)$. Esto implica que $D \in \langle f^k(A) \rangle$. Por lo tanto, $(2^f)^k(\langle A \rangle) \subset \langle f^k(A) \rangle$. \square

Capítulo 2

Nociones de dinámica individual y dinámica colectiva

En este capítulo se analizan nociones básicas respecto a sistemas dinámicos discretos. Dado un espacio métrico compacto X y una función continua $f : X \rightarrow X$, se dice que se analiza la dinámica individual cuando se estudian propiedades dinámicas de la función f y se dice que se analiza la dinámica colectiva cuando se estudian propiedades dinámicas de las funciones inducidas 2^f , $C(f)$ y $F_n(f)$ a diferentes hiperespacios. Cabe mencionar que el área de estudio de estos temas se le denomina *dinámica topológica*.

En la Sección 2.1 se dan los conceptos preliminares de sistemas dinámicos discretos. En particular, se analiza las nociones de órbita, puntos fijos y puntos periódicos. Además, se detalla la construcción del diagrama Cobweb para funciones reales y como ejemplo principal se tiene a la función tienda.

En la Sección 2.2 nos enfocamos al estudio de la dinámica individual. En particular, se analizan funciones dinámicas como son: transitivas, caóticas, totalmente transitivas, débilmente mezclantes y minimales. Asimismo, se estudia la dinámica de la función tienda y la función máquina de sumar.

Finalmente, en la Sección 2.3 iniciamos el estudio de la dinámica colectiva, particularmente, de la función tienda.

Sección 2.1

Notaciones y conceptos básicos en sistemas dinámicos

En esta sección se introduce la noción de sistema dinámico discreto. Asimismo, nos enfocamos en estudiar la órbita, puntos fijos y puntos periódicos. Para visualizar las órbitas bajo funciones reales se utilizan los diagramas Cobweb. Posteriormente, se ejemplifican los conceptos con la función tienda. Por último, se da una demostración de que el conjunto de los puntos periódicos de la función tienda es denso.

Dado un espacio métrico X y dada una función continua $f : X \rightarrow X$, el par (X, f) se llama

sistema dinámico discreto. En adelante sólo diremos que la pareja (X, f) es un sistema dinámico. A partir de la función f , para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define la k -ésima iterada o iteración de f como sigue:

$$\begin{aligned} f^0 &= Id_X \text{ y} \\ f^k &= f \circ f^{k-1}, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A continuación definimos algunas nociones de sistemas dinámicos referentes a puntos del espacio X .

Definición 2.1.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. La *órbita* de x bajo f es el conjunto que se denota y define como:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

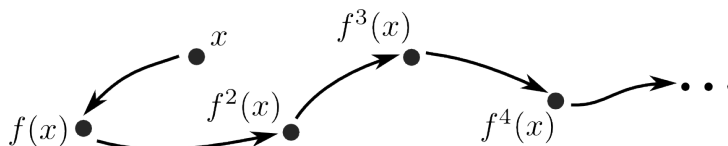


Figura 2.1: Órbita de x bajo f .

Intuitivamente, en un sistema dinámico (X, f) , la órbita de $x \in X$ bajo la función f representa el movimiento de un objeto. Es decir, para el tiempo $t = 0$, el objeto se encuentra en x , para el tiempo $t = 1$, el objeto se mueve hacia $f(x)$, para el tiempo $t = 2$, el objeto se mueve hacia $f^2(x)$, y esto se sigue sucesivamente (ver la Figura 2.1). A continuación, tenemos conceptos que caracterizan el movimiento de un objeto.

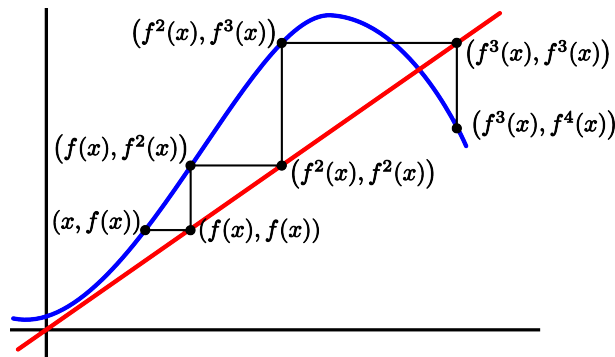


Figura 2.2: Diagrama Cobweb.

El diagrama Cobweb o la red de araña es una herramienta para visualizar de manera gráfica la órbita de un punto bajo una función real. A continuación, se detalla su construcción. Consideremos A un intervalo de \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Dado $x \in A$, primero, se traza un segmento de recta entre los puntos $(x, f(x))$ y $(f(x), f(x))$. Luego, se traza otro segmento de recta entre los puntos $(f(x), f(x))$ y $(f(x), f^2(x))$. Así, se traza otro segmento de recta entre los puntos $(f(x), f^2(x))$ y $(f^2(x), f^2(x))$. Entonces, se traza otro segmento de recta

entre los puntos $(f^2(x), f^2(x))$ y $(f^2(x), f^3(x))$. En seguida, se traza otro segmento de recta entre los puntos $(f^2(x), f^3(x))$ y $(f^3(x), f^3(x))$, esto se sigue sucesivamente (vea la Figura 2.2). Cabe mencionar que los diagramas Cobweb que se muestran en seguida se obtiene con los Scripts 9 y 10 que están incluidos en el Apéndice de esta tesis.

Consideremos la función tienda $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como en el Ejemplo 1.2.26. Notemos que $\mathcal{O}(\frac{2}{5}, T) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$. Los pasos a seguir para construir el diagrama Cobweb de la órbita de $\frac{2}{5}$ bajo T son los siguientes. Primero, se traza un segmento de recta entre los puntos $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ y $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$. Luego, se traza otro segmento de recta entre los puntos $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ y $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$. Así, se traza otro segmento de recta entre los puntos $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ y $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$. En seguida, se traza otro segmento de recta entre los puntos $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ y $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ (vea la Figura 2.3-(a)). Similarmente, considerando la función g como en el Ejemplo 1.2.27, se puede construir los diagramas Cobweb de la órbita de $\frac{1}{10}$ bajo la función g (vea la Figura 2.3-(b)) y de la órbita de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ bajo la función g (vea la Figura 2.3-(c)).

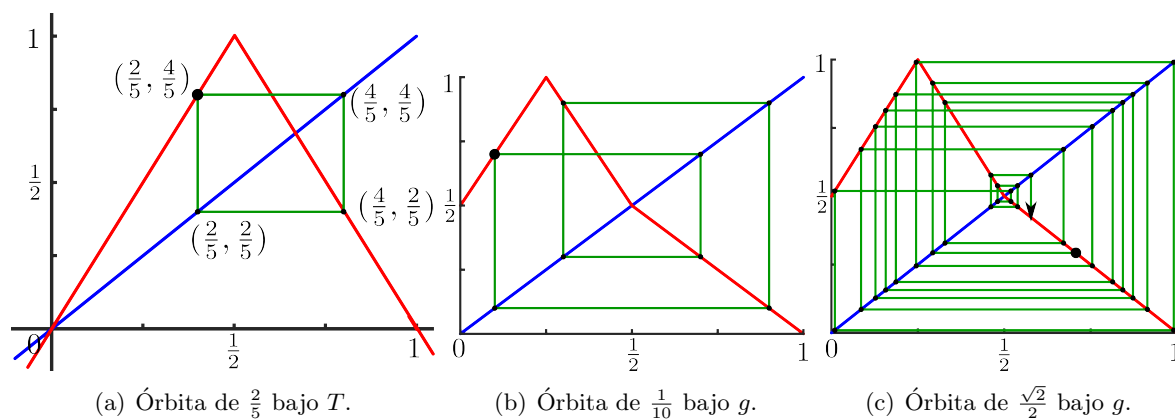


Figura 2.3: Diagramas Cobweb.

Definición 2.1.2. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$.

- (A) Se dice que x es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$.
- (B) Se dice que x es un *punto periódico* bajo f si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Al número $\min\{k \in \mathbb{N} : f^k(x) = x\}$ se le llama *período* de x . Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $Per(f)$.

Notemos que si (X, f) es un sistema dinámico y x es un punto fijo de X , entonces la órbita de x bajo f es $\mathcal{O}(x, f) = \{x\}$. Más aún, si x es un punto periódico de período $k \in \mathbb{N}$, entonces la órbita de x bajo f es $\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\}$ (vea la Figura 2.3 (a) y (b)).

En seguida, recordemos una propiedad importante de las funciones continuas definidas en un intervalo de \mathbb{R} .

Proposición 2.1.3. Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Sea $[a, b]$ un subintervalo contenido en A . Si $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Demostración. Supongamos que $[a, b] \subset f([a, b])$. Luego, existen $c, d \in [a, b]$ tales que $f(c) = a$ y $f(d) = b$. Notemos que $f(c) < c$ y $d < f(d)$. Ahora, definimos la función $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia dada por $h(x) = f(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$. Así, $h(c) = f(c) - c < 0$ y $h(d) = f(d) - d > 0$. En consecuencia, del Teorema 1.2.28, existe $x \in (a, b)$ tal que $h(x) = 0$. Es decir, $f(x) = x$. Por lo tanto, f tiene un punto fijo en $[a, b]$. \square

Dado un espacio métrico X y una función continua $f : X \rightarrow X$, supongamos que un objeto cae en un punto periódico $x \in X$ de período k . Entonces, para el tiempo $t = 0$, el objeto se encuentra en x , para el tiempo $t = 1$, el objeto se mueve hacia $f(x)$, para el tiempo $t = 2$, el objeto se mueve hacia $f^2(x), \dots$, para el tiempo $t = k - 1$, el objeto se mueve hacia $f^{k-1}(x)$, y para el tiempo $t = k$, el objeto se mueve hacia x (ver la Figura 2.4). Así, el movimiento de dicho objeto queda atrapado en $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)$.

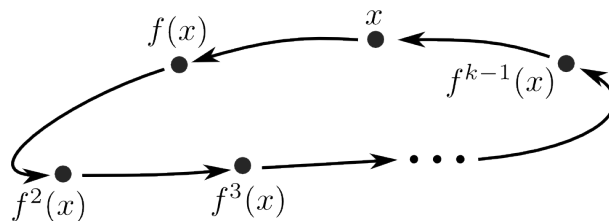


Figura 2.4: Punto periódico de período k .

Otra propiedad interesante de los puntos periódicos es la siguiente.

Observación 2.1.4. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si x es un punto periódico de período $k \in \mathbb{N}$, entonces $f^{km}(x) = x$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

En efecto, para $m = 1$, se tiene que $f^k(x) = x$. Supongamos que se cumple para m . Veamos que se cumple para $m + 1$. Notemos que $f^{k(m+1)}(x) = f^k(f^{km}(x)) = f^k(x) = x$.

Ahora, si tomamos un número finito de puntos periódicos, ocurre lo siguiente.

Proposición 2.1.5. Sean (X, f) un sistema dinámico y $k \in \mathbb{N}$. Si $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ son puntos periódicos de período m_1, m_2, \dots, m_k , respectivamente, entonces para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $f^m(x_i) = x_i$, donde m es el mínimo común múltiplo de m_1, m_2, \dots, m_k .

Demostración. Se procede por inducción matemática sobre k . Para $k = 2$, supongamos que $x_1, x_2 \in X$ son puntos periódicos de período m_1 y m_2 , respectivamente. Sea m el mínimo común múltiplo de m_1 y m_2 . Así, existen $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m_1 p_1 = m$ y $m_2 p_2 = m$. De la Observación 2.1.4, $f^m(x_1) = f^{m_1 p_1}(x_1) = x_1$ y $f^m(x_2) = f^{m_2 p_2}(x_2) = x_2$. Ahora, supongamos que el resultado es cierto para k . Veamos que se cumple $k + 1$. Consideremos $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in X$ puntos periódicos con períodos m_1, m_2, \dots, m_{k+1} , respectivamente. Sea l el mínimo común múltiplo de m_1, m_2, \dots, m_k . Luego, por nuestro supuesto $f^l(x_i) = x_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Sea m el mínimo común múltiplo de l y m_{k+1} . Es decir, m es el mínimo común múltiplo de m_1, m_2, \dots, m_{k+1} . Así, existen $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tales que $l p_1 = m$ y $m_{k+1} p_2 = m$. Por la Observación

2.1.4, $f^m(x_{k+1}) = f^{m_{k+1}p_2}(x_{k+1}) = x_{k+1}$ y $f^m(x_i) = f^{lp_1}(x_i) = x_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Por lo tanto, $f^m(x_i) = x_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$. \square

Al estudiar los sistemas dinámicos discretos es común encontrarse con la función tienda (vea el Ejemplo 1.2.26) ya que es un ejemplo práctico (ver [1, 6, 12, 16]). Con ayuda de esta función, ejemplificamos puntos fijos puntos y periódicos. De hecho la función tienda juega un papel muy importante en el desarrollo de esta tesis.

En la siguiente proposición nos enfocamos en el comportamiento de la órbita de cualquier $x \in \mathbb{R}$ bajo $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

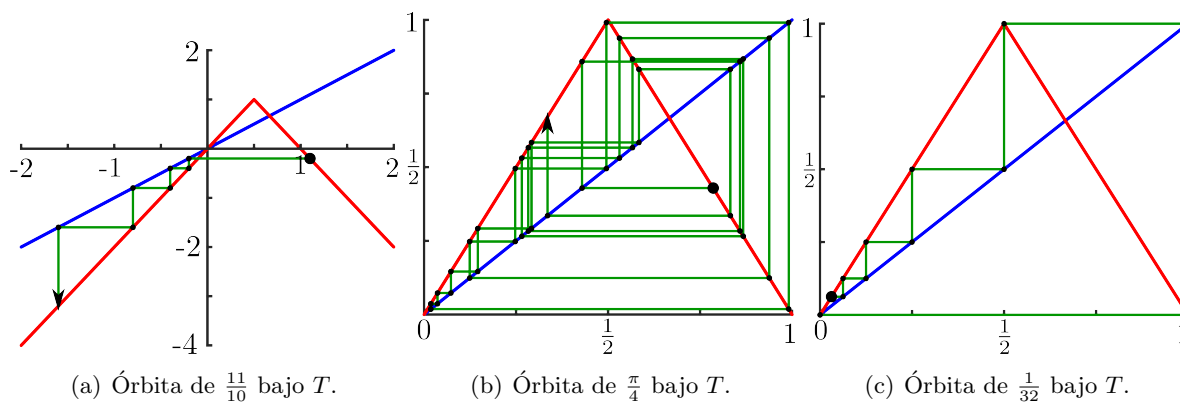


Figura 2.5: Diagramas Cobweb.

Proposición 2.1.6. Consideremos x un punto en \mathbb{R} y $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función tienda.

- (1) Si $x < 0$, entonces $\mathcal{O}(x, T)$ es una sucesión decreciente. Además, $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = -\infty$.
- (2) Si $x > 1$, entonces $T(x) < 0$. Además, $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = -\infty$.
- (3) Si $x \in [0, 1]$, entonces $T(x) \in [0, 1]$. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$, $T^k(x) \in [0, 1]$.

Demostración. Consideremos $x \in \mathbb{R}$.

(1) Supongamos que $x < 0$. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} T(x) &= 2x, \\ T^2(x) &= T(T(x)) = T(2x) = 2(2x) = 2^2x, \\ T^3(x) &= T(T^2(x)) = T(2^2x) = 2(2^2x) = 2^3x, \\ &\vdots \\ T^k(x) &= 2^kx, \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Así, la órbita de x bajo T , $\mathcal{O}(x, T) = \{x, 2x, 2^2x, 2^3x, \dots, 2^kx, \dots\}$, es una sucesión decreciente. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $2^k < 2^{k+1}$. Luego, como $x < 0$, $2^kx > 2^{k+1}x$. Por lo tanto, $T^k(x) > T^{k+1}(x)$. Así, $\mathcal{O}(x, T)$ es una sucesión decreciente. Además, se sigue que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^kx = x \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k = x \cdot \infty = -\infty.$$

(2) Supongamos que $x > 1$. Luego, $0 > 2 - 2x$. Esto es, $T(x) = 2 - 2x < 0$. Por lo que, la órbita de $T(x)$ bajo T es $\mathcal{O}(T(x), T) = \{T(x), 2T(x), 2^2T(x), 2^3T(x), \dots, 2^kT(x), \dots\}$. Así, la órbita de x bajo T es $\mathcal{O}(x, T) = \{x, T(x), 2T(x), 2^2T(x), 2^3T(x), \dots, 2^kT(x), \dots\}$. Además, se obtiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k-1}T(x) = T(x) \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k-1} = T(x) \cdot \infty = -\infty.$$

(3) Supongamos que $x \in [0, 1]$. Consideremos $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Luego, $0 \leq 2x \leq 1$. Como $T(x) = 2x$, tenemos que $T(x) \in [0, 1]$. Por otro lado, consideremos $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Esto es, $1 \geq 2 - 2x \geq 0$. Como $T(x) = 2 - 2x$, obtenemos $T(x) \in [0, 1]$. En resumen, para cualquier $x \in [0, 1]$, se tiene que $T(x) \in [0, 1]$. Además, usando este hecho repetidas veces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x \in [0, 1], \text{ implica } & T(x) \in [0, 1]. \\ T(x) \in [0, 1], \text{ implica } & T(T(x)) = T^2(x) \in [0, 1]. \\ T^2(x) \in [0, 1], \text{ implica } & T(T^2(x)) = T^3(x) \in [0, 1]. \\ & \vdots \\ T^{k-1}(x) \in [0, 1], \text{ implica } & T(T^{k-1}(x)) = T^k(x) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{N}$. En conclusión, si $x \in [0, 1]$, entonces $T^k(x) \in [0, 1]$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. \square

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función tienda. Si $x \notin [0, 1]$, de la Proposición 2.1.6-(1) y (2), se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x)$ diverge (vea la Figura 2.5-(a)). Por otro lado, si $x \in [0, 1]$, por la Proposición 2.1.6-(3), se obtiene que $T^k(x) \in [0, 1]$. Con esto, la dinámica interesante de T ocurre cuando $x \in [0, 1]$ (vea la Figura 2.3-(a) y 2.5-(b) y (c)). Por esto a partir de aquí en adelante, consideramos la función tienda con dominio y contradominio el intervalo $[0, 1]$.

Proposición 2.1.7. La función tienda, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tiene como puntos fijos 0 y $\frac{2}{3}$.

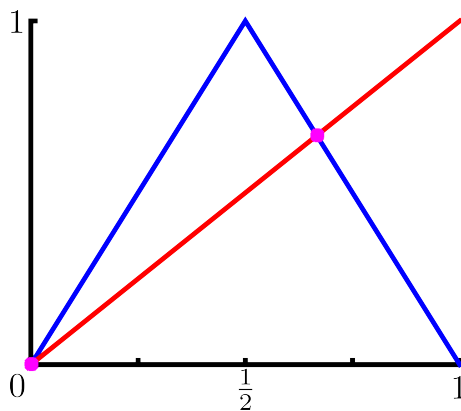


Figura 2.6: Gráficas de la función tienda T , $Id_{[0,1]}$ y los puntos fijos de T .

Demostración. Sea $x \in [0, 1]$ y supongamos que $T(x) = x$. Si $x \leq \frac{1}{2}$, entonces $2x = x$, esto implica que $x = 0$. Por otro lado, si $x \geq \frac{1}{2}$, entonces $2 - 2x = x$, esto implica que $x = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, los dos puntos fijos de T son 0 y $\frac{2}{3}$ (vea la Figura 2.6). \square

Una propiedad interesante de la función tienda es que el conjunto de sus puntos periódicos es denso en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Este resultado lo demostramos en el Teorema 2.1.11. Previo a esto demostramos tres lemas.

Lema 2.1.8. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cada $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$, se cumple:

$$\bigcup_{m=0}^{m=2^k-1} \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right] = [0, 1].$$

Demostración. Se procede por inducción matemática sobre k . Para $k = 1$, se tiene que

$$\bigcup_{m=0}^{m=1} \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right] = \left[0, \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right] = [0, 1].$$

Supongamos que se cumple para k . Veamos que se cumple para $k + 1$. En efecto:

$$\begin{aligned} & \bigcup_{m=0}^{m=2^{k+1}-1} \left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}} \right] \\ &= \left[\frac{0}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}} \right] \cup \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2}{2^{k+1}} \right] \cup \left[\frac{2}{2^{k+1}}, \frac{3}{2^{k+1}} \right] \cup \left[\frac{3}{2^{k+1}}, \frac{4}{2^{k+1}} \right] \cup \dots \cup \left[\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} \right] \\ & \cup \left[\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}} \right], \\ &= \left[\frac{0}{2^{k+1}}, \frac{2}{2^{k+1}} \right] \cup \left[\frac{2}{2^{k+1}}, \frac{4}{2^{k+1}} \right] \cup \dots \cup \left[\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}} \right], \\ &= \left[\frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k} \right] \cup \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k} \right] \cup \dots \cup \left[\frac{2^k-1}{2^k}, \frac{2^k}{2^k} \right], \\ &= \bigcup_{m=0}^{m=2^k-1} \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right], \\ &= [0, 1]. \end{aligned} \quad \square$$

Observemos que $T^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ está definida por:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ -4x + 2, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 4x - 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ -4x + 4, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

La gráfica de la función T^2 la encontramos en la Figura 2.7-(a). Por otra parte, $T^3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ está definida por (ver la Figura 2.7-(b)):

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{8}; \\ -8x + 2, & \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ 8x - 2, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{8}; \\ -8x + 4, & \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 8x - 4, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{8}; \\ -8x + 6, & \frac{5}{8} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ 8x - 6, & \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8}; \\ -8x + 8, & \frac{7}{8} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

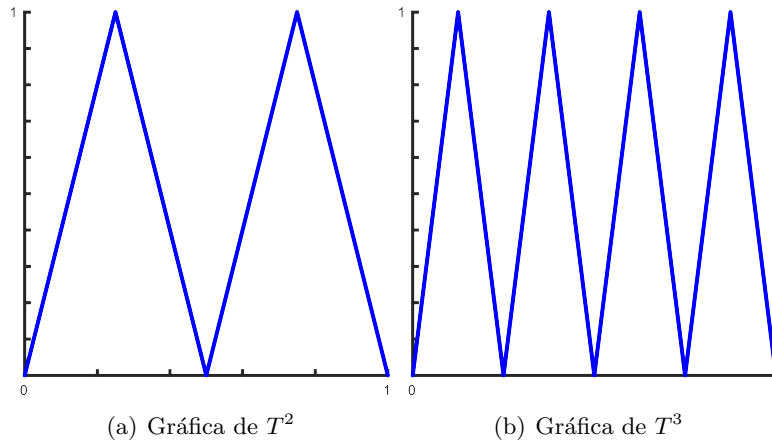


Figura 2.7: Gráfica de las funciones T^2 y T^3 .

Lema 2.1.9. Si $a, b \in [0, 1]$, donde $a < b$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ tales que $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}] \subset (a, b)$.

Demostración. Consideremos $a, b \in [0, 1]$ con $a < b$. Esto es, $0 < b - a$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k(b - a)$. Como $k \leq 2^{k-1}$, se sigue $1 < 2^{k-1}(b - a)$. Así, $\frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{2}$. Por Lema 2.1.8, existe $l \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ tal que $\frac{l}{2^k} \leq a < \frac{l+1}{2^k}$. Veamos que $\frac{l+2}{2^k} < b$. Supongamos que $\frac{l+2}{2^k} \geq b$. Luego, $\frac{l+2}{2^k} - \frac{l}{2^k} \geq b - a$, es decir, $\frac{2}{2^k} \geq b - a$. Por lo que, $\frac{1}{2^k} \geq \frac{b-a}{2}$ lo cual es una contradicción. Pongamos $m = l + 1$. Así, $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}] \subset (a, b)$. \square

Lema 2.1.10. Si $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la función tienda, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cada $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$, la función

$$T^k|_{[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]} : \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right] \rightarrow [0, 1],$$

tiene regla de correspondencia $T^k|_{\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]}(x) = \alpha + (-1)^m 2^k x$, para todo $x \in \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]$ y para algún $\alpha \in \mathbb{Z}$ y es un homeomorfismo.

Demostración. Se procede por inducción matemática sobre k . Para $k = 1$, se tiene que $m \in \{0, 1\}$. Supongamos que $m = 0$. Luego, la función $T|_{\left[0, \frac{1}{2}\right]} : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$ está definida por $T|_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}(x) = 0 + (-1)^0 2^1 x = 2x$, para todo $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Por la Proposición 1.2.30 aplicada a $\alpha = 2$ y $\beta = 0$, se sigue que $T|_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}$ es un homeomorfismo. Similarmente, supongamos que $m = 1$. Luego, la función $T|_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]} : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow [0, 1]$ está definida por $T|_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}(x) = 2 + (-1)^1 2^1 x = -2x + 2$, para todo $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. De la Proposición 1.2.31 aplicada a $\alpha = -2$ y $\beta = 2$, se sigue que $T|_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}$ es un homeomorfismo.

Ahora, supongamos que el resultado se cumple para k . Veamos que se cumple para $k + 1$. Para simplificar la notación ponemos $A_{k,m} = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]$. Sea $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{k+1} - 1\}$. Supongamos que $m \leq 2^k - 1$. Observemos que $0 \leq m \leq 2^k - 1$ si y sólo si $0 \leq \frac{m}{2^{k+1}} < \frac{m+1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}$. Así, $A_{k,m} \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Notemos que $T(A_{k+1,m}) = A_{k,m}$. Definimos la función $T|_{A_{k+1,m}} : A_{k+1,m} \rightarrow A_{k,m}$ con regla de correspondencia $T|_{A_{k+1,m}}(x) = 2x$, para todo $x \in A_{k+1,m}$. En vista de que $\frac{m}{2^k} = 2 \left(\frac{m}{2^{k+1}}\right)$ y $\frac{m+1}{2^k} = 2 \left(\frac{m+1}{2^{k+1}}\right)$, por la Proposición 1.2.30, se sigue que la función $T|_{A_{k+1,m}}$ es un homeomorfismo. Como $T^k|_{A_{k,m}}$ es un homeomorfismo, entonces por el Teorema 1.2.32, se sigue que $T^k|_{A_{k,m}} \circ T|_{A_{k+1,m}} = T^{k+1}|_{A_{k+1,m}} : A_{k+1,m} \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo, donde la regla de correspondencia de la función $T^{k+1}|_{A_{k+1,m}}$ está dada por:

$$T^{k+1}|_{A_{k+1,m}}(x) = T^k|_{A_{k,m}}(T|_{A_{k+1,m}}(x)) = \alpha + (-1)^m 2^{k+1} x,$$

para algún $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que $2^k \leq m$. Observemos que $2^k \leq m \leq 2^{k+1} - 1$ si y sólo si $\frac{1}{2} \leq \frac{m}{2^{k+1}} < \frac{m+1}{2^{k+1}} \leq 1$. Así, $A_{k+1,m} \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Notemos que $T(A_{k+1,m}) = \left[\frac{2^{k+1}-m-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-m}{2^k}\right]$. Pongamos $n = 2^{k+1} - m - 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Si } m = 2^{k+1} - 1, & \quad \text{entonces } n = 0. \\ \text{Si } m = 2^{k+1} - 2, & \quad \text{entonces } n = 1. \\ \text{Si } m = 2^{k+1} - 3, & \quad \text{entonces } n = 2. \\ & \quad \vdots \\ \text{Si } m = 2^k, & \quad \text{entonces } n = 2^k - 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, si $m \in \{2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}$, entonces $n \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$. Por lo que, $T(A_{k+1,m}) = \left[\frac{2^{k+1}-m-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-m}{2^k}\right] = A_{k,n}$. Definimos la función $T|_{A_{k+1,m}} : A_{k+1,m} \rightarrow A_{k,n}$, con regla de correspondencia $T|_{A_{k+1,m}}(x) = 2 - 2x$, para todo $x \in A_{k+1,m}$. En vista de que $\frac{n}{2^k} = 2 - 2 \left(\frac{m+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{2^{k+1}-m-1}{2^k}$ y $\frac{n+1}{2^k} = 2 - 2 \left(\frac{m}{2^{k+1}}\right) = \frac{2^{k+1}-m}{2^k}$, por la Proposición 1.2.31, se sigue que la función $T|_{A_{k+1,m}}$ es un homeomorfismo. Como $T^k|_{A_{k,n}}$ es un homeomorfismo, entonces por el Teorema 1.2.32, la función $T^k|_{A_{k,n}} \circ T|_{A_{k+1,m}} = T^{k+1}|_{A_{k+1,m}} : A_{k+1,m} \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo, donde la regla de correspondencia de la función $T^{k+1}|_{A_{k+1,m}}$ es:

$$T^{k+1}|_{A_{k+1,m}}(x) = T^k|_{A_{k,n}}(T|_{A_{k+1,m}}(x)) = \beta + (-1)^n 2^{k+1} + (-1)^{n+1} 2^{k+1} x,$$

para algún $\beta \in \mathbb{Z}$. Como $n+1 = 2^{k+1} - m$, se tiene que si $n+1$ es par, entonces m es par, o si $n+1$ es impar, entonces m es impar. Además, $\beta + (-1)^n 2^{k+1} \in \mathbb{Z}$. Consideremos $\alpha = \beta + (-1)^n 2^{k+1}$. Por lo tanto, para todo $x \in A_{k+1,m}$, $T^{k+1}|_{A_{k+1,m}}(x) = \alpha + (-1)^m 2^{k+1}x$. \square

Teorema 2.1.11. Si $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la función tienda, entonces el conjunto $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto no vacío de $[0, 1]$. Veamos que $U \cap Per(T) \neq \emptyset$. Como U es abierto no vacío, existe $a \in U$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$, para algún $\varepsilon > 0$. Luego, del Lema 2.1.9, existen $k \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ tales que $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}] \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Además, por Lema 2.1.10, $T^k([\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]) = [0, 1]$. Así, $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}] \subset T^k([\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}])$, de la Proposición 2.1.3, T^k tiene un punto fijo en $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]$. Es decir, existe $x_0 \in [\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}] \subset U$ tal que $T^k(x_0) = x_0$. Por lo tanto, $x_0 \in U \cap Per(T)$. Es decir, $U \cap Per(T) \neq \emptyset$. En conclusión, por la Proposición 1.2.12, $Per(T)$ es un conjunto denso en $[0, 1]$. \square

Sección 2.2

Funciones dinámicas, dinámica individual

En esta sección nos dedicamos al estudio de algunos sistemas dinámicos como son: transitivos, caóticos, totalmente transitivos, débilmente mezclantes y minimales. Cabe señalar que si un sistema dinámico (X, f) es alguno de estos sistemas que mencionamos, equivale a decir que la función f es la que cumple tal propiedad. Por ejemplo, si se dice que el sistema dinámico (X, f) es transitivo esto equivale a decir que la función f es transitiva. Básicamente, en la presente sección analizamos estas propiedades para la función tienda y la máquina de sumar.

