UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

MÉTRICA DE HAUSDORFF

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

VICTOR MANUEL GRIJALVA ALTAMIRANO

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. FRANCO BARRAGÁN MENDOZA

CO-DIRECTOR DE TESIS:

M.C. ARMANDO ROMERO MORALES

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, DICIEMBRE 2013.

Este trabajo fue financiado por el PROMEP, por medio del proyecto un método de discretización adaptiva para el problema inverso de la tomografía de capacitancias y nociones relacionadas con la teoría espectral, la teoría de continuos y sus hiperespacios, del CA Modelación Matemática y Topología (UTMIX-CA-33).

Dedico este trabajo a:

A mis padres
Virgen Altamirano Guerra
Gabriel Grijalva Santos

A mis hermanos
Yuridia y Luis Edgar

A mi inspiración
Rosa María Gutiérrez Apolonio

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme el regalo de la vida, por darme la oportunidad de conocer a todas las personas que me han hecho crecer como matemático y persona.

Agradezco a mis padres que a lo largo de mi carrera me brindaron su apoyo emocional y con esfuerzo solventaron mis gastos en la Universidad.

Agradezco a mis sinodales por hacerme las debidas observaciones y así poder mejorar este trabajo. Extiendo mi gratitud al Profesor Adolfo Maceda, por sus múltiples sugerencias y por ser un maestro quien siempre exigió un alto nivel académico.

También, extiendo mi gratitud al PROMEP, por el apoyo económico brindado por medio del proyecto *un método de discretización adaptiva para el problema inverso de la tomografía de capacitancias y nociones relacionadas con la teoría espectral, la teoría de continuos y sus hiperespacios*, del CA Modelación Matemática y Topología (UTMIX-CA-33) de nuestra Universidad.

Finalmente agradezco a mi director de tesis, al Dr. Franco Barragán Mendoza, pues con su ayuda he obtenido esta tesis y ha contribuido de forma incomparable a mi formación como matemático.

Prefacio

La temática de esta tesis se encuentra dentro de la rama de la matemática conocida como topología. Una de las nociones más importantes dentro de la topología y que tiene variedad de aplicaciones en otras áreas de la matemática es la convergencia. De manera muy intuitiva la convergencia trata de analizar qué tan cerca están o qué tan acumulados están ciertos puntos respecto a otro. En particular, en espacios métricos nos enfocamos en saber qué tan distantes o qué tan cerca están dos puntos dados, respecto a cierta métrica. En la literatura sólo es común encontrar convergencia de sucesiones de puntos. Sin embargo, en matemáticas y en varios fenómenos de la naturaleza se tiene la necesidad de tener una noción en cuanto a la distancia o cercanía entre subconjuntos de algún conjunto dado, no basta simplemente considerar distancia o cercanía entre puntos del conjunto.

En 1905 Dimitrie Ponpeiu, en su tesis doctoral [17], introduce una noción de distancia entre subconjuntos compactos del plano Euclideano. Cabe señalar que hasta entonces, no se conocía la definición de espacio métrico. Fue en 1906 cuando Maurice René Fréchet definió los espacios métricos, con lo cual se pudo verificar que en la colección de los subconjuntos compactos no vacíos del plano, tal noción de distancia entre conjuntos dada por Ponpeiu, era una métrica. Posteriormente, en 1914 Felix Hausdorff retoma tal noción para definir de manera general una métrica en la colección de subconjuntos compactos y no vacíos de un espacio métrico arbitrario [7], tal métrica se define como sigue: dados un espacio métrico (X, d) y dos subconjuntos compactos no vacíos A y B de X:

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}.$$

En honor a los investigadores que introdujeron y definieron esta noción, actualmente esta métrica es conocida como métrica de Ponpeiu-Hausdorff o simplemente como métrica de Hausdorff.

Por la relevancia que toma la métrica de Hausdorff en esa época, 1914, justo cuando Felix Hausdorff define formalmente un espacio topológico, investigadores de renombre, como L. Vietoris ([21]), K. Borsuk, S. Ulam ([6]) y E. Michel ([15]), se unen a Hausdorff en el estudio de espacios cuyos elementos son conjuntos, iniciando así una parte de la topología conocida como teoría de los hiperespacios de un continuo, donde un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío, y un hiperespacio de un continuo es un espacio métrico, considerado con la métrica de Hausdorff, cuyos elementos son subconjuntos del continuo dado con ciertas condiciones específicas. Cabe mencionar que la métrica de Hausdorff también es de utilidad en otras áreas de la matemática, como: ecuaciones diferenciales [11], estadística [4], teoría de operadores [19], entre otras. Además, tiene aplicaciones en otras áreas de la ciencia como: Medicina [12] y Computación [20].

El objetivo de este trabajo es estudiar la métrica de Hausdorff sobre el espacio más grande donde la podemos definir, es decir, sobre el espacio de los subconjuntos no vacíos, acotados y cerrados, $\mathcal{CB}(X)$, de un espacio métrico X; hacemos una recopilación de los resultados relacionados con la métrica de Hausdorff, que a nuestro parecer, son los más sobresalientes y útiles para aquellos que inician el estudio de la teoría de hiperespacios o que quieran estudiar la construcción formal de algunos fractales, presentándolos de manera conjunta, autocontenida y detallada. Para lograr tal objetivo, este trabajo lo hemos distribuido de la siguiente manera.

En el Capítulo 1, realizamos una breve introducción a los espacios métricos, principalmente para familiarizarnos con algunos conceptos y algunas notaciones que son utilizados a lo largo de la tesis. Al final de dicho capítulo, damos la definición de lo que es un continuo, presentamos ejemplos y verificamos algunas de sus propiedades.

En el Capítulo 2, definimos la métrica de Hausdorff en la colección de los subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados, $\mathcal{CB}(X)$, de un espacio métrico X dado. Cabe mencionar que cada subespacio de $\mathcal{CB}(X)$ considerado con esta métrica, se le conoce como hiperespacio del espacio métrico X. En este capítulo, mostramos formas alternativas, y mostramos algunas de sus propiedades. Además, analizamos la convergencia en el espacio $\mathcal{CB}(X)$ utilizando esta métrica e introducimos la noción de límite superior e inferior de una sucesión de conjuntos.

En el Capítulo 3, estudiamos algunas propiedades que son compartidas entre un espacio métrico X y su respectivo espacio $\mathcal{CB}(X)$. Entre algunas propiedades que dependen de la métrica, verificamos que la propiedad de acotabilidad, precompacidad y completez son equivalentes para X y $\mathcal{CB}(X)$. En cuanto a las propiedades topológicas, mostramos que la propiedad de compacidad es equivalente para X y $\mathcal{CB}(X)$; y por otra parte demostramos que el espacio $\mathcal{CB}(X)$ es conexo siempre que el espacio X sea conexo y compacto.

En el Capítulo 4, mostramos algunas aplicaciones de la métrica de Hausdorff. Primero, en la Teoría de Hiperespacios de Continuos. En esta parte introducimos la topología de Vietoris y verificamos que la topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris son la misma. La aplicación de la métrica de Hausdorff radica en la facilidad que nos brinda para realizar algunas demostraciones de los teoremas mostrados en esta teoría. Segundo, mostramos la aplicación de la métrica de Hausdorff en la aproximación de algunos fractales pertenecientes a la clase de los fractales que cumplen la propiedad de autosemejanza, dentro de los cuales tenemos: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la carpeta de Sierpinski y la curva de Koch.

A pesar de que la métrica de Hausdorff no es una noción nueva en Matemáticas, son pocos los libros que se detienen a hacer un análisis detallado sobre sus propiedades y aplicaciones. Por tal razón, en la tesis organizamos y presentamos un texto que sirva como referencia para adentrarse en el estudio y en las aplicaciones de tal métrica. Esperamos que el lector encuentre interesante, comprensible y útil la tesis aquí expuesta.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos las notaciones, los conceptos y los resultados que utilizamos para el desarrollo de nuestro trabajo. Muchas de las demostraciones de los teoremas de esta sección se pueden consultar en [10], [22] y [13], otras se encuentran en las referencias que se señalarán antes de mencionar los teoremas. En este capítulo sólo se demostraron los teoremas que no son muy conocidos o que son de mucha utilidad en nuestro trabajo.

1.1. Notaciones y conceptos básicos

En esta sección hablaremos del ínfimo y del supremo de un conjunto, siempre y cuando existan. El conjunto de los números reales lo hemos denotado como $\mathbb{R}$, al conjunto de los números naturales lo hemos denotado como $\mathbb{N}$ y al conjunto de los números irracionales lo hemos denotado como $\mathbb{I}$. Designamos a los conjuntos con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots, Z$. El conjunto vacío es denotado por $\emptyset$.

Definición 1.1.1. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Entonces A es:

1. *Acotado superiormente* si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$, para todo $a \in A$. Al número M se le llama *cota superior* de A.

2. *Acotado inferiormente* si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a$, para todo $a \in A$. Al número m se le llama *cota inferior* de A.

3. *Acotado* si está acotado superior e inferiormente.

Definición 1.1.2. En $(\mathbb{R}, d)$ sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que A *es un intervalo* si para cada $x, y \in A$, y para cada $z \in \mathbb{R}$ con $x \leq z \leq y$ se cumple que $z \in A$.

Ejemplo 1.1.3. Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. Los intervalos siguientes son acotados, siendo a una cota inferior y b una cota superior.

1. $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

2. $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,

3. $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,

4. $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Definición 1.1.4. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Se dice que un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el *supremo* de A y se escribe $\alpha = \sup(A)$ si cumple:
   a) α es cota superior de A;
   b) si μ es cota superior de A, entonces $\alpha \leq \mu$.
2. Se dice que un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el *ínfimo* de A y se escribe $\beta = \text{ínf}(A)$ si satisface:
   a) β es una cota inferior de A;
   b) Si μ es una cota inferior de A, entonces $\mu \leq \beta$.

El siguiente resultado es conocido como el Axioma del supremo. Dicho resultado será de gran utilidad para garantizar la existencia del supremo en un conjunto.

Axioma 1.1.5. Si S es un conjunto no vacío acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces S tiene supremo en $\mathbb{R}$.

Corolario 1.1.6. Si S es un conjunto no vacío acotado inferiormente en $\mathbb{R}$, entonces S tiene ínfimo en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.7. Sean a y b dos números reales tales que $a < b$ y $A = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Entonces $\text{ínf}(A) = a$ y $\sup(A) = b$.

El siguiente resultado es conocido como la propiedad Arquimediana.

Teorema 1.1.8. Si $x \in \mathbb{R}$, existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

No es difícil verificar que si el supremo y el ínfimo existen, entonces son únicos. Además, si $A \subset \mathbb{R}$ con A acotado y no vacío, entonces $\text{ínf}(A) \leq \sup(A)$.

Teorema 1.1.9. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ el cual es no vacío y acotado superiormente, entonces $\alpha = \sup(A)$ si y sólo si:

1. Para cada $a \in A$, $a \leq \alpha$, y
2. Para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $\alpha - \epsilon < a$.

Teorema 1.1.10. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ el cual es no vacío y acotado inferiormente, entonces $\beta = \text{ínf}(A)$ si y sólo si:

1. Para cada $a \in A$, $a \geq \beta$, y
2. Para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a < \beta + \epsilon$.

Recordemos que $a \in A$ es el máximo del conjunto A si para todo $x \in A$, $a \geq x$.

Lema 1.1.11. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces $\text{máx}\{a + b, c + d\} \leq \text{máx}\{a, c\} + \text{máx}\{b, d\}$.

Demostración. Si $\text{máx}\{a + b, c + d\} = a + b$, se tiene que

$$\text{máx}\{a + b, c + d\} = a + b \leq \text{máx}\{a, c\} + \text{máx}\{b, d\}.$$

Si $\text{máx}\{a + b, c + d\} = c + d$, se sigue que

$$\text{máx}\{a + b, c + d\} = c + d \leq \text{máx}\{a, c\} + \text{máx}\{b, d\}.$$

Por lo tanto, $\text{máx}\{a + b, c + d\} \leq \text{máx}\{a, c\} + \text{máx}\{b, d\}$. □

Lema 1.1.12. Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\text{máx}\{a, -a\} = |a|$.

Demostración. Note que si $a \geq 0$, $\max\{a, -a\} = a = |a|$. Por el contrario, si $a < 0$, se sigue que $\max\{a, -a\} = -a = |a|$. $\square$

Teorema 1.1.13. Sean A y B dos subconjuntos acotados no vacíos de números reales. Entonces

1. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
2. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

Demostración. Sólo probaremos la proposición 1, es decir, $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Sea $\alpha = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Veamos que α es cota superior de $A \cup B$. Sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, $x \leq \sup(A)$. Si $x \in B$, $x \leq \sup(B)$. Por lo tanto, $x \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\} = \alpha$. Ahora veamos que α es la mínima cota superior de $A \cup B$. Supóngase que β es una cota superior de $A \cup B$. Entonces $x \leq \beta$, para cada $x \in A$ y cada $x \in B$. Note que $\sup(A) \leq \beta$ y $\sup(B) \leq \beta$. Así, $\alpha \leq \beta$. Por lo tanto, $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. De forma similar se prueba la proposición 2. $\square$

Teorema 1.1.14. Sean A y B subconjuntos acotados no vacíos de números reales tales que $A \subset B$. Entonces: $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.

Teorema 1.1.15. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Si $\epsilon > 0$ e $\inf(A) < \epsilon$, entonces existe $a \in A$ tal que $a < \epsilon$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\inf(A) < \epsilon$. Entonces $\epsilon_1 = \epsilon - \inf(A) > 0$. Luego, por el Teorema 1.1.10, existe $a \in A$ tal que $a < \inf(A) + \epsilon_1$. De donde, $a < \epsilon$. $\square$

1.2. Espacios métricos y propiedades

En esta sección hablaremos sobre lo que es un espacio métrico. También se estudiarán algunas propiedades en espacio métricos tales como: precompacidad, compacidad, completez, etc. En todo el trabajo de la tesis, la unión y la intersección entre conjuntos serán denotadas por $\cup$ y $\cap$ respectivamente. Las familias de conjuntos las denotamos por medio de letras caligráficas mayúsculas: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,... la unión y la intersección sobre familias de conjuntos las denotamos por $\bigcup$ y $\bigcap$, respectivamente. Además, dado un espacio métrico X, X^n denota el producto topológico de X por sí mismo n veces.

Definición 1.2.1. *Una cuasi semimétrica en un conjunto* X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las condiciones:

1. $d(x, y) \geq 0$, y $d(x, x) = 0$, para todo $x, y \in X$.
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

El par (X, d) es llamado *espacio cuasi semimétrico.*

Definición 1.2.2. *Una cuasimétrica en un conjunto* X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las condiciones:

1. $d(x, y) \geq 0$, y $d(x, x) = 0$, para todo $x, y \in X$.
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.
3. Si $d(x, y) = d(y, x) = 0$, entonces $x = y$, para todo $x, y \in X$.

El par (X, d) es llamado *espacio cuasimétrico.*

Definición 1.2.3. Sea X un conjunto no vacío. Una *métrica* en X es una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ que posee las siguientes propiedades:

1. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.
2. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.
4. Para todo $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El par (X, d), constituido por el conjunto X y la métrica d definida sobre X, se denomina *espacio métrico.*

Por lo general a una métrica d sobre un conjunto X también se le llama distancia sobre X, además si $x, y \in X$, al número $d(x, y)$ se le denomina distancia entre x y y.

Si debilitamos la Definición 1.2.3 excluyendo a 2, y se permite que existan $x, y \in X$ con $x \neq y$ tal que $d(x, y) = 0$, d no es una métrica y recibe el nombre de *seudométrica.*

Ejemplo 1.2.4. Un ejemplo clásico de espacio métrico es el conjunto de los números reales y *la distancia usual* dada por $d(a, b) = |b - a|$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$. De manera general, para $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$, con *la distancia euclidiana* $d((x_1, x_1, \ldots, x_n), (y_1, y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$, para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, es un espacio métrico, denominado *espacio euclídeo n-dimensional.*

De aquí en adelante, siempre que se trabaje con $\mathbb{R}$, será considerado con la distancia usual.

Ejemplo 1.2.5. Sean (X, d) un espacio métrico, $x, y, z \in X^2$, donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ y definimos $d : X^2 \times X^2 \longrightarrow [0, \infty)$ como $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \text{máx}\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$. Veamos que d_2 es una métrica en X^2. Claramente se tiene que $d_2(x, y) \geq 0$, $d_2(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ y $d_2(x, y) = d_2(y, x)$.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $d_2(x, z) = \text{máx}\{d(x_1, z_1), d(x_2, z_2)\} = d(x_1, z_1)$. Así, $d_2(x, z) = d(x_1, z_1) \leq d(x_1, y_1) + d(y_1, z_1) \leq \text{máx}\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\} + \text{máx}\{d(y_1, z_1), d(y_2, z_2)\}$. De donde, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Por lo tanto, (X^2, d_2) es un espacio métrico.

Ejemplo 1.2.6. Sea (X, d) un espacio métrico y X^n el producto topológico de X por sí mismo n veces. Sea $d_\pi((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \text{máx}\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2), \ldots, d(x_n, y_n)\}$. Entonces d_π es una métrica sobre X^n.

Denotamos por $\mathcal{M}$ a la colección de todos los espacios métricos, por $\mathcal{CM}$ a la colección de todos los espacios cuasimétricos y por $\mathcal{CSM}$ a la colección de todos los espacios cuasi semimétricos.
Note que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{CM} \subsetneq \mathcal{CSM}$.

Teorema 1.2.7. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Entonces A es un espacio métrico con la métrica $d|_A : A \times A \longrightarrow [0, \infty)$.

Definición 1.2.8. Sea X un conjunto no vacío y definimos $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Entonces d es una métrica en X, llamada *métrica discreta* y (X, d) es un espacio métrico; (X, d) se llama espacio métrico discreto.

Definición 1.2.9. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define y denota *al conjunto potencia del conjunto* X como $\mathcal{P}(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset\}$.

Definición 1.2.10. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$. Si $\{d(x,y) : x, y \in A\}$ está acotado superiormente, *el diámetro de* A se denota y define como $\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$. En caso contrario diremos que $\delta(A) = \infty$. Si $\delta(A) \in \mathbb{R}$, diremos que A es acotado.

Teorema 1.2.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ tal que A es no vacío. Entonces A es acotado si y sólo si está contenido en una bola abierta cuyo centro puede ser cualquier punto del espacio.

Teorema 1.2.12. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ tales que A y B son no vacíos y acotados. Entonces se tiene que:

1. Si $A \subset B$, entonces $\delta(A) \leq \delta(B)$.

2. Si $\delta(A) = 0$, entonces A se reduce a un punto, es decir, $A = \{x\}$, para algún $x \in X$.

Observación 1.2.13. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ con A no vacío y $z \in X$. Entonces el conjunto $\{d(z,a) : a \in A\}$ es no vacío y acotado inferiormente. Luego, por el Corolario 1.1.6, el conjunto $\{d(z,a) : a \in A\}$ tiene ínfimo, el cual denotaremos por $d(z, A)$, esto es, $d(z,A) = \text{ínf}\{d(z,a) : a \in A\}$. Obsérvese que la única condición que se le ha pedido al conjunto A es que sea no vacío.

Note que si $x \in A$, entonces $d(x, A) = 0$. Además $d(x_0, A) \leq d(x_0, a)$, para todo $a \in A$.

Teorema 1.2.14. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ tales que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $x \in X$. Si $A \subset B$, entonces $d(x, B) \leq d(x, A)$.

Demostración. Supóngase que $A \subset B$. Sea $a \in A$. Como $A \subset B$, se sigue que $a \in B$. De lo cual se sigue que $d(x,a) \geq \text{ínf}\{d(x,b) : b \in B\} = d(x,B)$, para todo $a \in A$. Así, $d(x,A) = \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\} \geq d(x,B)$. □

Teorema 1.2.15. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ y $b, c \in X$. Entonces se satisface que $d(b,A) \leq d(b,c) + d(c,A)$.

Demostración. Sea $a \in A$. Por la desigualdad triangular, se sigue que $d(b,a) \leq d(b,c) + d(c,a)$. Como $d(b,A) \leq d(b,a)$, $d(b,A) \leq d(b,c) + d(b,a)$. Así, $d(b,A) - d(b,c) \leq d(b,a)$, para todo $a \in A$. Luego, $d(b,A) - d(b,c)$ es una cota inferior de $\{d(b,a) : a \in A\}$. Se sigue que $d(b,A) - d(b,c) \leq d(c,A)$. Por lo tanto, $d(b,A) \leq d(b,c) + d(c,A)$, para todo $c \in X$. □

Teorema 1.2.16. Sean (X, d) un espacio métrico, $b, c \in X$ y $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$. Entonces se satisface que $|d(b,A) - d(c,A)| \leq d(b,c)$.

Demostración. Por el Teorema 1.2.15, $d(b,A) \leq d(b,c) + d(c,A)$. Así, $d(b,A) - d(c,A) \leq d(b,c)$. Análogamente, por el Teorema 1.2.15, $d(c,A) \leq d(b,c) + d(b,A)$.
De donde, $-d(b,c) \leq d(b,A) - d(c,A)$. Por lo tanto, $|d(b,A) - d(c,A)| \leq d(b,c)$. □

Definición 1.2.17. Sea (X, d) un espacio métrico. Tomemos un punto $a \in X$ y un número real $r > 0$. Se llama *bola abierta* de centro a y radio r al conjunto: $\{x \in X : d(x,a) < r\}$ que lo denotamos por $N(r,a)$.

Definición 1.2.18. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. El conjunto A es un conjunto *abierto* en X si para todo punto $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $N(r,x) \subset A$.

Teorema 1.2.19. En un espacio métrico (X, d), para cada $x \in X$ y $r > 0$, la bola abierta $N(r,x)$ es un conjunto abierto.

Teorema 1.2.20. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos en X. Entonces se cumple que:

1. El espacio X y el conjunto $\emptyset$ son abiertos en X.
2. $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto en X.
3. Si I es finito, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto en X.

Definición 1.2.21. Sean (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Se dice que $x\in A$ es un *punto interior* de A si existe un número real $r>0$ tal que $N(r,x)\subset A$.
Al conjunto $\{x\in A : x \text{ es interior de } A\}$ se le llama *interior* de A y se denota por $\operatorname{int}(A)$.

Ejemplo 1.2.22. Ejemplos de conjuntos y su respectivo interior.

1. Si $A=[a,b]$, donde $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$. Entonces $\operatorname{int}(A)=(a,b)$.
2. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}$, $A=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$. Se tiene que $\operatorname{int}(A)=\emptyset$.

Teorema 1.2.23. Sean (X,d) un espacio métrico y $A,B\subset X$. Entonces se cumplen:

1. Si $A\subset B$, entonces $\operatorname{int}(A)\subset\operatorname{int}(B)$.
2. $\operatorname{int}(A)$ es abierto en X.
3. $\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)\subset\operatorname{int}(A\cup B)$.
4. $\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)=\operatorname{int}(A\cap B)$.

Definición 1.2.24. Sean (X,d) un espacio métrico y $x\in X$. Se llama *entorno* del punto x a todo conjunto abierto que lo contenga.

Obsérvese que por el Teorema 1.2.19, una bola abierta de centro x y radio r es un entorno de x.

Definición 1.2.25. Sean (X,d) un espacio métrico, $A\subset X$ y $x\in X$. Se dice que x *es un punto de acumulación del conjunto* A, si todo entorno de x contiene puntos de A distintos de x. Es decir, si para todo entorno S de x se cumple que $(S\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$.

Al conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto *derivado de* A y se denota como A'.

Teorema 1.2.26. Sea x un punto de acumulación de un conjunto A. Si S es un entorno cualquiera de x, el conjunto $(S\setminus\{x\})\cap A$ contiene infinitos puntos.

Definición 1.2.27. Sean (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Si A contiene todos sus puntos de acumulación, decimos que A es un conjunto *cerrado* en X.

Teorema 1.2.28. Sean (X,d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces se cumple que:

1. El espacio X y el conjunto $\emptyset$ son cerrados en X.
2. Si I es finito, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto cerrado en X.
3. $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto cerrado en X.

Definición 1.2.29. Dado un conjunto A en un espacio métrico (X,d), al conjunto $\overline{A}=A\cup A'$, se le llama *clausura de* A.

Teorema 1.2.30. Un conjunto A en un espacio métrico (X,d) es cerrado si y sólo si $\overline{A}=A$.

Ejemplo 1.2.31. Ejemplos de clausura de conjuntos.

1. Sea $A = (a, b)$, con $a < b$. Entonces $\overline{A} = [a, b]$.
2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.32. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$. Entonces se cumplen:

1. Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\overline{A}$ es cerrado en X.
3. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Teorema 1.2.33. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $x \in \overline{A}$,

(2) $d(x, A) = 0$,

(3) Para todo entorno S de x, $S \cap A \neq \emptyset$.

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Sea $x \in \overline{A} = A \cup A'$. Si $x \in A$ se sigue que $d(x, A) = 0$. Supongamos que $x \in A'$. Notemos que 0 es cota inferior de $\{d(x, a) : a \in A\}$. Veamos que 0 es la menor de las cotas inferiores. Sea $\epsilon > 0$. Como $N(\epsilon, x)$ es un entorno de x, por definición de punto de acumulación se verifica que $A \cap (N(\epsilon, x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, es decir, existe algún $y \in A$ con $d(x, y) < \epsilon$. Por el Teorema 1.1.10, $0 = d(x, A)$.
Veamos que (2) implica (3). Tenemos que $d(x, A) = 0$. Sea S un entorno cualquiera de x. Como S es abierto y contiene a x, existe un número real $r > 0$ tal que $N(r, x) \subset S$. Por el Teorema 1.1.10, existe $y \in A$ tal que $d(x, y) < r$. Es decir, existe algún $y \in A$ tal que $y \in N(r, x)$. Por lo tanto $S \cap A \neq \emptyset$.
Veamos que (3) implica (1). Se tiene que $S \cap A \neq \emptyset$ para todo entorno S de x. Por el Teorema 1.2.26, se sigue que $x \in A'$, así $x \in \overline{A} = A \cup A'$. □

Teorema 1.2.34. Un conjunto A en un espacio métrico (X, d) es cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es abierto.

Observación 1.2.35. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Entonces $\{x\}$ es cerrado en X.

Demostración. Sea $A = \{x\}$. Veamos que A es cerrado. Sea $y \in X \setminus A$. Pongamos $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$. Note que por la elección del ϵ, se sigue que $N(\epsilon, y) \subset X \setminus A$. Luego, $X \setminus A$ es abierto. Así, por el Teorema 1.2.34, A es cerrado en X. □

Teorema 1.2.36. Sean (X, d) un espacio métrico y $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito de X. Entonces A es cerrado en X.

Demostración. Notemos que $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$, y por la Observación 1.2.35, los conjuntos singulares son cerrados. Por Teorema 1.2.28,(2), la unión finita de cerrados es cerrado. Así, $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es cerrado. □

Definición 1.2.37. Un subconjunto A de un subconjunto B en un espacio métrico X se dice que es *denso* en $B \subset X$ si B está contenido en la clausura de A, es decir, $B \subset \overline{A}$. En particular, A es denso en X o es un subconjunto denso de X si $\overline{A} = X$.

Ejemplo 1.2.38. Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ son densos en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.39. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{U}$ es una *cubierta* de A, si $A \subset \bigcup\{B : B \in \mathcal{U}\}$. Decimos que $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta* de A, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de A y todos los elementos de $\mathcal{U}$ son subconjuntos abiertos de X. Una *subcubierta* de una cubierta $\mathcal{U}$ de A es una familia $\mathcal{S}$ de $\mathcal{U}$ que es también una cubierta de A.

Definición 1.2.40. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es *compacto* si toda cubierta abierta de A admite alguna subcubierta finita para A.

Ejemplo 1.2.41. $(\mathbb{R}, d)$ con d la métrica usual, no es compacto, ya que la familia de abiertos $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, pero no posee una subcubierta finita para $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.42. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es *precompacto* si a todo $\epsilon > 0$ corresponde un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(\epsilon, x_k)$.

Teorema 1.2.43. Sea (X, d) un espacio métrico discreto. Entonces X es un conjunto precompacto si y sólo si X es finito.

Teorema 1.2.44. En un espacio métrico, todo subconjunto compacto es precompacto.

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ con A compacto. Sea $\epsilon > 0$. La familia $\{N(\epsilon, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta para A. Como A es compacto, existen $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\epsilon, a_i)$. Por lo tanto A es precompacto. □

Note que un conjunto precompacto no es, en general, compacto, como se muestra en el siguiente:

Ejemplo 1.2.45. Considere el intervalo $(0, 1)$, como subespacio de $\mathbb{R}$. Note que $(0, 1)$ es precompacto. Por otro lado, observe que $(0, 1)$ no es compacto. Para probar esta última afirmación, considere la colección $\mathcal{U} = \{(\frac{1}{n}, 1) : n \in \mathbb{N}\}$. Note que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $(0, 1)$ y no contiene subcubiertas finitas, ya que $(\frac{1}{n_1}, 1) \cup (\frac{1}{n_2}, 1) \cup \ldots \cup (\frac{1}{n_k}, 1) = (\frac{1}{N}, 1)$, donde $N = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ y, además, $\frac{1}{N} > 0$, por lo que $(\frac{1}{N}, 1)$ no cubre a $(0, 1)$.

Teorema 1.2.46. En un espacio métrico (X, d), todo conjunto precompacto es acotado.

