UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

SOBRE LA PROPIEDAD MINIMIZANTE DE LAS SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

RAZIEL ZAVALETA RODRÍGUEZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. VÍCTOR ALBERTO CRUZ BARRIGUETE

DR. RICARDO ROSAS RODRÍGUEZ

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MÉXICO

JULIO 2016

Dedicado a mi familia,
en particular a mi papá.

Agradecimientos

Me gustaría agredecer primero que a nadie a mi familia, por todo el apoyo que me dieron durante estos cinco años, por la paciencia y cariño que todos demostraron. Me gustaría hacer mención especial a mi papá quien siempre creyó en mi y a mi mamá quien siempre me dijo que debo de creer en mi mismo y por último a Daniela Isis Flores Silva por toda la paciencia, cariño y amor que me ha demostrado.

A mis profesores, que varios de ellos se convirtieron en familia, como Jesús Alejandro Hernádez Tello y Verónica Borja Macias que me enseñaron que el trabajo es el camino del éxito, a Víctor Alberto Cruz Barriguete que me enseñó que la curiosidad es el alma de las matemáticas, Mario Lomelí Haro y Jesús Fernando Tenorio Arvide por tenerme paciencia, a Ricardo Rosas Rodríguez por brindarme apoyo aún sin conocerme y por último Oscar Alfredo Palmas Velasco por mostrarme lo fascinante de las superfices mínimas.

A los profesores Silvia Reyes Mora, Adolfo Maceda Méndez y Juan Luis Hernández López por los invaluables comentarios en la revisión de esta tesis. Y por último a los profesores y compañeros de la UTM por tantas experiencias que compartimos.

Muchas gracias a todos.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

En este trabajo de tesis se exponen los temas básicos de la teoría de las superficies mínimas en $\mathbb{R}^3$.

En el capítulo 1 se comienza con el estudio de la desigualdad isoperimétrica en el plano para después plantear el problema de minización de área como una generalización de la desigualdad isoperimétrica. Después se plantean los conceptos básicos correspondientes a la teoría de superficies diferenciables comenzando por la definición de las mismas, continuamos con el estudio del espacio tangente y terminamos el capítulo con el estudio de la primera forma fundamental, con la cual se observa que se puede calcular el área de superficies.

En el capítulo 2 se continua con el estudio de las propiedades de las superficies, comenzamos el capítulo con el estudio de las parametrizaciones por coordenas isotermas, después continuamos con el estudio de la orientabilidad de las superficies, para terminar con el estudio de las curvaturas media y gaussiana de una superficie.

En el capítulo 3 se estudian las superficies mínimas. Comenzamos con el estudio del caso de las superficies de revolución, después se continua con el estudio de las superficies mínimas expresadas como la gráfica de funciones suaves de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, el siguiente tema de estudio es el caso en que las superficies están dadas por una parametrización y se termina el capítulo con el estudio de la relación que existe entre las funciones de variable compleja y las superficies mínimas, esta relación da como resultado la **Representación de Weierstrass-Enneper.**

En el capítulo 4 se estudian algunas propiedades de las superficies mínimas como son el comportamiento de la aplicación de Gauss y la curvatura gaussiana de las mismas, en este estudio se ve la importancia de la representación de Weierstrass-Enneper y cómo es que a partir de esto se pueden traducir los problemas geométricos en problemas correspondientes a la teorí de funciones de variable compleja. Se termina el capítulo con el estudio de la desigualdad isoperimétrica para superficies mínimas.

En la última sección de este trabajo se presentan dos apéndices, el primero que habla sobre funciones de variable compleja y algunas propiedades que nos son útiles a lo largo de este trabajo. En el segundo apéndice se menciona cómo se generan las imagenes de las superficies mostradas en este trabajo.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se dará una breve introducción al problema principal de esta tesis. Comenzaremos con el estudio de la desigualdad isoperimétrica en el plano, luego continuaremos con el planteamiento del problema de minimización de área de una superficie en $\mathbb{R}^3$ como una generalización de la desigualdad isoperimétrica. Después expondremos los conceptos básicos de geometría diferencial correspondientes a las superficies.

1.1. La desigualdad isoperimétrica

Supongamos que tenemos una cuerda γ de longitud L y la colocamos sobre una mesa completamente plana de manera que el inicio coincida con el final y no se toque más que en los extremos, como se observa en la Figura 1.1. Un par de preguntas que nos podemos hacer son: ¿cuál es el área mínima que se puede encerrar con la cuerda? y ¿cuál es el área máxima que se puede encerrar con la cuerda?

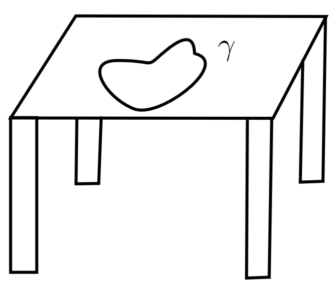


Figura 1.1: Ejemplo de una cuerda γ sobre un plano.

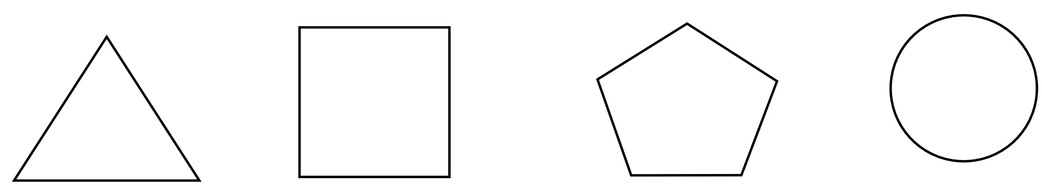
Con respecto a la primera pregunta, la respuesta la podemos hallar de la manera siguiente, si tomamos la cuerda, la doblamos a la mitad y la ponemos en la mesa de manera que cumpla las condiciones ya mencionadas, y además procuramos que los lados estén lo más cerca posible uno del otro es claro que el área encerrada por nuestra cuerda γ es muy cercana a cero, y en el caso ideal el área es cero.

Sobre la segunda pregunta, la respuesta no se ve inmediata pues podemos colocar la cuerda de muchas maneras diferentes sobre la mesa, así la solución no es tan evidente.

Una primera forma de empezar a tratar el problema es con las figuras geométricas básicas como son los triángulos, los cuadrados, pentágonos, y en general polígonos con n lados.

De todos los polígonos de n lados con perímetro fijo, los regulares son los que tienen la mayor área, una demostración de esta afirmación puede consultarse en [1] pág. 529. Así podemos comenzar nuestro problema viendo cual de todos los polígonos regulares con el mismo perímetro tiene la mayor área.

Como se puede observar en la Figura 1.2, entre más lados tenga nuestro polígono, más área encerramos. Siguiendo nuestra intuición podríamos afirmar que la circunferencia es la figura que maximiza el área, y como veremos esto es correcto. Esta propiedad, que es llamada la **propiedad isoperimétrica de la circunferencia**, era ya conocida por los matemáticos griegos y lo podemos encontrar en el quinto libro de la colección matemática de Pappus de Alejandría, aunque quien prueba el resultado es Zenodoro y lo que afirma es que la circunferencia encierra la mayor área que cualquier otro polígono regular de igual perímetro (véase [1], pág. 526).



Área: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}L^2$ Área: $\dfrac{L^2}{16}$ Área: $\dfrac{5}{4\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}L^2$ Área: $\dfrac{L^2}{4\pi}$

Figura 1.2: Área de algunos polígonos regulares con perímetro fijo L.

Sabemos que nuestro problema es un poco más general, pues la cuerda puede colocarse en forma no poligonal, pero este es un buen comienzo, pues gracias a Zenodoro ya sabemos que la circunferencia es la figura que maximiza el área sobre todos los polígonos de un cierto perímetro fijo, ahora nos queda por resolver el problema para curvas suaves[1]. Resulta curioso el hecho de que el resultado encontrado por los griegos también es válido para curvas en general. Ahora procederemos a enunciar un resultado auxiliar que nos ayudará a demostrar el resultado principal de esta sección.

Lema de Wirtinger.
Consideremos una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua de período 2π con derivada continua tal

[1]Una curva se dice suave si cada una de sus funciones coordenadas lo es.

que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. *Entonces*

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt.$$

Más aún, la igualdad se da si y sólo si

$$f(t) = a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t).$$

Demostración.
Consideremos la expansión de f en serie de Fourier (véase [12], pág. 79)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \,\mathrm{sen}(nt)).$$

Ya que $f \in \mathcal{C}^1$, la serie de Fourier de su derivada puede obtenerse derivando término a término cada sumando de la serie (véase [12], pág. 102), es decir

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos(nt) - na_n \,\mathrm{sen}(nt)).$$

Por otra parte, del hecho que

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \pi a_0,$$

y de la hipótesis tenemos que $a_0 = 0$.

Sabemos que la identidad de Parseval (véase [12], pág. 82), establece

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

y

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2).$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt - \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \tag{1.1}$$

lo cual es mayor o igual que 0. Observemos que se da la igualdad en (1.1) si y sólo si a_n y b_n son cero para n mayor a uno, por lo tanto $f(t) = a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t)$, con lo cual damos por terminada la demostración. ♣

Ahora sí, estamos en condiciones de enunciar y demostrar nuestro resultado.

Desigualdad Isoperimétrica.
Consideremos una curva suave, cerrada y simple γ, en el plano, denotemos por L a la longitud de γ y por A el área de la región que encierra la imagen de γ. Entonces se cumple lo siguiente

$$4\pi A \leqslant L^2. \tag{1.2}$$

La igualdad se alcanza si y sólo si la región encerrada tiene por borde una circunferencia.

Demostración.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L = 2\pi$, por otra parte consideremos $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, una parametrización por longitud de arco de γ, a partir de una traslación podemos suponer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} x(s)ds = 0$.

Supongamos ahora que γ está recorrida en sentido positivo. Por el Teorema de Green (véase [16], pág. 1009), tenemos que

$$2A = 2\int_0^{2\pi} x(s)y'(s)ds, \tag{1.3}$$

además

$$2\pi = \int_0^{2\pi} (x'(s)^2 + y'(s)^2)ds. \tag{1.4}$$

Así, restando (1.3) a (1.4) tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi - 2A = & \int_0^{2\pi} (x'(s)^2 + y'(s)^2)ds - \int_0^{2\pi} 2x(s)y'(s)ds \\ = & \int_0^{2\pi} [(x'(s)^2 + y'(s)^2) - 2x(s)y'(s)]ds \\ = & \int_0^{2\pi} (x'(s)^2 - x(s)^2)ds + \int_0^{2\pi} (x(s) - y'(s))^2 ds. \end{aligned}$$

Observemos que el segundo término de la expresión anterior es positivo, y por la desigualdad de Wirtinger tenemos que el primero también lo es, por tanto concluimos que $\pi \geq A$.

Por otra parte, supongamos que se da la igualdad, de aquí como ambos sumandos son positivos tenemos que ambas integrales son cero, por tanto tenemos que

$$\int_0^{2\pi} (x(s) - y'(s))^2 ds = 0, \tag{1.5}$$

luego, de (1.5) tenemos

$$x(s) = y'(s).$$

Por el Lema de Wirtinger, tenemos que $\int_0^{2\pi} (x'(s)^2 - x(s)^2)ds = 0$ es equivalente a

$$x(s) = a\cos(s) + b\,\text{sen}(s),$$

y por lo tanto

$$y(s) = b\cos(s) - a\,\text{sen}(s) + c.$$

En conclusión, la parametrización de la curva γ está dada por $\gamma(s) = (a\cos(s) + b\,\text{sen}(s), b\cos(s) - a\,\text{sen}(s) + c)$ corresponde a la circunferencia unitaria con centro en $(0, c)$. ♣

Observemos que a partir de la desigualdad isoperimétrica (1.2) podemos fácilmente deducir que, si L es finita entonces A también lo es pues $A \leq \frac{L^2}{4\pi} < \infty$. Esto lo podemos resumir en el siguiente Corolario.

Corolario 1.1.1.
Todo conjunto de perímetro finito tiene área finita.

Por otra parte, una pregunta que puede surgirnos es: ¿un perímetro infinito siempre encierra un área infinita? A continuación revisaremos un ejemplo que nos permita discernir sobre la respuesta de este problema.

En breve veremos el proceso que lleva a la construcción del ejemplo, antes veremos como construir el elemento básico de nuestro ejemplo, este elemento básico que llamaremos **curva de Koch** se construye de la manera siguiente: Se toma un segmento, se le divide en tres partes iguales, se reemplaza la parte central por dos partes de igual longitud haciendo un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes, luego, con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera, lo que da lugar a 16 segmentos más pequeños en la segunda iteración y así sucesivamente, una visualización del proceso de construcción de la curva de Koch se puede observar en la Figura 1.3. Nuestro ejemplo se llama **copo de nieve de Koch** y consiste en sustituir los lados de un triángulo isósceles por una curva de Koch, una visualización del copo de nieve Koch se pude observar en la Figura 1.4.

Si se considera de nuevo la primera iteración, notamos que para pasar de una línea a la siguiente se remplazan tres segmentos por cuatro de igual longitud, o sea que la longitud total es multiplicada por $\frac{4}{3}$. Después de n pasos iterativos en la construcción recursiva la longitud de la curva es $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$, el límite de la sucesión geométrica anterior de razón $\frac{4}{3}$ es obviamente infinito, lo que significa que la figura final tiene una longitud infinita.

Por otra parte, es claro que el área bajo una curva de Koch es finita, además sabemos que el área del triángulo es finita, luego, como el área del copo de nieve de Koch es el área del tríangulo más tres veces el área bajo la curva de Koch tenemos que el copo de

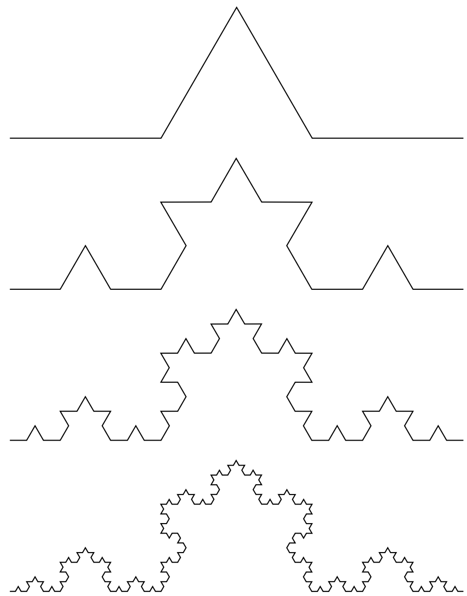


Figura 1.3: Construcción de la curva de Koch.

nieve de Koch tiene área finita.