Comenzamos esta sección con la noción de transitividad.

Definición 2.2.1. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . La función f es *transitiva* en X si para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Lema 2.2.2. Consideremos la función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Si $a, b \in [0, 1]$, donde $a < b$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k((a, b)) = [0, 1]$.

Demostración. Sean $a, b \in [0, 1]$ tales que $a < b$. Por Lema 2.1.9, existen $k \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ tales que $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}] \subset (a, b)$. Luego, por Lema 2.1.10, la función $T^k|_{[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]}$: $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}] \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo, lo cual implica que, $T^k([\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]) = [0, 1]$. Así, $[0, 1] = T^k([\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]) \subset T^k((a, b)) \subset [0, 1]$. Por lo tanto, $T^k((a, b)) = [0, 1]$. \square

A continuación, veamos que la función tienda es transitiva.

Teorema 2.2.3. La función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es transitiva en $[0, 1]$.

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en $[0, 1]$. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Como U es abierto no vacío, existe $a \in U$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$, para algún $\varepsilon > 0$. Luego, por Lema 2.2.2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) = [0, 1]$. Así, $T^k(U) = [0, 1]$. Por lo tanto, $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$. En conclusión, T es transitiva en $[0, 1]$. \square

Por Lema 2.2.2, se obtiene la siguiente observación, la cual es muy útil posteriormente.

Observación 2.2.4. Consideremos la función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Si $a, b \in [0, 1]$, donde $a < b$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$T^k((a, b)) = T^k([a, b]) = T^k((a, b)) = T^k([a, b]) = [0, 1].$$

En efecto, para cualesquiera $a, b \in [0, 1]$ tales que $a < b$ se tiene que el intervalo abierto (a, b) es un subconjunto de cualesquiera de los intervalos $[a, b)$, $(a, b]$ y $[a, b]$. Así, la conclusión se sigue del Lema 2.2.2.

Lo siguiente se desprende directamente de la definición de función transitiva.

Observación 2.2.5. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X .

- (1) De la Definición 2.2.1, se tiene que f es transitiva en X si y sólo si para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U$ y $f^k(x) \in V$.
- (2) Por la Proposición 1.1.6-(2), se sigue que f es transitiva en X si y sólo si para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$.

Es muy útil tener claro cuándo una función no es transitiva, en seguida se observa este hecho.

Observación 2.2.6. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Entonces, f no es transitiva en X si y sólo si existen conjuntos abiertos no vacíos U y V en X tales que, para todo $p \in \mathbb{N}$, $f^p(U) \cap V = \emptyset$.

Ahora presentamos otro tipo de función dinámica.

Definición 2.2.7. Sean X un espacio métrico, $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Se dice que f es *caótica* en X si el conjunto $Per(f)$ es un conjunto denso en X y la función f es transitiva en X .

Por la Definición 2.2.7, se tiene que si f es caótica, entonces f es transitiva. Un ejemplo de función caótica es el siguiente.

Teorema 2.2.8. La función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$.

Demostración. Notemos que del Teorema 2.2.3, T es transitiva en $[0, 1]$ y por el Teorema 2.1.11, el $Per(T)$ es un conjunto denso en $[0, 1]$. En conclusión, T es caótica. \square

Teniendo en mente a la función transitiva, se tiene la siguiente clase de funciones dinámicas.

Definición 2.2.9. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Se dice que f es *totalmente transitiva* en X si f^k es transitiva en X , para cada $k \in \mathbb{N}$.

Es claro que cualquier función totalmente transitiva, en particular, es una función transitiva. El siguiente resultado muestra que la función tienda no sólo es una función transitiva.

Teorema 2.2.10. La función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es totalmente transitiva en $[0, 1]$.

Demostración. Consideremos $k \in \mathbb{N}$, veamos que T^k es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en $[0, 1]$. Como U es abierto no vacío, existe $a \in U$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$, para algún $\varepsilon > 0$. Luego, por la Observación 2.2.4, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) = [0, 1]$. Dado que $T^k(T^m(U)) = (T^k)^m(U) \subset [0, 1]$, se obtiene que $(T^k)^m(U) = [0, 1]$. Por lo tanto, $(T^k)^m(U) \cap V \neq \emptyset$. En conclusión, T es totalmente transitiva en $[0, 1]$. \square

Por otro lado, con la siguiente observación podemos distinguir cuándo una función no es totalmente transitiva, lo cual resulta ser muy obvio.

Observación 2.2.11. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Entonces, f no es totalmente transitiva en X si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f^k no es transitiva en X .

Continuando con el estudio de funciones dinámicas presentamos una clase más, para esto recordemos la función producto (Definición 1.1.10).

Definición 2.2.12. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Se dice que f es *débilmente mezclante* en X si la función producto $f^{\times 2} : X^2 \rightarrow X^2$ es transitiva en X^2 .

Teorema 2.2.13. La función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es débilmente mezclante en $[0, 1]$.

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en $[0, 1]^2$. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(T^{\times 2})^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Sabemos que existen U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en $[0, 1]$ tales que $U = U_1 \times U_2$ y $V = V_1 \times V_2$. Luego, existen $a \in U_1$ y $b \in U_2$ tales que $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset U_1$ y $(b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2) \subset U_2$, para algunos $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$. Por la Observación 2.2.4, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $T^{k_1}((a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)) = [0, 1]$ y $T^{k_2}((b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2)) = [0, 1]$. En consecuencia, $T^{k_1}(U_1) = [0, 1]$ y $T^{k_2}(U_2) = [0, 1]$. Pongamos $k = \max\{k_1, k_2\}$. Así, $T^k(U_1) = [0, 1]$ y $T^k(U_2) = [0, 1]$. Esto implica que, $T^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $T^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. De la Proposición 1.1.12-(2), se tiene que $(T^{\times 2})^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, T es débilmente mezclante en $[0, 1]$. \square

Proposición 2.2.14. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si f es débilmente mezclante en X , entonces f es transitiva en X .

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante en X . Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X . Consideremos los subconjuntos abiertos no vacíos $U \times U$ y $V \times V$ en

X^2 . Como f es débilmente mezclante en X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f^{\times 2})^k(U \times U) \cap (V \times V) \neq \emptyset$. Luego, por Proposición 1.1.12-(2), $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva en X . \square

Otra clase de funciones dinámicas de nuestro interés es la siguiente.

Definición 2.2.15. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Se dice que f es *minimal* en X si para cualquier subconjunto cerrado no vacío A de X tal que $f(A) \subset A$, se cumple que $A = X$.

En seguida, se exhibe una equivalencia del concepto de función minimal en espacios métricos compactos, la cual es muy útil para dar ejemplos de función minimal o no minimal.

Proposición 2.2.16. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Entonces, f es minimal en X si y sólo si la órbita de cualquier $x \in X$ bajo f , $\mathcal{O}(x, f)$, es un conjunto denso en X .

Demostración. Supongamos que f es minimal en X . Sea $x \in X$. Veamos que $Cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Notemos que $Cl(\mathcal{O}(x, f))$ es un subconjunto cerrado no vacío en X . Veamos que:

$$f(Cl(\mathcal{O}(x, f))) \subset Cl(\mathcal{O}(x, f)).$$

Sea $b \in f(Cl(\mathcal{O}(x, f)))$, veremos que $b \in Cl(\mathcal{O}(x, f))$. Como $b \in f(Cl(\mathcal{O}(x, f)))$, existe $a \in Cl(\mathcal{O}(x, f))$ tal que $f(a) = b$. Ahora, consideremos un subconjunto abierto U de X tal que $b \in U$. Luego, $a \in f^{-1}(U)$. Además, dado que f es continua en X , del Teorema 1.2.23, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en X . Así, $f^{-1}(U) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Es decir, existe $y \in f^{-1}(U) \cap \mathcal{O}(x, f)$. Por lo que, $f(y) \in U$. Más aún, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = y$. En consecuencia, $f^{k+1}(x) \in U \cap \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto, $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. De donde, por el Teorema 1.2.10, $b = f(a) \in Cl(\mathcal{O}(x, f))$. Lo cual implica que, $f(Cl(\mathcal{O}(x, f))) \subset Cl(\mathcal{O}(x, f))$. En vista de que f es minimal en X , se sigue que $Cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. En conclusión, $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X .

Recíprocamente, sea A un subconjunto cerrado no vacío de X tal que $f(A) \subset A$. Veamos que $A = X$. Supongamos que $A \neq X$. Luego, $X - A$ es un subconjunto abierto no vacío de X . Como la órbita de cualquier $x \in X$ bajo f es un conjunto denso en X , en particular, por la Proposición 1.2.12, para cualquier $x \in A$, se cumple que $(X - A) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Es decir, existe $a \in (X - A) \cap \mathcal{O}(x, f)$. Así, $a \in X - A$ y $a = f^k(x)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in A$ y $f(A) \subset A$, se tiene que $f^k(x) \in f^k(A) \subset f(A) \subset A$. Por lo que, $a \in A$, lo cual es una contradicción puesto que $a \in X - A$. Esto implica que, $A = X$. En conclusión, f es minimal en X . \square

El concepto de función minimal es más general que el de función transitiva. Esto lo vemos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.17. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si f es minimal en X , entonces f es transitiva en X .

Demostración. Supongamos que f es minimal en X . Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X . Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Consideremos $x \in U$. Como f es minimal, de la Proposición 2.2.16, se tiene que $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X . Por lo que, de la Proposición 1.2.12, $\mathcal{O}(x, f) \cap V \neq \emptyset$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in V$. Así, $f^k(x) \in f^k(U) \cap V$. Esto es, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva en X . \square

Con la ayuda de la Proposición 2.2.16 es sencillo ver que la función tienda no es minimal.

Proposición 2.2.18. La función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ no es minimal en $[0, 1]$.

Demostración. Notemos que la órbita de $\frac{2}{3}$ bajo T , $\mathcal{O}(\frac{2}{3}, T) = \{\frac{2}{3}\}$, no es un conjunto denso en $[0, 1]$. Por lo tanto, de la Proposición 2.2.16, la función T no es minimal en $[0, 1]$. \square

Por otra parte, otra función que empleamos en este trabajo es la función máquina de sumar. Para definirla, recordemos el espacio métrico (Σ_2, d_{Σ_2}) , vea la Proposición 1.2.6. A continuación, definimos una operación en el espacio Σ_2 .

Definición 2.2.19. Dado el espacio métrico (Σ_2, d_{Σ_2}) , para cualesquiera $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$, $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 t_3 \dots) \in \Sigma_2$, se denota y define su suma como:

$$\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{u},$$

donde los términos de u están dados por:

$$\begin{aligned} u_0 &= s_0 + t_0 \pmod{2}; \\ u_1 &= s_1 + t_1 + r_1 \pmod{2}; \\ u_k &= s_k + t_k + r_k \pmod{2}, \text{ tales que:} \\ &\text{si } s_0 + t_0 < 2, \text{ entonces } r_1 = 0; \\ &\text{si } s_0 + t_0 = 2, \text{ entonces } r_1 = 1; \\ &\text{si } s_{k-1} + t_{k-1} + r_{k-1} < 2, \text{ entonces } r_k = 0; \\ &\text{si } s_{k-1} + t_{k-1} + r_{k-1} \geq 2, \text{ entonces } r_k = 1, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, con $k > 1$.

Puesto que $2m \pmod{2} = 0$, $(2m - 1) \pmod{2} = 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$, se sigue que $\mathbf{s} + \mathbf{t} \in \Sigma_2$.

En los siguientes ejemplos explicamos con casos particulares como se realiza la suma en Σ_2 .

Ejemplo 2.2.20. Sea $\mathbf{1} = (1000 \dots) \in \Sigma_2$. Hallamos $\mathbf{1} + \mathbf{1}$. Ponemos $\mathbf{z} = \mathbf{1} + \mathbf{1}$. Visualizamos la suma como:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \dots \\ + & 1 & 0 & 0 \dots \\ \hline z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \dots \end{array}$$

Con esto, el valor de z_i se calcula de la siguiente manera:

$z_0 = 1 + 1 \pmod{2} = 2 \pmod{2} = 0$. Como $1 + 1 = 2$, llevamos $r_1 = 1$. Luego:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & & 1 \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 0 \\
 + & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & z_1 & z_2 & z_3\dots
 \end{array}$$

$z_1 = 0 + 0 + 1 \pmod{2} = 1 \pmod{2} = 1$. Como $0 + 0 + 1 = 1$, llevamos $r_2 = 0$. Así:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & & 1 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 + & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & 1 & z_2 & z_3\dots
 \end{array}$$

$z_2 = 0 + 0 + 0 = 0 \pmod{2} = 0$. Como $0 + 0 + 0 = 0$, llevamos $r_3 = 0$. Entonces:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 0 \\
 + & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & 1 & 0 & z_3\dots
 \end{array}$$

$z_3 = 0 + 0 + 0 = 0 \pmod{2} = 0$. Como $0 + 0 + 0 = 0$, llevamos $r_4 = 0$. Esto es:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 0 \\
 + & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & 1 & 0 & 0\dots
 \end{array}$$

Por lo tanto, $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{z}$, donde $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_{i+2} = 0$, para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es decir, $\mathbf{1} + \mathbf{1} = (01000\dots)$.

Ejemplo 2.2.21. Sea $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s_k = 1$ y sea $\mathbf{t} \in \Sigma_2$ tal que $t_0 = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$ y, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t_{k+5} = 0$. Esto es, $\mathbf{s} = (11111111\dots)$ y $\mathbf{t} = (10101000\dots)$. Hallamos $\mathbf{s} + \mathbf{t}$. Ponemos $\mathbf{z} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$. Visualizamos la suma como:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7\dots \\
 + & t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_7\dots \\
 \hline
 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7\dots
 \end{array}$$

Sustituyendo los valores de s_i y t_i , se tiene:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\dots \\
 + & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7\dots
 \end{array}$$

Con esto, el valor de z_i se calcula de la siguiente manera:

$z_0 = s_0 + t_0 \pmod{2} = 1 + 1 \pmod{2} = 2 \pmod{2} = 0$. Como $s_0 + t_0 = 2$, acarreamos $r_1 = 1$. Luego:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & & & & & 1 \\
& & & & & & & & \\
& & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots \\
\hline
& & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \dots
\end{array}$$

$z_1 = s_1 + t_1 + r_1 \pmod{2} = 1+0+1 = 2 \pmod{2} = 0$. Como $s_1 + t_1 + r_1 = 1+0+1 = 2$, arrastrar $r_2 = 1$. Así:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & & & & & 1 & 1 \\
& & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\
+ & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots \\
\hline
& & & & & & & & 0 & 0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \dots
\end{array}$$

$z_2 = s_2 + t_2 + r_2 \pmod{2} = 1+1+1 = 3 \pmod{2} = 1$. Como $s_2 + t_2 + r_2 = 1+1+1 = 3$, trasladamos $r_3 = 1$. Entonces:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\
+ & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots \\
\hline
& & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \dots
\end{array}$$

$z_3 = s_3 + t_3 + r_3 \pmod{2} = 1+0+1 = 2 \pmod{2} = 0$. Como $s_3 + t_3 + r_3 = 1+0+1 = 2$, llevamos $r_4 = 1$. Esto es:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\
+ & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots \\
\hline
& & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \dots
\end{array}$$

$z_4 = s_4 + t_4 + r_4 \pmod{2} = 1+1+1 = 3 \pmod{2} = 1$. Como $s_4 + t_4 + r_4 = 1+1+1 = 3$, acarreamos $r_5 = 1$. Luego:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\
+ & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \dots \\
\hline
& & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & z_5 & z_6 & z_7 \dots
\end{array}$$

$z_5 = s_5 + t_5 + r_5 \pmod{2} = 1+0+1 = 2 \pmod{2} = 0$. Como $s_5 + t_5 + r_5 = 1+0+1 = 2$, trasladamos $r_6 = 1$. Entonces:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
& & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\
+ & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots \\
\hline
& & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & z_6 & z_7 \dots
\end{array}$$

En general, para cualquier $i \geq 6$, $z_i = s_i + t_i + r_i \pmod{2} = 1+0+1 = 2 \pmod{2} = 0$. Como $s_i + t_i + r_i = 1+0+1 = 2$, llevamos $r_{i+1} = 1$. Esto es:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\dots \\
 + & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & z_{i+1}\dots
 \end{array}$$

Por lo tanto, $\mathbf{s}+\mathbf{t} = \mathbf{z}$, donde $z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 1, z_{i+5} = 0$, para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto es, $\mathbf{s}+\mathbf{t} = (00101000\dots)$

Una propiedad interesante de la suma en Σ_2 es la siguiente.

Proposición 2.2.22. Para cualquier $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, se cumple $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$.

Demostración. Pongamos $\mathbf{s} = (s_0s_1s_2s_3s_4\dots) \in \Sigma_2$. Por el Ejemplo 2.2.20, se sabe que $\mathbf{1}+\mathbf{1} = (01000\dots)$. Consideremos los siguientes casos:

Caso (I): Supongamos que $s_0 = 0 = s_1$. Es decir, $\mathbf{s} = (00s_2s_3s_4\dots)$. Así, $\mathbf{s}+\mathbf{1}$ se visualiza como:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 & 0 & 0 & s_2 & s_3 & s_4\dots \\
 + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 1 & 0 & s_2 & s_3 & s_4\dots
 \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+\mathbf{1} = (10s_2s_3s_4\dots)$. Además, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1}$ se vislumbra como:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 & 1 & 0 & s_2 & s_3 & s_4\dots \\
 + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & 1 & s_2 & s_3 & s_4\dots
 \end{array}$$

Por lo que, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = (01s_2s_3s_4\dots)$. Por otro lado, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$ se divide como:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 & 0 & 0 & s_2 & s_3 & s_4\dots \\
 + & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & 1 & s_2 & s_3 & s_4\dots
 \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1}) = (01s_2s_3s_4\dots)$. Por lo tanto, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$.

Caso (II): Supongamos que $s_0 = 0, s_k = 0$ y $s_i = 1$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, con $k > 1$. Es decir, $\mathbf{s} = (011\dots 10s_{k+1}s_{k+2}\dots)$. Así, $\mathbf{s}+\mathbf{1}$ se visualiza como:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & s_{k+1} & s_{k+2}\dots \\
 + & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & s_{k+1} & s_{k+2}\dots
 \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+\mathbf{1} = (10s_2s_3s_4\dots)$. Además, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1}$ se vislumbra como:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0\dots \\ & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \\ + & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \end{array}$$

Por lo que, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = (01s_2s_3s_4\dots)$. Por otro lado, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$ se divide como:

$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0\dots \\ & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \\ + & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1}) = (10s_2s_3s_4\dots)$. Por lo tanto, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$.

Caso (III): Supongamos que $s_0 = 0$ y $s_i = 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Es decir, $\mathbf{s} = (01111\dots)$. Así, $\mathbf{s}+\mathbf{1}$ se visualiza como:

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\dots \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\dots \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+\mathbf{1} = (11111\dots)$. Además, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1}$ se vislumbra como:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & 1\dots \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\dots \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \end{array}$$

Por lo que, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = (00000\dots) = \mathbf{0}$. Por otro lado, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$ se divide como:

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 1 & 1\dots \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\dots \\ + & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\dots \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1}) = (00000\dots) = \mathbf{0}$. Por lo tanto, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$.

Caso (IV): Supongamos que $s_k = 0$ y $s_i = 1$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, con $k \in \mathbb{N}$. Es decir, $\mathbf{s} = (111\dots 10s_{k+1}s_{k+2}\dots)$. Así, $\mathbf{s}+\mathbf{1}$ se visualiza como:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0\dots \\ & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \\ + & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+\mathbf{1} = (000\dots 01s_{k+1}s_{k+2}\dots)$. Además, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1}$ se vislumbra como:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \\
 + & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots
 \end{array}$$

Por lo que, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = (100\dots 01s_{k+1}s_{k+2}\dots)$. Por otro lado, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$ se divide como:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0\dots \\
 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \\
 + & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots
 \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1}) = (100\dots 01s_{k+1}s_{k+2}\dots)$. Por lo tanto, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$.

Caso (V): Supongamos que $s_i = 1$, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es decir, $\mathbf{s} = (11111\dots)$. Así, $\mathbf{s}+\mathbf{1}$ se visualiza como:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1\dots \\
 & 1 & 1 & 1 & 1\dots \\
 + & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & 0\dots
 \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+\mathbf{1} = (00000\dots) = \mathbf{0}$. Además, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1}$ se vislumbra como:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
 + & 1 & 0 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0\dots
 \end{array}$$

Por lo que, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = (10000\dots) = \mathbf{1}$. Por otro lado, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$ se divide como:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 1\dots \\
 & 1 & 1 & 1 & 1\dots \\
 + & 0 & 1 & 0 & 0\dots \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0\dots
 \end{array}$$

Esto es, $\mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1}) = (10000\dots) = \mathbf{1}$. Por lo tanto, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$.

En conclusión, $(\mathbf{s}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{s}+(\mathbf{1}+\mathbf{1})$, para cada $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. □

En seguida, se define el producto de un número natural por la sucesión $\mathbf{1}$.

Definición 2.2.23. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{1} \in \Sigma_2$, se denota y define el *producto de un número natural por la sucesión $\mathbf{1}$* , $k \cdot \mathbf{1}$, como la suma de $\mathbf{1}$ consigo mismo k veces.

Ejemplo 2.2.24. Sea $\mathbf{1} \in \Sigma_2$. Se cumple lo siguiente: $1 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $2 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1}$, $3 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} = 2 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1}$ y $4 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} = 3 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1}$. En general, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $(k + 1) \cdot \mathbf{1} = k \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1}$. Más aún, notemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= (\underline{1}000\dots), \\ 2 \cdot \mathbf{1} &= (0\underline{1}00\dots), \end{aligned}$$

donde $(\underline{1}000\dots)$ denota el bloque de un solo uno de longitud 1 y $(0\underline{1}00\dots)$ denota el bloque de un solo cero de longitud 1. Los bloques de unos y ceros de longitud 1 y todas las formas de escribir el 0 y el 1 en 1 posición aparecen entre $\mathbf{1}$ y $2 \cdot \mathbf{1}$.

$$\begin{aligned} 3 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{11}000\dots), \\ 4 \cdot \mathbf{1} &= (00\underline{1}00\dots), \\ 5 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{1}0\underline{1}00\dots), \\ 6 \cdot \mathbf{1} &= (0\underline{1}100\dots), \end{aligned}$$

donde $(\underline{11}00\dots)$ denota el bloque 11 de unos de longitud 2 y $(00\underline{1}0\dots)$ denota el bloque 00 de ceros de longitud 2. Los bloques de unos y ceros de longitud 2 aparecen después de $2 \cdot \mathbf{1}$ y todas las formas de escribir el 0 y el 1 en 2 posiciones aparecen entre $2 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} = 3 \cdot \mathbf{1}$ y $6 \cdot \mathbf{1}$.

$$\begin{aligned} 7 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{111}000\dots), \\ 8 \cdot \mathbf{1} &= (000\underline{1}00\dots), \\ 9 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{1}00\underline{1}00\dots), \\ 10 \cdot \mathbf{1} &= (0\underline{1}0\underline{1}00\dots), \\ 11 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{11}0000\dots), \\ 12 \cdot \mathbf{1} &= (00\underline{11}00\dots), \\ 13 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{1}0\underline{1}100\dots), \\ 14 \cdot \mathbf{1} &= (0\underline{11}100\dots). \end{aligned}$$

Los bloques de unos y ceros de longitud 3 aparecen después de $6 \cdot \mathbf{1}$ y todas las formas de escribir el 0 y el 1 en 3 posiciones aparecen entre $6 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} = 7 \cdot \mathbf{1}$ y $14 \cdot \mathbf{1}$.

Con todo esto, se siguen las Observaciones 2.2.25 y 2.2.26.

Observación 2.2.25. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, los bloques de unos y ceros de longitud $k + 1$ aparecen después de $(2^{k+1} - 2) \cdot \mathbf{1}$ y todas las formas de escribir el 0 y el 1 en $k + 1$ posiciones aparecen entre $(2^{k+1} - 2) \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1}$ y $(2^{k+2} - 2) \cdot \mathbf{1}$.

Observación 2.2.26. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $\mathbf{u} = 2k \cdot \mathbf{1}$, entonces $u_0 = 0$, es decir, $\mathbf{u} = (0u_1u_2u_3\dots)$.

Con todo lo anterior, ya podemos definir la función máquina de sumar en Σ_2 .

Definición 2.2.27. Sea Σ_2 el espacio de sucesiones de ceros y unos. Definimos la función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ por $\tau(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \mathbf{1}$, para cada $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. A τ se le llama la *sumadora* o *máquina de sumar* en el espacio Σ_2 . Además, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $\tau^k(\mathbf{s}) = (s_0^{\tau^k} s_1^{\tau^k} s_2^{\tau^k} \dots)$. En particular, para $k = 1$, $\tau(\mathbf{s}) = (s_0^{\tau} s_1^{\tau} s_2^{\tau} \dots)$.

Notemos que dado $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, se tiene que $\tau(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \mathbf{1}$, $\tau^2(\mathbf{s}) = \tau(\mathbf{s} + \mathbf{1}) = (\mathbf{s} + \mathbf{1}) + \mathbf{1} = \mathbf{s} + (\mathbf{1} + \mathbf{1}) = \mathbf{s} + 2 \cdot \mathbf{1}$ y $\tau^3(\mathbf{s}) = \tau(\tau^2(\mathbf{s})) = \tau(\mathbf{s} + 2 \cdot \mathbf{1}) = (\mathbf{s} + 2 \cdot \mathbf{1}) + \mathbf{1} = \mathbf{s} + (2 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1}) = \mathbf{s} + 3 \cdot \mathbf{1}$. En general, se puede probar utilizando inducción matemática que: para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $\tau^k(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + k \cdot \mathbf{1}$.

Observemos que, si $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\tau^k(\mathbf{0}) = \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{1} = k \cdot \mathbf{1}$. Esto nos lleva a la siguiente observación.

Observación 2.2.28. La órbita $\mathbf{0}$ bajo τ es:

$$\mathcal{O}(\mathbf{0}, \tau) = \{k \cdot \mathbf{1} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Más adelante demostraremos una propiedad importante de $\mathcal{O}(\mathbf{0}, \tau)$. Por ahora, veamos algunos hechos de la máquina de sumar.

La siguiente proposición, Proposición 2.2.29, nos dice que si dos sucesiones $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ coinciden en las primeras $k+1$ entradas, entonces las imágenes $\tau(\mathbf{s})$ y $\tau(\mathbf{t})$ también coinciden en las primeras $k+1$ entradas.

Proposición 2.2.29. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . Sean $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $s_i = t_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$, entonces $s_i^{\tau} = t_i^{\tau}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Demostración. Sean $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Consideremos los siguientes casos.

Caso (I): Supongamos que $s_i = t_i$, para todo $0 \leq i \leq k$. Por definición de τ , $\tau(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \mathbf{1}$ y $\tau(\mathbf{t}) = \mathbf{t} + \mathbf{1}$. Supongamos que $s_0 = t_0 = 0$. Luego, $\mathbf{s} + \mathbf{1}$ se obtiene como sigue:

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & s_1 & s_2 & \dots & s_k & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \\ + & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots \\ \hline & 1 & s_1 & s_2 & \dots & s_k & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \end{array}$$

Es decir, $s_0^{\tau} = 1$ y $s_i^{\tau} = s_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $\mathbf{s} + \mathbf{1}$ es:

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & t_1 & t_2 & \dots & t_k & t_{k+1} & t_{k+2} \dots \\ + & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots \\ \hline & 1 & t_1 & t_2 & \dots & t_k & t_{k+1} & t_{k+2} \dots \end{array}$$

Es decir, $t_0^{\tau} = 1$ y $t_i^{\tau} = t_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $s_i^{\tau} = t_i^{\tau}$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Caso (II): Supongamos que para algún $m \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$, $s_m = t_m = 0$ y $s_i = t_i = 1$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Luego, $\mathbf{s}+\mathbf{1}$ es:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & s_{m+1} & \dots & s_k & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \\
 + & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots \\
 \hline
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{m+1} & \dots & s_k & s_{k+1} & s_{k+2} \dots
 \end{array}$$

Es decir, $s_m^\tau = 0$, $s_i^\tau = 1$ y $s_{j+m}^\tau = s_{j+m}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ y para todo $j \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $\mathbf{t}+\mathbf{1}$ es:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & t_{m+1} & \dots & t_k & t_{k+1} & t_{k+2} \dots \\
 + & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots \\
 \hline
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t_{m+1} & \dots & t_k & t_{k+1} & t_{k+2} \dots
 \end{array}$$

Es decir, $t_m^\tau = 0$, $t_i^\tau = 1$ y $t_{j+m}^\tau = t_{j+m}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ y para todo $j \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $s_i^\tau = t_i^\tau$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Caso (III): Supongamos que $s_i = t_i = 1$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Luego, $\mathbf{s}+\mathbf{1}$ es:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & s_{k+1} & s_{k+2} \dots \\
 + & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{k+1}^\tau & s_{k+2}^\tau \dots
 \end{array}$$

Es decir, $s_i^\tau = 0$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Por otro lado, $\mathbf{t}+\mathbf{1}$ es:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & t_{k+1} & t_{k+2} \dots \\
 + & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t_{k+1}^\tau & t_{k+2}^\tau \dots
 \end{array}$$

Es decir, $t_i^\tau = 0$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. En consecuencia, $s_i^\tau = t_i^\tau$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. \square

El resultado siguiente nos dice que si dos sucesiones $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ coinciden en las primeras $k+1$ entradas, entonces las iteradas $\tau^m(\mathbf{s})$ y $\tau^m(\mathbf{t})$ también coinciden en las primeras $k+1$ entradas.