Demostración. Sea $A \subset X$ y supóngase que A es precompacto. Sean $x, y \in A$. Como A es precompacto, para $\epsilon = 1$ se tiene que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(1, x_k)$, donde $x_1, x_2, ..., x_n \in A$. Entonces existen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $x \in N(1, x_i)$ y $y \in N(1, x_j)$.
Por otra parte, $d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y)$, con lo cual se sigue que $d(x, y) < 2 + h$, donde $h = \max\{d(x_m, x_k) : m, k \in \{1, \ldots, n\}\}$. Así para todo $x, y \in A$, $d(x, y) < 2 + h$. Entonces $2 + h$ es cota superior del conjunto $\{d(x, y) : x, y \in A\}$, es decir, $\delta(A) \leq 2 + h < \infty$. Por lo cual A es acotado. □

El recíproco de este teorema no es, en general, cierto. Sea, por ejemplo (X, d) un espacio métrico discreto con una cantidad infinita de puntos. El conjunto X es acotado, de hecho $\delta(X) = 1$; pero no es precompacto por ser infinito (Ver Teorema 1.2.43).

Corolario 1.2.47. En un espacio métrico (X, d), todo conjunto compacto es acotado.

Demostración. Sea $A \subset X$ y supóngase que A es compacto. Por el Teorema 1.2.44, se sigue que A es precompacto. Así, por el Teorema 1.2.46, se tiene que A es acotado. □

Teorema 1.2.48. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces existe un entorno S de x y un entorno T de y con $S \cap T = \emptyset$.

Demostración. Dado que $x \neq y$, se tiene que $d(x, y) > 0$. Sea $r = \frac{d(x,y)}{2}$. Consideremos las bolas abiertas $S = N(r, x)$ y $T = N(r, y)$. Note que S y T son entornos de x y y, respectivamente. Observe que $S \cap T = \emptyset$. Probemos esta última afirmación. Supóngase que $N(r, x) \cap N(r, y) \neq \emptyset$. Sea $z \in N(r, x) \cap N(r, y)$. Así, $d(z, x) < r$ y $d(z, y) < r$. Por la desigualdad triangular $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r$. Entonces $\frac{d(x,y)}{2} < r$. Lo cual es una contracción, por lo tanto $S \cap T = \emptyset$. □

Teorema 1.2.49. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ con A compacto y $x \in X \backslash A$. Entonces existe un entorno S de x y existe un conjunto abierto T con $A \subset T$ tales que $S \cap T = \emptyset$.

Demostración. Sea $y \in A$. Dado que $x \in X \backslash A$, se sigue que $x \neq y$. Por el Teorema 1.2.48, existen abiertos U_y y V_y en X tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$. Consideremos $\mathcal{U} = \{V_y : y \in A\}$. Entonces $A \subset \bigcup \mathcal{U}$. Como A es compacto, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Pongamos $T = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Ahora consideremos los respectivos U_{y_i}, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pongamos $S = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Veamos ahora que $S \cap T = \emptyset$. Supóngase que $S \cap T \neq \emptyset$. Sea $z \in S \cap T$. Entonces $z \in S$ y $z \in T$. Dado que $z \in T$, $z \in V_{y_j}$, para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por otro lado, notemos que $S \subset U_{y_j}$. Como $z \in S$, se sigue que $z \in U_{y_j}$. Así, $U_{y_j} \cap V_{y_j} \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $S \cap T = \emptyset$. $\square$

Teorema 1.2.50. Sea (X, d) un espacio métrico. Si A y B son dos conjuntos ajenos y compactos de X, entonces existen abiertos ajenos S y T de X tales que $A \subset S$ y $B \subset T$.

Demostración. Sea $y \in B$. Dado que $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $y \in X \setminus A$. Por el Teorema 1.2.49, para todo $y \in B$, existen abiertos U_y y V_y en X tales que $A \subset U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$. Consideremos $\mathcal{U} = \{V_y : y \in A\}$. Entonces $B \subset \bigcup \mathcal{U}$. Como B es compacto, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n \in B$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Pongamos $T = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Ahora consideremos los respectivos U_{y_i}, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pongamos $S = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Veamos ahora que $S \cap T = \emptyset$. Supóngase que $S \cap T \neq \emptyset$. Sea $z \in S \cap T$, entonces $z \in S$ y $z \in T$. Dado que $z \in T$, $z \in V_{y_j}$, para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por otro lado, notemos que $S \subset U_{y_j}$. Como $z \in S$, se sigue que $z \in U_{y_j}$. Así, $U_{y_j} \cap V_{y_j} \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Así, $S \cap T = \emptyset$. $\square$

Teorema 1.2.51. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Si A es compacto, entonces A es cerrado en X.

Demostración. Si $A = X$, por el Teorema 1.2.28,(1), se sigue que X es cerrado. Supóngase que A es un subconjunto propio de X, y sea $x \in X \backslash A$. Por el Teorema 1.2.49, existe un entorno S de x y un conjunto abierto T con $A \subset T$ tales que $S \cap T = \emptyset$. Como $A \subset T$, $S \cap A = \emptyset$, lo cual implica que $S \subseteq X \setminus A$. Así, $X \setminus A$ es abierto. Por el Teorema 1.2.34, se sigue que A es cerrado en X. $\square$

Por el Teorema 1.2.51 y el Corolario 1.2.47, tenemos:

Proposición 1.2.52. En un espacio métrico (X, d) todo compacto es cerrado y acotado.

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Heine-Borel.

Teorema 1.2.53. Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Notemos que existen conjuntos que son cerrados y acotados que no son compactos, como se muestra en el siguiente:

Ejemplo 1.2.54. Sea (X, d) el espacio métrico discreto, donde X tiene una cantidad infinita de puntos. Entonces X es cerrado y X es acotado porque para todo $x, y \in X, d(x, y) \leq 1$.
Pero no es compacto por no ser precompacto, pues para $\epsilon \leq 1$ se tiene que $N(\epsilon, x) = \{x\}$, y no existe un número finito de puntos $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tales que $X \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(\epsilon, x_k)$.

Teorema 1.2.55. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $A \subset X$ con A cerrado en X. Entonces A es compacto.

Demostración. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta para A. Dado que A es cerrado, se sigue que $X \setminus A$ es abierto, así, $\{X \setminus A\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, la cubierta abierta $\{X \setminus A\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ admite una subcubierta finita de X. Por lo tanto, al remover $X \setminus A$ de esta subcubierta finita, se produce una subcubierta finita de la cubierta $\{U_\alpha\}$ de A. $\square$

El siguiente resultado es el Teorema de Tychonoff. Para ver una demostración de este resultado consulte [13, pág. 267].

Teorema 1.2.56. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son espacios métricos compactos, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es compacto.

Teorema 1.2.57. Sean (X, d) un espacio métrico y compacto y sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$. Si U es un abierto de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U$.

Demostración. Sea U un abierto en X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$. Entonces $X \setminus U$ es cerrado. Por el Teorema 1.2.55, se sigue que $X \setminus U$ es compacto. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, se tiene por leyes de De Morgan, $X \setminus U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus X_n$. Entonces la familia $\{(X \setminus X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$. Dado que $X \setminus U$ es compacto existe una subcubierta finita $\{X \setminus X_{n_1}, X \setminus X_{n_2}, \ldots, X \setminus X_{n_m}\}$ que cubre a $X \setminus U$. Sea $N = \text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. Entonces $\bigcup_{j=1}^{m} (X \setminus X_{n_j}) = X_N$. Por lo tanto $X_N \subset U$. $\square$

1.3. Convergencia en espacios métricos

En esta sección hablaremos sobre las sucesiones, en particular hablaremos de las sucesiones de Cauchy y analizaremos algunas de sus propiedades.

Definición 1.3.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *sucesión* en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Normalmente, en vez de utilizar la notación funcional, se utiliza la notación con subíndices $f(n) = x_n$, y se habla de la sucesión f o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El punto x_n se llama $n-$ésimo término de la sucesión $\{x_n\}$.

Definición 1.3.2. Una *subsucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión definida por $y_n = x_{\varphi(n)}$, donde $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función creciente. Es decir, se eligen elementos de la sucesión original, sin alterar el orden.

Observación 1.3.3. Toda sucesión es una subsucesión de sí misma.

Definición 1.3.4. Sean (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x \in X$. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* x en X y se denota por $x_n \to x$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant n_\epsilon$, $x_n \in N(\epsilon, x)$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en X, se dice que diverge.

Teorema 1.3.5. El límite de una sucesión convergente en un espacio métrico es único.

Teorema 1.3.6. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Si x es un punto de acumulación de un conjunto A, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ en A, cuyos términos son distintos dos a dos y $x_n \to x$.

Demostración. Como x es un punto de acumulación de A, por el Teorema 1.2.26, para todo $\epsilon > 0$, $(N(\epsilon, x) \setminus \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos. Así, para $\epsilon = 1$, existe $x_1 \in (N(1, x) \setminus \{x\}) \cap A$. Supongamos dados $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (distintos dos a dos) tales que para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $x_i \in (N(\frac{1}{i}, x) \setminus \{x\}) \cap A$. Como x es un punto de acumulación de A, se tiene que $(N(\frac{1}{n}, x) \setminus \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos, se puede elegir $x_n \in (N(\frac{1}{n}, x) \setminus \{x\}) \cap A$ de modo que $x_n \neq x_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Queda así construida una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A, de términos distintos dos a dos. Además, por la propiedad arquimediana (vea Teorema 1.1.8), para cada $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon > 0$, tal que para cada $n \geq n_\epsilon$, $d(x, x_n) < \epsilon$, con lo que $x_n \to x$. $\square$

Teorema 1.3.7. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ en A con $x_n \to x$.

Demostración. Veamos que si $x \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ en A con $x_n \to x$. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A'$, por el Teorema 1.3.6, existe una sucesión en A que converge a x. Si $x \in A$, basta con tomar la sucesión constante, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x$, que está en A y $x_n \to x$.
Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión en A con $x_n \to x$. Demostraremos que $x \in \overline{A}$. Sea S un entorno de x, luego existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in S$. Dado que la sucesión está en A, también $x_n \in A$ para todo $n \geq N$, es decir, $x_n \in S \cap A$ para todo $n \geq N$. Así, $S \cap A \neq \emptyset$, por el Teorema 1.2.33, $x \in \overline{A}$. $\square$

Definición 1.3.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que X *es secuencialmente compacto*, si toda sucesión en X admite por lo menos una subsucesión convergente en X. Si $A \subset X$, decimos que A *es secuencialmente compacto*, si (A, d_A) es *secuencialmente compacto*.

Para ver una demostración del siguiente teorema, vea [5, pág. 112].

Teorema 1.3.9. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es secuencialmente compacto si y sólo si X es compacto.

El siguiente resultado es consecuencia de los Teoremas 1.3.9 y 1.2.44.

Teorema 1.3.10. Sea (X, d) un espacio métrico secuencialmente compacto. Entonces X es precompacto.

Definición 1.3.11. En un espacio métrico (X, d), se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_\epsilon$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Obsérvese que los términos de una sucesión de Cauchy se acercan entre sí a medida que los índices crecen.

Teorema 1.3.12. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $d(x_n, x_N) < \epsilon$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq N_1$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Fijemos $N \geq N_1$ y sea $n \geq N$. Entonces $d(x_n, x_N) < \epsilon$. □

Teorema 1.3.13. En un espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy.

El recíproco del teorema anterior no siempre es cierta, pues existen sucesiones que son de Cauchy, pero no son convergentes. Por ejemplo la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy en $M = (0, 1]$, pero no es convergente en M, pues su límite no se encuentra en M.

Para ver una demostración del siguiente teorema, vea [10, pág. 112].

Teorema 1.3.14. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente en X, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y ambos tienen el mismo límite.

Teorema 1.3.15. Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Si x es punto límite de la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Definición 1.3.16. Diremos que un espacio métrico (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Teorema 1.3.17. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $A \subset X$ con A cerrado en X. Entonces A es completo.

Teorema 1.3.18. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si X es precompacto y completo.

Demostración. Supóngase que X es compacto. Probemos que X es precompacto y completo. Dado que X es compacto, por el Teorema 1.3.9, X es secuencialmente compacto. Así, por el Teorema 1.3.10, X es precompacto. Ahora veamos que X es completo. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Como X es secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente a algún $x \in X$. Luego, por el Teorema 1.3.14, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene como punto límite a x y por el Teorema 1.3.15, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Por lo tanto, X es completo.

Ahora supóngase que X es precompacto y completo, veamos que X es compacto. Por el Teorema 1.3.9, basta verificar que X es secuencialmente compacto. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Como X es completo, para demostrar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente bastará demostrar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión de Cauchy.

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finita, no hay nada que probar, pues tiene infinitos términos iguales, de donde se sigue que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Supóngase que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita.

Dado que X es precompacto existen una colección finita $\{N(1, a_j) : j = 1, 2, \ldots, k_1\}$ de bolas abiertas de radio 1 que cubre X. Sea N_1 alguna de estas bolas que contenga un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. A su vez, N_1 es precompacto y podemos entonces encontrar una bola de radio $\frac{1}{2}$, a la cual llamamos N_2, que contiene un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, contenidos en N_1.

Por inducción, tenemos bolas N_k de radio $\frac{1}{k}$ tal que cada una contiene un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenidos en N_{k-1}. Podemos entonces escoger una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \in N_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Demostraremos que $\{x_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por la completitud de X, converge. Sean $\epsilon > 0$ y $K > \frac{2}{\epsilon}$. Por construcción, para todo $k \geq K$, $x_{n_k} \in N_K$ y N_K es una bola de radio $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, si $k, l \geq K$, $x_{n_k}, x_{n_l} \in N_K$ y $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, y_0) + d(y_0, x_{n_l}) < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \frac{2}{K} < \epsilon$, donde y_0 es el centro de N_K. Por lo tanto, la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Luego, X es secuencialmente compacto. Por lo tanto, por el Teorema 1.3.9, X es compacto. □

Definición 1.3.19. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces *la serie infinita* (o simplemente *serie*) es la sucesión $\{s_n\}$ definida por

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Usaremos la notación $\sum_{n=p}^{q} a_n$ $(p \leq q)$, para expresar la suma $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$. También utilizaremos la expresión simbólica $a_1 + a_2 + \ldots$, o más brevemente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si $\{s_n\}$ converge hacia s, diremos que la serie converge y escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Si $\{s_n\}$ diverge, se dice que la serie diverge.

Definición 1.3.20. *Una progresión geométrica* es una sucesión de números cada uno de los cuales, después del primero, se obtiene multiplicando al número anterior por una constante llamada *razón de la proporción.*

Definición 1.3.21. Una *serie geométrica* es la suma de los términos de una progresión geométrica.

Por ejemplo, la serie $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n}$ es geométrica, pues cada término sucesivo se obtiene al multiplicar el anterior por $\frac{1}{3}$.

Teorema 1.3.22. La serie geométrica real de término inicial $a \in \mathbb{R}$ no nulo y de razón de la proporción $r \in \mathbb{R}$ es convergente si y sólo si $|r| < 1$. En tal caso, su suma vale: $\Sigma_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$. Para $r \neq 1$, la suma de los primeros n términos de una serie geométrica es $\Sigma_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r}$.

1.4. Funciones entre espacios métricos

Es esta sección hablaremos sobre las funciones en espacios métricos, pues serán de gran utilidad en los Capítulos 3 y 4.

Definición 1.4.1. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función. Se dice que f *es inyectiva* si para todo $a, b \in X$ se tiene que si $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$.

Definición 1.4.2. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función. Se dice que f *es suprayectiva* si para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Definición 1.4.3. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función. Se dice que f *es biyectiva* si f es inyectiva y suprayectiva.

Definición 1.4.4. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función y $a \in X$. Se dice que f *es continua en* a, si para cada ϵ >0, existe δ >0 tal que si $d_X(a, x) < \delta$, entonces $d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$. Decimos que f *es continua en* X si para cada $a \in X$, f *es continua en* a.

Teorema 1.4.5. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. f es continua en X.
2. Si V es un subconjunto abierto en Y, entonces $f^{-1}(V)$ es subconjunto abierto en X.
3. Si T es un subconjunto cerrado en Y, entonces $f^{-1}(T)$ es subconjunto cerrado en X.
4. Para todo subconjunto S de X, $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

Teorema 1.4.6. Si f es una función continua del espacio métrico compacto X sobre el espacio métrico Y, entonces Y es compacto.

Teorema 1.4.7. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset$X con $A \neq \emptyset$. Entonces la función denotada por $d_A : X \to [0, \infty)$ y definida por $d_A(z) = d(z, A)$, para todo $z \in X$ es continua.

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Pongamos $\delta = \epsilon$. Si $d(x_0, x) < \delta$. Por el Teorema 1.2.16, $|d(x_0, A) - d(x, A)| \leq d(x_0, x)$. Entonces por la definición de d_A, se sigue que

$$|d_A(x_0) - d_A(x)| \leq d(x_0, x).$$

$$\text{Así, } |d_A(x_0) - d_A(x)| < \epsilon.$$

Es decir, d_A es continua. □

Definición 1.4.8. Una función f del espacio métrico (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y) se dice que es *uniformemente continua* si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos x_0,x_1 de X, si $d_X(x_0, x_1) < \delta$, entonces $d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon$.

Teorema 1.4.9. Sean X, Y, Z espacios métricos, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Si f es uniformemente continua en X, y g es uniformemente continua en Y, entonces $g \circ f$ es uniformemente continua en X.

Teorema 1.4.10. Sea f una función continua del espacio métrico compacto (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y). Entonces f es uniformemente continua.

Definición 1.4.11. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Se dice que la función $f : X \to Y$ es una *isometría* si es biyectiva y además para cualesquiera $x, y \in X$, $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$.

Definición 1.4.12. Un espacio métrico (X, d_X) es *isométrico* al espacio métrico (Y, d_Y), si existe una isometría entre estos dos espacios métricos.

La isometría es una relación de equivalencia en la clase de los espacios métricos.

Definición 1.4.13. Dos espacios métricos X y Y son homeomorfos si existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que f y f^{-1} son continuas.

Teorema 1.4.14. Sean dos espacios métricos X y Y. Si existe una isometría entre X y Y, entonces X y Y son homeomorfos.

Demostración. Supóngase que el espacio (X, d_X) es isométrico al espacio (Y, d_Y). Entonces existe una biyección $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$, $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$. Resta probar que f y f^{-1} son continuas. Por demostrar que f es continua. Sea $y \in X$ y $\epsilon > 0$. Considérese $\delta = \epsilon$. Si $d_X(x, y) < \delta$, entonces $d_X(x, y) < \epsilon$. Así $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$, es decir, f es continua. De manera similar se prueba que f^{-1} es continua. $\square$

Definición 1.4.15. Sean X un espacio métrico, $x \in X$ y $f : X \to X$ una función. Se dice que *x es un punto fijo de f* si $f(x) = x$.

Definición 1.4.16. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : (X, d) \to (X, d)$ una función. Se dice que f *es una función de Lipschitz* si existe una constante $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, para cada $x, y \in X$. En tal caso, k es llamada *constante Lipschitz*.

Teorema 1.4.17. Sean (X, d) un espacio métrico, $f : X \to X$ y $g : X \to X$ funciones. Si f y g son funciones de Lipschitz, entonces $f \circ g$ es una función de Lipschitz.

Demostración. Sean f y g funciones de Lipschitz, entonces existen $k_0 > 0$ y $k_1 > 0$ tales que:

$$d(f(x), f(y)) \leq k_0 d(x, y), \text{ para cada } x, y \in X$$

y

$$d(g(x), g(y)) \leq k_1 d(x, y), \text{ para cada } x, y \in X.$$

Sean $x, y \in X$, entonces:

$$d((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) \leq k_0 d(g(x), g(y)) \leq k_0 k_1 d(x, y).$$

Así, $d((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) \leq kd(x, y),$ para cada $x, y \in X$, donde $k = k_0 k_1 > 0$. Por lo tanto, $f \circ g$ es una función de Lipschitz. $\square$

Corolario 1.4.18. Sean (X, d) un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones de Lipschitz. Entonces $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ es una función de Lipschitz.

Teorema 1.4.19. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función. Si f es una función de Lipschitz, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Supóngase que f es una función de Lipschitz. Entonces existe $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, para todo $x, y \in X$. Sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Pongamos $\delta = \frac{\epsilon}{k} > 0$. Supóngase que $d(x_0, x) < \delta$. Como $d(f(x_0), f(x)) \leq kd(x_0, x)$. Se sigue que $d(f(x_0), f(x)) < k\delta = \epsilon$. Por lo tanto, f es uniformemente continua. $\square$

Definición 1.4.20. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función de Lipschitz con constante de Lipschitz $k > 0$. Entonces:

1. Si $k \leq 1$, la función f se le llama *no expansiva*.
2. Si $k < 1$, la función f se le llama *contracción*, y en tal caso a k se le llama *constante de contracción para f*.

Usando el Teorema 1.4.17, obtenemos:

Teorema 1.4.21. Sean (X, d) un espacio métrico, $f : X \to X$ y $g : X \to X$ funciones. Si f y g son funciones contracción, entonces $f \circ g$ es una función contracción.

Aplicando el Corolario 1.4.18, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.4.22. Sean (X, d) un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones contracción. Entonces $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ es una función de contracción.

1.5. Continuos

En esta sección hacemos una breve introducción a los continuos. Analizaremos algunas de sus propiedades y construiremos algunos continuos que son de interés para este trabajo.

Definición 1.5.1. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (X, d). Decimos que los conjuntos S, T son una *disconexión de* A si son no vacíos, disjuntos, abiertos en el subespacio A y $A = S \cup T$. Si tales conjuntos existen decimos que A admite una *disconexión*.

Observe que si A admite una disconexión, ésta puede no ser única.

Definición 1.5.2. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (X, d). Decimos que A *es disconexo* si admite alguna disconexión. Decimos que A *es conexo* si no es disconexo, es decir, no admite disconexión.

Teorema 1.5.3. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es disconexo si y sólo si existen abiertos U y V tales que:

1. $U \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A \neq \emptyset$;
2. $U \cap V \cap A = \emptyset$;
3. $A \subset U \cup V$.

Observación 1.5.4. Nótese que si S y T son una disconexión de A, entonces S y T son también cerrados en A.

Demostración. Dado que $S \cap T = \emptyset$, $S = A \setminus T$ y $T = A \setminus S$. Luego, por el Teorema 1.2.34, se sigue que S y T son cerrados en A. $\square$

Teorema 1.5.5. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es disconexo si y sólo si existen cerrados F y G tales que:

1. $F \cap A \neq \emptyset$ y $G \cap A \neq \emptyset$;
2. $F \cap G \cap A = \emptyset$;
3. $A \subset F \cup G$.

Teorema 1.5.6. Sea X un espacio métrico. Entonces X es conexo si y sólo si $\emptyset$ y X son los únicos conjuntos en X que son al mismo tiempo abiertos y cerrados.

Teorema 1.5.7. Sea X un espacio métrico. Si A y B son subconjuntos de X tales que A es conexo y $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo. En particular, $\overline{A}$ es conexo.

Teorema 1.5.8. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos conexos de X. Si existe $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que para todo $A \in \mathcal{F}$, $A \cap A_0 \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es conexo.

Corolario 1.5.9. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos conexos de (X, d) tales que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es conexo.

Teorema 1.5.10. Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$, donde d es la métrica usual y $A \subset \mathbb{R}$. Si A es conexo, entonces A es un intervalo.

Demostración. Supongamos que A es conexo y veamos que A es un intervalo. Nótese que si A tiene sólo un punto, se sigue que A es un intervalo. Supóngase que A tiene más de un punto. Sean $a, b \in A$, con $a < b$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$. Veamos que $c \in A$. Supóngase que $c \notin A$. Pongamos $U = (-\infty, c)$ y $V = (c, \infty)$. Note que U y V son abiertos no vacíos en $\mathbb{R}$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ y $A \subset U \cap V$. Así, U y V forman una disconexión para A. Lo cual es una contradicción, pues A es conexo. Así, $c \in A$. Por lo tanto, A es un intervalo. $\square$

Teorema 1.5.11. Dado el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se tiene que $[a, b]$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $[a, b]$ no es conexo. Por el Teorema 1.5.5, existen F y G cerrados en $(\mathbb{R}, d)$, tales que $F \cap [a, b] \neq \emptyset$, $G \cap [a, b] \neq \emptyset$, $F \cap G \cap [a, b] = \emptyset$ y $[a, b] \subset F \cup G$. Como $[a, b]$ es cerrado en $(\mathbb{R}, d)$, por el Teorema 1.2.28,(3), se sigue que $F \cap [a, b]$ y $G \cap [a, b]$ son también cerrados en $(\mathbb{R}, d)$. Dado que $F \cap [a, b]$ está acotado superiormente por b, por el Axioma 1.1.5, existe $c = \sup\{F \cap [a, b]\} \in \overline{F \cap [a, b]} = F \cap [a, b]$. Como $F \cap [a, b] = (\mathbb{R} \setminus G) \cap [a, b]$, se sigue que $F \cap [a, b]$ es abierto en $(\mathbb{R}, d)$, así, existe $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subset [a, b] \subset F \cap [a, b]$. Observe que $b = c$. Probemos esta última afirmación. Supóngase que $b \neq c$, entonces existe $d \in [a, b]$, tal que $c < d < c + \delta$ y en tal caso $d \in F \cap [a, b]$, lo cual contradice que c es el supremo de $\{F \cap [a, b]\}$. Así, $b = c$, y por lo tanto $b \in F \cap [a, b]$. De forma similiar se prueba que $b \in G \cap [a, b]$. Entonces $F \cap G \cap [a, b] \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $[a, b]$ es conexo. $\square$

Teorema 1.5.12. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ y $A \subset \mathbb{R}$. Si A es un intervalo, entonces A es conexo.

Demostración. Supongamos que A es un intervalo y veamos que A es un conexo. Fijemos $a \in A$, Para todo $x \in A$, sea:

$$I_x = \begin{cases} [x, a] & \text{si } x \leq a \\ \\ [a, x] & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Por el Teorema 1.5.11, para todo $x \in A$ se tiene que I_x es conexo tal que $a \in I_x$. Sea $\mathcal{S} = \{I_x : x \in A\}$. Entonces $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$. Así, por el Corolario 1.5.9, se sigue que $\bigcup \mathcal{S}$ es conexo. Dado que $\bigcup \mathcal{S} = A$, se sigue que A es conexo. $\square$

Por los Teoremas 1.5.10 y 1.5.12, se tiene que:

Corolario 1.5.13. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si A es un intervalo.

Para ver una demostración de este resultado consulte [13, pág. 170].

Teorema 1.5.14. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son espacios métricos conexos, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es conexo.

Definición 1.5.15. Las *n-celdas*, $[0, 1]^n$, se definen como el producto cartesiano de n veces el intervalo $[0, 1]$.

Note que como $[0, 1]$ es conexo. Entonces por el Teorema 1.5.14, las *n-celdas* $[0, 1]^n$ son conexas.

Teorema 1.5.16. Si f es una función continua del espacio métrico conexo X sobre el espacio métrico Y, entonces Y es conexo.

Teorema 1.5.17. Sean (X, d) un espacio métrico, $Y \subset X$ y U y V no vacíos, disjuntos y abiertos en X. Si Y es conexo y $Y \subset U \cup V$ entonces $Y \subset U$ o $Y \subset V$.

Definición 1.5.18. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. *La componente conexa del punto* x se define como $\mathcal{C}_x = \bigcup\{C \subset X : C \text{ es conexo y } x \in C\}$.

Teorema 1.5.19. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Entonces:

1. Si C es conexo tal que $x \in C$, entonces $C \subset \mathcal{C}_x$.

2. $\mathcal{C}_x$ es cerrado en X.

Definición 1.5.20. Un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ se llama *arco-conexo* si, para cada par de puntos a y b de S, existe una función continua $f : [0,1] \to S$ tal que:

$$f(0) = a \text{ y } f(1) = b.$$

Una tal función se llama un *camino* de a a b.

Definición 1.5.21. *Un arco* es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

Dado que un intervalo cerrado es un conjunto conexo y compacto, por los Teoremas 1.5.16 y 1.4.6, se sigue que un arco es un conjunto conexo y compacto.

Teorema 1.5.22. Si $f : X \to Y$ es continua y $A \subset X$ con A arco-conexo, entonces $f(A)$ es arco-conexo.

Teorema 1.5.23. En un espacio métrico (X,d), todo conjunto arco-conexo es conexo.

Teorema 1.5.24. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos arco-conexos de (X,d) tales que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es arco-conexo.

Definición 1.5.25. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un *continuo* el cual está contenido como subespacio en otro continuo.

De los Teoremas 1.2.56 y 1.5.14, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.5.26. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son continuos, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es continuo.

Ejemplo 1.5.27. Algunos ejemplos de continuos son los siguientes:

1. El intervalo $[a,b]$, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, es un continuo.

2. Las n-celdas $[0,1]^n$ son continuos. En particular, la 2-celda es un continuo (Ver Figura 1.1).

3. Un arco es un continuo (Ver Figura 1.2).

4. En un espacio métrico Y, la imagen continua de un continuo es un continuo.

5. Sea $T = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ y X la cerradura de T en $\mathbb{R}^2$ (Ver Figura 1.3). Note que X es cerrado y acotado, así, por el Teorema 1.2.53, se tiene que X compacto. Además, observe que T es conexo, pues es la imagen continua del conexo $(0,1]$, al considerar su cerradura X, por el Teorema 1.5.7, se sigue que X es conexo. Claramente X es no vacío. Por lo tanto, X es un continuo, llamado la curva senoidal del topólogo.

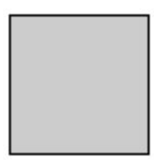

Figura 1.1: Gráfica del continuo 2-celdas.

Construir continuos no es una tarea fácil, por lo cual conviene ver el siguiente resultado que brindará una gran herramienta para dicha tarea.