Así podemos resumir lo anterior en la siguiente observación.

Observación 1.1.1.
Si un conjunto tiene perímetro infinito entonces no es necesario que su área sea infinita.

Ahora que ya resolvimos nuestras dos preguntas iniciales, la cantidad máxima y mínima de área que podemos encerrar con una curva de longitud fija, podemos plantear el siguiente problema como una generalización de nuestro problema de maximización y minimización de áreas en el plano. Qué pasaría si en lugar de una cuerda tenemos un pedazo de madera plana y debemos de colgar arriba de la madera una sábana de tal manera que no se generen picos, como se observa en la Figura 1.5. Así, resulta natural preguntarnos ¿cómo debemos colgar la sábana para utilizar la menor cantidad de tela? Los objetos matemáticos que nos ayudarán a resolver este problema se llaman superficies diferenciables. En el siguiente capítulo veremos que es una superficie diferenciable y cómo medir su área.

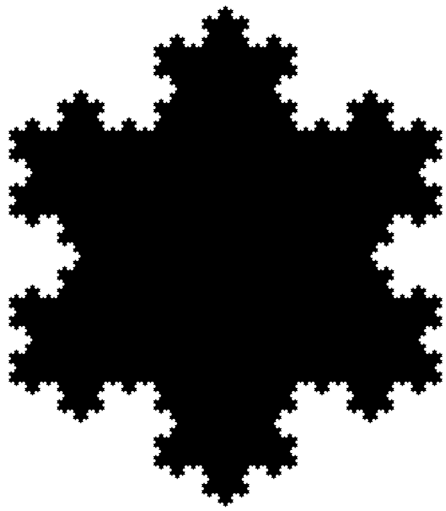


Figura 1.4: Copo de nieve de Koch.

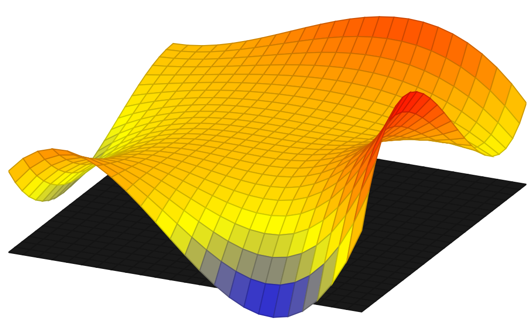


Figura 1.5: Tabla (negro) y tela colocada arriba (colores).

Capítulo 2

Elementos de la teoría de superficies. Parte 1

En este capítulo expondremos los conceptos básicos de la teoría de superficies diferenciables en $\mathbb{R}^3$ como lo es la definición, el espacio tangente y la primera forma fundamental.

2.1. Superficies diferenciables

Para poder definir el concepto de superficie, es necesario primero tomar lo siguiente en cuenta. Consideremos un subconjunto abierto y conexo Ω de $\mathbb{R}^2$ y una función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, U)$, con $U \subset \mathbb{R}^3$, invertible, si ocurre que $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U, \Omega)$ entonces decimos que f es un **difeomorfismo**. Por otra parte, a las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty$ las llamaremos funciones suaves o simplemente suaves. Podemos observar una visualización del concepto de difeomorfismo en la Figura 2.1.

Definición 2.1.1.
*Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$, decimos que S es una **superficie diferenciable** si para cada $p \in S$ existe una vecindad U de p en S y un difeomorfismo $\varphi\colon \Omega \to U$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es abierto y conexo.*

Ahora daremos algunas notaciones para las superfices diferenciables, a la pareja (U, φ) la llamaremos una **parametrización alrededor de** p. Si $\psi = \varphi^{-1}$ entonces a la pareja (U, ψ) la llamaremos una **carta para** S **alrededor de** p. Al conjunto de cartas $\{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$ lo llamaremos un **atlas** si $\displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i = S$.

A partir de ahora utilizaremos los término **superficie diferenciable** y **superficie** de manera indiferente, y cada vez que pensemos en subconjuntos del plano supondremos que son abiertos y conexos a menos que se especifique lo contrario, a estos conjuntos los llamaremos dominios o regiones.

Observemos que la Definición 2.1.1 nos dice que las superficies son localmente como un dominio del plano, por otra parte, como un plano es un subconjunto abierto y conexo del plano, lo más natural es que un plano cualquiera sea una superficie.

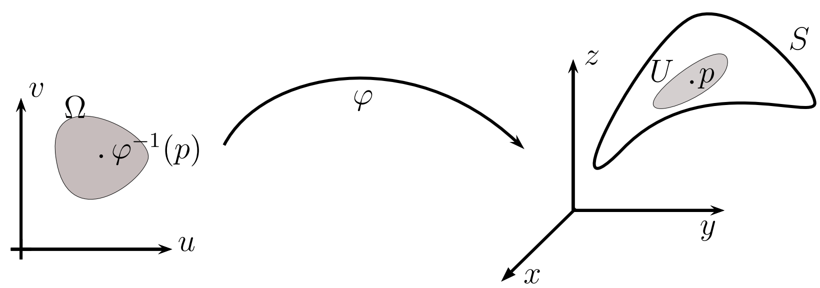


Figura 2.1: Difeomorfismo entre Ω y S.

Ejemplo 2.1.1. ***El plano es una superficie.***
Consideremos un plano cualquiera P. Sabemos que los puntos del plano P cumplen con la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2.1}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y alguno de los números a, b, c es distinto de cero. Sin pérdida de generalidad supongamos que $c \neq 0$, de la ecuación (2.1) tenemos que

$$z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Definiendo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia está dada por

$$\varphi(x, y) = \left(x, y, \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y\right),$$

tenemos que φ es una parametrización para todo punto del plano, pues es diferenciable y su inversa es la proyección sobre el plano xy, la cual denotaremos por π_{xy} y tiene por regla de correspondencia

$$\pi_{xy}(x, y, z) = (x, y)$$

es lineal y por tanto suave. Observemos que, tanto φ como π_{xy} son suaves, pues son transformaciones lineales, de aquí que φ es una carta global para S y por tanto el plano es una superficie.

Una pregunta natural que nos surge ahora es ¿existen superficies que no sean un plano?

Para obtener un candidato a superficie no debemos de pensar mucho, pues si pensamos en la tierra como una esfera, los mapas no serían más que cartas de la superficie. Así podemos preguntarnos ¿es la esfera una superficie?

Ejemplo 2.1.2. ***La esfera de radio R es una superficie.***
Sin pérdida de generalidad supongamos que la esfera está centrada en el origen, la cual denotaremos por $\mathbb{S}^2_R$, ahora, consideremos las proyecciones estereográficas desde el polo norte $\boldsymbol{N}$ y el polo sur $\boldsymbol{S}$, las cuales denotaremos por $\pi_{\boldsymbol{N}}$ y $\pi_{\boldsymbol{S}}$ respectivamente.

Recordemos primero cómo es que se construye la proyección estereográfica desde $\boldsymbol{N}$*, a cada punto* $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2_R$ *le asignamos el punto en el plano que pasa por la recta que contiene a* $\boldsymbol{N}$ *y a* (x, y, z)*, como se ilustra en la Figura 2.2, ahora que lo recordamos encontremos su regla de correspondencia.*

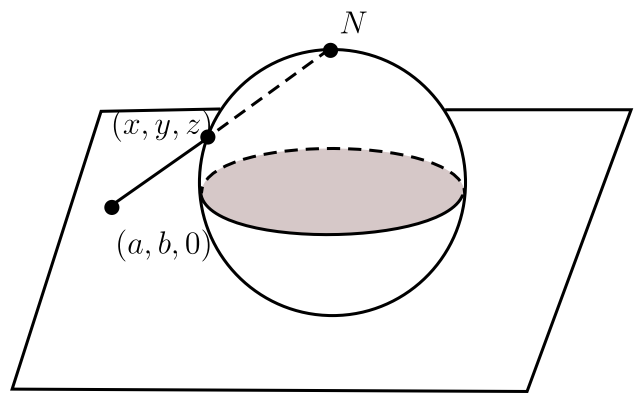


Figura 2.2: Proyección estereográfica.

Para simplificar la notación, denotemos por p *al punto* (x, y, z)*, así sabemos que la recta* L *que pasa por* p *y* $\boldsymbol{N}$ *tiene por ecuación*

$$L(t) = \boldsymbol{N} + t(p - \boldsymbol{N}),$$

con $t \in \mathbb{R}$*, como queremos el punto de esta recta que está en el plano* xy *tenemos que* $z = 0$*.*

Así, debemos encontrar el valor t_0 *tal que* $L(t_0) = (a, b, 0)$*. De aquí que*

$$R + t_0(z - R) = 0,$$

luego

$$t_0 = \frac{R}{R - z}.$$

Al evaluar en $L(t)$ *tenemos que el punto buscado es*

$$L(t_0) = \left(\frac{Rx}{R - z}, \frac{Ry}{R - z}, 0 \right)$$

por lo tanto, tenemos que $\pi_{\boldsymbol{N}} : \mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{N}\} \to \mathbb{R}^2$ *tiene regla de correspondencia*

$$\pi_{\boldsymbol{N}}(p) = \left(\frac{Rx}{R - z}, \frac{Ry}{R - z} \right).$$

Encontremos ahora la inversa de $\pi_{\boldsymbol{N}}$*, para esto recordemos que* $\pi_{\boldsymbol{N}}^{-1}$ *se construye de la manera siguiente, a cada punto* p *en el plano* xy *le asignamos la intersección de la recta*

L' con $\mathbb{S}^2_R$, donde L' es la recta que pasa por los puntos p y $\boldsymbol{N}$. Veamos ahora una forma de encontrar su regla de correspondencia.

Tenemos que una parametrización de L' es $L'(t) = \boldsymbol{N}+t(\boldsymbol{N}-(x,y,0))$ y como buscamos el valor de t, digamos t_0, tal que el punto pertenece a L' y a $\mathbb{S}^2_R$ tenemos que

$$\| \boldsymbol{N} + t_0(\boldsymbol{N} - p) \| = R,$$

equivalentemente

$$\| (-t_0x, -t_0y, R + t_0R) \| = R,$$

de aquí que

$$\sqrt{(t_0x)^2 + (t_0y)^2 + (R + Rt_0)^2} = R,$$

por lo tanto tenemos que

$$t_0^2(x^2 + y^2) + R^2(1 + t_0)^2 = R^2,$$

desarrollando y reduciendo términos tenemos que

$$t_0^2(x^2 + y^2 + R^2) + 2R^2t_0 = 0.$$

Factorizando tenemos que

$$t_0(t_0(x^2 + y^2 + R^2) + 2R^2) = 0,$$

por lo tanto

$$t_0 = 0 \ \textit{o} \ t_0(x^2 + y^2 + R^2) + 2R^2 = 0.$$

Observemos que el caso de $t_0 = 0$ no es posible pues $L'(0) = \boldsymbol{N}$, por tanto tenemos que

$$t_0(x^2 + y^2 + R^2) + 2R^2 = 0,$$

luego

$$t_0 = \frac{-2R^2}{x^2 + y^2 + R^2}.$$

Así el punto buscado es

$$L'(t_0) = \left(\frac{2R^2x}{x^2 + y^2 + R^2}, \frac{2R^2y}{x^2 + y^2 + R^2}, \frac{R(x^2 + y^2 - R^2)}{x^2 + y^2 + R^2} \right),$$

por tanto la función $\pi_{\boldsymbol{N}}^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2_R$ tiene regla correspondencia

$$\pi_{\boldsymbol{N}}^{-1}(x,y) = \left(\frac{2R^2x}{x^2 + y^2 + R^2}, \frac{2R^2y}{x^2 + y^2 + R^2}, \frac{R(x^2 + y^2 - R^2)}{x^2 + y^2 + R^2} \right).$$

Notemos que si V_1 es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que no pertenecen al semieje positivo z, el conjunto $U_1 = V_1 \cap \mathbb{S}^2_R = \mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{N}\}$ es una vencindad para cualquier punto $\mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{N}\}$, *luego el par* $\{U_1, \pi_{\boldsymbol{N}}\}$ *es una carta para la esfera* $\mathbb{S}^2_R$.

De manera similar podemos encontrar que $\pi_{\boldsymbol{S}}\colon \mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{S}\} \to \mathbb{R}^2$ *tiene regla de correspondencia*

$$\pi_{\boldsymbol{S}}(x,y,z) = \left(\frac{Rx}{R+z}, \frac{Ry}{R+z}\right),$$

y que $\pi^{-1}_{\boldsymbol{S}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{S}\}$ *tiene por regla de correspondencia*

$$\pi^{-1}_{\boldsymbol{S}}(x,y) = \left(\frac{2R^2x}{x^2+y^2+R^2}, \frac{2R^2y}{x^2+y^2+R^2}, -\frac{R(x^2+y^2-R^2)}{x^2+y^2+R^2}\right).$$

Considerando a V_2 *como el conjunto de puntos en* $\mathbb{R}^3$ *que no pertenecen al semieje negativo* z*, el conjunto* $U_2 = V_2 \cap \mathbb{S}^2_R = \mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{S}\}$ *es una vencindad para cualquier punto* $\mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{S}\}$*, luego el par* $\{U_2, \pi_{\boldsymbol{S}}\}$ *es una carta para la esfera* $\mathbb{S}^2_R$.

De esta forma tenemos que el conjunto $\{(U_1, \pi_{\boldsymbol{N}}), (U_2, \pi_{\boldsymbol{S}})\}$ *forma un atlas para* $\mathbb{S}^2_R$ *pues* $\mathbb{S}^2_R = U_1 \cup U_2$ *y como* $\pi_{\boldsymbol{N}}, \pi_{\boldsymbol{S}}$ *son difeomorfismos concluimos que* $\mathbb{S}^2_R$ *es una superficie.*

Ahora ya tenemos dos ejemplos de superficies, pero como se ve, es bastante complicado saber si algo es o no una superfice, pues tenemos que dar explícitamente los difeomorfismos, cosa que en general no es sencillo, por tanto busquemos algún método más accesible que la definición para poder decidir si algo es o no una superficie.