Proposición 2.2.30. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . Sean $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $m \in \mathbb{N}$. Si $s_i = t_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$, entonces $s_i^{\tau^m} = t_i^{\tau^m}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Demostración. Se procede por inducción matemática sobre m . Consideremos $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Notemos que para $m = 1$, el resultado se sigue de la Proposición 2.2.29. Supongamos que el resultado se cumple para m . Veamos que se cumple para $m + 1$. Supongamos que $s_i = t_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Por hipótesis de inducción, $s_i^{\tau^m} = t_i^{\tau^m}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Notemos $\tau^{m+1}(\mathbf{s}) = \tau(\tau^m(\mathbf{s}))$ y $\tau^{m+1}(\mathbf{t}) = \tau(\tau^m(\mathbf{t}))$. Por lo tanto, de la Proposición 2.2.29, $s_i^{\tau^{m+1}} = t_i^{\tau^{m+1}}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. \square

La Proposición 2.2.31 nos caracteriza cuándo la distancia entre dos sucesión de Σ_2 es menor o igual que $\frac{1}{2^k}$, para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Proposición 2.2.31. Sea Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos. Sean $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, $s_i = t_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$, si y sólo si $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^k}$.

Demostración. Sean $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que $s_i = t_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Luego, $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}$. Por lo tanto, $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^k}$.

Por otro lado, supongamos $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^k}$. Es decir, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \frac{1}{2^k}$. Dado que $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq$

$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}$, se tiene $\sum_{i=0}^k \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = 0$. Esto es, $\sum_{i=0}^k |s_i - t_i| = 0$. Por lo tanto, $s_i = t_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. \square

El resultado que mostramos en seguida nos dice que si la distancia entre dos sucesiones $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ es menor o igual que $\frac{1}{2^k}$, entonces lo mismo ocurre con sus iteradas $\tau^m(\mathbf{s})$ y $\tau^m(\mathbf{t})$.

Proposición 2.2.32. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . Sean $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $m \in \mathbb{N}$. Si $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^k}$, entonces $d_{\Sigma_2}(\tau^m(\mathbf{s}), \tau^m(\mathbf{t})) \leq \frac{1}{2^k}$.

Demostración. Pongamos $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$. Supongamos que $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^k}$. Luego, por la Proposición 2.2.31, $s_i = t_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Así, por la Proposición 2.2.30, $s_i^{\tau^m} = t_i^{\tau^m}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Por lo tanto, de la Proposición 2.2.31, concluimos que $d_{\Sigma_2}(\tau^m(\mathbf{s}), \tau^m(\mathbf{t})) \leq \frac{1}{2^k}$. \square

La siguiente proposición nos garantiza la continuidad de la función máquina de sumar.

Proposición 2.2.33. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . La función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es continua en Σ_2 .

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$. Veamos que τ es continua en \mathbf{s} . En efecto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k\varepsilon$, es decir, $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Luego, $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Sea $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$ tal que $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. En consecuencia, por la Proposición 2.2.31, $s_i = t_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Por lo que, de la Proposición 2.2.29, $s_i^{\tau} = t_i^{\tau}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Así, de la Proposición 2.2.31, $d_{\Sigma_2}(\tau(\mathbf{s}), \tau(\mathbf{t})) \leq \frac{1}{2^k}$. Esto es, $d_{\Sigma_2}(\tau(\mathbf{s}), \tau(\mathbf{t})) < \varepsilon$. Por lo tanto, τ es continua en \mathbf{s} . En conclusión, τ es una función continua en Σ_2 . \square

La Proposición 2.2.34 nos dice que el elemento $\mathbf{0} \in \Sigma_2$ cumple una propiedad importante, su órbita bajo la función τ es densa.

Proposición 2.2.34. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . Entonces, la órbita de $\mathbf{0} \in \Sigma_2$ bajo τ , $\mathcal{O}(\mathbf{0}, \tau)$, es un conjunto denso en el espacio Σ_2 .

Demostración. Sea U un subconjunto abierto no vacío en Σ_2 . En vista de la Proposición 1.2.12, veamos que $U \cap \mathcal{O}(\mathbf{0}, \tau) \neq \emptyset$. En efecto, existen $\varepsilon > 0$ y $\mathbf{s} \in U$ tales que $B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{s}, \varepsilon) \subset U$. Como $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k\varepsilon$, es decir, $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Así, por la Observación 2.2.25, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{t} = l \cdot \mathbf{1}$ está entre $(2^{k+1} - 2) \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1}$ y $(2^{k+2} - 2) \cdot \mathbf{1}$ y $t_i = s_i$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Notemos que de la Observación 2.2.28, $\mathbf{t} \in \mathcal{O}(\mathbf{0}, \tau)$. Más aún, de la Proposición 2.2.31, tenemos que $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}$. Por lo que, $d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \varepsilon$. En consecuencia, $\mathbf{t} \in B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{s}, \varepsilon) \cap \mathcal{O}(\mathbf{0}, \tau)$. Por lo tanto, $U \cap \mathcal{O}(\mathbf{0}, \tau) \neq \emptyset$. En conclusión, por la Proposición 1.2.12, la órbita de $\mathbf{0}$ es denso en Σ_2 . \square

El teorema 2.2.35, nos dice que en general, la órbita de cualquier sucesión $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ bajo τ es un conjunto denso.

Teorema 2.2.35. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . Entonces, la órbita de cualquier $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ bajo τ , $\mathcal{O}(\mathbf{s}, \tau)$, es un conjunto denso en Σ_2 .

Demostración. Sean U un subconjunto abierto no vacío en Σ_2 y $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. En vista de la Proposición 1.2.12, veamos que $U \cap \mathcal{O}(\mathbf{s}, \tau) \neq \emptyset$. En efecto, existen $\varepsilon > 0$ y $\mathbf{t} \in U$ tales que $B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{t}, \varepsilon) \subset U$. Probemos que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d_{\Sigma_2}(\tau^k(\mathbf{s}), \mathbf{t}) < \varepsilon$. Como la órbita $\mathbf{0}$ forma un conjunto denso en Σ_2 , existen $m, l \in \mathbb{N}$ tales que $\tau^m(\mathbf{0}) \in B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{s}, \frac{\varepsilon}{2})$ y $\tau^l(\mathbf{0}) \in B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{t}, \frac{\varepsilon}{2})$. Es decir, $d_{\Sigma_2}(\tau^m(\mathbf{0}), \mathbf{s}) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d_{\Sigma_2}(\tau^l(\mathbf{0}), \mathbf{t}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Supongamos que $m < l$. Por la Proposición 2.2.32, se tiene que $d_{\Sigma_2}(\tau^{m+(l-m)}(\mathbf{0}), \tau^{l-m}(\mathbf{s})) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $k = l - m$. Luego, $d_{\Sigma_2}(\tau^k(\mathbf{s}), \mathbf{t}) \leq d_{\Sigma_2}(\tau^k(\mathbf{s}), \tau^{m+k}(\mathbf{0})) + d_{\Sigma_2}(\tau^{m+k}(\mathbf{0}), \mathbf{t}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. En consecuencia, $\tau^k(\mathbf{s}) \in B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{t}, \varepsilon) \subset U$. Por lo tanto, $U \cap \mathcal{O}(\mathbf{s}, \tau) \neq \emptyset$. En conclusión, por la Proposición 1.2.12, la órbita de \mathbf{s} bajo τ es un conjunto denso en Σ_2 . \square

Como consecuencia del Teorema 2.2.35 y en vista de las Proposiciones 2.2.16 y 2.2.17, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.36. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . La función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ cumple las siguientes propiedades.

- (1) τ es minimal en Σ_2 .

(2) El conjunto $Per(\tau) = \emptyset$.

(3) τ es transitiva en Σ_2 .

(4) τ no es caótica en Σ_2 .

Por otro lado, la función máquina de sumar τ en el espacio Σ_2 no es totalmente transitiva.

Proposición 2.2.37. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . La función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ no es totalmente transitiva en Σ_2 .

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por las Observaciones 2.2.6 y 2.2.11, vemos que existen U y V subconjuntos abiertos no vacíos en Σ_2 tales que para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple $(\tau^{2k})^m(U) \cap V = \emptyset$. En efecto, dado $\mathbf{u} \in B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{1}, 1)$, se sigue que $d_{\Sigma_2}(\mathbf{u}, \mathbf{1}) \leq \frac{1}{2} < 1$. Luego, por la Proposición 2.2.31, $u_0 = 1$ y $u_1 = 0$. Notemos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $(\tau^{2k})^m(\mathbf{u}) = \tau^{2km}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + 2km \cdot \mathbf{1}$. Considerando $\mathbf{s} = 2mk \cdot \mathbf{1}$, por la Observación 2.2.26 $s_0 = 0$. Por lo que, $u_0^{\tau^{2km}} = 1$. Así,

$$d_{\Sigma_2}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \frac{|1 - 0|}{2^0} + \frac{|u_1^{\tau^{2km}} - 0|}{2^1} + \frac{|u_2^{\tau^{2km}} - 0|}{2^2} + \frac{|u_3^{\tau^{2km}} - 0|}{2^3} + \frac{|u_4^{\tau^{2km}} - 0|}{2^4} + \dots = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i^{\tau^{2km}}}{2^i} \geq 1.$$

Luego, $\mathbf{u} \in B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{1}, 1)$ y $(\tau^{2k})^m(\mathbf{u}) \notin B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{0}, 1)$. Es decir, $(\tau^{2k})^m(\mathbf{u}) \in (\tau^{2k})^m(B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{1}, 1))$ y $(\tau^{2k})^m(\mathbf{u}) \notin B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{0}, 1)$. Por lo tanto, $(\tau^{2k})^m(B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{1}, 1)) \cap B_{d_{\Sigma_2}}(\mathbf{0}, 1) = \emptyset$. Esto es, de la Observación 2.2.6, obtenemos que τ^{2k} no es transitiva en Σ_2 . En conclusión, por la Observación 2.2.11, τ no es totalmente transitiva en Σ_2 . \square

Hasta el momento hemos analizado la dinámica individual de las funciones T y τ . En el Capítulo 3, veremos el comportamiento dinámico de una función más.

Sección 2.3

Funciones dinámicas inducidas, dinámica colectiva

En esta sección analizamos algunos hechos de dinámica colectiva. Específicamente, continuando con el análisis de la función tienda T , presentamos la demostración de que el conjunto de puntos periódicos de la función inducida 2^T es denso. Además, se prueba que la función 2^T es transitiva. De donde, concluimos que 2^T es caótica. Más aún, vemos que la función inducida 2^T no es minimal.

Notemos que $2^{[0,1]} = \{A \subset [0, 1] : A \neq \emptyset, A \text{ es compacto}\}$. Dado que la función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua en $[0, 1]$, de la Proposición 1.3.24, se cumple que $(2^T)^k(A) = T^k(A)$, para cada $A \in 2^{[0,1]}$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$, y por la Proposición 1.3.23, la función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es continua en $2^{[0,1]}$. Como nuestro propósito es ver que 2^T es caótica en $2^{[0,1]}$, primero, veamos que $Per(2^T)$ es un conjunto denso en $2^{[0,1]}$.

Teorema 2.3.1. Si $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la función tienda, entonces el conjunto $Per(2^T)$ es un conjunto denso en $2^{[0,1]}$.

Demostración. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto no vacío en $2^{[0,1]}$. Veamos que $Per(2^T) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. En efecto, puesto que \mathcal{U} es un abierto no vacío en $2^{[0,1]}$, existen $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^{[0,1]}$ tales que $B_H(A, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Como A es un subconjunto compacto no vacío de $[0, 1]$, del Teorema 1.2.17, A es totalmente acotado, es decir, existen $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^k B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$. En vista del Teorema 2.1.11, se tiene que $Per(T)$ es un conjunto denso en $[0, 1]$. Esto es, $Per(T) \cap B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Así, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, existe $b_i \in Per(T)$ tal que $|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Veamos que $A \subset N(\varepsilon, B)$. Consideremos $x \in A \subset \bigcup_{i=1}^k B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Luego, existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $x \in B_{d_{\mathbb{R}}}(a_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Esto es, $|x - a_j| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $|x - b_j| \leq |x - a_j| + |a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo que, $x \in B_{d_{\mathbb{R}}}(b_j, \varepsilon)$. En consecuencia, $x \in \bigcup_{i=1}^k B_{d_{\mathbb{R}}}(b_i, \varepsilon)$. Por lo tanto, $A \subset \bigcup_{i=1}^k B_{d_{\mathbb{R}}}(b_i, \varepsilon)$. Así, por la Proposición 1.3.14-(2), $A \subset N(\varepsilon, B)$. Ahora, veamos que $B \subset N(\varepsilon, A)$. Consideremos $b_j \in B$, para algún $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Luego, $b_j \in B_{d_{\mathbb{R}}}(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(a_j, \varepsilon)$. Por la Proposición 1.3.14-(2), $b_j \in N(\varepsilon, A)$. Así, $B \subset N(\varepsilon, A)$. En consecuencia, por la Proposición 1.3.16, $H(A, B) < \varepsilon$. Por lo tanto, $B \in B_H(A, \varepsilon)$. Luego, $B \in \mathcal{U}$. Ahora, sólo resta ver que $B \in Per(2^T)$. Dado que $b_i \in Per(T)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, entonces, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $T^{m_i}(b_i) = b_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Sea m el mínimo común múltiplo de m_1, m_2, \dots, m_k . Luego, por la Proposición 2.1.5, $T^m(b_i) = b_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Por lo que, $(2^T)^m(B) = T^m(B) = B$. En consecuencia, $B \in Per(2^T)$. Por lo tanto, $Per(2^T) \cap B_H(A, \varepsilon) \neq \emptyset$. De donde, $Per(2^T) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. En conclusión, de la Proposición 1.2.12, $Per(2^T)$ es un conjunto denso en $2^{[0,1]}$. \square

Para ver que la función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es transitiva en $2^{[0,1]}$ se requiere de los siguientes dos lemas, Lema 2.3.2 y Lema 2.3.3.

Lema 2.3.2. Sean $\varepsilon > 0$ y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_1}\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_{m_2}\} \subset [0, 1]$, donde $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m_1 > m_2$. Entonces existen $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{m_1}\} \subset [0, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$H(A, C) < \varepsilon \text{ y } H(B, (2^T)^k(C)) < \varepsilon.$$

Demostración. Sean $U_i = [0, 1] \cap (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$ y $V_j = [0, 1] \cap (b_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon)$, donde $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Notemos que U_i es un intervalo en $[0, 1]$. Luego, por Observación 2.2.4, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $T^{k_i}(U_i) = [0, 1]$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Denotemos por $k = \max\{k_i : i \in \{1, 2, \dots, m_1\}\}$. Como $T^{k_i}(U_i) \subset T^k(U_i)$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, obtenemos que $T^k(U_i) = [0, 1]$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Así, para cualquier $y_i \in V_i \subset [0, 1]$, existe $c_i \in U_i$ tal que $T^k(c_i) = y_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_2 - 1\}$. Además, para cualquier $y_j \in V_{m_2} \subset [0, 1]$, existe $c_j \in U_j$ tal que $T^k(c_j) = y_j$, para cada $j \in \{m_2, m_2 + 1, \dots, m_1\}$. Pongamos $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{m_1}\}$. Notemos que $(2^T)^k(C) = \{T^k(c_1), T^k(c_2), \dots, T^k(c_{m_1})\}$. Veamos que $H(A, C) < \varepsilon$. En vista de que $U_i \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \varepsilon)$ y $c_i \in U_i$, se sigue que $d_{\mathbb{R}}(a_i, c_i) < \varepsilon$. Así, $a_i \in B_{d_{\mathbb{R}}}(c_i, \varepsilon)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Luego, por la Proposición 1.3.14-(2), se tiene

que $a_i \in N(\varepsilon, C)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Por lo que, $A \subset N(\varepsilon, C)$. Por otro lado, como $c_i \in U_i$ y $U_i \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \varepsilon)$, se sigue que $c_i \in B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \varepsilon)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Luego, por la Proposición 1.3.14-(2), se tiene que $c_i \in N(\varepsilon, A)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Por lo que, $C \subset N(\varepsilon, A)$. En consecuencia, $A \subset N(\varepsilon, C)$ y $C \subset N(\varepsilon, A)$. Así, de la Proposición 1.3.16, se tiene que $H(A, C) < \varepsilon$.

Ahora, resta ver que $H\left(B, (2^T)^k(C)\right) < \varepsilon$. En vista de que $V_j \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(b_j, \varepsilon)$ y $T^k(c_j) \in V_j$, se sigue que $d_{\mathbb{R}}(b_j, T^k(c_j)) < \varepsilon$. Así, $b_j \in B_{d_{\mathbb{R}}}(T^k(c_j), \varepsilon)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Luego, por la Proposición 1.3.14-(2), se tiene que $b_j \in N\left(\varepsilon, (2^T)^k(C)\right)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Por lo que, $B \subset N\left(\varepsilon, (2^T)^k(C)\right)$. Por otra parte, como $T^k(c_j) \in V_j$ y $V_j \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(b_j, \varepsilon)$, se sigue que $T^k(c_j) \in B_{d_{\mathbb{R}}}(b_j, \varepsilon)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_2 - 1\}$. Luego, por la Proposición 1.3.14-(2), $T^k(c_j) \in N(\varepsilon, B)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_2 - 1\}$. Además, dado que $T^k(c_j) \in V_{m_2}$ y $V_{m_2} \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(b_{m_2}, \varepsilon)$, se sigue que $T^k(c_j) \in B_{d_{\mathbb{R}}}(b_{m_2}, \varepsilon)$, para cada $j \in \{m_2, m_2 + 1, \dots, m_1\}$. Así, por la Proposición 1.3.14-(2), $T^k(c_j) \in N(\varepsilon, B)$, para cada $j \in \{m_2, m_2 + 1, \dots, m_1\}$. Luego, $T^k(c_j) \in N(\varepsilon, B)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Por lo que, $(2^T)^k(C) \subset N(\varepsilon, B)$. En consecuencia, $B \subset N\left(\varepsilon, (2^T)^k(C)\right)$ y $(2^T)^k(C) \subset N(\varepsilon, B)$. Por la Proposición 1.3.16, se concluye que $H\left(B, (2^T)^k(C)\right) < \varepsilon$. \square

De manera muy similar al Lema 2.3.2 se obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.3.3. Sean $\varepsilon > 0$ y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_1}\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{m_2}\} \subset [0, 1]$, donde $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m_1 \leq m_2$. Entonces existen $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{m_2}\} \subset [0, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$H(A, C) < \varepsilon \text{ y } H\left(B, (2^T)^k(C)\right) < \varepsilon.$$

Demostración. Sean $U_i = [0, 1] \cap (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$ y $V_j = [0, 1] \cap (b_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon)$, donde $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Notemos que U_i es un intervalo en $[0, 1]$. Luego, por la Observación 2.2.4, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $T^{k_i}(U_i) = [0, 1]$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Denotemos por $k = \max\{k_i : i \in \{1, 2, \dots, m_1\}\}$. Como $[0, 1] = T^{k_i}(U_i) \subset T^k(U_i) \subset [0, 1]$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, entonces $T^k(U_i) = [0, 1]$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Así, para cualquier $y_i \in V_i \subset [0, 1]$, existe $c_i \in U_i$ tal que $T^k(c_i) = y_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1 - 1\}$. Además, para cualquier $y_j \in V_{m_1} \subset [0, 1]$, existe $c_j \in U_j$ tal que $T^k(c_j) = y_j$, para cada $j \in \{m_1, m_1 + 1, \dots, m_2\}$. Pongamos $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{m_2}\}$. Notemos que $(2^T)^k(C) = \{T^k(c_1), T^k(c_2), \dots, T^k(c_{m_2})\}$. Veamos que $H(A, C) < \varepsilon$. En vista de que $U_i \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \varepsilon)$ y $c_i \in U_i$, se sigue que $d_{\mathbb{R}}(a_i, c_i) < \varepsilon$. Así, $a_i \in B_{d_{\mathbb{R}}}(c_i, \varepsilon)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Luego, por la Proposición 1.3.14-(2), $a_i \in N(\varepsilon, C)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$. Por lo que, $A \subset N(\varepsilon, C)$. Por otro lado, como $c_i \in U_i$ y $U_i \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \varepsilon)$, se sigue que $c_i \in B_{d_{\mathbb{R}}}(a_i, \varepsilon)$, $i \in \{1, 2, \dots, m_1 - 1\}$. Además, dado que $c_i \in U_{m_1}$ y $U_{m_1} \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(a_{m_1}, \varepsilon)$, se tiene que $c_i \in B_{d_{\mathbb{R}}}(a_{m_1}, \varepsilon)$, para cada $i \in \{m_1, m_1 + 1, \dots, m_2\}$. Luego, por la Proposición 1.3.14-(2), $c_i \in N(\varepsilon, A)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Así, $C \subset N(\varepsilon, A)$. En consecuencia, $A \subset N(\varepsilon, C)$ y $C \subset N(\varepsilon, A)$. Por la Proposición 1.3.16, obtenemos que $H(A, C) < \varepsilon$. Ahora, resta ver que $H\left(B, (2^T)^k(C)\right) < \varepsilon$. En vista de que $V_j \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(b_j, \varepsilon)$ y $T^k(c_j) \in V_j$, se sigue que $d_{\mathbb{R}}(b_j, T^k(c_j)) < \varepsilon$. Así, $b_j \in B_{d_{\mathbb{R}}}(c_j, \varepsilon)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Luego,

por la Proposición 1.3.14-(2), $b_j \in N\left(\varepsilon, (2^T)^k(C)\right)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Por lo que, $B \subset N\left(\varepsilon, (2^T)^k(C)\right)$. Por otro lado, como $V_j \subset B_{d_{\mathbb{R}}}(b_j, \varepsilon)$ y $T^k(c_j) \in V_j$, se tiene que $T^k(c_j) \in B_{d_{\mathbb{R}}}(b_j, \varepsilon)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Luego, por la Proposición 1.3.14-(2), se tiene que $T^k(c_j) \in N(\varepsilon, B)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_2\}$. Por lo que, $(2^T)^k(C) \subset N(\varepsilon, B)$. En consecuencia, $B \subset N\left(\varepsilon, (2^T)^k(C)\right)$ y $(2^T)^k(C) \subset N(\varepsilon, B)$. De la Proposición 1.3.16, $H\left(B, (2^T)^k(C)\right) < \varepsilon$. \square

Una vez probado los Lemas 2.3.2 y 2.3.3, estamos preparados para ver el Teorema 2.3.4, el cual nos dice que la función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es transitiva en $2^{[0,1]}$.

Teorema 2.3.4. Si $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la función tienda, entonces la función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es transitiva en $2^{[0,1]}$.

Demostración. Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} subconjuntos abiertos no vacíos en $2^{[0,1]}$. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(2^T)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Consideremos $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$. Luego, existen $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $B_H(U, \varepsilon_1) \subset \mathcal{U}$ y $B_H(V, \varepsilon_2) \subset \mathcal{V}$. Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Luego, $B_H(U, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ y $B_H(V, \varepsilon) \subset \mathcal{V}$. Como U y V son compactos, se sigue del Teorema 1.2.17 que U y V son totalmente acotados, es decir, para $\frac{\varepsilon}{2}$ existen $a_1, a_2, \dots, a_{m_1} \in U$ y $b_1, b_2, \dots, b_{m_2} \in V$ tales que $U \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} B_{d_{\mathbb{R}}}\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y $V \subset \bigcup_{i=1}^{m_2} B_{d_{\mathbb{R}}}\left(b_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Consideremos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_1}\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{m_2}\}$. De los Lemas 2.3.2 y 2.3.3, existen $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \subset [0, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $H(A, C) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H\left(B, (2^T)^k(C)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $m = \max\{m_1, m_2\}$. Veamos que, $H(U, C) < \varepsilon$. En efecto, como $U \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} B_{d_{\mathbb{R}}}\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, por la Proposición 1.3.14-(2), $U \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A\right)$. Dado que $A \subset U$, se sigue que $A \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, U\right)$. Luego, por la Proposición 1.3.16, $H(U, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia, $H(U, C) \leq H(U, A) + H(A, C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $H(U, C) < \varepsilon$. Similarmente, veamos que $H\left(V, (2^T)^k(C)\right) < \varepsilon$. En efecto, como $V \subset \bigcup_{i=1}^{m_2} B_{d_{\mathbb{R}}}\left(b_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, de la Proposición 1.3.14-(2), $V \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, B\right)$. Dado que $B \subset V$, se sigue que $B \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, V\right)$. Luego, por la Proposición 1.3.16, $H(V, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia, $H\left(V, (2^T)^k(C)\right) \leq H(V, B) + H\left(B, (2^T)^k(C)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $H\left(V, (2^T)^k(C)\right) < \varepsilon$. Por lo que, $C \in B_H(U, \varepsilon)$ y $(2^T)^k(C) \in B_H(V, \varepsilon)$. Así, $C \in \mathcal{U}$ y $(2^T)^k(C) \in \mathcal{V}$. Lo cual implica que $(2^T)^k(C) \in (2^T)^k(\mathcal{U})$ y $(2^T)^k(C) \in \mathcal{V}$. Esto es, $(2^T)^k(C) \in (2^T)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$. Por lo tanto, $(2^T)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. En conclusión, 2^T es transitiva en $2^{[0,1]}$. \square

En el Capítulo 3 veremos que la función inducida al hiperespacio $C([0, 1])$, $C(T)$, no es transitiva.

Corolario 2.3.5. Si $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la función tienda, entonces la función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es caótica en $2^{[0,1]}$.

Demostración. La conclusión se obtiene utilizando los Teoremas 2.3.1 y 2.3.4. \square

Para finalizar esta sección, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.3.6. Si $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la función tienda, entonces la función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ no es minimal en $2^{[0,1]}$.

Demostración. Notemos $\mathcal{O}(\{\frac{2}{3}\}, 2^T) = \{\{\frac{2}{3}\}\}$ no es un conjunto denso en $2^{[0,1]}$. Por lo tanto, de la Proposición 2.2.16, se tiene que 2^T no es minimal en $2^{[0,1]}$. \square

En el Capítulo 3 analizaremos más propiedades de la función 2^T y estudiamos la dinámica colectiva de la función máquina de sumar τ . Más aún, veremos la dinámica colectiva de una cierta función g .

Capítulo 3

Los resultados principales

En este capítulo exponemos los resultados principales del trabajo de tesis. En la Sección 3.1 exponemos algunos resultados típicos de la dinámica topológica, principalmente exponemos de manera accesible la demostración del famoso Teorema de Furstenberg. Por otro lado, en la Sección 3.2 atendemos uno de los objetivos principales del presente trabajo. A saber, nos enfocamos a resolver el siguiente problema: descubrir todas las posibles implicaciones entre las afirmaciones siguientes:

- (1) f es transitiva;
- (2) 2^f es transitiva;
- (3) $C(f)$ es transitiva;

Finalmente, en la Sección 3.3 se exhiben algunas consecuencias obtenidas a partir de la resolución del problema planteado en la Sección 3.2.

Sección 3.1

Resultados preliminares

En esta sección se introduce la noción de funciones conjugadas o también conocida como conjugación topológica, la cual ayuda a transferir propiedades de una función a otra. En particular, demostramos que ciertas funciones son transitivas a partir de otras.

Por otra parte, exponemos de manera accesible la demostración de un teorema clásico, y muy útil en el área de la dinámica topológica, denominado Teorema de Furstenberg. Más aún, como aplicación de este teorema demostramos, en primer lugar, que toda función débilmente mezclante es totalmente transitiva. En segundo lugar, detallamos la demostración de una equivalencia de función débilmente mezclante con respecto a sus inducidas. Por último, se muestra un diagrama

que representa las relaciones que existen entre las diversas funciones dinámicas que se estudian en este trabajo.

Comenzamos con la noción de funciones conjugadas.

Definición 3.1.1. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ funciones continuas en X y Y , respectivamente. Decimos que f y g son *conjugadas* si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que $h(f(x)) = g(h(x))$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Diagrama 1: $h \circ f = g \circ h$.

En seguida, se muestran algunas propiedades de las funciones conjugadas.

Proposición 3.1.2. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ funciones continuas en X y Y respectivamente. Si f y g son conjugadas, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$, se tiene que $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$, donde $h : X \rightarrow Y$ es el homeomorfismo de conjugación entre f y g .

Demostración. Usamos inducción matemática sobre k . Notemos que para $k = 1$ el resultado se tiene por hipótesis. Supongamos que se cumple para k . Veamos que se cumple para $k + 1$. Notemos que, $h(f^{k+1}(x)) = h(f^k(f(x))) = g^k(h(f(x))) = g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x))$. Por lo tanto, $h(f^{k+1}(x)) = g^{k+1}(h(x))$. \square

Proposición 3.1.3. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ funciones continuas en X y Y , respectivamente. Si f y g son conjugadas, entonces f es transitiva en X si y sólo si g es transitiva en Y .