Teorema 1.5.28. Si X es un *continuo* y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos tales que para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un continuo.

Figura 1.2: Gráfica de un arco.

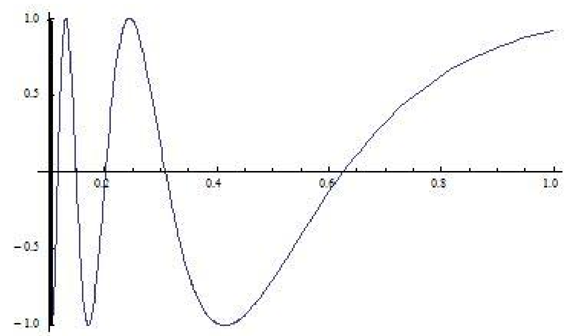

Figura 1.3: Gráfica de la curva senoidal del topólogo.

Demostración. Sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Como A es intersección de cerrados, entonces, por el Teorema 1.2.28,(3), se sigue que A es cerrado. Dado que X es compacto y A es cerrado, por el Teorema 1.2.55, se tiene que A es compacto.
Obsérvese que $X \setminus A_n$ es abierto en X, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por demostrar que A no es vacío. Supóngase que A es vacío. Por leyes de De Morgan

$$X = X \setminus A = X \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \cup \ldots$$

Entonces la familia $\{(X \setminus A_1), (X \setminus A_2), \ldots\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto existe una subcubierta finita $X \setminus A_{n_1}, X \setminus A_{n_2}, \ldots, X \setminus A_{n_m}$ que cubre a X. Supóngase, sin perdida de generalidad que $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_m$. Entonces

$$X = (X \setminus A_{n_1}) \cup (X \setminus A_{n_2}) \cup \ldots \cup (X \setminus A_{n_m}) = X \setminus (A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \ldots \cap A_{n_m}) = X \setminus A_{n_m}.$$

En consecuencia $A_{n_m} = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues al ser A_{n_m} un subcontinuo es diferente del vacío. Por lo tanto, A es diferente del vacío.
Resta probar que A es conexo. Supóngase que A no es conexo. Entonces existen U y V cerrados de X, no vacíos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $A = U \cup V$. Al ser X compacto, por el Teorema 1.2.55 se sigue que U y V son compactos. Entonces por el Teorema 1.2.50 existen I y J abiertos tales que $U \subset I$ y $V \subset J$, con $I \cap J = \emptyset$. Nótese que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset I \cup J$, entonces por el Teorema 1.2.57 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \subset I \cup J$. De donde $A_N = (A_N \cap I) \cup (A_N \cap J)$. Observemos que, $U \cup V = A \subset A_N$. Como $U \neq \emptyset$, sea $k \in U$, entonces $k \in I$. Como $k \in A$, se sigue que $k \in A_N \cap I$. Luego $A_N \cap I \neq \emptyset$. De manera similar se prueba que $A_N \cap J \neq \emptyset$. Así, A_N no es conexo. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, A es conexo. □

En el siguiente ejemplo se hará uso del Teorema 1.5.28 para construir un continuo.

Ejemplo 1.5.29. Sean $A_0 = [0,1] \times [0,1]$ y $B_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, obsérvese que A_0 es un continuo, pues

A_0 es el producto de continuos (Vea Teorema 1.5.26).
Sea $A_1 = A_0 \setminus B_1$. Obsérvese que A_1 es un continuo. Sea $B_{21} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \times (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $B_{22} = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9}) \times (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $B_{23} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \times (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $B_{24} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \times (\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$, $B_{25} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \times (\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$, $B_{26} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \times (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, $B_{27} = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9}) \times (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ y $B_{28} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \times (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Sea $A_2 = A_1 \setminus B_2$, donde $B_2 = B_{21} \cup B_{22} \cup B_{23} \cup B_{24} \cup B_{25} \cup B_{26} \cup B_{27} \cup B_{28}$, obsérvese que A_2 es un continuo. Así, sucesivamente se continua con la construcción de los A_n. Para una idea geométrica de cómo son los conjuntos formados, vea la Figura 1.4.
Entonces por el Teorema 1.5.28, se sigue que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un continuo conocido como la *Carpeta de Sierpinski*.

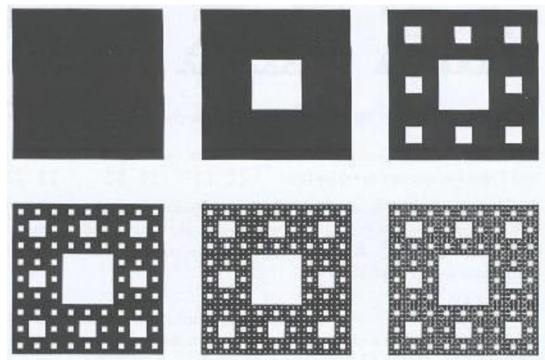

Figura 1.4: Gráfica de los primeros pasos para construir la Carpeta de Sierpinski mediante continuos.

Observe que el Teorema 1.5.28, nos brinda una herramienta para construir continuos de una manera sencilla. En el ejemplo anterior se construyó la Carpeta de Sierpinski mediante continuos. De manera similar es posible construir el Triángulo de Sierpinski (Vea Definición 4.2.2). En el Capítulo 4, se mostrará otra manera de construir la Carpeta de Sierpinski.

Capítulo 2

Métrica de Hausdorff

En este capítulo se construirá la métrica de Hausdorff que nos será útil para medir la distancia entre subconjuntos. Note que en la construcción de dicha métrica se realizarán restricciones a los subconjuntos en los cuales se desea construir dicha métrica. También, se mostrarán otras equivalencias de la métrica de Hausdorff como se muestra en las Definiciones 2.2.14 y 2.2.16. Dado que las métricas nos permiten construir sucesiones, en este capítulo analizaremos cómo son las sucesiones con la métrica de Hausdorff.

2.1. Construcción de la métrica de Hausdorff

Empezaremos definiendo las siguientes colecciones de conjuntos.

Definición 2.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces definimos las siguientes familias de conjuntos de X:

1. $\mathcal{CL}(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\}$;
2. $\mathcal{CB}(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A \text{ es acotado y cerrado en } X\}$;
3. $2^X = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es compacto}\}$.

Obsérvese que:
$2^X \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{CL}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$. Para verificar que $2^X \subseteq \mathcal{CB}(X)$, sea $A \in 2^X$. Entonces A es compacto, y por la Proposición 1.2.52, se sigue que A es cerrado y acotado. Luego, $A \in \mathcal{CB}(X)$. Así, $2^X \subseteq \mathcal{CB}(X)$.

Notemos que puede suceder que $\mathcal{CB}(X) \not\subseteq 2^X$, pues existen conjuntos cerrados y acotados que no son compactos (Vea el Ejemplo 1.2.54).
Las inclusiones $\mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{CL}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ son claras.

Observemos que no se ha pedido ninguna restricción a X, pero si restringimos al conjunto X se obtienen casos particulares.

Observación 2.1.2. Notemos que:
Si X es acotado, entonces $\mathcal{CL}(X) = \mathcal{CB}(X)$.
Si X es compacto, entonces $\mathcal{CL}(X) = \mathcal{CB}(X) = 2^X$.

Por la Definición 1.2.8, a los conjuntos $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{CL}(X)$, $\mathcal{CB}(X)$ y 2^X podemos considerarlos como espacios métricos, con la métrica discreta. A continuación construimos una métrica, diferente a la discreta, para algunos de estos conjuntos.

Recordar que dado un espacio métrico X, $A, B \subset X$ con A y B no vacíos y un punto $z \in X$, $d(z, A) = \text{ínf}\{d(z, a) : a \in A\}$ (Vea Observación 1.2.13). De manera similar, puede considerar el $\text{ínf}\{d(b, A) : b \in B\}$ el cual lo denotamos por $D(A, B)$, es decir, $D(A, B) = \text{ínf}\{d(b, A) : b \in B\}$. No es difícil verificar que $D(A, B) = \text{ínf}\{d(a, B) : a \in A\}$. Obsérvese que $D(A, B) \geq 0$. Además, si $A = B$ entonces $D(A, B) = 0$. Pero si $D(A, B) = 0$, entonces no necesariamente ocurre que $A = B$, como lo indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.3. En $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual. Sean $A = (1, 8)$ y $B = (3, 5)$. Entonces $D(A, B) = 0$ y $A \neq B$.

Veamos otro ejemplo de $D(A, B)$.

Ejemplo 2.1.4. En $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual. Sean $A = \{0\}$, $B = (1, 2)$ y $C = \{3\}$. Entonces $D(A, C) = 3$, $D(A, B) = 1$ y $D(B, C) = 1$. Así, $D(A, C) > D(A, B) + D(B, C)$.

En el Ejemplo 2.1.4 se observa que D no satisface la desigualdad triangular, por lo cual D no define una métrica en $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{CL}(X)$, $\mathcal{CB}(X)$ y 2^X.

Ejemplo 2.1.5. En $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual. Sean $A = (1, \infty)$ y $B = \{0\}$. Note que el conjunto $\{d(a, B) : a \in A\}$ no es acotado superiormente y por lo tanto no tiene supremo.

Si consideramos el conjunto $\{d(a, B) : a \in A\}$, para que el supremo de este conjunto exista se tiene que restringir a los conjuntos A y B, pidiéndoles que sean acotados y no vacíos.

Definición 2.1.6. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ con A y B no vacíos y acotados. Entonces definimos y denotamos: $\rho(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}$, y $\rho(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\}$.

Observación 2.1.7. Note que $\rho(A, B) \geq 0$, $\rho(B, A) \geq 0$ y $\rho(A, A) = 0$. Además, se tiene que no siempre se cumple que $\rho(A, B) = \rho(B, A)$, como veremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.1.8. En $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual. Sean $A = [0, 5]$ y $B = [10, 20]$. Primero encontremos el valor de $\rho(A, B)$. Para ello, para cada elemento de $a \in A$ debemos encontrar el $\text{ínf}\{d(a, b) : b \in B\}$. Es decir, debemos encontrar el elemento $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq d(a, x)$ para todo $x \in B$. Luego, considerar el $\sup\{d(a, B) : a \in A\}$. Si $a = 3$, entonces el elemento $b \in B$ que cumple con las codiciones mencionadas es $b = 10$. Así, $d(3, 10) = |3 - 10| = 7$. Si $a = 5$, entonces el elemento $b \in B$ que cumple con las codiciones mencionadas es $b = 10$. Así, $d(5, 10) = |5 - 10| = 5$. Después de repetir este procedimiento para cada elemento $a \in A$, se observa que $a = 0$ maximiza esta distancia. Por lo tanto, $\rho(A, B) = 10$. De forma similar $\rho(B, A) = 15$. Notemos que $\rho(A, B) \neq \rho(B, A)$.

El ejemplo anterior muestra cómo obtener el valor de $\rho(A, B)$. Ahora veremos un ejemplo en $(\mathbb{R}^2, d)$, donde $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Ejemplo 2.1.9. Sean A y B conjuntos definidos por $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ y $B = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$. Vea Figura 2.1.
Note que los conjuntos A y B son disjuntos. Además, observe que si $(a_1, a_2) \in A$, entonces $d((a_1, a_2), B) = d((a_1, a_2), (4, a_2))$. Como $1 \leq a_1 \leq 2$, se sigue que $\rho(A, B) = 3$.
Por otro lado, si $(b_1, b_2) \in B$, entonces $d((b_1, b_2), A) = d((b_1, b_2), (2, a_2))$, donde $0 \leq a_2 \leq 1$, el cual varía según la elección de (b_1, b_2). Note que $b = (6, 4)$ maximiza $d((b_1, b_2), A)$. Así, $\rho(B, A) = 5$.

Observación 2.1.10. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ tales que A y B son no vacíos. Si X es acotado, entonces A y B con acotados.
Así, existe el $\sup\{\text{ínf}\{d(a, b) : b \in B\} : a \in A\}$ y $\sup\{\text{ínf}\{d(b, a) : a \in A\} : b \in B\}$. Por lo tanto, $\rho(A, B), \rho(B, A) \in \mathbb{R}$.

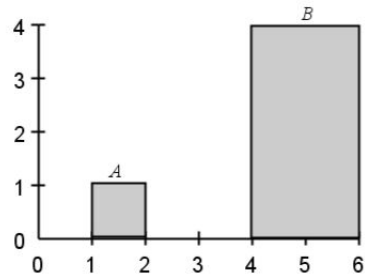

Figura 2.1: Gráfica de $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ y $B = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$.

Teorema 2.1.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B, C \subset X$ con A, B y C no vacíos y acotados. Si $B \subset C$, entonces $\rho(A, C) \leq \rho(A, B)$.

Demostración. Supóngase que $B \subset C$. Sea $a \in A$. Por el Teorema 1.2.14, se tiene que $d(a, C) \leq d(a, B)$. Así, $d(a, C) \leq \rho(A, B)$. De donde, $d(a, C) \leq \rho(A, B)$, para todo $a \in A$. De lo cual, se sigue que $\sup\{d(a, C) : a \in A\} \leq \rho(A, B)$, así $\rho(A, C) \leq \rho(A, B)$. $\square$

Teorema 2.1.12. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B, C \subset X$ tales que A,B y C son no vacíos y acotados. Entonces $\rho(A \cup B, C) = \max\{\rho(A, C), \rho(B, C)\}$.

Demostración. Por propiedades de $\rho(A, B)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\rho(A \cup B, C) &= \sup\{d(x, C) : x \in A \cup B\}, \text{ luego por el Teorema 1,1,13}\\ &= \max\{\sup\{d(x, C) : x \in A\}, \sup\{d(x, C) : x \in B\}\}\\ &= \max\{\rho(A, C), \rho(B, C)\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho(A \cup B, C) = \max\{\rho(A, C), \rho(B, C)\}$. $\square$

Note que ρ no es una métrica, pero en el Teorema 2.1.15, ρ nos servirá para construir la métrica de Hausdorff. Por tal motivo, conviene analizar más propiedades de ρ.

Teorema 2.1.13. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ tales que A y B son no vacíos y acotados. Entonces

1. $\rho(A, B) = 0$ si y sólo si $A \subset \overline{B}$.

2. $\rho(B, A) = 0$ si y sólo si $B \subset \overline{A}$.

Demostración. Veamos que $\rho(A, B) = 0$ si y sólo si $A \subset \overline{B}$. Por demostrar que si $\rho(A, B) = 0$, entonces $A \subset \overline{B}$. Supóngase que $\rho(A, B) = 0$. Sea $x \in A$. Como $\rho(A, B) = 0$, $d(x, B) \leq \sup\{d(a, B) : a \in A\} = 0$. Así, $d(x, B) = 0$. Luego, por el Teorema 1.2.33, se tiene que $x \in \overline{B}$. Por lo tanto $A \subset \overline{B}$.
Ahora supóngase que $A \subset \overline{B}$, por demostrar que $\rho(A, B) = 0$. Sea $a \in A$. Entonces $a \in \overline{B}$. Por el Teorema 1.2.33, $d(a, B) = 0$. Así, para todo $a \in A$, $d(a, B) = 0$. De donde, el $\sup\{d(a, B) : a \in A\} = 0$, esto es, $\rho(A, B) = 0$. La prueba de $\rho(B, A) = 0$ si y sólo si $B \subset \overline{A}$ es similar a la prueba anterior. $\square$

Con las propiedades de ρ previamente analizadas, es natural preguntarse sobre si ρ satisface la desigualdad triangular. El siguiente resultado, responde a esa pregunta de forma positiva.

Teorema 2.1.14. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B, C \subset X$ tales que A,B y C son no vacíos y acotados. Entonces $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$.

Demostración. Sean $a \in A$ y $c \in C$. Por el Teorema 1.2.15, se sigue que $d(a,B) \leq d(a,c) + d(c,B)$. Luego $d(a,B)$ es una cota inferior de $\{d(a,c) + d(c,B) : c \in C\}$, entonces:

$$\begin{aligned} d(a,B) &\leq \text{ínf}\{d(a,c) + d(c,B) : c \in C\} \\ &\leq \text{ínf}\{d(a,c) : c \in C\} + \text{ínf}\{d(c,B) : c \in C\} = d(a,C) + \rho(C,B). \end{aligned}$$

Así, $d(a,B) \leq d(a,C) + \rho(C,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B)$. De lo cual se sigue que $\rho(A,C) + \rho(C,B)$ es una cota superior de $\{d(a,B) : a \in A\}$.
Así, $\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B)$. $\square$

Note que ρ no es métrica en $\mathcal{CB}(X)$, porque no siempre se cumple que $\rho(A,B) = \rho(B,A)$ (vea Ejemplo 2.1.8). Sin embargo con ρ, se construye una métrica para $\mathcal{CB}(X)$. Además, por la Observación 2.1.7 y el Teorema 2.1.14, se tiene que ρ es una cuasi semimétrica en $\mathcal{CB}(X)$.

Dados A, B, C subconjuntos no vacíos y acotados de un espacio métrico, se analizó un número llamado $\rho(A,B)$, el cual se observó que cumplía algunas condiciones para que dicho número fuera una métrica, pero una de las propiedades que no satisfacía era la simetría, es decir, no siempre se cumple que $\rho(A,B) = \rho(B,A)$. Ahora definimos un nuevo número relacionando con $\rho(A,B)$ y $\rho(B,A)$.

Analicemos el siguiente número, $\mathcal{H}(A,B) = \text{máx}\{\rho(A,B), \rho(B,A)\}$, ¿Este nuevo número inducirá una métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$?.
Por las propiedades de $\rho(A,B)$ y $\rho(B,A)$ no es difícil probar que:

1. $\mathcal{H}(A,B) \geq 0$.
2. $\mathcal{H}(A,B) = \mathcal{H}(B,A)$
3. $\mathcal{H}(A,B) = 0$ si y sólo si $B \subset \bar{A}$ y $A \subset \bar{B}$.

Las propiedades del número $\mathcal{H}(A,B)$, son casi las propiedades de una métrica, el único inconveniente es la propiedad 4, la cual debería ser $\mathcal{H}(A,B) = 0$ si y sólo si $A = B$. Para que se cumpla esta propiedad, a los conjuntos A y B se les exigirá que sean conjuntos cerrados, y de esa manera obtendremos que $B \subset A$ y $A \subset B$, con lo cual podremos concluir que $A = B$. Recuerdese que para que el número $\rho(A,B)$ tenga sentido, los conjuntos A y B deben ser no vacíos y acotados.

Teorema 2.1.15. Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces la función $\mathcal{H} : \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \to [0,\infty)$ definida por $\mathcal{H}(A,B) = \text{máx}\{\rho(A,B), \rho(B,A)\}$, para todo $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, es una métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$.

Demostración. Para demostrar que $\mathcal{H}$ es una métrica sobre $\mathcal{CB}(X)$, basta probar que satisface las 4 propiedades de la Definición 1.2.3.

1. Sean $A, B, C \in \mathcal{CB}(X)$. Se cumple que $\mathcal{H}(A,B) \geq 0$, pues $\rho(A,B) \geq 0$ y $\rho(B,A) \geq 0$.
2. Por la simetría del máximo, $\mathcal{H}$ es simétrica, es decir, $\mathcal{H}(A,B) = \mathcal{H}(B,A)$.
3. Por demostrar que $\mathcal{H}(A,B) = 0$ si y sólo si $A = B$. Primero probemos que si $\mathcal{H}(A,B) = 0$, entonces $A = B$. Supóngase que $\mathcal{H}(A,B) = 0$. Entonces por definición de $\mathcal{H}(A,B)$ se tiene que $\rho(A,B) = 0$ y $\rho(B,A) = 0$. Usando el Teorema 2.1.13, se tiene que $A \subset \overline{B}$ y $B \subset \overline{A}$. Como $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, A y B son cerrados, con lo cual $A \subset B$ y $B \subset A$, es decir, $A = B$.
   Resta probar que si $A = B$, entonces $\mathcal{H}(A,B) = 0$. Supóngase que $A = B$ entonces $A \subset B$ y $B \subset A$, como todo conjunto está contenido en su cerradura se tiene que $A \subset \overline{B}$ y $B \subset \overline{A}$, con lo cual $A \subset \overline{B}$ y $B \subset \overline{A}$. Por el Teorema 2.1.13, $\rho(A,B) = 0$ y $\rho(B,A) = 0$. Entonces $\mathcal{H}(A,B) = \text{máx}\{\rho(A,B), \rho(B,A)\} = 0$.

4. Ahora veamos que $\mathcal{H}$ cumple con la desigualdad triangular. Por el Teorema 2.1.14, se sigue que:

   a) $\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B)$

   b) $\rho(B,A) \leq \rho(B,C) + \rho(C,A)$.

   Entonces $\mathcal{H}(A,B) = \text{máx}\{\rho(A,B), \rho(B,A)\} \leq \text{máx}\{\rho(A,C) + \rho(C,B), \rho(C,A) + \rho(B,C)\}$. Por el Lema 1.1.11, se tiene que: $\mathcal{H}(A,B) \leq \text{máx}\{\rho(A,C), \rho(C,A)\} + \text{máx}\{\rho(C,B), \rho(B,C)\} = \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$. Por lo tanto, $\mathcal{H}(A,B) \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$.

De 1,2,3 y 4, este teorema está demostrado. □

Las bolas abiertas en $\mathcal{CB}(X)$ se denotarán como $\mathbf{B}(\delta, A)$, donde $A \in \mathcal{CB}(X)$ y $\delta > 0$. La métrica $\mathcal{H}$ del Teorema 2.1.15, se le conoce como la métrica de Hausdorff. De ahora en adelante, el espacio $\mathcal{CB}(X)$ será considerado con la métrica de Hausdorff. Además, cualquier subconjunto de $\mathcal{CB}(X)$ será considerado con la métrica de Hausdorff de $\mathcal{CB}(X)$ restringida.

La métrica de Hausdorff, nos permite trabajar con un tipo de conjuntos llamados hiperespacios. Para ello, damos la siguiente definición.

Definición 2.1.16. Sea X un continuo. Un *hiperespacio* de un continuo X es una colección de subconjuntos de X que satisface ciertas condiciones. Estos espacios son considerados con la métrica de Hausdorff.

Estos espacios son estudiados en los capítulos 3 y 4, cuando X es un continuo.

2.2. Propiedades de la métrica de Hausdorff

En esta sección veremos algunas propiedades que satisface la métrica de Hausdorff, así como algunas equivalencias que tiene esta métrica. La siguiente definición será de gran utilidad para dar otra equivalencia de la métrica de Hausdorff.

Definición 2.2.1. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ con A no vacío. *La nube alrededor de A y radio* $r > 0$ se define y denota como:

$$N(r,A) = \{x \in X : d(x,A) < r\}.$$

Observación 2.2.2. Note que $x \in N(r,A)$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < r$.

En efecto, probemos que si $x \in N(r,A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < r$. Sea $x \in N(r,A)$. Así, $d(x,A) < r$. Por el Teorema 1.1.15, existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < r$.
Ahora veamos que si existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < r$, entonces $x \in N(r,A)$. Como $d(x,A) \leq d(x,a)$, para todo $a \in A$, se sigue que $d(x,A) < r$. Así, $x \in N(r,A)$.

En los siguientes resultados, se analizan algunas propiedades de la nube.

Teorema 2.2.3. Sean (X,d) un espacio métrico, $\epsilon > 0$ y $A \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces se tiene que $N(\epsilon, A) = \bigcup\{N(\epsilon, a) : a \in A\}$.

Demostración. Primero se demostrará que $\bigcup\{N(\epsilon,a) : a \in A\} \subset N(\epsilon, A)$. Sea $x \in \bigcup\{N(\epsilon,a) : a \in A\}$. Entonces existe $a_0 \in A$ tal que $x \in N(\epsilon, a_0)$. Luego, $d(x,a_0) < \epsilon$. Como $d(x,A) \leq d(x,a_0)$ se tiene que $d(x,A) < \epsilon$. Por lo tanto $x \in N(\epsilon, A)$. Resta probar que $N(\epsilon,A) \subset \bigcup\{N(\epsilon,a) : a \in A\}$.
Sea $x \in N(\epsilon, A)$. Entonces $d(x,A) < \epsilon$, es decir, $\text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\} < \epsilon$. Por el Teorema 1.1.15, existe a_0 en A tal que $d(x,a_0) < \epsilon$. Entonces $x \in N(\epsilon, a_0)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup\{N(\epsilon,a) : a \in A\}$. □

Teorema 2.2.4. Sean (X,d) un espacio métrico, $\epsilon > 0$ y $A \subset X$ tal que A es no vacío y acotado. Entonces se tiene que $N(\epsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < \epsilon\}$.

Demostración. Veamos primero que $N(\epsilon, A) \subset \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0$ y $\delta < \epsilon\}$. Sea $x \in N(\epsilon, A)$, así, $d(x, A) < \epsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(x, A) < \delta < \epsilon$. Entonces $x \in N(\delta, A)$. Así, $x \in \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0$ y $\delta < \epsilon\}$. Ahora veamos que $\bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0$ y $\delta < \epsilon\} \subset N(\epsilon, A)$. Sea $x \in \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0$ y $\delta < \epsilon\}$. Entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $\delta_1 < \epsilon$ y $x \in N(\delta_1, A)$. Así, $d(x, A) < \delta_1 < \epsilon$. De lo cual se sigue que $x \in N(\epsilon, A)$. Por lo tanto, $\bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0$ y $\delta < \epsilon\} \subset N(\epsilon, A)$. Dado que $N(\epsilon, A) \subset \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0$ y $\delta < \epsilon\}$ y $\bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0$ y $\delta < \epsilon\} \subset N(\epsilon, A)$, se sigue que $N(\epsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0$ y $\delta < \epsilon\}$. □

Teorema 2.2.5. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ y para cualesquiera $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, se tiene que $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Primero probemos que $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Como $N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, A \cup B)$ y $N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$, se sigue que $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Resta probar que $N(\epsilon, A \cup B) \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, A)$. Sea $a \in N(\epsilon, A \cup B)$, entonces existe algún $b \in A \cup B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Si $b \in A$, se sigue que $N(\epsilon, A \cup B) \subset N(\epsilon, A)$. Si $b \in B$, se sigue que $N(\epsilon, A \cup B) \subset N(\epsilon, B)$. Por lo tanto $N(\epsilon, A \cup B) \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, A)$. □

Teorema 2.2.6. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si $A \in \mathcal{CB}(X)$ y U es un abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $A \subset N(\epsilon, A) \subset U$.

Demostración. Notemos que $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Como A y $X \setminus U$ son cerrados y X es compacto, por el Teorema 1.2.55, A y $X \setminus U$ son compactos. Así, $d(A, X \setminus U) > 0$. Sea $\epsilon = \frac{d(A, X \setminus U)}{2}$. Note que $N(\epsilon, A) \subset U$. En efecto, sea $x \in N(\epsilon, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$. Así, $x \in N(\epsilon, a)$. De manera que, $x \in U$. En caso contrario, es decir, $x \in X \setminus U$, entonces $x \in N(\epsilon, a) \cap (X \setminus U)$. Así, $N(\epsilon, a) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Luego existe $z \in N(\epsilon, a) \cap (X \setminus U)$ tal que $d(a, z) < \epsilon < d(A, X \setminus U)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in U$. En consecuencia, $N(\epsilon, A) \subset U$. Por lo tanto, $A \subset N(\epsilon, A) \subset U$. □

Teorema 2.2.7. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si $A, B \in 2^X$ tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) = \emptyset$.

Demostración. Por contradicción, supongase que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$, para cada $\epsilon > 0$. Como $A \cap B = \emptyset$ y A, B son compactos se tiene que $D(A, B) > 0$.
Sea $\epsilon = \frac{D(A,B)}{2} > 0$. Como $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$, entonces existe un $x \in N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B)$. De lo cual se sigue que $x \in N(\epsilon, A)$ y $x \in N(\epsilon, B)$, es decir, existe un $a \in A$ y existe un $b \in B$ tales que $d(x, a) < \epsilon$ y $d(x, b) < \epsilon$. En consecuencia $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < 2\epsilon = D(A, B)$. Lo cual contradice que $D(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A$ y $b \in B\}$. □

En los siguientes resultados se analiza la relación entre ρ y la nube.

Teorema 2.2.8. Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ y $\epsilon > 0$. Entonces

1. Si $\rho(A, B) < \epsilon$, entonces $A \subset N(\epsilon, B)$.
2. Si $A \subset N(\epsilon, B)$, entonces $\rho(A, B) \leq \epsilon$.

