UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

"JUEGOS POTENCIALES DINÁMICOS A TIEMPO CONTINUO"

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

SAIVETH HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ONÉSIMO HERNÁNDEZ LERMA

CODIRECTOR DE TESIS:

LIC. JUAN CARLOS MENDOZA SANTOS

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MARZO 2017.

"Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema.
Una belleza fría y austera, como la de una escultura".
Bertrand Russell.

Dedicado a mis papás Ángel y Filomena,
mi razón de ser y la motivación de mi vida.

Agradecimientos

Aunque las palabras no alcanzan para poder expresar mis agradecimientos hacia mis papás Ángel y Filomena, les agradezco por ser quienes me enseñaron que lo más importante es el trabajo constante. Agradecerle a mi papá quien cada día me enseña que no hay más límites que los que uno se pone, a mi mamá quien me enseña que la entrega hacia la familia es lo que nos une y nos hace más fuertes cada día. A mis hermanos Migue y Bris que me apoyan y de vez en cuando, tienen la capacidad de sacarme de mis casillas. A Anita quien ya es parte de esta familia y a mis sobrinos Annet y Rodrigo quienes hacen que olvide mis preocupaciones. A Jesús que desde que lo conozco ha sido un gran apoyo en todo este tiempo. Agradecer también a los amigos que hicieron de estos 5 años una aventura.

Un agradecimiento especial al Dr. Onésimo Hernández Lerma, quien a pesar de la carga de trabajo que tiene, siempre tuvo el tiempo de guiarme en este trabajo de tesis. También agradezco al profesor Juan Carlos Mendoza Santos quien me apoyo mucho, no sólo al realizar este trabajo de tesis, sino también en mi formación académica.

Agradezco también a todos los profesores que se tomaron el tiempo para revisar este trabajo de tesis; a la Dra. Silvia Reyes Mora, al MM. Vulfrano Tochihuitl Bueno, al Dr. Cuauhtemoc Héctor Castañeda Roldán y al Dr. Octavio Alberto Agustín Aquino.

Agradezco también a todos los profesores que durante estos 5 años han sido parte fundamental en mi formación profesional.

Índice general

Introducción

La primera discusión conocida de la teoría de juegos aparece en una carta escrita por James Waldegrave (1684-1741) el 13 de noviembre de 1713. En esta carta, Waldegrave proporciona una solución *minimax* de estrategia mixta a una versión para dos personas del juego de cartas *Le Her* [19]. Sin embargo, no se publicó un análisis teórico relacionado con la teoría de juegos en general sino hasta la publicación de "Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses", de Antoine Augustin Cournot en 1838 [5]. El análisis de Cournot es mucho más general que el de Waldegrave y por tal motivo el trabajo de Cournot [5] fue el inicio de la teoría de juegos en el sentido "clásico".

Fue hasta 1944 cuando el matemático John von Neumann (1903-1957) y el economista Oskar Morgenstern (1902-1976) publicaron su libro "Theory of Games and Economic Behavior", que dio origen a la teoría de juegos como se conoce actualmente. En este libro proponían, entre otras cosas, una solución algorítmica para los juegos de *suma cero*. Si bien este tipo de juegos no son muy comunes en la realidad, von Neumann y Morgenstern demostraron que este tipo de juegos tienen una solución muy sencilla y elegante desde el punto de vista matemático. Fue también gracias a la aparición de este libro que se empezó a comprender la importancia de la teoría de juegos para estudiar las relaciones humanas. Otros grandes avances en la teoría de juegos se puede encontrar en [19].

Para 1951, Rufus Isaacs (1914-1981), inició el estudio de los juegos diferenciales cuando analizó el *juego del chofer homicida*, aunque la publicación de este artículo fue hasta 1965. El estudio de este tipo de juegos inició gracias al desarrollo de la *programación dinámica* y el *principio del máximo* para la solución de problemas de control óptimo[1]. Después de esto se hizo evidente que había una conexión entre los juegos diferenciales y la teoría de control óptimo. En efecto, los juegos diferenciales son una generalización de los problemas de control óptimo a los casos en donde hay más de un jugador.

En 1973 Robert W. Rosenthal (1945–2002) [25], economista estadounidense, fue el primero en utilizar el concepto de función potencial para juegos en forma estratégica[2]. Rosenthal definió una clase de juegos llamada *juegos de congestionamiento* y fue capaz

[1]Ver Sección 1.2.1 para una definición de problema de control óptimo.
[2]Ver Capítulo 1 para una definición de juegos en forma normal o estratégica.

de demostrar, mediante la construcción explícita de una función potencial que todos los juegos pertenecientes a esta nueva clase poseen un *equilibrio en estrategias puras*. Fue en 1996, cuando el economista Dov Monderer y matemático estadounidense Lloyd Stowell Shapley (1923-2016) introdujeron el concepto de función potencial, mediante la publicación de su articulo *Potential Games* [23]. A partir de aquí se definen a los juegos potenciales como una clase de juegos que admiten una función potencial.

Esto último, en conjunto con los juegos diferenciales nos llevan al tema central de este trabajo de tesis, a saber, el estudio de los juegos potenciales dinámicos (o juegos diferenciales), en tiempo continuo. El interés de conocer más sobre este tipo de juegos, es que un juego que admita una *función potencial* es como si todos los jugadores estuvieran maximizando conjuntamente una sola *función objetivo* en vez de competir por maximizar sus respectivos pagos. El concepto de función potencial surge a partir de la idea de simplificar un juego de n jugadores en un problema de un solo jugador. Al principio esto se introdujo, con gran éxito, para juegos estáticos y posteriormente se generalizó para juegos dinámicos.

Actualmente hay mucha literatura sobre funciones potenciales para juegos estáticos. Sin embargo, en lo que respecta a juegos dinámicos, aun hay mucho que investigar. Por ello, en este trabajo de tesis se reúne información clara y actualizada sobre funciones potenciales hamiltonianas, juegos diferenciales y se describe la relación entre ambos conceptos, con el objetivo de desarrollar un documento que permita a los interesados en la teoría de juegos estudiar, revisar y analizar los juegos diferenciales, en particular a los juegos diferenciales potenciales. Otro de nuestros objetivos es motivar al lector a conocer una clase de juegos que admite una función potencial hamiltoniana que permite caracterizar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una función potencial. Esto conlleva, en particular, a entender la diferencia entre un problema de juegos dinámicos y un problema de control óptimo.

El desarrollo de este documento se presenta de la siguiente manera. Para una mejor comprensión del texto, se presenta un glosario de términos al final del escrito. Las palabras o frases que aparecen en cursivas pueden encontrarse en este apartado. Este trabajo además consta de 5 capítulos distribuidos de la siguiente manera.

En el Capítulo 1 se abordan los conceptos básicos referentes a la teoría de juegos. Otros aspectos que se consideran dentro de este capítulo son las secciones correspondientes a los juegos estáticos, juegos dinámicos y juegos potenciales. Puesto que nuestro interés se enfoca en los juegos dinámicos (potenciales), es necesario conocer la diferencia entre uno y otro. Este capítulo se complementa con el Apéndice A, donde se muestra otra manera de representar un juego. Para reforzar la sección de juegos estáticos, se presentan dos ejemplos más, los cuales se pueden encontrar en el Apéndice B.

En el Capítulo 2 se inicia con el análisis de manera general del potencial para el caso de juegos estáticos, dando un repaso a preliminares necesarios para el entendimiento del contenido. Para aterrizar ideas dentro de este capítulo, en la Sección 2.2 se presenta el juego de Cournot así como la manera de encontrar el potencial para este ejemplo.

En el Capítulo 3 se analiza el tema principal de este trabajo de tesis, que es el potencial para el caso de juegos diferenciales. Para el desarrollo y entendimiento de este capítulo se divide en 2 secciones, iniciando con los preliminares para posteriormente presentar los teoremas que garantizan las condiciones suficientes para la existencia de la función potencial hamiltoniana.

En el Capítulo 4 se desarrolla nuevamente el modelo de Cournot, particularizando para cuando se tienen solamente dos empresas en competencia, y considerándolo desde el punto de vista de juegos diferenciales. Con este ejemplo se muestra la aplicación de los teoremas vistos en el Capítulo 3.

Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo de tesis.

Capítulo 1

Conceptos básicos

La teoría de juegos en sus inicios comenzó estudiando juegos como el póker o el ajedrez. Sin embargo, aún después de que esta teoría abandonara el estudio de los auténticos juegos, el término "juego" se siguió conservando, pero ahora denotaba situaciones estratégicas más complejas, como lo son competencias políticas, de publicidad o de mercados. Aunque bien esta evolución en los casos de estudio no implica que los juegos originales hayan quedado en el olvido, pues muchos de estos todavía se analizan para una mejor comprensión de los elementos de esta teoría, más aún, muchos de ellos dieron pie a nuevos resultados. Prueba de ello es el Teorema de Zermelo [17], inspirado en un juego de ajedrez, considerado como el primer teorema dentro de esta disciplina.

En el presente capítulo se especifican algunos de los conceptos para poder entender a la teoría juegos, así como un breve acercamiento a los juegos estáticos. También se introducen los juegos dinámicos y juegos potenciales pues, uno de nuestros intereses radica en conocer más sobre juegos potenciales dinámicos. La literatura básica para éste capitulo se puede encontrar en [21], [29] y [22].

1.1. Preliminares

Formalmente, podemos decir que la teoría de juegos estudia modelos matemáticos de situaciones de cooperación o de conflicto entre tomadores de decisiones llamados agentes o jugadores. Así, un juego es cualquier situación formal en la que un conjunto de individuos (posteriormente llamados jugadores) interaccionan entre ellos y presentan una interdependencia estratégica[1].

[1] Esta interdependencia estratégica indica que lo que haga un jugador dentro del juego afecta directamente a los demás jugadores. De la misma manera él se verá afectado por las decisiones de los demás.

El principal objetivo de la teoría de juegos es determinar los papeles de conducta racional en situaciones de juego en las que los resultados son condicionales a las acciones de jugadores interdependientes, de esta manera, existen dos supuestos básicos que subyacen a esta teoría. El primer supuesto es que los jugadores son racionales, es decir persiguen firmemente la maximización de beneficios. El segundo supuesto es que los jugadores aplican esta racionalidad al proceso de razonamiento estratégico, al momento de tomar decisiones los jugadores emplean todo el conocimiento que tienen para formar expectativas de cómo se comportarán los otros jugadores. Con base en la racionalidad que se le pide a un jugador, éste puede ser una persona, una empresa, un partido político o bien un país.

Adicionalmente, para que un juego esté completamente determinado se necesita definir las acciones/estrategias de los jugadores y los pagos que puedan obtener a partir de las elecciones que hagan. EL término acción es generalmente ocupado dentro del contexto de los juegos estáticos[2], pues por la naturaleza de estos juegos, cada jugador sólo necesita elegir una acción para el juego. Por otro lado, en los juegos dinámicos se emplea el término estrategia y, en este caso, se hace referencia a un plan de acción que se desarrollará en cada etapa del juego.

Finalmente, los pagos de cada jugador se describen mediante una función cuyo dominio es el conjunto de acciones y codominio es $\mathbb{R}$. Estos pagos individuales se reúnen en una sola función de pago total o función de pago para todo el juego. La Definición 1.1.1 formaliza estos elementos.

Un aspecto de la teoría de juegos, ya sea que se aborden juegos estáticos o juegos dinámicos, es su división en dos ramas importantes de estudio.

- Teoría de juegos no cooperativos.
- Teoría de juegos cooperativos.

La primera analiza principalmente al jugador individual, en ella se supone como "egoístas" a los jugadores, persiguiendo cada uno de ellos el mayor beneficio propio posible, sin importar lo que pueda pasar con el pago de los demás jugadores que intervienen. Dicho en otras palabras, cada uno de los jugadores está interesado sólamente en optimizar su propia función de pago.

La segunda teoría es más "amigable" pues supone una coalición entre los jugadores, la cual los llevará a trabajar juntos por el bien de todos. Sin embargo este enfoque en la realidad es un tanto utópico, pues como veremos en la Subsección 1.2.1, los jugadores que intervienen buscan siempre el beneficio propio, aunque esto los lleve a resultados

[2] Muchas veces en este tipo de juegos es común que se tome a las acciones como sinónimo de estrategias, por lo que en este contexto es indistinto hablar de acciones o estrategias.

menos favorables en comparación a los que pudieran haber obtenido si hubieran optado por trabajar en equipo (cooperando).

El interés de este escrito subyace en la rama de la teoría de juegos no-cooperativos, los cuales a su vez se pueden subdividir de dos formas distintas.

1. En función del grado de contraposición de intereses.
   - Juegos de suma cero.
   - Juegos de suma no cero.
2. En función de cómo se representan.
   - Juegos en forma normal.
   - Juegos en forma extensiva.

Para el desarrollo de este escrito estamos interesados en la representación de los juegos en forma normal. Si el lector esta interesado en conocer la representación de un juego en forma extensiva, en el Apéndice A: Representaciones de un juego, se encuentra una descripción básica. Una explicación más extensa sobre este tema se puede encontrar en [24].

Juegos en forma normal

Otra manera de llamar a esta representación es juegos en forma estratégica, [26]. Ésta representación es la más utilizada dentro de la teoría de juegos debido a su practicidad, a diferencia de los juegos en forma extensiva, de mostrar a los elementos de un juego. Esto se debe a que un juego en forma normal enumera las estrategias de cada jugador, y los resultados que se derivan de cada combinación posible de opciones. De manera formal, se tiene la siguiente definición [15]:

Definición 1.1.1 (Juego en forma normal)**.** Un juego en forma normal (o estratégica), es una terna $\Gamma = (N, S, \Pi)$, donde los conjuntos N y S y la función Π están dadas por:

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es el que indexa a los jugadores, $n \in \mathbb{N}$.
- S_i son las acciones del $i-$ésimo jugador. Así,

  $$S = S_1 \times \cdots \times S_n,$$

  son las acciones para todo el juego.

- La $\Pi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de pago para todo el juego, la cual es una función continuamente diferenciable y las funciones $\pi_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$ son las funciones de pago del i-ésimo jugador dado s[3]$\in S$.

El uso de la representación en forma normal de un juego se caracteriza además por el hecho de que los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea, es decir, cada jugador elige su jugada sin conocer las decisiones de los demás. Una ventaja de usar esta representación es que, dependiendo del numero de jugadores y de acciones disponibles para cada jugador, la función de pago de cada uno de ellos, dadas las posibles combinaciones de estrategias que pueda haber en el juego, se puede representar por medio de una "matriz"[4] de pagos.

Si consideramos el caso donde solo intervienen 2 jugadores, cada uno con l y m acciones posibles respectivamente, a la representación en forma normal[5] de ese juego se le conoce como representación bimatricial. Esta representación es una matriz de tamaño $l \times m$, donde las filas representan las acciones del primer jugador y las columnas las acciones del segundo. La matriz de pagos en este caso se muestra en el Cuadro (1.1).

		Jugador 2			
		Acción 1	Acción 2	$\cdots$	Acción m
Jugador 1	Acción 1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\cdots$	(a_1, b_m)
	Acción 2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\cdots$	(a_2, b_m)
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Acción l	(a_l, b_1)	(a_2, b_2)	$\cdots$	(a_l, b_m)

Cuadro 1.1: Representación bimatricial de la matriz de pagos.

Independientemente de la representación que se use, ya sea en forma normal o extensiva, o si se trata de juegos estáticos o dinámicos, los juegos tienen como elementos comunes para todos: una lista de jugadores, la descripción de las acciones que puede tomar cada jugador, así como la información que poseen para tomar dichas decisiones y, finalmente, una especificación de los pagos que obtendrán para cada combinación de acciones posibles.

Si bien la representación que se use en un juego ayuda a elegir las posibles técnicas de solución, éstas también dependen de si se trata de juegos estáticos o juegos dinámicos,

[3]A s se le conoce como perfil de estrategia. Ver Definición 1.1.2.

[4]Por convención recibe el nombre de matriz, pero no necesariamente es una matriz como en matemáticas.

[5]Siempre y cuando el conjunto de acciones o estrategias sea discreto y finito.

pues en cualquiera de estos contextos existen diferentes conceptos de solución aplicables a las posibles situaciones que involucre el juego. Por ejemplo, en el contexto de los juegos estáticos los conceptos de solución se pueden agrupar en dos conjuntos. El primer conjunto de técnicas de solución tiene que ver con el concepto de dominancia, es decir, la solución a un juego se determina intentando descartar las estrategias que una persona racional nunca jugaría. Dentro de este conjunto podemos encontrar a:

- Dominancia estricta. Se dice que una estrategia está estrictamente dominada si otra estrategia siempre da mejores resultados, independientemente de lo que hagan los otros jugadores en el juego.
- Dominancia débil. Se dice que una estrategia está débilmente dominada si otra estrategia mejora a la persona en algunas situaciones y las deja indiferentes en todas las demás.

Si el lector desea conocer más a fondo sobre estos conceptos de solución, en [20] y en [21], se puede encontrar una descripción más general de estos dos conceptos, así cómo ejemplos para una mayor comprensión.

El segundo conjunto de técnicas de solución dentro del marco de los juegos estáticos tiene que ver con el concepto de equilibrio, y en este caso tenemos tres conceptos de solución. Estos conceptos son el equilibrio de Nash, equilibrio de Pareto y el equilibrio de Stackelberg, siendo el primero de ellos el más conocido dentro de la teoría de juegos. Los conceptos de equilibrio de Pareto y equilibrio de Nash se presentan en la Sección 1.2.

En el contexto de los juegos dinámicos se retoma el concepto de equilibrio de Nash, haciendo una subclasificación entre el de equilibrio de Nash en estrategias de ciclo (o lazo) abierto y el equilibrio de Nash en estrategias de retroalimentación. La definición formal de éstos conceptos se presenta en la Subsección 1.3.3. Por el momento, sólo presentamos el concepto de *equilibrio de Nash*, para ello tenemos la siguiente definición [11].

Definición 1.1.2 (Perfil de estrategia)**.** Sea s^* una n-tupla de la forma $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S_1 \times \cdots \times S_n$. A la combinación de estrategias que representa s^* se le denomina como perfil de estrategias o *strategy profile.*

Una vez que se conoce el concepto de perfil de estrategia, podemos definir entonces lo que es un equilibrio de Nash.

Definición 1.1.3 (Equilibrio de Nash)**.** Asumimos que cada jugador busca maximizar su propia función de pago. Diremos que $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ es un equilibrio de Nash para el juego Γ si para cada jugador $i = 1, \ldots, n$, se cumple que:

$$\pi_i(s_1^*, \ldots, s_n^*) \geq \pi_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*), \tag{1.1}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ y para cada $s_i \in S_i$.

Básicamente lo que estipula el equilibrio de Nash es que si s^* es en efecto un equilibrio de Nash para el juego Γ, entonces el pago que recibirá el i-ésimo jugador dado éste perfil de estrategia, será mejor que el pago que recibiría si únicamente él opta por cambiar a una estrategia s_i. Esto da pie a que el equilibrio de Nash sea comúnmente entendido como aquella situación en la que ningún jugador tiene incentivo alguno para cambiar de estrategia sin que se vea disminuido su pago.

Generalmente, se introduce una nueva notación para reescribir el lado derecho de la desigualdad (1.1), pero para ello, primero tenemos la siguiente notación.

Notación 1. Sea $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ un equilibrio de Nash, usamos s^{*-i} para denotar

$$s^{*-i} = (s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

Es decir, $-i$ indica la remoción de la i-ésima estrategia s_i^* del perfil de estrategias s^*.