Recordando los cursos de cálculo (véase [16], pág. 781), sabemos que a partir de una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ podemos obtener una superficie considerando su gráfica[1], denotada por $Gra(f)$. De aquí que tenemos dos nociones de superficies, las de cálculo y las superficies de la Definición 2.1.1. Nos preguntamos si es que estos dos conceptos de superficies son iguales o no lo son. El siguiente resultado nos da una respuesta a esta cuestión.

Lema 2.1.1.
Consideremos un subconjunto abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *y una función diferenciable* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *entonces la gráfica de* f *es una superficie diferenciable.*

Demostración.
Consideramos la proyección del conjunto $Gra(f)$ en el plano uv, $\pi_{uv}\colon Gra(f) \to \mathbb{R}^2$ con regla de correspondencia

$$\pi_{uv}(u,v,f(u,v)) = (u,v).$$

Observemos que π_{uv} es una función lineal, por tanto tenemos que π_{uv} es una función suave. Luego π_{uv} es una carta global para $Gra(f)$. Así, tenemos que $Gra(f)$ es una superficie diferenciable. ♣

[1]La gráfica de una función f es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$Gra(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x,y)\}$$

Observemos que el Lema 2.1.1 establece que las superficies que se estudian en algunos cursos de cálculo (e.g. [16] pág.781) son las mismas que las superficies que definimos anteriormente. Un ejemplo de estas superficies se ilustra en la Figura 2.3.

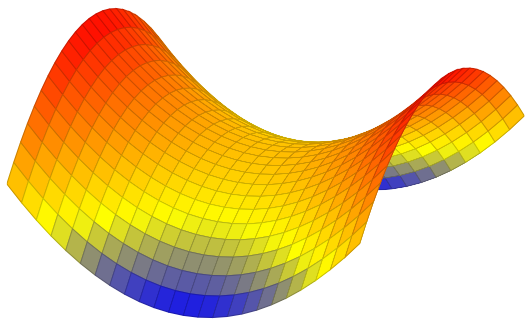


Figura 2.3: Superficie dada como la gráfica de la función $f(u,v) = u^2 - v^2$.

Una pregunta interesante es si el converso del Lema 2.1.1 es válido, de ser así, tendríamos ya todas las superficies caracterizadas de una forma más familiar.

Lema 2.1.2.
Toda superficie es localmente la gráfica de una función diferenciable de dos variables.

Demostración.
Consideremos un punto p en S, una vecindad U de p, Ω una vecindad de $q = \varphi^{-1}(p)$ y una parametrización $\varphi\colon \Omega \to U$. Utilizando las coordenadas (u,v) en Ω y las coordenadas (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$. Consideramos la diferencial de φ en el punto p, dada por

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v)}(q) = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix},$$

donde el subíndice indica derivada parcial con respecto a la variable indicada. Por otra parte, como tenemos que φ es un difeomorfismo $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id$. Luego, por la regla de la cadena se tiene que $d\varphi_p^{-1} \circ d\varphi_q = Id$. Así, tenemos que la diferencial de φ denotada por $d\varphi_q$ es inyectiva, por lo tanto la matriz $D\varphi_p$ tiene rango dos, de donde alguno de los menores de la matriz es distinto de cero. Supongamos, sin pérdida de generalidad que:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(q) = \begin{vmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Consideremos la proyección sobre el plano xy dada por $\pi_{xy}(x,y,z) = (x,y)$. Notemos que

$$(\pi_{xy} \circ \varphi)(u,v) = \pi_{xy}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (x(u,v), y(u,v)),$$

luego al aplicarlo al punto q tenemos

$$D(\pi_{xy} \circ \varphi)(q) = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{pmatrix}$$

y por tanto
$$\det(D(\pi \circ \varphi)(q) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(q) \neq 0.$$
Por el Teorema de la función inversa (véase [10], pág. 206), existen vecindades V_1 y V_2 de q y $\pi_{xy}(p)$ respectivamente, tal que la función diferenciable $\pi \circ \varphi : V_1 \to V_2$ tiene una inversa diferenciable, misma que denotaremos por $\psi : V_2 \to V_1$. La función ψ es tal que $\psi(x,y) = (u,v)$, de aquí que $z = z(u,v) = z(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y)$.

Por lo tanto tenemos que S es localmente la gráfica de una función de dos variables. ♣

Veremos a continuación una manera de definir a las superficies a partir de una función suave F de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.2.
*Consideremos una función diferenciable $F\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $p \in \Omega$. Decimos que p es un **punto regular** de F si dF_p no se anula. Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un **valor regular** de F si cualquier punto $p \in F^{-1}(a)$ es un punto regular.*

Observemos que si dF_p no se anula en p entonces el gradiente de F cumple
$$\nabla F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p)\right) \neq 0.$$
Veremos en el siguiente resultado que es posible considerar funciones F de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ para buscar superficies.

Lema 2.1.3.
Consideremos una función diferenciable $F\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $a \in F(\Omega)$ un valor regular de F entonces
$$S = F^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in \Omega |\, F(x,y,z) = a\}$$
es una superficie diferenciable y es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^3$.

Demostración.
Consideremos p_0 un punto regular en $F^{-1}(a)$. Por la Definición 2.1.2 tenemos que el gradiente $\nabla F(p_0) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que la tercer función del gradiente no es nula en p_0, es decir, $\frac{\partial F}{\partial z}(p_0) \neq 0$, luego por el Teorema de la función implícita (véase [10], pág. 210), existe una vecindad Ω' de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ y $f(x,y)$ definida en Ω' tal que $(x,y,z) \in \Omega \cap F^{-1}(a)$ si y sólo si $z = f(x,y)$.

Por el Lema 2.1.1 tenemos que $F^{-1}(a)$ es una superficie diferenciable.

Para ver que S es cerrada, basta con notar que $\{a\}$ es cerrado y F continua. ♣

Observemos que por los Lemas 2.1.1, 2.1.3 y la Definición 2.1.1 estas tres formas de caracterizar superficies de manera local son equivalentes.

Teorema 2.1.1.
Toda superficie diferenciable S se puede definir localmente como cualquiera de las tres formas siguientes:

a) La imagen inversa de un valor regular de una función real y diferenciable definida en una vecindad de S en $\mathbb{R}^3$.

b) La gráfica de una función real diferenciable, $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

c) La imagen de una parametrización $\varphi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Notemos que hasta este punto ya sabemos cómo obtener y caracterizar una superficie localmente. Recordemos que de los cursos de cálculo sabemos que hay una clase especial de superficies que llamamos "**superficies de revolución**", las cuales se pueden generar a partir de una curva. Veamos cómo generarlas y que, en efecto, son superficies.

Ejemplo 2.1.3. ***Superficies de revolución***
Consideremos una curva γ en el plano xz que no corta al eje z, supongamos que γ está definida en un intervalo J. Supongamos que la curva γ tiene por parametrización $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ donde $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(u) > 0$ para toda $u \in J$.

Al rotar la curva γ al rededor del eje z en $\mathbb{R}^3$ (véase la Figura 2.4), se obtiene una superficie S cuya parametrización es $\varphi\colon J \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\,\mathrm{sen}(v), g(u)).$$

Por tanto tenemos que las superficies de revolución son, por el Teorema 2.1.1, superficies en el sentido de la Definición 2.1.1.

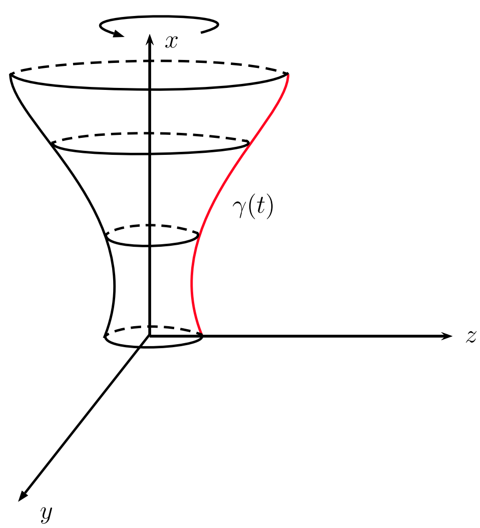


Figura 2.4: Superficie de revolución.

Ahora que ya sabemos qué es una superficie y conocemos algunos ejemplos, recordemos que hemos dicho que una superficie es localmente como un plano, así veremos que es lo que podemos decir de esta propiedad, en el sentido de cómo es este plano y que propiedades tiene.

2.2. El espacio tangente $T_p(S)$

Recordemos que nuestro objetivo actual es encontrar la manera de colocar una sábana sobre una madera para que el área de la sábana sea mínima. Por otra parte en los cursos básicos de cálculo sólo se enseña a calcular áreas sobre planos (e.g. [16] pág. 626 y 870), así buscamos un plano que esté lo suficientemente cerca a la superficie para poder realizar los cálculos de áreas sobre la superficie.

Empecemos por definir lo que es el espacio tangente a un punto en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.2.1.

- *El **espacio tangente a** $\mathbb{R}^2$ **en el punto** p es el siguiente conjunto*

$$T_p(\mathbb{R}^2) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 | Existe\, \gamma \colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2,\, \gamma(0) = p,\, \xi = \gamma'(0)\}$$

- *El **espacio tangente a** $\mathbb{R}^3$ **en el punto** p es el siguiente conjunto*

$$T_p(\mathbb{R}^3) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 | Existe\, \gamma \colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3,\, \gamma(0) = p,\, \xi = \gamma'(0)\}$$

Notemos que la relación entre $T_p(\mathbb{R}^3)$ y $\mathbb{R}^3$ es que $T_0(\mathbb{R}^3)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, es decir, cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ se puede ver como el vector de dirección de una recta.

Observemos que la Definición 2.2.1 se puede extrapolar de manera natural para definir el espacio tangente a una superficie S en un punto p de la forma siguiente.

Definición 2.2.2.
*Consideremos una superficie S y $p \in S$. El **espacio tangente a** S **en** p es el conjunto de vectores anclados en p dado por*

$$T_p(S) = \{\xi \in T_p(\mathbb{R}^3) | Existe\, \gamma \colon (-\epsilon, \epsilon) \to S, \gamma(0) = p, \gamma'(0) = \xi\}.$$

La Figura 2.5 ilustra la Definición 2.2.2.

Observemos que $T_p(S)$ es el conjunto de todos los vectores tangentes a curvas contenidas en S y que pasan por p. Este conjunto a simple vista no tiene una estructura o forma que nos ayude a distinguir de manera clara si es que un punto es o no parte del espacio tangente $T_p(S)$, empecemos primero por encontrar una manera más útil de caracterizar este conjunto.

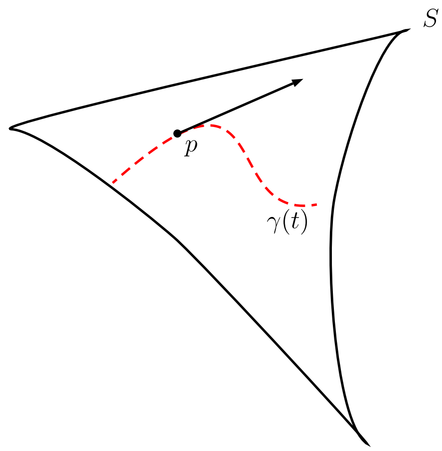


Figura 2.5: Vector tangente a una superficie S en un punto p.

Lema 2.2.1.
Consideremos una superficie S y una parametrización $\varphi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en el punto $q = \varphi^{-1}(p)$. Entonces, la imagen de $T_q(\mathbb{R}^2)$ bajo $d\varphi_q$ es el espacio tangente a S en p. Es decir

$$T_p(S) = d\varphi_q(T_q(\mathbb{R}^2)).$$

Demostración.
Tomemos un $\xi \in T_p(S)$, entonces existe una curva $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \xi$.

Consideremos la curva $\beta = \varphi^{-1} \circ \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$, es decir, la curva $\gamma = \varphi \circ \beta$. Notemos que $\beta(0) = q$. Además, se tiene que para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\gamma'(t) = d\varphi_{\beta(t)}(\beta'(t)).$$

De esto último, si $\beta'(0) = \eta \in T_q(\mathbb{R}^2)$, entonces $d\varphi_q(\eta) = \xi$. Así, ξ es un elemento de $d\varphi_q(T_q(\mathbb{R}^2))$.

Por otra parte, si $\xi \in d\varphi_q(T_q(\mathbb{R}^2))$ existe $\eta \in T_q(\mathbb{R}^2)$ tal que $d\varphi_q(\eta) = \xi$. Considerando ahora la recta $\beta(t) = q + t\eta$, notemos que $\beta(0) = q$ y $\beta'(0) = \eta$. Definiendo $\gamma(t) = \varphi(\beta(t))$ se tiene que

$$\gamma'(t) = d\varphi_{\beta(t)}(\beta'(t)),$$

además $\varphi'(0) = d\varphi_q(\eta) = \xi$. Por tanto tenemos que $\xi \in T_p(S)$. ♣

Ahora, consideremos una superficie S parametrizada por $\varphi\colon \Omega \to S$. Dada una curva $\gamma\colon J \to S$ existe $\beta\colon J \to \Omega$ tal que $\gamma(t) = \varphi(\beta(t))$, considerando $\beta(t) = (u(t), v(t))$ y $\varphi = \varphi(u, v)$ tenemos

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\varphi(u(t), v(t)) = \varphi_u u'(t) + \varphi_v v'(t).$$

Por lo tanto, si $\gamma'(0)$ es un vector tangente a S en el punto $p = \varphi(q)$ entonces

$$\varphi'(0) = \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0).$$

De aquí, todo vector tangente ξ puede expresarse como combinación lineal de los vectores φ_u y φ_v. Así, $T_p(S)$ está generado por los vectores φ_u y φ_v, de donde se tiene que $T_p(S) = \mathrm{gen}\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$. Veamos que este conjunto es una base para $T_p(S)$, nos falta probar que son linealmente independientes.

Notemos que la ecuación

$$a\varphi_u(q) + b\varphi_v(q) = 0$$

puede escribirse de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que no es otra cosa más que aplicar la diferencial $d\varphi_q$ al vector (a, b). Como sabemos $d\varphi_q$ es inyectiva, entonces $(a, b) = (0, 0)$, y por tanto tenemos que $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ es conjunto linealmente independiente, de este modo tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1.
Consideremos una superficie S y una parametrización $\varphi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Entonces, el espacio tangente $T_p(S)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2. Más aun es tal que $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es una base para $T_p(S)$.