Demostración. Por demostrar que si $\rho(A, B) < \epsilon$, entonces $A \subset N(\epsilon, B)$.
Supóngase que $\rho(A, B) < \epsilon$. Sea $a \in A$. Entonces $d(a, B) < \rho(A, B) < \epsilon$. Entonces $a \in N(\epsilon, B)$. Por lo tanto, $A \subset N(\epsilon, B)$.
Ahora supóngase que $A \subset N(\epsilon, B)$. Veamos que $\rho(A, B) \leq \epsilon$. Sea $a \in A$. Como $A \subset N(\epsilon, B)$, se sigue que $a \in N(\epsilon, B)$. Así, $d(a, B) < \epsilon$. Entonces $d(a, B) < \epsilon$, para todo $a \in$A. De donde $\sup\{d(a, B) : a \in A\} \leq \epsilon$. Esto es, $\rho(A, B) \leq \epsilon$. □

Teorema 2.2.9. Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \subset X$ tales que A y B son no vacíos y acotados y $\epsilon > 0$. Si A es compacto, entonces:

$$\rho(A, B) < \epsilon \text{ si y sólo si } A \subset N(\epsilon, B).$$

Demostración. Supongamos que A es compacto. Por el Teorema 2.2.8,(1), basta verificar que si $A \subset N(\epsilon, B)$, entonces $\rho(A, B) < \epsilon$. De manera que, supongamos que $A \subset N(\epsilon, B)$. Entonces por el Teorema 2.2.4, $A \subset \bigcup\{N(\delta, B) : \delta > 0 \text{ y } \delta < \epsilon\}$. Como A es compacto, existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\delta_i < \epsilon$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Pongamos a $\delta = \max\{\delta_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Ahora, sea $a \in A$. Entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a \in N(\delta_j, B)$, así, $d(a, B) < \delta_j$. De donde, $d(a, B) < \delta$. Como $a \in A$ fue arbitrario, se sigue que δ es cota superior de $\{d(a, B) : a \in A\}$. En consecuencia, $\rho(A, B) \leq \delta$. Por lo tanto, $\rho(A, B) < \epsilon$. $\square$

Teorema 2.2.10. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces:

$$\rho(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N(r, B)\}.$$

Demostración. Sea $R = \{r > 0 : A \subset N(r, B)\}$. Usando el Teorema 1.1.10, sólo basta probar dos cosas:
1) Por demostrar que $\rho(A, B) \leq r$, para todo $r \in R$.
Sea $r \in R$. Entonces se tiene que $r > 0$ y es tal que $A \subset N(r, B)$. Luego para todo $a \in A$, se tiene que $a \in N(r, B)$. Así, para todo $a \in A$, se tiene $d(a, B) < r$. De donde $\sup\{d(a, B) : a \in A\} \leq r$. Con lo cual $\rho(A, B) \leq r$.
2) Veamos que para todo $\epsilon > 0$, exite $r \in R$ tal que $\rho(A, B) < r < \rho(A, B) + \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Pongamos $r_0 = \rho(A, B) + \frac{\epsilon}{2}$. Veamos que $r_0 \in R$. Claramente $r_0 > 0$. Resta probar que $A \subset N(r_0, B)$.
Sea $a \in A$. Así, $d(a, B) \leq \sup\{d(a, B) : a \in A\}$. Luego $d(a, B) \leq \rho(A, B)$. Como $\rho(A, B) < \rho(A, B) + \frac{\epsilon}{2}$, entonces $d(a, B) < \rho(A, B) + \frac{\epsilon}{2} = r_0$. Entonces $d(a, B) < r_0$, es decir $a \in N(r_0, B)$. En consecuencia $A \subset N(r_0, B)$. Así, $r_0 \in R$. Además, $\rho(A, B) < r_0 < \rho(A, B) + \epsilon$. Así, de lo probado en 1) y 2) y por el Teorema 1.1.10, se sigue que $\rho(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N(r, B)\}$. $\square$

El siguiente resultado será de gran utilidad en el Teorema 2.2.14, para dar otra forma de ver a la métrica de Hausdorff. Además, será de gran utilidad en muchos resultados de la tesis.

Teorema 2.2.11. Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ y $\epsilon > 0$. Entonces se cumplen:

1. $\mathcal{H}(A, B) < \epsilon$, entonces $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.
2. Si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$, entonces $\mathcal{H}(A, B) \leq \epsilon$.

Demostración. Por demostrar que si $\mathcal{H}(A, B) < \epsilon$, entonces $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.
Supóngase que $\mathcal{H}(A, B) < \epsilon$. Entonces $\rho(B, A) < \epsilon$ y $\rho(A, B) < \epsilon$. Usando el Teorema 2.2.8,(1), se tiene que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Resta probar que si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$, entonces $\mathcal{H}(A, B) \leq \epsilon$.
Supóngase que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Por el Teorema 2.2.8,(2), se cumple que $\rho(B, A) \leq \epsilon$ y $\rho(A, B) \leq \epsilon$. Entonces $\max\{\rho(B, A), \rho(A, B)\} \leq \epsilon$, es decir, $\mathcal{H}(A, B) \leq \epsilon$. $\square$

Teorema 2.2.12. Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces:

$$\mathcal{H}(A, B) < \epsilon \text{ si y sólo si } A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A).$$

Demostración. Supongamos que A y B son compactos. Por el Teorema 2.2.11,(1), basta probar que si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$, entonces $\mathcal{H}(A, B) < \epsilon$. Así, supongamos que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Por el Teorema 2.2.9, se sigue que $\rho(A, B) < \epsilon$ y $\rho(B, A) < \epsilon$. De donde, $\mathcal{H}(A, B) < \epsilon$. $\square$

Proposición 2.2.13. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ tales que $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$. Entonces $\mathcal{H}(A, B) = d(a, b)$.

Demostración. Tenemos $\rho(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\} = \sup\{d(a, \{b\}) : a \in A\} = \sup\{d(a, b) : a \in A\} = \sup\{d(a, b)\} = d(a, b)$. De forma similar $\rho(B, A) = d(a, b)$. Como $\mathcal{H}(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$, se sigue que $\mathcal{H}(A, B) = d(a, b)$. $\square$

El siguiente resultado nos brinda otra forma de ver a la métrica de Hausdorff. Por lo general, esta definición es muy usada en la Teoría de Continuos (se estudiará en el capítulo 4).

Teorema 2.2.14. Sean (X, d) un espacio métrico, y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces:

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r, B), B \subset N(r, A)\}.$$

Demostración. Sea $R = \{r > 0 : A \subset N(r, B), B \subset N(r, A)\}$. Usando el Teorema 1.1.10, basta probar dos afirmaciones:

1. Por demostrar que $\mathcal{H}(A, B) \leq r$, para todo $r \in R$. Sea $r \in R$. Entonces se tiene que $r > 0$ y es tal que $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. Entonces para todo $a \in A$, se tiene que $a \in N(r, B)$ y para todo $b \in B$, se tiene que $b \in N(r, A)$. Así, para todo $a \in A$, se tiene $d(a, B) < r$ y para todo $b \in B$, se tiene $d(b, A) < r$. Entonces $\sup\{d(a, B) : a \in A\} \leq r$ y $\sup\{d(b, A) : a \in B\} \leq r$. Con lo cual $\rho(A, B) \leq r$ y $\rho(B, A) \leq r$, es decir $\mathcal{H}(A, B) = \text{máx}\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} \leq r$.

2. Por demostrar que para todo $\epsilon > 0$, exite $r \in R$ tal que $\mathcal{H}(A, B) < r < \mathcal{H}(A, B) + \epsilon$.
Sea $\epsilon > 0$. Pongamos $r_0 = \mathcal{H}(A, B) + \frac{\epsilon}{2}$. Veamos que $r_0 \in R$. Claramente $r_0 > 0$. Resta probar que $A \subset N(r_0, B)$ y $B \subset N(r_0, A)$. Sea $a \in A$. Entonces $d(a, B) \leq \sup\{d(a, B) : a \in A\}$. Luego $d(a, B) \leq \rho(A, B) \leq \mathcal{H}(A, B) < \mathcal{H}(A, B) + \frac{\epsilon}{2}$. Entonces $d(a, B) < r_0$, con lo cual tenemos que $a \in N(r_0, B)$. Luego $A \subset N(r_0, B)$. De forma similar se tiene que $B \subset N(r_0, A)$. Así, $r_0 \in R$. Además, $\mathcal{H}(A, B) < r_0 < \mathcal{H}(A, B) + \epsilon$. Así, de lo probado en 1) y 2) y por el Teorema 1.1.10, $\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r, B), B \subset N(r, A)\}$.

De 1 y 2, este teorema está demostrado. □

Como $2^X \subset \mathcal{CB}(X)$, se sigue que 2^X es un espacio métrico con la métrica $\mathcal{H}$ restringida a 2^X.
La siguiente definición, nos brindará otra forma de caracterizar la métrica de Hausdorff.

Definición 2.2.15. Sean (X, d) un espacio métrico, y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces *la distancia Pompeiu-Hausdorff entre A y B* esta dado por: $\mathbb{D}_\infty(A, B) = \sup\{|d(x, A) - d(x, B)| : x \in X\}$.

El siguiente teorema nos brinda otra forma de ver a la métrica de Hausdorff. Cabe mencionar, que esta definición es muy usada en el análisis.

Teorema 2.2.16. Sean (X, d) un espacio métrico, y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces $\mathcal{H}(A, B) = \mathbb{D}_\infty(A, B)$.

Demostración. Veamos que $\mathbb{D}_\infty(A, B) \leq \mathcal{H}(A, B)$. Sean $x \in X$ y $b \in B$. Por el Teorema 1.2.15, se tiene que $d(x, A) \leq d(x, b) + d(b, A)$. Como $d(x, A)$ es una cota inferior de $\{d(x, b) + d(b, A) : b \in B\}$, entonces:

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq \text{ínf}\{d(x, b) + d(b, A) : b \in B\} \\ &\leq \text{ínf}\{d(x, b) : b \in B\} + \text{ínf}\{d(b, A) : b \in B\} \\ &\leq \text{ínf}\{d(x, b) : b \in B\} + \sup\{d(b, A) : b \in B\} = d(x, B) + \rho(B, A). \end{aligned}$$

Así, $d(x, A) - d(x, B) \leq \rho(B, A)$. De forma similar, se sigue que $d(x, B) - d(x, A) \leq \rho(A, B)$. Entonces $\text{máx}\{d(x, A) - d(x, B), d(x, B) - d(x, A)\} \leq \text{máx}\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} = \mathcal{H}(A, B)$. Así, por el Teorema 1.1.12, se sigue que $|d(x, A) - d(x, B)| \leq \mathcal{H}(A, B)$, para todo $x \in X$. Esto es $\mathcal{H}(A, B)$ es una cota superior de $\{|d(x, A) - d(x, B)| : x \in X\}$, entonces $\sup\{|d(x, A) - d(x, B)| : x \in X\} \leq \mathcal{H}(A, B)$. Así, $\mathbb{D}_\infty(A, B) \leq \mathcal{H}(A, B)$. Ahora veamos que $\mathcal{H}(A, B) \leq \mathbb{D}_\infty(A, B)$.

$$\begin{aligned} \rho(B, A) &= \sup\{d(b, A) : b \in B\} \\ &= \sup\{d(b, A) - d(b, B) : b \in B\} \\ &\leq \sup\{d(x, A) - d(x, B) : x \in X\} \\ &\leq \sup\{|d(x, A) - d(x, B)| : x \in X\}. \end{aligned}$$

De forma similar, $\rho(A,B) \leq \sup\{|d(x,A) - d(x,B)| : x \in X\}$. Luego, considerando el máximo entre $\rho(A,B)$ y $\rho(B,A)$, se sigue que $\max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\} \leq \sup\{|d(b,A) - d(b,B)| : x \in X\}$. De donde, $\mathcal{H}(A,B) \leq \mathbb{D}_\infty(A,B)$. Por lo tanto, $\mathcal{H}(A,B) = \mathbb{D}_\infty(A,B)$. □

Teorema 2.2.17. Sean (X,d) un espacio métrico, y $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces $\mathcal{H}(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{\mathcal{H}(A_1,B_1), \mathcal{H}(A_2,B_2)\}$

Demostración. Sean $A = A_1 \cup A_2$ y $B = B_1 \cup B_2$. Sea $a \in A$. Si $a \in A_1$, se sigue que:

$$\begin{aligned} d(a, B_1 \cup B_2) &= \inf\{d(a,b) : b \in B_1 \cup B_2\}, \text{ luego por el Teorema 1.1.13} \\ &= \min\{\inf\{d(a,b) : b \in B_1\}, \inf\{d(a,b) : b \in B_2\}\} \\ &= \min\{d(a,B_1), d(a,B_2)\}. \end{aligned}$$

Así, $d(a,B) \leq d(a,B_1)$. De donde $d(a,B) \leq d(a,B_1) \leq \sup\{d(a,B_1) : a \in A_1\} = \rho(A_1,B_1) \leq \mathcal{H}(A_1,B_1)$. Por lo tanto, si $a \in A_1$, se sigue que $d(a,B) \leq \mathcal{H}(A_1,B_1)$. Similarmente si $a \in A_2$, se sigue que $d(a,B) \leq \mathcal{H}(A_2,B_2)$. Entonces, si $a \in A$, $d(a,B) \leq \max\{\mathcal{H}(A_1,B_1), \mathcal{H}(A_2,B_2)\}$. Luego, $\rho(A,B) \leq \max\{\mathcal{H}(A_1,B_1), \mathcal{H}(A_2,B_2)\}$. De manera similar, se prueba que $\rho(B,A) \leq \max\{\mathcal{H}(A_1,B_1), \mathcal{H}(A_2,B_2)\}$. Por lo tanto, $\mathcal{H}(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{\mathcal{H}(A_1,B_1), \mathcal{H}(A_2,B_2)\}$. □

2.3. Convergencia con la métrica de Hausdorff

En esta sección se hablará de sucesiones y criterios de convergencia en los hiperespacios. Dado que los hiperespacios son espacios métricos, la definición de sucesión y el criterio de convergencia de sucesiones, es el mismo que conocemos en cualquier espacio métrico. La métrica usada es la métrica de Hausdorff.

Observación 2.3.1. Sean (X,d) un espacio métrico, $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{CB}(X)$ y $A \in \mathcal{CB}(X)$. Se dice que $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ *converge a* A en $\mathcal{CB}(X)$ y se denota por $A_n \to A$ o bien $\lim A_n = A$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant n_\epsilon$, $A_n \in \mathbf{B}(\epsilon, A)$. Si $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ no converge en $\mathcal{CB}(X)$, se dice que diverge. La métrica usada es la métrica de Hausdorff.

A continuación, veremos algunos ejemplos de sucesiones en $\mathcal{CB}(X)$. El siguiente ejemplo, es una sucesión constante.

Ejemplo 2.3.2. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $A_n = [0,1] \times \{0\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y pongamos $A = [0,1] \times \{0\}$. Obsérvese que $\mathcal{H}(A_n, A) = 0$. En consecuencia $\mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$, para cada $\epsilon > 0$. De manera que $A_n \to A$.

Teorema 2.3.3. Sean (X,d) un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión en X y $x \in X$. Entonces $\{x_n\} \to \{x\}$ en $\mathcal{CB}(X)$ si y sólo si $x_n \to x$ en X.

Demostración. Pongamos $A_n = \{x_n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A = \{x\}$. Por demostrar que si $A_n \to A$ en $\mathcal{CB}(X)$, entonces $x_n \to x$ en X. Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$, para cada $n \geqslant N$. Entonces por la Proposición 2.2.13, se sigue que $\mathcal{H}(A_n, A) = d(x_n, x) < \epsilon$, para cada $n \geqslant N$. De donde $x_n \to x$ en X.
Por demostrar que si $x_n \to x$ en X, entonces $A_n \to A$ en $\mathcal{CB}(X)$. Supóngase que $x_n \to x$ en X. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$, para cada $n \geqslant N$. Luego, por la Proposición 2.2.13, se sigue que $d(x_n, x) = \mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$, para cada $n \geqslant N$. En consecuencia, $A_n \to A$ en $\mathcal{CB}(X)$. □

Ejemplo 2.3.4. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $A_n = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea $A = \{(0,0)\}$ (Vea Figura 2.2). Como $\frac{1}{n} \to 0$, se sigue que $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$. Así, por el Teorema 2.3.3, $A_n \to A$.

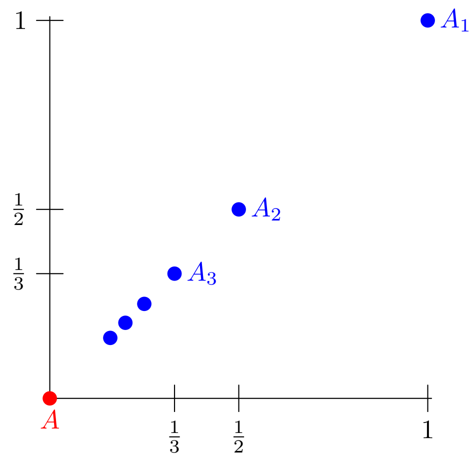

Figura 2.2: Gráfica de la sucesión $A_n = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$ en $X = [0,1] \times [0,1]$.

Ejemplo 2.3.5. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $A_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea $A = [0,1] \times \{0\}$ (Vea Figura 2.3). Veamos que $A_n \to A$. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Sea $n \geq N$. Por demostrar que $A_n \subset N(\epsilon, A)$. Sea $x \in A_n$. Obsérvese que $d(x, A) \leq \frac{1}{N}$. En consecuencia, $d(x, A) < \epsilon$. Así, $x \in N(\epsilon, A)$ y por lo tanto $A_n \subset N(\epsilon, A)$. De forma similar se prueba que $A \subset N(\epsilon, A_n)$. Entonces, por el Teorema 2.2.12, se sigue que $\mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$. Por lo tanto, $A_n \to A$.

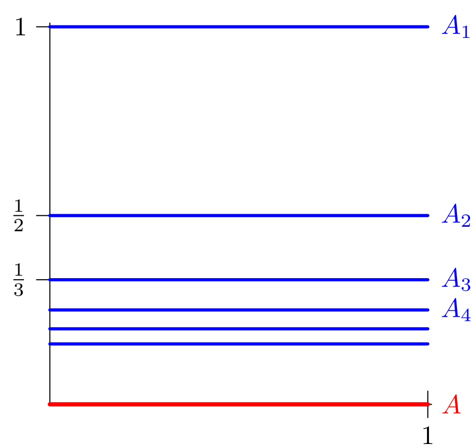

Figura 2.3: Gráfica de la sucesión $A_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ en $X = [0,1] \times [0,1]$.

Lema 2.3.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{CB}(X)$ tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Si $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.

Demostración. Supóngase que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$. Veamos que $A \subset B$. Sea $a \in A$. Por demostrar que $a \in B$. Como $B \in \mathcal{CB}(X)$, se sigue que B es cerrado, basta con verificar que $a \in \overline{B}$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $n \geqslant N_1$. De forma similar, como $\lim B_n = B$, entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(B_n, B) < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $n \geqslant N_2$.
Sean $N = \max\{N_1, N_2\}$. Luego, para cada $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\mathcal{H}(B_n, B) < \frac{\epsilon}{2}$. Así, por el Teorema 2.2.11,(1), $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$ y $B_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, B)$, para cada $n \geq N$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. Como $a \in A$, existe $x \in A_m$ tal que $d(a, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Por hipótesis $A_m \subset B_m$, así $x \in B_m$. Luego existe $z \in B$ tal

que $d(x,z) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces $d(a,z) \leq d(a,x) + d(x,z) < \epsilon$. De manera que $z \in N(\epsilon, a) \cap B$. De lo cual se sigue que $N(\epsilon, a) \cap B \neq \emptyset$. Así, por el Teorema 1.2.33, $x \in \overline{B} = B$. Por lo tanto $A \subset B$. $\square$

Ejemplo 2.3.7. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$, $A = \{(0,0)\}$, $B_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ y $B = [0,1] \times \{0\}$.
En los Ejemplos 2.3.5 y 2.3.4, se probó que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Note que $A_n \subset B_n$ y además $A \subset B$.

Lema 2.3.8. Sea (X,d) un espacio métrico. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{CB}(X)$ tales que lím $A_n = A$ y lím $B_n = B$, donde $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces lím $(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant N$, $A_n \cup B_n \in \mathbf{B}(\epsilon, A \cup B)$. Como $\text{lím}\, A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $n \geqslant N_1$. De forma similar, como lím $B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(B_n, B) < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $n \geqslant N_2$. Sean $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $n \geqslant N$. Entonces $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\mathcal{H}(B_n, B) < \frac{\epsilon}{2}$. Por el Teorema 2.2.11,(1), se sigue que $A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$, $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$, $B_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, B)$ y $B \subset N(\frac{\epsilon}{2}, B_n)$. Entonces $A_n \cup B_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A) \cup N(\frac{\epsilon}{2}, B)$ y $A \cup B \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n) \cup N(\frac{\epsilon}{2}, B_n)$. De lo cual se sigue, por el Teorema 2.2.5, que $A_n \cup B_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A \cup B)$ y $A \cup B \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n \cup B_n)$. En consecuencia, por el Teorema 2.2.11,(2), $\mathcal{H}(A_n \cup B_n, A \cup B) < \epsilon$. Por lo tanto, para cada $n \geqslant N$, $A_n \cup B_n \in \mathbf{B}(\epsilon, A \cup B)$. De donde, lím $(A_n \cup B_n) = A \cup B$. $\square$

Ejemplo 2.3.9. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = [0, \frac{2}{3}] \times \{\frac{1}{n}\}$, $A = [0, \frac{2}{3}] \times \{0\}$, $B_n = [\frac{1}{3}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$ y $B = [\frac{1}{3}, 1] \times \{0\}$. Con un procedimiento similar al realizado en el Ejemplo 2.3.5, se prueba que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Note que $A_n \cup B_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ y que $\text{lím}(A_n \cup B_n) = [0,1] \times \{0\}$ (Vea Ejemplo 2.3.5). Así, $\text{lím}(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

Lema 2.3.10. Sea (X,d) un espacio métrico. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{CB}(X)$ tales que lím $A_n = A$ y lím $B_n = B$, donde $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Si $\{x_n\} \subset A_n \cap B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \to x$, $x \in X$. Entonces $x \in A \cap B$.

Demostración. Note que $A_n \cap B_n \subset A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego por el Teorema 2.3.6, $\text{lím}(A_n \cap B_n) \subset A$. De forma similar $\text{lím}(A_n \cap B_n) \subset B$. De lo cual se sigue que $\text{lím}(A_n \cap B_n) \subset A \cap B$. Por otro lado, sea $C_n = \{x_n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n \subset A_n \cap B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por el Teorema 2.3.6, $\{x\} = \text{lím}\, C_n \subset \text{lím}(A_n \cap B_n)$. Por lo tanto, $x \in A \cap B$. $\square$

Lema 2.3.11. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{CB}(X)$ tales que lím $A_n = A$ y lím $B_n = B$, donde $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. Por contradicción, supóngase que $A \cap B = \emptyset$. Por el Lema 2.2.7, existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) = \emptyset$. Como lím $A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$, para cada $n \geqslant N_1$. De forma similar, como lím $B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(B_n, B) < \epsilon$, para cada $n \geqslant N_2$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$. Entonces $\mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$ y $\mathcal{H}(B_n, B) < \epsilon$. Por el Teorema 2.2.11,(2), se sigue que $A_n \subset N(\epsilon, A)$, $A \subset N(\epsilon, A_n)$, $B_n \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, B_n)$ para cada $n \geqslant N$. Como $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, sea $x \in A_n \cap B_n$. Entonces $x \in A_n$ y $x \in B_n$. Así $x \in N(\epsilon, A)$ y $x \in N(\epsilon, B)$, de lo cual se sigue que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$. $\square$

Observación 2.3.12. Sea (X,d) un espacio métrico. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{CB}(X)$ tales que lím $A_n = A$ y lím $B_n = B$, donde $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. No siempre ocurre que lím $(A_n \cap B_n) = A \cap B$, como lo veremos a continuación.

Ejemplo 2.3.13. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = [\frac{1}{2}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $q_n = (0, \frac{1}{n+1})$ y $B_n = \overline{p_n q_n}$, donde $\overline{p_n q_n}$ es el segmento de línea que une a los puntos p_n y q_n. Vea Figura 2.4. Obsérvese que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de elementos de $\mathcal{CB}(X)$ tales que lím $A_n = A$ y lím $B_n = B$, donde $A = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$ y $B = [0, 1] \times \{0\}$. Luego $A \cap B = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap B_n = \{p_n\}$. Así, lím $(A_n \cap B_n) = \{p_0\}$, donde $\{p_0\}$ es el punto $(1, 0)$. Por lo tanto lím $(A_n \cap B_n) \neq A \cap B$.

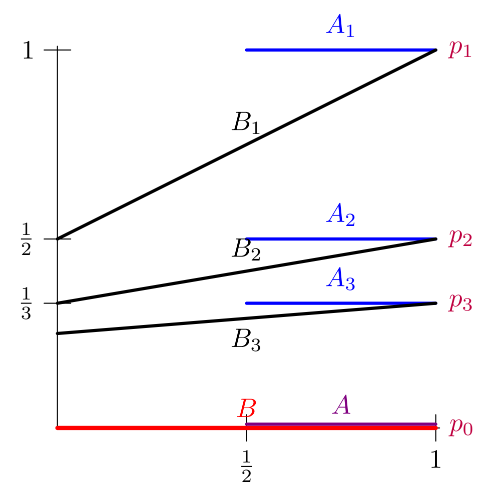

Figura 2.4: Gráfica de la sucesión $A_n = [\frac{1}{2}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $q_n = (0, \frac{1}{n+1})$ y $B_n = \overline{p_n q_n}$, donde $\overline{p_n q_n}$ es el segmento de línea que une a los puntos p_n y q_n en $X = [0, 1] \times [0, 1]$.

No siempre es fácil demostrar que una sucesión es convergente, el siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Ejemplo 2.3.14. Sean $X = [0, 3] \times [0, 1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \begin{cases} [0, 2] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \\ [1, 3] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Vea Figura 2.5. Demostrar que esta sucesión converge o diverge, no es tarea fácil.

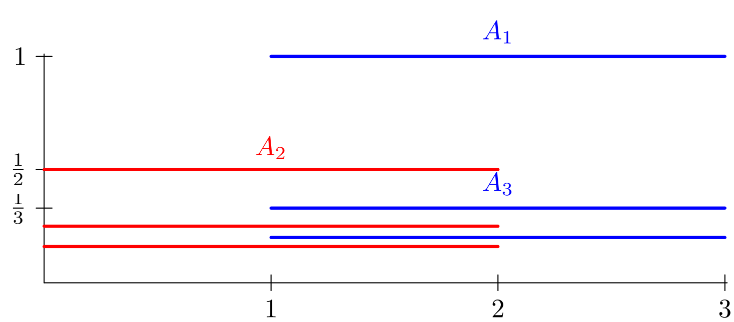

Figura 2.5: Gráfica de la sucesión $A_n = [0, 2] \times \{\frac{1}{n}\}$ si n es par y $A_n = [1, 3] \times \{\frac{1}{n}\}$ si n es impar.

Las siguientes nociones nos brindan una herramienta para analizar si una sucesión es convergente o no.

Definición 2.3.15. Sean X un espacio métrico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{CB}(X)$. Se define y denota el *límite ínferior* y el *límite superior* de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ como:

1. $\text{lím ínf } A_n = \{x \in X :$ para todo abierto U de X con $x \in U,$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset,$ para cada $n \geq N\}$.

2. $\text{lím sup } A_n = \{x \in X :$ para todo abierto U de X con $x \in U,$ existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset,$ para cada $n \in J\}$.

Ejemplo 2.3.16. Sea $X = [0,3] \times [0,1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \begin{cases} [0,2] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \\ [1,3] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Vea Figura 2.5. Entonces lím ínf $A_n = [1,2] \times \{0\}$ y lím sup $A_n = [0,3] \times \{0\}$. Obsérvese que para este ejemplo lím ínf $A_n \subset$ lím sup A_n. Note que lím ínf $A_n \neq$ lím sup A_n.

Ejemplo 2.3.17. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $A_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A = [0,1] \times \{0\}$. Vea Figura 2.3. En este caso lím ínf $A_n =$ lím sup $A_n = [0,1] \times \{0\} = A$.

Ejemplo 2.3.18. Sean $X = [0,3] \times [0,1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \begin{cases} [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \\ [2,3] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Vea Figura 2.6. Entonces lím ínf $A_n = \emptyset$ y lím sup $A_n = ([0,1] \cup [2,3]) \times \{0\}$. Obsérvese que para este ejemplo lím ínf $A_n \subset$lím sup A_n. Note que lím ínf $A_n \neq$lím sup A_n.

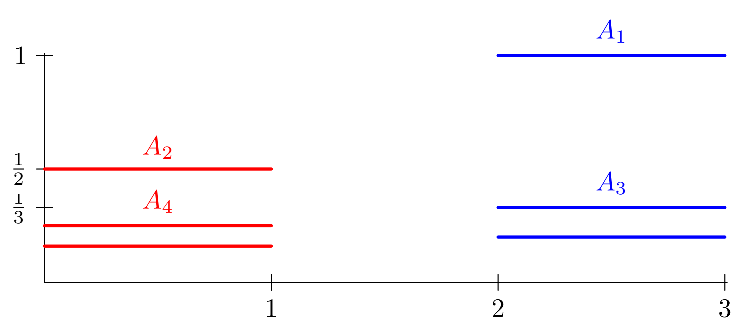

Figura 2.6: Gráfica de la sucesión $A_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ si n es par y $A_n = [2,3] \times \{\frac{1}{n}\}$ si n es impar en $X = [0,3] \times [0,1]$.

Teorema 2.3.19. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{CB}(X)$. Entonces:

1. $\text{lím inf}\, A_n \subset \text{lím sup}\, A_n$,

2. lím ínf A_n y lím sup A_n son conjuntos cerrados en X.

Demostración.

1. Consecuencia inmediata de la definición de límite ínferior.

2. Dado que $\text{lím sup}\, A_n \subset \overline{\text{lím sup}\, A_n}$. Para probar que $\text{lím sup}\, A_n$ es cerrado, por el Teorema 1.2.30, basta con verificar que $\overline{\text{lím sup}\, A_n} \subset \text{lím sup}\, A_n$. Sea $x \in \overline{\text{lím sup}\, A_n}$ y $\epsilon > 0$. Por el Teorema 1.2.33, se sigue que $N(\epsilon, x) \cap \text{lím sup}\, A_n \neq \emptyset$. Sea $y \in N(\epsilon, x) \cap \text{lím sup}\, A_n$. Entonces $y \in N(\epsilon, x)$ y $y \in \text{lím sup}\, A_n$. Sea $r > 0$ tal que $N(r, y) \subset N(\epsilon, x)$. Como $y \in \text{lím sup}\, A_n$, $N(r, y) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's. Entonces $N(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's, es decir, $x \in \text{lím sup}\, A_n$. Entonces $\overline{\text{lím sup}\, A_n}$ $\subset$lím sup A_n. En consecuencia lím sup A_n es cerrado. De forma similar se prueba que lím ínf A_n es cerrado.