Notación 2. Usando ahora la Notación 1, la desigualdad (1.1) se reescribe como:

$$\pi_i(s^*) \geq \pi_i(s_i, s^{*-i})$$

De manera general estos son los conceptos preliminares para poder entender a la teoría de juegos, sin hacer distinción de si se trata de juegos estáticos o juegos dinámicos. Sin embargo, para la comprensión de este escrito, necesitamos introducir otros conceptos, con el fin de mostrar tanto la relación entre ellos como su relación con el tema central de este escrito, a saber, los juegos potenciales dinámicos a tiempo continuo.

Es por ello que a continuación introducimos a los juegos estáticos para, posteriormente abordar a los juegos dinámicos. Veremos también como un juego dinámico se puede extender y convertirse en un juego diferencial, o bien, que bajo ciertas condiciones, un juego dinámico es considerado como un juego potencial dinámico.

De igual manera, en las siguientes secciones se presenta de manera general lo que es un problema de control óptimo y un juego potencial. Con el conocimiento de estos conceptos, en el Capítulo 2, analizaremos un ejemplo sobre la construcción de la función potencial para el caso de los juegos estáticos.

1.2. Juegos estáticos

Para motivar esta sección pensemos en un problema de optimización en el cual se desea encontrar el valor máximo (o mínimo) de una función π, es decir:

$$\max_{s \in S} \pi(s). \tag{1.2}$$

Las restricciones que se piden sobre π es que sea una función continua y el máximo (mínimo) generalmente se busca sobre un dominio $S \subset \mathbb{R}^m$, cerrado y posiblemente no acotado [4]. Regresando a la teoría de juegos, donde π es la función de pago definida para un jugador, el problema (1.2) se puede entender como un problema de decisión, donde $s \in S$ son todas las acciones posibles en las cuales se busca aquella que genere el máximo pago posible.

A diferencia de los problemas que se abordan en la teoría de optimización en la cual un sólo jugador (agente), con base a las acciones que toma, busca maximizar (o minimizar) su ganancia (o pérdida), en teoría de juegos se abordan problemas donde se tienen dos o mas jugadores, cada uno de los cuales tiene un conjunto de acciones posibles. El simple hecho de agregar mas jugadores en un juego aumenta la complejidad respecto a la solución de éste, no solo por el hecho de que los pagos de cada jugador dependen tanto de sus acciones como de las acciones de los demás, sino porque en general no es posible encontrar una solución óptima, desde el punto de vista de que lo que es óptimo para un jugador, generalmente no lo es para otro.

Para aclarar este punto, consideremos el caso donde n jugadores interactúan, con $n \geq 2$. El i-ésimo jugador puede elegir una acción $s_i \in S$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Así, para cada uno de los n jugadores, el objetivo del i-ésimo jugador es:

$$\max_{\mathbf{s} \in S} \pi_i(\mathbf{s}), \tag{1.3}$$

donde $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ es un perfil de estrategias.

Contrastando la ecuación del problema (1.2), el problema que plantea (1.3) no admite una solución "óptima", ya que, como se había mencionado antes, en general no es posible encontrar un vector $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, que maximice los pagos de todos los jugadores al mismo tiempo.

La situación modelada por (1.3), representa un juego estático, algunas veces llamado "juego de una tirada". En este tipo de juegos, cada jugador elige una acción $s_i \in S_i$, la cual determina su pago. En otras palabras, los juegos estáticos son aquellos en los que los jugadores adoptan acciones de forma simultánea o cuando, aunque no se realicen de forma simultánea, no son directamente observables[6]. En estos juegos, los jugadores deciden sus acciones en base a la información disponible inicialmente y, durante el proceso de toma de decisiones, no se genera información adicional. Formalmente tenemos la siguiente definición para juegos estáticos.

Definición 1.2.1 (Juego estático)**.** Un juego estático es aquel en el cada jugador toma una decisión sin saber la decisión tomada por los otros jugadores antes de tomar su propia decisión. Las decisiones se toman simultáneamente, (el orden es irrelevante).

Ejemplos de este tipo de juegos son las elecciones por voto secreto, piedra, papel o tijeras, y el más estudiado dentro de la teoría de juegos es el dilema del prisionero [27].

Retomando el tema de las soluciones en éste tipo de juegos, si bien, en general no existe una solución óptima al problema que plantea (1.3), sí podemos hablar de encontrar una solución para el juego. Los conceptos de solución que presentaremos a continuación son los que se mencionaron de manera general en la Sección 1.1. La elección de alguno de estos conceptos de solución depende tanto de la información disponible para los jugadores como de su disponibilidad para cooperar.

El primer concepto de solución es el de estrategias óptimas de Pareto o Pareto óptimas.

Definición 1.2.2 (Pareto óptima)**.** También denominada socialmente eficiente, se dice que una solución es Pareto óptima si no se puede aumentar la ganancia de ningún jugador sin disminuir la recompensa de al menos uno de los otros jugadores.

Básicamente este tipo de estrategias estipulan que no es posible incrementar el pago de un jugador sin que el pago del otro jugador decrezca. Una definición formal dada en [18] es la siguiente:

Definición 1.2.3 (Optimalidad de Pareto)**.** Dado un perfil de estrategias $s^* \in S_1 \times \cdots \times S_n := S$ y $\Pi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es Pareto óptimo si no existe otro perfil $s_1^* \in S$ tal que

$$\pi_i(s_1^*) > \pi_i(s^*).$$

Por último, el concepto de solución más conocido dentro de la teoría de juegos es el del equilibrio de Nash, presentado en la Sección 1.1. El equilibrio de Nash supone que los jugadores no tienen el mínimo interés por cooperar o por compartir información alguna sobre sus estrategias. En general, el equilibrio de Nash puede no existir y en el caso de existir no necesariamente es único. En [4] se pueden encontrar ejemplos del comportamiento del equilibrio de Nash.

[6] En el Dilema del prisionero, las decisiones no son directamente observables por ellos pues se encuentran en celdas diferentes.

A continuación presentamos un ejemplo de juego estático, el dilema del prisionero, el cual es uno de los problemas clásicos dentro de la teoría de juegos. En el Apéndice B, se abordan dos problemas más para comprender esta sección.

1.2.1. Dilema del prisionero

El modelo que plantea el Dilema del prisionero fue desarrollado originariamente en 1950, por Merrill M. Flood y Melvin Dresher mientras trabajaban en RAND. Para 1995, Albert W.Tucker formalizó el juego con la frase sobre las recompensas penitenciarias y le dio el nombre que actualmente conocemos. Aunque hay muchas versiones sobre este problema y los pagos respectivos para cada prisionero, la esencia del problema es común para todas las versiones, mostrar que dos personas pueden no cooperar incluso si esta cooperación es en beneficio de ambos. El enunciado del problema es como sigue.

Ejemplo 1.1. La policía arresta a dos sospechosos (sospechoso A y sospechoso B). No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, la policía los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato.

- Si el sospechoso A confiesa y el sospechoso B no, el sospechoso B será condenado a la pena total, diez años, y el sospechoso A será liberado.
- Si el sospechoso A calla y el sospechoso B confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre.
- Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años.
- Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante dos años por un cargo menor.

Iniciemos el análisis de este ejemplo haciendo mención de que, aparte de ser un juego estático, se trata de un juego no-cooperativo en forma normal. Esto se debe en principio a que ambos jugadores, en este caso los sospechosos A y B, hacen sus movimientos simultáneamente, además de que de cada uno de ellos no tiene información precisa de lo que hará el otro, sólo intuiciones.

Para obtener la representación en forma normal de este juego primero precisemos los elementos que lo conforman.

- Tenemos dos jugadores, indexados por el conjunto $N = \{1, 2\}$.

- El conjunto de acciones para cada jugador es

$$S_i = \{\text{Confesar } (C), \text{No Confesar } (NC)\}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Por lo que, el conjunto de acciones para todo el juego es:

$$\begin{aligned} S =&\{S_1 \times S_2\}, \\ =&\{(C,C),(C,NC),(N,C),(NC,NC)\}. \end{aligned}$$

- La función de pago para el juego es:

$$\begin{aligned} \Pi :&S \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \Pi(\cdot) =&(\pi_1(\cdot), \pi_2(\cdot)). \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \pi_1(C,C) =&6, & \pi_2(C,C) &= 6, \\ \pi_1(C,NC) =&0, & \pi_2(C,NC) &= 10, \\ \pi_1(NC,C) =&10, & \pi_2(NC,C) &= 0, \\ \pi_1(NC,NC) =&2, & \pi_2(NC,NC) &= 2. \end{aligned}$$

Como se trata de un juego en forma normal que involucra a dos jugadores, sospechoso A y sospechoso B, este tipo de juegos forma parte de los juegos bimatriciales, de esta manera, lo podemos representar de manera sencilla mediante una matriz de 2×2, donde 2 es la cantidad de acciones disponibles para cada jugador. Dicha matriz es como sigue:

Sospechoso B

		Confesar	No Confesar
Sospechoso A	Confesar	$(6,6)$	$(0,10)$
	No Confesar	$(10,0)$	$(2,2)$

Cuadro 1.2: Matriz de pagos del Dilema del prisionero.

Mas aún de lo que ya se ha dicho de este modelo, se trata también de un *juego de suma no cero*. Si bien no es esencial la resolución de este problema para los fines de este escrito, a continuación se hace un bosquejo de la manera de resolver este problema. Para conocer una solución formal ver [29]. La manera intuitiva de resolver este modelo se hace bajo los siguientes supuestos.

- Suponemos que la única meta de ambos sospechosos es minimizar su pena, es decir, ambos sospechosos son completamente egoístas.

- Cada sospechoso tiene dos opciones:

  - Cooperar con su cómplice y permanecer callado.
  - Traicionar a su cómplice y confesar.

- Si uno de ellos confía en que el cómplice va a cooperar y va a permanecer en silencio, la opción óptima sería confesar, ya que de esta manera saldría libre y su cómplice tendría que cumplir la pena máxima.

- Si espera que el cómplice confiese, la mejor opción es confesar también y así evitar la pena máxima.

- Si ambos deciden cooperar, cumplirían la pena mínima.

Bajo estos supuestos podemos ver que la opción más viable tanto para el sospechoso A como para el B es confesar, pues para cualquier decisión que tome el otro sospechoso, siempre se minimizará la pena al confesar. En otras palabras, (Confesar, Confesar) es un Equilibrio de Nash[7] para este juego.

Sin embargo, podemos percatarnos que al hacer la elección de (Confesar, Confesar) ambos sospechosos reciben penas mas altas a que si hubieran optado por permanecer callados. Como se mencionó antes, el ejemplo del dilema del prisionero muestra situaciones en las que aunque es mejor el resultado obtenido a partir de la cooperación entre jugadores, es prácticamente imposible cooperar.

1.3. Juegos dinámicos

Para motivar esta sección, primero daremos una breve introducción a los problemas de control óptimo para posteriormente abordar el tema de los juegos dinámicos. Veremos después en la Subsección 1.3.2 que un problema de control óptimo se puede entender como un juego dinámico de un solo jugador. La siguiente información se puede encontrar [6], [15] y [18].

[7] Es un equilibrio de Nash en el sentido en que ni uno de los dos jugadores tiene un incentivo para cambiar su elección sin que se vea afectado su pago.

1.3.1. Problema de control óptimo

La teoría de control óptimo permite la resolución de problemas dinámicos donde la evolución de un sistema que depende del tiempo, puede ser controlada, hasta cierto punto, por las decisiones de un agente. El problema de control óptimo consiste en establecer la trayectoria óptima, es decir, aquella trayectoria que maximiza el objetivo del controlador, teniendo en cuenta la relación que une el vector de estado al vector de control [1]. Lo anterior se desarrolla a continuación.

En un problema de control óptimo (PCO) necesitamos conocer:

1. **La evolución del sistema de interés**. Para ello tenemos que especificar el modelo dinámico del sistema, siendo los más comunes son los modelos dinámicos a tiempo discreto y a tiempo continuo.
   Los **sistemas a tiempo discreto** están dados por una ecuación de la forma:

   $$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t) \quad \text{para } t = 0, 1, \ldots T, \tag{1.4}$$

   donde x_t y a_t, en nuestro caso son vectores que representan el estado del juego y las acciones de los jugadores respectivamente. Además se tiene la condición inicial $x_0 = x$, y $T \leq \infty$ es el horizonte del problema de control, y ξ_t son las perturbaciones. Dependiendo de ξ_t, la ecuación (1.4) representa un:

   - **Sistema estocástico**, si las ξ_t son variables aleatorias.
   - **Sistema determinístico**, si las ξ_t forman una sucesión de constantes con valores conocidos.
   - **Sistema incierto**, si las ξ_t son constantes que toman valores en un conjunto dado, pero el valor específico de cada ξ_t es desconocido.

   Respecto a los **sistemas a tiempo continuo** estos se clasifican a su vez como:

   - Caso determinístico:

     $$\dot{x(t)} = F(x(t), s(t), t), \quad \text{para } 0 \leq t \leq T,$$

     con $T \leq \infty$ y con condición inicial $x_0 = x$.
   - Caso estocástico.
     Este caso puede admitir los siguientes modelos:
     - Ecuaciones diferenciales estocásticas.
     - Cadenas de Markov.
     - Procesos de Lévy (procesos híbridos).

En cualquier caso, ya sean los sistemas a tiempo discreto o tiempo continuo, el conjunto donde las variables x_t toman valores es llamado espacio de estados del PCO y será denotado por X.

2. **Cómo sera controlado el sistema**. Para ello necesitamos especificar el conjunto de estrategias factibles, también llamadas políticas (de control) o estrategias[8]. En el contexto de los PCO se dice que una estrategia de control, digamos $s = \{a_t\}$ generalmente se especifica imponiendo restricciones, ya sea directamente en las acciones de control a_t, o bien en la información requerida por el controlador en cada etapa t. Es importante mencionar que la especificación de estas estrategias dependen del PCO que se este tratando.

3. **Restricciones adicionales**. Las restricciones adicionales pueden depender de la naturaleza del PCO, se pueden imponer sobre las variables de estado, o bien, sobre las estrategias. Por ejemplo, en un problema de control de población, (p.e. epidemias, pescas, entre otros), donde x_t, representa el tamaño de la población al tiempo t, se requiere que $x_t \geq 0$, para todo tiempo t, ya que no hay poblaciones negativas.

4. Especificar la **función objetivo**[9], es decir, se debe especificar cómo va a ser medida la respuesta del sistema para cada estrategia factible. En general se tiene que $V(s)$ representa la ganancia total o neta para cada estrategia $s = \{a_t\}$. La definición de dicha función depende de si se esta tratando con sistemas a tiempo discreto o con sistemas a tiempo continuo.

   Para el tiempo discreto, los ejemplos de funciones objetivo en PCO determinísticos son:

   - Costo total con horizonte finito T:
   $$V(s) := \sum_{t=0}^{T-1} c(x_t, a_t) + C_T(x_T), \tag{1.5}$$
   donde $c(x, a)$ es el costo por etapa y $C_T(x)$ es el costo terminal.
   - Costo total descontado con horizonte infinito:
   $$V(s) := \sum_{0}^{\infty} \alpha^t c(x_t, a_t), \tag{1.6}$$
   donde $0 \leq \alpha \leq 1$ es el factor de descuento.

   En PCO a tiempo continuo las sumas en (1.5) y (1.6) son reemplazadas por integrales, por lo que la función objetivo se reescribiría como:

[8] Recordar que por estrategias se entiende como aquel plan de acción que especifica una serie de pasos que tienen como fin la consecución de un determinado objetivo.

[9] En teoría de juegos, a una función objetivo también se le llama función de pago (*payoff function*).

- Costo total con horizonte finito:

$$V(s) := \int_{t=0}^{T} c(x(t), s(t), t)dt + C_T(x_T)dt, \tag{1.7}$$

donde $c(x(t), s(t), t)$ es el costo por etapa y $C_T(x)$ es el costo terminal.

- Costo total descontado con horizonte infinito:

$$V(s) := \int_{0}^{\infty} \alpha^t c(x(t), s(t), t)dt. \tag{1.8}$$

A partir del conocimiento de éstas cuatro condiciones, el PCO se puede entender como:

Optimizar la función objetivo $V(s)$, sujeta a las restricciones dadas por 1,2 y 3.

Para el desarrollo de este escrito estamos interesados optimizar la función objetivo para el caso a tiempo continuo, particularizando en el caso de costo total con horizonte infinito. El concepto de ésta función objetivo lo retomaremos en la Subsección 1.3.3.

A continuación, presentamos las condiciones necesarias o de primer orden para resolver un PCO. Para ello, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} f\left(x(t), u(t), t\right) dt \\ &\text{sujeto a } \dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), \\ &t_0, t_1, x(t_0) \text{ fijo}, \ x(t_1) \text{ libre}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde:

- $u(t)$ es llamada variable de control; $u \in U$, donde U es el conjunto de controles admisibles.
- $x(t)$ es llamada variable de estado.
- $\dot{x}(t)$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden llamada ecuación de estado.

Aquí supondremos además que f y g son continuamente diferenciables en todos sus argumentos, mientras que $u(t)$ puede ser continua a trozos y $x(t)$ continuamente diferenciable.

Otras consideraciones sobre los problemas de control óptimo es que pueden tener múltiples variables de estado y de control. El número de controles puede ser mayor, menor o igual que el número de variables de estado.

Las condiciones necesarias o de primer orden para resolver un PCO se resumen en las condiciones del Principio del Máximo [1], [13]. Este principio permite descomponer un PCO en dos etapas. La primera de ellas consiste en ver al PCO como un problema de optimización estática en cada instante t, mientras que la segunda etapa es la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales definido por las condiciones necesarias de optimalidad del problema estático.

Sin embargo, el hecho de que en la primera fase se tenga que resolver un problema de optimización estática trae consigo repercusiones a la solución del problema en sí, pues al escoger el control que maximiza a la función objetivo solo en el tiempo t es muy poco probable que esta sea una solución óptima. Para resolver este inconveniente se plantea una función objetivo modificada llamado hamiltoniano, definido a partir del PCO planteado en (1.9), de la siguiente manera [1]:

$$H\left(x(t), u(t), \lambda(t), t\right) = f(u_t, x_t) + \lambda(t) g\left(u(t), x(t), t\right),$$

donde $\lambda(t)$ actúa como multiplicador dinámico de Lagrange o precio sombra de la variable de estado asociada.

El primer componente del hamiltoniano designa el efecto del vector de control sobre el valor instantáneo del objetivo. El segundo componente expresa el aumento futuro del objetivo seguido a la variación del vector de estado. Un hamiltoniano, es entonces la suma del valor instantáneo del objetivo y de los valores futuros de este objetivo teniendo en cuenta la variación del vector de estado, ponderada por el precio asociado a esta variación.

Las condiciones del principio del máximo vienen dadas por:

$$\max_{u \in U} H(x(t), u(t), \lambda(t), t), \quad \forall t \in [0, T], \tag{1.10}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \tag{1.11}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{1.12}$$

$$x(T) = x_T. \tag{1.13}$$

La solución al sistema formado por las ecuaciones (1.10)-(1.13), proporciona las trayectorias óptimas para cada una de las variables $x^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$.

Para aterrizar ideas, se presenta el siguiente ejemplo, el cual es un PCO tomado de [1]. Otros ejemplos se pueden encontrar en [15].

Ejemplo 1.2 (Problema del consumidor). Este problema supone que el objetivo de un consumidor es maximizar su utilidad intertemporal sobre un tiempo un intervalo $[0, 1]$.

Es decir,

$$\max_{c} \int_{0}^{1} \ln[4c(t)s(t)]dt, \tag{1.14}$$

donde $c(t)$ representa su consumo y $s(t)$ su nivel de ahorro. La restricción que hay entre su consumo y su nivel de ahorro está dada por la ecuación:

$$\dot{s}(t) = 4s(t)(1 - c(t)). \tag{1.15}$$

Las restricciones en las fronteras son $s(0) = 1$ y $s(1) = e^2$.