Demostración. Supongamos que f es transitiva. Probemos que g es transitiva. Consideremos U y V subconjuntos abiertos no vacíos de Y . Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Como f y g son conjugadas, existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que para cualquier $x \in X$, $h(f(x)) = g(h(x))$. Dado que h es continua en X , entonces por el Teorema 1.2.23, $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos no vacíos en X . En vista de que f es transitiva en X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$. Luego, de la Observación 2.2.5-(1), existe $x \in h^{-1}(U)$, con $f^k(x) \in h^{-1}(V)$. De donde, $h(x) \in U$ y $h(f^k(x)) \in V$. Se sigue de la Proposición 3.1.2, $h(x) \in U$ y $g^k(h(x)) \in V$. Así, $g^k(h(x)) \in g^k(U)$ y $g^k(h(x)) \in V$. Así, $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, g es transitiva en Y . La demostración del recíproco es análogo, sólo se intercambian las funciones f y g . \square

En los siguiente dos ejemplos se muestra el uso de la conjugación para demostrar que una función es transitiva a partir de otra.

Proposición 3.1.4. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si f es transitiva en X , entonces la función inducida $F_1(f) : F_1(X) \rightarrow F_1(X)$ es transitiva en $F_1(X)$.

Demostración. Veamos que la función f y su función inducida $F_1(f)$ son conjugadas. Consideremos la función $h : X \rightarrow F_1(X)$, con regla de correspondencia $h(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$. De la Proposición 1.3.20, sabemos que h es un homeomorfismo. Por otro lado, para cualquier $x \in X$, $h(f(x)) = \{f(x)\} = f(\{x\}) = F_1(f)(\{x\}) = F_1(f)(h(x))$. En consecuencia, f y $F_1(f)$ son conjugadas. Como f es transitiva en X , por la Proposición 3.1.3, $F_1(f)$ es transitiva en $F_1(X)$. \square

Recordemos del Ejemplo 1.2.27 la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ -2x + \frac{3}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -x + 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La gráfica de la función g la encontramos en la Figura 3.1-(a).

Ejemplo 3.1.5. Observemos que $g^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ está definida por:

$$g^2(x) = \begin{cases} -2x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ 2x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ -2x + \frac{5}{2}, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La gráfica de la función g^2 la encontramos en la Figura 3.1-(b).

Ejemplo 3.1.6. Notemos que $g^3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ está definida por:

$$g^3(x) = \begin{cases} 4x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{8}; \\ -4x + \frac{3}{2}, & \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ 4x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{8}; \\ -4x + \frac{5}{2}, & \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -2x + \frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ 2x - \frac{3}{2}, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La gráfica de la función g^3 la encontramos en la Figura 3.1-(c).

Lema 3.1.7. Consideremos la función $g^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (vea el Ejemplo 3.1.5) y la función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (ver Ejemplo 1.2.26). La función $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y la función $g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]} : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ son conjugadas.

Demostración. Notemos que $g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]} : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ está definida por:

$$g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) = \begin{cases} 2x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ -2x + \frac{5}{2}, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

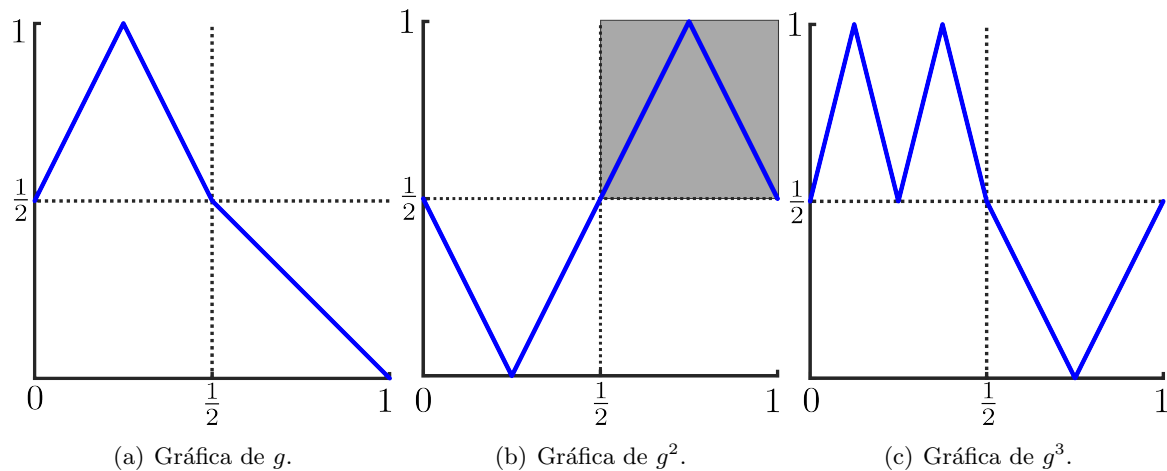


Figura 3.1: Gráfica de las funciones g , g^2 y g^3 .

La gráfica de la función $g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ puede verse en la Figura 3.1-(b). Consideremos la función $h : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ definida por $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, para todo $x \in [0, 1]$. De la Proposición 1.2.30 aplicada a $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$, se sigue que h es un homeomorfismo. Con esto, resta ver que, para todo $x \in [0, 1]$, $h(T(x)) = g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}(h(x))$.

Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$. Es decir, $\frac{1}{2} \leq h(x) \leq \frac{3}{4}$. Así, $h(T(x)) = h(2x) = x + \frac{1}{2}$ y $g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}(h(x)) = g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = x + \frac{1}{2}$.

Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $\frac{3}{4} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq 1$. Es decir, $\frac{3}{4} \leq h(x) \leq 1$. Así, $h(T(x)) = h(-2x+2) = -x + \frac{3}{2}$ y $g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}(h(x)) = g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = -x + \frac{3}{2}$. Por lo tanto, la función tienda T y la función $g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ son conjugadas. \square

Notación 3.1.8. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$, ponemos $B_{k,l} = \left[\frac{2^k + l}{2^{k+1}}, \frac{2^k + l + 1}{2^{k+1}} \right]$.

Lema 3.1.9. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$, se tiene que las funciones $g^{2k}|_{B_{k,l}} : B_{k,l} \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2k+1}|_{B_{k,l}} : B_{k,l} \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ son homeomorfismos. Además, para todo $x \in B_{k,l}$, se tiene que:

$$g^{2k+1}|_{B_{k,l}}(x) = -g^{2k}|_{B_{k,l}}(x) + 1.$$

Demostración. Se procede por inducción matemática sobre k . Para $k = 1$, se tiene que $l \in \{0, 1\}$. Si $l = 0$, entonces las funciones:

$$g^2|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} : \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \text{ y } g^3|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} : \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \rightarrow \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

están definidas por:

$$g^2|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}(x) = 2x - \frac{1}{2} \text{ y } g^3|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}(x) = -2x + \frac{3}{2},$$

para todo $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Aplicando la Proposición 1.2.30 con $\alpha = 2$ y $\beta = -\frac{1}{2}$, obtenemos que $g^2|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}$ es un homeomorfismo. Además, por la Proposición 1.2.31 aplicada a $\alpha = -2$ y $\beta = \frac{3}{2}$,

obtenemos que $g^3|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}$ es un homeomorfismo. Más aún, para todo $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, se cumple:

$$g^3|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}(x) = -2x + \frac{3}{2} = -\left(2x - \frac{1}{2}\right) + 1 = -g^2|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}(x) + 1.$$

Por otro lado, si $l = 1$, entonces las funciones:

$$g^2|_{[\frac{3}{4}, 1]} : \left[\frac{3}{4}, 1\right] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ y } g^3|_{[\frac{3}{4}, 1]} : \left[\frac{3}{4}, 1\right] \rightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

están definidas por:

$$g^2|_{[\frac{3}{4}, 1]}(x) = -2x + \frac{5}{2} \text{ y } g^3|_{[\frac{3}{4}, 1]}(x) = 2x - \frac{3}{2},$$

para todo $x \in [\frac{3}{4}, 1]$. Por la Proposición 1.2.31 aplicada $\alpha = -2$ y $\beta = \frac{5}{2}$, obtenemos que $g^2|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}$ es un homeomorfismo. Además, por la Proposición 1.2.30 aplicada a $\alpha = 2$ y $\beta = -\frac{3}{2}$, obtenemos que $g^3|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}$ es un homeomorfismo. Más aún, para todo $x \in [\frac{3}{4}, 1]$, se sigue:

$$g^3|_{[\frac{3}{4}, 1]}(x) = 2x - \frac{3}{2} = -\left(-2x + \frac{5}{2}\right) + 1 = -g^2|_{[\frac{3}{4}, 1]}(x) + 1.$$

Ahora, supongamos que el resultado se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$ y veamos que el resultado se cumple para $k + 1$. Supongamos que $l \leq 2^k - 1$. Es decir, $l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$. Observemos que $l \leq 2^k - 1$ si y sólo si $\frac{2^{k+1}+l+1}{2^{k+2}} \leq \frac{3}{4}$ y $0 \leq l$ si y sólo si $\frac{1}{2} \leq \frac{2^{k+1}+l}{2^{k+2}}$. Para simplificar la notación, usamos la Notación 3.1.8. Por lo que, $B_{k+1,l} \subset [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Además, $g^2|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}(B_{k+1,l}) = B_{k,l}$. Definimos la función $g^2|_{B_{k+1,l}} : B_{k+1,l} \rightarrow B_{k,l}$ con regla de correspondencia $g^2|_{B_{k+1,l}}(x) = 2x - \frac{1}{2}$, para todo $x \in B_{k+1,l}$. Por la Proposición 1.2.30 aplicada a $\alpha = 2$ y $\beta = -\frac{1}{2}$, obtenemos que $g^2|_{B_{k+1,l}}$ es un homeomorfismo. Como las funciones $g^{2k}|_{B_{k,l}} : B_{k,l} \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2k+1}|_{B_{k,l}} : B_{k,l} \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ son homeomorfismos, por el Teorema 1.2.32, se sigue que $g^{2k}|_{B_{k,l}} \circ g^2|_{B_{k+1,l}} = g^{2(k+1)}|_{B_{k+1,l}} : B_{k+1,l} \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2(k+1)+1}|_{B_{k+1,l}} \circ g^2|_{B_{k+1,l}} = g^{2k+2}|_{B_{k+1,l}} : B_{k+1,l} \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ son homeomorfismos. Más aún, para todo $x \in B_{k+1,l}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} g^{2(k+1)+1}|_{B_{k+1,l}}(x) &= g^{2k+1}|_{B_{k,l}}(g^2|_{B_{k+1,l}}(x)) \\ &= -g^{2k}|_{B_{k,l}}(g^2|_{B_{k+1,l}}(x)) + 1 \\ &= -g^{2(k+1)}|_{B_{k+1,l}}(x) + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{2(k+1)+1}|_{B_{k+1,l}}(x) = -g^{2(k+1)}|_{B_{k+1,l}}(x) + 1$, para todo $x \in B_{k+1,l}$.

Ahora, supongamos que $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$. Observemos que $l \leq 2^{k+1} - 1$ si y sólo si $\frac{2^{k+1}+l+1}{2^{k+2}} \leq 1$ y $2^k \leq l$ si y sólo si $\frac{3}{4} \leq \frac{2^{k+1}+l}{2^{k+2}}$. Por lo que, $B_{k+1,l} \subset [\frac{3}{4}, 1]$. Notemos que $g^2|_{[\frac{3}{4}, 1]}(B_{k+1,l}) = \left[\frac{3 \cdot 2^k - l - 1}{2^{k+1}}, \frac{3 \cdot 2^k - l}{2^{k+1}}\right]$. Pongamos $m = 2^{k+1} - l - 1$. Se cumple lo siguiente:

Si $l = 2^{k+1} - 1$, entonces $m = 0$;

Si $l = 2^{k+1} - 2$, entonces $m = 1$;

Si $l = 2^{k+1} - 3$, entonces $m = 2$;

⋮

Si $l = 2^k$, entonces $m = 2^k - 1$.

En consecuencia, si $l \in \{2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}$, entonces $m \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$. Por lo que,

$$g^2|_{[\frac{3}{4}, 1]}(B_{k+1, l}) = \left[\frac{3 \cdot 2^k - l - 1}{2^{k+1}}, \frac{3 \cdot 2^k - l}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{2^k + m}{2^{k+1}}, \frac{2^k + m + 1}{2^{k+1}} \right].$$

Recordemos que $B_{k, m} = \left[\frac{2^k + m}{2^{k+1}}, \frac{2^k + m + 1}{2^{k+1}} \right]$. Definimos la función $g^2|_{B_{k+1, l}} : B_{k+1, l} \rightarrow B_{k, m}$ con regla de correspondencia $g^2|_{B_{k+1, l}}(x) = -2x + \frac{5}{2}$, para todo $x \in B_{k+1, l}$. Por la Proposición 1.2.31 aplicada a $\alpha = -2$ y $\beta = \frac{5}{2}$, obtenemos que $g^2|_{B_{k+1, l}}$ es un homeomorfismo. Como las funciones $g^{2^k}|_{B_{k, m}} : B_{k, m} \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2^{k+1}}|_{B_{k, m}} : B_{k, m} \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ son homeomorfismos, entonces del Teorema 1.2.32, se sigue que $g^{2^k}|_{B_{k, m}} \circ g^2|_{B_{k+1, l}} = g^{2^{k+1}}|_{B_{k+1, l}} : B_{k+1, l} \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2^{k+1}+1}|_{B_{k, m}} \circ g^2|_{B_{k+1, l}} = g^{2^{k+2}}|_{B_{k+1, l}} : B_{k+1, l} \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ son homeomorfismos. Más aún, para todo $x \in B_{k+1, l}$, se sigue:

$$\begin{aligned} g^{2^{k+1}+1}|_{B_{k+1, l}}(x) &= g^{2^{k+1}}|_{B_{k, m}}(g^2|_{B_{k+1, l}}(x)) \\ &= -g^{2^k}|_{B_{k, m}}(g^2|_{B_{k+1, l}}(x)) + 1 \\ &= -g^{2^{k+1}}|_{B_{k+1, l}}(x) + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{2^{k+1}+1}|_{B_{k+1, l}}(x) = -g^{2^{k+1}}|_{B_{k+1, l}}(x) + 1$, para todo $x \in B_{k+1, l}$, lo que termina la demostración. \square

Lema 3.1.10. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$, $\bigcup_{l=0}^{2^k-1} \left[\frac{2^k + l}{2^{k+1}}, \frac{2^k + l + 1}{2^{k+1}} \right] = [\frac{1}{2}, 1]$.

Demostración. Se procede por inducción matemática sobre k . Observemos que para $k = 1$, se tiene $\bigcup_{l=0}^{2^1-1} \left[\frac{2^1 + l}{2^{1+1}}, \frac{2^1 + l + 1}{2^{1+1}} \right] = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] = [\frac{1}{2}, 1]$. Supongamos que la igualdad se cumple para k . Veamos que se cumple para $k + 1$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} &\bigcup_{l=0}^{2^{k+1}-1} \left[\frac{2^{k+1} + l}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + l + 1}{2^{k+2}} \right] \\ &= \left[\frac{2^{k+1} + 0}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 1}{2^{k+2}} \right] \cup \left[\frac{2^{k+1} + 1}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 2}{2^{k+2}} \right] \cup \left[\frac{2^{k+1} + 2}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 3}{2^{k+2}} \right] \cup \left[\frac{2^{k+1} + 3}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 4}{2^{k+2}} \right] \cup \\ &\dots \cup \left[\frac{2^{k+1} + 2^{k+1} - 2}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 2^{k+1} - 1}{2^{k+2}} \right] \cup \left[\frac{2^{k+1} + 2^{k+1} - 1}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 2^{k+1}}{2^{k+2}} \right], \\ &= \left[\frac{2^{k+1} + 0}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 1}{2^{k+2}} \right] \cup \left[\frac{2^{k+1} + 2}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 3}{2^{k+2}} \right] \cup \dots \cup \left[\frac{2^{k+1} + 2^{k+1} - 2}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} + 2^{k+1}}{2^{k+2}} \right], \\ &= \left[\frac{2^k + 0}{2^{k+1}}, \frac{2^k + 1}{2^{k+1}} \right] \cup \left[\frac{2^k + 1}{2^{k+1}}, \frac{2^k + 2}{2^{k+1}} \right] \cup \dots \cup \left[\frac{2^k + 2^k - 1}{2^{k+1}}, \frac{2^k + 2^k}{2^{k+1}} \right], \\ &= \bigcup_{l=0}^{2^k-1} \left[\frac{2^k + l}{2^{k+1}}, \frac{2^k + l + 1}{2^{k+1}} \right], \\ &= [\frac{1}{2}, 1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\bigcup_{l=0}^{2^{k+1}-1} \left[\frac{2^k + l}{2^{k+1}}, \frac{2^k + l + 1}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]. \quad \square$$

Lema 3.1.11. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, se cumple $g^{2^{k+1}}(x) = -g^{2^k}(x) + 1$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por el Lema 3.1.10, $\bigcup_{i=0}^{2^k-1} B_{k,i} = [\frac{1}{2}, 1]$. Consideremos $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Luego, existe $l \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ tal que $x \in B_{k,l}$. Así, del Lema 3.1.9, se tiene que:

$$g^{2^{k+1}}|_{B_{k,l}}(x) = -g^{2^k}|_{B_{k,l}}(x) + 1.$$

Por lo tanto, $g^{2^{k+1}}(x) = -g^{2^k}(x) + 1$. \square

Lema 3.1.12. Si $a, b \in [\frac{1}{2}, 1]$, donde $a < b$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^{2^k}((a, b)) = [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2^{k+1}}((a, b)) = [0, \frac{1}{2}]$.

Demostración. Sean $a, b \in [\frac{1}{2}, 1]$ tales que $a < b$. Veamos que $g^{2^k}((a, b)) = [\frac{1}{2}, 1]$. Notemos que $\frac{1}{2} \leq a < b \leq 1$, se tiene que $0 \leq 2a - 1 < 2b - 1 \leq 1$. Por el Lema 2.2.2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k((c, d)) = [0, 1]$. Como, por el Lema 3.1.7, T y $g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ son conjugadas, para todo $x \in [0, 1]$, se cumple $h(T^k(x)) = (g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]})^k(h(x))$. Así, $h(T^k((c, d))) = g^{2^k}(h((c, d)))$. Por un lado se tiene que, $h(T^k((c, d))) = h([0, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$. Más aún, $(g^2)^k(h((c, d))) = (g^2)^k((a, b)) = (g^2|_{[\frac{1}{2}, 1]})^k((a, b)) \subset [\frac{1}{2}, 1]$. Por lo tanto, $g^{2^k}((a, b)) = [\frac{1}{2}, 1]$.

Ahora, veamos que $g^{2^{k+1}}((a, b)) = [0, \frac{1}{2}]$. Consideremos $y \in g^{2^{k+1}}((a, b))$. Luego, por Lema 3.1.11, $-y + 1 \in g^{2^k}((a, b))$. Como $g^{2^k}((a, b)) = [\frac{1}{2}, 1]$, se tiene que $-y + 1 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Así, $y \in [0, \frac{1}{2}]$. Además, si $y \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $-y + 1 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Como $g^{2^k}((a, b)) = [\frac{1}{2}, 1]$, existe $x \in (a, b)$ tal que $g^{2^k}(x) = -y + 1$. Así, por el Lema 3.1.11, $g^{2^{k+1}}(x) = y$. Por lo tanto, $y \in g^{2^{k+1}}((a, b))$. Concluimos que $g^{2^{k+1}}((a, b)) = [0, \frac{1}{2}]$. \square

Lema 3.1.13. Consideremos la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como en el Ejemplo 1.2.27. Si U es un subconjunto abierto no vacío de $[0, \frac{1}{2}]$, entonces existen $c, d \in [\frac{1}{2}, 1]$ tales que $c < d$ y $(c, d) \subset g(U)$.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto no vacío de $[0, \frac{1}{2}]$. Consideremos los siguientes casos:

Caso (I): Si $U \subset [0, \frac{1}{4}]$, existe $a \in U$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$, para algún $\varepsilon > 0$. Notemos que $0 \leq a - \varepsilon < a + \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ si y sólo si $\frac{1}{2} \leq 2(a - \varepsilon) + \frac{1}{2} < 2(a + \varepsilon) + \frac{1}{2} \leq 1$. Pongamos $c = 2(a - \varepsilon) + \frac{1}{2}$ y $d = 2(a + \varepsilon) + \frac{1}{2}$. Por lo que, $(c, d) = g((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) \subset g(U)$.

Caso (II): Si $U \subset [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, existe $a \in U$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$, para algún $\varepsilon > 0$. Notemos que $\frac{1}{4} \leq a - \varepsilon < a + \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ si y sólo si $1 \geq -2(a - \varepsilon) + \frac{3}{2} > -2(a + \varepsilon) + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$. Pongamos

$c = -2(a + \varepsilon) + \frac{3}{2}$ y $d = -2(a - \varepsilon) + \frac{3}{2}$. Por lo que, $(c, d) = g((a - \varepsilon, a + \varepsilon)) \subset g(U)$.

Caso (III): Si $\frac{1}{4} \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon) \subset U$. En particular, $(\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4}) \subset U$. Notemos que $0 \leq \frac{1}{4} - \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ si y sólo si $\frac{1}{2} \leq 2(\frac{1}{4} - \varepsilon) + \frac{1}{2} \leq 1$. Pongamos $c = 2(\frac{1}{4} - \varepsilon) + \frac{1}{2}$ y $d = 1$. Por lo que, $(c, d) \subset (c, d] = g((\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4})) \subset g(U)$. \square

En seguida, se prueba que g es transitiva.

Teorema 3.1.14. Consideremos la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como en el Ejemplo 1.2.27. La función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es transitiva en $[0, 1]$.

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en $[0, 1]$. Veamos que, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Supongamos que $U \cap [\frac{1}{2}, 1] \neq \emptyset$. Luego, existen $a, b \in [\frac{1}{2}, 1]$ tales que $a < b$ y $(a, b) \subset U$. Así, por Lema 3.1.12, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^{2k}((a, b)) = [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2k+1}((a, b)) = [0, \frac{1}{2}]$. Como $g^{2k}((a, b)) \subset g^{2k}(U)$ y $g^{2k+1}((a, b)) \subset g^{2k+1}(U)$, se tiene que $[\frac{1}{2}, 1] \subset g^{2k}(U)$ y $[0, \frac{1}{2}] \subset g^{2k+1}(U)$. En consecuencia, si $V \cap [\frac{1}{2}, 1] \neq \emptyset$, entonces $g^m(U) \cap V \neq \emptyset$, donde $m = 2k$. Si $V \cap [\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$, se sigue que $V \cap [0, \frac{1}{2}] \neq \emptyset$. Así, entonces $g^m(U) \cap V \neq \emptyset$, donde $m = 2k + 1$.

Ahora, supongamos que $U \cap [\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$. Luego, $U \subset [0, \frac{1}{2}]$. Por el Lema 3.1.13, existen $c, d \in [\frac{1}{2}, 1]$ tales que $c < d$ y $(c, d) \subset g(U)$. Así, por Lema 3.1.12, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^{2k}((c, d)) = [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2k+1}((c, d)) = [0, \frac{1}{2}]$. Como $g^{2k}((c, d)) \subset g^{2k}(g(U))$ y $g^{2k+1}((c, d)) \subset g^{2k+1}(g(U))$, se tiene que $[\frac{1}{2}, 1] \subset g^{2k+1}(U)$ y $[0, \frac{1}{2}] \subset g^{2k+2}(U)$. En consecuencia, si $V \cap [\frac{1}{2}, 1] \neq \emptyset$, entonces $g^m(U) \cap V \neq \emptyset$, donde $m = 2k + 1$. Si $V \cap [\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$, se sigue que $V \cap [0, \frac{1}{2}] \neq \emptyset$, entonces $g^m(U) \cap V \neq \emptyset$, donde $m = 2k + 2$. Por lo tanto, g es transitiva en $[0, 1]$. \square

Para una mejor manipulación del concepto de función débilmente mezclante (vea la Definición 2.2.12), se prueba el siguiente resultado.

Teorema 3.1.15. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Son equivalentes:

- (1) f es débilmente mezclante en X .
- (2) Para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.
- (3) Para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U, V_1 y V_2 de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X . Entonces, $U_1 \times U_2$ y $V_1 \times V_2$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X^2 . Como f es débilmente mezclante en X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[(f^{\times 2})^k(U_1 \times U_2)] \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. En conclusión, por la Proposición 1.1.12-(2), se tiene que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

(2) \Rightarrow (1) Supongamos que se satisface (2) y veamos que f es débilmente mezclante en X . Consideremos U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X^2 . Existen U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X tales que $U \supseteq U_1 \times U_2$ y $V \supseteq V_1 \times V_2$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal

que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Luego, por Proposición 1.1.12-(2), $\left[(f^{\times 2})^k (U_1 \times U_2) \right] \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. Lo cual implica que $(f^{\times 2})^k (U) \cap V \neq \emptyset$. En conclusión, f es débilmente mezclante en X .

(2) \Rightarrow (3) Sean U, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X . Consideremos $U = U_1 = U_2$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. De donde, $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$.

(3) \Rightarrow (2) Supongamos que se cumple (3) y sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X . Veamos que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Aplicando la hipótesis a los subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2 y V_2 , se tiene que, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $f^l(U_1) \cap V_2 \neq \emptyset$. Por la Observación 2.2.5, se tiene que $U_1 \cap f^{-l}(U_2) \neq \emptyset$ y $U_1 \cap f^{-l}(V_2) \neq \emptyset$. Dado que f es una función continua en X , obtenemos del Teorema 1.2.23 que los conjuntos $A = U_1 \cap f^{-l}(U_2)$ y $B = U_1 \cap f^{-l}(V_2)$, son subconjuntos abiertos no vacíos en X . Nuevamente, aplicando la hipótesis a los subconjuntos abiertos no vacíos A, B y V_1 , se tiene que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$ y $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$. Puesto que A y B son subconjuntos abiertos y, de la Observación 1.2.22-(2), f^k es continua en X , se sigue del Teorema 1.2.23 que el conjunto $W = A \cap f^{-k}(B)$ es un subconjunto abierto en X . Nuevamente por la Observación 2.2.5, $A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset$. Ahora, como $A \subset U_1$, se sigue que $f^k(A) \subset f^k(U_1)$. Además, puesto que $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$, tenemos que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Con esto, resta ver que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Notemos que $W \subset A \subset f^{-l}(U_2)$. Sea $x \in W$. Así, $f^l(x) \in U_2$. Dado que $x \in W \subset f^{-k}(B)$ y $B \subset f^{-l}(V_2)$, se tiene que $f^k(x) \in f^{-l}(V_2)$. De donde, $f^l(f^k(x)) = f^k(f^l(x)) \in V_2$. En vista de que $f^l(x) \in U_2$, tenemos que $f^k(f^l(x)) \in f^k(U_2)$. Por lo tanto, $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. \square

Por otra parte, presentamos a continuación, un resultado clásico de la dinámica topológica conocido como el Teorema de Furstenberg [7] (Teorema 3.1.16).

Teorema 3.1.16. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si f es débilmente mezclante en X , entonces la función producto $f^{\times k} : X^k \rightarrow X^k$ es transitiva en X^k , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Procedemos por inducción matemática sobre k . Para $k = 1$, el resultado se sigue de la Proposición 2.2.14. Para $k = 2$, $f^{\times 2}$ es transitiva en X^2 por la definición de función débilmente mezclante.

Supongamos que la función producto $f^{\times k}$ es transitiva en X^k , para cualquier $k > 2$. Veamos que, $f^{\times (k+1)}$ es transitiva en X^{k+1} . Esto es, basta probarlo para básicos. Sean $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{k+1}$ y $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{k+1}$ subconjuntos abiertos básicos no vacíos en X^{k+1} . Veamos que $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left[\left(f^{\times (k+1)} \right)^m (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{k+1}) \right] \cap [V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{k+1}] \neq \emptyset.$$

Notemos que, por la Proposición 1.1.12-(2), equivale demostrar que:

$$f^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, f^m(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset, \dots, f^m(U_{k+1}) \cap V_{k+1} \neq \emptyset. \quad (3.1.1)$$

Tomemos los subconjuntos abiertos no vacíos $U_k \times V_k$ y $U_{k+1} \times V_{k+1}$ en X^2 . Como $f^{\times 2}$ es transitiva en X^2 , existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\left[(f^{\times 2})^l (U_k \times V_k) \right] \cap [U_{k+1} \times V_{k+1}] \neq \emptyset$. De la Proposición 1.1.12-(2), se sigue que $f^l(U_k) \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ y $f^l(V_k) \cap V_{k+1} \neq \emptyset$. Luego, por la Observación 2.2.5-(2), $f^{-l}(U_{k+1}) \cap U_k \neq \emptyset$ y $f^{-l}(V_{k+1}) \cap V_k \neq \emptyset$. Sean $U = f^{-l}(U_{k+1}) \cap U_k$ y $V = f^{-l}(V_{k+1}) \cap V_k$. Notemos que por el Teorema 1.2.23, U y V son abiertos no vacíos en X . Consideremos los subconjuntos abiertos no vacíos $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{k-1} \times U$ y $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{k-1} \times V$ en X^k . Como $f^{\times k}$ es transitiva en X^k , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left[(f^{\times k})^m (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{k-1} \times U) \right] \cap (V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{k-1} \times V) \neq \emptyset.$$

Luego, por la Proposición 1.1.12-(2), $f^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$, $f^m(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, \dots , $f^m(U_{k-1}) \cap V_{k-1} \neq \emptyset$, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. De donde, para terminar con la demostración de la afirmación (3.1.1), veamos que $f^m(U_k) \cap V_k \neq \emptyset$ y $f^m(U_{k+1}) \cap V_{k+1} \neq \emptyset$. Dado que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$, existe $x \in U$ tal que $f^m(x) \in V$. Como $U \subset U_k$ y $V \subset V_k$ entonces, $x \in U_k$ y $f^m(x) \in V_k$. Por lo que, $f^m(U_k) \cap V_k \neq \emptyset$.