De 1 y 2, este teorema está demostrado. $\square$

Proposición 2.3.20. Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{CB}(X)$ y $x \in X$. Entonces se cumple que $x \in \text{lím sup}\, A_n$ si y sólo si existen una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $\text{lím}\, x_{n_k} = x$.

Demostración. Sea $x \in \text{lím sup}\, A_n$. Entonces existe $J_1 \subset \mathbb{N}$ tal que J_1 es infinito y $A_n \cap N(1, x) \neq \emptyset$, para cada $n \in J_1$. Elegimos $n_1 \in J_1$ y $x_{n_1} \in A_{n_1} \cap N(1, x)$. Así, $d(x, x_{n_1}) < 1$ y $x_{n_1} \in A_{n_1}$. De forma similar, existe $J_2 \subset \mathbb{N}$ tal que J_2 es infinito y $A_n \cap N(\frac{1}{2}, x) \neq \emptyset$, para cada $n \in J_2$. Eligimos $n_2 \in J_2$ tal que $n_1 < n_2$ y $x_{n_2} \in A_{n_2} \cap N(\frac{1}{2}, x)$. Así, $d(x, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$ y $x_{n_2} \in A_{n_2}$. Continuando con este procedimiento, se construye una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots$ y una sucesión de puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$. Por lo tanto $\text{lím}\, x_{n_k} = x$.

Recíprocamente, supongamos que existen una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $\text{lím}\, x_{n_k} = x$. Veamos que $x \in \text{lím sup}\, A_n$. Sea U abierto en X tal que $x \in U$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in U$, para cada $k \geq N$. Consideremos $J = \{n_k : k \geq N\}$. Se tiene que J es infinito. Además, como $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$, para cada $k \in J$. Por lo tanto, $x \in \text{lím sup}\, A_n$. $\square$

Teorema 2.3.21. Sean (X, d) un espacio métrico, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{CB}(X)$ y $A \in \mathcal{CB}(X)$. Si lím $A_n = A$, entonces lím sup $A_n = A =$lím ínf A_n.

Demostración. Como lím ínf $A_n \subset \text{lím sup}\, A_n$, basta verificar que $A \subset$lím ínf A_n y $\text{lím sup}\, A_n \subset A$.
Veamos que $A \subset$lím ínf A_n. Sean $a \in A$ y $\epsilon > 0$. Como $\text{lím}\, A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$, para cada $n \geq N$. Por el Teorema 2.2.11,(1), se sigue que $A_n \subset N(\epsilon, A)$ y $A \subset N(\epsilon, A_n)$, para cada $n \geq N$.
Fijemos $n \geq N$. Como $a \in A$, se sigue que $a \in N(\epsilon, A_n)$. En consecuencia, existe $x_n \in A_n$ tal que $d(a, x_n) < \epsilon$. Así $x_n \in N(\epsilon, a) \cap A_n$. Entonces $N(\epsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Por lo tanto $a \in$lím ínf A_n. De lo cual se sigue que $A \subset$lím ínf A_n.

Veamos que $\text{lím sup}\, A_n \subset A$. Lo haremos por contradicción, supóngase que existe $x \in \text{lím sup}\, A_n$ con $x \notin A$. Como $A \in \mathcal{CB}(X)$, A es cerrado. En consecuencia, por el Teorema 1.2.33, existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, x) \cap A = \emptyset$. Como $x \in \text{lím sup}\, A_n$, existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $N(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J$. Como $\text{lím}\, A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$, para cada $n \geq N$. Por el Teorema 2.2.11,(1), se sigue que $A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$ y $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$, para cada $n \geq N$. Fijemos $m \geq N$ tal que $m \in J$. Entonces $N(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_m \neq \emptyset$. Sea $y \in N(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_m$. Entonces $y \in N(\frac{\epsilon}{2}, x)$ y $y \in A_m$. En consecuencia, $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ y $y \in A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$. Entonces $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ y existe $a \in A$ tal que $d(y, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. De manera que $a \in N(\epsilon, x) \cap A$, así $N(\epsilon, x) \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\limsup A_n \subset A$. $\square$

Ejemplo 2.3.22. Sean $X = [0, 3] \times [0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$A_n = \begin{cases} [0,2] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \\ [1,3] \times \{\frac{1}{n}\}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Vea Figura 2.5. Entonces lím ínf $A_n = [1, 2] \times \{0\}$ y lím sup $A_n = [0, 3] \times \{0\}$.
Como lím ínf $A_n \neq$lím sup A_n, por el Teorema 2.3.21, $\{A_n\}$ no converge en $\mathcal{CB}(X)$.

Teorema 2.3.23. Sean (X, d) un espacio métrico compacto, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X y $A \in 2^X$. Entonces lím $A_n = A$ si y sólo si lím sup $A_n = A =$lím ínf A_n.

Demostración. La prueba de que si lím $A_n = A$, entonces lím sup $A_n = A =$lím ínf A_n, es consecuencia del Teorema 2.3.21.

Ahora supongamos que lím sup $A_n = A =$lím ínf A_n. Veamos que $\lim A_n = A$. Sea $\epsilon > 0$. Notemos que por el Teorema 2.2.11,(1), basta verificar que:

1. existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que $A \subset N(\epsilon, A_n)$, para cada $n \geq N_1$;
2. existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que $A_n \subset N(\epsilon, A)$, para cada $n \geq N_2$.

Probemos las dos afirmaciones. Primero veamos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset N(\epsilon, A_n)$, para cada $n \geq N_1$. Note que $\{N(\frac{\epsilon}{2}, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} N(\frac{\epsilon}{2}, a_i)$. Dado que $A =$lím ínf A_n, se sigue que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $a_i \in$lím ínf A_n. Así, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $N(\frac{\epsilon}{2}, a_i) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_i$. Consideremos $N_1 = \text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. Luego $A \subset N(\epsilon, A_n)$, para cada $n \geq N_1$. En efecto, sean $a \in A$ y $n \geq N_1$. Como $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} N(\frac{\epsilon}{2}, a_i)$, existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $a \in N(\frac{\epsilon}{2}, a_i)$. Dado que $n \geq N_1 \geq n_i$, se sigue que $N(\frac{\epsilon}{2}, a_i) \cap A_n \neq \emptyset$. Sea $x \in N(\frac{\epsilon}{2}, a_i) \cap A_n$. Por la desigualdad triangular, $d(a, x) \leq d(a, a_i) + d(a_i, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. De lo cual se sigue que $a \in N(\epsilon, A_n)$. Por lo tanto, $A \subset N(\epsilon, A_n)$, para cada $n \geq N_1$.

Ahora veamos que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\epsilon, A)$, para cada $n \geq N_2$. Supóngase que no se cumple. Es decir, supongamos que, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $A_n \not\subset N(\epsilon, A)$. Así, para $N_1 = 1$, existe $n_1 \geq 1$ tal que $A_{n_1} \not\subset N(\epsilon, A)$. Luego, sea $N_2 = n_1 + 1$. Entonces existe $n_2 \geq n_1$ tal que $A_{n_2} \not\subset N(\epsilon, A)$. De forma similar, sea $N_3 = n_2 + 1$. Entonces existe $n_3 \geq n_2$ tal que $A_{n_3} \not\subset N(\epsilon, A)$. Continuando con este proceso, se tiene una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ tales que $A_{n_k} \not\subset N(\epsilon, A)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $x_{n_k} \in A_{n_k} \setminus N(\epsilon, A)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Consideremos la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, la cual está en el compacto X, por lo cual existe una subsucesión $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim x_{n_{k_l}} = x_0$, para algún $x_0 \in X$. Como la subsucesión $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty} \subset X \setminus N(\epsilon, A)$ y $X \setminus N(\epsilon, A)$ es cerrado, se tiene que $x_0 \in X \setminus N(\epsilon, A)$, en particular $x_0 \in X \setminus A$, así, $x_0 \notin A$. Por otro lado, se tiene una sucesión de números naturales tales que $\{n_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots$ y existen puntos

$x_{n_{k_l}} \in A_{n_{k_l}}$, para cada $l \in \mathbb{N}$ tal que $\lim x_{n_{k_l}} = x_0$. Por la Proposición 2.3.20, $x_0 \in \limsup A_n = A$. Así, $x_0 \in A$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\epsilon, A)$, para cada $n \geq N_2$.

De 1 y 2, pongamos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Así, para cada $n \geq N$, $A \subset N(\epsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\epsilon, A)$. Por el Teorema 2.2.11,(2), se sigue que, para cada $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \epsilon$. Por lo tanto, $\lim A_n = A$. □

Observación 2.3.24. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{CB}(X)$. Una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_\epsilon$, $\mathcal{H}(A_n, A_m) < \epsilon$.

Teorema 2.3.25. Sean (X, d) un espacio métrico, $\{A_n\}$ una sucesión en $\mathcal{CB}(X)$ y $\epsilon > 0$. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_N, A_n) < \epsilon$, entonces $\lim \sup A_n \subset N(\epsilon, A_N)$.

Demostración. Como $\mathcal{H}(A_N, A_n) < \frac{\epsilon}{4}$, para todo $n \geq N$, se sigue, por el Teorema 2.2.11,(1), que $A_n \subset N(\frac{\epsilon}{4}, A_N)$, para todo $n \geq N$. Entonces $\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \subset N(\frac{\epsilon}{4}, A_N)$. Observe que $\overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n} \subset \overline{N(\frac{\epsilon}{4}, A_N)} \subset N(\epsilon, A_N)$. En efecto, sea $x \in \overline{N(\frac{\epsilon}{4}, A_N)}$. Entonces $d(x, A_N) < \epsilon$. Así, $x \in N(\epsilon, A_N)$.
Veamos que $\lim \sup A_n \subset \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}$. Por contradicción, supóngase que existe $x \in \lim \sup A_n$ tal que $x \notin \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}$. Entonces por el Teorema 1.2.33, existe $r > 0$ tal que $N(r, x) \cap (\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) = \emptyset$.
Así para todo $n \geq N, N(r, x) \cap (\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) = \emptyset$. Entonces $N(r, x)$ intersecta a lo más un número finito de A_n's, es decir, $x \notin \lim \sup A_n$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\lim \sup A_n \subset \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}$.
Entonces $\lim \sup A_n \subset N(\epsilon, A_N)$. □

Como $N(\epsilon, A)$ es un conjunto acotado, siempre que A lo sea y por el Teorema 2.3.25, se tiene que:

Corolario 2.3.26. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$. Entonces $\limsup A_n$ es acotado.

El siguiente ejemplo muestra que no siempre el límite superior e ínferior son acotados.

Ejemplo 2.3.27. Sean $X = [0, \infty) \times [-1, 1]$, $A_n = [0, \infty) \times \{\frac{1}{n}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A = [0, \infty) \times \{0\}$. Entonces $\lim \inf A_n = \limsup A_n = [0, \infty) \times \{0\}$, los cuales no son acotados.

Teorema 2.3.28. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$. Entonces $\limsup A_n \neq \emptyset$.

Demostración. Como $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy, por el Teorema 1.3.12, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$, $\mathcal{H}(A_{N_1}, A_n) < \frac{1}{2}$. Dado que $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy, por el Teorema 1.3.12, existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_1$, $\mathcal{H}(A_{M_1}, A_n) < \frac{1}{2 \cdot 2^2}$.
Sea $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $N_2 > N_1$ y $N_2 \geq M_1$. Entonces para todo $n \geq N_2$, $\mathcal{H}(A_{N_2}, A_n) < \frac{1}{2^2}$. Para demostrar esta última afirmación, sea $n \geq N_2$. Así, $n \geq M_1$, de lo cual se sigue que $\mathcal{H}(A_{M_1}, A_n) < \frac{1}{2 \cdot 2^2}$. Por otro lado, como $N_2 \geq M_1$, se tiene que $\mathcal{H}(A_{M_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2 \cdot 2^2}$. Entonces $\mathcal{H}(A_{N_2}, A_n) \leq \mathcal{H}(A_{N_2}, A_{M_1}) + \mathcal{H}(A_{M_1}, A_n) < \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{2^2}$.

Como $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_2$, $\mathcal{H}(A_{M_2}, A_n) < \frac{1}{2 \cdot 2^3}$.
Sea $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $N_3 > N_2$ y $N_3 \geq M_2$. Entonces para todo $n \geq N_3$, $H(A_{N_3}, A_n) < \frac{1}{2^3}$. La demostración de esta afirmación es muy similar a la hecha en el paso anterior. Como $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $M_3 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_3$, $\mathcal{H}(A_{M_3}, A_n) < \frac{1}{2 \cdot 2^4}$.
Sea $N_4 \in \mathbb{N}$ tal que $N_4 > N_3$ y $N_4 \geq M_3$. Entonces para todo $n \geq N_4$, $H(A_{N_4}, A_n) < \frac{1}{2^4}$, y así, sucesivamente.
Obsérvese que por la forma en que se construyeron los N_i se tiene que $N_1 < N_2 < N_3 < N_4 < \ldots$
Nótese que $H(A_{N_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2}$, $H(A_{N_2}, A_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$, $H(A_{N_3}, A_{N_4}) < \frac{1}{2^3}, \ldots$ Entonces, por el Teorema 2.2.11,(1), $A_{N_1} \subset N(\frac{1}{2}, A_{N_2})$, $A_{N_2} \subset N(\frac{1}{2^2}, A_{N_3})$, $A_{N_3} \subset N(\frac{1}{2^3}, A_{N_4})$, y así, sucesivamente.
Sea $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Entonces existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \frac{1}{2}$. Luego existe $x_{N_3} \in A_{N_3}$ tal que

$d(x_{N_2}, x_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$. De donde, existe $x_{N_4} \in A_{N_4}$ tal que $d(x_{N_3}, x_{N_4}) < \frac{1}{2^3}$, y así, sucesivamente.

Consideremos la sucesión $\{x_{N_k}\}$. Notemos que para $l > j$, se tiene que $N_l > N_j$. Además, $d(x_{N_j}, x_{N_l}) \leq d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) + d(x_{N_{j+1}}, x_{N_{j+2}}) \ldots + d(x_{N_{l-1}}, x_{N_l}) < \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{l-1}} = \sum_{i=j}^{l-1}(\frac{1}{2})^i$.
Veamos que $\{x_{N_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en X. Sea $\epsilon > 0$ y pongamos $S_n = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2})^i$. Por el Teorema 1.3.22, se sigue que S_n es convergente. Entonces es de Cauchy, es decir, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l, j \geq N_1$, $|S_l - S_j| < \epsilon$.
Sean $N > N_1$ y $l, j \geq N$, supongamos que $l > j$. Como $l-1, j-1 \geq N_1$, se sigue que $S_{l-1} - S_{j-1} < \epsilon$. Entonces $\sum_{i=j}^{l-1}(\frac{1}{2})^i < \epsilon$. Como $\sum_{i=j}^{l-1}(\frac{1}{2})^i = d(x_{N_j}, x_{N_l})$ se sigue que $d(x_{N_j}, x_{N_l}) < \epsilon$. Así, $\{x_{N_k}\}$ es una sucesión de Cauchy.

Como X es completo y $\{x_{N_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en X, existe $x \in X$ tal que $x_{N_k} \to x$. Por demostrar que $x \in$ lím supA_n. Sea $\epsilon > 0$. Como $x_{N_k} \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{N_k}, x) < \epsilon$ para todo $k \geq N$. De lo cual se sigue que $x_{N_k} \in N(\epsilon, x)$, para todo $k \geq N$. Así $x_{N_k} \in N(x, \epsilon) \cap A_{N_k}$, para todo $k \geq N$. En consecuencia $x \in \limsup A_n$. Así, $\limsup A_n \neq \emptyset$. $\square$

La hipótesis de que (X, d) sea un espacio métrico completo en el Teorema 2.3.28 es necesario. Si no se tuviera la condición de completez en el espacio, no se puede garantizar que $\limsup A_n \neq \emptyset$. El siguiente ejemplo, muestra un espacio no completo con lím sup $A_n = \emptyset$.

Ejemplo 2.3.29. Sean $X = (0,1) \times (0,1)$ con la métrica usual. Observemos que X no es completo. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, sea $A_n = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$, vea Figura 2.2. Notemos que $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$. Supongamos que $\limsup A_n \neq \emptyset$. Sea $(x, y) \in \limsup A_n$. Por la Proposición 2.3.20, existen una sucesión de número naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ y puntos $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x, y)$. Se sigue que $(x, y) = (0, 0) \in X$, lo cual es una contradicción porque $(0, 0) \notin X$. Por lo tanto, $\limsup A_n = \emptyset$.

Capítulo 3

Propiedades del espacio $\mathcal{CB}(X)$

Este capítulo se ha dedicado al estudio de un problema típico en hiperespacios, a saber: si un espacio tiene cierta propiedad, entonces su hiperespacio también la tiene, y viceversa. En este capítulo analizamos este problema con las propiedades de acotabilidad, precompacidad, completez, compacidad y conexidad.

3.1. Acotabilidad, Precompacidad y Completez

En esta sección estudiaremos propiedades que dependen de la métrica, como la acotabilidad, precompacidad y la completez. Iniciamos esta sección con una de las propiedades fundamentales que es la acotabilidad, respecto a este tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es acotado si y sólo si $\mathcal{CB}(X)$ es acotado.

Demostración. Veamos que si X es acotado, entonces $\mathcal{CB}(X)$ es acotado. Sean $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Tomemos $a \in A$. Entonces $d(a, B) \leq d(a, b)$, para algún $b \in B$. Como X es acotado, $d(a, b) \leq \delta(X)$. Luego, $d(a, B) \leq \delta(X)$, para todo $a \in A$. Así $\delta(X)$ es una cota superior para el conjunto $\{d(a, B) : a \in A\}$. De donde $\rho(A, B) \leq \delta(X)$. De forma similar se prueba que $\rho(B, A) \leq \delta(X)$. Así, $\mathcal{H}(A, B) \leq \delta(X)$. De donde, $\delta(\mathcal{CB}(X)) \leq \delta(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{CB}(X)$ es acotado.
Ahora supongamos que $\mathcal{CB}(X)$ es acotado, veamos que X es acotado. Sean $x, y \in X$. Entonces $A = \{x\}, B = \{y\} \in \mathcal{CB}(X)$. Así, $\mathcal{H}(A, B) \leq \delta(\mathcal{CB}(X))$. Por la Proposición 2.2.13, $d(x, y) \leq \delta(\mathcal{CB}(X))$. En consecuencia, se sigue que $\delta(X) \leq \delta(\mathcal{CB}(X))$. Por lo tanto, X es acotado. $\square$

Dado que la precompacidad implica la acotabilidad, es natural preguntarse sobre la precompacidad en hiperespacios, así, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es precompacto si y sólo si $\mathcal{CB}(X)$ es precompacto.

Demostración. Supongamos que X es precompacto. Veamos que $\mathcal{CB}(X)$ es precompacto. Sea $\epsilon > 0$. Luego, para $\epsilon/2 > 0$, existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} N(\epsilon/2, x_k)$. Considérese $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) \backslash \{\emptyset\}$, donde $\mathcal{P}(\{x_1, x_2, ..., x_n\})$ denota el conjunto potencia del conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Se tiene que $\mathcal{A} \subset \mathcal{CB}(X)$. En efecto. Sea $T \in \mathcal{A}$. Así, $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$, para algún $t \leq n$. Note que $T \neq \emptyset$ y T es acotado. Por el Teorema 1.2.36, se sigue que T es cerrado. Por lo tanto $\mathcal{A} \subset \mathcal{CB}(X)$. Resta probar que $\mathcal{CB}(X) \subset \bigcup\{\mathbf{B}(\epsilon, D) : D \in \mathcal{A}\}$. Sea $A \in \mathcal{CB}(X)$. Buscamos un conjunto $D \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{H}(A, D) < \epsilon$. Considérese $D = \{x_k : N(\epsilon/2, x_k) \cap A \neq \emptyset, k \in \{1, ..., n\}\}$. Como $A \subset X$ y $X = \bigcup_{k=1}^{n} N(\epsilon/2, x_k)$, se tiene que $D \neq \emptyset$. Note que D es un conjunto finito por lo cual $D \in \mathcal{A}$. Para terminar probemos que $\mathcal{H}(A, D) < \epsilon$. Sea $a \in A$. Como $a \in A \subset X = \bigcup_{k=1}^{n} N(\epsilon/2, x_k)$, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a \in N(\epsilon/2, x_j)$. Así, $x_j \in D$. Luego $d(a, D) \leq d(a, x_j) < \epsilon/2$. Entonces, para todo $a \in A$, $d(a, D) < \epsilon/2$. En consecuencia, $\epsilon/2$ es cota superior del conjunto $\{d(a, D) : a \in A\}$. De

donde $\rho(A, D) \leq \epsilon/2$. De forma similar, $\rho(D, A) \leq \epsilon/2$. Entonces $\mathcal{H}(A, D) \leq \epsilon/2$. Así, $\mathcal{H}(A, D) < \epsilon$. Esto es $A \in \mathbf{B}(\epsilon, D)$. Así, $\mathcal{CB}(X) = \bigcup\{\mathbf{B}(\epsilon, D) : D \in \mathcal{A}\}$. Por lo tanto, $\mathcal{CB}(X)$ es precompacto.
Ahora supongamos que $\mathcal{CB}(X)$ es precompacto. Veamos que X es precompacto. Sea $\epsilon > 0$.
Como $\mathcal{CB}(X)$ es precompacto, existen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{CB}(X)$ tales que $\mathcal{CB}(X) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}(\epsilon, A_i)$. Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $a_i \in A_i$. Veamos que $X = \bigcup_{i=1}^{n} N(\epsilon, a_i)$. Sea $x \in X$. Entonces $\{x\} \in \mathcal{CB}(X)$. Así, $\{x\} \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}(\epsilon, A_i)$. Luego, $\{x\} \in \mathbf{B}(\epsilon, A_j)$, para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De donde, $\mathcal{H}(\{x\}, A_j) < \epsilon$. Por el Teorema 2.2.11,(1), $\{x\} \subset N(\epsilon, A_j)$ y $A_j \subset N(\epsilon, \{x\})$. Como $a_j \in A_j$, $d(a_j, x) < \epsilon$. Dado que $d(a_j, x) < \epsilon$, es decir, $x \in N(\epsilon, a_j)$. Esto implica que $x \in \bigcup_{i=1}^{n} N(\epsilon, a_i)$. Así, $X = \bigcup_{i=1}^{n} N(\epsilon, a_i)$. Por lo tanto, X es precompacto. □

Para analizar otras propiedades interesantes de $\mathcal{CB}(X)$, considere el siguiente conjunto $F_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset, A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$.

Afirmamos que $F_n(X) \subset \mathcal{CB}(X)$. En efecto. Sea $A \in F_n(X)$. Así, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, para algún $m \leq n$. Por el Teorema 1.2.36, A es cerrado en X. Note que $A \neq \emptyset$ y A es acotado. Por lo tanto, $F_n(X) \subset \mathcal{CB}(X)$. El espacio $F_n(X)$ es un espacio métrico, con la métrica $\mathcal{H}$ de $\mathcal{CB}(X)$ restringida a $F_n(X)$.

Teorema 3.1.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ considerado con la métrica de Hausdorff es isométrico a X.

Demostración. Veamos que existe una isometría entre $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ y X . Considere la función $h : X \to F_1(X)$ dada por $h(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Por la manera en que está definida la función, ésta es biyectiva. Además, por la Proposición 2.2.13, $d(a, b) = \mathcal{H}(\{a\}, \{b\}) = \mathcal{H}(h(a), h(b))$, con lo cual h es una isometría entre $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ y X. Por lo tanto, $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es isométrico al espacio X. □

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Se cumple que $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es homeomorfo a X.

Demostración. Por el Teorema 3.1.3, $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es isométrico a X. Luego, por el Teorema 1.4.14, $F_1(X)$ y X son homeomorfos. □

Obsérvese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente contención, $F_1(X) \subset F_n(X)$. Existen propiedades que tienen ciertos espacios métricos y que no son heredadas a cualquier subconjunto de espacios métricos, si no sólo a los subconjuntos cerrados. Por tal motivo es interesante saber qué subconjuntos del hiperespacio $\mathcal{CB}(X)$ son cerrados. A continuación veremos que $F_1(X)$ y 2^X son cerrados en $\mathcal{CB}(X)$.

Teorema 3.1.5. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $F_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$.

Demostración. Probemos que $F_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$. Para probar lo deseado, basta verificar que $\overline{F_1(X)} \subset F_1(X)$. Sea $A \in \overline{F_1(X)}$. Luego, por el Teorema 1.3.7, existe $\{A_n\} \subset F_1(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Veamos que $A \in F_1(X)$. Supóngase que $A \notin F_1(X)$. Sean $x \in A$ y $y \in A \setminus \{x\}$. Así, $d(x, y) = r > 0$. Como $\lim A_n = A$, para $\frac{r}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{r}{2}$. Fijemos $n \geq N$. Luego, por el Teorema 2.2.11,(1), $A \subset N(\frac{r}{2}, A_n)$. Supóngase que $A_n = \{z\}$. Así, $A \subset N(\frac{r}{2}, \{z\})$. Entonces $d(x, z) < \frac{r}{2}$ y $d(y, z) < \frac{r}{2}$. Luego, por la desigualdad triangular, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r$. Así, $d(x, y) < r$, lo cual es una contradicción. De manera que, $A \in F_1(X)$. Así, $\overline{F_1(X)} \subset F_1(X)$. Por lo tanto, por el Teorema 1.2.30, $F_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$. □

Teorema 3.1.6. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces 2^X es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$.

Demostración. Dado que $2^X \subset \overline{2^X}$, para demostrar lo deseado, basta probar que $\overline{2^X} \subset 2^X$.
Sea $A \in \overline{2^X}$, veamos que $A \in 2^X$. Observe que por el Teorema 1.3.18, para que A sea compacto, basta con verificar que A es precompacto y completo. Como A es cerrado en X, X es completo y por el Teorema 1.3.17, se sigue que A es completo. Ahora probemos que A es precompacto. Sea $\epsilon > 0$. Como $A \in \overline{2^X}$. Por el Teorema 1.3.7, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X tal que $\lim A_n = A$. Como $\lim A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Fijemos $n \geq N$, así, $\mathcal{H}(A_n, A) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Por el Teorema 2.2.11, se sigue que, $A \subset N(\dfrac{\epsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subset N(\dfrac{\epsilon}{2}, A)$. Luego, por el Teorema 2.2.3, $A_n \subset N(\dfrac{\epsilon}{2}, A) = \bigcup\{N(\dfrac{\epsilon}{2}, a) : a \in A\}$. Dado que A_n es compacto, existen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{k} N(\dfrac{\epsilon}{2}, a_i)$. Veamos que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} N(\epsilon, a_i)$. Sea $a \in A$. Dado que $A \subset N(\dfrac{\epsilon}{2}, A_n)$, $a \in N(\dfrac{\epsilon}{2}, A_n)$. De lo cual $d(a, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2}$, así, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a_n, a) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Por otro lado, como $a_n \in A_n$, se tiene que $a_n \in \bigcup_{i=1}^{k} N(\dfrac{\epsilon}{2}, a_i)$. Entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $a_n \in N(\dfrac{\epsilon}{2}, a_j)$, así, $d(a_n, a_j) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Por la desigualdad triangular, $d(a, a_j) \leq d(a, a_n) + d(a_n, a_j) < \epsilon$. Entonces $a \in N(\epsilon, a_j)$. Así $a \in \bigcup_{i=1}^{k} N(\epsilon, a_i)$. De lo cual se sigue que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} N(\epsilon, a_i)$. Entonces A es precompacto. Luego, por el Teorema 1.3.18, A es compacto. Así, $A \in 2^X$. Entonces $\overline{2^X} \subset 2^X$. Por lo tanto, $\overline{2^X} = 2^X$. Luego por el Teorema 1.2.30, 2^X es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$. □

Con los resultados vistos en esta sección y en los capítulos 1 y 2, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1.7. Sea (X, d) es un espacio métrico. Entonces X es completo si y sólo si $\mathcal{CB}(X)$ es completo.

Demostración. Veamos que si X es completo, entonces $\mathcal{CB}(X)$ es completo. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$. Por los Teoremas 2.3.19 , 2.3.28 y el Corolario 2.3.26, se sigue que $\limsup A_n \in \mathcal{CB}(X)$.

Por demostrar que $\lim A_n = \limsup A_n$, lo cual equivale a probar que para todo $r > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, \limsup A_n) < r$.
Sea $r > 0$ y pongamos $\epsilon = \dfrac{r}{2}$. Dado que $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_1$, $\mathcal{H}(A_{M_1}, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2^2}$. Veamos que $M_1 \in \mathbb{N}$ es el natural que cumple que para todo $N_1 \geq M_1$, $\mathcal{H}(A_{N_1}, \limsup A_n) < r$.