La primera etapa para resolver el problema consiste en escribir el hamiltoniano, el cual, para este caso está dado por:

$$\begin{aligned} H(s(t), c(t), q(t)) &= \ln[4c(t)s(t)] + q(t)[4s(t)(1 - c(t))] \\ &= \ln 4 + \ln(c(t)) + \ln(s(t)) + q(t)[4s(t)(1 - c(t))], \end{aligned} \tag{1.16}$$

y las condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial c(t)} = \dfrac{1}{c(t)} - 4q(t)s(t) = 0, & (I) \\ \dot{q}_t = -\dfrac{\partial H}{\partial s(t)} = -\dfrac{1}{s(t)} - 4q(t)(1 - c(t)), & (II) \\ \dot{s}_t = \dfrac{\partial H}{\partial q(t)} = 4s(t)(1 - c(t)). & (III) \end{cases}$$

De (I) se tiene:

$$c(t) = \frac{1}{4s(t)q(t)}.$$

Sustituyendo $c(t)$ en (II) y (III), se sigue que:

$$\begin{cases} \dot{q}_t = -\dfrac{\partial H}{\partial s(t)} = -\dfrac{1}{s(t)} - 4q(t)\left(1 - \dfrac{1}{4s(t)q(t)}\right), \\ \dot{s}_t = 4s(t)\left(1 - \dfrac{1}{4s(t)q(t)}\right). \end{cases}$$

La segunda etapa consiste en encontrar la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales sustituyendo los valores iniciales y finales dados. Esto da como resultado:

$$\begin{cases} s(t) = e^{4t} - 0.865te^{4t}, \\ c(t) = \dfrac{1}{4.624 - 4t}), \end{cases}$$

los cuales definen las trayectorias óptimas que deben tomar el consumo y el ahorro del consumidor para que se maximice su utilidad en el período de tiempo $[0, 1]$.

1.3.2. Juego dinámico como un problema de control

Al inicio de la Sección 1.3 se abordaron a los PCO, puesto que esta clase de problemas tiene una estrecha relación con los juegos dinámicos. Razón por la cual, en muchas ocasiones se recurre a las técnicas de control óptimo para resolver a los juegos dinámicos. Esta relación queda establecida en la siguiente definición.

Definición 1.3.1 (Juego dinámico, [18])**.** Un juego dinámico se puede ver como un PCO donde interviene un solo jugador, quién desea maximizar su pago.

Esta es una caracterización de un juego dinámico que nos proporciona una manera de resolver a esta clase de juegos, sin embargo, ello no implica que todos los juegos dinámicos se deban de resolver usando técnicas de control óptimo.

De manera general un juego dinámico se caracteriza porque en el proceso de toma de decisiones los jugadores reciben nueva información, dicha información puede ser acerca de acciones adoptados por otros jugadores (o por él mismo) o resultados de movimientos de azar [16]. Además de que en esta clase de juegos, las decisiones se toman de manera simultanea y, en este caso, el orden en que los jugadores realicen sus acciones si afecta el juego. Una introducción general a esta clase de juegos se puede encontrar en [2] y en [6].

Esto marca una diferencia entre los juegos dinámicos y los juegos estáticos, pues como vimos en la Sección 1.2, en esta clase de juegos, los jugadores deciden simultáneamente sus acciones. Otra diferencia es que los juegos estáticos se desarrollan en un solo momento[10], razón por la cuál, los jugadores no pueden recibir información adicional.

El hecho de que los juegos estáticos se desarrollen en un solo momento y que las acciones se tomen de manera simultánea, limita los modelos que puedan ser estudiados desde este enfoque. Pensemos tan solo en un juego de ajedrez, o en un mercado, cuando una empresa decide o no entrar a competir, en estos casos, las decisiones no se pueden tomar de manera simultanea y el juego además se desarrollará con el tiempo. Es por esta

[10]En el dilema del prisionero el juego termina una vez que los dos sospechosos han hecho su elección.

razón que en este tipo de juegos, es necesario considerar otros factores, tales como si un jugador hace su jugada antes que el otro, o bien, si hay más jugadores que observan su decisión antes de jugar. Este tipo de juegos se estudian desde el enfoque de los juegos dinámicos.

1.3.3. Juegos diferenciales

Como se vio la Subsección 1.3.1, el modelo clásico cuando se trata de la teoría de control involucra la variable de estado $x \in \mathbb{R}^n$, la cual evoluciona con el tiempo de acuerdo a una EDO (Ecuación Diferencial Ordinaria) $\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t)$, para $t \in [0, T]$, donde $t \longrightarrow u(t)$ es la función de control o simplemente control, perteneciente a un conjunto de controles admisibles U. Dada la condicional inicial:

$$x(0) = x_0, \tag{1.17}$$

el problema básico en un PCO es encontrar una función de control $u(\cdot)$, la cual maximice la función de pago[11]:

$$J(u) = \int_0^T c(x(t), u(t), t)dt + C_T(x(T))dt, \tag{1.18}$$

donde $c(x(t), s(t), t)$ es el costo por etapa y $C_T(x)$ es el costo terminal.

Cuando este problema se extiende a dos o más jugadores y el juego se desarrolla en tiempo continuo, hablamos de un juego diferencial [4], donde cada jugador busca maximizar su pago. Así, generalizando el PCO dado por (1.18), para cuando se tienen $n \geq 2$ jugadores se tiene entonces la variable de estado $x \in \mathbb{R}^n$ que evoluciona de acuerdo a una EDO, ahora de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mathbf{u(t)}, t), \quad t \in [0, T], \tag{1.19}$$

donde $\mathbf{u(t)} = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ es una multiestrategia y $t \longrightarrow u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, son los controles implementados por cada uno de los n jugadores. Asumiremos también que se satisfacen las restricciones:

$$u_i \in U_i, \tag{1.20}$$

para algunos conjuntos dados $U_i \subset \mathbb{R}^m$. Dada la condición inicial:

$$x(0) = x_0, \tag{1.21}$$

[11] En este caso, $V = J$ y $s = u$.

el objetivo del $i-$ésimo jugador es encontrar $u(t)$ que maximiza:

$$J_i = \int_0^T c_i(x(t), s(t), t)dt + C_{i_T}(x_T)dt. \tag{1.22}$$

Se supone además que cada jugador tiene conocimiento perfecto de:

- La función f que determina la evolución del sistema.
- Los conjuntos U_i de control para cada jugador, $i = 1, \dots, n$.
- Las funciones de pago J_i, $i = 1, \dots, n$, .
- El tiempo $t \in [0, T]$.
- El estado inicial x_0.

En [14] se puede encontrar más información respecto de los juegos diferenciales. En la Sección 1.1, presentamos de manera general los conceptos de solución para los juegos estáticos y los juegos dinámicos. Dado que los juegos diferenciales se pueden ver como una extensión de los juegos dinámicos[12], los conceptos de solución son los mismos, es decir, tenemos los conceptos de solución en estrategias de ciclo (o lazo) abierto (*open-loop strategies*), o bien, en estrategias de retroalimentación (*feedback strategies*).

Dependiendo de la situación del juego se decidirá por algún concepto de solución. Si estamos en una situación tal que cada jugador tiene conocimiento solamente del estado inicial del sistema, entonces consideraremos a las estrategias de ciclo abierto. Por otro lado, si los jugadores pueden observar el estado actual del sistema, es decir, no solo el estado inicial, es preferible ocupar a las estrategias de retroalimentación. El equilibrio en estrategias de ciclo abierto puede encontrarse resolviendo una EDO obtenida a partir del principio del máximo. Por otro lado, el equilibrio en estrategias de retroalimentación se estudian observando el sistema de EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman, para las funciones de valor de los distintos jugadores. Estas EDP se obtienen del principio de programación dinámica [12].

En [3], se encuentra una descripción de las soluciones que hemos mencionado. Para el desarrollo de este escrito, estamos interesados en las estrategias de ciclo abierto, por lo que a continuación presentamos el concepto de equilibrio de Nash para el caso de estrategias de ciclo abierto.

Definición 1.3.2 (Equilibrio de Nash en ciclo abierto)**.** Dados los controles $t \longrightarrow \mathbf{u(t)}$, con $\mathbf{u(t)} = (u_1, \dots, u_n)$ es un equilibrio de Nash para el juego $(1.19)-(1.22)$ dentro de la clase de estrategias de ciclo abierto si se cumple:

[12]Cuando un juego dinámico se realiza en tiempo continuo.

- El control $u_i^*(\cdot)$ provee una solución al problema de control óptimo para el i-ésimo jugador

$$\text{máx } J_i = \int_0^T c_i(x(t), s(t), t)dt + C_{i_T}(x_T)dt, \qquad \forall i \neq j, \tag{1.23}$$

sobre todos los controles $u_i(\cdot)$, para el sistema dinámico

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u_i, u_j^*, t), \\ \quad u_i(t) \in U_i, \\ \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Dado que los juegos diferenciales se pueden ver como una extensión de los juegos dinámicos [7], los cuales ya vimos que tiene relación con los PCO, el análisis de los juegos diferenciales se basa en gran medida en los conceptos y técnicas de la teoría de control óptimo.

Hasta ahora sólo hemos mostrado la relación entre los juegos dinámicos y los juegos diferenciales. El último tema por abordar es el de la clase de juegos potenciales, con el fin de mostrar la relación de un juego potencial y un juego dinámico.

1.4. Juegos potenciales: Caso estático

Los juegos potenciales fueron introducidos por Dov Monderer y Lloyd S. Shapley en 1996 en su artículo *Potential Games* [23]. Estos juegos son una subclase de juegos en forma normal y se caracterizan por admitir una función potencial, de ahí su nombre de juegos potenciales. En esta sección presentamos la definición de función potencial. La siguiente información se puede encontrar en [15] y en [23]. Además en [30], se encuentra una descripción del equilibrio en juegos potenciales.

Consideremos $\Gamma = (N, S, \Pi)$, un juego en forma normal como el descrito en la Definición 1.1.1. Recordemos que $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto que indexa a los jugadores, $n \in \mathbb{N}$, $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, son las acciones para el juego. Sea además s^* un perfil de estrategias y $\Pi(s^*) = (\pi_1(s^*), \ldots, \pi_n(s^*))$ es la función de pago de los jugadores. Recordemos además que s^{*-i} denota la remoción de la estrategia s_i^*, del perfil de estrategias s^*. De manera similar, S_{-i}, denota la remoción del conjunto de estrategias del i-ésimo jugador, del conjunto de estrategias S del juego.

De la desigualdad (1.1) en la Definición 1.1.3, observamos que el perfil de estrategias s^* maximiza a la función de pago π_i, en comparación al perfil s^{*-i}, para cada i. Esto es,

s^* soluciona n simultáneos problemas de maximización. La pregunta que surge aquí es: ¿existe una función P, dependiendo de $(s_1, \ldots, s_n)$ tal que un máximo de P es también un equilibrio de Nash para el juego Γ?

De esta pregunta surge el concepto de función potencial, puesto que un juego que admita[13] a esta función, simplifica el juego de n jugadores en un juego de un solo jugador, por lo que, en vez de resolver n problemas de optimización, sólo se resolvería uno.

A continuación, presentamos las definiciones de funciones potenciales y con ello, las definiciones de juegos potenciales.

Definición 1.4.1 (Monderer y Shapley, [23])**.** El juego Γ es llamado un juego potencial si existe una función $P : S \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $i \in N$ y $s^{*-i} \in S_{-i}$, se cumple que:

$$\pi_i(x, s^{*-i}) - \pi_i(y, s^{*-i}) = P(x, s^{*-i}) - P(y, s^{*-i}), \quad \forall x, y \in S_i. \tag{1.24}$$

La función P es llamada función potencial para el juego Γ.

Esta definición no requiere propiedad alguna sobre las funciones de pago ni sobre los conjuntos de acción. Sin embargo, cuando cada S_i es un intervalo de números reales, podemos caracterizar a la función P como sigue.

Definición 1.4.2 (Slade, [28])**.** Una función diferenciable $P : S \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función objetivo ficticia para Γ si para cada $i \in N$, se cumple que:

$$\frac{\partial P(s)}{\partial s_i} = \frac{\partial \pi_i(s)}{\partial s_i}, \quad \forall s \in S.$$

Muchas veces a la función potencial de la Definición 1.4.1 se le conoce como función potencial exacta. Para especificarla se necesita la siguiente definición.

Definición 1.4.3 (Potencial ponderado)**.** Sea $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, para $n \in N$, un vector de pesos donde cada $\omega_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Una función $P : S \longrightarrow \mathbb{R}$, es un potencial ponderado para Γ si para cada $i \in N$ y cada $s^{*-i} \in S_{-i}$:

$$\pi_i(x, s^{*-i}) - \pi_i(z, s^{*-i}) = \omega_i \left(P(x, s^{*-i}) - P(z, s^{*-i}) \right), \quad \forall x, z \in S_i. \tag{1.25}$$

Cuando se considera a $\omega_i = 1$, para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces tenemos la igualdad (1.24) de la Definición 1.4.1.

En [15] se encuentra la siguiente definición, la cuál muestra la relación entre un PCO y un juego potencial dinámico.

[13] Admita en el sentido de que exista esta función potencial para el juego.

Definición 1.4.4 (Juego potencial dinámico)**.** Un juego dinámico (no-cooperativo) es un juego potencial dinámico si existe un PCO tal que su solución es equilibrio de Nash para el juego dinámico.

En resumen, cuando hablamos de juegos dinámicos, en el caso de que el juego involucre un sólo jugador, el juego se puede ver como un PCO. De otra manera, si el juego involucra dos o más jugadores y además, éste se desarrolla en tiempo continuo, hablamos entonces de un juego diferencial. Por otro lado, si el juego dinámico admite una función potencial, entonces éste juego recibe el nombre de juego potencial dinámico y, si se desarrolla en tiempo continuo, entonces hablamos de un juego diferencial potencial. La Figura 1.4.1, muestra éstas relaciones entre los tipos de juegos.

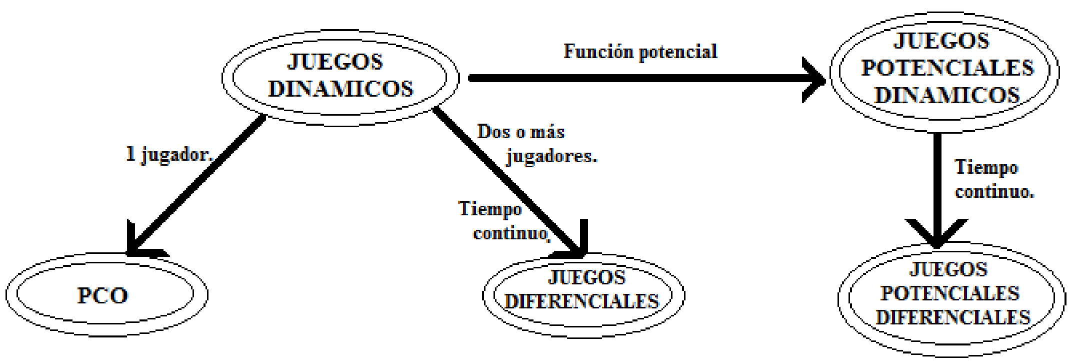

Figura 1.4.1: Diagrama de la relación entre juegos.

Capítulo 2

Potencial en juegos estáticos

2.1. Preliminares

Para adentrarnos en el tema de potencial, primero para el caso estático, iniciaremos resumiendo algunas propiedades de juegos potenciales. De la física se tienen los siguientes resultados [8].

Definición 2.1.1 (Campo vectorial)**.** Un campo vectorial $F(s) = (F_1(s), \ldots, F_n(s))$ definido sobre un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, abierto y convexo es conservativo si existe una función diferenciable $P : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial P(s)}{\partial s_i} = F_i(s), \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

A la función $P(s)$ se llama función potencial de F.

Teorema 1. Sea F un campo vectorial como en la Definición 2.1.1. Se dice entonces que F es conservativo si y sólo si:

$$\frac{\partial F_i}{\partial s_j} = \frac{\partial F_j}{\partial s_i}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j. \tag{2.2}$$

Para entender la relación entre la Definición 2.1.1, el Teorema 1 y la teoría de juegos, consideremos el juego $\Gamma = (N, S, \Pi_i)$ donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto que indexa a los jugadores, cada uno de ellos con una función de pago $\pi_i(\cdot)$. Si el campo vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de primer orden de la función de pago es conservativo, entonces Γ admite una función potencial y es un juego potencial exacto en el sentido de Monderer y Shapley [23].

Para ejemplificar la idea de la función potencial sobre un juego, en la siguiente sección abordaremos el juego de Cournot, o bien, juego de Cournot-Nash, enfocándonos en la construcción de la función potencial. Éste es un juego aplicado a economía, en [31] se puede encontrar más información.

2.2. Potencial en el juego de Cournot

En la teoría de juegos estáticos, la construcción de la función potencial, si existe, requiere de la integración de las condiciones de primer orden sobre las variables de elección[1]. Una vez que se tiene el resultado de esta integración, se realiza una suma sobre todas las integrales. El resultado obtenido de esta suma es, en efecto, un campo conservativo.

Modelo de Cournot

Una versión más general de este juego se puede encontrar en [23], [28] y en [10]. Sin embargo en éste último, se hace empleo de las funciones potenciales de mejor respuesta, las cuales, quedan fuera de los alcances de éste escrito. Para entender este juego, necesitamos primero establecer los supuestos que requiere el modelo de Cournot, para posteriormente enunciar el juego correspondiente.

Supuestos del modelo

- Las empresas ofrecen productos homogéneos.
- La variable estratégica es la cantidad de producción.
- El precio que se obtiene en el mercado es el producto de la suma de las ofertas individuales de cada empresa. Este precio es el que permite que no exista exceso ni escasez de oferta.
- Cada empresa decide su cantidad a producir simultáneamente.

Con base a los supuestos del modelo, se puede decir que se trata de un juego estático, ya que cada empresa toma sus decisiones simultáneamente, además de ser un juego no cooperativo, pues cada empresa buscará maximizar sus propias ganancias.

[1] En el ejemplo que abordamos, las variables de elección son las cantidades q_i.

Ejemplo 2.1. Sea Γ el juego de mercado estático que plantea el modelo de Cournot donde n empresas establecen $q_i, i = 1, \ldots, n$, cantidades a ofrecer y así poder maximizar sus pagos individuales $\pi_i(\mathbf{q})$, con $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ el vector de cantidades.

La *función de demanda inversa* está dada por:

$$D(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{si} \quad Q < a, \\ \\ 0 & \text{si} \quad Q \geq a, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ y a es un numero real tal que los costos marginales de cada empresa son iguales, constantes y menores que a para todas.

Las funciones de costo de cada empresa son:

$$C_i(q_i) = cq_i,$$

con $c > 0$ la constante de costo marginal de producción.