Veamos ahora un ejemplo de cómo calcular el espacio tangente a una superficie en un punto.

Ejemplo 2.2.1. ***Espacio tangente al hiperboloide***
*La **hiperboloide de dos hojas** se define como el siguiente conjunto*

$$\vartheta = \{(x, y, z) | R^2 = z^2 - x^2 - y^2, R > 0\}.$$

Denotemos a la hoja superior del hiberboloide por Ξ, la cual podemos visulizar en la Figura 2.6. Consideremos la siguiente funcion $\varphi\colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia

$$\varphi(\phi, \theta) = (R\,\mathrm{senh}(\theta)\cos(\phi), R\,\mathrm{senh}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), R\cosh(\theta)).$$

Notemos que

$$\frac{D(x,y)}{D(\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} -R\,\mathrm{senh}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) & R\cosh(\theta)\cos(\phi) \\ R\,\mathrm{senh}(\theta)\cos(\phi) & R\cosh(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \end{vmatrix} = -R^2\,\mathrm{senh}(\theta)\cosh(\theta)$$

$$\frac{D(y,z)}{D(\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} R\,\mathrm{senh}(\theta)\cos(\phi) & R\cosh(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \\ 0 & R\,\mathrm{senh}(\theta) \end{vmatrix} = R^2\,\mathrm{senh}^2(\theta)\cos(\phi)$$

$$\frac{D(z,x)}{D(\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} 0 & R\,\mathrm{senh}(\theta) \\ -R\,\mathrm{senh}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) & R\cosh(\theta)\cos(\phi) \end{vmatrix} = R^2\,\mathrm{senh}^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)$$

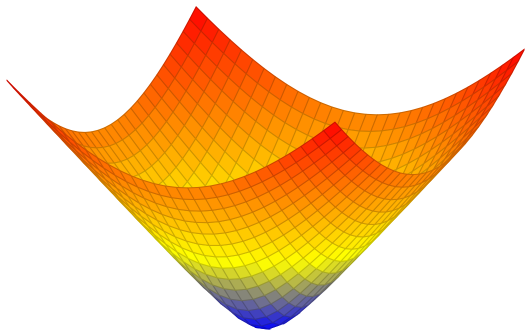


Figura 2.6: Hoja superior del hiperboloide.

de donde obtenemos

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(\phi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{D(y,z)}{D(\phi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(\phi,\theta)}\right)^2=R^4(1+2\operatorname{senh}^2(\theta))\operatorname{senh}^2(\theta).$$

Observemos que la cantidad anterior es cero si y sólo si $\theta=0$. *De aquí* φ *es una parametrización local de* Ξ. *Si* $\Lambda=\{(x,y,z)\in\Xi|x=0\}$, *la parametrización está definida en el conjunto* $U=L^2\setminus\Lambda$.

Ahora, calculemos el espacio tangente a Ξ *en un punto* p. *Un cálculo directo muestra que*

$$\begin{aligned}\varphi_\phi(\phi,\theta)=&\ (-R\operatorname{senh}(\theta)\operatorname{sen}(\phi),R\operatorname{senh}(\theta)\cos(\phi),0),\\ \varphi_\theta(\phi,\theta)=&\ (R\cosh(\theta)\cos(\phi),R\cosh(\theta)\operatorname{sen}(\phi),R\cosh(\theta)\operatorname{sen}(\phi),R\operatorname{senh}(\theta)).\end{aligned}$$

De aquí, si $\xi\in T_p(S)$, *por el Teorema 2.2.1, se sigue que*

$$\xi=\ a_1\varphi_\phi(q)+a_2\varphi_\theta(q).$$

Notemos que en el Ejemplo 2.2.1, la superficie se puede definir de la forma $F(x,y,z)=0$. Si γ es una curva sobre la superficie S dada por $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ tenemos que

$$F(\gamma(t))=F(x(t),y(t),z(t))=0,$$

al derivar con respecto al parámetro t tenemos

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t))=\frac{\partial F}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial F}{\partial z}z'(t)=0. \qquad (2.2)$$

Por tanto el gradiente de F en el punto $\gamma(t)$ está dado por

$$\nabla F(\gamma(t))=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)),\frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t)),\frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(t))\right).$$

Observemos que por (2.2), el gradiente es normal al plano $T_{\gamma(t)}(S)$, por tanto el plano tangente es el conjunto de puntos $\xi \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$\langle \nabla F(\gamma(t)), \xi \rangle = 0.$$

Como ya sabemos, en cada punto de la superficie S podemos definir un plano tangente y podemos pensar que localmente podemos medir en $T_p(S)$ y esto nos ayudará a medir en S.

2.3. La primera forma fundamental de una superficie

En esta sección veremos si es posible que, de la misma manera en que medimos longitudes en $\mathbb{R}^2$ y áreas en $\mathbb{R}^2$ (e.g. [16] pág. 626 y 870), se pueden medir longitudes y áreas en una superficie S a través de $T_p(S)$. Para esto veamos si podemos dotar a $T_p(S)$ de una norma que nos permita medir dentro de una superficie.

Definición 2.3.1.
*Consideremos una superficie S y un punto $p \in S$.El producto interior usual de $\mathbb{R}^3$ restringido a $T_p(S)$ se le llama la **primera forma fundamental** de S en p*

$$\langle \xi, \eta \rangle_p := \langle \xi, \eta \rangle.$$

Veamos que a partir de la primera forma fundamental podemos medir longitudes de curvas, para esto consideremos un punto p en S, $\varphi\colon \Omega \to S$ una parametrización alrededor de p y $\gamma\colon J \to S$ una curva tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \xi$.

Sabemos que podemos escribir γ de la siguiente manera $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, por tanto tenemos que el vector velocidad se puede escribir como

$$\xi = u'(0)\varphi_u + v'(0)\varphi_v,$$

de aquí que su norma está dada por

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &= \langle u'(0)\varphi_u + v'(0)\varphi_v, u'(0)\varphi_u + v'(0)\varphi_v \rangle \\ &= u'(0)^2\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + 2u'(0)v'(0)\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + v'(0)^2\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle. \end{aligned}$$

Definiendo las siguientes funciones

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle,$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle,$$

podemos escribir el cuadrado de la norma del vector ξ como

$$\begin{aligned}\| \xi \|^2 = & \; Eu'(0)^2 + 2Fu'(0)v'(0) + Gv'(0)^2 \\ = & \; (u'(0), v'(0)) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} \\ = & \; \xi \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \xi^t.\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que la longitud de la curva $\gamma\colon J \to S$ esta dada por

$$\text{longitud}(\gamma) = \int_J \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}dt.$$

Definición 2.3.2.
Dada una superficie S definimos la ***diferencial de longitud de arco*** *como la forma cuadrática*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Como podemos ver los coeficientes E, F y G juegan un papel importante en el cálculo de la longitud de curvas sobre una superficie, por tanto es conveniente nombrarlos de alguna manera especial.

Definición 2.3.3.
Consideremos S una superficie y φ una parametrización de S, la ***matriz de coeficientes de la primera forma fundamental de S en p*** *es la matriz*

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

donde los coeficientes E, F y G están dados por

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle,$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle.$$

Notemos que la definición de la primera forma fundamental de una superficie se realizó sólo para superficies parametrizadas, pero si recordamos el Teorema 2.1.1 existen otras dos formas de caracterizar a las superficies de manera local. Así, veamos cómo encontrar los coeficientes de la primera forma fundamental en los dos casos restantes.

Supongamos que tenemos una superficie S dada como la gráfica de una función de dos variables $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, observemos que la función $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

es una parametrización de toda S.

Los **coeficientes de la primera forma fundamental para una superficie caracterizada como la gráfica de una función** están dados por

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle (1,0,f_u),(1,0,f_u)\rangle = 1 + (f_u)^2, \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle (1,0,f_u),(0,1,f_v)\rangle = f_u f_v, \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle (0,1,f_v),(0,1,f_v)\rangle = 1 + (f_v)^2. \end{aligned}$$

Veamos ahora cómo calcular la primera forma fundamental de una superficie que está definida como la imagen inversa de una función F en un valor regular a. Como a es un valor regular tenemos que $\nabla F(a) \neq 0$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\frac{\partial F}{\partial z}(a) \neq 0$. Luego por el Teorema de la función implicita tenemos que, localmente podemos ver a z como una función de x, y, es decir, $z = f(x, y)$. Más aún, sabemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, de aquí, considerando $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

es una parametrización local de S.

Los **coeficientes de la matriz de la primera forma fundamental para una superficie caracterizada como imagen inversa de un valor regular** están dados por

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \left\langle \left(1, 0, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right), \left(1, 0, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) \right\rangle = 1 + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)^2,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \left\langle \left(1, 0, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right), \left(0, 1, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) \right\rangle = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \left\langle \left(0, 1, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right), \left(0, 1, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) \right\rangle = 1 + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)^2.$$

Ahora que hemos visto cómo obtener la longitud de una curva en S en función de la primera forma fundamental, es natural preguntarnos si es que es posible usar la primera forma fundamental para calcular áreas sobre superficies.

Consideremos S una superficie parametrizada por $\varphi\colon \Omega \to S$, $p \in S$, $q \in \Omega$ tal que $\varphi(q) = p$, sabemos que $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ es una base para el plano tangente y además que $\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|$ es el área del paralelogramo generado por $\varphi_u(q)$ y $\varphi_v(q)$. Así, tenemos el área de un pequeño paralelogramo que está lo suficientemente cercano a S, como se observa en la Figura 2.7. Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 &= \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \\
&= \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2(1-\cos^2(\theta)) \\
&= \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2 - \|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2\cos^2(\theta) \\
&= \langle\varphi_u,\varphi_u\rangle\langle\varphi_v,\varphi_v\rangle - \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle^2 \\
&= EG - F^2.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{EG-F^2}.$$

Así, la forma en que se mide el área del paralelogramo depende únicamente de los coeficientes de la primera forma fundamental.

Definición 2.3.4.
Consideremos una superficie S, un subconjunto abierto y conexo Q de S contenido en la imagen de la parametrización $\varphi\colon \Omega \to S$, definimos el ***área de*** *Q como*

$$A(Q) = \iint_{\varphi^{-1}(Q)} \sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

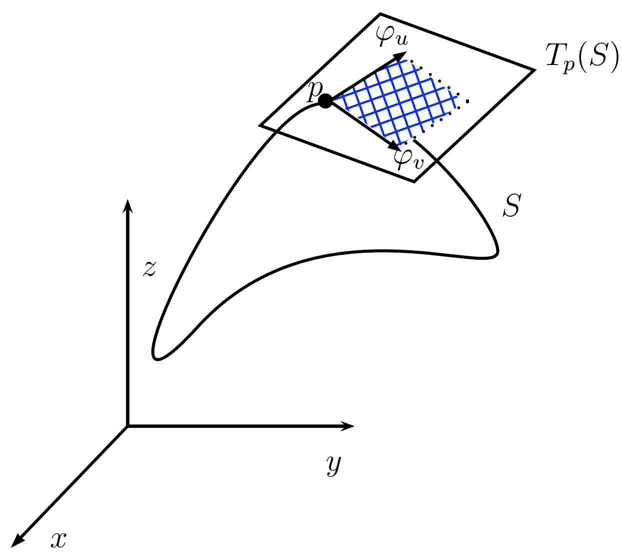


Figura 2.7: Paralelogramo generado por φ_u y φ_v.

A continuación veremos como calcular el área de las superficies de revolución.

Ejemplo 2.3.1. ***El área de una superficie de revolución***
Consideremos una curva γ en el plano xz, supongamos que γ está definida en un intervalo J y que la curva γ tiene por parametrización $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ donde $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Sabemos que al rotar la curva γ al rededor del eje z en $\mathbb{R}^3$

se obtiene una superficie S cuya parametrización está dada por $\varphi\colon J \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\,\mathrm{sen}(v), g(u)).$$

Un cálculo directo muestra que la primera forma fundamental de S está dada por

$$\begin{aligned} E &= f'(u)^2 + g'(u)^2, \\ F &= 0, \\ G &= f(u)^2. \end{aligned}$$

Así, por la Definición 2.3.4 tenemos que

$$A(S) = \int_J \int_0^{2\pi} f(u)\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}dudv. \tag{2.3}$$

Observemos que la expresión (2.3) no depende de la variable v, luego por el Teorema de Fubini (véase [16], pág. 872), tenemos

$$A(S) = 2\pi \int_J f(u)\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}du. \tag{2.4}$$

Notemos que en el caso de que γ pueda expresarse como la gráfica de una función de u, es decir su parametrización es de la forma $\gamma(u) = (f(u), u)$, tenemos que la expresión (2.4) se escribe como

$$A(S) = 2\pi \int_J f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}du. \tag{2.5}$$

Ahora ya sabemos como calcular el área de las superficies y en particular vimos como calcular el área de las superficies de revolución, pero antes de avanzar más veremos que los resultados de esta forma de calcular el área, concuerdan con los resultados clásicos que se encuentran en algunos libros de cálculo, como por ejemplo en [16].

Ejemplo 2.3.2. ***El área de una esfera***

Consideremos la esfera centrada en el origen y de radio R, denotada por $\mathbb{S}^2_R$. Observemos que la esfera se puede obtener revolucionando la curva $\gamma\colon [-R, R] \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $\gamma(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, así, por la relación (2.5) tenemos

$$\begin{aligned} A(\mathbb{S}^2_R) &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2}dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^{R} Rdx. \end{aligned}$$

por lo tanto el área de una esfera es $4\pi R^2$. Otra forma de calcularse puede consultarse en [16] pág. 481.

Con lo visto en este capítulo podemos reformular de manera formal nuestro problema de la cantidad mínima de tela para cubrir un trozo de madera plana, para esto definimos

$$\mathcal{H} = \{S|S \text{ es superficie parametrizada sobre el dominio } \Omega \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Así, tenemos que nuestro problema se puede consiste en encontrar

$$\min_{S\in\mathcal{H}} \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Antes de dar solución a nuestro problema, cosa que se hará en el capítulo 3, estudiaremos un poco más la teoría de superficies para poder comprender mejor el problema y la solución del mismo.

Capítulo 3

Elementos de la teoría de superficies. Parte 2

En este capítulo continuaremos con el estudio de algunas propiedades de las superficies, como lo son las parametrizaciones por coordenas isotermas, la orientabilidad, la aplicación de Gauss y las curvaturas media y gaussiana.