1. Veamos que para cada $N_1 \geq M_1$, $\limsup A_n \subset N(\frac{r}{2}, A_{N_1})$. Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $N_1 \geq M_1$. Entonces para todo $n \geq N_1$, $\mathcal{H}(A_{N_1}, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Para demostrar esta última afirmación, sea $n \geq N_1$. Entonces se sigue que $n \geq M_1$, de lo cual se sigue que $\mathcal{H}(A_{M_1}, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2^2}$. Por otro lado, como $N_1 \geq M_1$, se sigue que $\mathcal{H}(A_{M_1}, A_{N_1}) < \dfrac{\epsilon}{2^2}$. Entonces $\mathcal{H}(A_{N_1}, A_n) \leq \mathcal{H}(A_{N_1}, A_{M_1}) + \mathcal{H}(A_{M_1}, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2^2} + \dfrac{\epsilon}{2^2} = \dfrac{\epsilon}{2}$. Por el Teorema 2.3.25, se sigue que $\limsup A_n \subset N(\frac{r}{2}, A_{N_1})$.

2. Veamos que para cada $N_1 \geq M_1$, $A_{N_1} \subset N(\frac{r}{2}, \limsup A_n)$. Dado que $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_2$, $\mathcal{H}(A_{M_2}, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2^3}$. Sea $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $N_2 > N_1$ y $N_2 \geq M_2$. Entonces para todo $n \geq N_2$, $\mathcal{H}(A_{N_2}, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2^2}$. La demostración de esta afirmación es muy similar a la ya hecha en el paso anterior.
   Como $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $M_3 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_3$, $\mathcal{H}(A_{M_3}, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2^4}$. Sea $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $N_3 > N_2$ y $N_3 \geq M_3$. Entonces para todo $n \geq N_3$, $H(A_{N_3}, A_n) < \dfrac{\epsilon}{2^3}$, y así, sucesivamente.

   Obsérvese que por la forma en que se construyeron los N_i se tiene que $N_1 < N_2 < N_3 < N_4 < \ldots$
   Notése que $H(A_{N_1}, A_{N_2}) < \dfrac{\epsilon}{2}$, $H(A_{N_2}, A_{N_3}) < \dfrac{\epsilon}{2^2}$, $H(A_{N_3}, A_{N_4}) < \dfrac{\epsilon}{2^3}, \ldots$, así, por el Teorema

2.2.11,(1), $A_{N_1} \subset N(\dfrac{\epsilon}{2}, A_{N_2})$, $A_{N_2} \subset N(\dfrac{\epsilon}{2^2}, A_{N_3})$, $A_{N_3} \subset N(\dfrac{\epsilon}{2^3}, A_{N_4}), \ldots$, y así, sucesivamente. Recordemos que deseamos probar que $A_{N_1} \subset N(\frac{r}{2}, \text{lím sup}\, A_n)$. Sea $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Entonces existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Luego existe $x_{N_3} \in A_{N_3}$ tal que $d(x_{N_2}, x_{N_3}) < \dfrac{\epsilon}{2^2}$. De donde, existe $x_{N_4} \in A_{N_4}$ tal que $d(x_{N_3}, x_{N_4}) < \dfrac{\epsilon}{2^3}$, y así, sucesivamente. Consideremos la sucesión $\{x_{N_k}\}$. Notemos que para $l > j$, se tiene que $N_l > N_j$. Entonces $d(x_{N_j}, x_{N_l}) \le d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) + d(x_{N_{j+1}}, x_{N_{j+2}}) \ldots + d(x_{N_{l-1}}, x_{N_l}) < \dfrac{\epsilon}{2^j} + \dfrac{\epsilon}{2^{j+1}} + \ldots + \dfrac{\epsilon}{2^{l-1}} = \sum_{i=j}^{l-1} \epsilon(\dfrac{1}{2})^i$. Veamos que $\{x_{N_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en X. Pongamos $S_n = \sum_{i=1}^{n} \epsilon(\dfrac{1}{2})^i$. Por el Teorema 1.3.22, se sigue que $\{S_n\}$ es convergente. Entonces $\{S_n\}$ es de Cauchy, es decir, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l, j \ge N_1$, $|S_l - S_j| < 1$. Sean $N > N_1$ y $l, j \ge N$. Sin perder generalidad, supongamos que $l > j$. Como $l-1, j-1 \ge N_1$, se sigue que $S_{l-1} - S_{j-1} = \sum_{i=j}^{l-1} (\dfrac{1}{2})^i < 1$. Entonces $\sum_{i=j}^{l-1} (\dfrac{1}{2})^i < 1$. Como $\sum_{i=j}^{l-1} \epsilon(\dfrac{1}{2})^i \ge d(x_{N_j}, x_{N_l})$, se sigue que $d(x_{N_j}, x_{N_l}) < \epsilon$. En consecuencia, $\{x_{N_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en X.

Como X es completo y $\{x_{N_k}\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $x \in X$ tal que $\text{lím}\, x_{N_k} = x$. Obsérvese que $d(x_{N_1}, x_{N_i}) < \dfrac{\epsilon}{2}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Veamos que $x \in \text{lím sup} A_n$. Sea $\delta > 0$. Como $\text{lím}\, x_{N_k} = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{N_k}, x) < \delta$, para todo $k \ge N$. De lo cual se sigue que $x_{N_k} \in N(\delta, x)$, para todo $k \ge N$. Entonces $x_{N_k} \in N(\delta, x) \cap A_{N_k}$, para todo $k \ge N$. En consecuencia $x \in \text{lím sup}\, A_n$.
Como $\text{lím}\, x_{N_k} = x$, existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \ge M_1$, $d(x_{N_k}, x) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Fijemos $k \ge M_1$. Entonces $d(x_{N_1}, x) \le d(x_{N_1}, x_{N_k}) + d(x_{N_k}, x) < \epsilon$. Así $d(x_{N_1}, x) < \epsilon$. Con lo cual tenemos que $x_{N_1} \in N(\epsilon, \text{lím sup}\, A_n)$. Entonces $A_{N_1} \subset N(\epsilon, \text{lím sup}\, A_n)$, es decir, $A_{N_1} \subset N(\dfrac{r}{2}, \text{lím sup}\, A_n)$.

Por 1 y 2, tenemos que $\text{lím sup}\, A_n \subset N(\epsilon, A_{N_1})$ y $A_{N_1} \subset N(\epsilon, \text{lím sup}\, A_n)$, para cada $N_1 \ge M_1$. Por el Teorema 2.2.11,(2), $\mathcal{H}(A_{N_1}, \text{lím sup}\, A_n) \le \frac{r}{2}$, para cada $N_1 \ge M_1$. De donde $\mathcal{H}(A_{N_1}, \text{lím sup}\, A_n) < r$, para cada $N_1 \ge M_1$. En consecuencia $\{A_n\}$ converge al $\text{lím sup}\, A_n$ en $\mathcal{CB}(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{CB}(X)$ es completo.

Ahora veamos, que si $\mathcal{CB}(X)$ es completo, entonces X es completo. Por el Teorema 3.1.5, $F_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$. Así, por el Teorema 1.3.17, $F_1(X)$ es completo. Como $F_1(X)$ es isométrico a X (Ver Teorema 3.1.3), podemos concluir que X es completo. $\square$

El siguiente resultado nos dice que si X es completo, entonces su hiperespacio 2^X es completo. Este resultado será de gran utilidad en el capítulo 4.

Teorema 3.1.8. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces 2^X es completo.

Demostración. Dado que X es completo, por el Teorema 3.1.7, $\mathcal{CB}(X)$ es completo. Luego, por el Teorema 3.1.6, se sigue que 2^X es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$. Así, por el Teorema 1.3.17, se tiene que 2^X es completo. $\square$

El siguiente teorema nos brinda una forma alternativa de ver el límite superior de una sucesión anidada y de Cauchy en el hiperespacio $\mathcal{CB}(X)$, ésta la usaremos en el capítulo 4.

Teorema 3.1.9. Sean (X, d) es un espacio métrico completo y $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$. Si $A_{n+1} \subset A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{lím}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \text{lím sup}\, A_n$.

Demostración. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$. Por la demostración del Teorema 3.1.7, se tiene que la sucesión $\{A_n\}$ converge a $\text{lím sup}\, A_n$ en $\mathcal{CB}(X)$. Veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \text{lím sup}\, A_n$. Por demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \text{lím sup}\, A_n$. Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Luego $x \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $J = \mathbb{N}$ y U

un abierto de X, con $x \in U$. Entonces $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J$. Por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \limsup A_n$. Por demostrar que $\limsup A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Sea $x \in \limsup A_n$. Entonces para todo abierto U de X con $x \in U$, existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in J$. Supóngase que $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_m$. Como $A_{m+1} \subset A_m$, se sigue que $x \notin A_{m+k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $U = X \setminus A_m$. Como $x \notin A_m$, se sigue que $x \in U$. Obsérvese que J es infinito, por lo cual existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_{m+k_1} \neq \emptyset$. Entonces $(X \setminus A_m) \cap A_{m+k_1} \neq \emptyset$. Sea $y \in (X \setminus A_m) \cap A_{m+k_1}$. Así, $y \in (X \setminus A_m)$ y $y \in A_{m+k_1}$. Como $A_{m+k_1} \subset A_m$, $y \in (X \setminus A_m)$ y $y \in A_m$, lo cual no es posible. Por lo tanto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. En consecuencia $\limsup A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Por lo tanto, $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup A_n$. □

3.2. Compacidad y Conexidad

Dos de las propiedades topológicas que son muy útiles en otras ramas de las matemáticas como en análisis, optimización, entre otros, son la compacidad y la conexidad. En esta sección estudiaremos dichas propiedades topológicas.

Teorema 3.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si $\mathcal{CB}(X)$ es compacto.

Demostración. Supóngase que X es compacto. Veamos que $\mathcal{CB}(X)$ es compacto. Por el Teorema 1.3.18, se sigue que X es precompacto y completo. Por los Teoremas 3.1.7 y 3.1.2, se sigue que $\mathcal{CB}(X)$ es precompacto y completo. Así, por el Teorema 1.3.18, $\mathcal{CB}(X)$ es compacto.

Ahora supongamos que $\mathcal{CB}(X)$ es compacto. Veamos que X es compacto. Por el Teorema 3.1.5, $F_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$. Luego, por el Teorema 1.2.55, $F_1(X)$ es compacto. Por el Teorema 3.1.4, se tiene que $F_1(X)$ es homeomorfo a X, así, se sigue que X es compacto. □

Considerando un espacio métrico (X, d) y $n \in \mathbb{N}$, no es difícil verificar que la topología producto para X^n es la misma que la topología inducida por la métrica denotada y definida por

$$d_\pi((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2), \ldots, d(x_n, y_n)\},$$

para cualesquiera $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in X^n$.

Teorema 3.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico y X^n el producto topológico de X por sí mismo n veces. Sea $f_n : (X^n, d_\pi) \to (F_n(X), \mathcal{H})$ la función definida por $f_n((x_1, x_2, ..., x_n)) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, para cada $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$. Entonces f_n es continua y suprayectiva.

Demostración. Por la manera en que está definida f_n, esta función es suprayectiva, resta probar que f_n es continua. Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ y $\epsilon > 0$. Pongamos $\delta = \epsilon$. Ahora, supóngase que $d_\pi((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) < \delta$. Entonces, se sigue que $\max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2), \ldots, d(x_n, y_n)\} < \epsilon$. Con lo cual $d(x_i, y_i) < \epsilon$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Veamos que $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset N(\epsilon, \{y_1, y_2, \ldots y_n\})$. Sea $x_j \in \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Como $d(x_j, y_j) < \epsilon$ y $d(x_j, \{y_1, y_2, \ldots y_n\}) = \inf\{d(x_j, y_i) : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \leq d(x_j, y_j)$, $d(x_j, \{y_1, y_2, \ldots y_n\}) < \epsilon$, se tiene que $x_j \in N(\epsilon, \{y_1, y_2, \ldots y_n\})$. Luego $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset N(\epsilon, \{y_1, y_2, \ldots y_n\})$. Similarmente, tenemos que $\{y_1, y_2, \ldots y_n\} \subset N(\epsilon, \{x_1, x_2, \ldots x_n\})$. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.11,(2), $\mathcal{H}(\{x_1, x_2, \ldots x_n\}, \{y_1, y_2, \ldots y_n\}) < \epsilon$. Con lo cual $\mathcal{H}(f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)) < \epsilon$. En consecuencia f_n es continua en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. De manera que f_n es continua en X^n. □

Teorema 3.2.3. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F}(X) = \bigcup\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{CB}(X)$.

Demostración. Por demostrar que para todo $A \in \mathcal{CB}(X)$ y para todo $\epsilon > 0$ se cumple que $\mathbf{B}(\epsilon, A) \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{CB}(X)$ y sea $\epsilon > 0$. Dado que X es compacto y A es cerrado en X, por el Teorema 1.2.55, se sigue que A es compacto. La familia $\mathcal{F} = \{N(\epsilon, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto existen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $A \subset \bigcup_{n=1}^{n} N(\epsilon, a_n)$. Notemos que por el Teorema 2.2.3, $\bigcup_{n=1}^{n} N(\epsilon, a_n) = N(\epsilon, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$. Así, $A \subset N(\epsilon, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$. Además, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset N(\epsilon, A)$. De las dos inclusiones anteriores y por el Teorema 2.2.11,(2), se sigue que $\mathcal{H}(A, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) < \epsilon$, así $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathbf{B}(\epsilon, A)$. Note que $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in F_n(X)$ y así, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathcal{F}(X)$. De lo cual, se sigue que $\mathbf{B}(\epsilon, A) \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{CB}(X)$. $\square$

Teorema 3.2.4. Si (X,d) es un espacio métrico conexo, entonces $F_n(X)$ es conexo.

Demostración. Sea $f_n : (X^n, d_\pi) \to (F_n(X), \mathcal{H})$. Dado que X es conexo, por el Teorema 1.5.14, se sigue que X^n es conexo. En el Teorema 3.2.2 se probó que esta función es continua y suprayectiva, por lo cual al ser X^n conexo y por el Teorema 1.5.16, se sigue que $F_n(X)$ es conexo. $\square$

Teorema 3.2.5. Si (X,d) es un espacio métrico compacto, entonces $F_n(X)$ es compacto.

Demostración. Sea $f_n : (X^n, d_\pi) \to (F_n(X), \mathcal{H})$. Dado que X es compacto, por el Teorema 1.2.56, se sigue que X^n es compacto. En el Teorema 3.2.2 se probó que esta función es continua y suprayectiva, por lo cual al ser X^n compacto y por el Teorema 1.4.6, se sigue que $F_n(X)$ es compacto. $\square$

Teorema 3.2.6. Si (X,d) es un espacio métrico conexo y compacto, entonces $\mathcal{CB}(X)$ es conexo.

Demostración. Como X es conexo, por el Teorema 3.2.4 se sigue que $F_n(X)$ es conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $F_1(X) \subset F_n(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces por el Teorema 1.5.8, se tiene que $\mathcal{F}(X) = \bigcup\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo. Por el Teorema 3.2.3, se tiene que $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{CB}(X)$, así, $\overline{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{CB}(X)$. Dado que $\mathcal{F}(X)$ es conexo, por el Teorema 1.5.7, se sigue que $\overline{\mathcal{F}(X)}$ es conexo. Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{CB}(X)$ es conexo. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones de la métrica de Hausdorff

En este capítulo, veremos dos aplicaciones de la métrica de Hausdorff. En la Sección 4.1, se muestra cómo la métrica de Hausdorff facilita y es de gran utilidad en la Teoría de Hiperespacios de Continuos. Cabe mencionar que también en esta sección estudiamos la topología de Vietoris, dicha topología nos permite también trabajar en la Teoría de Hiperespacios de Continuos. En el Teorema 4.1.12, se prueba que la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff son iguales, cuando X es un continuo. En algunos resultados expuestos en esta sección, es conveniente trabajar, por su sencillez, con la topología de Vietoris, y en otros es conveniente trabajar con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Por último en la Sección 4.3, se estudiarán las funciones contracción y se construirán resultados que nos servirán para construir algunos fractales.

4.1. En la teoría de Hiperespacios de Continuos

En esta sección hacemos una breve introducción a los hiperespacios de un continuo. Empezaremos por definir algunos hiperespacios importantes y que se usarán a lo largo de este capítulo.

Definición 4.1.1. Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, denotamos y definimos al hiperespacio:
$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más n componentes } \}$.
Este hiperespacio es considerado con la métrica de Hausdorff.

Obsérvese que $F_n(X) \subset C_n(X) \subset 2^X$. Si $n = 1$, en lugar de escribir $C_1(X)$, se escribe $C(X)$. En este caso $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo } \}$.

Teorema 4.1.2. Sea X un continuo. Entonces 2^X es un continuo.

Demostración. Sea X un continuo. Dado que X es compacto, se tiene que $\mathcal{CB}(X) = 2^X$. Como $X \neq \emptyset$, $\mathcal{CB}(X) \neq \emptyset$. Dado que X es compacto, por el Teorema 3.2.1, $\mathcal{CB}(X)$ es compacto. Además, como X es conexo y compacto, por el Teorema 3.2.6, $\mathcal{CB}(X)$ es conexo. Así, $\mathcal{CB}(X)$ es un continuo. Por lo tanto, 2^X es un continuo. $\square$

Teorema 4.1.3. Sea X es un continuo. Entonces $F_n(X)$ es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea X un continuo. Como $X \neq \emptyset$, se sigue que $F_n(X) \neq \emptyset$. Dado que X es compacto, por el Teorema 3.2.5, $F_n(X)$ es compacto. Puesto que X es conexo, por el Teorema 3.2.4, $F_n(X)$ es conexo. Por lo tanto, $F_n(X)$ es un continuo. $\square$

Teorema 4.1.4. Sea X un continuo. Entonces el hiperespacio $C(X)$ es cerrado en 2^X.

Demostración. Dado que $C(X) \subset \overline{C(X)}$, para demostrar lo deseado, basta probar que $\overline{C(X)} \subset C(X)$. Sea $A \in \overline{C(X)}$. Por el Teorema 1.3.7, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Veamos que $A \in C(X)$. Como $A \in 2^X$, sólo resta verificar que A es conexo. Sean G y W conjuntos cerrados en A, y así en X, tales que $A = G \cup W$ y $G \cap W = \emptyset$. Por el Teorema 1.2.55, se sigue que G y W son compactos, y como $G \cap W = \emptyset$, se sigue que $d(G, W) > 0$. Sea $\epsilon = d(G, W) > 0$. Como $\lim A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$. Por el Teorema 2.2.11, se sigue que, $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$, para cada $n \geq N$.
Por otro lado, como $A = G \cup W$, por el Teorema 2.2.5, se sigue que, $N(\frac{\epsilon}{2}, A) = N(\frac{\epsilon}{2}, G) \cup N(\frac{\epsilon}{2}, W)$.
Obsérvese que por el Teorema 2.2.3, $N(\frac{\epsilon}{2}, G)$ y $N(\frac{\epsilon}{2}, W)$ son abiertos en X. Además por la elección de ϵ, $N(\frac{\epsilon}{2}, G) \cup N(\frac{\epsilon}{2}, W) = \emptyset$.
Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. De donde $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_m)$ y $A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$. Como $N(\frac{\epsilon}{2}, A) = N(\frac{\epsilon}{2}, G) \cup N(\frac{\epsilon}{2}, W)$, entonces $A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, G) \cup N(\frac{\epsilon}{2}, W)$ y, como A_m es conexo, por el Teorema 1.5.17, se sigue que $A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, G)$ ó $A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, W)$.
Supóngase que $A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, G)$. Entonces $N(\frac{\epsilon}{2}, A_m) \subset N(\epsilon, G)$. Para demostrar esta afirmación, sea $x \in N(\frac{\epsilon}{2}, A_m)$. Luego, existe $x_m \in A_m$ tal que $d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ y, como $A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, G)$, existe $g \in G$ tal que $d(x_m, g) < \frac{\epsilon}{2}$. Usando la desigualdad triangular, $d(x, g) \leq d(x, x_m) + d(x_m, g) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Así, $x \in N(\epsilon, G)$. Obsérvese que $W \subset A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_m) \subset N(\epsilon, G)$, por lo cual se tiene $W \cap N(\epsilon, G) = W$. Por la elección de ϵ, $W \cap N(\epsilon, G) = \emptyset$. Por lo tanto, $W = \emptyset$. De forma similar, si $A_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, W)$, se tiene que $G = \emptyset$. Por lo tanto A es conexo. Luego $\overline{C(X)} \subset C(X)$. De lo cual, se sigue que $\overline{C(X)} = C(X)$, es decir, $C(X)$ es cerrado en 2^X. □

Teorema 4.1.5. Sea X un continuo. Entonces el hiperespacio $C(X)$ es compacto.

Demostración. Por el Teorema 4.1.2, 2^X es un continuo, en particular, 2^X es un compacto y, por el Teorema 4.1.4, $C(X)$ es un cerrado en 2^X. Luego por el Teorema 1.2.55, $C(X)$ es un compacto. □

Ahora veremos algunas nociones que nos serán de gran utilidad para definir la topología de Vietoris.

Definición 4.1.6. Dado un subconjunto A de un continuo X, definimos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X:

1. $\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\}$.

2. $\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\}$.

Lema 4.1.7. Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Si A es abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en 2^X.

Demostración. Supóngase que A es un subconjunto abierto de X. Primero se demostrará que $\Gamma(A)$ es un abierto en 2^X. Sea $B \in \Gamma(A)$. Entonces $B \in 2^X$ y $B \subset A$. Como A es un abierto en X, por el Teorema 2.2.6, existe $\epsilon > 0$ tal que $B \subset N(\epsilon, B) \subset A$. Veamos que $\mathbf{B}(\epsilon, B) \subset \Gamma(A)$. Sea $C \in \mathbf{B}(\epsilon, B)$. Entonces $\mathcal{H}(C, B) < \epsilon$. Por el Teorema 2.2.11, se sigue que $C \subset N(\epsilon, B)$, luego $C \subset A$. Así, $C \in \Gamma(A)$. Entonces $\mathbf{B}(\epsilon, B) \subset \Gamma(A)$. Por lo tanto, para cada $B \in \Gamma(A)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(\epsilon, B) \subset \Gamma(A)$, es decir, $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X.

Ahora, veamos que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in \Lambda(A)$. Entonces $B \in 2^X$ y $B \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap A$, como A es abierto en X, existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, x) \subset A$. Veamos que $\mathbf{B}(\epsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Sea $C \in \mathbf{B}(\epsilon, B)$. Entonces $\mathcal{H}(C, B) < \epsilon$. Por el Teorema 2.2.11, se sigue que $B \subset N(\epsilon, C)$. Como $x \in B$, existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \epsilon$, es decir, $y \in N(\epsilon, x)$. Como $N(\epsilon, x) \subset A$, $y \in A$. Entonces $y \in C \cap A$. Así, $C \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C \in \Lambda(A)$. Entonces $\mathbf{B}(\epsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Por lo tanto, para cada $B \in \Lambda(A)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(\epsilon, B) \subset \Lambda(A)$, es decir, $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X. □

Definición 4.1.8. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Definimos la siguiente subcolección de 2^X:

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Lema 4.1.9. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Entonces $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$.

Demostración. Obsérvese que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i\} \cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset$, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$. Por lo tanto, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$. ☐

Lema 4.1.10. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m$ subconjuntos de un continuo X. Si $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ entonces $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle = \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle$.

Demostración. Obsérvese que por el Lema 4.1.9, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)] \cap \Gamma(\bigcup_{i=1}^m V_i) \cap [\bigcap_{i=1}^m \Lambda(V_i)]$. Sea $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$.
Entonces $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$. Así, $A \subset U \cap V = (U \cap V) \cup (V \cap U) = [U \cap \bigcup_{i=1}^n V_i] \cup [V \cap \bigcup_{i=1}^n U_i]$. Como $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A \subset V$, se sigue que $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De forma similar, $A \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces $A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle$.

Ahora veamos la otra contención. Sea $A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle$. Entonces $A \subset U \cap V$, es decir, $A \subset U$ y $A \subset V$. Así, $A \subset \Gamma(U)$ y $A \subset \Gamma(V)$. Como $A \cap (U \cap V_i) = (A \cap V_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, se tiene que $A \in \bigcap_{i=1}^m \Lambda(V_i)$. De forma similar, $A \in \bigcap_{i=1}^m \Lambda(U_i)$. Por lo tanto, $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$. ☐

En el siguiente resultado usaremos algunas propiedades de la base de una topología, vea [13].

Teorema 4.1.11. Sean X un continuo y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$, donde U_i es un abierto en X, para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X (la topología generada por $\mathcal{B}$), denotada por T_V y conocida como *topología de Vietoris*.

Demostración. Para probar que $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X, primero veamos que $2^X = \bigcup \mathcal{B}$. Pongamos $U_1 = X$. Note que U_1 es un abierto en X. Entonces $\langle U_1 \rangle \in \mathcal{B}$. Veamos que $2^X \subset \bigcup \mathcal{B}$. Sea $A \in 2^X$, entonces $A \subset X = U_1$. De lo cual se sigue que $A \in \langle U_1 \rangle$. Así, $A \in \bigcup \mathcal{B}$. Ahora veamos que $\bigcup \mathcal{B} \subset 2^X$. Sea $A \in \bigcup \mathcal{B}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$. Como $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset 2^X$, $A \in 2^X$.

Ahora demostremos la segunda condición para que $\mathcal{B}$ sea base para una topología del hiperespacio 2^X. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{B}$ con $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Por el Teorema 4.1.10, existe $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Vietoris. ☐

T_H denota la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Note que una base para T_H está dada por $\gamma_H = \{\mathbf{B}(\delta, S) : S \in 2^X \text{ y } \delta > 0\}$.

Teorema 4.1.12. Sea X un continuo. Entonces la topología de Vietoris T_V y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, T_H, en 2^X son iguales.

Demostración. Primero veamos que $T_V \subset T_H$. Sea $\mathcal{U} \in T_V$ y $A \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 4.1.11, se tiene que $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de T_V, donde U_i es abierto en X, para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y conjuntos abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de X tales que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Luego, por el Teorema 1.2.20,(2), se sigue que $\bigcup_{i=1}^n U_i$ es bierto en X. Por el Lema 4.1.7, se tiene que $\Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \in T_H$ y $\Lambda(\bigcup_{i=1}^n U_i) \in T_H$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego $\Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap \Lambda(\bigcup_{i=1}^n U_i) \in T_H$. Por el Lema 4.1.9, se sigue que $\Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap \Lambda(\bigcup_{i=1}^n U_i) = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$. Entonces $\mathcal{U} \in T_H$. Así, $T_V \subset T_H$.

Ahora veamos que $T_H \subset T_V$. Sean $\mathcal{V} \in T_H$ y $A \in \mathcal{V}$. Deseamos probar que existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Recuerde que una base para T_H está dada por $\gamma_H = \{\mathbf{B}(\delta, S) : S \in 2^X \text{ y } \delta > 0\}$. Entonces existe $C \in 2^X$ y $\epsilon > 0$ tal que $A \in \mathbf{B}(\epsilon, C) \subset \mathcal{V}$. Note que $\{N(\frac{\epsilon}{2}, b) : b \in C\}$ es una cubierta abierta para C, y al ser C compacto, se sigue que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset C$ tales que $C \subset \bigcup_{i=1}^n N(\frac{\epsilon}{2}, b_i)$. Tomemos $U_i = N(\frac{\epsilon}{2}, b_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y pongamos $\mathcal{W} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$. Observe que $\mathcal{W} = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$ (Por el Lema 4.1.9). Nótese que $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$. Ahora, veamos que $\mathcal{W} \subset \mathbf{B}(\epsilon, C)$. Sea $T \in \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W} = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$, se sigue que $T \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $T \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Obsérvese que se cumple:

1. $T \subset N(\epsilon, C)$.
2. $C \subset N(\epsilon, T)$.

En efecto, veamos la primera inclusión, es decir, $T \subset N(\epsilon, C)$. Sea $e \in T$. Entonces existe un elemento $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $e \in U_j = N(\frac{\epsilon}{2}, b_j)$. De lo cual se sigue que $d(e, b_j) < \epsilon$. Note que $b_j \in C$. Entonces, para cada $e \in T$, existe $b_j \in C$ tal que $d(e, b_j) < \epsilon$. Así, $T \subset N(\epsilon, C)$.

Ahora, veamos la segunda inclusión, es decir, $C \subset N(\epsilon, T)$. Sea $b \in C$, entonces existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $b \in U_k = N(\frac{\epsilon}{2}, b_k)$. Luego, $d(b, b_k) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $T \cap U_k \neq \emptyset$, se sigue que existe $z \in T \cap N(\frac{\epsilon}{2}, b_k)$. Así, $d(b_k, z) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, por la desigualdad triangular, $d(b, z) \leq d(b, b_k) + d(b_k, z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Entonces, para cada $b \in C$, existe $z \in T$ tal que $d(b, z) < \epsilon$. Así, $C \subset N(\epsilon, T)$.
Como $T \subset N(\epsilon, C)$ y $C \subset N(\epsilon, T)$, por el Teorema 2.2.11, se sigue que $\mathcal{H}(T, C) < \epsilon$. Así, $T \in \mathbf{B}(\epsilon, C)$. Por lo tanto, $\mathcal{W} \subset \mathbf{B}(\epsilon, C)$.
Como $\mathbf{B}(\epsilon, C) \subset \mathcal{V}$, se sigue que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Entonces, para cada $\mathcal{V} \in T_H$ tal que $A \in \mathcal{V}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Así, $T_H \subset T_V$. Por lo tanto, $T_H = T_V$. □

Proposición 4.1.13. Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ conjuntos abiertos en X. Si $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, entonces existen conjuntos abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración. Sea $x \in A$. Como $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, se sigue que $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Así, $x \in U_j$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Luego, como X es un espacio regular (vea [13, pág. 224]), existe un abierto V_x en X tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_j$. Luego $A \subset \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Como A es compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_r \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^r V_{x_i}$.
Por otro lado, puesto que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A \cap U_i \neq \emptyset$; para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $y_i \in A \cap U_i$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea W_i abierto en X tal que $y_i \in W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$.
Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pongamos $J_i = \{k \in \{1, 2, \ldots, r\} : \overline{V_{x_k}} \subset U_i\}$.
Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $V_i = W_i \bigcup (\bigcup_{k \in J_i} V_{x_k})$. Se tiene que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, V_i es abierto en X, $\overline{V_i} \subset U_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$. Además, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Por lo tanto, $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$. Note que $\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$. Por lo tanto, existen conjuntos abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. □

Una herramienta que será de gran utilidad, en el estudio de la estructura topológica de los hiperespacios es el concepto de arco de orden (vea [16] y [8]).