Para analizar el caso cuando se tienen n empresas, primero consideraremos los casos $n = 2$ y $n = 3$. Para el caso $n = 2$, tenemos el caso de un doupolio entre empresas. Los beneficios de la empresa 1 están dados por:

$$\pi_1(q_1, q_2) = D(Q)q_1 - C_1. \tag{2.4}$$

Desarrollando la ecuación (2.4) tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, q_2) =& D(Q)q_1 - C_1 \\ =& (a - q_1 - q_2)q_1 - cq_1 \\ =& (a - q_1 - q_2 - c)q_1. \end{aligned}$$

De manera similar para los beneficios de la empresa 2:

$$\begin{aligned} \pi_2(q_1, q_2) =& D(Q)q_2 - C_2 \\ =& (a - q_1 - q_2 - c)q_2. \end{aligned}$$

Para el caso $n = 3$ se tiene que los beneficios de la empresa 1 están dados por:

$$\pi_1(q_1, q_2, q_3) = D(Q)q_1 - C_1. \tag{2.5}$$

Desarrollando la ecuación (2.5) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\pi_1(q_1,q_2,q_3) =& D(Q)q_1 - C_1\\
=&(a-q_1-q_2-q_3)q_1 - cq_1\\
=&aq_1 - q_1^2 - q_1q_2 - q_1q_3 - cq_1\\
=&(a-q_1-q_2-q_3-c)q_1\\
=&\left(a - q_1 - \sum_{j\neq 1}^{3} q_j - c\right) q_1.
\end{aligned}$$

De manera similar para los beneficios de la empresa 2 y 3 son:

$$\begin{aligned}
\pi_2(q_1,q_2,q_3) =& D(Q)q_2 - C_2\\
=&(a-q_1-q_2-q_3)q_2 - cq_2\\
=&(a-q_1-q_2-q_3-c)q_2\\
=&\left(a - q_2 - \sum_{j\neq 2}^{3} q_j - c\right) q_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_3(q_1,q_2,q_3) =& D(Q)q_3 - C_3\\
=&(a-q_1-q_2-q_3)q_3 - cq_3\\
=&(a-q_1-q_2-q_3-c)q_3\\
=&\left(a - q_3 - \sum_{j\neq 3}^{3} q_j - c\right) q_3.
\end{aligned}$$

Dados estos dos casos particulares, podemos proceder al caso general de n empresas. Para este caso se tiene que las funciones de pago para cada empresa están dadas por:

$$\pi_i(\mathbf{q}) = \left(a - q_i - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c\right) q_i. \tag{2.6}$$

Las condiciones de primer orden para la maximización de la i-ésima función de pago nos dicen que la derivada parcial de la función de pago con respecto a las variables de elección q_i se deben de anular, esto es:

$$\frac{\partial \pi_i(\mathbf{q})}{\partial q_i} = 0.$$

Es decir, se debe de cumplir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_i(\mathbf{q})}{\partial q_i} =&\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\left(a - q_i - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c\right) q_i\right) \\ =&\left(a - q_i - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c\right) - q_i \\ =&\left(a - 2q_i - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c\right) \\ =&0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Ahora, dado que la construcción de la función potencial[2], si existe, requiere de la integración de las condiciones de primer orden con respecto de las variables de elección, integramos (2.7) con respecto de q_i, para obtener:

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial \pi_i(\mathbf{q})}{\partial q_i} dq_i =& \int (a - 2q_i - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c) dq_i \\ =&a \int dq_i - 2\int q_i dq_i - \sum_{j\neq i}^{n} q_j \int dq_i - c\int dq_i \\ =&aq_i - q_i^2 - \sum_{j\neq i}^{n} q_j q_i - cq_i + z \\ =&-q_i^2 + \left(a - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c\right) q_i + z \\ =&\hat{\pi}_i(\mathbf{q}).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Con z constante de integración.

El segundo paso para la construcción de la función potencial es realizar la suma sobre todos los $i's$. Así, realizando la suma en (2.8) obtenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}(\mathbf{q}) =& \sum_{i=1}^{n} \hat{\pi}_i(\mathbf{q}) \\ =&\sum_{i=1}^{n}\left[-q_i^2 + \left(a - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c\right) q_i\right] + Z.\end{aligned} \tag{2.9}$$

La cual es la función de pago total y Z es la suma de las constantes de integración.

[2]Ésta construcción es en el contexto de los juegos estáticos, la construcción de la función potencial para juegos dinámicos se aborda en el capítulo siguiente.

Derivando (2.9) con respecto a q_i tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\Pi}(\mathbf{q})}{\partial q_i} =& \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\pi}_i(\mathbf{q})\right) \\
=& \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[-q_i^2 + \left(a - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c\right) q_i\right] + Z\right) \\
=& \frac{\partial \hat{\pi}_i(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \phi_i.
\end{aligned}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
\phi_i =& \sum_{j\neq i}^{n} \frac{\partial \hat{\pi}_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} \\
=& -\sum_{j\neq i}^{n} q_j.
\end{aligned}
$$

De acuerdo al Teorema 1, basta ver que el campo vectorial $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ es conservativo. En efecto, el campo vectorial $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ es conservativo con función potencial $\Phi(\mathbf{q}) = -\sum_{j\neq i}^{n} q_j q_i$. Entonces la función:

$$
\hat{P}(\mathbf{q}) = \hat{\Pi}(\mathbf{q}) + \sum_{j\neq i}^{n} q_j q_i, \tag{2.10}
$$

es una función potencial para el juego de Cournot-Nash pues se obtiene el mismo gradiente que la función original:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{P}(\mathbf{q})}{\partial q_i} =& a - 2q_i - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c \\
=& \frac{\partial \pi_i(\mathbf{q})}{\partial q_i}.
\end{aligned}
$$

Un potencial, en el contexto estático, contiene toda la información relevante del juego estático original. En el siguiente capítulo se considera una clase de juegos diferenciales y se darán algunas condiciones que permitan la construcción del potencial hamiltoniano.

Capítulo 3

Potencial en juegos dinámicos

En este capítulo se define el concepto de función potencial hamiltoniano para juegos diferenciales y se estudian las condiciones necesarias para su existencia. El objetivo es determinar los requisitos bajo los cuales un juego diferencial no cooperativo, resuelto bajo la estructura de información de ciclo abierto se puede representar como un solo problema de control óptimo, cuya solución tiene las mismas propiedades dinámicas del juego original.

3.1. Preliminares

En lo que sigue se define un juego diferencial en forma normal, junto con sus elementos correspondientes, lo que permitirá, si existe, la construcción de la función potencial hamiltoniana [8], [9].

Considere un juego diferencial Γ de horizonte infinito con las siguientes características:

- $n \in \mathbb{N}$ es el número de jugadores.
- $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t)) \in U_1 \times \cdots \times U_N := U \subset \mathbb{R}^N$, donde $N \geq n$ es el vector de control de variables; $u_i(t) = (u_{i1}(t), \ldots, u_{iv_i}(t))$ es el vector de controles relacionado al $i-$ésimo jugador, v_i es el numero de controles del $i-$ésimo jugador, tal que $N = \sum_{i=1}^{n} v_i$. El conjunto U es también abierto y acotado.
- $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_M(t)) \in X \subset \mathbb{R}^M$, donde X es un conjunto abierto y acotado, es el vector de las variables de estado. Por convención para los juegos diferenciales se considera $M < N$.
- El $i-$ésimo jugador tiene la tasa o pago instantáneo: $\pi_i(x(t), u(t), t)$ y se supone que desea maximizar, dado el conjunto de condiciones iniciales $x(0) = (x_1(0), \ldots, x_M(0))$, el funcional:

$$J_i := \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho t}\pi_i(x(t), u(t), t)dt, \tag{3.1}$$

sujeto a las ecuaciones cinemáticas:

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = G_k(x(t), u(t), t), \\ x_k(0) = x_{k0} \in X_k, \end{cases} \tag{3.2}$$

para $k = 1, \ldots, M$, ρ es la tasa de descuentos intertemporal, constante y común para todos los agentes[1] y $G_k(\cdot) \in C^2(X \times U \times [0, \infty))$ es la función de transición de la variable de estado $x_k(t)$.

Antes de continuar el análisis del potencial para juegos diferenciales, necesitamos las definiciones de trayectorias de equilibrio para el juego. Para ello primero daremos la definición de multiestrategia[2]. La siguiente definición se puede encontrar en [11].

Definición 3.1.1. Una multiestrategia $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ tal que:

$$J_i(u_1^*, \ldots, u_n^*) \geq J_i(u_1^*, \ldots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \ldots, u_n^*) \quad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

se dice que es un equilibrio de Nash para el juego. En particular:

- $(u_1^*, \ldots, u_n^*)$ es un equilibrio de Nash en ciclo abierto (*open-loop*) si u_i^* depende únicamente del tiempo t y de la condición inicial dada x_{i0}.

- $(u_1^*, \ldots, u_n^*)$ es un equilibrio de Nash en retroalimentación (*feedback*) si u_i^* depende de t y de $x(t)$.

Como se mencionó al inicio de este capítulo se considera la estructura de información de ciclo abierto. Para encontrar la solución en ciclo abierto de Γ, se construye, para cada jugador i, la siguiente función hamiltoniana de valor corriente[3].

$$H_i(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \pi_i(x(t), u(t), t) + \sum_{k=1}^{M} \lambda_{ik}(t)G_k(x(t), u(t), t). \tag{3.4}$$

En lo que sigue, llamaremos a esta función simplemente como el hamiltoniano. Así, el hamiltoniano para el $i-$ésimo jugador puede reescribirse de la siguiente manera:

[1] Por simplicidad se asume que todos los agentes tienen las mismas preferencias de tiempo.

[2] Similar a la definición de perfil de estrategia.

[3] En el Apéndice C, se detalla la construcción de dicha función.

$$\begin{aligned} H_i(x(t),u(t),\lambda(t),t) = &\pi_i(x(t),u(t),t) + \lambda_{ii}(t)G_i(x(t),u(t),t) \\ &+ \sum_{j\neq i} \lambda_{ij}(t)G_j(x(t),u(t),t), \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $\lambda_{ii}(t)$ es el multiplicador de Lagrange.

Supongamos que $H_i \in C^2(X \times U \times \mathbb{R}^{n\times n} \times [t_0,\infty))$. Las condiciones necesarias para la maximización de $H_i(\cdot)$ son que sus derivadas parciales con respecto a las variables de control se anulen, lo cuál es equivalente a:

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i}(x(t),u(t),\lambda(t),t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \pi_i}{\partial u_i}(x(t),u(t),\lambda(t),t)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\partial}{\partial u_i}\lambda_{ii}(t)G_i(x(t),u(t),\lambda(t),t) + \frac{\partial}{\partial u_i}\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(t)G_j(x(t),u(t),\lambda(t),t) \\ &= \frac{\partial \pi_i}{\partial u_i}(x(t),u(t),\lambda(t),t) + \lambda_{ii}(t)\frac{\partial G_i}{\partial u_i}(x(t),u(t),\lambda(t),t) \\ &+ \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(t)\frac{\partial G_j}{\partial u_i}(x(t),u(t),\lambda(t),t) = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\dot{\lambda}_{ii}(t) = \rho\lambda_{ii}(t) - \frac{\partial H_i}{\partial x_i}(x(t),u(t),t), \tag{3.7}$$

$$\dot{\lambda}_{ij}(t) = \rho\lambda_{ij}(t) - \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x(t),u(t),t), \tag{3.8}$$

$$\dot{x}_k(t) = G_k(x(t),u(t),t), \tag{3.9}$$

para todo $i = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,M$ y para $j \neq i$,. Tenemos, además las condiciones de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{ik}(t)x_k(t) = 0, \tag{3.10}$$

para todo $i = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,M$.

Como se vio en el capitulo anterior, la construcción de la función potencial para el caso de juegos estáticos, si existe, requiere de la integración de las condiciones de primer orden respecto a las variables de decisión. En nuestro caso, las variables de decisión son las cantidades a producir de cada empresa. Además de verificar que el resultado obtenido sea o no un campo conservativo.

Más allá de los pasos necesarios para la construcción de la función potencial, su importancia radica en que las condiciones de primer orden de la función potencial reproducen las condiciones de primer orden de todos los jugadores involucrados en el juego original.

Para el juego diferencial que estamos analizando, se pretende que, una vez encontrada la función potencial, ésta cumpla con los mismos requerimientos que en el caso estático. Es decir, estamos buscando una función potencial hamiltoniana $\mathcal{H}_p$ que cumpla con lo siguiente:

- el conjunto de las derivadas parciales de primer orden de $\mathcal{H}_p$ con respecto a los estados y controles debe coincidir con las derivadas parciales de primer orden de la función hamiltoniana estándar.
- $\mathcal{H}_p$ debe tener la misma estructura que el hamiltoniano, es decir, debe de poder expresarse como como la suma de la función P y el producto escalar entre las M funciones de transición del juego original y las corrientes variables de costo.

$$\mathcal{H}_p(x(t), u(t), \tilde{\Lambda}(t), \hat{\Lambda}(t), t) = P(x(t), u(t), \Lambda_{ii}(t), \Lambda_{ij}(t), t) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_{ii} G_i(x, u(t), t), \quad (3.11)$$

donde,

$$\tilde{\Lambda} = (\lambda_{11}(t), \ldots, \lambda_{MM}(t)) \in \mathbb{R}^M, \quad (3.12)$$

es el vector de valores actuales asociados al $i-$ésimo jugador a su propia dinámica de estado x_i, y

$$\hat{\Lambda} = (\lambda_{12}(t), \ldots, \lambda_{1M}(t), \ldots, \lambda_{n1}(t), \ldots, \lambda_{nM}(t)) \in \mathbb{R}^{Mn-M} \quad (3.13)$$

es el vector de multiplicadores cruzados.

El potencial hamiltoniano no es una función hamiltoniana porque las variables de costo también aparecen como argumentos del funcional objetivo. El nombre "hamiltoniano" se mantiene en la estructura potencial porque el procedimiento de solución que se estudia es similar al utilizado para resolver un PCO. Mostraremos que el potencial hamiltoniano puede ser, bajo ciertas circunstancias, la representación del juego diferencial original como si fuera jugado por un solo jugador. La siguiente definición caracteriza a la función potencial para un juego Γ.

Definición 3.1.2 (Función potencial hamiltoniana)**.** Dado un juego diferencial Γ con hamiltoniano H_i, la función potencial hamiltoniana para el juego Γ es una función $\mathcal{H}_P : X \times U \times \mathbb{R}^{n\times M} \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial x_M}, \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial u_N}\right) = \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial H_M}{\partial x_M}, \frac{\partial H_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial H_N}{\partial u_N}\right), \quad (3.14)$$

sobre $X \times U$.

En analogía a lo presentado al final del Capitulo 1, si ahora, el juego diferencial Γ admite una función potencial hamiltoniana, entonces se dice que Γ es un juego diferencial potencial con hamiltoniano $\mathcal{H}_p$.

Para la existencia de un potencial hamiltoniano, el campo vectorial de la Definición 3.1.2 debe de ser conservativo, es decir, debe admitir un potencial de acuerdo con el Teorema 1. Bajo tales circunstancias, se pueden establecer las siguientes condiciones suficientes para la existencia del potencial hamiltoniano.

Teorema 2. Si existen dos funciones $\hat{P}(x(t), u(t), t)$ y $R(x(t), u(t), \tilde{\Lambda}(t), \hat{\Lambda}(t))$, tales que:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial u_i} + \lambda_{ii}\frac{\partial G_i}{\partial u_i} + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\frac{\partial R}{\partial u_i} = \frac{\partial H_i}{\partial u_i}, \tag{3.15}$$

para todo $i = 1, \ldots, N$ y

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + \lambda_{ii}\frac{\partial G_i}{\partial x_i} + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{\partial H_i}{\partial x_i}, \tag{3.16}$$

para todo $i = 1, \ldots, M$, entonces el juego diferencial Γ con hamiltoniano H_i admite la siguiente función potencial hamiltoniana:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_P(x(t), u(t), \tilde{\Lambda}(t), \hat{\Lambda}(t), t) = {} & \hat{P}(x(t), u(t), t) + R(x(t), u(t), \tilde{\Lambda}(t), \hat{\Lambda}(t), t) \\ & + \sum_{i=1}^{M}\lambda_{ii}(t)G_i(x(t), u(t), t).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Demostración. Sean $\hat{P}(x(t), u(t), t)$ y $R(x(t), u(t), \tilde{\Lambda}(t), \hat{\Lambda}(t))$, dos funciones que cumplen con las condiciones (3.15) y (3.16). Por la Definición 3.1.2, si (3.17) es una función potencial hamiltoniana debe de cumplir con (3.14).

Calculemos las derivadas parciales de $\mathcal{H}_p$ con respecto de x_i y u_i:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial x_i} &= \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{M}\lambda_{ii}\frac{\partial G_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + \lambda_{ii}\frac{\partial G_i}{\partial x_i} + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\frac{\partial R}{\partial x_i}\end{aligned}$$

Pero de (3.16) esto último es igual a:

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i}.$$

De manera similar, para la derivada parcial de $\mathcal{H}_p$ con respecto de u_i:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial u_i} &= \frac{\partial \hat{P}}{\partial u_i} + \frac{\partial R}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_{ii} \frac{\partial G_i}{\partial u_i} \\ &= \frac{\partial \hat{P}}{\partial u_i} + \lambda_{ii} \frac{\partial G_i}{\partial u_i} + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\partial R}{\partial u_i} \\ &= \frac{\partial H_i}{\partial u_i}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el juego diferencial Γ con hamiltoniano H_i admite la función potencial hamiltoniana $\mathcal{H}_p$. □

El Teorema 2 expresa la función potencial hamiltoniana $(x(t), u(t), \tilde{\Lambda}(t), \hat{\Lambda}(t), t)$ como la suma de dos funciones, donde $\hat{P}(x(t), u(t), t)$ corresponde a la función potencial (2.10) vista en la parte del juego diferencial para el caso estático y $R(x(t), u(t), \tilde{\Lambda}(t), \hat{\Lambda}(t))$ es la función que contiene los costos $\lambda_{ii}(t)$, $\lambda_{ij}(t)$ del juego original y por lo tanto contiene la información sobre como los cambios en las variables de estado afectan las funciones objetivo para los jugadores en el juego original.

El conjunto de condiciones necesarias (3.6)-(3.10) determinan la solución en ciclo abierto del juego diferencial original. Tomando las derivadas con respecto al tiempo de las condiciones de primer orden (3.6) y reemplazando $\dot{\lambda}_{ii}(t)$, $\dot{\lambda}_{ij}(t)$ y el valor de $\lambda_{ii}(t)$ obtenido de (3.6), la solución en ciclo abierto se puede escribir equivalentemente como un sistema de ecuaciones diferenciales describiendo la dinámica de los controles óptimos, estado y multiplicadores cruzados. El procedimiento que seguimos utilizando el potencial hamiltoniano es similar. Primero consideramos las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial u_i} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial \hat{P}}{\partial u_i} + \lambda_{ii} \frac{\partial G_i}{\partial u_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial R}{\partial u_i} = 0, \tag{3.18}$$

$$\dot{\lambda}_{ii}(t) = \rho \lambda_{ii}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial x_i}, \tag{3.19}$$

$$\dot{x}_k(t) = G_k(x(t), u(t), t), \tag{3.20}$$

para todo $i = 1, \ldots, N$ y $k = 1, \ldots, M$, agregando las condiciones de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} e^{\rho t} \lambda_{ik}(t) x_k(t) = 0, \tag{3.21}$$

para $i = 1, \ldots, N$ y para todos los estados admisibles $x_i(t)$, con $x_i^*(t)$.

Luego obtenemos la derivada de (3.18) con respecto al tiempo y reemplazamos $\dot{\lambda}_{ii}(t)$

y $\lambda_{ii}(t)$ para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de los controles, los estados y los multiplicadores cruzados.

En la siguiente sección, mostramos que existen condiciones bajo las cuales la dinámica de los multiplicadores cruzados no afecta a la dinámica de controles y estados óptimos. Por lo tanto, podemos omitir a los multiplicadores cruzados y aún así, se pueden lograr las mismas trayectorias óptimas y el mismo estado estacionario del juego original.

3.2. Propiedades dinámicas del potencial hamiltoniano.

En esta sección investigamos bajo qué condiciones el potencial hamiltoniano puede ser visto como la función hamiltoniana de un solo jugador reemplazando el juego original de n jugadores involucrados en el juego Γ. Como se mencionó anteriormente, se espera que el resultado de este procedimiento tenga el mismo sistema dinámico tanto en las ecuaciones de estado y en las ecuaciones de control cómo en el juego original Γ. Dado que en el juego original se tiene que la dinámica de los multiplicadores cruzados λ_{ij} puede afectar la elección del control óptimo por cada jugador, esto ocasiona que en general no se cumpla que la estructura de equilibrio de un PCO de un solo agente coincida con la estructura de equilibrio del juego diferencial original, donde n problemas de control óptimo deben ser resueltos simultáneamente.