Nuevamente, en vista de que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$, existe $y \in U$ tal que $f^m(y) \in V$. Como $U \subset f^{-l}(U_{k+1})$, se sigue que $f^l(y) \in U_{k+1}$. Dado que $f^m(y) \in V$ y $V \subset f^{-l}(V_{k+1})$, se tiene que $f^l(f^m(y)) \in V_{k+1}$. Notemos que $f^l(f^m(y)) = f^m(f^l(y))$. Luego, $f^m(f^l(y)) \in f^m(U_{k+1}) \cap V_{k+1}$. Por lo tanto, $f^m(U_{k+1}) \cap V_{k+1} \neq \emptyset$. Así, la afirmación (3.1.1) queda demostrada. En conclusión, $f^{\times(k+1)}$ es transitiva en X^{k+1} . \square

El Teorema 3.1.17 y el Teorema 3.1.18 se demuestran aplicando el Teorema de Furstenberg, Teorema 3.1.16. El Teorema 3.1.17 se puede encontrar en [2].

Teorema 3.1.17. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si f es débilmente mezclante en X , entonces f es totalmente transitiva en X .

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X y $m \in \mathbb{N}$. Veamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $(f^m)^p(U) \cap V \neq \emptyset$. Como f es continua en X , por la Observación 1.2.22-(2), f^i es continua en X , para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Luego, del Teorema 1.2.23, $f^{-i}(V)$ es un subconjunto abierto no vacío en X , para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. En vista de que f es débilmente mezclante en X , por el Teorema de Furstenberg, la función producto $f^{\times m}$ es transitiva en X^m . Entonces, considerando los conjuntos abiertos no vacíos $U_i = U$ y $V_i = f^{-i}(V)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left[(f^{\times m})^k (U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m) \right] \cap [V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m] \neq \emptyset.$$

En consecuencia, de la Proposición 1.1.12-(2), $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. De donde, $f^k(U) \cap f^{-i}(V) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Dados los números k y m , por el algoritmo de la división, existen $q, r \in \mathbb{N}$ tales que $k = qm + r$ y $0 \leq r \leq m - 1$. Notemos que $0 < m - r \leq m$. Se sigue que $m - r \in \{1, 2, \dots, m\}$. Por lo que, $f^k(U) \cap f^{-(m-r)}(V) \neq \emptyset$. Así, existe $x \in U$ tal que $f^k(x) \in f^k(U)$ y $f^k(x) \in f^{-(m-r)}(V)$. De donde, $f^{m-r}(f^k(x)) \in V$. Dado que $f^{m-r}(f^k(x)) = f^{k+m-r}(x) = f^{qm+r+m-r}(x) = f^{m(q+1)}(x) = (f^m)^{q+1}(x)$, se tiene que

$(f^m)^{q+1}(x) \in V$. Lo cual implica que, $(f^m)^{q+1}(x) \in (f^m)^{q+1}(U)$ y $(f^m)^{q+1}(x) \in V$. Pongamos $p = q + 1$. Por lo tanto, $(f^m)^p(U) \cap V \neq \emptyset$. En conclusión, f es totalmente transitiva en X . \square

Terminamos esta sección con otro resultado muy útil (vea las Referencias [1, 2]).

Teorema 3.1.18. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Entonces, son equivalentes:

- (1) f es débilmente mezclante en X ,
- (2) 2^f es débilmente mezclante en 2^X ,
- (3) 2^f es transitiva en 2^X .

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Supongamos que f es débilmente mezclante en X . Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1$ y \mathcal{V}_2 subconjuntos abiertos no vacíos en 2^X . En vista del Teorema 3.1.15, veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ y $(2^f)^k(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Por la definición de la base para τ_V , consideremos $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\langle U_1, U_2, \dots, U_{m_1} \rangle \subset \mathcal{U}_1$, $\langle U'_1, U'_2, \dots, U'_{m_2} \rangle \subset \mathcal{U}_2$, $\langle V_1, V_2, \dots, V_{n_1} \rangle \subset \mathcal{V}_1$ y $\langle V'_1, V'_2, \dots, V'_{n_2} \rangle \subset \mathcal{V}_2$. Tomemos $l = \max\{m_1, m_2, n_1, n_2\}$ y consideremos los subconjuntos abiertos no vacíos $\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle$, $\langle U'_1, U'_2, \dots, U'_l \rangle$, $\langle V_1, V_2, \dots, V_l \rangle$ y $\langle V'_1, V'_2, \dots, V'_l \rangle$ tales que:

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle &\subset \langle U_1, U_2, \dots, U_{m_1} \rangle \subset \mathcal{U}_1, \\ \langle U'_1, U'_2, \dots, U'_l \rangle &\subset \langle U'_1, U'_2, \dots, U'_{m_2} \rangle \subset \mathcal{U}_2, \\ \langle V_1, V_2, \dots, V_l \rangle &\subset \langle V_1, V_2, \dots, V_{n_1} \rangle \subset \mathcal{V}_1 \text{ y} \\ \langle V'_1, V'_2, \dots, V'_l \rangle &\subset \langle V'_1, V'_2, \dots, V'_{n_2} \rangle \subset \mathcal{V}_2. \end{aligned}$$

Dado que f es débilmente mezclante en X , entonces por el Teorema 3.1.16, $f^{\times 2l}$ es transitiva. Entonces, considerando los subconjuntos abiertos no vacíos $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_l \times U'_1 \times U'_2 \times \dots \times U'_l$ y $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_l \times V'_1 \times V'_2 \times \dots \times V'_l$ en X^{2l} , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left[\left(f^{\times 2l} \right)^k (U_1 \times \dots \times U_l \times U'_1 \times \dots \times U'_l) \right] \cap [V_1 \times \dots \times V_l \times V'_1 \times \dots \times V'_l] \neq \emptyset.$$

Esto es, de la Proposición 1.1.12-(2), $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$, $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset, \dots, f^k(U_l) \cap V_l \neq \emptyset$ y $f^k(U'_1) \cap V'_1 \neq \emptyset, f^k(U'_2) \cap V'_2 \neq \emptyset, \dots, f^k(U'_l) \cap V'_l \neq \emptyset$. De aquí, podemos considerar los siguientes puntos en X .

$$\begin{aligned} x_1 &\in U_1 \text{ tal que } f^k(x_1) \in V_1, \\ x_2 &\in U_2 \text{ tal que } f^k(x_2) \in V_2, \\ &\vdots \\ x_l &\in U_l \text{ tal que } f^k(x_l) \in V_l, \\ x'_1 &\in U'_1 \text{ tal que } f^k(x'_1) \in V'_1, \\ x'_2 &\in U'_2 \text{ tal que } f^k(x'_2) \in V'_2, \\ &\vdots \\ x'_l &\in U'_l \text{ tal que } f^k(x'_l) \in V'_l. \end{aligned}$$

Notemos que $\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \subset \bigcup_{i=1}^l U_i$ y $\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Así,

$\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \in \langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle$. Similarmente, $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_l\} \subset \bigcup_{i=1}^l U'_i$ y $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_l\} \cap U'_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Así, $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_l\} \in \langle U'_1, U'_2, \dots, U'_l \rangle$.

Observemos que $f^k(\{x_1, x_2, \dots, x_l\}) = \{f^k(x_1), f^k(x_2), \dots, f^k(x_l)\}$ y $f^k(\{x'_1, x'_2, \dots, x'_l\}) = \{f^k(x'_1), f^k(x'_2), \dots, f^k(x'_l)\}$. En consecuencia,

$$f^k(\{x_1, x_2, \dots, x_l\}) \in \langle V_1, V_2, \dots, V_l \rangle \text{ y } f^k(\{x'_1, x'_2, \dots, x'_l\}) \in \langle V'_1, V'_2, \dots, V'_l \rangle.$$

En vista de que $\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \in \langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle$ y $f^k(\{x_1, x_2, \dots, x_l\}) \in \langle V_1, V_2, \dots, V_l \rangle$, obtenemos que $(2^f)^k(\{x_1, x_2, \dots, x_l\}) \in (2^f)^k(\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle) \cap \langle V_1, V_2, \dots, V_l \rangle$. Por lo que,

$$(2^f)^k(\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle) \cap \langle V_1, V_2, \dots, V_l \rangle \neq \emptyset.$$

Similarmente, como $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_l\} \in \langle U'_1, U'_2, \dots, U'_l \rangle$ y $f^k(\{x'_1, x'_2, \dots, x'_l\}) \in \langle V'_1, V'_2, \dots, V'_l \rangle$, obtenemos que $(2^f)^k(\{x'_1, x'_2, \dots, x'_l\}) \in (2^f)^k(\langle U'_1, U'_2, \dots, U'_l \rangle) \cap \langle V'_1, V'_2, \dots, V'_l \rangle$. Por lo que,

$$(2^f)^k(\langle U'_1, U'_2, \dots, U'_l \rangle) \cap \langle V'_1, V'_2, \dots, V'_l \rangle \neq \emptyset.$$

Por la forma en que tomamos los conjuntos $\langle U'_1, U'_2, \dots, U'_l \rangle$ y $\langle V'_1, V'_2, \dots, V'_l \rangle$, concluimos que $(2^f)^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ y $(2^f)^k(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, 2^f es débilmente mezclante en 2^X .

(2) \Rightarrow (3) Se sigue de la Proposición 2.2.14.

(3) \Rightarrow (1) Supongamos que 2^f es transitiva en 2^X . Para demostrar que f es débilmente mezclante en X , usamos la parte (3) del Teorema 3.1.15. Sean U, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X . Veamos que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Consideremos los subconjuntos abiertos $\langle U \rangle$ y $\langle V_1, V_2 \rangle$ de 2^X . Como U es no vacío, por la Proposición 1.3.25, $\langle U \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de 2^X . En vista de que, V_1 y V_2 son no vacíos, existen $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2$. Así, $\{x_1, x_2\} \in \langle V_1, V_2 \rangle$. Por lo que, $\langle V_1, V_2 \rangle$ es un subconjunto abierto no vacío en 2^X .

Como 2^f es transitiva en 2^X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^k(\langle U \rangle) \cap \langle V_1, V_2 \rangle \neq \emptyset$. Así, por la Observación 2.2.5-(1), existe $A \in \langle U \rangle$ tal que $(2^f)^k(A) \in \langle V_1, V_2 \rangle$. Es decir, $f^k(A) \in \langle V_1, V_2 \rangle$. Luego, $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(A) \cap V_2 \neq \emptyset$. Dado que $A \in \langle U \rangle$, $A \subset U$. Luego, $f^k(A) \subset f^k(U)$. Por lo que, $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. En conclusión, por el Teorema 3.1.15-(3), f es débilmente mezclante en X . \square

El siguiente diagrama se obtiene de la definición de transitividad, de la Proposición 2.2.17 y del Teorema 3.1.17. Aquí resumimos las relaciones entre las funciones dinámicas que hemos presentado.

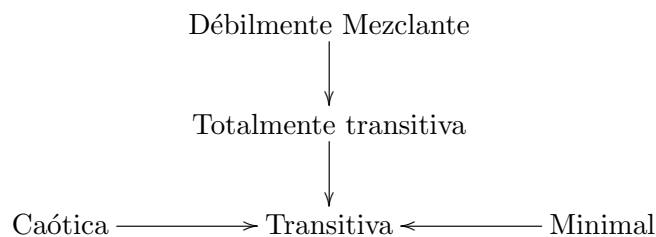


Diagrama 2: Relaciones entre funciones dinámicas.

Sección 3.2

Transitividad de 2^f y $C(f)$

En esta sección estudiamos todas las posibles implicaciones existentes entre las afirmaciones siguientes:

- (1) f es transitiva;
- (2) 2^f es transitiva;
- (3) $C(f)$ es transitiva.

Básicamente, demostramos que las implicaciones (2) \Rightarrow (1) y (3) \Rightarrow (1) son válidas, mientras que las demás implicaciones en general no. Sin embargo, agregándole una condición extra al dominio de la función f , además de obtener las implicaciones válidas indicadas previamente, se obtiene la implicación (3) \Rightarrow (2). Cuando una implicación no es válida detallamos el respectivo contraejemplo. En esencia, estamos resolviendo el problema de saber si la dinámica individual implica la dinámica colectiva y viceversa.

Comenzamos con los dos teoremas siguientes. Cabe señalar que incluimos dos demostraciones por cada uno. Una de ellas es mediante el uso de la métrica de Hausdorff y la otra es utilizando la topología de Vietoris. La idea de esto es comparar el uso de las dos técnicas que pueden emplearse en los hiperespacios.

Teorema 3.2.1. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es transitiva en 2^X , entonces f es transitiva en X .

Demostración 1. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X . Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Consideremos $a \in U$ y $b \in V$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_d(a, \delta_1) \subset U$ y existe $\delta_2 > 0$ tal que $B_d(b, \delta_2) \subset V$. Sea $\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Luego, $B_d(a, \varepsilon) \subset B_d(a, \delta_1) \subset U$ y $B_d(b, \varepsilon) \subset B_d(b, \delta_2) \subset V$. Notemos que $B_H(\{a\}, \varepsilon)$ y $B_H(\{b\}, \varepsilon)$ son subconjuntos abiertos no

vacíos en 2^X . Como 2^f es transitiva en 2^X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^k(B_H(\{a\}, \varepsilon)) \cap B_H(\{b\}, \varepsilon) \neq \emptyset$. En consecuencia, por la Observación 2.2.5-(1), existe $A \in B_H(\{a\}, \varepsilon)$ tal que $(2^f)^k(A) \in B_H(\{b\}, \varepsilon)$. Así, $H(\{a\}, A) < \varepsilon$ y $H(\{b\}, (2^f)^k(A)) < \varepsilon$. De aquí, por la Proposición 1.3.16, en particular, $A \subset N(\varepsilon, \{a\})$ y $(2^f)^k(A) \subset N(\varepsilon, \{b\})$. Sea $x \in A$. Así, tenemos que $d(x, \{a\}) < \varepsilon$ y $d(f^k(x), \{b\}) < \varepsilon$. De aquí que, $d(x, a) < \varepsilon$ y $d(f^k(x), b) < \varepsilon$. Es decir, $x \in B_d(a, \varepsilon)$ y $f^k(x) \in B_d(b, \varepsilon)$. Luego, $f^k(x) \in f^k(B_d(a, \varepsilon))$ y $f^k(x) \in B_d(b, \varepsilon)$. Por lo que, $f^k(B_d(a, \varepsilon)) \cap B_d(b, \varepsilon) \neq \emptyset$. De donde, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva en X . \square

Demostración 2. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X . Veamos que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Notemos que $\langle U \rangle$ y $\langle V \rangle$ son subconjuntos abiertos no vacíos en 2^X . Como 2^f es transitiva en 2^X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[(2^f)^k(\langle U \rangle)] \cap \langle V \rangle \neq \emptyset$. Luego, de la Proposición 1.3.25 que $\langle f^k(U) \rangle \cap \langle V \rangle \neq \emptyset$. De donde, por la Proposición 1.3.6-(1), $\langle f^k(U) \cap V \rangle \neq \emptyset$. En consecuencia, de la Proposición 1.3.6-(2), $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva en X . \square

Con argumentos similares a los dados en ambas demostraciones del Teorema 3.2.1 podemos probar el Teorema 3.2.2.

Teorema 3.2.2. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si la función inducida $C(f) : C(X) \rightarrow C(X)$ es transitiva en $C(X)$, entonces f es transitiva en X .

Demostración 1. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X . Veamos que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Consideremos $a \in U$ y $b \in V$, existen $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $B_d(a, \varepsilon_1) \subset U$ y $B_d(b, \varepsilon_2) \subset V$. Tomemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Luego, $B_d(a, \varepsilon) \subset B_d(a, \varepsilon_1) \subset U$ y $B_d(b, \varepsilon) \subset B_d(b, \varepsilon_2) \subset V$. Notemos que $B_H(\{a\}, \varepsilon)$ y $B_H(\{b\}, \varepsilon)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en 2^X . Además, $B_H(\{a\}, \varepsilon) \cap C(X)$ y $B_H(\{b\}, \varepsilon) \cap C(X)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en $C(X)$. Dado que $C(f)$ es transitiva en $C(X)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left[(C(f))^k(B_H(\{a\}, \varepsilon) \cap C(X)) \right] \cap [B_H(\{b\}, \varepsilon) \cap C(X)] \neq \emptyset.$$

Esto es, de la Observación 2.2.5-(1), existe $A \in B_H(\{a\}, \varepsilon) \cap C(X)$ tal que $(C(f))^k(A) \in B_H(\{b\}, \varepsilon) \cap C(X)$. Entonces, $H(\{a\}, A) < \varepsilon$, y dado que $(C(f))^k(A) = f^k(A)$, se tiene que $H(\{b\}, f^k(A)) < \varepsilon$. Por la Proposición 1.3.16, en particular, $A \subset N(\varepsilon, \{a\})$ y $f^k(A) \subset N(\varepsilon, \{b\})$. Consideremos $x \in A$. Así, $d(a, x) < \varepsilon$ y como $f^k(x) \in f^k(A)$, $d(f^k(x), b) < \varepsilon$. De donde, $x \in B_d(a, \varepsilon)$ y $f^k(x) \in B_d(b, \varepsilon)$. Luego, $f^k(x) \in f^k(B_d(a, \varepsilon))$ y $f^k(x) \in B_d(b, \varepsilon)$. Lo cual implica que, $f^k(B_d(a, \varepsilon)) \cap B_d(b, \varepsilon) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. En conclusión, f es transitiva en X . \square

Demostración 2. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X . Veamos que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Dados los subconjuntos abiertos U y V , se tiene que, $\langle U \rangle \cap C(X)$ y

$\langle V \rangle \cap C(X)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en $C(X)$. Como $C(f)$ es transitiva en $C(X)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left[(C(f))^k(\langle U \rangle \cap C(X)) \right] \cap [\langle V \rangle \cap C(X)] \neq \emptyset.$$

Luego, de la Observación 2.2.5, existe $A \in \langle U \rangle \cap C(X)$ tal que $(C(f))^k(A) \in \langle V \rangle \cap C(X)$. De donde, $A \subset U$ y $f^k(A) \subset V$. De aquí, como $f^k(A) \subset f^k(U)$, obtenemos que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. En conclusión, f es transitiva en X . \square

Veremos en la Proposición 3.2.13 que si $C(f)$ es transitiva no implica que 2^f sea transitiva cuando el espacio X es compacto. Sin embargo, si al dominio de f le agregamos la hipótesis de conexidad obtenemos que si $C(f)$ es transitiva, entonces 2^f es transitiva. Más aún, tenemos lo siguiente.

Teorema 3.2.3. Sean X un continuo y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si $C(f) : C(X) \rightarrow C(X)$ es transitiva en $C(X)$, entonces f es débilmente mezclante en X .

Demostración. Sean U, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X . En vista del Teorema 3.1.15-(3), veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. Notemos que $\langle U \rangle \cap C(X)$ y $\langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)$ son subconjuntos abiertos de $C(X)$. Puesto que U es un subconjunto no vacío en X , existe $x \in U$. Es decir, $\{x\} \in \langle U \rangle \cap C(X)$. Además, dado que $X \in C(X)$, $X \subset V_1 \cup V_2 \cup X$ y $X \cap V_1 \neq \emptyset$, $X \cap V_2 \neq \emptyset$ y $X \cap X \neq \emptyset$, se sigue que $X \in \langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)$. En consecuencia, $\langle U \rangle \cap C(X)$ y $\langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en $C(X)$. Dado que $C(f)$ es transitiva en $C(X)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[(C(f))^k(\langle U \rangle \cap C(X)) \right] \cap [\langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)] \neq \emptyset$. Lo cual implica que, por la Observación 2.2.5-(1), existe $A \in \langle U \rangle \cap C(X)$ tal que $f^k(A) \in \langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)$. Así, $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(A) \cap V_2 \neq \emptyset$. En vista de que, $A \in \langle U \rangle$, esto es, $A \subset U$, tenemos, $f^k(A) \subset f^k(U)$. Por lo tanto, $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. En conclusión, del Teorema 3.1.15-(3), f es débilmente mezclante en X . \square

Corolario 3.2.4. Sean X un continuo y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si $C(f) : C(X) \rightarrow C(X)$ es transitiva en $C(X)$, entonces $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es transitiva en 2^X .

Demostración. Por el Teorema 3.2.3, se sigue que f es débilmente mezclante en X . Luego, del Teorema 3.1.18, 2^f es transitiva en 2^X . \square

Corolario 3.2.5. Sean X un continuo y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Si $C(f) : C(X) \rightarrow C(X)$ es transitiva en $C(X)$, entonces f es transitiva en X .

Demostración. La demostración se sigue del Corolario 3.2.4 y los Teoremas 3.1.18 y 3.1.17. \square

Por otro lado, retomando la dinámica de la función tienda, ahora analizamos la transitividad de su inducida $C(T)$.

Teorema 3.2.6. La función inducida $C(T) : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ no es transitiva en $C([0, 1])$.

Demostración. Por la Observación 2.2.6, es suficiente mostrar subconjuntos abiertos no vacíos \mathcal{U} y \mathcal{V} en $C([0, 1])$ tales que, para todo $p \in \mathbb{N}$, se cumple que $[(C(T))^p(\mathcal{U})] \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Afirmación 1. Para todo $K \in B_H([0, 1], \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$, se tiene que $\frac{2}{3} \in K$.

En efecto, sea $K \in B_H([0, 1], \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$. Luego $H([0, 1], K) < \frac{1}{10}$. Así, por la Proposición 1.3.16, en particular $K \subset N(\frac{1}{10}, [0, 1])$. Supongamos que $\frac{2}{3} \notin K$. Así, $\frac{2}{3} \notin N(\frac{1}{10}, [0, 1])$. En consecuencia, para todo $y \in [0, 1]$, se tiene que $|y - \frac{2}{3}| \geq \frac{1}{10}$. En particular para $y = \frac{2}{3}$ se tiene que, $0 \geq \frac{1}{10}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\frac{2}{3} \in K$. \diamond

Afirmación 2. Para todo $K \in B_H([0, 1], \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$ y para todo $p \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{2}{3} \in (C(T))^p(K)$.

En efecto, consideremos $K \in B_H([0, 1], \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$ y $p \in \mathbb{N}$. Por Afirmación 1, se tiene que $\{\frac{2}{3}\} \subset K$. Luego, $(C(T))^p(\{\frac{2}{3}\}) \subset (C(T))^p(K)$. Esto es, $\{T^p(\frac{2}{3})\} \subset (C(T))^p(K)$. Es decir, $T^p(\frac{2}{3}) \in (C(T))^p(K)$. Sabemos de la Proposición 2.1.7 que $\frac{2}{3}$ es punto fijo de T . Así, obtenemos que $T^p(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, $\frac{2}{3} \in (C(T))^p(K)$. \diamond

Afirmación 3. Para todo $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$, se tiene que $F \subset [0, \frac{1}{10}]$.

En efecto, sea $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$. Entonces $H(\{0\}, F) < \frac{1}{10}$. Así, por la Proposición 1.3.16, en particular, $F \subset N(\frac{1}{10}, \{0\})$. Luego, $F \subset B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) = [0, \frac{1}{10}] \subset [0, \frac{1}{10}]$. Por lo tanto, $F \subset [0, \frac{1}{10}]$. \diamond

Afirmación 4. Para todo $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$ y $y \in F$, se tiene que $|\frac{2}{3} - y| \geq \frac{17}{30}$.

En efecto, sea $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$. Por Afirmación 3, $F \subset [0, \frac{1}{10}]$. Dado $y \in F$, tenemos que $0 \leq y \leq \frac{1}{10}$. Así, $-y \geq -\frac{1}{10}$. Por lo que, $|\frac{2}{3} - y| \geq \frac{17}{30}$. \diamond

Afirmación 5. Para todo $K \in B_H([0, 1], \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$, para todo $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$ y para todo $p \in \mathbb{N}$, se tiene que $H((C(T))^p(K), F) \geq \frac{17}{30}$.

En efecto, dados $K \in B_H([0, 1], \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$, $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$ y $p \in \mathbb{N}$, supongamos que $H((C(T))^p(K), F) < \frac{17}{30}$. Luego, por la Proposición 1.3.16, en particular, $(C(T))^p(K) \subset N(\frac{17}{30}, F)$. Además, por la Afirmación 2, $\frac{2}{3} \in (C(T))^p(K)$. En consecuencia, $\frac{2}{3} \in N(\frac{17}{30}, F)$. Así, $d(\frac{2}{3}, F) < \frac{17}{30}$. Por lo que, existe $y \in F$ tal que $d(\frac{2}{3}, y) < \frac{17}{30}$. Es decir, existe $y \in F$ tal que $|\frac{2}{3} - y| < \frac{17}{30}$ lo cual es una contradicción a la Afirmación 4, puesto que para cualquier $y \in F$, $|\frac{2}{3} - y| \geq \frac{17}{30}$. Por lo tanto, $H((C(T))^p(K), F) \geq \frac{17}{30}$. \diamond

Finalmente, sean $\mathcal{U} = B_H([0, 1], \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$ y $\mathcal{V} = B_H(\{0\}, \frac{17}{30}) \cap C([0, 1])$. Es claro que \mathcal{U} y \mathcal{V} son conjuntos abiertos no vacíos en $C([0, 1])$. Consideremos $K \in \mathcal{U}$, $\{0\} \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0, 1])$ y $p \in \mathbb{N}$ cualesquiera. Por la Afirmación 5, se tiene que $H((C(T))^p(K), \{0\}) \geq \frac{17}{30}$. Luego, $(C(T))^p(K) \notin B_H(\{0\}, \frac{17}{30}) \cap C([0, 1])$. Así, $(C(T))^p(K) \in (C(T))^p(\mathcal{U})$ y $(C(T))^p(K) \notin \mathcal{V}$. Por lo que, $[(C(T))^p(\mathcal{U})] \cap \mathcal{V} = \emptyset$. En conclusión, por la Observación 2.2.6, $C(T)$ no es transitiva en

$C([0, 1])$. □

Teorema 3.2.7. Consideremos la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como en el Ejemplo 1.2.27. La función inducida $2^g : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ no es transitiva en $2^{[0,1]}$.

Demostración. Para ver que 2^g no es transitiva demostramos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Sea $A \in 2^{[0,1]}$. Se cumple lo siguiente:

(1) Si $A \subset [0, \frac{1}{2}]$, entonces $H(A, [0, 1]) \geq \frac{1}{2}$.

(2) Si $A \subset [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $H(A, [0, 1]) \geq \frac{1}{2}$.

En efecto, sea $A \in 2^{[0,1]}$.

(1) Consideremos $A \subset [0, \frac{1}{2}]$. Supongamos que $H(A, [0, 1]) < \frac{1}{2}$. Luego, por la Proposición 1.3.16, en particular, $[0, 1] \subset N(\frac{1}{2}, A)$. Es decir, para todo $x \in [0, 1]$, existe $a_x \in A$ tal que $d(x, a_x) < \frac{1}{2}$. Esto es, para todo $x \in [0, 1]$, existe $a_x \in A$ tal que $|x - a_x| < \frac{1}{2}$. En particular, para $x = 1$, existe $a_1 \in A$ tal que $|1 - a_1| < \frac{1}{2}$. Lo cual es una contradicción, puesto que, para todo $a \in A \subset [0, \frac{1}{2}]$, $|1 - a| \geq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $H(A, [0, 1]) \geq \frac{1}{2}$.

(2) Consideremos $A \subset [\frac{1}{2}, 1]$. Supongamos que $H(A, [0, 1]) < \frac{1}{2}$. Así, por la Proposición 1.3.16, en particular $[0, 1] \subset N(\frac{1}{2}, A)$. Es decir, para todo $x \in [0, 1]$, existe $a_x \in A$ tal que $d(x, a_x) < \frac{1}{2}$. Esto es, para todo $x \in [0, 1]$, existe $a_x \in A$ tal que $|x - a_x| < \frac{1}{2}$. En particular, para $x = 0$, existe $a_0 \in A$ tal que $|0 - a_0| < \frac{1}{2}$. Luego, $a_0 < \frac{1}{2}$. Lo cual es una contradicción, puesto que $a_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Por lo tanto, $H(A, [0, 1]) \geq \frac{1}{2}$. ◇

Afirmación 2. Si $A \in B_H(\{0\}, \frac{1}{2}) \subset 2^{[0,1]}$, entonces $A \subset [0, \frac{1}{2}]$.

En efecto, consideremos $A \in B_H(\{0\}, \frac{1}{2})$. Luego, $H(\{0\}, A) < \frac{1}{2}$. Así, por la Proposición 1.3.9, $\rho(\{0\}, A) < \frac{1}{2}$ y $\rho(A, \{0\}) < \frac{1}{2}$. En vista de que $\rho(\{0\}, A) = d(0, A)$ y $\rho(A, \{0\}) = \max\{d(a, \{0\}) : a \in A\}$, se tiene que $d(0, A) < \frac{1}{2}$ y $\max\{d(a, \{0\}) : a \in A\} < \frac{1}{2}$. En consecuencia, $\min\{d(0, a) : a \in A\} < \frac{1}{2}$ y $\max\{d(a, \{0\}) : a \in A\} < \frac{1}{2}$. Esto es, $\min\{|a| : a \in A\} < \frac{1}{2}$ y $\max\{|a| : a \in A\} < \frac{1}{2}$. Dado que $A \subset [0, 1]$, se tiene que $\min A < \frac{1}{2}$ y $\max A < \frac{1}{2}$. Es decir, $0 \leq a < \frac{1}{2}$, para todo $a \in A$. Por lo tanto, $A \subset [0, \frac{1}{2}]$. ◇

Afirmación 3. Para todo subconjunto A no vacío en $[0, \frac{1}{2}]$ y para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se cumple $g^{2k+1}(A) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2k+2}(A) \subset [0, \frac{1}{2}]$.