Definición 4.1.14. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Se dice que una función continua $\alpha : [0, 1] \to 2^X$ es un *arco de orden* de A a B en 2^X, si cumple lo siguiente:

1. $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$,
2. si $t, s \in [0,1]$ tales que $t < s$, entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$.

La demostración del siguiente teorema puede ser consultado en [1, pág. 28].

Teorema 4.1.15. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Existe un arco de orden de A a B en 2^X,
2. Para cada componente C de B, $C \cap A \neq \emptyset$.

Teorema 4.1.16. Dado un continuo X, el hiperespacio 2^X es arco conexo.

Demostración. Sean X un continuo y $A \in 2^X$ tal que $A \neq X$. Luego, por el Teorema 4.1.15, existe un arco de orden de A a X en 2^X. Note que cada elemento de $2^X \setminus \{X\}$, se puede conectar mediante un arco con X. Por lo tanto, por el Teorema 1.5.24, 2^X es arco conexo. $\square$

A continuación, veremos lo que es un arco de orden en $C(X)$.

Definición 4.1.17. Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un *arco de orden* de A a B en $C(X)$, si cumple lo siguiente:

1. $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$,
2. si $t, s \in [0,1]$ tales que $t < s$, entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$.

La demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [1, pág. 32].

Teorema 4.1.18. Si X es un continuo, y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un arco de orden de A a B en $C(X)$.

Teorema 4.1.19. Si X es un continuo, entonces el hiperespacio $C(X)$ es arco conexo.

Demostración. Sean X un continuo y $A \in C(X)$ tal que $A \neq X$. Luego, por el Teorema 4.1.18, existe un arco de orden de A a X en $C(X)$. Note que cada elemento de $C(X) \setminus \{X\}$, se puede conectar mediante un arco con X. Por lo tanto, por el Teorema 1.5.24, $C(X)$ es arco conexo. $\square$

Teorema 4.1.20. Si X es un continuo, entonces el hiperespacio $C(X)$ es un continuo.

Demostración. Por el Teorema 4.1.5, $C(X)$ es compacto. Por otro lado, por el Teorema 4.1.19, $C(X)$ es conexo. Así, $C(X)$ es un continuo. $\square$

Observación 4.1.21. Dado un continuo X, denotamos por 2^{2^X} al hiperespacio de 2^X es:

$$2^{2^X} = \{\mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es cerrado en } 2^X \text{ y } \mathcal{A} \neq \emptyset\}.$$

Observación 4.1.22. Sean X un continuo y $\mathcal{A} \subset 2^X$. *La nube en* 2^X *con centro* $\mathcal{A}$ *y radio* $\epsilon > 0$, la denotamos por $\mathbf{N}(\epsilon, \mathcal{A})$, esto es:

$$\mathbf{N}(\epsilon, \mathcal{A}) = \{A \in 2^X : \text{ existe } B \in \mathcal{A}, \mathcal{H}(B, A) < \epsilon\},$$

donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff para 2^X.

Notación 4.1.23. Dados X un continuo y elementos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ de 2^{2^X}, denotamos por $\mathbf{E}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ al siguiente conjunto:

$$\mathbf{E}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \{\epsilon > 0 : \mathcal{A} \subset \mathbf{N}(\epsilon, \mathcal{C}), \text{ y } \mathcal{C} \subset \mathbf{N}(\epsilon, \mathcal{A})\}.$$

Obsérvese que si X es un continuo, por el Teorema 4.1.2, se sigue que 2^X es un continuo, todos los resultados que se han demostrado para 2^X son válidos para 2^{2^X}. Así, 2^{2^X} es un continuo. La métrica de Hausdorff para 2^{2^X} la denotamos por $\mathbf{H}$. De manera que, para cada $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C} \in 2^{2^X}$:

$$\mathbf{H}(\mathcal{A},\mathcal{C}) = \text{ínf}\, \mathbf{E}(\mathcal{A},\mathcal{C}).$$

Definición 4.1.24. Consideremos un continuo X. La *función unión* es la función $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ definida por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$, para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$.

Para ver que σ está bien definida puede consultar [9].

Lema 4.1.25. Si X es un continuo y $\mathcal{A},\mathcal{C} \in 2^{2^X}$, entonces $\mathcal{H}(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{C}) \leq \mathbf{H}(\mathcal{A},\mathcal{C})$, donde $\mathbf{H}$ es la métrica de Hausdorff en 2^{2^X}.

Demostración. Sean $\mathcal{A},\mathcal{C} \in 2^{2^X}$. Ahora, sea $\epsilon \in \mathbf{E}(\mathcal{A},\mathcal{C})$. Entonces $\mathcal{A} \subset \mathbf{N}(\epsilon,\mathcal{C})$ y $\mathcal{C} \subset \mathbf{N}(\epsilon,\mathcal{A})$. Luego, si $a \in \bigcup \mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$. De donde, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{H}(A, C) < \epsilon$. Por el Teorema 2.2.11,(1), $A \subset N(\epsilon, C)$ y $C \subset N(\epsilon, A)$. En consecuencia, existe $c \in C$ tal que $d(a, c) < \epsilon$. Luego $a \in N(\epsilon, \bigcup \mathcal{C})$. Así, $\bigcup \mathcal{A} \subset N(\epsilon, \bigcup \mathcal{C})$. De forma similar, se tiene que $\bigcup \mathcal{C} \subset N(\epsilon, \bigcup \mathcal{A})$. Por lo tanto, $\epsilon \in E(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{C})$. Así, $\mathbf{E}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \subset E(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{C})$. Así, por el Teorema 1.1.14, se sigue que, $\text{ínf}\, E(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{C}) \leq \text{ínf}\, \mathbf{E}(\mathcal{A},\mathcal{C})$, es decir, $\mathcal{H}(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{C}) \leq \mathbf{H}(\mathcal{A},\mathcal{C})$. □

Teorema 4.1.26. Dado un continuo X, la función $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ es continua.

Demostración. Sean $\mathcal{A},\mathcal{C} \in 2^{2^X}$ y $\epsilon > 0$. Pongamos $\delta = \epsilon$. Si $\mathbf{H}(\mathcal{A},\mathcal{C}) < \delta$, por el Lema 4.1.25, se sigue que $\mathcal{H}(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{C}) < \epsilon$. Con esto se ha probado que la función unión es uniformemente continua, así, en particular es continua. □

Teorema 4.1.27. Sea X un continuo. Entonces $C_n(X)$ es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. En el Teorema 4.1.20 se probó que $C(X)$ es un continuo, luego por el Teorema 4.1.3, se sigue que $F_n(C(X))$ es un continuo.
Note que $F_n(C(X)) \subset 2^{2^X}$. Luego como $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ es continua (Ver Teorema 4.1.26), se sigue que $\sigma(F_n(C(X)))$ es un continuo en 2^X.
Afirmamos que $\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X)$. En efecto. Veamos primero que $\sigma(F_n(C(X))) \subset C_n(X)$. Sea $A \in \sigma(F_n(C(X)))$. Entonces existe $\mathcal{A} \in F_n(C(X))$ tal que $\sigma(\mathcal{A}) = A$. Notemos que $\mathcal{A} \subset C(X)$ y $|\mathcal{A}| \leq n$. Supóngase que $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Como $\mathcal{A} \subset C(X)$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in C(X)$. De donde $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n A_i$ tiene a lo más n componentes. Puesto que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A \in C_n(X)$. Así, $\sigma(F_n(C(X))) \subset C_n(X)$.

Veamos ahora que $C_n(X) \subset \sigma(F_n(C(X)))$. Sea $A \in C_n(X)$. Supóngase que $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, con $k \leq n$ y A_i es componente de A. Sea $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$. Como $\mathcal{A} \subset C_n(X)$ y $|\mathcal{A}| \leq n$, así $\mathcal{A} \in F_n(C(X))$. Además, $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$. En consecuencia, $A \in \sigma(F_n(C(X)))$. De donde se sigue que $C_n(X) \subset \sigma(F_n(C(X)))$. Así, $\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X)$. Por lo tanto $C_n(X)$ es un continuo. □

La demostración del siguiente teorema puede ser consultado en [1, pág. 36].

Teorema 4.1.28. Si X es un continuo, $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de 2^X y $\mathcal{K} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{K}$ es un subcontinuo de X.

Proposición 4.1.29. Sean X un continuo y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subcontinuos no degenerados de X. Entonces se tiene que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ es un subconjunto conexo de 2^X.

Demostración. Obsérvese que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ es un subconjunto de 2^X con más de un elemento y $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$. Sea $A \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \setminus \{\bigcup_{i=1}^n A_i\}$. Se sigue que $A \subsetneq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Note que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ tiene a lo más n componentes, las cuales son, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Por otro lado, como $A \cap A_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se sigue que cada componente de $\bigcup_{i=1}^n A_i$ intersecta a A. Luego, por el Teorema 4.1.15, existe un arco de orden Γ en 2^X de A a $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Note que $\Gamma \subset \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$. Así, todo elemento de $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \setminus \{\bigcup_{i=1}^n A_i\}$, se puede unir mediante un arco con $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Por el Teorema 1.5.24, se sigue que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ es arco conexo. Luego, por el Teorema 1.5.23, $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ es un subconjunto conexo de 2^X. □

Definición 4.1.30. Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces:

1. X es *localmente conexo en* x, si para cada abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. El continuo X es *localmente conexo*, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

2. X es *conexo en pequeño en* x, si para cada abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto conexo V en X tal que $x \in \mathrm{int}(V) \subset V \subset U$. Luego, X es *conexo en pequeño*, si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 4.1.31.

1. El continuo $[a,b]$, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, es localmente conexo.

2. El continuo $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es localmente conexo.

3. La curva senoidal del Topólogo es un ejemplo de un continuo que no es localmente conexo. Ver Figura 1.3.

Teorema 4.1.32. Un continuo X es localmente conexo si y sólo si cada componente de cada conjunto abierto en X es abierto en X.

Demostración. Veamos que si X es localmente conexo, entonces cada componente de cada conjunto abierto en X es abierto en X. Supóngase que X es localmente conexo. Sean U un conjunto abierto de X y C una componente de U. Sea $x \in C$, luego $x \in U$. Como X es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. Entonces $x \in C \cap V$, es decir, $C \cap V \neq \emptyset$. Como V es conexo en X, $V \subset U$ y C una componente de U, se sigue que $V \subset C$. Así, $x \in \mathrm{int}(V) \subset \mathrm{int}(C)$, es decir, $x \in \mathrm{int}(C)$. Entonces $C \subset \mathrm{int}(C)$, es decir, C es abierto en X.
Ahora supongamos que cada componente de cada conjunto abierto en X es abierto en X. Sean $x \in X$ y U abierto en X tal que $x \in U$. Sea C la componente de U tal que $x \in C$. Entonces por hipótesis, C es un abierto en X. Así, C es abierto en X y conexo tal que $x \in C \subset U$. Por lo tanto, podemos concluir que X es localmente conexo. □

Corolario 4.1.33. Cualquier componente C de un continuo X localmente conexo es abierta y cerrada en X.

Obsérvese que la conexidad local en $x \in X$, implica la conexidad en pequeño en $x \in X$. El recíproco no es válido. Por ejemplo, consideremos el continuo X de la Figura 4.1. Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.34. Un continuo X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño.

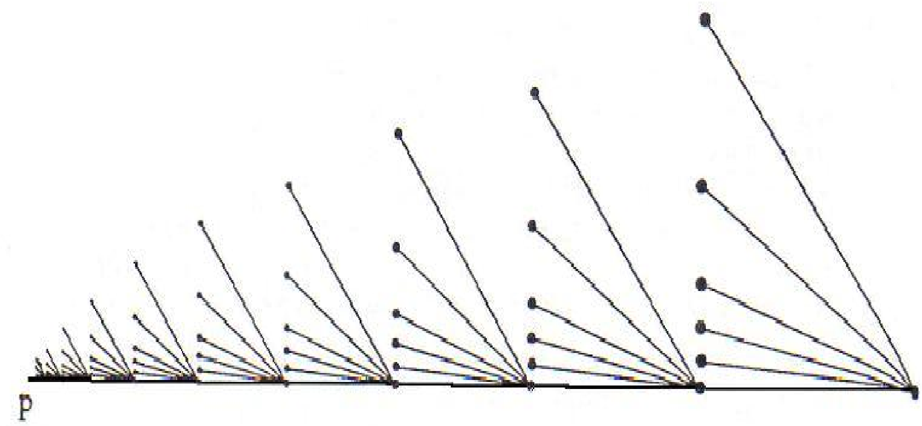

Figura 4.1: X es conexo en pequeño en p y X no es localmente conexo en p.

Demostración. Es fácil ver que si X es localmente conexo, entonces X es conexo en pequeño. Ahora veamos que si X es conexo en pequeño, entonces X es localmente conexo. Supóngase que X es conexo en pequeño. Sean U un subconjunto abierto de X y C una componente de U. Por el Teorema 4.1.32, basta probar que C es abierto en X. Sea $x \in C$, luego $x \in U$. Como X es conexo en pequeño, existe un conjunto conexo V en X tal que $x \in \text{int}(V) \subset V \subset U$. Entonces $x \in C \cap V$, es decir, $C \cap V \neq \emptyset$. Como V es conexo, $V \subset U$ y C es una componente de U, se sigue que $V \subset C$. Así, $x \in \text{int}(V) \subset \text{int}(C)$, es decir, $x \in \text{int}(C)$. Entonces $C \subset \text{int}(C)$, es decir, C es abierto en X. Por Teorema 4.1.32, X es localmente conexo. $\square$

Teorema 4.1.35. Sea X un continuo no degenerado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. X es localmente conexo,
2. 2^X es localmente conexo,
3. $C(X)$ es localmente conexo.

Demostración. Supóngase que 2^X es localmente conexo. Veamos que X es localmente conexo. Sean $p \in X$ y U un abierto en X tal que $p \in U$. Se sigue que $\{p\} \in \langle U \rangle$. Obsérvese que por los Lemas 4.1.7 y 4.1.9, $\langle U \rangle$ es abierto en 2^X. Considere un conjunto abierto $\mathcal{W}$ en 2^X tal que $p \in \mathcal{W} \subset \overline{\mathcal{W}} \subset \langle U \rangle$. Como 2^X es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo $\mathcal{V}$ en 2^X tal que $\{p\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Luego, por el Teorema 4.1.11, existen conjuntos abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ en X tales que $\{p\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{V}$. Así, por la Proposición 4.1.13, existen conjuntos abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que $\{p\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego, $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$. Dado que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \langle U \rangle$, se sigue que $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \subset \bigcup \overline{\mathcal{V}} \subset U$. Como $\{p\} \in \overline{\mathcal{V}} \cap C(X)$, $\overline{\mathcal{V}} \cap C(X) \neq \emptyset$. Note que $\overline{\mathcal{V}}$ es un subcontinuo de 2^X, luego por el Teorema 4.1.28, $\bigcup \overline{\mathcal{V}}$ es un subconjunto conexo de X. Pongamos $V = \bigcup \overline{\mathcal{V}}$. Así, $p \in \bigcup_{i=1}^n V_i \subset V \subset U$. Dado que $\bigcup_{i=1}^n V_i$ es abierto en X, se concluye que $p \in \text{int}(V) \subset V \subset U$. Por lo tanto, X es conexo en pequeño. Por el Teorema 4.1.34, se tiene que X es localmente conexo.
Una prueba similar se sigue para verificar que si $C(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.

Ahora supongamos que X es localmente conexo y veamos que 2^X es localmente conexo. Por el Teorema 4.1.34, basta probar que 2^X es conexo en pequeño. Sean $A \in 2^X$ y $\mathcal{U}$ un abierto en 2^X tales que $A \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 4.1.11, existen abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ en X tales que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Luego, por la Proposición 4.1.13, existen abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $a \in A$. Como $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, entonces $a \in V_j$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos la componente C_a de V_j tal que $a \in C_a$. Así, $A \subset \bigcup\{C_a : a \in A\}$. Dado que X es localmente conexo, por el Teorema 4.1.32, C_a es abierto en X, para cada $a \in A$. Dado que A es compacto, existen $r \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_r \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} C_{a_i}$. Observemos que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $C_{a_i} \subset \overline{C_{a_i}} \subset U_j$, para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A \cap V_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $x_i \in A \cap V_i$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea C_{x_i} la componente de V_i tal que $x_i \in C_{x_i}$. Nuevamente, como X es localmente conexo, por el Teorema 4.1.32, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, C_{x_i} es un subconjunto abierto de X.

Notemos que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $C_{x_i} \subset \overline{C_{x_i}} \subset U_i$. Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pongamos $J_i = \{k \in \{1, 2, \ldots, r\} : C_{a_k} \cap C_{x_i} \neq \emptyset\}$.

Notemos que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $J_i \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $W_i = C_{x_i} \cup (\bigcup_{k \in J_i} C_{a_k})$. Se tiene que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, W_i es conexo y abierto en X. De manera que $\langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle$ es un abierto en 2^X, además, $A \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle$.

También tenemos que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$ y $A \cap W_i \neq \emptyset$. En consecuencia, $A \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle \subset \langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \ldots, \overline{W_n} \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$.

Notemos que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la componente C_{x_i} tiene más de un punto. En efecto, si existe $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $x \in X$ tal que $C_{x_l} = \{x\}$, entonces C_{x_l} es abierto y cerrado en X. De manera que $C_{x_l} = X$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\overline{W_i}$ es un subcontinuo no degenerado de X. Por la Proposición 4.1.29, $\langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \ldots, \overline{W_n} \rangle$ es un conjunto conexo tal que $A \in \operatorname{int}(\langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \ldots, \overline{W_n} \rangle) \subset \mathcal{U}$. Así, 2^X es conexo en pequeño. Luego por la Proposición 4.1.34, 2^X es localmente conexo. De forma similar se prueba que si X es localmente conexo, entonces $C(X)$ también lo es. $\square$

4.2. En la Teoría Fractales

En la actualidad, es muy común hablar de los fractales como objetos que podemos encontrar en la naturaleza. Por ello, el estudio de la geometría fractal ha sido de mucho interés desde el siglo pasado. Conviene mencionar que dar una definición de lo que es un *fractal* no es fácil. En [18], se menciona la siguiente noción que se puede tener sobre lo que es un fractal.

Noción 4.2.1. Un *Fractal* es una figura que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen.

Para leer sobre otras nociones sobre lo que es un fractal, vea [3]. De forma natural, podemos ubicar a la geometría fractal como una parte de la geometría. Existen también otras ramas de las matemáticas, como la geometría euclideana clásica, que ha tratado de acercarse a las formas y objetos que se encuentran en la naturaleza. Pero dado que en la naturaleza no se encuentran objetos suaves, regulares e ideales, la geometría euclideana no puede cumplir con dicha tarea.

La geometría fractal, es hasta el día de hoy, la que más se acerca a las formas, objetos y fenómenos de la naturaleza.

Existe una infinidad de fractales, las cuales se pueden clasificar en diferentes clases. Uno de ellos son *los conjuntos de Julia* (Vea Figura 4.2), estos conjuntos son el resultado de los trabajos de Pierre Fatou y Gaston Julia en los años 1920, surgen como resultado de la aplicación reiterada de funciones holomorfas $z \mapsto f(z) \mapsto f(f(z)) \mapsto \ldots$ Para más detalles de los conjuntos de Julia, vea [3].

Figura 4.2: En negro, conjunto de Julia relleno asociado a $f_c(Z) = z^2 + c$, $c = \alpha - 1$, donde α es el número áureo.

Ciertas categorías de fractal no encajan del todo dentro de las características de los conjuntos de Julia. Estructuras como el plasma o las imágenes de difusión (Vea Figura 4.3) dependen en cierta medida del azar, por lo cual son únicas e irrepetibles. Para más detalles, vea [3, pág. 86].

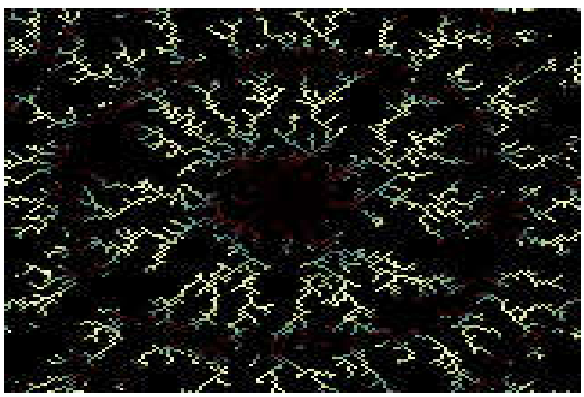

Figura 4.3: Imagen de difusión.

Existen otras categorías de fractal que satisfacen otras propiedades, como la propiedad de *autosimilitud*.

Noción 4.2.2. Se dice que un objeto geométrico tiene la propiedad de *autosimilitud o autosemejanza* si está formado por infinitas copias de sí mismo, sólo que reducidas y colocadas en diferente posición (Vea [18]).

Note que la propiedad de *autosimilitud* no es suficiente para definir un fractal, pues existen objetos que satisfacen esta propiedad pero que no son fractales (Vea Figura 4.5).

Como podemos observar, tratar de dar una definición formal sobre lo que es un *fractal* no es una tarea fácil. Para intentar resolver dicho problema, conviene conocer *la dimensión de Hausdorff* y la *la dimensión topológica*.

Para continuar, daremos de manera intuitiva lo que es la dimensión de Hausdorff y la dimensión topológica. Para un estudio más detallado consulte [3].
El conjunto vacío tiene dimensión topológica -1. El punto tiene dimensión topológica 0. En general, un objeto tiene dimensión topológica m ($D_T = m$), cuando cualquier cubierta de ese objeto, tiene como

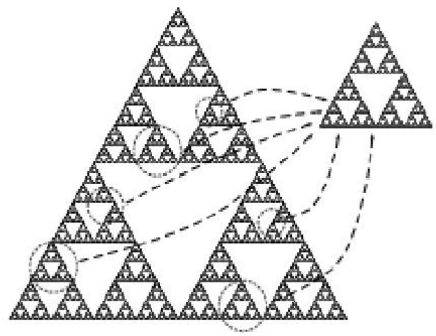

Figura 4.4: Ejemplo de una Figura con la propiedad de autosemejanza.

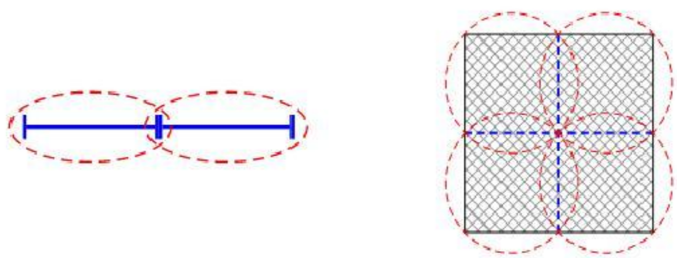

Figura 4.5: Objetos con la propiedad de autosemejanza pero que no son fractales.

mínimo una dimensión topológica de $m+1$.

La idea detrás de la dimensión topológica de X, es la siguiente: cuando se cubre una línea con intervalos chicos siempre hay puntos que se encuentran en al menos dos intervalos. Así, una línea tiene dimensión topológica 1, es decir, $D_T = 1$.

Cuando se cubre un área con círculos siempre se encuentran puntos que están en al menos tres círculos. Así, una cuadrado tiene dimensión topológica 2, es decir, $D_T = 2$. Continuando con esta idea, el cubo tiene dimensión topológica 3.

La Dimensión de Hausdorff, de forma intuitiva es el resultado que se obtiene al realizar $D_{\mathcal{H}} = \frac{ln(N)}{ln(n)}$, donde N es el número de copias semejantes a la figura original y n es el factor de ampliación para obtener la figura original. Conviene ver algunos ejemplos de la dimensión de Hausdorff.

Para el triángulo de Sierpinski (vea la sección 4.2.3), tenemos que $N = 3$ y $n = 2$, y por lo tanto, $D_{\mathcal{H}} = \frac{ln(3)}{ln(2)} \approx 1{,}584$. Ahora, veamos la dimensión de Hausdorff de un cuadrado. Podemos descomponer un cuadrado en 4 cuadrados congruentes y el factor de ampliación es 2 (Vea 4.5). Así, $D_{\mathcal{H}} = \frac{ln(4)}{ln(2)} = 2$.

Con estos conceptos, nosotros daremos la definición más formal que se tiene hasta hoy en día de lo que es un fractal.

Noción 4.2.3. Un *fractal* es un conjunto autosemejante y cuya dimensión de Haussdorff es estrictamente mayor que su dimesión topológica. Vea [18].

Con esta definición se trabajará en lo siguiente. Para continuar, mostraremos las ideas intuitivas de como construir algunos fractales, tales como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la carpeta de Sierpinski y la curva de Koch.

4.2.1. El Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es un destacado subconjunto fractal del intervalo real $[0, 1]$. Su nombre se debe George Cantor en 1883. Vea [18].
Para construir *el conjunto de Cantor*, se usa el siguiente método recursivo:

1. El primer paso es tomar el intervalo $[0, 1]$.
2. El segundo paso es quitarle su tercio interior, es decir, el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
3. Aplicar el paso anterior recursivamente a cada uno de los intervalos restantes.

El conjunto de Cantor se obtiene repitiendo el proceso anterior infinitas veces (Vea Figura 4.6).

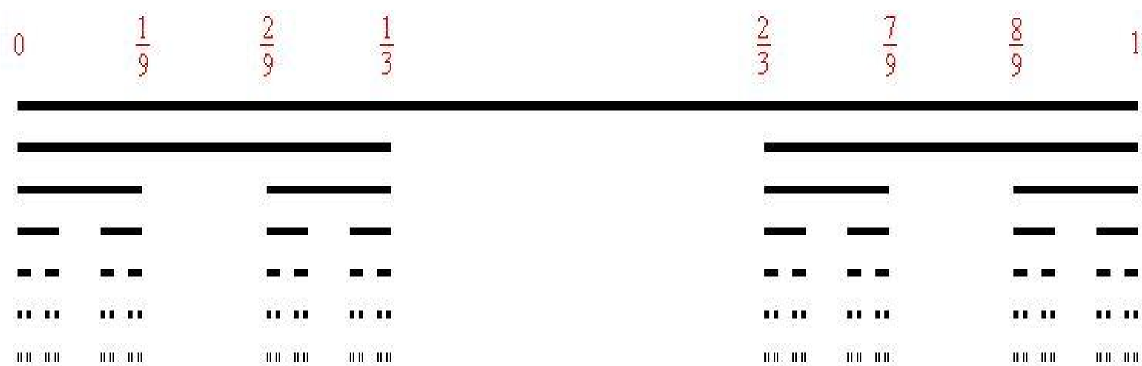

Figura 4.6: Gráfica de las primeras etapas de la construcción del conjunto de Cantor.

Note que la dimensión de Hausdorff del conjunto de cantor esta dada por $D_{\mathcal{H}} = \frac{ln(2)}{ln(3)} = 0{,}63093$ y por otra parte su dimensión topológica es cero, de modo que se cumple la condición $D_{\mathcal{H}} > D_T$.

4.2.2. El Triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski $\mathcal{S}$ es un fractal que se puede construir a partir de cualquier triángulo. La construcción geométrica del *triángulo de Sierpinski* se define de forma recursiva como sigue:

1. Se comienza con un triángulo equilátero E_0, digamos de lado 1.
2. Se conectan los puntos medios de cada lado, quedando así 4 triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{2}$.
3. Se elimina el triángulo central. Lo que queda se denomina la Primera etapa de la construcción y la denotamos E_1.
4. Se repite el proceso anterior a cada uno de los triángulos restantes.

El triángulo de Sierpinski se obtiene repitiendo el proceso anterior infinitas veces(Vea Figura 4.7).

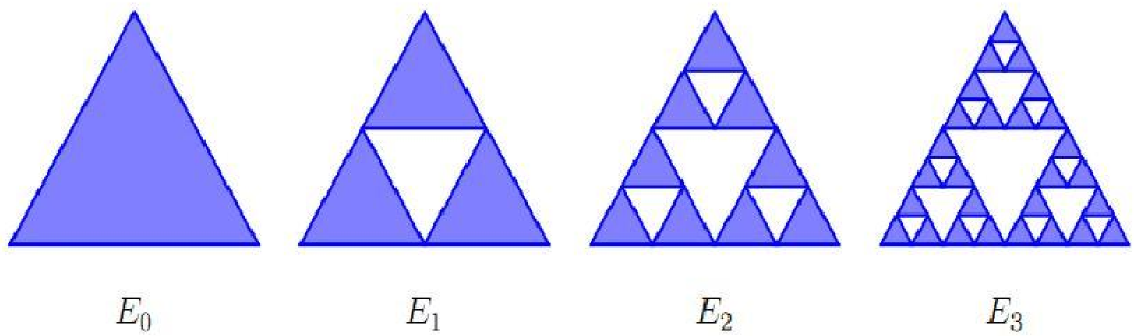

Figura 4.7: Gráfica de las primeras etapas del la construcción del triángulo de Sierpinski.