3.1. Parametrización por coordenadas isotermas

Cuando estudiamos las propiedades de una superficie nos gustaría poder encontrar una parametrización que refleje la geometría del dominio de parametrización en la superficie. Uno de los aspectos geométricos que nos gustaría poder conservar son los ángulos, esto en el sentido de que el ángulo que se mida en el dominio de las parametrizaciones se preserven en la superficie.

Consideremos $\gamma(t)$ y $\beta(t)$ dos curvas parametrizadas[1] en el intervalo $[a, b]$ sobre el plano, tales que se intersecan en el punto

$$p = \gamma(t_0) = \beta(t_0)$$

para algún $t_0 \in (a, b)$. Supongamos que los vectores tangentes son

$$\gamma'(t_0) = (\xi, \eta)$$

$$\beta'(t_0) = (\widehat{\xi}, \widehat{\eta}).$$

Recordemos que el ángulo entre dos curvas es el ángulo formado por los vectores tangentes a las curvas. Así mismo, recordemos que para el producto interior se cumple la identidad

$$\|\gamma'(t_0)\|\|\beta'(t_0)\| \cos(\theta) = \langle \gamma'(t_0), \beta'(t_0) \rangle = \xi\widehat{\xi} + \eta\widehat{\eta}$$

donde θ es el ángulo formado entre $\gamma'(t_0)$ y $\beta'(t_0)$.

[1]Una curva parametrizada es una función suave $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

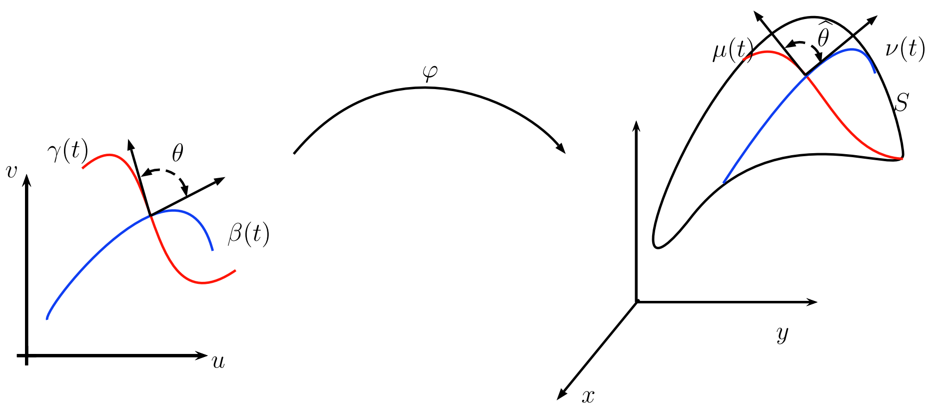


Figura 3.1: Curvas γ y β sobre S.

Por otra parte, la imagen de las curvas γ y β bajo la parametrización φ de S están dadas por

$$\varphi(\gamma(t)) = \mu(t),$$
$$\varphi(\beta(t)) = \nu(t).$$

Una visualización de este hecho la podemos ver en la Figura 3.1.

De manera similar el ángulo $\widehat{\theta}$, formado por los vectores tangentes en el punto de intersección $q = \varphi(p)$, satisface

$$\|\mu'(t_0)\|\|\nu'(t_0)\|\cos(\widehat{\theta}) = \langle \mu'(t_0), \nu'(t_0)\rangle.$$

De la Sección 2.3 sabemos que las normas de los vectores tengentes están dadas por

$$\|\mu'(t_0)\|^2 = E\xi^2 + F\xi\eta + G\eta^2,$$
$$\|\nu'(t_0)\|^2 = E\widehat{\xi}^2 + F\widehat{\xi}\widehat{\eta} + G\widehat{\eta}^2.$$

Por lo tanto se satisface la siguiente igualdad

$$\langle \mu'(t_0), \nu'(t_0)\rangle = E\xi\widehat{\xi} + F(\xi\widehat{\eta} + \widehat{\xi}\eta) + G\eta\widehat{\eta}.$$

Como queremos que los ángulos θ y $\widehat{\theta}$ sean los mismos, se debe de satisfacer la siguiente relación

$$\cos(\theta) = \cos(\widehat{\theta})$$

y en consecuencia

$$\frac{E\xi\widehat{\xi} + F(\xi\widehat{\eta} + \widehat{\xi}\eta) + G\eta\widehat{\eta}}{\sqrt{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}\sqrt{E\widehat{\xi}^2 + F\widehat{\xi}\widehat{\eta} + G\widehat{\eta}^2}} = \frac{\xi\widehat{\xi} + \eta\widehat{\eta}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\sqrt{\widehat{\xi}^2 + \widehat{\eta}^2}}.$$

Observemos que si tomamos los vectores $(\xi, \eta) = (1, 0)$ y $(\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) = (0, 1)$ se tiene que $F = 0$. Por otra parte, si $(\xi, \eta) = (1, 1)$ y $(\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) = (1, -1)$, obtenemos que $E = G$ y por lo tanto tenemos que las transformaciones que cumplen que los coeficientes de su primer forma fundamental son de la forma $E = G$ y $F = 0$ preservan los ángulos formados por curvas en el dominio en la superficie.

Definición 3.1.1.
Consideremos una superficie S y una parametrización φ de S. Si la matriz de su primer forma fundamental tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda(u,v) & 0 \\ 0 & \lambda(u,v) \end{pmatrix}$$

donde $\lambda(u,v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$, entonces la parametrización es llamada ***parametrización en coordenadas isotermas.***

Observemos que de la Definición 2.3.2, tenemos que, si S está dada por una parametrización en coordenadas isotermas entonces la diferencial de longitud de arco toma la forma

$$ds^2 = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2).$$

Debido a que las coordenadas isotermas reflejan la geometría de las superficies, es conveniente saber si dada una superficie S será que ¿siempre existe una parametrización en coordenadas isotermas de S?

Teorema de Bers-Beltrami.
Toda superficie S dotada de una primer forma fundamental analítica[2]*, admite una reparametrización en coordenadas isotermas, i.e. existe una parametrización de S en el sistema de coordenadas (u,v) tal que en estas coordenadas el diferencial de longitud de arco tiene la forma*

$$ds^2 = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2).$$

Demostración.
Consideremos $\varphi(\widehat{u},\widehat{v}) = (x(\widehat{u},\widehat{v}), y(\widehat{u},\widehat{v}), z(\widehat{u},\widehat{v}))$ una parametrización arbitraria de S. En estas coordenadas la diferencial de longitud de arco se escribe como

$$ds^2 = Ed\widehat{u}^2 + 2Fd\widehat{u}d\widehat{v} + Gd\widehat{v}^2. \tag{3.1}$$

Denotando a $\sqrt{EG - F^2}$ por $\sqrt{l}$, una factorización de (3.1) en el plano complejo $\mathbb{C}$, nos da

$$ds^2 = \left(\sqrt{E}d\widehat{u} + \frac{F + i\sqrt{l}}{\sqrt{E}}d\widehat{v}\right)\left(\sqrt{E}d\widehat{u} + \frac{F - i\sqrt{l}}{\sqrt{E}}d\widehat{v}\right). \tag{3.2}$$

Como el conjugado complejo del primer factor de (3.2) es el segundo factor, entonces buscamos una función analítica $f(u,v)$ con valores complejos tal que se satisfagan las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$f(u,v)\left(\sqrt{E}d\widehat{u} + \frac{F + i\sqrt{l}}{\sqrt{E}}d\widehat{v}\right) = d\widehat{u} + id\widehat{v}, \tag{3.3}$$

[2] Decimos que una forma cuadrática es analítica si es que cada uno de sus coefientes lo es. Por una función analítica entendemos una función que admite una expansión por serie de potencias.

$$\overline{f}(u,v)\left(\sqrt{E}d\widehat{u}+\frac{F+i\sqrt{l}}{\sqrt{E}}d\widehat{v}\right)=d\widehat{u}-id\widehat{v},$$

de modo que al multiplicar los términos de cada lado tengamos

$$\|f(u,v)\|^2ds^2=d\widehat{u}^2+d\widehat{v}^2.$$

Equivalentemente,

$$ds^2=\|f(u,v)\|^{-2}(d\widehat{u}^2+d\widehat{v}^2)$$

con esto bastaría definir $\lambda(u,v)$ como

$$\lambda(u,v)=\frac{1}{\|f(u,v)\|^2}.$$

Así, la función $\lambda(u,v)$ buscada depende de la función analítica con valores complejos $f(u,v)$ la cual es un factor integrante de (3.3).

Procedemos a buscar un cambio de coordenadas $u=u(\widehat{u},\widehat{v})$ y $v=v(\widehat{u},\widehat{v})$ tal que satisfagan junto con $f(u,v)$ las condiciones anteriores. De existir estas ecuaciones deberían de cumplir

$$f(u,v)\left(\sqrt{E}d\widehat{u}+\frac{F+i\sqrt{l}}{\sqrt{E}}d\widehat{v}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial\widehat{u}}+i\frac{\partial v}{\partial\widehat{u}}\right)d\widehat{u}+\left(\frac{\partial u}{\partial\widehat{u}}+i\frac{\partial v}{\partial\widehat{u}}\right)d\widehat{v}. \tag{3.4}$$

Desarrollando e igualando los coeficientes de la expresión (3.4) tenemos que

$$f(u,v)\sqrt{E}=\frac{\partial u}{\partial\widehat{u}}+i\frac{\partial v}{\partial\widehat{u}},$$

$$f(u,v)\frac{F+i\sqrt{l}}{\sqrt{E}}=\frac{\partial u}{\partial\widehat{v}}+i\frac{\partial v}{\partial\widehat{v}}.$$

Despejando f e igualando las partes reales e imaginarias obtenemos la ecuación

$$(F+i\sqrt{l})\left(\frac{\partial u}{\partial\widehat{u}}+i\frac{\partial v}{\partial\widehat{u}}\right)=E\left(\frac{\partial u}{\partial\widehat{v}}+i\frac{\partial v}{\partial\widehat{v}}\right). \tag{3.5}$$

Al igualar la parte real e imaginaria de (3.5), llegamos a las siguientes igualdades

$$F\frac{\partial u}{\partial\widehat{u}}-\sqrt{l}\frac{\partial v}{\partial\widehat{u}}=E\frac{\partial u}{\partial\widehat{v}}, \tag{3.6}$$

$$\sqrt{l}\frac{\partial u}{\partial\widehat{u}}+F\frac{\partial v}{\partial\widehat{u}}=E\frac{\partial v}{\partial\widehat{v}}. \tag{3.7}$$

Observemos que de la ecuación (3.6) se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial\widehat{u}}=\frac{1}{\sqrt{l}}\left(F\frac{\partial u}{\partial\widehat{u}}-E\frac{\partial u}{\partial\widehat{v}}\right)$$

mientras que de (3.7) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \widehat{v}} &= \frac{1}{E}\left(\sqrt{l}\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} + F\frac{\partial v}{\partial \widehat{u}}\right) = \frac{1}{E}\left(\sqrt{l}\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} + F\frac{F\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - E\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right)\\
&= \frac{1}{E}\left(\sqrt{l}\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} + \frac{F^2\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - EF\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{l\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} + F^2\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - EF\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right)\\
&= \frac{1}{E}\left(\frac{(EG-F^2)\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} + F^2\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - EF\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right) = \frac{1}{E}\frac{EG\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - EF\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\\
&= \frac{G\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - F\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}.
\end{aligned}$$

De manera similar tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial \widehat{u}} = \frac{F\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - E\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \widehat{v}} = \frac{G\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - F\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} = \frac{E\frac{\partial v}{\partial \widehat{u}} - F\frac{\partial v}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}} = \frac{F\frac{\partial v}{\partial \widehat{v}} - G\frac{\partial v}{\partial \widehat{u}}}{\sqrt{l}}. \tag{3.11}$$

Por la igualdad de las derivadas parciales mixtas para v y de las ecuaciones (3.8), (3.9) tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial \widehat{v}}\left(\frac{\partial v}{\partial \widehat{u}}\right) - \frac{\partial}{\partial \widehat{u}}\left(\frac{\partial v}{\partial \widehat{v}}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \widehat{v}}\left(\frac{F\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - E\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right) - \frac{\partial}{\partial \widehat{u}}\left(\frac{G\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} - F\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}\left[F\frac{\partial}{\partial \widehat{u}} - E\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}\sqrt{l}\right] + \frac{\partial}{\partial \widehat{u}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial \widehat{u}} - E\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right]\right)(u).
\end{aligned}$$

Análogamente, de las relaciones (3.10) y (3.11) tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial \widehat{u}}\left(\frac{\partial u}{\partial \widehat{v}}\right) - \frac{\partial}{\partial \widehat{v}}\left(\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}}\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial u} - E\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right] + \frac{\partial}{\partial \widehat{u}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial u} - E\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right]\right)(v).
\end{aligned}$$

De esta forma, las funciones $u = u(\widehat{u}, \widehat{v})$ y $v = v(\widehat{u}, \widehat{v})$ deberán satisfacer las ecuaciones en derivadas parciales $L(u) \equiv 0$ y $L(v) \equiv 0$ donde se considera el operador diferencial

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial u} - E\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right] + \frac{\partial}{\partial \widehat{u}}\left[\frac{F\frac{\partial}{\partial u} - E\frac{\partial}{\partial \widehat{v}}}{\sqrt{l}}\right]\right).$$

Por el Teorema de S. Kovalevsky[3], tenemos que, como E, F y G son funciones analíticas, las ecuaciones $L(u) \equiv 0$ y $L(v) \equiv 0$ tienen soluciones no triviales.

Esto demuestra la existencia del cambio de coordenadas de la forma $u = u(\widehat{u}, \widehat{v})$ y $v = v(\widehat{u}, \widehat{v})$.

Por otra parte, de la igualdad

$$f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{\partial u}{\partial \widehat{u}} + i\frac{\partial v}{\partial \widehat{u}}\right)$$

se obtiene el factor integrante f, y por tanto la función buscada es

$$\lambda(u,v) = \frac{1}{\|f(u,v)\|^2}$$

con lo cual se termina la prueba. ♣

Ahora ya sabemos que siempre podemos encontrar una parametrización en coordenadas isotermas. Así, podemos medir los ángulos en el dominio de la superficie y después estar completamente seguros de que en la superficie S tenemos el mismo ángulo.