En efecto, consideremos A un subconjunto no vacío en $[0, \frac{1}{2}]$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $a \in [0, \frac{1}{4}]$, entonces $g(a) \in [\frac{1}{2}, 1]$. Si $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, entonces $g(a) \in [\frac{1}{2}, 1]$. En consecuencia, del Lema 3.1.10, existe $l \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ tal que $g(a) \in [\frac{2^k+l}{2^{k+1}}, \frac{2^k+l+1}{2^{k+1}}]$. Por el Lema 3.1.9, se tiene que las funciones

$$g^{2k} \Big|_{\left[\frac{2^k+l}{2^{k+1}}, \frac{2^k+l+1}{2^{k+1}}\right]} : \left[\frac{2^k+l}{2^{k+1}}, \frac{2^k+l+1}{2^{k+1}}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ y}$$

$$g^{2k+1} \Big|_{\left[\frac{2^k+l}{2^{k+1}}, \frac{2^k+l+1}{2^{k+1}}\right]} : \left[\frac{2^k+l}{2^{k+1}}, \frac{2^k+l+1}{2^{k+1}}\right] \rightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

son homeomorfismos. Luego, $g^{2k}(g(a)) = g^{2k+1}(a) \in [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2k+1}(g(a)) = g^{2k+2}(a) \in [0, \frac{1}{2}]$. Por lo tanto, $g^{2k+1}(A) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2k+2}(A) \subset [0, \frac{1}{2}]$. \diamond

Finalmente, tomemos los subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{U} = B_H(\{0\}, \frac{1}{2})$ y $\mathcal{V} = B_H([0, 1], \frac{1}{2})$ en $2^{[0,1]}$. Por la Observación 2.2.6, veamos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $(2^g)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U}$. Luego, por la Afirmación 2, $A \subset [0, \frac{1}{2}]$. Así, por la Afirmación 3, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $g^{2k+1}(A) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ y $g^{2k+2}(A) \subset [0, \frac{1}{2}]$. De la Afirmación 1, se obtiene que $H(g^k(A), [0, 1]) \geq \frac{1}{2}$. Es decir, $g^k(A) \notin \mathcal{V}$. En consecuencia, $g^k(A) \in (2^g)^k(\mathcal{U})$ y $g^k(A) \notin \mathcal{V}$. Esto es, $(2^g)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Por lo tanto, de la Observación 2.2.6, 2^g no es una función transitiva en $2^{[0,1]}$. \square

Los siguiente dos resultados están dedicados al análisis de la dinámica colectiva de la función máquina de sumar (vea la Definición 2.2.27).

Teorema 3.2.8. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . La función inducida $C(\tau) : C(\Sigma_2) \rightarrow C(\Sigma_2)$ es transitiva en Σ_2 .

Demostración. Primero veamos la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Los hiperespacios $C(\Sigma_2)$ y $F_1(\Sigma_2)$ de Σ_2 , cumplen que $C(\Sigma_2) = F_1(\Sigma_2)$.

En efecto, sea $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. Observemos que del Ejemplo 1.2.14-(3), Σ_2 es totalmente desconexo. Es decir, la componente conexa de \mathbf{s} , $C_{\mathbf{s}}$, sólo consta de \mathbf{s} , esto es, $C_{\mathbf{s}} = \{\mathbf{s}\}$ (vea la Definición 1.2.13-(D)). Así, $\{\mathbf{s}\}$ es conexo en Σ_2 . Esto es, $\{\mathbf{s}\} \in C(\Sigma_2)$ y $\{\mathbf{s}\} \in F_1(\Sigma_2)$. Por lo tanto, $C(\Sigma_2) = F_1(\Sigma_2)$. \diamond

Ahora, por el Corolario 2.2.36-(3), $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es transitiva en Σ_2 . Luego, por la Proposición 3.1.4, $F_1(\tau) : F_1(\Sigma_2) \rightarrow F_1(\Sigma_2)$ es transitiva en $F_1(\Sigma_2)$. Así, por la Afirmación 1, $C(\tau) : C(\Sigma_2) \rightarrow C(\Sigma_2)$ es transitiva en $C(\Sigma_2)$. \square

Proposición 3.2.9. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2 . La función inducida $2^\tau : 2^{\Sigma_2} \rightarrow 2^{\Sigma_2}$ no es transitiva en 2^{Σ_2} .

Demostración. Por la Proposición 2.2.37, τ no es totalmente transitiva en Σ_2 . Luego, por la negación del Teorema 3.1.17, τ no es débilmente mezclante en Σ_2 . Por lo tanto, del Teorema 3.1.18, 2^τ no es transitiva en 2^{Σ_2} . \square

Proposición 3.2.10. Existe un espacio métrico compacto X y existe una función continua $f : X \rightarrow X$ transitiva en X tal que su inducida $C(f) : C(X) \rightarrow C(X)$ no es transitiva en $C(X)$.

Demostración. El espacio métrico compacto es el intervalo cerrado $[0, 1]$ y la función es la función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (vea la Ejemplo 1.2.26). En efecto, hemos probado en el Teorema 2.2.3 que T es transitiva en $[0, 1]$. Más aún, por el Teorema 3.2.6, la función inducida $C(T) : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ no es transitiva en $[0, 1]$. \square

Proposición 3.2.11. Existe un espacio métrico compacto X y existe una función continua $f : X \rightarrow X$ tal que su inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es transitiva en 2^X pero su inducida $C(f) : C(X) \rightarrow C(X)$ no es transitiva en $C(X)$.

Demostración. El espacio métrico compacto es el intervalo cerrado $[0, 1]$ y la función es la función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (vea la Ejemplo 1.2.26). Se ha visto en el Teorema 2.3.4 que $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es transitiva en $2^{[0,1]}$. Además, por el Teorema 3.2.6, la función inducida $C(T) : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ no es transitiva en $[0, 1]$. \square

Proposición 3.2.12. Existe un espacio métrico compacto X y existe una función continua $f : X \rightarrow X$ transitiva en X tal que su inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ no es transitiva en 2^X .

Demostración. El espacio métrico compacto es el intervalo cerrado $[0, 1]$ y la función es la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida en el Ejemplo 1.2.27. Hemos probado en el Teorema 3.1.14 que g es transitiva en $[0, 1]$. Más aún, por el Teorema 3.2.7, la función inducida $2^g : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ no es transitiva en $2^{[0,1]}$. \square

Proposición 3.2.13. Existe un espacio métrico compacto X y existe una función continua $f : X \rightarrow X$ tal que su inducida $C(f) : C(X) \rightarrow C(X)$ es transitiva en $C(X)$ y su inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ no es transitiva en 2^X .

Demostración. El espacio métrico compacto es Σ_2 (vea Ejemplo 1.2.16-(3)). La función es la función máquina de sumar $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, en la Proposición 2.2.33 vimos que τ es continua. Más aún, hemos demostrado en el Teorema 3.2.8 que $C(\tau) : C(\Sigma_2) \rightarrow C(\Sigma_2)$ es transitiva en $C(\Sigma_2)$. Además, de la Proposición 3.2.9, la función inducida $2^\tau : 2^{\Sigma_2} \rightarrow 2^{\Sigma_2}$ no es transitiva en 2^{Σ_2} . \square

Con todo el análisis que hemos hecho en esta sección se resuelve el problema de hallar todas las implicaciones o no implicaciones existentes, entre las siguientes afirmaciones:

- (1) f es transitiva;
 - (2) 2^f es transitiva;
 - (3) $C(f)$ es transitiva.
-

Esto se puede ver en los siguientes dos diagramas. En el Diagrama 2 el dominio de las funciones es un espacio métrico compacto. Los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2 nos brindan las implicaciones que sí se cumplen (\checkmark) y las Proposiciones 3.2.10, 3.2.11, 3.2.12 y 3.2.13 las que no (\times).

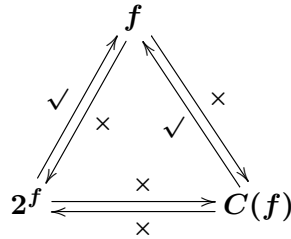


Diagrama 3: Relaciones entre funciones con respecto a la transitividad, donde el dominio de las funciones es un espacio métrico compacto.

En el Diagrama 3 el dominio de las funciones es un continuo, los Teoremas 3.2.1, 3.2.2 y el Corolario 3.2.4 nos aseguran las implicaciones que sí se cumplen (\checkmark). Por otro lado, las Proposiciones 3.2.10, 3.2.11 y 3.2.12 las implicaciones que no se cumplen (\times).

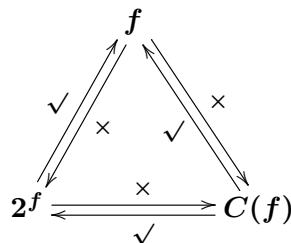


Diagrama 4: Relaciones entre funciones con respecto a la transitividad, donde el dominio de las funciones es un continuo.

Sección 3.3

Un poco más de dinámica colectiva

A partir de los resultados que hemos obtenido en las Secciones 3.1 y 3.2, en la presente sección hacemos una recopilación de las propiedades dinámicas de las funciones inducidas 2^T , $C(T)$, 2^g y 2^τ . A saber, indicamos cuales de estas funciones son o no son caóticas, totalmente transitivas, débilmente mezclantes o minimales.

Comenzamos con los resultados referentes a la función tienda (vea la Definición 1.2.26).

Corolario 3.3.1. La función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es débilmente mezclante en $2^{[0,1]}$.

Demostración. Hemos visto en el Teorema 2.3.4 que 2^T es transitiva en $2^{[0,1]}$. Así, por el Teorema 3.1.18, se obtiene que 2^T es débilmente mezclante. \square

Corolario 3.3.2. La función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es totalmente transitiva en $2^{[0,1]}$.

Demostración. En vista de la Proposición 3.3.1, se tiene que 2^T es débilmente mezclante en $2^{[0,1]}$. Así, por el Teorema 3.1.17 obtenemos que 2^T es totalmente transitiva. \square

Finalmente, respecto a la dinámica colectiva de la función tienda obtenemos el siguiente corolario, el cual se sigue del Teorema 3.2.6 y del Diagrama 1 del Capítulo 3, Sección 3.1.

Corolario 3.3.3. La función inducida $C(T) : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ cumple las siguientes propiedades:

- (1) $C(T)$ no es caótica en $C([0, 1])$.
- (2) $C(T)$ no es totalmente transitiva en $C([0, 1])$.
- (3) $C(T)$ no es débilmente mezclante en $C([0, 1])$.
- (4) $C(T)$ no es minimal en $C([0, 1])$.

Por otro lado, las consecuencias que se obtienen referentes a la dinámica colectiva de la función g (vea Ejemplo 1.2.27), son las que se desprenden del Teorema 3.2.7 y del Diagrama 1 del Capítulo 3, Sección 3.1.

Corolario 3.3.4. La función inducida $2^g : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ cumple las siguientes propiedades:

- (1) 2^g no es caótica en $2^{[0,1]}$.
- (2) 2^g no es totalmente transitiva en $2^{[0,1]}$.
- (3) 2^g no es débilmente mezclante en $2^{[0,1]}$.
- (4) 2^g no es minimal en $2^{[0,1]}$.

Por último, el análisis de la dinámica de la función inducida 2^τ , de la función τ , (vea Definición 2.2.27), se sigue de la Proposición 3.2.9 y del Diagrama 1 del Capítulo 3, Sección 3.1.

Corolario 3.3.5. La función inducida $2^\tau : 2^{\Sigma_2} \rightarrow 2^{\Sigma_2}$ cumple las siguientes propiedades:

- (1) 2^τ no es caótica en 2^{Σ_2} .
 - (2) 2^τ no es totalmente transitiva en 2^{Σ_2} .
 - (3) 2^τ no es débilmente mezclante en 2^{Σ_2} .
 - (4) 2^τ no es minimal en 2^{Σ_2} .
-

Capítulo 4

Aproximación a fractales

El estudio de los fractales es reciente ya que es a final del siglo pasado cuando surgen estudios respecto a este tema. En [14], se puede ver que la naturaleza ha inspirado a conocer acerca de fractales. Sin embargo, aún en el presente no se tiene una definición matemática universal de fractal. Usualmente, un fractal es conocido como un objeto geométrico que es autosimilar, es decir, el objeto geométrico es exacto o similar a una parte de si mismo, esto se visualiza en Figura 4.1. En [3], se menciona que dado un espacio métrico X , los fractales “viven” en 2^X . Por tal motivo es importante el estudio de los hiperespacios y las funciones inducidas ya que esto da la pauta para conocer más sobre los fractales.

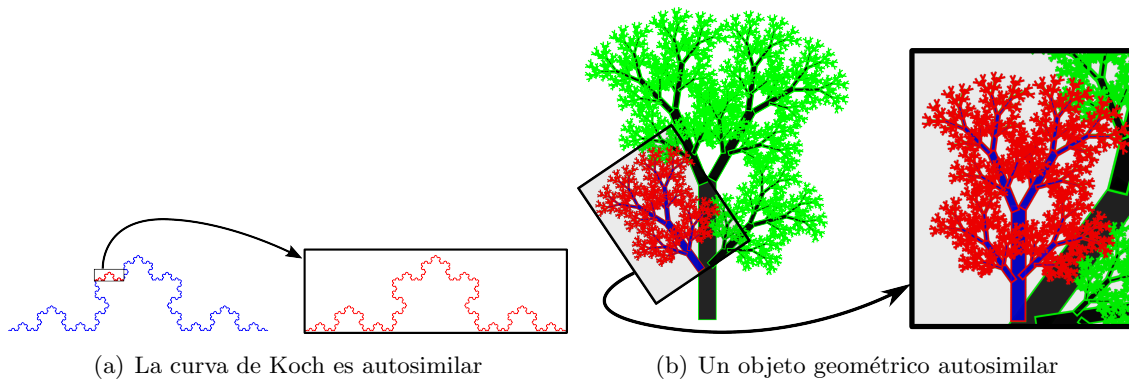


Figura 4.1: Gráfica de la propiedad de autosimilitud en los fractal.

En la Sección 4.1 se realiza una breve recopilación de los resultados que sustentan matemáticamente la construcción de fractales y en la Sección 4.2 se muestra detalladamente tres formas de construir fractales, lo cual es ilustrado gráficamente.

Preliminares

En la presente sección se realiza una recopilación de los resultados más importantes que aportan la justificación matemática para la construcción de fractales mediante sucesiones contenidas en el hiperespacio 2^X .

Una demostración del siguiente resultado se puede consultar en [4, Teorema 3.6, pág. 65].

Proposición 4.1.1. Sean (X, d) un espacio métrico. Si $\{A_i : i \in I\}$ y $\{B_i : i \in I\}$ son subfamilias no vacías de 2^X tales que $\bigcup_{i \in I} A_i$ y $\bigcup_{i \in I} B_i$ son elementos de 2^X , entonces $H\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right) \leq \sup\{H(A_i, B_i) : i \in I\}$.

En [4, Teorema 4.19, pág. 75] se puede ver una demotración de la siguiente proposición.

Proposición 4.1.2. Sea X un espacio métrico. Entonces, X es completo si y sólo si 2^X es completo con la métrica de Hausdorff.

El siguiente resultado nos ayuda ver como es la convergencia de sucesiones de conjuntos, más aún, son dos formas de construir fractales. Más adelante nos daremos cuenta de este hecho. Una demostración se puede consultar en [4, Teorema 5.1, pág. 77] y [4, Teorema 5.2, pág. 78].

Proposición 4.1.3. Sean X un espacio métrico completo y $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy contenida en 2^X .

- (1) Si $A_{k+1} \subset A_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.
- (2) Si $A_k \subset A_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim A_k = Cl\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

Recordemos qué significa que una función sea Lipschitz y una función contracción.

Definición 4.1.4. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que la función f es una *función de Lipschitz* si existe $L > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_X(x, y)$, para todo $x, y \in X$. Al número L se le conoce por *constante de Lipschitz*. Además, se dice que la función f es una *función contracción* si f es una función de Lipschitz con constante de Lipschitz $0 < L < 1$. En este caso, al número L se le conoce como *constante de contracción*.

Una propiedad importante que tienen las funciones Lipschitz con respecto a su inducida es la siguiente .

Proposición 4.1.5. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función. Si f es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz L , entonces la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz L .

Demostración. Consideremos $A, B \in 2^X$. En vista de que $H(2^f(A), 2^f(B)) = H(f(A), f(B)) = \max\{\rho(f(A), f(B)), \rho(f(A), f(B))\}$, veamos que $\rho(f(A), f(B)) \leq L \cdot \rho(A, B)$. En efecto, dado que $\rho(f(A), f(B)) = \max\{d(f(a), f(B)) : a \in A\}$, existe $a \in A$ tal que $\rho(f(A), f(B)) =$

$d(f(a), f(B))$. También, existe $b \in B$ tal que $d(a, B) = d(a, b)$. Como $d(f(a), f(b)) \leq L \cdot d(a, b)$ y $d(f(a), f(B)) \leq d(f(a), f(b))$, para cada $b \in B$, se sigue que $\rho(f(A), f(B)) \leq L \cdot d(a, b)$. De donde $\rho(f(A), f(B)) \leq L \cdot d(a, B)$. En consecuencia, $\rho(f(A), f(B)) \leq L \cdot \rho(A, B)$. Ver que $\rho(f(B), f(A)) \leq L \cdot \rho(B, A)$ es análogo al anterior, sólo se intercambian A y B . Por lo tanto, $\max\{\rho(f(A), f(B)), \rho(f(B), f(A))\} \leq \max\{L \cdot \rho(A, B), L \cdot \rho(B, A)\} = L \cdot \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$. Así, $H(2^f(A), 2^f(B)) \leq L \cdot H(A, B)$. En conclusión, 2^f es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz L . \square

Otro tipo de función es la siguiente.

Definición 4.1.6. Sean X un espacio métrico compacto y $k \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, sea $f_i : X \rightarrow X$ una función. Se define y denota la función $2_k^{f_i} : 2^X \rightarrow 2^X$, con regla de correspondencia $2_k^{f_i}(A) = \bigcup_{i=1}^k f_i(A)$, para cada $A \in 2^X$.

Proposición 4.1.7. Sean X un espacio métrico y $k \in \mathbb{N}$. Si para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i : X \rightarrow X$ es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz L_i , entonces $2_k^{f_i} : 2^X \rightarrow 2^X$ es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz $L = \max\{L_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$.

Demostración. Sean $A, B \in 2^X$. De las Proposiciones 4.1.5 y 4.1.1, se sigue que:

$$\begin{aligned} H\left(2_k^{f_i}(A), 2_k^{f_i}(B)\right) &= H\left(\bigcup_{i=1}^k f_i(A), \bigcup_{i=1}^k f_i(B)\right) \\ &\leq \max\{H(f_i(A), f_i(B)) : i \in \{1, 2, \dots, k\}\} \\ &\leq \max\{L_i \cdot H(A, B) : i \in \{1, 2, \dots, k\}\} \\ &\leq H(A, B) \cdot \max\{L_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\} \\ &\leq L \cdot H(A, B), \end{aligned}$$

donde $L = \max\{L_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$. Por lo tanto, $2_k^{f_i}$ es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz L . \square

De la Proposición 4.1.7, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.1.8. Sean X un espacio métrico y $k \in \mathbb{N}$. Si para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i : X \rightarrow X$ es una función contracción, con constante de contracción L_i , entonces $2_k^{f_i} : 2^X \rightarrow 2^X$ es una función contracción, con constante de contracción $L = \max\{L_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$.

Dado un espacio métrico completo X y una función Lipschitz $f_i : X \rightarrow X$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, donde $k \in \mathbb{N}$. Un *Sistema Iterado de Funciones (SIF)*, es una estructura de la forma $\{X; f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Notemos que si $\{X; f_1, f_2, \dots, f_k\}$ es un *SIF*, entonces se sigue que $\{2^X; 2^{f_1}, 2^{f_2}, \dots, 2^{f_k}\}$ es un *SIF*. Además, a la función $2_k^{f_i} : 2^X \rightarrow 2^X$ dada por $2_k^{f_i}(A) = \bigcup_{i=1}^k f_i(A)$, para cada $A \in 2^X$, se le llama *función inducida por el SIF*, $\{X; f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Más aún, se sabe que toda función de Lipschitz, en particular, es una función continua. Luego, el par $(2^X, 2_k^{f_i})$ es un sistema dinámico, analizar propiedades dinámicas de dicho sistema dinámico significa analizar la dinámica colectiva. El siguiente teorema es una aplicación del Teorema del punto fijo de Banach, el cual es otra forma de construir fractales. Una demostración se puede consultar en [4, Teorema 5.5, pág. 79].

Teorema 4.1.9. Sea $\{X; f_1, f_2, \dots, f_k\}$ un *SIF*. Si f_i es una función contracción, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, entonces existe un único $C \in 2^X$ tal que $2_k^{f_i}(C) = C$. Además, si tomamos cualquier otro elemento $K \in 2^X$, entonces la sucesión $\{C_k\}_{k=0}^\infty$ dada por: $C_0 = K$, $C_k = 2_k^{f_i}(C_{k-1})$, $k \geq 1$ converge al conjunto C . Al conjunto C se le conoce como el atractor del *SIF* $\{X; f_1, f_2, \dots, f_k\}$ y el conjunto K se le conoce como semilla.

Sección 4.2

Aproximación a fractales mediante sucesiones

En esta sección se exhiben aproximaciones a fractales para casos particular. Sólo se detallan dos ejemplos de aproximación a fractales, posteriormente, se presentan otros ejemplos que se pueden detallarse de manera similar.

Para hacer más manejable los subconjuntos de \mathbb{R}^2 se toma la siguiente notación. Dados $k \in \mathbb{N}$ puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ en \mathbb{R}^2 , denotamos por $\square[(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)]$ al polígono en \mathbb{R}^2 , con vértices en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$. Por ejemplo: el polígono $\square[(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)]$ es un cuadrado en \mathbb{R}^2 , con vértices en los puntos $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ y $(0, 1)$ (vea la Figura 4.2-(a)).

Una manera de aproximar fractales es mediante el uso del Teorema 4.1.9. A continuación mostramos ejemplos que muestran tal método.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos el *SIF* $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$, con $f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $f_2(x, y) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right)$ y $f_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$.

Veamos que las funciones f_1, f_2 y f_3 son contracciones. Consideremos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Luego:

$$\begin{aligned}
 d_{\mathbb{R}^2}(f_1(x_1, y_1), f_1(x_2, y_2)) &= d_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right), \left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2}d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \\
 \\
 d_{\mathbb{R}^2}(f_2(x_1, y_1), f_2(x_2, y_2)) &= d_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1}{2}\right), \left(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y_2}{2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2}d_{\mathbb{R}^2}((x_1+1, y_1), (x_2+1, y_2)) \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_1+1 - (x_2+1))^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \frac{1}{2}d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \\
 \\
 d_{\mathbb{R}^2}(f_3(x_1, y_1), f_3(x_2, y_2)) &= d_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1+1}{2}\right), \left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2+1}{2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2}d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1+1), (x_2+1, y_2+1)) \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1+1 - (y_2+1))^2} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \frac{1}{2}d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x_2, y_2)),
 \end{aligned}$$

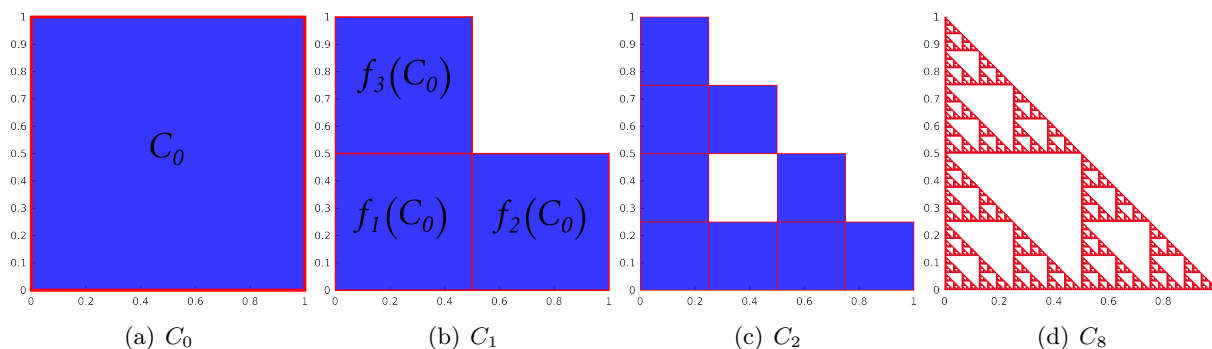


Figura 4.2: Iteraciones que aproximan al triángulo de Sierpinski.

Por lo tanto, f_1 , f_2 y f_3 son funciones de contracción con constantes de contracción $\frac{1}{2}$. Notemos que la función $2_3^{f_i} : 2^{\mathbb{R}^2} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$ tiene regla de correspondencia $2_3^{f_i}(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$, para cada $A \in 2^{\mathbb{R}^2}$. Del Teorema 4.1.9, existe un único $C \in 2^{\mathbb{R}^2}$ tal que $2_3^{f_i}(C) = C$. La segunda parte del Teorema 4.1.9, muestra cómo aproximar a C . Además, establece que se puede aproximar usando diferentes semillas. En seguida, aproximamos a C usando la semilla $C_0 = \square[(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)]$ como en la Figura 4.2-(a). Por la segunda parte del Teorema 4.1.9, $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = C$. Para aproximar y tener una idea de quien es C , construiremos algunos términos de la sucesión. Notemos que $C_1 = 2_3^{f_i}(C_0) = f_1(C_0) \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0)$ (vea la Figura 4.2-(b)), donde $f_1(C_0) = \square[(0,0), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})]$, $f_2(C_0) = \square[(\frac{1}{2}, 0), (1,0), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$ y $f_3(C_0) = \square[(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1), (0, 1)]$. Así,

$$\begin{aligned}
 C_2 &= 2_3^{f_i}(C_1) \\
 &= f_1(C_1) \cup f_2(C_1) \cup f_3(C_1) \\
 &= f_1(f_1(C_0) \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0)) \cup f_2(f_1(C_0) \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0)) \\
 &\quad \cup f_3(f_1(C_0) \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0)) \\
 &= f_1(f_1(C_0)) \cup f_1(f_2(C_0)) \cup f_1(f_3(C_0)) \cup f_2(f_1(C_0)) \cup f_2(f_2(C_0)) \cup f_2(f_3(C_0)) \\
 &\quad \cup f_3(f_1(C_0)) \cup f_3(f_2(C_0)) \cup f_3(f_3(C_0)),
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 f_1(f_1(C_0)) &= \square[(0,0), (\frac{1}{4}, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (0, \frac{1}{4})], & f_1(f_2(C_0)) &= \square[(\frac{1}{2}, 0), (\frac{3}{4}, 0), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})], \\
 f_1(f_3(C_0)) &= \square[(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (0, \frac{3}{4})], & f_2(f_1(C_0)) &= \square[(\frac{1}{4}, 0), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})], \\
 f_2(f_2(C_0)) &= \square[(\frac{3}{4}, 0), (1,0), (1, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})], & f_2(f_3(C_0)) &= \square[(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})], \\
 f_3(f_1(C_0)) &= \square[(0, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2})], & f_3(f_2(C_0)) &= \square[(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \text{ y} \\
 f_3(f_3(C_0)) &= \square[(0, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, 1), (0, 1)] \text{ (vea la Figura 4.2-(c)).}
 \end{aligned}$$

En la Figura 4.2-(d) se visualiza el término C_8 de la sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Puesto que $\{C_k\}$ converge a C , C_8 es una aproximación de C , sin embargo, aún puede estar muy “lejos” de C . En seguida, mostramos que C es el triángulo de Sierpinski. Observemos $C_{k+1} \subset C_k$ y $\rho(C_{k-1}, C_k) = \frac{1}{2^k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, por la Proposición 1.3.12, $H(C_k, C_{k+1}) = \rho(C_{k-1}, C_k) = \frac{1}{2^k}$. Veamos que $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k\varepsilon$. Consideremos $m, l \geq k$. Así, $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{k}$ y $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{k}$. Observemos que si $m = l$, entonces $H(C_l, C_m) = 0 < \varepsilon$. Supongamos que $m > l$. Luego,

$$\begin{aligned}
H(C_l, C_m) &\leq H(C_l, C_{l+1}) + H(C_{l+1}, C_{l+2}) + \dots + H(C_{m-1}, C_m) \\
&= \frac{1}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+2}} + \dots + \frac{1}{2^m} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-l-1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-l}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^l - \left(\frac{1}{2}\right)^m
\end{aligned}$$

Notemos que $\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} < \frac{1}{l}$ y $\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \leq \frac{1}{2m}$, para cualesquiera $l, m \in \mathbb{N}$. Además, $\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}$. En vista de $\frac{1}{l} < \varepsilon$ y $\frac{1}{2m} < \frac{1}{2}\varepsilon$, se sigue que $\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} < \varepsilon$ y $\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Por lo que, $\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} < \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon$. Es decir, $\left(\frac{1}{2}\right)^l - \left(\frac{1}{2}\right)^m < \varepsilon$. Por lo tanto, $H(C_l, C_m) < \varepsilon$. En conclusión, $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Puesto que \mathbb{R}^2 es completo, por la Proposición 4.1.2, $2^{\mathbb{R}^2}$ es completo. En consecuencia, la sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Más aún, por la Proposición 4.1.3-(1),

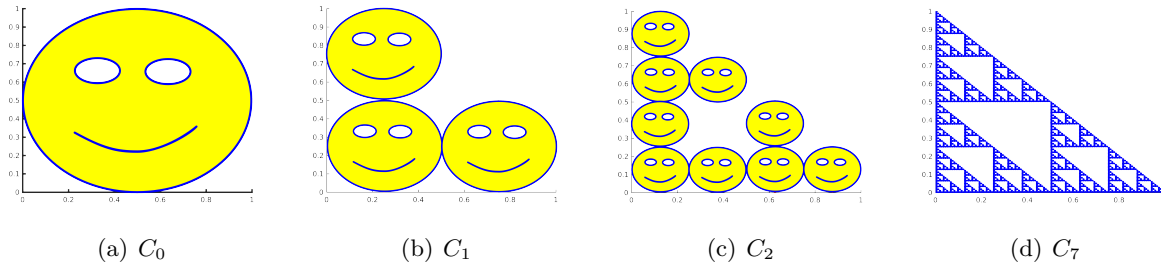


Figura 4.3: Iteraciones que aproximan al triángulo de Sierpinski.