4.2.3. La Carpeta de Sierpinski

La carpeta de Sierpinski $\mathcal{T}$ es un fractal que se puede construir a partir de cualquier cuadrado. La construcción geométrica de *la carpeta de Sierpinski* se define de forma recursiva como sigue:

1. Se comienza con cuadrado, digamos de lado 1.
2. El cuadrado se divide en 9 cuadrados iguales, y se elimina el cuadrado central.
3. El paso anterior vuelve a aplicarse recursivamente a cada uno de los cuadrados restantes.

La carpeta de Sierpinski se obtiene repitiendo el proceso anterior infinitas veces (Vea Figura 4.8).

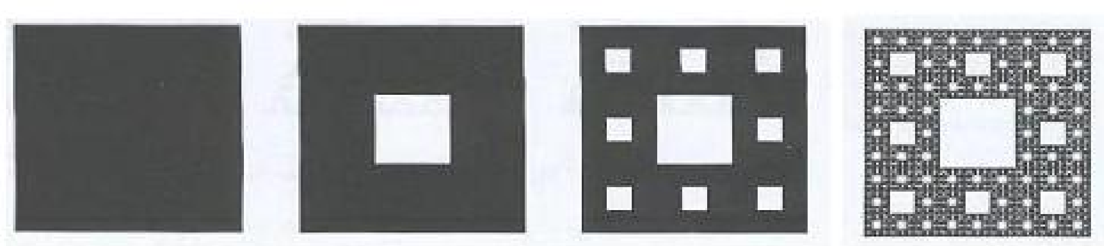

Figura 4.8: Gráfica de las primeras etapas del la construcción de la Carpeta de Sierpinski.

Note que la dimensión de Hausdorff de la carpeta de Sierpinski esta dada por $D_{\mathcal{H}} = \frac{ln(8)}{ln(3)} = 1{,}89279$ y su $D_T = 1$, de modo que se cumple la condición $D_{\mathcal{H}} > D_T$.

4.2.4. La Curva de Koch

La curva de Koch $\mathcal{K}$ es un fractal que se puede construir a partir de cualquier segmento de recta. La construcción geométrica de *la curva de Koch* se define de forma recursiva como sigue:

1. Se comienza con un segmento de recta, digamos de longitud 1.
2. El segundo paso es dividir el segmento de recta en tres partes iguales y quitarle su tercio interior.
3. Se consideran dos segmentos de recta de longitud igual al segmento de recta eliminado en el paso anterior. Con estos dos segmentos de recta se construye un triángulo tal como se muestra en la Figura 4.9.

La curva de Koch es el límite de este proceso tras un número infinito de iteraciones(Vea Figura 4.9).

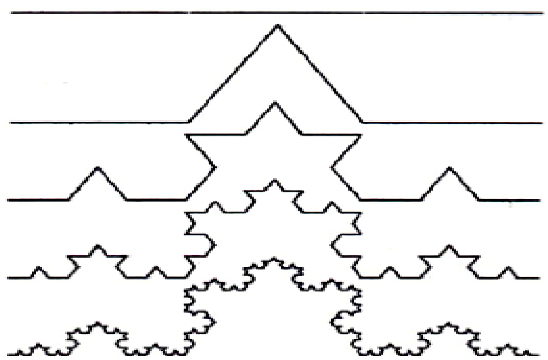

Figura 4.9: Gráfica de las primeras etapas del la construcción de la curva de Koch.

Note que la dimensión de Hausdorff de la curva de Koch esta dada por $D_{\mathcal{H}} = \frac{ln(4)}{ln(3)} = 1{,}26186$ y por otra parte su dimensión topológica es 1, de modo que se cumple la condición $D_{\mathcal{H}} > D_T$.

Para continuar, veremos algunos resultados que serán de gran utilidad para construir de una manera formal algunos de los fractales aquí expuestos.

Teorema 4.2.4. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una función contracción con constante de contracción k. Entonces f tiene un único punto fijo $x \in X$. Además, si $y \in X$ es arbitrario, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$x_0 = y$$

$$x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1$$

tiene la propiedad que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Demostración. Sea $y \in X$ y considere la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$x_0 = y$$

$$x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1.$$

Veamos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$. Por la desigualdad triangular se tiene que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n). \tag{4.1}$$

Por otro lado, como f es una contracción, se tiene que para todo entero $p \geq 1$

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(f(x_{p-1}), f(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p) \tag{4.2}$$

Usando la desigualdad 4.2 iterativamente, se obtiene $d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)$.
Así, $d(x_m, x_n) \leq (k^m + k^{m+1} + \ldots + k^{n-1}) d(x_0, x_1) \leq k^m(1 + k + \ldots + k^{n-1-m}) d(x_0, x_1)$. Note que $1 + k + \ldots + k^{n-1-m}$ es una serie geométrica, así por el Teorema 1.3.22, se sigue que $d(x_m, x_n) \leq k^m \frac{1-k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$.
Dado que $1 - k^n \leq 1$, $d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1)$.
Como $k < 1$, $\lim_{m\to\infty} \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1) = 0$, se tiene que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Dado que X es un espacio métrico completo, existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como f es continua, se sigue que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(x). \tag{4.3}$$

Así, x es un punto fijo de f.
Veamos ahora la unicidad del punto fijo de f. Supóngase que z es punto fijo de f, y que $x \neq z$. Entonces,

$$0 < d(x, z) = d(f(x), f(z)) \leq kd(x, z) \tag{4.4}$$

De lo cual se sigue que $k \geq 1$, contradiciendo la hipótesis de que $k < 1$. Por lo tanto $x = z$.
Notemos que por la manera en que se realiza la construcción de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, independientemente de quien sea el punto x_0, siempre se tendrá que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

En el siguiente teorema, f^m denota la composición de m veces f.

Teorema 4.2.5. Sean (X, d) un espacio métrico completo, $m \in \mathbb{N}$ y $f : (X, d) \to (X, d)$ una función tal que $d(f^m(x), f^m(y)) \leq kd(x, y)$, para todo $x, y \in X$, donde $0 \leq k < 1$. Entonces f tiene un único punto fijo en X.

Demostración. Obsérvese que f^m es una contracción. Luego, por el Teorema 4.2.4, f^m tiene un único punto fijo $z \in X$. Esto es, $z = f^m(z)$. Lo cual implica que, $f(z) = f(f^m(z)) = f^{m+1}(z) = f^m(f(z))$. De lo cual se sigue que $f(z)$ es un punto fijo de f^m, y por la unicidad del punto fijo de f^m, se sigue que $z = f(z)$. Así, z es un punto fijo de f.

Veamos ahora la unicidad del punto fijo de f. Supóngase que y es un punto fijo de f, es decir, $f(y) = y$. De lo cual $f^m(y) = y$. Luego, por la unicidad del punto fijo de f^m, $y = z$. □

Definición 4.2.6. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Definimos la función $\overline{f} : 2^X \to 2^X$ por $\overline{f}(K) = f(K)$, para todo $K \in 2^X$.

Observe que la función $\overline{f}$, está bien definida. Para probar esta última observación, sea $K \in 2^X$. Dado que f es continua y K es compacto, por el Teorema 1.4.6, $f(K)$ es compacto. Así, $f(K) = \overline{f(K)} \in 2^X$.

Teorema 4.2.7. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función de Lipschitz. Entonces $\overline{f}$ es una función de Lipschitz en 2^X, con la misma constante de Lipschitz de f.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{CB}(X)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\overline{f}(A), \overline{f}(B)) &= \mathcal{H}(f(A), f(B)) \\ &= \max\{\rho(f(A), f(B)), \rho(f(B), f(A))\}.\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\mathcal{H}(f(A), f(B)) = \rho(f(A), f(B))$. Así:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f(A), f(B)) &= \rho(f(A), f(B)) \\ &= \sup\{d(f(a), f(B)) : a \in A\} \\ &\leq \sup\{\inf\{kd(a, b) : b \in B\} : a \in A\} \\ &\leq \sup\{\inf\{kd(a, b) : b \in B\} : a \in A\}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f(A), f(B)) &\leq k \sup\{\inf\{d(a,b) : b \in B\} : a \in A\} \\ &= k\rho(A,B) \\ &\leq k \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\} \\ &= k\mathcal{H}(A,B).\end{aligned}$$

En consecuencia $\overline{f}$ es una función de Lipschitz en 2^X. □

Definición 4.2.8. Sean (X,d) un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, sea $f_i : X \to X$ una función de Lipschitz, con constantes de Lipschitz L_i. Definimos $F : 2^X \to 2^X$, por $F(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A)$, para cada $A \in 2^X$.

Teorema 4.2.9. Sean (X,d) un espacio métrico y $f_i : X \to X$ con $i \in \{1,2\}$, una función de Lipschitz, con constantes de Lipschitz L_1, L_2 respectivamente. Entonces F es una función de Lipschitz, y su constante de Lipschitz es $L = \max\{L_1, L_2\}$.

Demostración. Obsérvese que F está bien definida. Sean $A, B \in 2^X$.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(F(A), F(B)) &= \mathcal{H}(f_1(A) \cup f_2(A), f_1(B) \cup f_2(B)) \text{ , luego por el Teorema 2.2.17} \\ &\leq \max\{\mathcal{H}(f_1(A), f_1(B)), \mathcal{H}(f_2(A), f_2(B))\} \text{ , así, por el Teorema 4.2.7,} \\ &\leq \max\{L_1\mathcal{H}(A,B), L_2\mathcal{H}(A,B)\}.\end{aligned}$$

Sea $L = \max\{L_1, L_2\}$.
Entonces $\mathcal{H}(F(A), F(B)) \leq L \max\{\mathcal{H}(A,B), \mathcal{H}(A,B)\} = L\mathcal{H}(A,B)$. Por lo tanto, F es una función de Lipschitz y su constante de Lipschitz es $L = \max\{L_1, L_2\}$. □

Corolario 4.2.10. Sean (X,d) un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, sea $f_i : X \to X$ una función de Lipschitz, con constantes de Lipschitz L_i. Entonces F es una función de Lipschitz, y su constante de Lipschitz es $L = \max\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$.

Corolario 4.2.11. Sean (X,d) un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, sea $f_i : X \to X$ una función contracción, con constantes de contracción L_i. Entonces F es una función contracción, y su constante de contracción es $L = \max\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$.

Definición 4.2.12. Un *Sistema Iterado de Funciones (SIF)*, es una estructura de la forma $\{X; f_1, f_2, \ldots f_n\}$, donde X es un espacio métrico completo y cada $f_i : X \to X, i \in \{1,2,\ldots,n\}$, es una contracción en X.

Teorema 4.2.13. Dado un SIF $\{X; f_1, f_2, \ldots f_n\}$, existe un único $A \in 2^X$ tal que $F(A) = A = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A)$.
Además, si $K \in 2^X$, entonces la sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por:

$$A_0 = K$$

$$A_n = F(A_{n-1}), n \geq 1$$

tiene la propiedad que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. El conjunto A se le llama *el atractor del SIF* y el conjunto K se le conoce como *semilla.*

Demostración. Por el Corolario 4.2.11, se sigue que F es una contracción en 2^X. Por otro lado, como X es completo, por el Teorema 3.1.8, se tiene que 2^X es completo. Luego, por el Teorema 4.2.4, existe un único $A \in 2^X$ tal que $F(A) = A = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A)$. Finalmente, aplicando la segunda parte del Teorema 4.2.4, se obtiene la segunda parte de este teorema. $\square$

Note que, si se construye una sucesión como se indica en el Teorema 4.2.13, esta sucesión converge al punto fijo de F, sin importar quien sea el conjunto semilla K.

A continuación aplicaremos los resultados vistos en esta sección para construir algunos fractales.

Ejemplo 4.2.14. Consideremos el SIF $\{\mathbb{R}; f_1, f_2\}$ donde $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ y $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Definimos $F : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$, por $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$, para cada $A \in 2^{\mathbb{R}}$.
Sea $C_0 = [0,1]$. Veamos quién es el atractor de este SIF.
Sea $C_1 = F(C_0) = f_1([0,1]) \cup f_2([0,1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
Sea $C_2 = F(C_1) = f_1(C_1) \cup f_2(C_1) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
Continuando con este proceso sucesivamente, obtenemos la sucesión $\{C_n\}$ en $2^{\mathbb{R}}$. (Vea Figura 4.10).

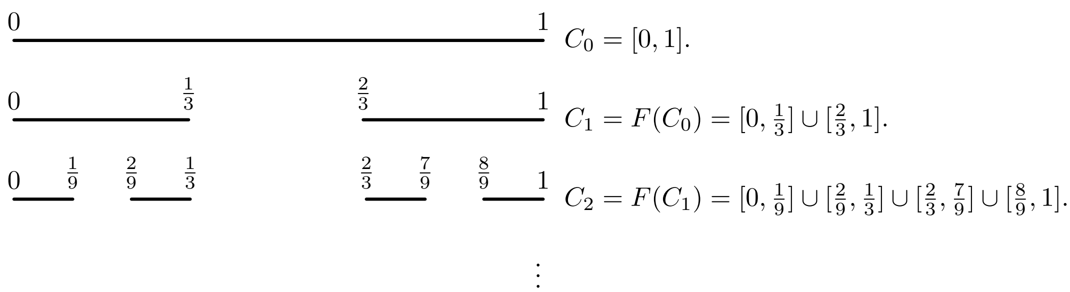

Figura 4.10: Gráfica de la construcción del conjunto de Cantor

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} \subset C_n$.
Veamos que el atractor de este SIF es el conjunto de cantor $\mathcal{C}$. Primero veamos que $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $2^{\mathbb{R}}$. Como $C_{n+1} \subset \overline{C_n}$, por el Teorema 2.1.13, $\rho(C_{n+1}, C_n) = 0$. Así, $\mathcal{H}(C_n, C_{n+1}) = \text{máx}\{\rho(C_{n+1}, C_n), \rho(C_n, C_{n+1})\} = \text{máx}\{0, \rho(C_n, C_{n+1})\} = \rho(C_n, C_{n+1})$. Observemos que:

$$\mathcal{H}(C_0, C_1) = \rho(C_0, C_1) = \frac{1}{6}$$

$$\mathcal{H}(C_1, C_2) = \rho(C_1, C_2) = \frac{1}{6 \cdot 3}$$

$$\mathcal{H}(C_2, C_3) = \rho(C_2, C_3) = \frac{1}{6 \cdot 3^2}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{H}(C_n, C_{n+1}) = \rho(C_n, C_{n+1}) = \frac{1}{6 \cdot 3^n}$$

De modo que si $n, m \in \mathbb{N}$, tales que $n < m$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(C_n, C_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \mathcal{H}(C_j, C_{j+1}) \\
&= \frac{1}{6 \cdot 3^n} + \frac{1}{6 \cdot 3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{6 \cdot 3^{m-1}} \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{m-1}} \right) \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $n, m \to \infty$. Así, $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $2^{\mathbb{R}}$. Luego, como $\mathbb{R}$ es completo, se sigue por el Teorema 3.1.8, que $2^{\mathbb{R}}$ es completo. Así, por los Teoremas 4.2.13 y 3.1.9,

$$\text{Atractor del } \; SIF \text{ es } \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \mathcal{C}.$$

Ejemplo 4.2.15. Consideremos el SIF $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ donde $f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)$, $f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)+(\frac{1}{2},0)$ y $f_3(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) + (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. Definimos $F : 2^{\mathbb{R}^2} \to 2^{\mathbb{R}^2}$, por

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A), \text{ para cada } A \in 2^{\mathbb{R}^2}.$$

Sea S_0 el triángulo de vértices $(0,0)$,$(1,0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Veamos quién es el atractor del SIF.
Sea $S_1 = F(S_0)$, $S_2 = F(S_1)$, ... Continuando con este proceso sucesivamente, obtenemos que el atractor de este SIF es el triángulo de Sierpinski $\mathcal{S}$ (Vea Figura 4.11).

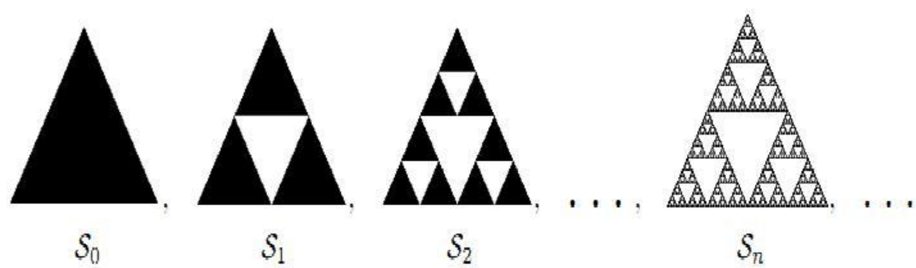

Figura 4.11: Gráfica de la construcción de el triángulo de Sierpinski

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} \subset S_n$.

Veamos formalmente que el atractor de este SIF es el triángulo de Sierpinski $\mathcal{S}$. Primero veamos que $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $2^{\mathbb{R}^2}$. Como $S_{n+1} \subset \overline{S_n}$, por el Teorema 2.1.13, $\rho(S_{n+1}, S_n) = 0$. Así, $\mathcal{H}(S_n, S_{n+1}) = \max\{\rho(S_{n+1}, S_n), \rho(S_n, S_{n+1})\} = \max\{0, \rho(S_n, S_{n+1})\} = \rho(S_n, S_{n+1})$. Entonces

$$\mathcal{H}(S_0, S_1) = \rho(S_0, S_1) = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\mathcal{H}(S_1, S_2) = \rho(S_1, S_2) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2}$$

$$\mathcal{H}(S_2, S_3) = \rho(S_2, S_3) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^2}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{H}(S_n, S_{n+1}) = \rho(S_n, S_{n+1}) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n}.$$

(Vea Figura 4.12).

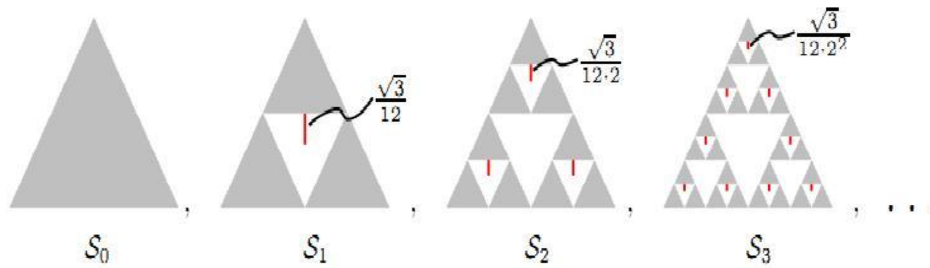

Figura 4.12: Distancia entre S_n y S_{n+1}.

De modo que si $n, m \in \mathbb{N}$, tales que $n < m$, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(S_n, S_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \mathcal{H}(S_j, S_{j+1}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n} + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^{m-1}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) \to 0,\end{aligned}$$

cuando $n, m \to \infty$. Así, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $2^{\mathbb{R}^2}$. Luego, como $\mathbb{R}^2$ es completo, se sigue por el Teorema 3.1.8, $2^{\mathbb{R}^2}$ es completo. Así, por los Teoremas 4.2.13 y 3.1.9,

$$\text{Atractor del } \ SIF = \lim_{n\to\infty} S_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \mathcal{S}.$$

Obsérvese que el Teorema 4.2.13, nos garantiza que podemos obtener diferentes aproximaciones del triángulo de Sierpinski tomando diferentes conjuntos semilla. Por ejemplo, considerando $E_0 = [0,1] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2$, se obtiene otra sucesión de conjuntos que nos ayudan a aproximar a $\mathcal{T}$ (Vea Figura 4.13).

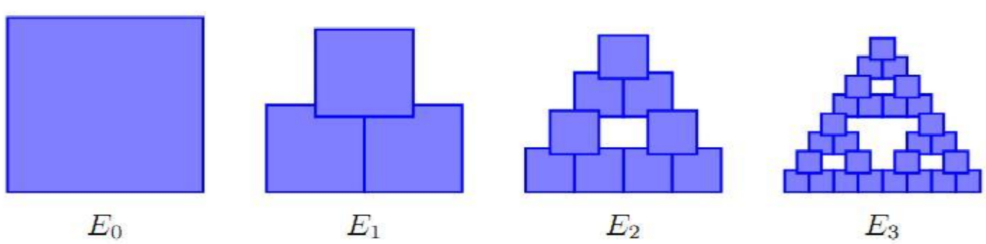

Figura 4.13: Primeras 3 iteraciones para aproximar $\mathcal{T}$, iniciando con $E_0 = [0,1] \times [0,1]$.

Ejemplo 4.2.16. Consideremos el SIF $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ donde $f_1(x,y) = \frac{1}{3}(x,y)$, $f_2(x,y) = \frac{1}{3}(x+1,y)$, $f_3(x,y) = \frac{1}{3}(x+2,y)$, $f_4(x,y) = \frac{1}{3}(x,y+1)$, $f_5(x,y) = \frac{1}{3}(x+2,y+1)$, $f_6(x,y) = \frac{1}{3}(x,y+2)$, $f_7(x,y) = \frac{1}{3}(x+1,y+2)$ y $f_8(x,y) = \frac{1}{3}(x+2,y+2)$. Definimos $F : 2^{\mathbb{R}^2} \to 2^{\mathbb{R}^2}$, por

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A) \cup f_4(A) \cup f_5(A) \cup f_6(A) \cup f_7(A) \cup f_8(A), \text{ para cada } A \in 2^{\mathbb{R}^2}.$$

Sea $T_0 = [0,1] \times [0,1]$, $T_1 = F(T_0)$, $T_2 = F(T_1)$, ..., así sucesivamente (Vea Figura 4.14).

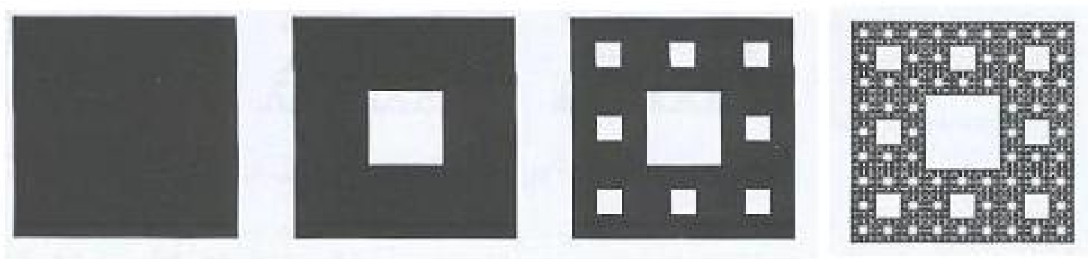

Figura 4.14: Aproximaciones de la carpeta de Sierpinski, partiendo de $E_0 = [0,1] \times [0,1]$.

Se puede probar de manera muy similar al Ejemplo 4.2.14, que el atractor de este SIF es la carpeta de Sierpinski $\mathcal{T}$.

Ejemplo 4.2.17. Consideremos el SIF $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4\}$ donde $f_1(x,y) = \frac{1}{3}(x,y)$, $f_2(x,y) = \frac{1}{3}(x\cos(\frac{\pi}{3}) - y\text{sen}(\frac{\pi}{3}) + 1, x\text{sen}(\frac{\pi}{3}) + y\cos(\frac{\pi}{3}))$, $f_3(x,y) = \frac{1}{3}(x\cos(\frac{\pi}{3}) - y\text{sen}(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}, -x\text{sen}(\frac{\pi}{3}) + y\cos(\frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2})$, $f_4(x,y) = \frac{1}{3}(x+2,y)$. Definimos $F : 2^{\mathbb{R}^2} \to 2^{\mathbb{R}^2}$, por

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A) \cup f_4(A), \text{ para cada } A \in 2^{\mathbb{R}^2}.$$

Se prueba de forma similar al procedimiento ya mostrado en los Ejemplos 4.2.14 y 4.2.15, que el atractor de este SIF es la curva de Koch $\mathcal{K}$ (Vea Figura 4.9).

Para terminar este capítulo, el lector debe observar que el método mostrado en estos ejemplos nos ayuda a construir fractales que tienen la propiedad de autosimilitud. También se debe notar que para preservar la propiedad de autosimilitud en las aproximaciones de los fractales es necesario trabajar con funciones contracción.

Conclusiones

En esta tesis se ha expuesto un estudio sobre la métrica de Hausdorff. En el Capítulo 1, presentamos nociones y resultados respecto a espacios métricos. Dado que muchos de estos resultados son estudiados en un curso de topología en espacios métricos, se omitieron algunas demostraciones, pero se incluyeron referencias para el lector interesado en conocer dichas pruebas. Cabe señalar que tales resultados fueron indispensables en los Capítulos 2, 3 y 4, para trabajar con las propiedades de los Hiperespacios considerados en este trabajo.

En el Capítulo 2, dado un espacio métrico X, se intentó construir una métrica no trivial en los conjuntos $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{CL}(X)$, $\mathcal{CB}(X)$ y 2^X (ver Definición 2.1.1). Como $2^X \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{CL}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$, bastaría obtener tal métrica para el conjunto más grande. Sin embargo, después de un análisis se construye una métrica sobre el conjunto $\mathcal{CB}(X)$, la cual es conocida como métrica de Hausdorff, y en casos particulares sobre $\mathcal{CL}(X)$. Es importante observar que en la mayoría de las referencias donde se habla de la métrica de Hausdorff, la consideran sólo sobre el conjunto 2^X ([3]). Además, en este capítulo se presentaron formas alternativas de cómo definir la métrica de Hausdorff, algunas de sus propiedades y se estudió la convergencia con esta métrica en el espacio $\mathcal{CB}(X)$.

En el Capítulo 3, demostramos que las propiedades de acotabilidad, precompacidad, completez y compacidad son equivalentes para un espacio métrico X y su hiperespacio $\mathcal{CB}(X)$. También verificamos que si (X, d) es conexo y compacto, entonces $\mathcal{CB}(X)$ es conexo.

En el Capítulo 4, vimos la aplicación de la métrica de Hausdorff en la Teoría de Hiperespacios de Continuos. Algunos de los resultados estudiados en este capítulo son: Cuando X es un continuo, $2^X = \mathcal{CB}(X) = \mathcal{CL}(X)$. Si X es un continuo, entonces los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ también son continuos. Se estudió la topología de Vietoris sobre 2^X y se mostró que ésta es la misma que la topología inducida por la métrica de Hausdorff, cuando X es un continuo. En esta parte, también verificamos que la propiedad de conexidad local es equivalente para un continuo X y sus hiperespacios 2^X y $C(X)$. Respecto a la aplicación de la métrica de Hausdorff en la geometría fractal, utilizamos el teorema del punto fijo, los sistemas iterados de funciones y la métrica de Hausdorff; para obtener un método que nos permite aproximar de diferentes formas a algunos fractales que satisfacen la propiedad de autosemejanza, dentro de los cuales tenemos al conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la carpeta de Sierpinski y la curva de Koch.

Cabe mencionar que varios de los resultados que se estudiaron en esta tesis fueron expuestos en los congresos nacionales siguientes:

(a) Octava Gran Semana Nacional de la Matemática, del 3 al 7 de septiembre de 2012, en la FCFM de la BUAP, Puebla, Puebla.

(b) Novena Gran Semana Nacional de la Matemática, del 23 al 27 de septiembre de 2013, en la FCFM de la BUAP, Puebla, Puebla.

(c) XLVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, del 27 de octubre al 1 de noviembre de 2013, en la UADY, Mérida, Yucatan.

Además, es de resaltar que algunos de los resultados que conforman esta tesis forman parte de un capítulo de libro, el cual hemos sometido a revisión [2].

En general, esperamos que esta tesis sirva como guía a todo aquel que quiera iniciarse en la teoría de hiperespacios, en particular en la teoría de hiperespacios de continuos. Además, para aquellos que quieran estudiar la construcción formal de algunos fractales.

Índice de figuras

Índice alfabético

Bibliografía

[1] F. Barragań, *Funciones inducidas entre hiperespacios de continuos*, Tesis, Puebla, 2007.

[2] F. Barragán, A. Romero, S. Sanchez Perales y Victor M. Grijalva, *Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, en proceso de revisión, 2013.

[3] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., San Diego, 1988.

[4] A. Cuevas y P. Sanz, *Robustez cualitativa en regiones de confianza*, Fac. de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid, España, 1990.

[5] Norman B. Haaser y Joseph A. Sullivan, *Análisis Real*, Editorial Trillas, México, 1978.

[6] K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological space*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.

[7] F. Hausdorff, *Grundzge der Mengenlehre*, Viet, Leipzig, 1914.

[8] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[9] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[10] I. L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos*, Limusa, 1987.

[11] Teck-Cheong Lim, *On fixed point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations*, J. of Math. Analysis and Appl. 110 (1985), 436-441.

[12] G. Lohmann, D. Y. Cramon, *Automatic labelling of the human cortical surface using sulcal basins*, Medical Image Analysis, Vol. 4 (2000), 179-188.

[13] James R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2007.

[14] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.

[15] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 152-182.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978 (reeditado por: Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006).

[17] D. Ponpeiu, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* Ann. Fac. Sci. de Toulouse Sr. 2, tom. 7, 3 (1905), 265-315.

[18] S. Sabogal y G. Arenas, *Una introducción a la geometría fractal*, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.

[19] S. Sánchez-Perales y Slavisâ, *Continuity of spectra and compact perturbations*, Bull. Koream Math. Soc.48 (2011), 1261-1270.

[20] S. Schlicker, L. Morales y D. Schultheis, *Polygonal chain sequences in the space of compact sets*, Journal of Integer Sequences, Vol. 12 (2009), Article 09.1.7.

[21] L. Vietoris, *Bereiche zweiter Ordnung*, Monatshefte far Mathematik und Physik, 32 (1922), 258-280.

[22] Vladimir Tkachuk, *Curso básico de topología general*, Universidad Autónoma Metropolitana, 1999.