Estas dinámicas juegan un papel importante, ya que se ocupan de las interacciones cruzadas asimétricas entre las variables de estado. El juego original no tiene que ser simétrico[4], porque es posible obtener un potencial hamiltoniano de un *juego asimétrico*, como se mostrará en el ejemplo del Capítulo 4.

En estas circunstancias, el potencial hamiltoniano permite separar los efectos directos (representados por la dinámica de las variables de costo $\lambda_{ii}(t)$) de los efectos cruzados representados por la dinámica de las variables de costo $\lambda_{ij}(t)$.

En el siguiente teorema se muestran las condiciones suficientes bajo las cuales las propiedades dinámicas (es decir, el sistema estado-costo de ecuaciones diferenciales que representa la solución óptima) del juego Γ original y las del juego potencial correspondiente son las mismas.

Teorema 3. Si todas las condiciones de primer orden (3.6) de Γ tienen la siguiente forma:

$$\lambda_{ii} = \sum_{j\neq i} A_{ij}\lambda_{ij} + K_i(u) + L_i(x), \tag{3.22}$$

[4]Ver Apéndice D para una definición de *juego simétrico.*

donde A_{ij} son constantes reales, $K_i(\cdot)$ son funciones diferenciables en todas las variables de estado y:

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \frac{\partial G_j}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial G_i}{\partial x_j} = 0, \tag{3.23}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, M$, $i \neq j$, entonces las ecuaciones (3.8) son desacopladas con respecto al estado y dinámica de control del juego Γ.

Demostración. Supongamos que en todas las condiciones de primer orden (3.6) los costos λ_{ii} se escriben como una combinación lineal de los multiplicadores cruzados λ_{ij} más dos funciones diferenciables separadas de controles y estados, es decir, existe $Mn - M$ constantes reales A_{ij} y N funciones $K_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, y N funciones $L_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, todas ellas de clase C^2, con respecto a todas las variables tal que

$$\lambda_{ii}(t) = \sum_{j \neq i} A_{ij}\lambda_{ij}(t) + K_i(u(t)) + L_i(x(t)),$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Derivando la igualdad (3.22) con respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\lambda_{ii}}(t) = \sum_{j \neq i} A_{ij}\dot{\lambda_{ij}}(t) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial K_i(u(t))}{\partial u_k}\dot{u_k} + \sum_{k=1}^{M} \frac{L_i(x(t))}{\partial x_k}\dot{x_k}.$$

Por otro lado, de (3.7) tenemos que:

$$\dot{\lambda}_{ii}(t) = \rho\lambda_{ii}(t) - \frac{\partial H_i}{\partial x_i}(x(t), u(t), t),$$

y sustituyendo en (3.7) los valores de λ_{ii} y $\dot{\lambda}_{ii}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j \neq i} A_{ij}\dot{\lambda_{ij}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial K_i(u)}{\partial u_k}\dot{u_k} + \sum_{k=1}^{M} \frac{L_i(x)}{\partial x_k}\dot{x_k} = \rho\left(\sum_{j \neq i} A_{ij}\lambda_{ij}(t) + K_i(u(t)) + L_i(x(t))\right)& \\ - \frac{\partial H_i}{\partial x_i}(x(t), u(t), t),&\end{aligned} \tag{3.24}$$

para $i = 1, \ldots, M$.

Por otra parte de (3.8), el valor de $\dot{\lambda}_{ij}(t)$ está dado por:

$$\dot{\lambda}_{ij}(t) = \rho\lambda_{ij}(t) - \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x(t), u(t), t).$$

Sustituyendo el valor de $\dot{\lambda}_{ij}(t)$ en (3.24) tenemos

$$\sum_{j\neq i} A_{ij}\left(\rho\lambda_{ij}(t) - \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x(t),u(t),t)\right) + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial K_i(u)}{\partial u_k}\dot{u_k}$$
$$+\sum_{k=1}^{M}\frac{L_i(x)}{\partial x_k}\dot{x_k} = \rho\left(\sum_{j\neq i} A_{ij}\lambda_{ij} + K_i(u) + L_i(x)\right) - \frac{\partial H_i}{\partial x_i}.$$

Desarrollando esta última igualdad:

$$\rho\sum_{j\neq i} A_{ij}\lambda_{ij}(t) - \sum_{j\neq i} A_{ij}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x(t),u(t),t) + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial K_i(u)}{\partial u_k}\dot{u_k}$$
$$+\sum_{k=1}^{M}\frac{L_i(x)}{\partial x_k}\dot{x_k} = \rho\sum_{j\neq i} A_{ij}\lambda_{ij}(t) + \rho\left(K_i(u) + L_i(x)\right) - \frac{\partial H_i}{\partial x_i}(x(t),u(t),t).$$

Simplificando tenemos:

$$-\sum_{j\neq i} A_{ij}\frac{\partial H_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial K_i(u)}{\partial u_k}\dot{u_k} + \sum_{k=1}^{M}\frac{L_i(x)}{\partial x_k}\dot{x_k} = \rho(K_i(u) + L_i(x)) - \frac{\partial H_i}{\partial x_i}. \tag{3.25}$$

Recordemos también que de la ecuación (3.4), H_i se puede reescribir en la forma:

$$H_i(x(t),u(t),t) = \pi_i(x(t),u(t),t) + \lambda_{ii}G_i(x(t),u(t),t) + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(t)G_j(x(t),u(t),t).$$

Ahora, calculando $\frac{\partial H_i}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial H_i}{\partial x_i}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i}{\partial x_j} =& \frac{\partial \pi_i}{x_j} + \lambda_{ii}\frac{\partial G_i}{x_j} + \sum_{l\neq i}\lambda_{il}\frac{\partial G_l}{\partial x_j},\\ \frac{\partial H_i}{\partial x_i} =& \frac{\partial \pi_i}{x_i} + \lambda_{ii}\frac{\partial G_i}{x_i} + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\frac{\partial G_j}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de $\frac{\partial H_i}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial H_i}{\partial x_i}$, (3.25) se convierte en:

$$-\sum_{j\neq i} A_{ij}\left(\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j} + \lambda_{ii}\frac{\partial G_i}{\partial x_j} + \sum_{l\neq i}\lambda_{il}\frac{\partial G_l}{\partial x_j}\right) + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial K_i(u)}{\partial u_k}\dot{u_k} + \sum_{k=1}^{M}\frac{L_i(x)}{\partial x_k}\dot{x_k}$$

$$= \rho(K_i(u) + L_i(x)) - \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} + \lambda_{ii} \frac{\partial G_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right).$$

Notemos que el término λ_{ii} vuelve a aparecer en la ecuación anterior, pero usando nuevamente la hipótesis (3.22) y sustituyendo obtenemos:

$$- \sum_{j \neq i} A_{ij} \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j} + \left(\sum_{m \neq i} A_{im} \lambda_{im} + K_i(u) + L_i(x) \right) \frac{\partial G_i}{\partial x_j} + \sum_{l \neq i} \lambda_{il} \frac{\partial G_l}{\partial x_j} \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial K_i(u)}{\partial u_k} \dot{u}_k + \sum_{k=1}^{M} \frac{L_i(x)}{\partial x_k} \dot{x}_k = \rho(K_i(u) + L_i(x)).$$

$$- \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} + \left(\sum_{m \neq i} A_{im} \lambda_{im} + K_i(u) + L_i(x) \right) \frac{\partial G_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right).$$

Agrupando en una única función $\mathcal{A}(x, u, \dot{x}, \dot{u})$ todos los términos donde no aparecen los multiplicadores λ_{ij} se obtiene:

$$\mathcal{A}(x, u, \dot{x}, \dot{u}) = - \sum_{j \neq i} A_{ij} \left(\sum_{m \neq i} A_{im} \lambda_{im} \frac{\partial G_i}{\partial x_j} + \sum_{l \neq i} \lambda_{il} \frac{\partial G_l}{\partial x_j} \right)$$

$$+ \left(\sum_{m \neq i} A_{im} \lambda_{im} \right) \frac{\partial G_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\partial G_j}{\partial x_i}. \tag{3.26}$$

Ahora, la condición (3.23) implica que (3.26) se convierte en:

$$\mathcal{A}(x, u, \dot{x}, \dot{u}) = - \sum_{j \neq i} A_{ij} \lambda_{ij} \frac{\partial G_j}{\partial x_j} + \sum_{m \neq i} A_{im} \lambda_{im} \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = 0,$$

es decir, una ecuación que no incluye ningún multiplicador cruzado. De ahí que la dinámica para todo u_i y x_i no se ve afectada por el costo de las variables λ_{ij}, para $i \neq j$. □

La siguiente proposición muestra que la solución del sistema dinámico obtenida a partir del potencial hamiltoniano coincide con la solución del juego diferencial original. Es decir, la solución del juego diferencial Γ coincide con la solución obtenida a partir del potencial hamiltoniano. Ésto simplifica el proceso de solución tradicional de un juego, pues basta con obtener las trayectorias óptimas de la función potencial hamiltoniana y éstas trayectorias serán equilibrios de Nash para el juego diferencial original.

Llámemos $(x^P, u^P, \tilde{\Lambda}^P) \in X \times U \times \mathbb{R}^M$ el vector solución del sistema dinamico obtenido del potencial Hamiltoniano y $(x^*, u^*, \tilde{\Lambda}^*) \in X \times U \times \mathbb{R}^M$ y del juego diferencial original.

Proposición 1. Si las condiciones de los Teoremas 2 y 3 se cumplen, entonces:

$$(x^P, u^P, \tilde{\Lambda}^P) = (x^*, u^*, \tilde{\Lambda}^*).$$

Demostración. El Teorema 2 garantiza la existencia del potencial hamiltoniano, mientras que el Teorema 3 garantiza que los multiplicadores cruzados no afectan el sistema dinámico de los estados y controles óptimos.

De la Definición 3.1.2 se tiene que:

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial u_i},$$

por lo que al derivar con respecto al tiempo las condiciones (3.6) y (3.18) obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_i}{\partial u_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial u_i}\right).$$

Por otro lado de (3.7) y (3.19) tenemos respectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_{ii}(t) =& \rho\lambda_{ii}(t) - \frac{\partial H_i}{\partial x_i},\\ \dot{\lambda}_{ii}(t) =& \rho\lambda_{ii}(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Y nuevamente de la Definición 3.1.2 se tiene que:

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x_i}.$$

Con lo cual (3.7) y (3.19) coinciden. Y por lo tanto las trayectorias de equilibrio son las mismas para todo t en el intervalo $(0, \infty)$ y el análisis del estado estacionario coincide.

□

En el siguiente capítulo retomamos el juego que plantea el modelo de Cournot, visto en el Capítulo 2 y extendiéndolo al caso dinámico. Además, particularizamos para el caso de sólo 2 empresas, esto con el fin de ver la aplicación que tienen los teoremas vistos en éste capítulo.

Capítulo 4

Aplicación

El siguiente ejemplo fue tomado de [9]; en este artículo se considera el ejemplo de un duopolio asimétrico con proceso de innovación. Este ejemplo muestra cómo se aplican los teoremas obtenidos en el capítulo anterior.

A continuación analizaremos el juego diferencial entre dos empresas que invierten en innovación de procesos. Lo primero es describir al juego de manera general para, posteriormente identificar los elementos de éste *duopolio* siguiendo los lineamientos vistos en la Sección 3.1.

Consideramos el juego de Cournot donde dos empresas venden un único producto homogéneo[1], para el juego se consideran 4 controles y 2 variables de estado. En este caso la función de demanda inversa para las empresas $i = 1, 2$ es:

$$p_i(t) = a - q_i(t) - sq_j(t), \quad i \neq j, \tag{4.1}$$

donde, al igual que en la Sección 2.2, $q_i(t)$ y $q_j(t)$ son las cantidades producidas al tiempo t, por las empresas i y j respectivamente. Además $s \in [0, 1]$ es un parámetro que captura el grado de *sustituibilidad* entre los dos bienes y $a > 0$ es el *precio de reserva*. Se tiene además que los costos de producción son lineales y corresponden a las funciones:

$$C_i(q_i(t)) = c_i(t)q_i(t),$$

donde el costo de producción marginal $c_i(t)$ es la variable de estado que cambia con el tiempo debido a la depreciación de la tecnología de producción y a la inversión en $I + D$ $(R\&D)^2$.

[1]Conocido también como no diferenciado, es decir, todas venden u ofrecen lo mismo.
[2]$I + D$ hace referencia a Investigación y Desarrollo. En inglés *Research and Development*.

Cada empresa $i = 1, 2$ invierte $k_i \geq 0$ en I+D con un costo cuadrático:

$$\Upsilon_i(k_i) = k_i^2(t).$$

Consideramos las siguientes dinámicas para los costos marginales de producción:

$$\dot{c}_1(t) = -k_1(t) - \beta_1 k_2(t) + \gamma c_1(t), \tag{4.2}$$
$$\dot{c}_2(t) = -k_2(t) - \beta_2 k_1(t) + \gamma c_2(t), \tag{4.3}$$

donde el parámetro γ representa la tasa de obsolencia. Además, los parámetros $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ representan posibles efectos indirectos tecnológicos que cada empresa disfruta de la inversión en I + D de la empresa rival. Para permitir las asimetrías, suponemos $\beta_1 \geq \beta_2$ lo que implica que la empresa 1 es capaz de explotar más intensamente la inversión del rival en I + D en comparación con la empresa 2.

La función de pago de la i-ésima empresa está dada por:

$$\pi_i(q_i(t), q_j(t), c(t), k_i(t)) = (a - q_i(t) - sq_j(t) - c_i(t))q_i(t) - k_i(t)^2. \tag{4.4}$$

Dadas las condiciones iniciales:

$$c_1(0) = c_{10},$$
$$c_2(0) = c_{20},$$

el objetivo de la empresa i es elegir q_i y k_i para maximizar la función:

$$J_i \equiv \int_0^{\infty} e^{\rho t}[(a - q_i(t) - sq_j(t) - c_i(t))q_i(t) - k_i(t)^2]dt, \tag{4.5}$$

sujeto a las ecuaciones de movimiento de c_1 y c_2.

Resumiendo lo anterior y siguiendo los lineamientos vistos en la Sección 3.1, el juego Γ que involucra el duopolio tiene los siguientes elementos:

- Tenemos $n = 2$ jugadores, empresa 1 y empresa 2.
- $N = 4$ variables de control. En este caso las variables de control son la inversión $k_i(t)$ y los costos $c_i(t)$, para $i = 1, 2$.
- $M = 2$ variables de estado. Las variables de estado son las cantidades $q_1(t)$ y $q_2(t)$.

- El i-ésimo jugador tiene la función de pago

$$\pi_i(q_i(t), q_j(t), c(t), k_i(t)) = (a - q_i(t) - sq_j(t) - c_i(t))q_i(t) - k_i(t)^2,$$

y se supone que desea maximizar, dado el conjunto de condiciones iniciales $c(0) = (c_1(0), c_2(0))$, lo siguiente:

$$\begin{aligned} J_i &:= \int_0^\infty e^{-\rho t}\pi_i(x(t), u(t), t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{\rho t}[(a - q_i(t) - sq_j(t) - c_i(t))q_i(t) - k_i(t)^2]dt, \end{aligned}$$

sujeto a las ecuaciones cinemáticas:

$$\begin{cases} \dot{c}_i(t) = -k_i(t) - \beta_i k_j(t) + \gamma c_i(t), & i \neq j, i, j = 1, 2. \\ c_i(0) = c_{i0}, & i = 1, 2. \end{cases} \tag{4.6}$$

Ahora, el hamiltoniano de acuerdo a la ecuación (3.5) está dado por:

$$\begin{aligned} H_i(x(t), u(t), t) = {} & \pi_i(x(t), u(t), t) + \lambda_{ii}G_i(x(t), u(t), t) \\ & + \sum_{j\neq i} \lambda_{ij}(t)G_j(x(t), u(t), t), \end{aligned} \tag{4.7}$$

y sustituyendo valores tendríamos:

$$\begin{aligned} H_i(x(t), u(t), t) = {} & (a - q_i(t) - sq_j(t) - c_i(t))q_i(t) - k_i(t)^2 \\ & + \lambda_{ii}(-k_i(t) - \beta_i k_j(t) + \gamma c_i(t)) \\ & + \sum_{j\neq i} \lambda_{ij}(t)(-k_i(t) - \beta_i k_j(t) + \gamma c_i(t)). \end{aligned}$$

Dado que sólo tenemos dos jugadores, las funciones hamiltonianas son:

$$\begin{aligned} H_1(x(t), u(t), t) = {} & (a - q_1(t) - sq_2(t) - c_1(t))q_1(t) - k_1(t)^2 \\ & + \lambda_{11}(t)(-k_1(t) - \beta_1 k_2(t) + \gamma c_1(t)) \\ & + \lambda_{12}(-k_2(t) - \beta_2 k_1(t) + \gamma c_2(t)), \\ H_2(x(t), u(t), t) = {} & (a - q_2(t) - sq_1(t) - c_2(t))q_2(t) - k_2(t)^2 \\ & + \lambda_{22}(t)(-k_2(t) - \beta_2 k_1(t) + \gamma c_2(t)) \\ & + \lambda_{21}(t)(-k_1(t) - \beta_1 k_2(t) + \gamma c_1(t)). \end{aligned}$$

Para soluciones internas, se deben de cumplir las condiciones de primer orden para las dos empresas.