$\lim C_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Luego, por la unicidad del límite, se tiene que $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Así, C es el fractal conocido como el triángulo de Sierpinski. Ahora, consideremos la semilla C_0 como en la Figura 4.3-(a). Notemos que la sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Más aún, $\lim C_k = C$. Por último, notemos que $\mathcal{O}\left(C_0, \frac{2}{3}\right) = \{C_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Ejemplo 4.2.2. Consideremos $\{\mathbb{R}; f_1, f_2\}$ el *SIF*, con $f_1(x) = \frac{x}{3}$ y $f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Sea $C_0 = [0, 1]$ y dado que $C_k = 2_{\frac{2}{3}}^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.1. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.4. Además, se puede verificar que el atractor, en este caso, es el conjunto de Cantor.



Figura 4.4: Iteraciones que aproximan al conjunto de Cantor en \mathbb{R} .

Ejemplo 4.2.3. Consideremos el *SIF* $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$, con $f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $f_2(x, y) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right)$ y $f_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Sea C_0 como en la Figura 4.5 y dado que $C_k = 2_{\frac{2}{3}}^{f_i}(C_{k-1})$. La

sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.1. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.5. Además, se puede verificar que el atractor es otra forma del triángulo de Sierpinski.

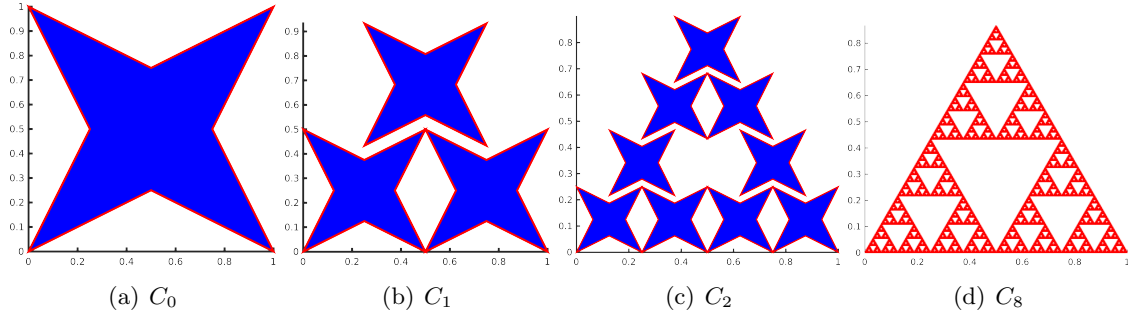


Figura 4.5: Iteraciones que aproximan al triángulo de Sierpinski.

Ejemplo 4.2.4. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$, $f_2(x, y) = (\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3})$, $f_3(x, y) = (\frac{x+2}{3}, \frac{y+2}{3})$ y $f_4(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y+2}{3})$. Sea C_0 como en la Figura 4.6-(a). Dado que $C_k = 2^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.3. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.6. Además, se puede verificar que el atractor, en este caso, es conjunto de Cantor en \mathbb{R}^2 .

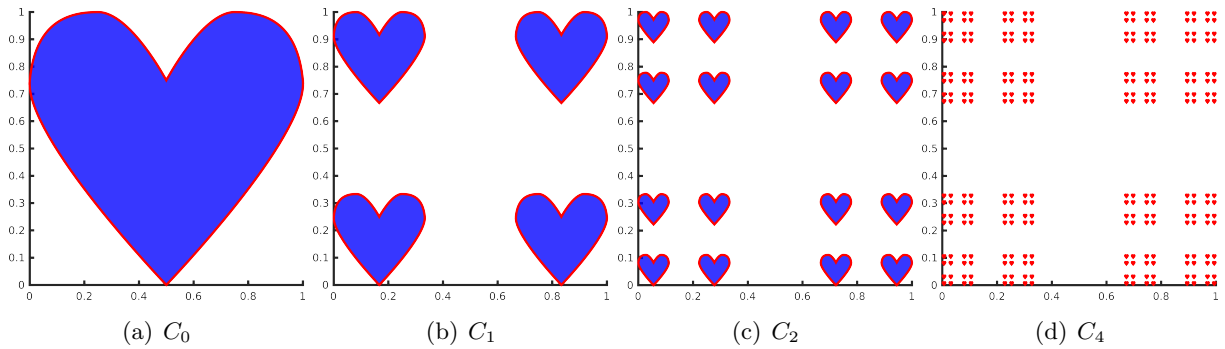


Figura 4.6: Iteraciones que aproximan al conjunto de Cantor en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.5. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$, $f_2(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y+1}{3})$, $f_3(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y+2}{3})$, $f_4(x, y) = (\frac{x+1}{3}, \frac{y}{3})$, $f_5(x, y) = (\frac{x+1}{3}, \frac{y+2}{3})$, $f_6(x, y) = (\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3})$, $f_7(x, y) = (\frac{x+2}{3}, \frac{y+1}{3})$ y $f_8(x, y) = (\frac{x+2}{3}, \frac{y+2}{3})$.

Sea $C_0 = \square[(\frac{1}{2}, 0), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1), (0, \frac{1}{2})]$ y dado que $C_k = 2^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.3. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.7. Más aún, se puede verificar que el atractor, en este caso, es la Carteta de Sierpinski.

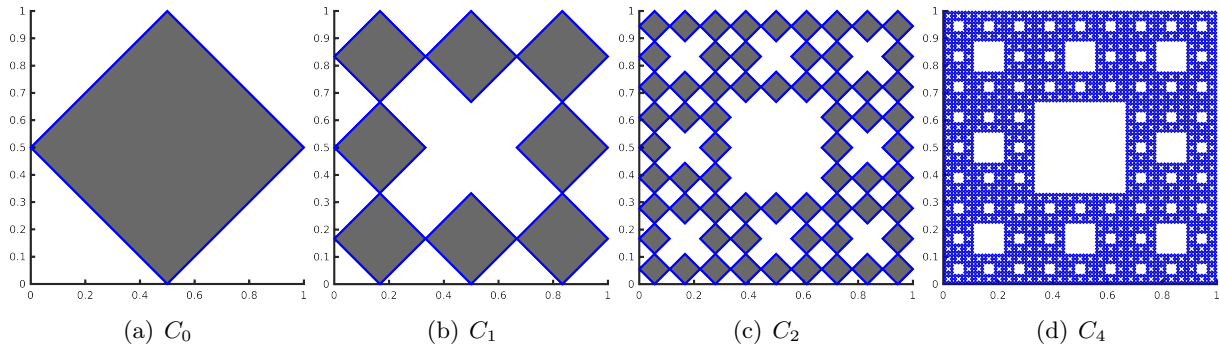


Figura 4.7: Iteraciones que aproximan a la Carteta de Sierpinski en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.6. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$, $f_2(x, y) = \left(\frac{1}{3}(x \cos(\frac{\pi}{3}) - y \sin(\frac{\pi}{3}) + 1), \frac{1}{3}(x \sin(\frac{\pi}{3}) + y \cos(\frac{\pi}{3}))\right)$, $f_3(x, y) = \left(\frac{1}{3}(x \cos(\frac{\pi}{3}) + y \sin(\frac{\pi}{3}) + \frac{3}{2}), \frac{1}{3}(-x \sin(\frac{\pi}{3}) + y \cos(\frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2})\right)$ y $f_4(x, y) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3}\right)$.

Sea $C_0 = \square[(0, 0), (0.1, 0), (0.1, 1), (0, 1)]$ y dado que $C_k = 2^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.3. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.8. Más aún, se puede verificar que el atractor, en este caso, es la curva de Koch.

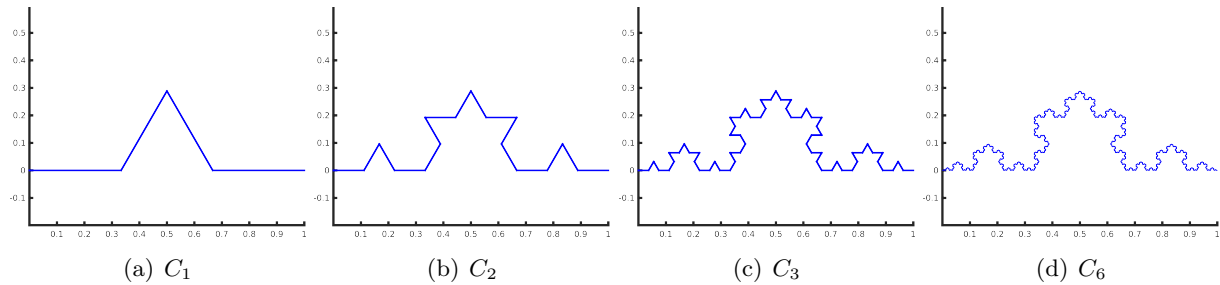
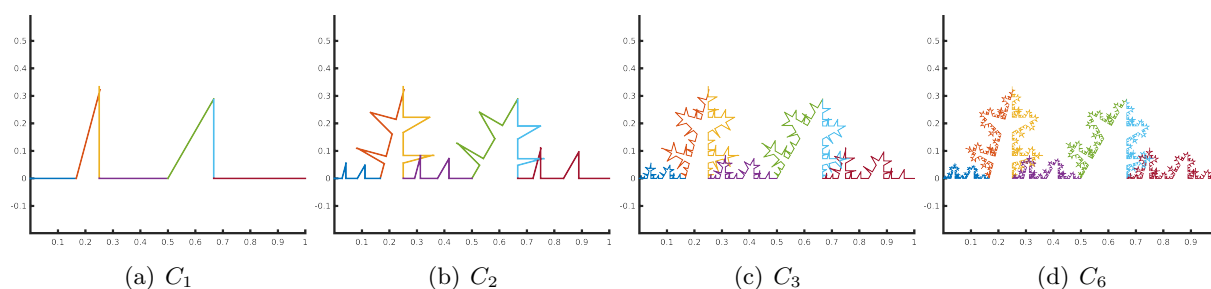


Figura 4.8: Iteraciones que aproximan a la curva de Koch.

Ejemplo 4.2.7. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = \left(\frac{x}{6}, \frac{y}{6}\right)$, $f_2(x, y) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}(x \cos(\frac{5\pi}{12}), \frac{1}{3}(x \sin(\frac{5\pi}{12}) + y \cos(\frac{5\pi}{12}))\right)$, $f_3(x, y) = \left(\frac{3}{12} + \frac{y}{3}, \frac{x}{3}\right)$, $f_4(x, y) = \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}\right)$, $f_5(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(x \cos(\frac{\pi}{3}) - y \sin(\frac{\pi}{3})), \frac{1}{3}(x \sin(\frac{\pi}{3}) + y \cos(\frac{\pi}{3}))\right)$, $f_6(x, y) = \left(\frac{2}{3} + \frac{2y}{7}, \frac{2x}{7}\right)$ y $f_7(x, y) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3}\right)$.

Sea $C_0 = \square[(0, 0), (0.1, 0), (0.1, 1), (0, 1)]$ y dado que $C_k = 2^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.3. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.9.

Otra forma de aproximar fractales es mediante el uso de la Proposición 4.1.3.

Figura 4.9: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.8. Consideremos el SIF $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$, con $f_1(x, y) = (x, y)$, $f_2(x, y) = (\frac{1}{2}(x - y), 1 + \frac{1}{2}(x + y))$ y $f_3(x, y) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + y), \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(y - x))$.

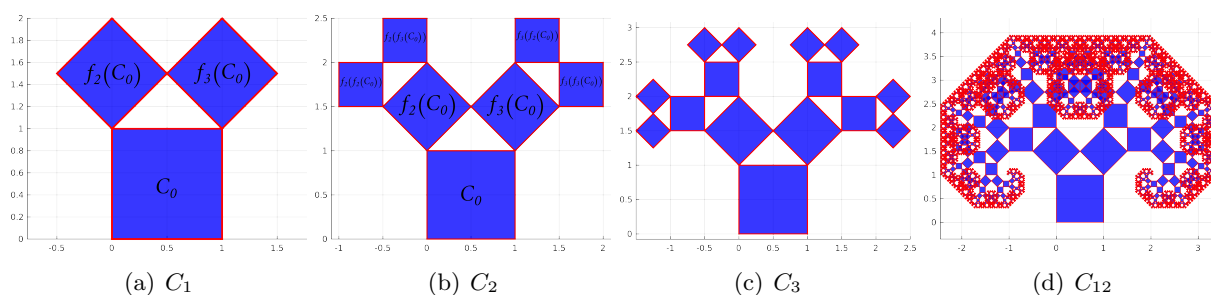


Figura 4.10: Iteraciones que aproximan al Árbol de Pitágoras.

Observemos que la función f_1 es una función de Lipschitz con constante de Lipschitz 1. Por lo que, en este caso no podemos usar el Teorema 4.1.9. Notemos que la función $2_3^{f_i} : 2^{\mathbb{R}^2} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$ tiene regla de correspondencia $2_3^{f_i}(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$, para cada $A \in 2^{\mathbb{R}^2}$. Consideremos la semilla $C_0 = \square[(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)]$ (vea la Figura 4.10-(a)). Luego, $C_1 = 2_3^{f_i}(C_0) = f_1(C_0) \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0) = C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0)$, donde $f_2(C_0) = \square[(0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (0, 2), (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$ y $f_3(C_0) = \square[(1, 1), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (1, 2), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$ (vea la Figura 4.10-(a)). Así,

$$\begin{aligned}
 C_2 &= 2_3^{f_i}(C_1) \\
 &= f_1(C_1) \cup f_2(C_1) \cup f_3(C_1) \\
 &= C_1 \cup f_2(C_1) \cup f_3(C_1) \\
 &= [C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0)] \cup f_2(C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0)) \cup f_3(C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0)) \\
 &= C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0) \cup f_2(f_2(C_0)) \cup f_2(f_3(C_0)) \cup f_3(f_2(C_0)) \cup f_3(f_3(C_0)),
 \end{aligned}$$

donde $f_2(f_2(C_0)) = \square[(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (-\frac{1}{2}, 2), (-1, 2), (-1, \frac{3}{2})]$,
 $f_2(f_3(C_0)) = \square[(0, 2), (0, \frac{5}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), (-\frac{1}{2}, 2)]$,
 $f_3(f_2(C_0)) = \square[(1, 2), (\frac{3}{2}, 2), (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), (1, \frac{5}{2})]$ y
 $f_3(f_3(C_0)) = \square[(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (2, \frac{3}{2}), (2, 2), (\frac{3}{2}, 2)]$.

El término C_2 se puede ver gráficamente en la Figura 4.10-(b). Además,

$$\begin{aligned}
C_3 &= 2_3^i(C_2) \\
&= f_1(C_2) \cup f_2(C_2) \cup f_3(C_2) \\
&= C_2 \cup f_2(C_2) \cup f_3(C_2) \\
&= [C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0) \cup f_2(f_2(C_0)) \cup f_2(f_3(C_0)) \cup f_3(f_2(C_0)) \cup f_3(f_3(C_0))] \cup \\
&\quad f_2(C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0) \cup f_2(f_2(C_0)) \cup f_2(f_3(C_0)) \cup f_3(f_2(C_0)) \cup f_3(f_3(C_0))) \cup \\
&\quad f_3(C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0) \cup f_2(f_2(C_0)) \cup f_2(f_3(C_0)) \cup f_3(f_2(C_0)) \cup f_3(f_3(C_0))) \\
&= C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_3(C_0) \cup f_2(f_2(C_0)) \cup f_2(f_3(C_0)) \cup f_3(f_2(C_0)) \cup f_3(f_3(C_0)) \cup \\
&\quad f_2(f_2(f_2(C_0))) \cup f_2(f_2(f_3(C_0))) \cup f_2(f_3(f_2(C_0))) \cup f_2(f_3(f_3(C_0))) \cup f_3(f_2(f_2(C_0))) \cup \\
&\quad f_3(f_2(f_3(C_0))) \cup f_3(f_3(f_2(C_0))) \cup f_3(f_3(f_3(C_0))),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
f_2(f_2(f_2(C_0))) &= \square \left[\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right), \left(-1, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \right], \\
f_2(f_2(f_3(C_0))) &= \square \left[\left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right), \left(-1, 2\right), \left(-\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right), \left(-\frac{3}{2}, 2\right) \right], \\
f_2(f_3(f_2(C_0))) &= \square \left[\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 3\right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right) \right], \\
f_3(f_2(f_2(C_0))) &= \square \left[\left(1, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right), (1, 3), \left(\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right) \right], \\
f_3(f_2(f_3(C_0))) &= \square \left[\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{4}\right), \left(\frac{3}{2}, 3\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{11}{4}\right) \right], \\
f_3(f_3(f_2(C_0))) &= \square \left[\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right), (2, 2) \right] \text{ y} \\
f_3(f_3(f_3(C_0))) &= \square \left[\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right), \left(2, \frac{3}{2}\right) \right].
\end{aligned}$$

La gráfica del término C_3 se encuentra en la Figura 4.10-(c). Más aún, en la Figura 4.10-(d) se visualiza el término C_{12} de la sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Observemos $C_k \subset C_{k+1}$ y $\rho(C_{k+1}, C_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, por la Proposición 1.3.12, $H(C_k, C_{k+1}) = \rho(C_{k+1}, C_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$. Veamos que $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k\varepsilon$. Consideremos $m, l \geq k$. Así, $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{k}$ y $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{k}$. Observemos que si $m = l$, entonces $H(C_l, C_m) = 0 < \varepsilon$. Supongamos que $m > l$. Luego,

$$\begin{aligned}
H(C_l, C_m) &\leq H(C_l, C_{l+1}) + H(C_{l+1}, C_{l+2}) + \dots + H(C_{m-1}, C_m) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{l+1} + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m-1} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m-l-1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m-l}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l \leq \frac{1}{l}$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m-1} \leq \frac{1}{m}$, con $l > 3$ y $m > 6$. Es decir, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l \leq \frac{1}{l}$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \leq \frac{1}{m}$.

Así, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l$. Por otra parte, como $\frac{1}{l} < \varepsilon$ y $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$, se sigue que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l < \varepsilon$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m < \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$. En consecuencia, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m < \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$. Esto es, $\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} < \varepsilon$. Por lo tanto, $H(C_l, C_m) < \varepsilon$. En conclusión, $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Además, como \mathbb{R}^2 es

completo, por la Proposición 4.1.2, $2^{\mathbb{R}^2}$ es completo. Por lo que, la sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Más aún, por la Proposición 4.1.3-(2), $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = Cl(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$. Para este caso particular, a $Cl(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ es el fractal conocido como Árbol de Pitágoras. Cabe señalar que si iniciamos con una semilla C_0 diferente $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k$ es diferente. Por último, notemos que $\mathcal{O}(C_0, 2_3^{f_i}) = \{C_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Ejemplo 4.2.9. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$, $f_2(x, y) = (\frac{1}{2}(x - y), 1 + \frac{1}{2}(x + y))$ y $f_3(x, y) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + y), \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(x - y))$. Sea $C_0 = \square[(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.11.

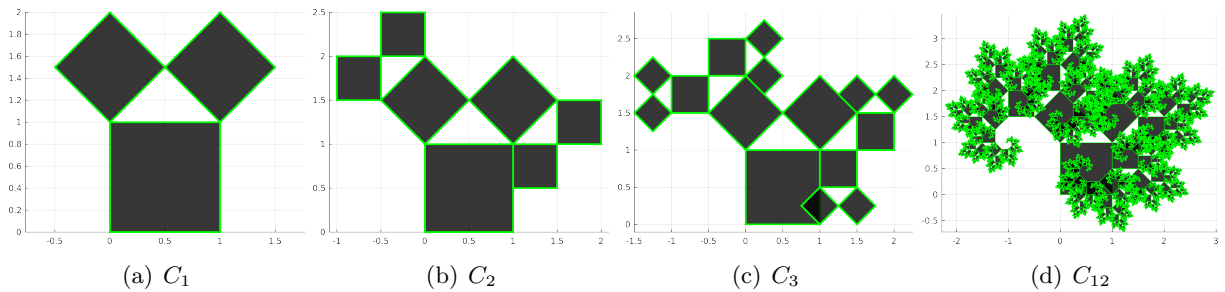


Figura 4.11: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.10. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$, $f_2(x, y) = (\frac{1}{2}(x - y), 1 + \frac{1}{2}(x + y))$ y $f_3(x, y) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + y), -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - y))$. Sea $C_0 = \square[(0, 0), (1, 0), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (0, 1)]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.12.

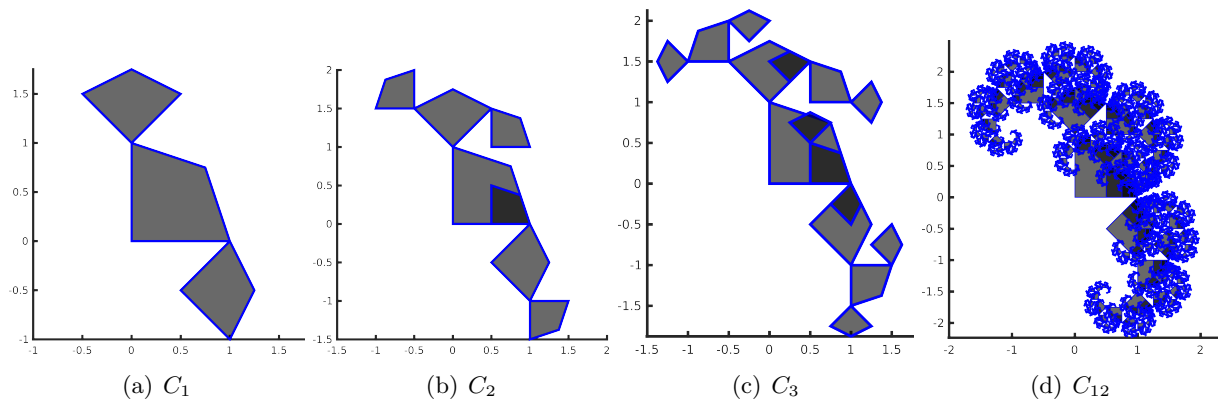


Figura 4.12: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.11. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$,
 $f_2(x, y) = \left(\frac{6}{7} \left(x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right), 1 + \frac{6}{7} \left(x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$ y
 $f_3(x, y) = \left(\frac{6}{7} \left(x \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) - y \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), 1 + \frac{6}{7} \left(x \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) + y \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)$.
 Sea $C_0 = \{0\} \times [0, 1]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.13.

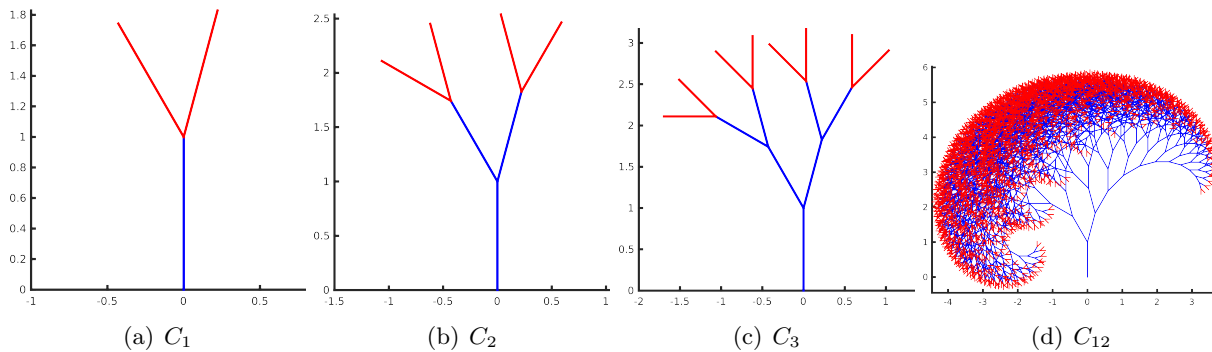


Figura 4.13: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.12. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$,
 $f_2(x, y) = \left(\frac{6}{7} \left(x \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right), \frac{1}{2} + \frac{6}{7} \left(x \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$ y
 $f_3(x, y) = \left(\frac{4}{7} \left(x \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), 1 + \frac{4}{7} \left(x \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)$.
 Sea $C_0 = \{0\} \times [0, 1]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.14.

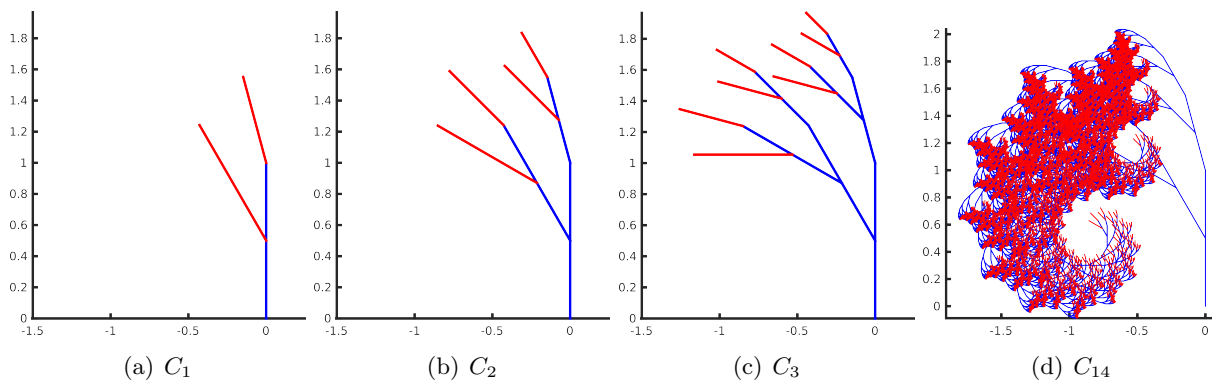


Figura 4.14: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.13. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$,
 $f_2(x, y) = \left(\frac{4}{7} \left(x \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right), \frac{17}{18} + \frac{4}{7} \left(x \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right)$,
 $f_3(x, y) = \left(\frac{3}{7} \left(x \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right), \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \left(x \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\right)$,

$$f_4(x, y) = \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{7} (x \cos(-\frac{\pi}{6}) - y \sin(-\frac{\pi}{6})), 1 + \frac{4}{7} (x \sin(-\frac{\pi}{6}) + y \cos(-\frac{\pi}{6})) \right) \text{ y}$$

$$f_5(x, y) = \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{7} (x \cos(-\frac{\pi}{4}) - y \sin(-\frac{\pi}{4})), \frac{2}{5} + \frac{3}{7} (x \sin(-\frac{\pi}{4}) + y \cos(-\frac{\pi}{4})) \right).$$

Sea $C_0 = \square[(0, 0), (0.1, 0), (0.1, 1), (0, 1)]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.15.

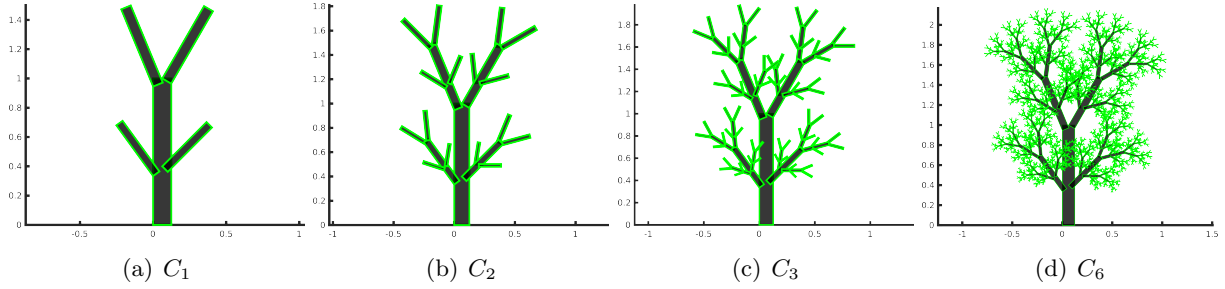


Figura 4.15: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.14. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$,

$$f_2(x, y) = \left(\frac{6}{7} (x \cos(\frac{\pi}{6}) - y \sin(\frac{\pi}{6})), 1 + \frac{6}{7} (x \sin(\frac{\pi}{6}) + y \cos(\frac{\pi}{6})) \right) \text{ y}$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{4}{7} (x \cos(-\frac{\pi}{2}) - y \sin(-\frac{\pi}{2})), \frac{17}{16} + \frac{4}{7} (x \sin(-\frac{\pi}{2}) + y \cos(-\frac{\pi}{2})) \right).$$

Sea $C_0 = \square[(0, 0), (0.1, 0), (0.1, 1), (0, 1)]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.16.

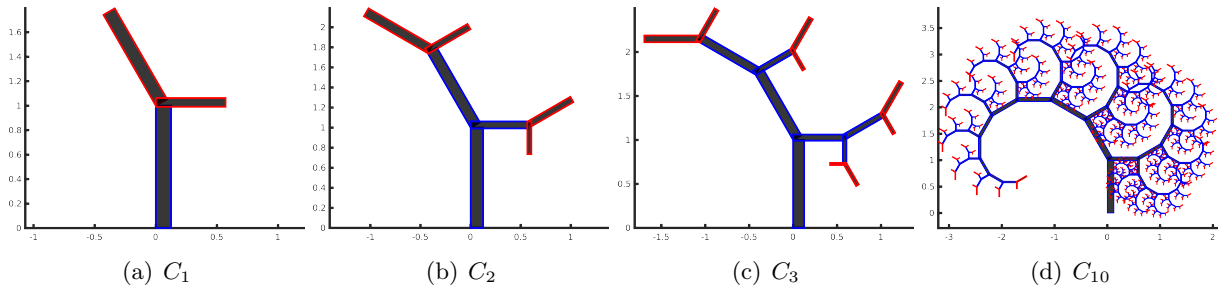


Figura 4.16: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.15. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$,

$$f_2(x, y) = \left(\frac{6}{7} (x \cos(\frac{\pi}{6}) - y \sin(\frac{\pi}{6})), \frac{6}{7} (x \sin(\frac{\pi}{6}) + y \cos(\frac{\pi}{6})) \right) \text{ y}$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{4}{7} (x \cos(-\frac{\pi}{2}) - y \sin(-\frac{\pi}{2})), 1 + \frac{4}{7} (x \sin(-\frac{\pi}{2}) + y \cos(-\frac{\pi}{2})) \right).$$

Sea $C_0 = \square[(0, 0), (0.1, 0), (0.1, 1), (0, 1)]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.17.