Como sabemos, la parametrización de una superficie S puede ser local, así nos preguntamos ¿qué es lo que pasa cuando una región de S está parametrizada de dos maneras distintas? ¿cómo se comporta el vector normal en este caso?

3.2. Superficies orientables

Consideremos una superficie S, un punto $p \in \Omega$, y dos parametrizaciones $\varphi\colon \Omega \to S$ y $\tilde{\varphi}\colon \tilde{\Omega} \to S$ al rededor de p. Observemos que tenemos dos bases para $T_p(S)$ las cuales son $\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$ y $\{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(p), \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(p)\}$.

Tomando en cuenta el cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{\Omega} \to \Omega$, se tiene la siguiente relación $(u, v) = (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ (véase la Figura 3.2), así la relación entre estas bases

[3] Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{yy} = F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_y, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1y}, \ldots, u_{x_ny}, u_{x_1x_1}, \ldots, u_{x_nx_n})$$

y un valor $y = y_0$ tal que las condiciones iniciales

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

y

$$u_y = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

son analíticas en una vecindad de $(y^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0, u_y^0, \ldots)$ y si f y g son analíticas en una vecindad del punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, entonces el problema de Cauchy tiene una única solución analítica no trivial en alguna vecindad del punto $(y^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

está dada de la siguiente manera

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}},$$

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{v}} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \\ \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix}.$$

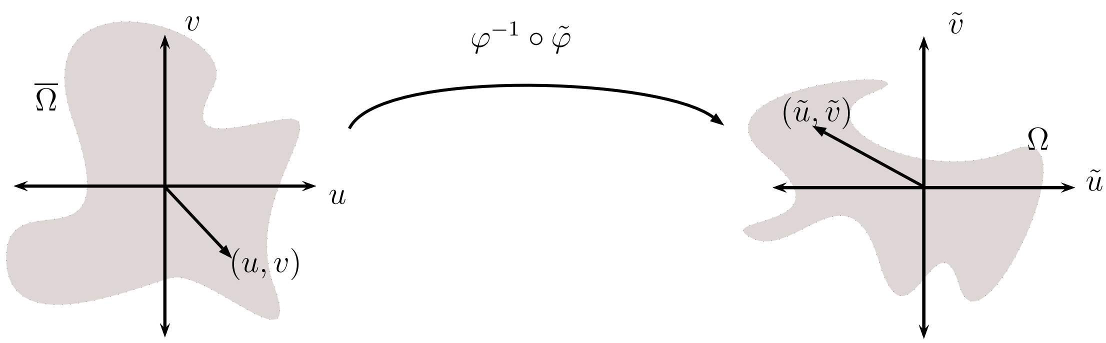


Figura 3.2: Aplicación $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$.

Así, si el jacobiano[4] del cambio de coordenadas es positivo entonces la diferencial del cambio de coordenadas preserva la orientación.

Definición 3.2.1.
Una superficie S es ***orientable*** *si existe una familia de parametrizaciones $\{U_i, \varphi_i\}$ que cubre a S y tiene la propiedad de que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ tiene jacobiano positivo, en caso contrario diremos que la superficie es* ***no orientable****.*

[4]Consideremos $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Esta función está determinada por m funciones escalares reales

$$y_i = F_i(x_1, \ldots, x_n),$$

definimos **la matriz jacobiana de F** como

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Veremos geométricamente que significa que una superficie sea orientable. Sabemos que si S es una superficie y φ una parametrización de S alrededor de p, entonces un vector normal unitario a S, está dado por

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}.$$

Observemos que N es realmente un campo vectorial[5] ortogonal a la superficie. Por otra parte, Si $\tilde{\varphi}$ es otra parametrización de S alrededor de p, tenemos que un vector normal unitario a S está dado por

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|}.$$

Observemos que se cumple la siguiente relación

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} = \left(\varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) \times \left(\varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right) = \varphi_u \times \varphi_u \frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}.$$

Tenemos que el vector normal de la parametrización $\tilde{\varphi}$ cumple

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \text{signo}\left(\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}\right) = \pm N,$$

donde la función signo se definie de la manera siguiente, signo: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $\text{signo}(a) = \begin{cases} 1 & a \geq 0, \\ -1 & a < 0. \end{cases}$

Por lo tanto tenemos que, si el jacobiano del cambio de coordenadas entre (u,v) y $(\tilde{u},\tilde{v})$ cumple que

$$\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})} > 0,$$

entonces $\tilde{N}$ y N apuntan en la misma dirección. Si S no es orientable entonces N y $\tilde{N}$ apuntan en direcciones contrarias.

Por otra parte, notemos que se puede concluir de la definición de orientabilidad, que las superficies que son gráficas de una función son orientables, pues un atlas para la superficie está dado por $\{(\Omega, \varphi)\}$ donde $\varphi \colon \Omega \to S$ tiene por regla de correspondencia $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$. Observemos que un caso particular de superficies dadas como gráficas de funciones son los planos, así tenemos que los planos son orientables.

Por otra parte, pensando en que la cantidad de parametrizaciones sea importante para la orientabilidad de las superficies, veamos el siguiente resultado.

[5]Un **campo vectorial sobre** $X \subset \mathbb{R}^n$ es una función

$$\mathbf{F} \colon X \to \mathbb{R}^n.$$

Un campo vectorial se dice **normal** a $X \subset \mathbb{R}^n$ si $\langle \xi, \varsigma \rangle = 0$ para todo $\xi \in X$ y para todo $\varsigma \in F(X)$.

Lema 3.2.1.
Consideremos una superficie S que puede ser cubierta con sólo dos parametrizaciones, a saber (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, luego, si $U \cap \tilde{U}$ es un conjunto conexo, entonces S es orientable.

Demostración.
Denotemos por (u, v) a las coordenadas dadas por (U, φ) y $(\tilde{u}, \tilde{v})$ a las coordenadas dadas por $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, y consideremos $p \in U \cap \tilde{U}$, entonces el cambio de coordenadas de (u, v) en $(\tilde{u}, \tilde{v})$ satisface

$$\frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} \neq 0$$

así tenemos dos casos:
Caso 1. $\dfrac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0$. Como $\dfrac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0$ se tiene el resultado.
Caso 2. $\dfrac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} < 0$. Realizando el cambio de coordenadas $(u, v) = (v, u)$ tenemos que el determinante del nuevo cambio de coordenadas es positvo. ♣

Veamos ahora la utilidad de este último resultado aplicandolo al caso de la esfera.

Ejemplo 3.2.1. *La esfera es orientable.*
Consideremos $\mathbb{S}^2_R$ la esfera de radio R centrada en el origen. Sabemos que al tomar las parametrizaciones dadas por las proyecciones estereográficas $\pi_{\boldsymbol{N}} \colon U \to \mathbb{R}^2$, $\pi_{\boldsymbol{S}} \colon V \to \mathbb{R}^2$, con $U = \mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{N}\}$ y $V = \mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{S}\}$, formamos un atlas.

Por otra parte, notemos que $U \cap V = \mathbb{S}^2_R \setminus \{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S}\}$, lo cual claramente es un conjunto conexo, así por el Lema 3.2.1 tenemos que $\mathbb{S}^2_R$ es orientable.

Observemos que por el Teorema 2.1.1, todas las superficies son localmente orientables. Por otra parte, notemos que el problema de la orientación recae en como se comporta el campo vectorial normal, también llamado campo normal de la superficie, por tanto sería conveniente poder decir algo de la orientabilidad a través del comportamiento del mismo. Pero antes de analizar la relación entre el campo normal y la orientabilidad daremos un concepto que nos ayudará con nuestro cometido.

Definición 3.2.2.
*Consideremos una superficie diferenciable S y un dominio $V \subset S$. La transformación $N \colon V \to \mathbb{S}^2$ que a cada $p \in V$ le asocia un vector normal unitario a $T_p(S)$, es llamada la **aplicación de Gauss** asociada a la región V.(Véase la Figura 3.3).*

Veamos ahora cual es la relación que existen entre la aplicación de Gauss y la orientabilidad de las superficies.

Teorema 3.2.1.
Una superficie S es orientable, si y sólo si, la aplicación de Gauss $N \colon S \to \mathbb{S}^2$ es diferenciable y está definida en toda la superficie.

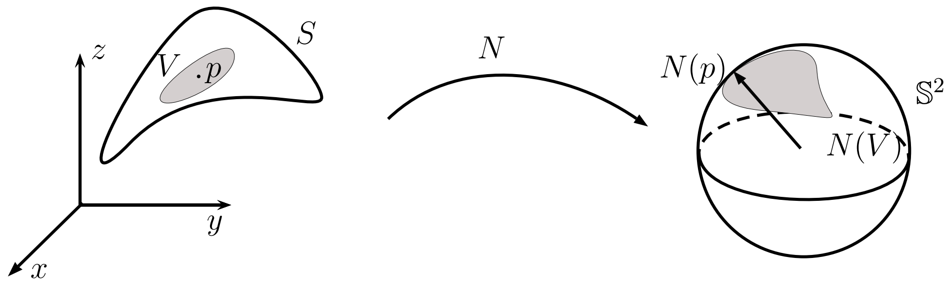


Figura 3.3: Aplicación de Gauss.

Demostración.
Supongamos que la aplicación de Gauss $N\colon S \to \mathbb{S}^2$ es diferenciable y está definida en toda S. Ahora, consideremos una familia $\mathbb{A}$ de parametrizaciones tales que cubren a S y $\varphi\colon \Omega \to U$ un elemento de $\mathbb{A}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que Ω es conexo y que para todo $p \in \Omega$,

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(p).$$

Realizamos esto para cada parametrización en la familia original, tenemos que, si $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otro elemento de $\mathbb{A}$ con $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, entonces $\tilde{N} = N$. Esto implica que

$$\text{signo}\left(\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}\right) = 1.$$

Como esto ocurre para cada par de funciones en $\mathbb{A}$, se sigue que la superficie es orientable.

Para la otra parte de la demostración, dadas las coordenadas (u, v) en U y $(\tilde{u}, \tilde{v})$ en $\tilde{U}$ consideremos la aplicación de Gauss

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(p).$$

Consideremos la relación

$$N(p) = \text{signo}\left(\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}\right) \tilde{N(p)}.$$

Observemos que si la superficie es orientable entonces $\dfrac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})} > 0$ y por lo tanto $N(p) = \tilde{N}(p)$. Esto demuestra que N se puede definir de manera global.

Como N está definida localmente por funciones diferenciables, la aplicación de Gauss también diferenciable. ♣

Si recordamos el Teorema 2.1.1, tenemos tres formas de caracterizar las superficies localmente, ya vimos que si son gráfica de una función, entonces son orientables; también cómo saber si una superficie parametrizada es o no orientable. Ahora veamos el caso de las superficies dadas como la imagen inversa de un valor regular.

Proposición 3.2.1.
Consideremos una superficie S dada como $F^{-1}(\lambda)$ donde $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y λ es un valor regular, entonces S es orientable.

Demostración.
Debido a que λ es un valor regular, para cada p en S se tiene que el vector gradiente $\nabla F(p)$ no se anula. Definimos la aplicación de Gauss como

$$N(p) = \frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}.$$

Luego, por el Teorema 3.2.1, se sigue que S es orientable. ♣

Una pregunta que puede surgirnos ahora es ¿existen superficies no orientables? pues de no ser así el concepto de orientabilidad no es necesario, en el siguiente ejemplo se discute la existencia de superficies no orientables.

Ejemplo 3.2.2. ***Möbius y su banda***
Consideremos el rectángulo $\Omega = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$. Si identificamos los puntos de la forma $(0, t)$ con los puntos $(2\pi, -t)$, como se observa en la Figura 3.4, al resultado de la identificación le llamamos ***banda de Möbius*** *y la denotaremos por M^2.*

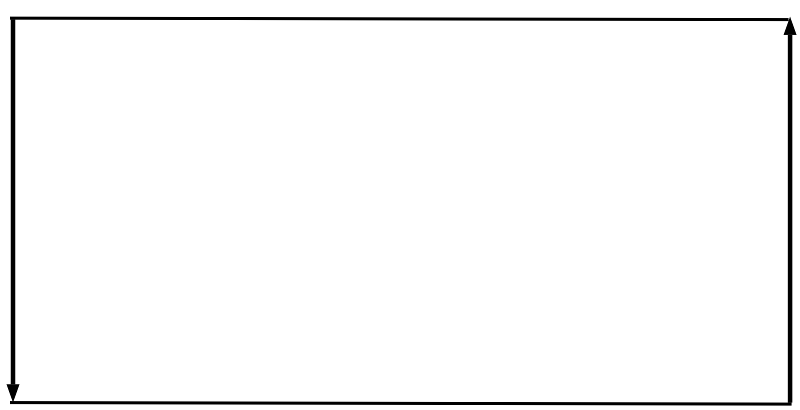


Figura 3.4: Identificación de los lados de un rectángulo.

Desde un punto de vista intuitivo, M^2 se obtiene de pegar las orillas de la banda Ω torciendo una vez este conjunto, una visualización de la superficie se puede observar en la Figura 3.5.

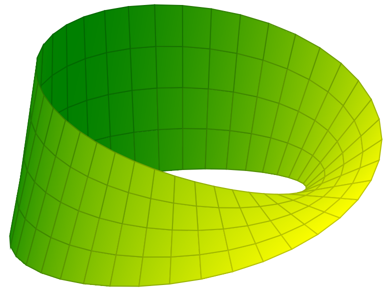


Figura 3.5: Banda de Möbius.