Para la empresa 1 se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial q_1} &= (a - q_1(t) - sq_2(t) - c_1(t)) - q_1(t) \\
&= a - 2q_1(t) - sq_2(t) - c_1(t) = 0, \qquad (4.8) \\
\frac{\partial H_1}{\partial k_1} &= -2k_1(t) - \lambda_{11}(t) - \beta_2\lambda_{12}(t) = 0, \qquad (4.9) \\
\dot{\lambda_{11}} =& \rho\lambda_{11}(t) - \frac{\partial H_1}{\partial c_1} = (\rho - \gamma)\lambda_{11}(t) + q_1(t), \qquad (4.10) \\
\dot{\lambda_{12}} =& \rho\lambda_{12}(t) - \frac{\partial H_1}{\partial c_2(t)} = (\rho - \gamma)\lambda_{12}(t). \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Análogamente, para la empresa 2 se tienen las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_2}{\partial q_2} &= a - 2q_2(t) - sq_1(t) - c_2(t) = 0, \qquad (4.12) \\
\frac{\partial H_2}{\partial k_2} &= -2k_2(t) - \lambda_{22}(t) - \beta_1\lambda_{21}(t) = 0, \qquad (4.13) \\
\dot{\lambda_{21}} =& \rho\lambda_{21}(t) - \frac{\partial H_2}{\partial c_1} = (\rho - \gamma)\lambda_{21}(t), \qquad (4.14) \\
\dot{\lambda_{22}} =& \rho\lambda_{22}(t) - \frac{\partial H_2}{\partial c_2} = (\rho - \gamma)\lambda_{22}(t) + q_2(t). \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la función potencial $\hat{P}(\cdot)$ obtenida a partir del caso estático dada por:

$$\hat{P}(\mathbf{q}) = \hat{\Pi}(\mathbf{q}) + \sum_{j\neq i}^{n} q_j q_i,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\hat{P}(q_1(t), q_2(t), k_1(t), k_2(t)) = \sum_{j=1}^{2}(-q_j(t)^2 + (a - c_j(t))q_j(t) - k_j(t)^2) \\
- sq_1(t)q_2(t), \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos $R(k_1(t), k_2(t), \lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), \lambda_{21}(t), \lambda_{22}(t))$ como la función que contiene los costos $\lambda_{ii}(t)$ y $\lambda_{ij}(t)$ del juego original. Dicha función está dada por:

$$\begin{aligned}
R(k_1(t), k_2(t), \lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), \lambda_{21}(t), \lambda_{22}(t)) = \beta_1(\lambda_{11}(t) - \lambda_{12}(t))k_2(t) \\
+ \beta_2(\lambda_{22}(t) - \lambda_{21}(t))k_1(t). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

De acuerdo al Teorema 2, debemos verificar que se cumplen las condiciones (3.15) y (3.16). En efecto, calculando la derivada parcial de $\hat{P}(\cdot)$ con respecto de q_i tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{P}}{\partial q_i} =& -2q_i(t) + a - c_i(t) - sq_j(t)\\ =& a - 2q_i(t) - sq_j(t) - c_i(t).\end{aligned}$$

Como $R(\cdot)$ no depende de q_i la derivada parcial con respecto a q_i es cero. Lo mismo sucede con c_i pues tampoco depende de q_i. Es decir,

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial c_i}{\partial q_i} = 0.$$

Por otro lado, calculando la derivada parcial de la ecuación (4.7) con respecto de q_i se tiene que:

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_i} = a - 2q_i(t) - sq_j(t) - c_i(t).$$

Con lo anterior se cumple que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{P}}{\partial u_i} + \lambda_{ii}\frac{\partial G_i}{\partial u_i} + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\frac{\partial R}{\partial u_i} &= a - 2q_i(t) - sq_j(t) - c_i(t) + \lambda_{ii}(t)[0] + \lambda_{ij}(t)[0]\\ &= \frac{\partial H_i}{\partial u_i}.\end{aligned}$$

Resta ver que se cumple la condición (3.16). En este caso tenemos que:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial k_i} = -2k_i(t),$$

$$\frac{\partial R}{\partial k_i} = \beta_j\lambda_{jj}(t) - \beta_j\lambda_{ji}(t),$$

$$\frac{\partial \dot{c}_i}{\partial k_i} = -1.$$

Ahora calculando la derivada parcial de la ecuación (4.7) con respecto de k_i se tiene que:

$$\frac{\partial H_i}{\partial k_i} = -2k_i(t) - \lambda_{ii}(t) - \lambda_{ij}(t)\beta_j.$$

Así se tiene que:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial k_i} + \lambda_{ii}(t)\frac{\partial G_i}{\partial k_i} + \sum_{j\neq i} \lambda_{ij}(t)\frac{\partial R}{\partial k_i} = -2k_i(t) - \lambda_{ii}(t) + \lambda_{ij}(t)\beta_j$$
$$= \frac{\partial H_i}{\partial k_i}.$$

Por lo tanto, por el Teorema 2, el juego diferencial considerado admite la función potencial hamiltoniana de la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_P(q_1(t), q_2(t), k_1(t), k_2(t), &c_1(t), c_2(t), \lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), \lambda_{21}(t), \lambda_{22}(t))\\ &= \hat{P}(q_1(t), q_2(t), k_1(t), k_2(t))\\ &+ R(k_1(t), k_2(t), \lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), \lambda_{21}(t), \lambda_{22}(t))\\ &+ \lambda_{11}(t)\dot{c_1}(t) + \lambda_{22}(t)\dot{c_2}(t),\end{aligned} \tag{4.18}$$

y sustituyendo valores obtenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_P(q_1(t), q_2(t), k_1(t), k_2(t), &c_1(t), c_2(t), \lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), \lambda_{21}(t), \lambda_{22}(t))\\ &= \sum_{j=1}^{2}(-q_j(t)^2 + (a - c_j(t))q_j(t) - k_j(t)^2) - sq_1(t)q_2(t)\\ &+ \beta_1(\lambda_{11}(t) - \lambda_{12}(t))k_2(t) + \beta_2(\lambda_{22}(t) - \lambda_{21}(t))k_1(t)\\ &+ \lambda_{11}(t)(-k_1(t) - \beta_1 k_2(t) + \gamma c_1(t))\\ &+ \lambda_{22}(t)(-k_2(t) - \beta_2 k_1(t) + \gamma c_2(t)).\end{aligned}$$

Ahora de la Definición 3.1.2, se tiene una manera de verificar que la función propuesta es efectivamente un potencial hamiltoniano para el juego del duopolio. Para ello debemos verificar que:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial x_M}, \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial u_N}\right) = \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H_M}{\partial x_M}, \frac{\partial H_1}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H_N}{\partial u_N}\right),$$

es decir, debemos verificar que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial q_1} = \frac{\partial H_1}{\partial q_1}, &&\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial q_2} = \frac{\partial H_2}{\partial q_2}, &&\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial k_1} = \frac{\partial H_1}{\partial k_1},\\ &\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial k_2} = \frac{\partial H_2}{\partial k_2}, &&\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial c_1} = \frac{\partial H_1}{\partial c_1}, &&\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial c_2} = \frac{\partial H_2}{\partial c_2}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

De las condiciones de primer orden se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial q_1} &= a - 2q_1(t) - sq_2(t) - c_1(t), \\
\frac{\partial H_2}{\partial q_2} &= a - 2q_2(t) - sq_1(t) - c_2(t), \\
\frac{\partial H_1}{\partial k_1} &= -2k_1(t) - \lambda_{11}(t) - \beta_2\lambda_{12}(t), \\
\frac{\partial H_2}{\partial k_2} &= -2k_2(t) - \lambda_{22}(t) - \beta_1\lambda_{21}(t).
\end{aligned}$$

Además, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial c_1} &= -q_1(t) + \lambda_{11}(t)\gamma, \\
\frac{\partial H_2}{\partial c_2} &= -q_2(t) + \lambda_{22}(t)\gamma.
\end{aligned}$$

Calculemos las derivadas parciales de $\mathcal{H}_P$ respecto de los controles y estados para verificar que se cumple la igualdad en la Definición 3.1.2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial q_1} &= a - 2q_1(t) - sq_2(t) - c_1(t), \\
\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial q_2} &= a - 2q_2(t) - sq_1(t) - c_2(t), \\
\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial k_1} &= -2k_1(t) + \beta_2(\lambda_{22}(t) - \lambda_{21}(t)) + \lambda_{11}(t)(-1) + \lambda_{22}(t)(-\beta_2) \\
&= -2k_1(t) + \beta_2\lambda_{22}(t) - \beta_2\lambda_{21}(t) - \lambda_{11}(t) - \beta_2\lambda_{22}(t) \\
&= -2k_1(t) - \lambda_{11}(t) - \beta_2\lambda_{12}(t), \\
\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial k_2} &= -2k_1(t) + \beta_1(\lambda_{11}(t) - \lambda_{12}(t)) + \lambda_{11}(t)(-\beta_1) + \lambda_{22}(t)(-1) \\
&= -2k_2(t) - \lambda_{22}(t) - \beta_1\lambda_{21}(t), \\
\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial c_1} &= -q_1(t) + \lambda_{11}(t)\gamma, \\
\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial c_2} &= -q_2(t) + \lambda_{22}(t)\gamma.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_P$ es efectivamente la función potencial hamiltoniana para el juego del duopolio.

La solución del potencial hamiltoniano se puede describir como un sistema de ecuaciones diferenciales de control y variables de estado, lo cual se hace comúnmente en la modelación de los juegos diferenciales. Las condiciones de primer orden nos permiten expresar los controles óptimos como funciones del estado y de los costos del problema potencial.

De las condiciones (4.8), (4.12) y de (4.9) y (4.13) tenemos:

$$\begin{cases} a - 2q_1(t) - sq_2(t) - c_1(t) = 0, & (I) \\ a - 2q_2(t) - sq_1(t) - c_2(t) = 0, & (II) \\ -2k_1(t) - \lambda_{11}(t) - \beta_2\lambda_{12}(t) = 0, & (III) \\ -2k_2(t) - \lambda_{22}(t) - \beta_1\lambda_{21}(t) = 0. & (IV) \end{cases}$$

De (I) se tiene que:

$$q_1(t) = \frac{a - sq_2(t) - c_1(t)}{2}. \qquad (V)$$

Sustituyendo en (II) se tiene:

$$\begin{aligned} a - 2q_2(t) - s\left(\frac{a - sq_2(t) - c_1(t)}{2}\right) - c_2(t) &= -2q_2(t) + \frac{s^2 q_2(t)}{2} + a \\ &\quad - \left(\frac{as - sc_1(t)}{2}\right) - c_2(t) \\ &= q_2(t)\left[\frac{s^2 - 4}{2}\right] + \left(\frac{2a - as + sc_1(t) - 2c_2(t)}{2}\right). \end{aligned}$$

Despejando $q_2(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} q_2(t)\left[\frac{s^2 - 4}{2}\right] &= \frac{-2a + as - sc_1(t) + 2c_2(t)}{2}. \\ q_2(t) &= \frac{-\left(\frac{2a - as - c_1(t) + 2c_2(t)}{2}\right)}{\left(\frac{s^2 - 4}{2}\right)} \\ &= \frac{(s-2)a - sc_1(t) + 2c_2(t)}{s^2 - 4}. \end{aligned}$$

Sustituyendo éste valor de $q_2(t)$ en (V) se tiene:

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= \frac{a - s\left(\frac{(s-2)a - sc_1(t) + 2c_2(t)}{s^2-4}\right) - c_1(t)}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{a(s^2-4) - s[(s-2)a - sc_1(t) + 2c_2(t)] - c_1(t)(s^2-4)}{s^2-4}\right)}{2} \\
&= \frac{a(s^2-4) - s\left[(s-2)a - sc_1(t) + 2c_2(t)\right] - c_1(t)(s^2-4)}{2(s^2-4)} \\
&= \frac{as^2 - 4a - as^2 + 2as + c_1(t)s^2 - 2sc_2(t) - s^2c_1(t) + 4c_1(t)}{2(s^2-4)} \\
&= \frac{-4a + 2as - 2sc_2(t) + 4c_1}{2(s^2-4)} \\
&= \frac{(s-2)a + 2c_1(t) - sc_2(t)}{s^2-4}.
\end{aligned}$$

Despejando k_1 y k_2 de (III) y (IV) respectivamente se tiene que:

$$\begin{aligned}
k_1(t) &= \frac{-\lambda_{11}(t) - \beta_2\lambda_{12}(t)}{2}, \\
k_2(t) &= \frac{-\lambda_{22}(t) - \beta_1\lambda_{21}(t)}{2}.
\end{aligned}$$

Resumiendo se tiene que:

$$\begin{cases}
q_1(t) = \dfrac{(s-2)a + 2c_1(t) - sc_2(t)}{s^2-4}, \\
q_2(t) = \dfrac{(s-2)a - sc_1(t) + 2c_2(t)}{s^2-4}, \\
k_1(t) = -\dfrac{\lambda_{11}(t) + \beta_2\lambda_{12}(t)}{2}, \\
k_2(t) = -\dfrac{\lambda_{22}(t) + \beta_1\lambda_{21}(t)}{2}.
\end{cases}$$

Derivando (4.8) y (4.12) con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial q_1}\right) &= \frac{d}{dt}\left(a - 2q_1(t) - sq_2(t) - c_1(t)\right), \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial q_2}\right) &= \frac{d}{dt}\left(a - 2q_2(t) - sq_1(t) - c_2(t)\right).
\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} -2\dot{q}_1(t) - s\dot{q}_2(t) - \dot{c}_1(t) = 0, \\ -2\dot{q}_2(t) - s\dot{q}_1(t) - \dot{c}_2(t) = 0, \end{cases}$$

o bien, reescribiendo el sistema tenemos:

$$\begin{cases} -2\dot{q}_1(t) - s\dot{q}_2(t) = \dot{c}_1(t), \\ -s\dot{q}_1(t) - 2\dot{q}_2(t) = \dot{c}_2(t). \end{cases}$$

Para resolver el sistema primero calculemos el determinante el cuál esta dado por:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -2 & -s \\ -s & -2 \end{bmatrix} = (-2)(-2) - (-s)(-s) = 4 - s^2.$$

Dado que $s \in [0,1]$, se garantiza que $4 - s^2 > 0$.

Resolviendo para $\dot{q}_1(t)$ se tiene:

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{c}_1(t) & -s \\ \dot{c}_2(t) & -2 \end{vmatrix}}{4 - s^2} = \frac{-2\dot{c}_1(t) + s\dot{c}_2(t)}{4 - s^2},$$

factorizando el signo (-)

$$= \frac{2\dot{c}_1 - s\dot{c}_2}{s^2 - 4}.$$

Pero de (4.2) y (4.3) conocemos el valor de $\dot{c}_1(t)$ y $\dot{c}_2(t)$ respectivamente. Sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= \frac{2\left(-k_1(t) - \beta_1 k_2(t) + \gamma c_1(t)\right) - s\left(-k_2(t) - \beta_2 k_1(t) + \gamma c_2(t)\right)}{s^2 - 4} \\ &= \frac{-2k_1(t) - 2\beta_1 k_2(t) + 2\gamma c_1(t) + sk_2(t) + s\beta_2 k_1(t) - s\gamma c_2(t)}{s^2 - 4} \\ &= \frac{(\beta_2 s - 2)k_1(t) + (s - 2\beta_1)k_2(t) + \gamma(2c_1(t) - sc_2(t))}{s^2 - 4}. \end{aligned}$$

De manera similar para $q_2(t)$ se tiene:

$$\dot{q}_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} -2 & \dot{c}_1(t) \\ -s & \dot{c}_2(t) \end{vmatrix}}{4 - s^2} = \frac{-2\dot{c}_2(t) + s\dot{c}_1(t)}{4 - s^2},$$

factorizando el signo (-):

$$\dot{q}_2(t) = \frac{2\dot{c}_2(t) - s\dot{c}_1(t)}{s^2 - 4}.$$

Sustituyendo el valor de $\dot{c}_1(t)$ y $\dot{c}_2(t)$ respectivamente se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_2(t) &= \frac{2\left(-k_2(t) - \beta_2 k_1(t) + \gamma c_2(t)\right) - s\left(-k_1(t) - \beta_1 k_2(t) + \gamma c_1(t)\right)}{s^2 - 4} \\
&= \frac{-2k_2(t) - 2\beta_2 k_1(t) + 2\gamma c_2(t) + sk_1(t) + s\beta_1 k_2(t) - s\gamma c_1(t)}{s^2 - 4} \\
&= \frac{(s - 2\beta_2)k_1(t) + (\beta_1 s - 2)k_2(t) + \gamma(-sc_1(t) + 2c_2(t))}{s^2 - 4}.
\end{aligned}$$

Así se obtiene el siguiente par de ecuaciones para las cantidades $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_1(t) = \frac{(\beta_2 s - 2)k_1(t) + (s - 2\beta_1)k_2(t) + \gamma(2c_1(t) - sc_2(t))}{s^2 - 4}, \tag{4.20}$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{(s - 2\beta_2)k_1(t) + (\beta_1 s - 2)k_2(t) + \gamma(-sc_1(t) + 2c_2(t))}{s^2 - 4}. \tag{4.21}$$

Derivando también (4.9) y (4.13) con respecto del tiempo se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial k_1}\right) &= \frac{d}{dt}(-2k_1(t) - \lambda_{11}(t) - \beta_2\lambda_{12}(t)), \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial k_2}\right) &= \frac{d}{dt}(-2k_2(t) - \lambda_{22}(t) - \beta_1\lambda_{21}(t)).
\end{aligned}$$

Esto es:

$$\begin{cases}
-2\dot{k}_1(t) - \dot{\lambda}_{11}(t) - \beta_2\dot{\lambda}_{12}(t), \\
-2\dot{k}_2(t) - \dot{\lambda}_{22}(t) - \beta_1\dot{\lambda}_{21}(t).
\end{cases}$$

Despejando los valores de $\dot{\lambda}_{11}(t)$ y $\dot{\lambda}_{22}(t)$ tenemos:

$$\dot{\lambda}_{11}(t) = -2\dot{k}_1(t) - \beta_2\dot{\lambda}_{12}(t), \tag{4.22}$$

$$\dot{\lambda}_{22}(t) = -2\dot{k}_2(t) - \beta_1\dot{\lambda}_{21}(t). \tag{4.23}$$

De las ecuaciones (4.10) y (4.15) conocemos los valores de $\dot{\lambda}_{11}(t)$ y $\dot{\lambda}_{22}(t)$, por lo que, sustituyendo se tiene:

$$(\rho-\gamma)\lambda_{11}+q_1(t)=-2\dot{k}_1(t)-\beta_2\dot{\lambda}_{12}(t), \tag{4.24}$$
$$(\rho-\gamma)\lambda_{22}+q_2(t)=-2\dot{k}_2(t)-\beta_1\dot{\lambda}_{21}(t). \tag{4.25}$$

De (4.22) y (4.23), integrando respecto al tiempo se tiene:

$$\lambda_{11}(t)=-2k_1(t)-\beta_2\lambda_{12}(t),$$
$$\lambda_{22}(t)=-2k_2(t)-\beta_1\lambda_{21}(t).$$

Además de (4.11) y (4.14) se conocen los valores de $\dot{\lambda}_{12}(t)$ y $\dot{\lambda}_{21}(t)$. Sustituyendo en (4.24) y (4.25) se tiene:

$$(\rho-\gamma)[-2k_1(t)-\beta_2\lambda_{12}(t)]+q_1(t)=-2\dot{k}_1(t)-\beta_2[(\rho-\gamma)\lambda_{12}(t)], \tag{a}$$
$$(\rho-\gamma)[-2k_2(t)-\beta_1\lambda_{21}(t)]+q_2(t)=-2\dot{k}_2(t)-\beta_1[(\rho-\gamma)\lambda_{21}(t)]. \tag{b}$$

Trabajemos sólo con (a):

$$\begin{aligned}-2\dot{k}_1(t)&=(\rho-\gamma)[-2k_1(t)-\beta_2\lambda_{12}(t)]+q_1(t)+\beta_2[(\rho-\gamma)\lambda_{12}(t)]\\&=(\rho-\gamma)\left(-2k_1(t)-\beta_2\lambda_{12}(t)+\beta_2\lambda_{12}\right)+q_1(t)\\&=(\rho-\gamma)(-2k_1(t))+q_1(t).\end{aligned}$$

Despejando $\dot{k}_1(t)$ se tiene:

$$\dot{k}_1(t)=\frac{(\rho-\gamma)(-2k_1(t))+q_1(t)}{-2},$$

con lo cual:

$$\dot{k}_1(t)=(\rho-\gamma)k_1(t)-\frac{q_1(t)}{2}.$$

De manera similar para (b):

$$\begin{aligned}
-2\dot{k}_2(t) &= (\rho-\gamma)[-2k_2(t)-\beta_1\lambda_{21}(t)]+q_2(t)+\beta_1[(\rho-\gamma)\lambda_{21}(t)]\\
&= (\rho-\gamma)\left(-2k_2(t)-\beta_1\lambda_{21}(t)+\beta_1\lambda_{21}(t)\right)+q_2(t)\\
&= (\rho-\gamma)(-2k_2(t))+q_2(t)\\
&= \frac{(\rho-\gamma)(-2k_2(t))+q_2(t)}{-2},\\
\dot{k}_2(t) &= (\rho-\gamma)k_2(t)-\frac{q_2(t)}{2}.
\end{aligned}$$

De esta manera se ha obtenido un par de ecuaciones para las inversiones $k_i(t)$:

$$\begin{cases}
\dot{k}_1(t) =(\rho-\gamma)k_1(t)-\dfrac{q_1(t)}{2},\\
\dot{k}_2(t) =(\rho-\gamma)k_2(t)-\dfrac{q_2(t)}{2}.
\end{cases} \tag{4.26}$$