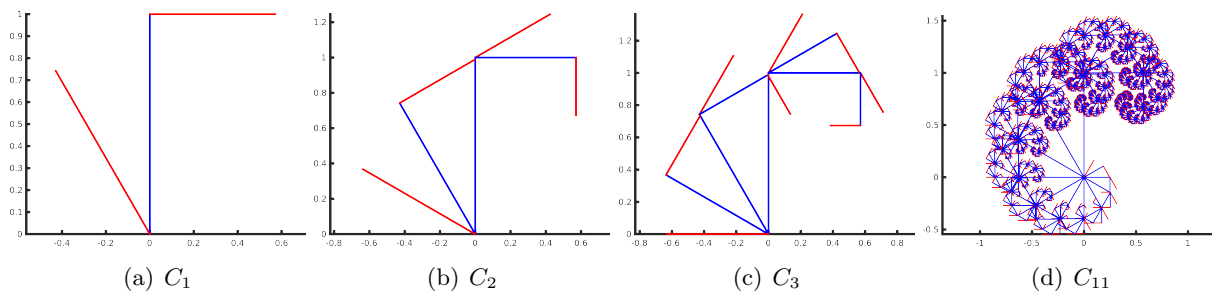


Figura 4.17: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.16. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$, $f_2(x, y) = \left(\frac{6}{7}(x \cos(\frac{\pi}{6}) - y \sin(\frac{\pi}{6})), 1 + \frac{6}{7}(x \sin(\frac{\pi}{6}) + y \cos(\frac{\pi}{6}))\right)$ y $f_3(x, y) = \left(\frac{4}{7}(x \cos(-\frac{\pi}{2}) - y \sin(-\frac{\pi}{2})), \frac{4}{7}(x \sin(-\frac{\pi}{2}) + y \cos(-\frac{\pi}{2}))\right)$. Sea $C_0 = \square[(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.18.

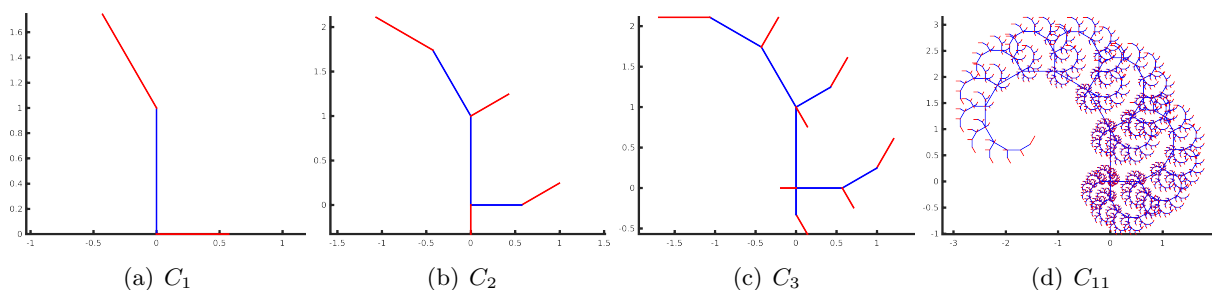


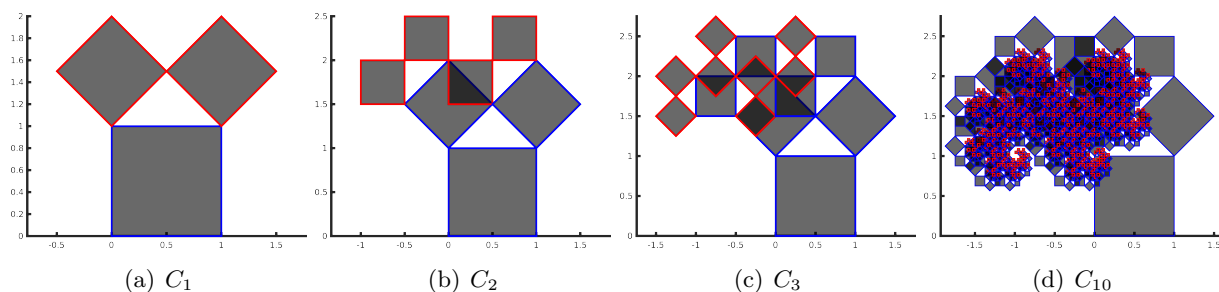
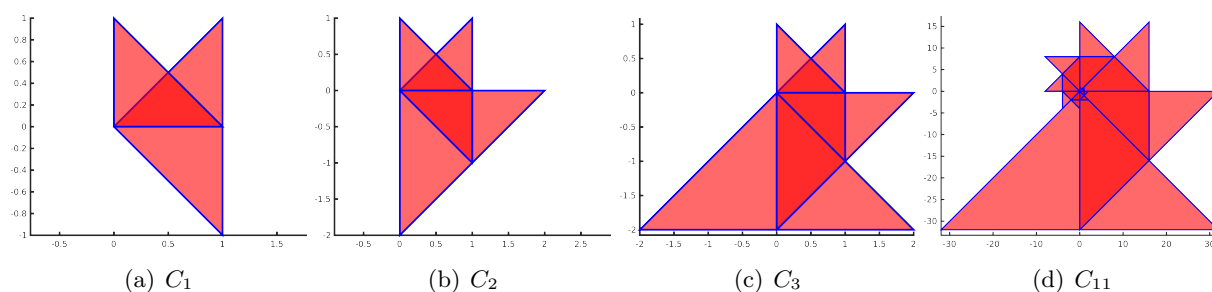
Figura 4.18: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 4.2.17. Consideremos $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ el *SIF*, con $f_1(x, y) = (x, y)$, $f_2(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x \cos(\frac{\pi}{4}) - y \sin(\frac{\pi}{4})), 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x \sin(\frac{\pi}{4}) + y \cos(\frac{\pi}{4}))\right)$ y $f_3(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x \cos(\frac{\pi}{4}) - y \sin(\frac{\pi}{4})), 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x \sin(\frac{\pi}{4}) + y \cos(\frac{\pi}{4}))\right)$. Sea $C_0 = \square[(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)]$ y dado que $C_k = 2_3^{f_i}(C_{k-1})$. La sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge siguiendo la misma idea del Ejemplo 4.2.8. Algunos términos de esta sucesión se encuentran en la Figura 4.19.

Finalmente, mostramos una sucesión de conjuntos la cual no es convergente, es decir, no aproxima a algún fractal particular.

Ejemplo 4.2.18. Sea el *SIF* $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2\}$, con $f_1(x, y) = (x, y)$ y $f_2(x, y) = (x + y, y - x)$.

Notemos que la función $2_2^{f_i} : 2^{\mathbb{R}^2} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$ tiene regla de correspondencia $2_2^{f_i}(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$, para cada $A \in 2^{\mathbb{R}^2}$. Sea $C_0 = \square[(0, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 0)]$. Luego, $C_1 = 2_2^{f_i}(C_0) = f_1(C_0) \cup f_2(C_0) =$

Figura 4.19: Iteraciones que aproximan a un fractal en \mathbb{R}^2 .Figura 4.20: Algunos términos de la sucesión generado por la semilla $C_0 = \square[(0,0), (1,0), (1,0)]$ y el SIF , $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2\}$, donde con $f_1(x, y) = (x, y)$ y $f_2(x, y) = (x + y, y - x)$.

$C_0 \cup f_2(C_0)$, donde $f_2(C_0) = \square[(0,0), (1,1), (1,-1)]$. Así, $C_2 = 2_2^{f_i}(C_1) = f_1(C_1) \cup f_2(C_1) = C_1 \cup f_2(C_1) = [C_0 \cup f_2(C_0)] \cup f_2(C_0 \cup f_2(C_0)) = C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_2(f_2(C_0))$, donde $f_2(f_2(C_0)) = \square[(0,0), (0,-2), (2,0)]$. Además, $C_3 = 2_2^{f_i}(C_2) = f_1(C_2) \cup f_2(C_2) = C_2 \cup f_2(C_2) = [C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_2(f_2(C_0))] \cup f_2(C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_2(f_2(C_0))) \cup f_2(f_2(f_2(C_0))) = C_0 \cup f_2(C_0) \cup f_2(f_2(C_0)) \cup f_2(f_2(f_2(C_0)))$, donde $f_2(f_2(f_2(C_0))) = \square[(0,0), (-4,0), (0,-4)]$. Algunos términos de la sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ se visualizan en la Figura 4.20. Observemos $C_k \subset C_{k+1}$ y $\rho(C_{k+1}, C_k) = \sqrt{2^k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo que, de la Proposición 1.3.12, $H(C_k, C_{k+1}) = \sqrt{2^k}$. Notemos que $H(C_k, C_{k+1}) \geq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ no es de Cauchy. Por lo tanto, la sucesión $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ diverge. Por último, notemos que $\mathcal{O}\left(C_0, 2_2^{f_i}\right) = \{C_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Conclusiones

El tema que se ha desarrollado en el presente trabajo pertenece a las áreas de la matemática conocidas como sistemas dinámicos discretos y topología. En seguida, a manera de conclusiones, se describen los resultados obtenidos al lograr los objetivos y metas planteados en el protocolo de tesis.

En el Capítulo 1 se realizó un breve repaso de los conceptos y resultados que permiten comprender el presente trabajo. Asimismo, por la importancia de la métrica de Hausdorff para esta tesis, se implementaron scripts en el lenguaje de programación Matlab que permiten visualizar gráficamente esta métrica para algunos casos particular.

En el Capítulo 2 se analizaron conceptos básicos respecto a sistemas dinámicos discretos. En particular, se detalló la construcción de diagramas Cobweb o red de araña ya que permite un mejor análisis de las órbitas. Además, se implementaron scripts en el lenguaje de programación Matlab que realizan la construcción de diagramas Cobweb. Más aún, se demuestra detalladamente propiedades dinámicas de la función tienda y la función máquina de sumar. Asimismo, se inició el estudio de la dinámica colectiva de la función tienda.

En el Capítulo 3 se expusieron los resultados principales del trabajo de tesis. En particular, se exhiben algunos resultados típicos de la dinámica topológica, principalmente se expone de manera accesible la demostración del famoso Teorema de Furstenberg. Posteriormente, se dio la solución al problema: descubrir todas las posibles implicaciones entre las afirmaciones siguientes:

- (1) f es transitiva;
- (2) 2^f es transitiva;
- (3) $C(f)$ es transitiva.

Finalmente, en el Capítulo 4 se mostró una aplicación de las funciones inducidas, la cual es construir fractales. Además, mediante el uso del lenguaje de programación en Matlab se pudo ver gráficamente dicha construcción.

Apéndice

Los scripts que presentamos a continuación los implementamos en el lenguaje de programación Matlab. Estos scripts realizan la representación gráfica de la métrica de Hausdorff con respecto a nubes para los hiperespacios $F_n(\mathbb{R})$, $F_n(\mathbb{R}^2)$, donde $n \in \mathbb{N}$. Asimismo, se exponen scripts que permiten construir los diagramas Cobweb. Finalmente, adjuntamos scripts que nos muestran gráficamente la construcción de fractales. Usualmente, a Command Window se le conoce como la línea de comandos o interfaz de línea de comandos y es donde se escriben las instrucciones que se mencionan posteriormente. Cabe mencionar que en este apéndice con “función” nos referimos al concepto de función conocido en el área de la computación.

Scripts para métricas

En esta parte se incluyen los scripts necesarios para hacer la representación gráfica de la métrica de Hausdorff con respecto a nubes para los hiperespacios $F_n(\mathbb{R})$, $F_n(\mathbb{R}^2)$. Estas gráficas se pueden ver en el Capítulo 1. El Script 1 calcula la distancia de un punto a un subconjunto finito en \mathbb{R} (vea la Definición 1.2.7). Notemos que `daB` es el nombre de la función, `a` es un número real y `B` es un subconjunto finito de \mathbb{R} . Un ejemplo de cómo usar el Script 1 es escribir desde Command Window `daB(5, [6])` y como respuesta se guardará el valor de $d(5, \{6\})$ en `r`.

Script 1.

```
function r=daB(a,B)
r=-1;
for i=1:numel(B)
    if (r < 0)
        r=abs(a-B(i));
    elseif (r > abs(a-B(i)) )
        r=abs(a-B(i));
    end
end
end
```

Script 2.

```
function r=rho(A,B)
r=-1;
for i=1:numel(A)
    if (r < 0)
        r=daB(A(i),B);
    elseif (r < daB(A(i),B) )
        r=daB(A(i),B);
    end
end
end
```

El Script 2 imita $\rho(A, B)$ como en la Definición 1.3.7, donde $A, B \in F_n(\mathbb{R})$. Observemos que `rho` es el nombre de la función y `A` y `B` son subconjuntos finitos de \mathbb{R} . Para usar el Script 2, es suficiente escribir desde Command Window `rho([5],[6])` y como respuesta se guardará el valor de $\rho(\{5\}, \{6\})$ en `r`, el cual es un caso particular. Cabe señalar que al utilizar el Script 2, automáticamente, se utiliza el Script 1.

El Script 3 se encarga de hacer los gráficos para la métrica de Hausdorff en el hiperespacio $F_n(\mathbb{R})$. Notemos que `hFkplot` es nombre de la función, `A` y `B` son subconjuntos finitos de \mathbb{R} , `r` es el radio de la nube, `e` es un número real que acomoda la gráfica de la nube alrededor de `B` y `color` es un vector de tres entradas, donde cada entrada es un valor en 0 y 1, el cual representa el color de la nube. Para hacer uso del Script 3, en particular, es suficiente escribir desde Command Window `hFkplot([5],[6],2,.1,[0 0 1])` y se obtendrá la gráfica de la nube alrededor de `{5}` y radio 2, $N(2, \{5\})$.

El Script 4 calcula la distancia $H(A, B)$ y representa las nubes para el hiperespacio $F_n(\mathbb{R})$, donde $A, B \in F_n(\mathbb{R})$. Observemos que `hFk` es el nombre de la función, `A` y `B` son subconjuntos finitos de \mathbb{R} y `t` es el radio de las nubes. Como ejemplo, es suficiente escribir desde Command Window `hFk([5],[6],2)` y como respuesta, se guardará el valor de $H(\{5\}, \{6\})$ en `r`. Además, se obtiene la Figura 1.6-(a). Al hacer uso del Script 4, este usará los Scripts 2 y 3 de forma automática.

Script 3.

```
function hFkplot(A,B,r,e,color)
YA=zeros(numel(A));
YB=zeros(numel(B));
for j=1: numel(B)
    D=zeros(2,1);
    D(1)=min(B(j))-r;
    D(2)=max(B(j))+r;
    Y=zeros(numel(D));
    d=plot(D,Y+e,'b');
    set(d,'Color',color,'LineWidth',32);
end
set(gca,'YTick',-100000:3:-100000+6);
plot(A,YA,'g*');
plot(B,YB,'m*');
end
```

Script 4.

```
function r=hFk(A,B,t)
r=max(rho(A,B),rho(B,A));
figure
hold on;
grid on;
axis equal;
plot(min(min(A),min(B))-r*(1.01),0,'w');
plot(max(max(A),max(B))+r*(1.01),0,'w');
hFkplot(A,B,t,r/10,[0.5 0.5 0.5]);
hFkplot(B,A,t,-r/10,[0 0 1]);
hold off;
end
```

El Script 5 calcula la distancia de un punto a un subconjunto finito en \mathbb{R}^2 (vea la Definición 1.2.7). Notemos que `daBFkR2` es el nombre de la función, `a` es un número complejo y `B` es un subconjunto finito de \mathbb{R}^2 , por lo cual, los elementos de `B` son numero complejos. Un ejemplo de cómo usar el Script 5 es escribir desde Command Window `daBFkR2(0,[1+2i])` y como respuesta se guardará el valor de $d((0,0), \{(1,2)\})$ en `r`.

El Script 6 calcula $\rho(A, B)$ como en la Definición 1.3.7, donde $A, B \in F_n(\mathbb{R}^2)$. Observemos que `rhoFkR2` es el nombre de la función y `A` y `B` son subconjuntos finitos de \mathbb{R}^2 . Para ejemplificar el uso del Script 6, es suficiente escribir desde Command Window `rhoFkR2([0],[1+2i])` y como

respuesta se guardará el valor de $\rho(\{(0,0)\}, \{(1,2)\})$ en r . Cabe señalar que al utilizar el Script 6, automáticamente, se utiliza el Script 5.

Script 5.

```
function r=daBFkR2(a,B)
r=-1;
for i=1: numel(B)
    re=real(a)-real(B(i));
    im=imag(a)-imag(B(i));
    aux=sqrt(re^2+im^2);
    if (r < 0)
        r= aux;
    elseif r > aux
        r=aux;
    end
end
end
```

Script 6.

```
function r=rhoFkR2(A,B)
r=-1;
for i=1: numel(A)
    if (r < 0)
        r=daBFkR2(A(i),B);
    elseif (r < daBFkR2(A(i),B) )
        r=daBFkR2(A(i),B);
    end
end
end
```

El Script 7 se encarga de hacer los gráficos para la métrica de Hausdorff en el hiperespacio $F_n(\mathbb{R}^2)$. Notemos que `hFkR2Plot` es nombre de la función, A y B son subconjuntos finitos de \mathbb{R}^2 , r es el radio de la nube y `color` es un vector de tres entradas, donde cada entrada es un valor en 0 y 1, el cual representa el color de la nube. Para ejemplificar el uso del Script 7, es suficiente escribir desde Command Window `hFkR2Plot([0], [1+2i], 3, .1, [0 0 1])` y se obtendrá la gráfica de la nube alrededor de $\{(0,1)\}$ y radio 3, $N(3, \{(0,1)\})$.

Script 7.

```
function hFkR2plot(B,A,r,color)
XA=zeros(numel(A),1);
XB=zeros(numel(B),1);
YA=zeros(numel(A),1);
YB=zeros(numel(B),1);
for i=1: numel(A)
    XA(i)=real(A(i));
    YA(i)=imag(A(i));
end
for i=1: numel(B)
    XB(i)=real(B(i));
    YB(i)=imag(B(i));
end
if r>0
    radio=max(XA);
    for j=1: numel(XA)
        x = -r+XA(j):r/1000:r+XA(j);
        y1=zeros(1);
        y2=zeros(1);
        for i=1: numel(x)
            y1(i) = sqrt(r^2-(x(i)-XA(j))^2)+YA(j);
            y2(i) = -sqrt(r^2-(x(i)-XA(j))^2)+YA(j);
        end
        X=x;
        Y=y1;
        for i=1: numel(x)
            X(i+numel(x))=x(numel(x)-i+1);
            Y(i+numel(x))=y2(numel(x)-i+1);
        end
        fill(X,Y,color);
        if radio==XA(j)
            plot([XA(j),XA(j)+r], [YA(j),YA(j)], 'y');
        end
    end
end
end
plot(XB,YB,'g*');
plot(XA,YA,'m*');
end
```

El Script 8 calcula la distancia $H(A, B)$ y representa las nubes para el hiperespacio $F_n(\mathbb{R}^2)$, donde $A, B \in F_n(\mathbb{R}^2)$. Observemos que `hFkR2` es el nombre de la función, `A` y `B` son subconjuntos finitos de \mathbb{R}^2 y `t` es el radio de la nube. Como ejemplo, es suficiente escribir desde Command Window `hFkR2([0], [1+2i], 3)` y como respuesta, se guardará el valor de $H(\{(0, 0)\}, \{(1, 2)\})$ en `r`. Además, se obtiene la Figura 1.7-(a). Al hacer uso del Script 8, este usará los Scripts 6 y 7 de manera automática.

Script 8.

```
function r=hFkR2(A,B,t)
r=max(rhoFkR2(A,B),rhoFkR2(B,A));
figure
hold on;
grid on;
axis equal;
hFkR2plot(A,B,t,[0.5 0.5 0.5]);
hFkR2plot(B,A,t,[0 0 1]);
hold off;
end
```

Scripts para diagrama Cobweb

En esta parte se incluyen scripts que permiten construir los diagramas Cobweb. Estos diagramas se pueden encontrar en el Capítulo 2. El Script 9 realiza diagramas Cobweb para funciones reales. Notemos que `Cobweb` es el nombre de la función, `a` y `b` son números reales tales que `a` es menor que `b`, `x` es un número real entre `a` y `b` y `k` es el número de puntos que se desea graficar. Por ejemplo, para obtener los diagramas Cobweb, es necesario escribir en Command Window `Cobweb(0, 1, 1/32, 40)`. Con esto, se obtiene la Figura 2.5-(c). Cabe señalar que el Script 9 utiliza el Script 10, el cual funge como la función real. En este caso, el Script 10 funge como la función tienda (vea el Ejemplo 1.2.26).

Script 9.

```

function Cobweb(a,b,x,k)
if a<b && min(x)>=a && max(x)<=b && mod(k,1)==0 && k>=0
    X=a:(b-a)/50:b;
    Y=zeros(numel(X),1);
    for i=1: numel(X)
        Y(i)=f(X(i));
    end
    figure;
    hold on;
    p=plot([a,b],[a,b]);
    set(p,'Color','blue','LineWidth',3);
    p0=plot(X,Y,'r');
    set(p0,'Color','red','LineWidth',3);
    for i=1:numel(x)
        xa=x(i);
        Rx=zeros(1,1);
        Ry=zeros(1,1);
        for j=1:k+1
            if mod(j,2) ==1
                Rx(j)=xa;
                Ry(j)=f(xa);
                xa=f(xa);
            else
                Rx(j)=xa;
                Ry(j)=xa;
            end
        end
        p1=plot(Rx,Ry,':r');
        set(p1,'Color',randi(100,1,3)/100,'LineWidth',3);
        set(gca,'XTick',0:1/4:1);
        set(gca,'YTick',0:1/4:1);
    end
    hold off;
else
    disp('Nota: a < b, n es un entero mayor o igual a cero,');
    disp('y x es un vector, donde sus elementos están en [a,b].');
end
end

```

Script 10.

```

function y=f(x)
if x<1/2
    y=2*x;
else
    y=2-2*x;
end
end

```

Scripts para la construcción de fractales

En esta parte se muestran los scripts que hacen posible realizar las gráficas del Capítulo 4 de esta tesis. La idea principal de los scripts que hemos hecho es la recursividad, la cual es una herramienta computacional.

Con el Script 11 se realizan las gráficas que se muestran en la Figura 4.2. Para esto, escribimos desde Command Window `T_S(0)` para obtener la Figura 4.2-(a). Luego, anotamos en Command Window `T_S(1)` para obtener la Figura 4.2-(b). Posteriormente, copiamos en Command Window `T_S(2)` para obtener la Figura 4.2-(c). Finalmente, redactamos en Command Window `T_S(8)` para obtener la Figura 4.2-(d). Al utilizar el Script 11 automáticamente se usará el Script 12.

Script 11.

```
function T_S(n)
figure;
hold on;
TS([0 1 1 0 0],[0 0 1 1 0],0,n);
hold off;
end
```

Script 12.

```
function TS(x,y,n,m)
if n==m
    fill(x,y,'r')
elseif n<m
    TS(x/2,y/2,n+1,m);
    TS(x/2+1/2,y/2,n+1,m);
    TS(x/2,y/2+1/2,n+1,m);
end
end
```

Con el Script 13 se realizan las gráficas que se muestran en la Figura 4.10. Para esto, escribimos desde Command Window `Curva_Arbol(1)` para obtener la Figura 4.10-(a). Luego, anotamos en Command Window `Curva_Arbol(2)` para obtener la Figura 4.10-(b). Entonces, copiamos en Command Window `Curva_Arbol(3)` para obtener la Figura 4.10-(c). Finalmente, redactamos en Command Window `Curva_Arbol(12)` para obtener la Figura 4.10-(d). Al utilizar el Script 13 automáticamente se usará el Script 14.

Script 13.

```
function Curva_Arbol(k)
figure;
hold on;
axis equal;
for i=1:k+1
    FArb(i-1,[0,1,3/4,0,0],[0,0,3/4,1,0]);
end
hold off;
end
```

Script 14.

```
function FArb(n,x,y)
if n>0
    FArb(n-1,(x-y)/2,1+(x+y)/2);
    FArb(n-1,1/2+(x+y)/2,-1/2+(x-y)/2);
else
    fill(x,y,'g');
end
end
```

Con el Script 15 se realizan las gráficas que se muestran en la Figura la Figura 4.5. Para esto, escribimos desde Command Window `Tri_Sier(0)` para obtener la Figura 4.5-(a). Así, copiamos en Command Window `Tri_Sier(1)` para obtener la Figura 4.5-(b). Similarmente, redactamos en Command Window `Tri_Sier(2)` para obtener la Figura 4.5-(c). Finalmente, anotamos en Command Window `Tri_Sier(8)` para obtener la Figura 4.5-(d). Al utilizar el Script 15 automáticamente se usará el Script 16.

Script 15.

```
function Tri_Sier(n)
figure;
hold on;
x=[0 1/2 1 3/4 1 1/2 0 1/4 0];
y=[0 1/4 0 1/2 1 3/4 1 1/2 0];
EM(x,y,0,n);
hold off;
end
```

Script 16.

```
function EM(x,y,n,m)
if n==m
fill(x,y,'r')
elseif n<m
EM(x/2,y/2,n+1,m);
EM(x/2+1/2,y/2,n+1,m);
EM(x/2+1/4,y/2+(3^(1/2))/4,n+1,m);
end
end
```

Con el Script 17 se realizan las gráficas que se muestran en la Figura 4.20. Para esto, escribimos desde Command Window `Espiral(1)` para obtener la Figura 4.20-(a). Similarmente, redactamos en Command Window `Espiral(2)` para obtener 4.20-(b). Luego, anotamos en Command Window `Espiral(3)` para obtener la Figura 4.20-(c). Finalmente, copiamos en Command Window `Espiral(11)` para obtener la Figura 4.20-(d). Al utilizar el Script 17 automáticamente se usará el Script 18.

Script 17.

```
function Espiral(n)
figure;
hold on;
x=[0 1 0 0];
y=[0 0 1 0];
L00(x,y,0,n);
hold off;
end
```

Script 18.

```
function L00(x,y,n,m)
if n==m
plot(x,y,'r')
elseif n<m
L00(x+y,y-x,n+1,m);
plot(x,y,'g')
end
end
```

Bibliografía

- [1] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl., 156 (2009), 1013-1033.
- [2] J. Banks, *Chaos for induced hyperspace maps*, Chaos Solitons Fractals 25 (3) (2005) 681-685.
- [3] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., San Diego, 1988.
- [4] F. Barragán, A. Romero, S. Sánchez-Perales y V. M. Grijalva, *Breve Introducción a la Métrica de Hausdorff, Capítulo 3*, Topología y sus Aplicaciones 3, Textos científicos, BUAP, 2014.
- [5] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of topology*, BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.
- [6] J. E. K. Dávalos y H. M. Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultadad de Ciencias, UNAM, (2014).
- [7] H. Furstenberg, *Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets and a Problem in Diophantine Approximation*, Systems Theory 1(1967), 1-49.
- [8] G. Higuera y A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc., 37 (2011), 367-401.
- [9] D. Hinrichsen, J. L. F. Muñoz, A. Fraguera Collar y A. Álvarez Prieto, *Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 22, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
- [10] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.
- [11] I. L. Irribaren, *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, 1973.
- [12] H. M. Lango, *Dinámica colectiva*, Revista Integración, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 30-1(2012), 25-41.

- [13] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.
 - [14] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co. San Francisco, 1982.
 - [15] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
 - [16] H. Román-Flores, *A note on transitivity in set-valued discrete systems*, Chaos of Solitons Fractals 17 (1) (2005) 33-42.
-

Índice alfabético

B

Bola abierta, 8

C

Clausura de conjuntos, 8

Componente conexas, 9

Conjunto

abierto, 8

Conjunto denso, 9

Constante

de contracción, 78

de Lipschitz, 78

Continuo, 15

Cubierta abierta, 9

D

Distancia de un punto a un conjunto, 7

E

espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos,
7

Espacio métrico, 6

compacto, 10

completo, 10

conexo, 9

disconexo, 9

totalmente acotado, 10

totalmente disconexo, 9

F

Función, 2

biyectiva, 5

caótica, 35

composición, 2

continua, 11

continua en un punto, 11

contracción, 78

débilmente mezclante, 36, 62, 64

de Lipschitz, 78

homeomorfismo, 13

identidad, 2

inducida, 22

inducida por el *SIF*, 79

inversa, 5

inyectiva, 5

máquina de sumar, 45, 72

minimal, 37

producto, 4

restricción, 11

sobreyectiva, 5

tienda, 12

totalmente transitiva, 36, 64

transitiva, 34

uniformemente continua, 14

Funciones conjugadas, 56

I

Imagen de una función, 2

Imagen inversa de una función, 2

M

Métrica, 6

euclidiana, 6

N

Nube alrededor de un conjunto, 18

O

Órbita, 26

P

Período, 27

Producto de un número natural por la sucesión

1, 44

Punto

fijo, 27

interior, 8

periódico, 27

S

SIF, 79

Sucesión, 10

convergente, 10

de Cauchy, 10

divergente, 10

T

Teorema

del empalme, 11

del valor intermedio, 12

Furstenberg, 63