Consideremos ahora la circunferencia Γ *dada por los puntos con coordenadas* $(\phi, 0)$ *en* M^2 *y un punto* $p \in \Gamma$. *Supongamos que para cada punto* p *tenemos un vector normal* $N(p)$ *a* S *en* p *y que deslizamos este a lo largo de* Γ, *esto es construimos un campo normal en* Γ *iniciando en* $N(p)$. *Es fácil darse cuenta que cuando se cierra el circuito en* Γ *el vector de retorno a* p *es* $-N(p)$. *De esta forma no es posible definir en todo* M^2 *un campo diferenciable* N *que no se anule. Daremos ahora una prueba rigurosa de la no orientabilidad de la banda de Möbius.*

Una parametrización para M^2 *está dada por*

$$\varphi(u,v) = \left(\left(2 - v \operatorname{sen}\left(\tfrac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(u), \left(2 - v\operatorname{sen}\left(\tfrac{u}{2}\right)\right)\cos(u), \cos\left(\tfrac{u}{2}\right)\right).$$

Observemos que esta parametrización omite los puntos del intervalo abierto $u = 0$. *Entonces consideremos la siguiente parametrización*

$$\tilde{\varphi}(\tilde{u},\tilde{v}) = \left(\left(2 - \tilde{v}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2}\right)\right)\cos(\tilde{u}), -\left(2 - \tilde{v}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(\tilde{u}), \tilde{v}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{u}}{2}\right)\right)$$

la cual omite al abierto $u = \frac{\pi}{2}$. *Estas dos parametrizaciones cubren a la banda de Möbius (véase [8], pág. 239).*

Notemos que la intersección de los dominios de las parametrizaciones son los siguientes dos conjuntos conexos

$$W_1 = \left\{\varphi(u,v) | \frac{\pi}{2} < u < 2\pi\right\},$$

$$W_2 = \left\{\varphi(u,v) | 0 < u < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Por lo tanto el cambio de coordenadas entre W_1 *y* W_2 *está dado por*

$$\tilde{u} = u - \tfrac{\pi}{2},$$
$$\tilde{v} = v.$$

Mientras que el cambio de coordenadas entre W_2 *y* W_1 *se expresa cómo*

$$\tilde{u} = u + \tfrac{3\pi}{2},$$
$$\tilde{v} = -v.$$

De aquí tenemos que en W_1 se tiene

$$\frac{D(\tilde{u},\tilde{v})}{D(u,v)} = 1 > 0$$

y en W_2

$$\frac{D(\tilde{u},\tilde{v})}{D(u,v)} = -1 < 0$$

Para mostrar que la banda de Möbius no es orientable, supongamos que es posible definir una aplicación de Gauss sobre toda la banda, podemos asumir que para cada p en W_1

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(p),$$

y para cada p en W_2

$$N(p) = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|}(p).$$

Observemos que el jacobiano del cambio de coordenadas debe ser -1 en W_1 o W_2, por lo tanto, si p es un punto de la intersección tenemos que $N(p) = -N(p)$ lo cual es una contradicción, por tanto M^2 no es orientable.

Notemos que hasta ahora no hemos dicho nada sobre la "forma" de las superficies, así veamos un poco sobre lo que es y como medirla.

3.3. Curvatura de las superficies

Hasta este punto lo único que sabemos sobre la "forma" de una superficie es que es localmente parecida a un abierto del plano, pero este hecho no nos proporciona información global de la "forma" de la superficie.

Sabemos que en cada punto existe un espacio que mejor aproxima a la superficie S, el cual es el espacio tangente, también sabemos que todo plano se determina por un vector normal N, consideremos un plano P que contenga a N, así, al intersecar P con N obtenemos una curva γ sobre S, este hecho se ilustra en la Figura 3.6. Sabemos que γ tiene una curvatura, veremos como es que la curvatura de estas curvas γ nos ayudan a saber cómo es la forma de S.

Consideremos una superficie S con parametrización $\varphi\colon \Omega \to S$ y una curva suave $\beta\colon (a,b) \to \Omega$ que pasa por el punto q, luego tenemos que $\gamma = \varphi \circ \beta$ es una curva diferenciable contenida en S que pasa por $p = \varphi(q)$. De aquí que derivando con respecto al parámetro t tenemos que

$$\gamma'(t) = \varphi_u u'(t) + \varphi_v v'(t)$$

por lo tanto al derivar nuevamente con respecto a t tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma''(t) &= \varphi_{uu}u'(t)^2 + \varphi_{uv}u'(t)v'(t) + \varphi_u u''(t) + \varphi_{uv}u'(t)v'(t) + \varphi_{vv}v'(t)^2 + \varphi_v v''(t) \\
&= \varphi_{uu}u'(t)^2 + 2\varphi_{uv}u'(t)v'(t) + \varphi_{vv}v'(t)^2 + \varphi_u u''(t) + \varphi_v v''(t).
\end{aligned}$$

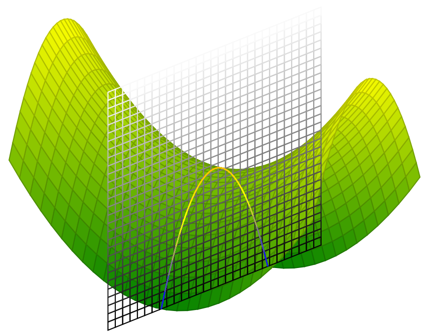


Figura 3.6: Intersección de una superficie con un plano perpendiculares.

Luego, calculando el producto interior entre γ'' y N, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \gamma'', N\rangle = & \langle \varphi_{uu}u'(t)^2 + 2\varphi_{uv}u'(t)v'(t) + \varphi_{vv}v'(t)^2 + \varphi_u u''(t) + \varphi_v v''(t), N\rangle \\ = & \langle \varphi_{uu}, N\rangle u'(t)^2 + 2\langle \varphi_{uv}, N\rangle u'(t)v'(t) + \langle \varphi_{vv}, N\rangle v'(t)^2 \\ & + \langle \varphi_u, N\rangle u''(t) + \langle \varphi_v, N\rangle v''(t)\end{aligned}$$

Recordemos que por la definición de N, φ_u y φ_v son ortogonales a N, por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle \gamma'', N\rangle = & \langle \varphi_{uu}, N\rangle u'(t)^2 + 2\langle \varphi_{uv}, N\rangle u'(t)v'(t) + \langle \varphi_{vv}, N\rangle v'(t)^2 \\ = & eu'(t)^2 + 2fu'(t)v'(t) + gv'(t)^2\end{aligned}$$

donde

$$e = \langle \varphi_{uu}, N\rangle,$$

$$f = \langle \varphi_{uv}, N\rangle,$$

$$g = \langle \varphi_{vv}, N\rangle.$$

Observemos que si

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

entonces podemos escribir $\langle \gamma'', N\rangle$ como

$$\langle \xi, \xi\rangle_B = \xi^t B\xi,$$

donde $\xi = \gamma'(0)$.

Definición 3.3.1.
Dada una superficie S y una parametrización φ de S al rededor de un punto p, definimos la forma cuadrática $\langle\ ,\ \rangle_B$ como $\langle \xi, \xi\rangle_B = \xi^t B\xi$ donde

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

$\xi \in T_p(S)$ y los coeficientes de la matriz B están dados por

$$e = \langle \varphi_{uu}, N\rangle,$$

$$f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle,$$
$$g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle.$$

A esta forma cuadrática la llamaremos la ***segunda forma fundamental de la superficie*** *S* ***en el punto*** *p.*

A continuación veremos una forma diferente de calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Lema 3.3.1.
Consideremos una superficie S y una parametrizacion φ de S, entonces se verifican las siguientes igualdades:

$$e = -\langle N_u, \varphi_u \rangle, \tag{3.12}$$
$$f = -\langle N_v, \varphi_u \rangle, \tag{3.13}$$
$$f = -\langle N_u, \varphi_v \rangle, \tag{3.14}$$
$$g = -\langle N_v, \varphi_v \rangle. \tag{3.15}$$

Demostración.
Consideremos una superficie S, y una parametrización φ de S, con regla de correspondencia $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Así, el vector normal N está dado por

$$N = (x_u y_v - x_v y_u, x_v z_u - x_u z_v, y_u z_v - z_u y_v).$$

De aquí que

$$N_u = (N_{u,1}, N_{u,2}, N_{u,3})$$

donde las funciones coordenadas satisfacen

$$N_{u,1} = y_{uu} z_v + y_u z_{uv} - y_{uv} z_u - y_v z_{uu},$$
$$N_{u,2} = x_{uv} z_u + x_v z_{uu} - x_{uu} z_v - x_u z_{uv},$$
$$N_{u,3} = x_{uu} y_v + x_u y_{uv} - x_{uv} y_u - x_v y_{uu}.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} -\langle \varphi_u, N_u \rangle &= -x_{uu} y_u z_v - x_u y_u z_{uv} + x_{uu} y_v z_u + x_u y_{uv} z_u - x_{uv} y_u z_u - x_v y_{uu} z_u \\ &= x_u y_v z_{uu} + x_{uu} y_u z_v + x_v y_{uu} z_u - x_u y_{uu} z_v - x_v y_u z_{uu} - x_{uu} y_v z_u \\ &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle \end{aligned}$$

Las identidades (3.13), (3.14) y (3.15) se comprueban de manera análoga. ♣

Observemos que como el campo normal es ortogonal a la superficie S entonces N_u y N_v pertenecen a $T_p(S)$, así tenemos que

$$N_u = a_{11} \varphi_u + a_{12} \varphi_v, \tag{3.16}$$
$$N_v = a_{21} \varphi_u + a_{22} \varphi_v. \tag{3.17}$$

Busquemos los coeficientes de la matriz $A = (a_{ij})$. Notemos que con (3.16) y (3.17) podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental como lo especifica el Lema 3.3.1, es decir

$$\begin{aligned} -e = & \langle N_u, \varphi_u \rangle \\ = & a_{11}E + a_{12}F \end{aligned} \tag{3.18}$$

y

$$\begin{aligned} -f = & \langle N_u, \varphi_v \rangle \\ = & a_{11}F + a_{12}G \end{aligned} \tag{3.19}$$

Sustituyendo N_v por N_u en (3.18) y (3.19) tenemos que

$$-f = a_{21}E + a_{22}F \tag{3.20}$$

y

$$-g = a_{21}F + a_{22}G. \tag{3.21}$$

Por lo tanto, de las relaciones (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21) resulta que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

De aquí que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Así tenemos determinada a la matriz A, y es tal que cumple con la relación

$$\begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, recordemos que toda matriz tiene asociados un par de invariantes algebraicos, los valores propios, los cuales denotaremos por λ_1 y λ_2 y a su vez estos tienen asociados un vector digamos V_1 y V_2, observemos que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces V_1 y V_2 forman una base para $T_p(S)$. Así tenemos que los valores pripios juegan un papel importante para las superficies.

Definición 3.3.2.
A los valores propios de la matriz A los llamaremos las ***curvaturas principales de S en el punto*** *p.*

Recordemos que a partir de los valores propios podemos calcular dos invariantes algebráicos de A, el determinante y la mitad de la traza, a estos invariantes los llamaremos, **curvatura gaussiana** o **curvatura de Gauss** y **curvatura media** respectivamente, las cuales se denotaremos por K y H.

Un cálculo directo muestra que la curvatura gaussiana y media de una superficie se pueden calcular como

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \tag{3.22}$$

$$H = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(EG - F^2)}. \tag{3.23}$$

Por otra parte, observemos que los coeficientes de la segunda forma fundamental dependen unicamente de la parametrización, por este motivo daremos una definición que nos ayudará a simplificar la notación.

Definición 3.3.3.
*Dados $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, definimos y denotamos el **triple producto escalar** como*

$$[a, b, c] = \langle a, b \times c \rangle.$$

Se puede ver fácilmente que el triple producto escalar se puede calcular como

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Por otra parte, de la Definición 3.3.1 tenemos que

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \left\langle \varphi_{uu}, \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \right\rangle = \frac{[\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \left\langle \varphi_{uv}, \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \right\rangle = \frac{[\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle = \left\langle \varphi_{vv}, \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \right\rangle = \frac{[\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v]}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Lema 3.3.2.
Dada una superficie S parametrizada por φ. Entonces los coeficientes de la segunda forma fundamental se calculan como

$$\begin{aligned} e &= \frac{[\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f &= \frac{[\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ g &= \frac{[\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v]}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Así podemos escribir la curvatura gaussiana sólo en términos de la parametrización φ como

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{[\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v][\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v] - [\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v]}{(EG - F^2)^2}. \tag{3.24}$$

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} [\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v][\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v] &= \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle & \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Por otra parte, tenemos que

$$[\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v] = \begin{vmatrix} \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle & \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{vmatrix}. \tag{3.26}$$

Por lo tanto, de (3.24), (3.25) y (3.26) se sigue que la curvatura gaussiana se puede calcular como

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle & \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle & \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}.$$

Antes de continuar veamos un resultado técnico que nos permitirá encontrar una forma de calcular la curvatura gaussiana sólo en función de los coeficientes de la primera forma fundamental.

Lema 3.3.3.
Consideremos una superficie S y parametrición φ de S. Entonces se cumple la identidad

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle - \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

Demostración.
Observemos que por la regla de Leibnitz tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle - \langle \varphi_{uu}, \varphi_{uv} \rangle &= (\langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle)_u - \langle \varphi_u, \varphi_{vvu} \rangle \\ &= ((\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle)_v - \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle)_u - \frac{1}{2}(\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle)_{vv} \\ &= (\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle)_{uv} - \frac{1}{2}(\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle)_{uu} - \frac{1}{2}(\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle)_{vv} \\ &= -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ♣

Con todo lo anterior podemos demostrar el siguiente resultado, el cual nos da una manera de calcular la curvatura gaussiana de una superficie en función sólo de la primera forma fundamental.

Formula de Brioschi.
Consideremos una superficie S y una parametrización φ de S. Entonces la curvatura gaussiana de S está dada por

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}.$$

Demostración.
Observemos que

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \langle\varphi_{uu},\varphi_{vv}\rangle & \langle\varphi_{uu},\varphi_{u}\rangle & \langle\varphi_{uu},\varphi_{v}\rangle \\ \langle\varphi_{u},\varphi_{vv}\rangle & \langle\varphi_{u},\varphi_{u}\rangle & \langle\varphi_{u},\varphi_{v}\rangle \\ \langle\varphi_{v},\varphi_{vv}\rangle & \langle\varphi_{u},\varphi_{v}\rangle & \langle\varphi_{v},\varphi_{v}\rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle\varphi_{uv},\varphi_{uv}\rangle & \langle\varphi_{uv},\varphi_{u}\rangle & \langle\varphi_{uv},\varphi_{v}\rangle \\ \langle\varphi_{u},\varphi_{uv}\rangle & \langle\varphi_{u},\varphi_{u}\rangle & \langle\varphi_{u},\varphi_{v}\rangle \\ \langle\varphi_{v},\varphi_{uv}\rangle & \langle\varphi_{v},\varphi_{u}\rangle & \langle\varphi_{v},\varphi_{v}\rangle \end{vmatrix}}{(EG-F^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{ \langle\varphi_{uu},\varphi_{vv}\rangle(EG-F^2) - \frac{1}{2}E_u \begin{vmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u & F \\ \frac{1}{2}G_v & G \end{vmatrix} + F_u\,\Theta \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}E_v \begin{vmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u & F \\ \frac{1}{2}G_v & G \end{vmatrix} - \langle\varphi_{uv},\varphi_{uv}\rangle(EG-F^2) + \frac{1}{2}E_v \begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_v & F \\ \frac{1}{2}G_u & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2}G_u\,\varrho \right\}$$

$$= \frac{1}{EG-F^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_u u\right)(EG-F^2) + \left(F_u - \frac{1}{2}E_v - \tfrac{1}{2}G_u\right)\Theta \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(E_v - G_u)\varrho \right\}.$$

Donde $\Theta = \begin{vmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u & E \\ \frac{1}{2}G_v & F \end{vmatrix}$ y $\varrho = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_v & E \\ \frac{1}{2}G_u & F \end{vmatrix}$. Por lo tanto tenemos que

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}$$

lo que termina la prueba. ♣

Observemos que gracias a la fórmula de Brioschi sabemos que siempre es posible encontrar la curvatura gaussiana de una superficie conociendo únicamente la primer forma fundamental, así tenemos que la curvatura gaussiana depende únicamente de las propiedades métricas de la superficie. Así mismo tenemos que con ayuda de la fórmula de Brioschi se puede ver que la curvatura gaussiana se puede calcular para superficies inmersas en espacios de mayores dimensiones.