Sustituyendo los valores de $q_1(t)$ y $q_2(t)$ obtenidos previamente en (4.26) se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{k}_1(t) =&(\rho-\gamma)k_1(t)-\frac{\left(\frac{(s-2)a+2c_1(t)-sc_2(t)}{s^2-4}\right)}{2}\\
=&(\rho-\gamma)k_1(t)-\frac{(s-2)a+2c_1(t)-sc_2(t)}{2(s^2-4)}.
\end{aligned}$$

De manera similar para $\dot{k}_2(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{k}_2(t) =&(\rho-\gamma)k_2(t)-\frac{\left(\frac{(s-2)a-sc_1(t)+2c_2(t)}{s^2-4}\right)}{2}\\
=&(\rho-\gamma)k_2(t)-\frac{(s-2)a-sc_1(t)+2c_2(t)}{2(s^2-4)}.
\end{aligned}$$

Así el sistema dinámico estado-control describe la dinámica del juego diferencial como sigue:

$$(**)=\begin{cases}
\dot{c}_1(t) =-k_1(t)-\beta_1k_2(t)+\gamma c_1(t),\\
\dot{c}_2(t) =-k_2(t)-\beta_2k_1(t)+\gamma c_2(t),\\
\dot{k}_1(t) =(\rho-\gamma)k_1(t)-\dfrac{(s-2)a+2c_1(t)-sc_2(t)}{2(s^2-4)},\\
\dot{k}_2(t) =(\rho-\gamma)k_2(t)-\dfrac{(s-2)a-sc_1(t)+2c_2(t)}{2(s^2-4)}.
\end{cases}$$

Este sistema tiene un único estado estacionario dado por:

$$
\begin{aligned}
c_1^{ss} &= \Upsilon\{\beta_1\beta_2 + 2(\beta_1+1)\gamma(2-s)(\gamma-\rho) - 1\},\\
c_2^{ss} &= \Upsilon\{\beta_1\beta_2 + 2(\beta_2+1)\gamma(2-s)(\gamma-\rho) - 1\},\\
k_1^{ss} &= \Upsilon\gamma[\beta_1 + 2\gamma(2-s)(\gamma-\rho) - 1],\\
k_2^{ss} &= \Upsilon\gamma[\beta_2 + 2\gamma(2-s)(\gamma-\rho) - 1],
\end{aligned}
$$

donde

$$
\Upsilon = \frac{a}{2\gamma(\gamma-\rho)[8\gamma(\rho-\gamma) + 2\gamma s^2(\gamma-\rho) - s\beta_2 + 4] + \beta_1[\beta_2 + 2\gamma s(\rho-\gamma)] - 1}. \tag{4.27}
$$

La matriz jacobiana del sistema (**) es:

$$
J = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \dot{k}_1}{\partial k_1} & \frac{\partial \dot{k}_1}{\partial k_2} & \frac{\partial \dot{k}_1}{\partial c_1} & \frac{\partial \dot{k}_1}{\partial c_2}\\
\frac{\partial \dot{k}_2}{\partial k_1} & \frac{\partial \dot{k}_2}{\partial k_2} & \frac{\partial \dot{k}_2}{\partial c_1} & \frac{\partial \dot{k}_2}{\partial c_2}\\
\frac{\partial \dot{c}_1}{\partial k_1} & \frac{\partial \dot{c}_1}{\partial k_2} & \frac{\partial \dot{c}_1}{\partial c_1} & \frac{\partial \dot{c}_1}{\partial c_2}\\
\frac{\partial \dot{c}_2}{\partial k_1} & \frac{\partial \dot{c}_2}{\partial k_2} & \frac{\partial \dot{c}_2}{\partial c_1} & \frac{\partial \dot{c}_2}{\partial c_2}
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
\rho-\gamma & 0 & -\left(\frac{1}{s^2-4}\right) & -\left(\frac{-s}{2(s^2-4)}\right)\\
0 & \rho-\gamma & -\left(\frac{-s}{2(s^2-4)}\right) & -\left(\frac{1}{s^2-4}\right)\\
-1 & -\beta_1 & \gamma & 0\\
-\beta_2 & -1 & 0 & \gamma
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\rho-\gamma & 0 & \frac{1}{4-s^2} & -\frac{s}{2(4-s^2)}\\
0 & \rho-\gamma & -\frac{s}{2(4-s^2)} & \frac{1}{4-s^2}\\
-1 & -\beta_1 & \gamma & 0\\
-\beta_2 & -1 & 0 & \gamma
\end{bmatrix}
$$

Calculemos los eigenvalores, para lo cual resolvemos $|J - eI| = 0$, es decir:

$$
|J - eI| = \begin{vmatrix}
(\rho-\gamma)-e & 0 & \frac{1}{4-s^2} & -\frac{s}{2(4-s^2)}\\
0 & (\rho-\gamma)-e & -\frac{s}{2(4-s^2)} & \frac{1}{4-s^2}\\
-1 & -\beta_1 & \gamma-e & 0\\
-\beta_2 & -1 & 0 & \gamma-e
\end{vmatrix} = 0
$$

Resolviendo[3] se tiene:

[3] Usando la propiedad de que $det(A) = det(A^t)$, donde A^t indica la transpuesta de la matriz A, resolvemos por la primer columna.

$$|J-eI| = (\rho-\gamma-e)\begin{vmatrix} (\rho-\gamma)-e & -\beta_1 & -1 \\ -\frac{s}{2(4-s^2)} & \gamma-e & 0 \\ \frac{1}{4-s^2} & 0 & \gamma-e \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} 0 & (\rho-\gamma)-e & -1 \\ \frac{1}{4-s^2} & -\frac{s}{2(4-s^2)} & 0 \\ -\frac{s}{2(4-s^2)} & \frac{1}{4-s^2} & \gamma-e \end{vmatrix}$$

$$-(-\beta_2)\begin{vmatrix} 0 & (\rho-\gamma)-e & -\beta_1 \\ \frac{1}{4-s^2} & -\frac{s}{2(4-s^2)} & \gamma-e \\ -\frac{s}{2(4-s^2)} & \frac{1}{4-s^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\rho-\gamma-e)\left[(\rho-\gamma-e)(\gamma-e)^2+\beta_1\left(\frac{-s(\gamma-e)}{2(4-s^2)}\right)+\left(\frac{\gamma-e}{4-s^2}\right)\right]$$
$$-\left[-(\rho-\gamma-e)\left(\frac{\gamma-e}{4-s^2}\right)-\left(\frac{1}{(4-s^2)^2}-\frac{s^2}{4(4-s^2)^2}\right)\right]$$
$$+\beta_2\left[(\rho-\gamma-e)\left(\frac{-s(\gamma-e)}{2(4-s^2)}\right)-\beta_1\left(\frac{1}{(4-s^2)^2}-\frac{s^2}{4(4-s^2)^2}\right)\right],$$

factorizando $(\rho-\gamma-e)(\gamma-e)$:

$$= (\rho-\gamma-e)(\gamma-e)\left[(\rho-\gamma-e)(\gamma-e)+\beta_1\left(\frac{-s}{2(4-s^2)}\right)+\left(\frac{1}{4-s^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4-s^2}\right)-\beta_2\left(\frac{s}{2(4-s^2)}\right)\right]+\frac{1}{(4-s^2)^2}-\frac{s^2}{2(4-s^2)}$$
$$-\beta_1\beta_2\left(\frac{1}{(4-s^2)^2}-\frac{s^2}{4(4-s^2)^2}\right),$$

realizando la suma dentro de los corchetes:

$$= (\rho-\gamma-e)(\gamma-e)\left[\frac{(\rho-\gamma-e)(\gamma-e)(2(4-s^2))-s(\beta_1+\beta_2)+4}{2(4-s^2)}\right]$$
$$+\frac{1}{(4-s^2)^2}\left[s^2(\beta_1\beta_2-1)+4(1-\beta_1\beta_2)\right],$$

reescribiendo se tiene:

$$= \frac{(\rho-\gamma-e)(\gamma-e)}{2(4-s^2)}\left[(\rho-\gamma-e)(\gamma-e)(2(4-s^2))-s(\beta_1+\beta_2)+4\right]$$
$$+\frac{1}{(4-s^2)^2}\left[s^2(\beta_1\beta_2-1)+4(1-\beta_1\beta_2)\right],$$

factorizando el término $\frac{1}{2(4-s^2)^2}$:

$$= \frac{1}{2(4-s^2)^2}[(4-s^2)(\rho-\gamma-e)(\gamma-e)[(\rho-\gamma-e)(\gamma-e)(2(4-s^2))-s(\beta_1+\beta_2)+4]$$
$$+2s^2(\beta_1\beta_2-1)+8(1-\beta_1\beta_2)],$$

desarrollando se tiene:

$$= \frac{1}{2(4-s^2)^2}[(4-s^2)[\beta_1\beta_2-2\beta_1\gamma^2 s+2\beta_1\gamma\rho s-2\beta_1 e\rho s+2\beta_1 e^2 s-2\beta_2\gamma^2 s+2\beta_2\gamma\rho s$$
$$-2\beta_2 e\rho s+2\beta_2 e^2 s+4\gamma^4 s^2-16\gamma^4-8\gamma^3\rho s^2+32\gamma^3\rho+32e^2\gamma^2+4\gamma^2\rho^2 s^2-16\gamma^2\rho^2$$
$$-32\gamma^2 e\rho+8\gamma^2 e\rho s^2-8\gamma^2 e^2 s^2+8\gamma^2+32\gamma e\rho^2-8\gamma e\rho^2 s^2-32\gamma e^2\rho+8\gamma e^2\rho s^2-8\gamma\rho$$
$$-16e^4-8e^2+8e\rho-8e^3\rho s^2+4e^4 s^2-1].$$

Finalmente agrupando términos obtenemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}
&= e^4(4s^2-16)+e^3[32\rho-8\rho s^2]\\
&+e^2[2\beta_1 s+2\beta_2 s+32\gamma^2-8\gamma^2 s^2-32\gamma\rho+8\gamma\rho s^2-8-16\rho^2+4\rho^2 s^2]\\
&+e[2\beta_1\rho s-2\beta_2\rho s-32\gamma^2\rho+8\gamma^2\rho s^2+32\gamma\rho^2-8\gamma\rho^2 s^2+8\rho]\\
&+\beta_1\beta_2-2\beta_1\gamma^2 s+2\beta_1\gamma\rho s-2\beta_2\gamma^2 s+2\beta_2\gamma\rho s+4\gamma^4 s^2-16\gamma^4-8\gamma^3\rho s^2\\
&+32\gamma^3\rho+8\gamma^2-8\gamma\rho-1\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación característica, los eigenvalores son:

$$e_{1,2,3,4} = \frac{\rho}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Theta \pm \sqrt{\Omega}}{4-s^2}} \tag{4.28}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Theta =& s(\beta_1+\beta_2)-s^2(\rho-2\gamma)^2+4(\rho-2\gamma)^2-4\\
\Omega =& 16\beta_1\beta_2+s^2[(\beta_1-\beta_2)^2+4]-8s(\beta_1+\beta_2).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Las condiciones $\Theta > 0$, $\Omega > 0$ y $|J| > 0$ son necesarias y suficientes para que todos los valores propios sean reales, dos positivos y dos negativos. En tal caso, el estado estacionario que representa el equilibrio de Nash del juego diferencial original tiene un punto silla con raíces reales.

Alternativamente, la solución del potencial hamiltoniano puede expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales de costos y estados dado por (4.2), (4.3), (4.10) y (4.15). Las ecuaciones de costo restantes involucran a los multiplicadores cruzados, es decir (4.11) y (4.14), que admiten las siguientes soluciones:

$$\lambda_{12}^*(t) = \lambda_{12}^*(0)e^{(\rho-\gamma)t}, \qquad \lambda_{21}^*(t) = \lambda_{21}^*(0)e^{(\rho-\gamma)t}. \tag{4.30}$$

Las ecuaciones anteriores (4.30) permiten el caso especial en el que los multiplicadores cruzados son idénticamente cero, $\lambda_{12}^*(t)$, $\lambda_{21}^*(t) = 0$ en cuyo caso el potencial hamiltoniano está dado por:

$$\begin{aligned} H_P^*(q_1(t), q_2(t), k_1(t), k_2(t), & c_1(t), c_2(t), \lambda_{11}(t), 0, 0, \lambda_{22}(t)) \\ &= \hat{P}(q_1(t), q_2(t), k_1(t), k_2(t)) \\ &+ \beta_1\lambda_{11}(t)k_2(t) + \beta_2\lambda_{22}(t)k_1(t) \\ &+ \lambda_{11}(t)\dot{c_1}(t) + \lambda_{22}(t)\dot{c_2(t)}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

En tal caso, la función (4.31) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} H_P^*(q_1(t), q_2(t), k_1(t), k_2(t), & c_1(t), c_2(t), \lambda_{11}(t), 0, 0, \lambda_{22}(t)) \\ &= \hat{P}(q_1(t), q_2(t), k_1(t), k_2(t)) \\ &+ \lambda_{11}(t)(-k_1(t) + \gamma c_1(t)) \\ &+ \lambda_{22}(t)(-k_2(t) + \gamma c_2(t)). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Esta expresión es equivalente a la función hamiltoniana de un único agente que elige 4 variables estratégicas con el fin de maximizar la función objetivo (potencial)

$$\hat{P}(q_1, q_2, k_1, k_2)$$

sujeta a dos restricciones dinámicas desacopladas.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se han presentado algunos conceptos básicos para entender la teoría de juegos en general. Se presentaron también los conceptos de solución dependiendo del contexto en que se esté abordando el problema, es decir, ya sea para juegos estáticos o juegos dinámicos. También se mostró la conexión que tienen los PCO con los juegos dinámicos, los cuales, cuando se aborda el caso a tiempo continuo se conocen como juegos diferenciales. Se realizaron o bien, se desarrollaron más a fondo las demostraciones de este escrito. Nuestra atención se centró además, en estudiar juegos potenciales dinámicos a tiempo continuo, en particular en conocer resultados que garanticen la existencia de la función potencial para un juego.

En el contexto de los juegos estáticos, la existencia de la función potencial ocasiona que un juego de n jugadores se pueda ver como un problema de un sólo jugador. Así, la existencia de esta función potencial simplifica el proceso de solución de un juego, pues en vez de tratar con n problemas de optimización, sólo nos enfocamos en encontrar los óptimos de la función potencial.

Con base a esto se espera que en el contexto de los juegos potenciales dinámicos a tiempo continuo, o simplemente, juegos diferenciales potenciales, la función potencial hamiltoniana siga el mismo comportamiento que en el caso estático, es decir, se busca una función potencial hamiltoniana tal que convierta el juego de n jugadores en un problema de un sólo jugador. En efecto, con los resultados que se presentaron en el Capítulo 3, se muestran las condiciones suficientes para que un juego diferencial admita una función potencial hamiltoniana que permita representar el juego diferencial original como un PCO. Esto implica que en este tipo de juegos, es como si los jugadores estuvieran maximizando conjuntamente una única función en vez de competir por maximizar sus respectivos pagos. Esta es la principal ventaja que se tiene al estudiar a los juegos potenciales que admitan una función potencial hamiltoniana, pues la existencia de esta función puede hacernos pensar en trasladar un juego no cooperativo en uno cooperativo, desde el punto de vista que sólo un problema de optimización se estaría tratando.

Si bien, para aterrizar ideas en el Capítulo 4 se desarrolló un ejemplo en el que el juego admite una función potencial hamiltoniana, lo cuál permite tratar al juego como un PCO y resolverlo usando el Principio del Máximo, aún hay mucho trabajo que se puede abordar, pues la existencia de una función potencial hamiltoniana para juegos dinámicos a tiempo continuo, para el caso estocástico por ejemplo, no ha sido estudiado tanto como la existencia de la función potencial para los juegos estáticos.

Apéndice A

Representación de un juego

Los juegos se clasifican en diversas categorías, la cuales determinan qué métodos particulares se podrán aplicar para resolverlos. En el Capítulo 1, se presento la forma normal de un juego, por se la más empleada. En éste apéndice se presenta la forma extensiva de representar un juego.

A.1. Juegos en forma extensiva

La forma extensiva de un juego, también llamado árbol del juego, es más detallada que la forma normal o estratégica de un juego mencionada anteriormente. Esta es una descripción completa de cómo se juega el juego con el tiempo, lo cual incluye:

- El orden en el que los jugadores toman acciones.
- La información que los jugadores tienen en el momento en que deben tomar esas acciones.
- El momento en el cual, cualquier incertidumbre en la situación se resuelva.

De manera gráfica, un juego en forma extensiva se representa mediante un grafo, denominado *árbol del juego*. Para el caso de dos jugadores, cada uno con 2 estrategias posibles, el árbol del juego es el mostrado en la Figura A.1.1.

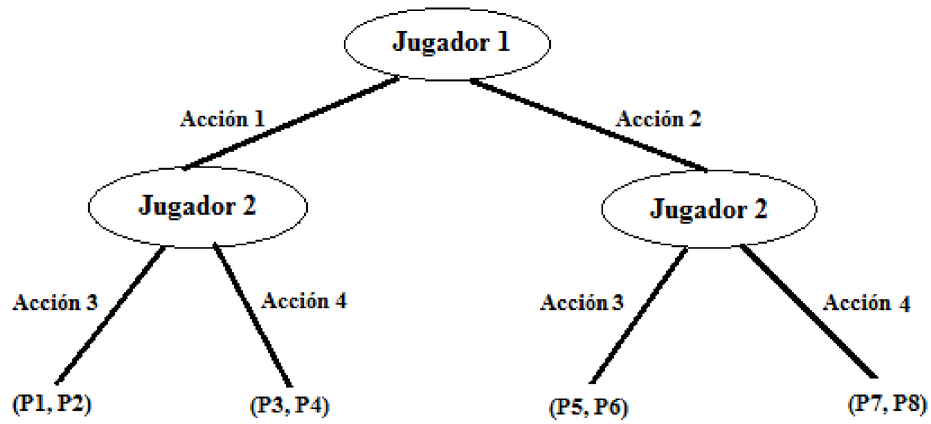

Figura A.1.1: Representación en forma extensiva.

En este árbol, el nodo raíz corresponde a la primer jugada del jugador I. Los nodos corresponden al jugador que esté jugando en ese momento y las aristas que salen de cada nodo indican las posibles acciones que dicho jugador tiene en ese momento del juego. De manera natural, un juego se inicia en el nodo raíz, y de ser finito, acaba en un nodo terminal, el cual contiene el pago dado al llegar a ese nodo.

Con base a lo anterior, un juego en forma extensiva ahora muestra:

- Quién juega $\longrightarrow$ Un jugador es el que tiene un nodo de decisión en el juego.
- Cómo juegan $\longrightarrow$ Las ramas que parten de un nodo de decisión representan las posibles elecciones disponibles en ese momento del juego.
- Cuándo juegan $\longrightarrow$ Un nodo de decisión sólo se alcanza cuando las elecciones previas se han realizado.

Un juego en forma extensiva puede ser analizado directamente, o se puede convertir en una forma estratégica equivalente.

De manera formal, un juego extensivo de n jugadores es una 7-tupla,

$$\Gamma := (X, E, P, W, C, p, U),$$

cuyos elementos son:

1. (X, E) es el árbol del juego donde X es el conjunto de nodos donde los jugadores toman decisiones y E el conjunto de aristas o ramas. Llamamos al conjunto de los nodos terminales, es decir donde el juego acaba, el conjunto Z.

2. $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$. Esta es una partición de todos los nodos excepto los terminales, es decir, $X \backslash Z$, donde se especifica en qué nodo juega qué jugador.

3. $W := \{W_1, ..., W_n\}$, donde W_i es a su vez una partición de P_i. Cada $w \in W_i$ representa el conjunto de nodos en los que el jugador i tiene la misma información y por tanto no los puede distinguir.

4. C. Esta herramienta está en la estructura del juego extensivo Γ para asegurarse que en cada nodo de un conjunto de información del jugador i, este siempre pueda escoger las mismas acciones sin importar cuál sea el nodo en el que en realidad se encuentre. Para lo que sigue notamos el conjunto de acciones que un jugador puede tomar en el conjunto de información w como C_w.

5. p. Esta es una función que asigna a cada $x \in P_0$ una medida de probabilidad p_x definida sobre las ramas que nacen en x. Intuitivamente, es con qué probabilidad juega cada elección la naturaleza cada vez que ésta juega.

6. $U := (U_1, \ldots, U_n)$, donde cada $U_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ es el pago que recibe el jugador i cuando se llega a cada nodo terminal.

En el Capítulo 1 se presentó el dilema del prisionero en forma normal, este juego es posible representarlo en forma extensiva como lo veremos a continuación.

Sin embargo, para los fines de este escrito, el análisis de éste juego usando esta representación queda fuera de nuestros alcances, puesto que para un mejor entendimiento del mismo se necesitan otros conceptos de solución diferentes a los presentados en este escrito. En [27] se muestra un análisis del dilema del prisionero en forma extensiva y con repetición[1].

[1]Los juegos con repetición se encuentran dentro de la clase de los juegos repetidos, ya sea con repetición finita o infinita.

Dadas las mismas condiciones que en el *Ejemplo 1.1*, la forma extensiva del dilema del prisionero es:

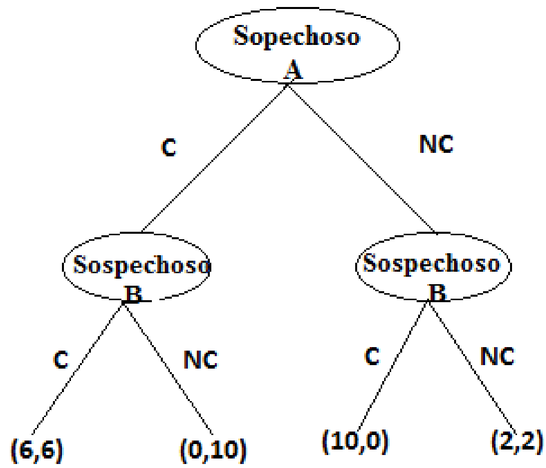

Figura A.1.2: Representación en forma extensiva del dilema del prisionero.

Apéndice B

Algunos modelos importantes en la teoría de juegos.

En esta sección presentaremos algunos modelos más que son clásicos dentro de la teoría de juegos, como lo son *La batalla de los sexos*, y el *Modelo Halcón-Paloma*. Asimismo se mostrará un breve análisis de cada uno de ellos.

B.1. Batalla de los sexos

En el Capítulo 1 se presentó el modelo del dilema del prisionero, ahora el segundo modelo a analizar es el que se plantea en el siguiente enunciado.

Ejemplo B.1. Una pareja tiene que decidir sobre donde ir la próxima noche. Mientras que el hombre (ÉL) desea ir a un partido de fútbol, la mujer (ELLA) prefiere ir al cine. Por circunstancias accidentales, cada uno de ellos debe decidir ir al partido de fútbol o al cine de forma independiente.

Como ambos prefieren ir juntos hagan lo que hagan, las utilidades respectivas que derivan de sus acciones vienen dadas por la siguiente matriz de pagos.

		ELLA	
		Fútbol	Cine
ÉL	Fútbol	$(1,0)$	$(-1,-1)$
	Cine	$(-1,-1)$	$(0,1)$

Cuadro B.1: Matriz de pagos de la batalla de los sexos.

Una manera de entender los pagos que se concentran en ésta matriz es por ejemplo, para el pago $(1,0)$ obtenido de la elección de la estrategia *Fútbol-Fútbol*, diríamos que ÉL esta satisfecho y ELLA esta conforme[1], en éste caso 1 representaría el estar satisfecho y 0 el estar conforme. Para el pago $(0,1)$, obtenido de la elección de la estrategia *Cine-Cine*, ahora ELLA estaría satisfecha y ÉL estaría conforme. Para cualquiera de los dos casos donde se obtiene el pago $(-1,-1)$, -1 representaría que ninguno de los dos esta satisfecho por el hecho de no estar juntos.

De la matriz de pagos podemos percatarnos que en el caso de que los jugadores no coincidan en sus decisiones, es decir, estemos en la situación *Fútbol-Cine* o *Cine-Fútbol* tanto ÉL como ELLA reciben un pago de -1. Este pago no es óptimo pues cualquiera de las otras dos situaciones mejora su pago[2]. Esto es reflejado del hecho de que prefieren ir juntos a cualquier lugar, ya sea al cine o al fútbol.

Si consideramos la situación *Fútbol-Fútbol*, ÉL recibirá un pago superior al de ELLA, a saber $(1>0)$. De la misma manera si consideramos la situación *Cine-Cine*, ÉL recibirá un pago menor al de ELLA, a saber $(0<1)$. Es decir, para éste juego tenemos dos equibrios de Nash, que son: (Fútbol, Fútbol) y (Cine, Cine).

B.2. Modelo Halcón-Paloma

Otro modelo que es de gran importancia dentro de la Teoría de Juegos es el Modelo Halcón-Paloma. Otros nombres que se le ha dado a este modelo son "Hawk-Dove", "Chicken" y en español es conocido también como "Gallina".

En el lenguaje común asociamos la palabra "halcón" con agresividad, fuerza, tenacidad o decisión y la palabra "paloma" con pasividad, tranquilidad, pureza, paz. Trasladando estos dos palabras al contexto de la teoría de juegos, entenderemos por "halcón" a los

[1] Está conforme en el sentido de que ella prefiere estar con él a estar sola.
[2] Pueden recibir un pago de 1 o 0.

partidarios de estrategias más agresivas mientras que identificamos como "paloma" a los partidarios de estrategias mas pacifistas.

El modelo Halcón-Paloma sirve para analizar situaciones de conflicto entre estrategias agresivas y conciliadoras.

Ejemplo B.2. Dos vehículos se dirigen uno contra otro en la misma línea recta y a gran velocidad. El que frene o se desvíe ha perdido.

La matriz de pagos de éste juego es la siguiente:

		Jugador 2	
		Halcón	Paloma
Jugador 1	Halcón	$(-1,-1)$	$(1,0)$
	Paloma	$(0,1)$	$(0,0)$

Cuadro B.2: Matriz de pagos del modelo Halcón-Paloma.

Si los jugadores eligen la estrategias *Paloma–Paloma*, entonces ambos jugadores llegan a un acuerdo mutuo y en éste caso, nadie tiene consecuencias, por lo que su pago es de cero. Si los jugadores eligen la estrategias *Halcón-Halcón*, entonces ambos jugadores se traicionan y ninguno se retira perdiendo todo, lo cuál evidentemente es perjudicial para ambos, y entonces reciben un pago de -1. En cualquiera de los otros dos casos, sólo uno de los jugadores recibe una ganancia, y será el que opte por la estrategia halcón.

Uno de los campos de aplicación de éste modelo es en la representación de una guerra fría entre dos superpotencias.

- La estrategia Halcón consiste en este caso en proceder a una escalada armamentística y bélica.
- Si un jugador mantiene la estrategia Halcón y el otro elige la estrategia Paloma, el Halcón gana y la Paloma pierde.
- La situación peor para ambos es cuando los dos jugadores se aferran a la estrategia Halcón.

Apéndice C

Hamiltoniano en valor corriente

Antes de presentar el concepto de hamiltoniano en valor corriente es necesario primero dar una mirada breve a los *PCO* con horizonte infinito. La siguiente información fue tomada de [12].

C.1. Teoría de control óptimo con horizonte infinito

En aplicaciones relativas al crecimiento económico se considera un horizonte de planificación infinito, por lo cual al tratar PCO dentro de este contexto aparece el problema conocido como convergencia de las funciones objetivo a la hora de aplicar el principio del máximo.

Si consideramos el problema con horizonte infinito la integral del PCO considerado en la sección 1.3.1 toma la forma:

$$\int_0^\infty f(x(t), u(t), t)dt, \tag{C.1}$$

la cual es ahora una integral impropia que puede tomar un valor finito o infinito.

Sin embargo, en el caso de que la integral tome el valor infinito, es decir, si la integral diverge estaríamos en el caso en que pueda existir más de una trayectoria para la variable de estado y de control que conduzcan a un valor infinito en la integral. Esto traería problemas al momento de determinar cual de ellas es la trayectoria óptima.

Para evitar este tipo de problemas se deben de imponer ciertas condiciones suficientes que garanticen la convergencia de la integral a un valor concreto. Esto nos permitirá entonces determinar la trayectoria óptima para $x^*(t)$ y $u^*(t)$. Dicha condición suele tomar la forma de una tasa de descuento, de manera tal que si en la integral (C.1) $f(x(t), u(t), t)$ toma la forma $G(x(t), u(t), t)e^{-\rho t}$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty f(x(t), u(t), t)dt \\ &= \int_0^\infty G(x(t), u(t), t)e^{-\rho t}dt,\end{aligned}$$

donde $\rho > 0$ es la tasa de descuento y $G(x(t), u(t), t)$ es una función acotada con lo que se garantiza que la integral converge a un valor finito.

C.2. Hamiltoniano en valor corriente

Como una variante del Principio del máximo para PCO con horizonte infinito en los que en la integral aparece el factor de descuento $e^{-\rho t}$ es el que utiliza el denominado hamiltoniano en valor corriente.

La aparición de este término ocasiona que el PCO se exprese ahora como

$$\begin{aligned}\max_{u(t)} & \int_0^\infty G(x(t), u(t), t)e^{-\rho t}dt \\ s.a \quad & \dot{x} = g(x(t), u(t), t) \\ & x(t_0) = x_0, \\ & u(t) \in X.\end{aligned}$$

Por lo cual, el hamiltoniano se reescribe como:

$$H_c(x(t), u(t), t) = G(x(t), u(t), t)e^{-\rho t} + m\dot{x}(t),$$

donde $m = \lambda e^{-\rho t}$.

Notemos que el hamiltoniano dado en la sección 1.3.1 se puede ver como el hamiltoniano en valor corriente expresado en términos del momento cero, es decir

$$\begin{aligned}H_c(x(t), u(t), t) &= G(x(t), u(t), t)e^{-\rho t} + m\dot{x}(t) \\ &= H(x(t), u(t), t)e^{-\rho 0} \\ &= H(x(t), u(t), t).\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del principio del máximo construidas a partir del hamiltoniano en valor corriente están dadas por:

$$\max_{u \in U} H_c, \quad \forall t \in [0, \infty], \tag{C.2}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H_c}{\partial m}, \tag{C.3}$$

$$\dot{m} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} + \rho m, \tag{C.4}$$

con condiciones de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} H_c e^{-\rho t} = 0, \tag{C.5}$$

$$\lim_{t \to \infty} m e^{-\rho t} = 0. \tag{C.6}$$

Apéndice D

Terminología

Duopolio. Es un caso particular de un *oligopolio*, dónde en un mercado, sólo intervienen dos vendedores.

Equilibrio de Nash. El equilibrio en teoría de juegos se define como aquella situación en la cual todos los jugadores han puesto en práctica, y saben que lo han hecho, una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias de los otros. Consecuentemente, ningún jugador tiene ningún incentivo para modificar individualmente su estrategia.

Equilibrio de Nash en estrategias puras. Decimos que un perfil de estrategias s^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras si todos los jugadores juegan con estrategias puras.

Equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Decimos que un perfil de estrategias s^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras almenos un jugador juega con estrategias mixtas.

Estrategias puras. Cada jugador tiene a su disposición un conjunto de estrategias. Si un jugador elige una acción con probabilidad 1 entonces está jugando una estrategia pura.

Estrategias mixtas. Es una generalización de las estrategias puras, usada para describir la selección aleatoria de entre varias posibles estrategias puras, lo que determina siempre una distribución de probabilidad sobre el vector de estrategias de cada jugador.

Función potencial. Es la función que replica el comportamiento de n jugadores en un juego de un solo jugador.

Función Objetivo. Es la función de pago de cada jugador, Margaret S. Slade la nombra función ficticia objetivo.

Función de demanda inversa. Esta función se define como la disposición a pagar de los consumidores sobre un bien en concreto. Es decir, explica cuál es el precio máximo que el consumidor estaría dispuesto a pagar para cada cantidad q.

Investigación y Desarrollo. Puede hacer referencia a la investigación en ciencias aplicadas o bien ciencia básica utilizada para el desarrollo de ingeniería, que persigue con la unión de ambas áreas un incremento de la innovación que conlleve un aumento en las ventas de las empresas.

Juego asimétrico. Son los juegos donde no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambos jugadores.

Juegos de congestionamiento. Definidos por Robert W. Rosenthal en 1973 . En un juego de Congestión definimos jugadores y recursos, donde el pago de cada jugador depende tanto de los recursos que elija y del número de jugadores que ha elegido el mismo recurso. Los juegos de congestión son un caso especial de juegos potenciales.

Juegos de suma cero. Éstos son juegos, con dos jugadores, en los que un jugador gana exactamente lo que el otro jugador pierde.

Juegos de suma no cero. Contrario a los juegos de suma cero. En este caso lo que gana un jugador no necesariamente lo pierde el otro jugador.

Juego simétrico. Un juego simétrico es un juego en el que las recompensas por jugar una estrategia en particular dependen sólo de las estrategias que empleen los otros jugadores y no de quien las juegue. Si las identidades de los jugadores pueden cambiarse sin que cambien las recompensas de las estrategias, entonces el juego es simétrico.

LE-HER. Juego de cartas donde intervienen dos jugadores.

MINIMAX. En teoría de juegos, minimax es un método de decisión para minimizar la pérdida máxima esperada en juegos con adversario y con información perfecta. Este cálculo se hace de forma recursiva. El funcionamiento de minimax puede resumirse como elegir el mejor movimiento para tí mismo suponiendo que tu contrincante escogerá el peor para ti.

Oligopolio. Un oligopolio se da cuando en un determinado mercado, el número de vendedores (empresas o productores) es considerablemente menor comparado con el número de compradores.

Precio de reserva Es el precio más alto que un comprador está dispuesto a pagar por bienes o servicios al vendedor, o, el precio mínimo al que el vendedor está dispuesto a vender un bien o servicio.

Programación dinámica. La programación dinámica es un enfoque general para la solución de problemas en los que es necesario tomar decisiones en etapas sucesivas. Las decisiones tomadas en una etapa condicionan la evolución futura del sistema, afectando a las situaciones en las que el sistema se encontrará en el futuro (denominadas estados), y a las decisiones que se plantearán en el futuro.

Sustituibilidad. Ésta refleja la capacidad y disposición de los consumidores a sustituir un producto por otro en respuesta a un cambio en el precio relativo. Si una empresa eleva unilateralmente el precio de sus productos y existen otros bienes sustitutivos, la respuesta de los consumidores al encarecimiento del producto será la de dirigir su demanda hacia los bienes alternativos, de manera que probablemente la estrategia de la empresa no será rentable en el largo plazo y tendrá que fijar de nuevo unos precios competitivos.

Bibliografía

[1] David Bardey and Hélene Bonnet. *Teoria de control óptimo: Una guia para proncipiantes*, volume 87. Economía, 2006.

[2] Tamer Basar and Geert Jan Olsder. *Dynamic noncooperative game theory*, volume 23. 1999.

[3] A. Bensoussan. Explicit solutions of linear quadratic differential games. *Stochastic Processes, Optimization, and Control Theory: Applications in Financial Engineering, Queueing Networks, and Manufacturing Systems*, pages 19–34, 2006.

[4] Alberto Bressan. Noncooperative differential games. a tutorial. *Department of Mathematics, Penn State University*, December 8,2010.

[5] Antoine-Augustin Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot.* L. Hachette, 1838.

[6] W. Davis Dechert. Non cooperative dynamic games: a control theoretic approach. *University of Houston, URL: http://algol. ssc. wisc. edu/research/research/dgames. pdf*, page 112, 1997.

[7] Engelbert Dockner. *Differential games in economics and management science.* Cambridge University Press, 2000.

[8] Davide Dragone, Luca Lambertini, George Leitmann, and Arsen Palestini. Hamiltonian potential functions for differential games. *Proceedings of IFAC CAO*, 9, 2009.

[9] Davide Dragone, Luca Lambertini, George Leitmann, and Arsen Palestini. Hamiltonian potential functions for differential games. *Automatica*, 62:134–138, 2015.

[10] Davide Dragone, Luca Lambertini, and Arsen Palestini. A class of best-response potential games.

[11] Davide Dragone, Luca Lambertini, and Arsen Palestini. Static and dynamic best-response potential functions for the non-linear cournot game. *Optimization*, 61(11):1283–1293, 2012.

[12] Lorenzo Escot Mangas, Elena Olmeda Fernandez, and Eva del Pozo Garcia. *Optimización Dínamica*, volume ISSN-e 2255-5471 Numero 8. Documentos de trabajo de la facultad de ciencias economicas y empresariales, 2002.

[13] Alvaro Forteza. *Teoria de control óptimo*, volume Capitulo 5. Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República, 2009.

[14] Avner Friedman. *Differential games*. Courier Corporation, 2013.

[15] David González-Sánchez and Onésimo Hernández-Lerma. Dynamic potential games: the discrete–time stochastic case. 2013.

[16] Leonardo Laura Guarachi and David González Sánchez. *Introducción a la Teoría de Juegos*. CCM-UNAM, ESE-IPN, Agosto 2014.

[17] Sergiu Hart, RJ. Aumann, and S. Hart. Handbook of game theory with economic applications. 1992.

[18] Onésimo Hernández-Lerma. Control óptimo y juegos estocásticos. *EMALCA, CIMAT*, 2005.

[19] Magdalena Hyksová. Several milestones in the history of game theory.

[20] Segismundo Izquierdo Millán. *La Teoría de Juegos y la estrategia competitiva*. Academia Caballeria, Dpto. de Organización de Empresas y CIM Universidad de Valladolid.

[21] Vassili N Kolokoltsov and Oleg A Malafeyev. *Understanding Game Theory, Introduction to the Analysis of Many Agent System with Competition and Cooperation*. World Scientific Publishing, 2010.

[22] Benjamin López Ortiz. *Teoría de Juegos*. Facultad de Economía, UNAM, 2012.

[23] Dov Monderer and Lloyd S. Shapley. Potential games. *Games and economic behavior*, 14(1):124–143, 1996.

[24] John Ricart. Una introducción a la teoría de los juegos. *Documento de Investigación IESE Business School. Universidad de Navarra. España*, 1988.

[25] R. W. Rosenthal. The network equilibrium problem in integers. *Networks*, 3(1):53–59, 1973.

[26] Ignacio Sánchez-Cuenca. *Teoría de juegos*, volume 34. CIS, 2009.

[27] Tamara Setién Hernández. *Dilema del prisionero y la cooperaciń*. Tesis de maestría. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid, 2015.

[28] Margaret E. Slade. What does an oligopoly maximize? *The Journal of Industrial Economics*, 42:45–61, 1994.

[29] Theodore L. Turocy and Bernhard von Stengel. Game theory. *CDAM Research Report LSE-CDAM-2001-09*, page 39, 2001.

[30] Takashi Ui. Robust equilibria of potential games. *Econometrica*, 69(5):1373–1380, 2001.

[31] Xavier Vives. *Precios y Oligopólio: ideas clásicas y herramientas modernas*. Antoni Bosch Editor, 2001.