Por otra parte observemos que en el caso particular de que $F=0$

$$K = \frac{1}{(EG)^2}\left\{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & -\frac{1}{2}E_v \\ -\frac{1}{2}G_u & E & 0 \\ \frac{1}{2}G_v & 0 & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & 0 \\ \frac{1}{2}G_u & 0 & G \end{vmatrix}\right\} \tag{3.27}$$

$$= \frac{1}{(EG)^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}\right)EG - \frac{1}{4}E_uG_uG + \frac{1}{2}E_vG_vE + \frac{1}{4}E_vG + \frac{1}{2}G_uE\right\}$$

de aquí que, al simplificar la expresión (3.27) tenemos que

$$K = -\frac{E_{vv}}{2EG} + \frac{E_v^2}{4E^2G} + \frac{E_vG_v}{4EG^2} - \frac{G_{uu}}{2EG} + \frac{G_u^2}{4EG^2} + \frac{E_uG_u}{4E^2G}.$$

Por otra parte, un cálculo directo muestra que

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = -\frac{G_vE_v}{4G^2E} - \frac{E_v^2}{4E^2G} + \frac{E_{vv}}{2EG}$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) = -\frac{E_uG_u}{4E^2G} - \frac{G_u^2}{4EG^2} + \frac{G_{uu}}{2EG}.$$

Así tenemos que la curvatura gaussiana cumple

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right\}.$$

Un caso particular que podemos considerar es cuando la superficie está dada en coordenadas isotermas. En este caso se tiene que la curvatura gaussiana es

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln(\lambda) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\ln(\lambda)\right\} \\ &= -\frac{\Delta\ln(\lambda)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Con lo cual hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1.
Dada una superficie S y una parametrización por coordenadas isotermas φ, la curvatura gaussiana de S está dada por

$$K = -\frac{\Delta\ln(\lambda)}{\lambda^2}.$$

En el siguiente capítulo daremos solución al problema central de esta tesis, el cual es encontrar la superficie S parametrizada sobre un dominio Ω tal que su área sea mínima.

Capítulo 4

Superficies mínimas

En este capítulo se aborda el problema de encontrar superficies parametrizadas que minimizan el área sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. El primer caso que se trata es el de las superficies de revolución, seguido de las superficies dadas como gráficas de funciones y por último se aborda el caso de superficies parametrizadas. Además, se estudian algunos elementos de la teoría de funciones de variable compleja para caracterizar este tipo de superficies.

4.1. Superficies mínimas de revolución

El problema de encontrar una superficie parametrizada sobre un subconjunto abierto y conexo Ω de $\mathbb{R}^2$ que minimice el área, se logró resolver por vez primera en el año de 1760 a manos del gran matemático Leonhard Euler, quien publica su resultado en el artículo "*Recherches sur la courbure des surfaces*" (véase [6]). Dos años después, otro gran matemático llamado Joseph Louis Lagrange, publica otra solución de este problema en su artículo "*Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies*" (véase [9]).

A continuación veremos cómo se resuelve este problema, el método que seguiremos es el propuesto por Lagrange. Comenzaremos resolviendo el caso de las superficies de revolución. Este caso lo podemos formular de la siguiente manera, dados dos puntos $p_1 = (a, a')$ y $p_2 = (b, b')$ ambos en el semiplano xy superior, de todas las curvas suaves γ dadas como la gráfica de una función, que cumplen que su imagen pasa por los puntos p_1 y p_2, ¿cuál o cuales son las curvas que al revolucionarlas con respecto al eje z la superficie obtenida tienen la menor área?

Observemos que nuestro problema es encontrar $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, que cumpla las condiciones $\gamma(a) = a'$ y $\gamma(b) = b'$, y que además cumpla que para toda curva suave $\tilde{\gamma}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ que cumpla las condiciones $\tilde{\gamma}(a) = a'$ y $\tilde{\gamma}(b) = b'$ se verifique

$$A(S) - A(\tilde{S}) \leq 0,$$

donde $A(S)$ es el área de la superficie de revolución generada por γ y $A(\tilde{S})$ es el área de la superficie de revolución generada por $\tilde{\gamma}$. En la Sección 2.3 vimos que el área de la superficie de revolución está dada por

$$A(S) = 2\pi \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+\gamma'(x)^2}dx.$$

A la función $A(S)$ le llamaremos el **funcional de área de las superficies de revolución**.

Veremos a continuación una manera de encontrar condiciones que nos permitan hallar de manera explícita a la curva γ. Antes de esto daremos un concepto que nos ayudará a resolver el problema.

Definición 4.1.1.
Consideremos una curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty[a,b]$ tal que $\gamma(a) = a'$ y $\gamma(b) = b'$, una ***variación de γ determinada por h*** *está dada por*

$$\gamma^t = \gamma + th$$

donde $h \in \mathcal{H} = \{h \in \mathcal{C}^\infty[a,b] | h(a) = 0, h(b) = 0\}$ y $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

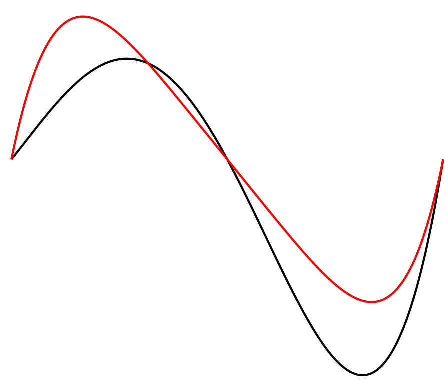


Figura 4.1: Curva (negro) y una variación (rojo).

Al conjunto $\mathcal{H}$ le llamaremos **espacio de variaciones admisibles**.

En la Figura 4.1 podemos visualizar lo que es una variación de una curva, a la superficie de revoluvión generada por la variación de la curva γ la denotaremos por S^t. Por otra parte, observemos que el **área de la superficie generada por la variación de la curva** γ está dada por

$$A(S^t) = 2\pi \int_a^b (\gamma + th)(x)\sqrt{1 + (\gamma' + th')(x)^2}dx.$$

Como queremos minimizar $A(S^t)$, podríamos realizar algo parecido a lo que hacemos cuando queremos minimizar funciones reales de variable real, para esto podemos considerar el funcional de área como una función de la variable t y así encontrar la curva γ que genera a la superficie con menor área.

Definición 4.1.2.
La ***primera variación*** *de* $A(S^t)$ *está dada por*

$$\delta A[h] = \frac{d}{dt}A(S^t)\big|_0$$

En nuestro caso, la primera variación está dada por

$$\begin{aligned}\delta A[h] = & \ \frac{d}{dt}A(S^t)\big|_0 \\ = & \ \frac{d}{dt}\left\{2\pi\int_a^b(\gamma+th)(x)\sqrt{1+(\gamma'+th')(x)^2}dx\right\}\big|_0.\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema de la convergencia dominada (véase [7], pág. 62), tenemos

$$\begin{aligned}\delta A[h] = & \ 2\pi\int_a^b \frac{d}{dt}\left\{(\gamma+th)(x)\sqrt{1+(\gamma'+th')(x)^2}\right\}\big|_0 dx \\ = & \ 2\pi\int_a^b\left\{h(x)\sqrt{1+(\gamma'+th')(x)^2}+\frac{(\gamma+th)(x)(\gamma'+th')(x)h'(x)}{(1+(\gamma'+th')(x)^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\big|_0 dx \\ = & \ 2\pi\int_a^b\left\{h(x)\sqrt{1+\gamma'(x)^2}+\frac{\gamma(x)\gamma'(x)h'(x)}{(1+\gamma'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx.\end{aligned}$$

En conclusión, la primera variación del funcional de área para superficies de revolución está dada por

$$\delta A[h] = 2\pi\int_a^b\left\{h(x)\sqrt{1+\gamma'(x)^2}+\frac{\gamma(x)\gamma'(x)h'(x)}{(1+\gamma'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx.$$

Como veremos en el siguiente resultado, es válido realizar un proceso análogo a lo que hacemos para encontrar los candidatos a máximos y mínimos de funciones reales de variable real.

Teorema 4.1.1.
Si γ *es un mínimo del funcional de área entonces*

$$\delta A[h] = 0$$

para toda $h \in \mathcal{H}$.

La demostración de este resultado se puede consultar en [17] pág. 54.

Observemos que por el Teorema 4.1.1 tenemos que los mínimos del funcional de área satisfacen

$$2\pi\int_a^b\left\{h(x)\sqrt{1+\gamma'(x)^2}+\frac{\gamma(x)\gamma'(x)h'(x)}{(1+\gamma'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx = 0. \tag{4.1}$$

Denotando a $\int_a^x \sqrt{1-\gamma'(t)^2}dt$ por $\Phi(x)$ y aplicando la regla de integración por partes tenemos que

$$\int_a^b h(x)\sqrt{1+\gamma'(x)^2} = h(x)\Phi(x)\Big|_a^b - \int_a^b \Phi(x)h'(x)dx. \tag{4.2}$$

Del hecho de que $h(a)=0$ y $h(b)=0$ tenemos que la expresión (4.2) toma la forma

$$\int_a^b h(x)\sqrt{1+\gamma'(x)^2}dx = -\int_a^b \Phi(x)h'(x)dx, \tag{4.3}$$

sustituyendo (4.3) en (4.1) tenemos

$$\begin{aligned} 2\pi\int_a^b \left\{h(x)\sqrt{1+\gamma'(x)^2} + \frac{\gamma(x)\gamma'(x)h'(x)}{(1+\gamma'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx = & -\int_a^b \Phi(x)h'(x)dx \\ & + \int_a^b \frac{\gamma(x)\gamma'(x)h'(x)}{(1+(\gamma'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\int_a^b h'(x)\left\{\frac{\gamma(x)\gamma'(x)}{(1+(\gamma'(x)^2)^{\frac{1}{2}}} - \Phi(x)\right\}dx = 0. \tag{4.4}$$

Veremos a contuación que la expresión (4.4) se puede simplificar, pero antes veamos primero un Lema técnico.

Lema de Dubois-Reymond.

Consideremos $M \in \mathcal{C}^\infty[a,b]$ tal que $\int_a^b M(x)h'(x)dx = 0$ para toda $h \in \mathcal{H}$. Entonces existe una constante c, tal que $M(x) = c$ para toda x en $[a,b]$.

Demostración.

Elegimos la constante

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b M(x)dx.$$

Así, tenemos que

$$\int_a^b [c - M(x)]dx = 0. \tag{4.5}$$

Definimos la función $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia dada por

$$h(x) = \int_a^x [c - M(t)]dt,$$

notemos que $h(a)=0$ y $h(b)=0$, de aquí que $h \in \mathcal{H}$, por tanto

$$\int_a^b M(x)h'(x)dx = \int_a^b M(x)[c - M(x)]dx = 0. \tag{4.6}$$

Luego, de (4.5) y (4.6) tenemos que

$$c\int_a^b [c - M(x)]dx - \int_a^b M(x)[c - M(x)]dx = 0, \tag{4.7}$$

simplificando la expresión (4.7) tenemos

$$\int_a^b [c - M(x)]^2 dx = 0,$$

como $[c - M(x)]^2 \geq 0$, resulta que $M(x) = c$ para toda x en $[a, b]$. Con lo cual terminamos la demostración. ♣

Volviendo al problema de reducir la expresión (4.4), tenemos que si consideramos

$$M(x) = \frac{\gamma(x)\gamma'(x)}{(1 + \gamma'(x)^2)^{\frac{1}{2}}} - \Phi(x),$$

entonces $M(x) \in \mathcal{C}^\infty[a, b]$, luego por el Lema de Dubois-Reymond

$$\frac{\gamma(x)\gamma'(x)}{(1 + \gamma'(x)^2)^{\frac{1}{2}}} - \Phi(x) = c.$$

Por lo tanto tenemos la siguiente ecuación, la cual es llamada **ecuación de Euler-Lagrange en forma integral**

$$\frac{\gamma(x)\gamma'(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} = \int_a^x \sqrt{1 + \gamma'(t)^2} dt + c. \tag{4.8}$$

Observemos que ya tenemos una forma de identificar a nuestra γ, pues es tal que satisface la ecuación de Euler- Lagrange, pero al ser una ecuación integrodiferencial no se ve una solución evidente y es bastante complicado empezar a probar con todas las funciones que cumplan las condiciones, busquemos una manera de resolver la ecuación.

Derivando la ecuación (4.8) y expandiendo sus términos algebráicos tenemos que

$$\sqrt{1 + \gamma'(x)^2} = \frac{(\gamma'(x)^2 + \gamma(x)\gamma''(x))\sqrt{1 + \gamma'(x)^2} - \gamma(x)\gamma'(x)^2\gamma''(x)(1 + \gamma'(x)^2)^{-\frac{1}{2}}}{1 + \gamma'(x)^2}$$

multiplicando en ambos lados de la ecuación anterior por $(1 + \gamma'(x)^2)^{\frac{3}{2}}$ y reduciendo los términos tenemos que

$$1 + \gamma'(x)^2 = \gamma(x)\gamma''(x). \tag{4.9}$$

De la ecuación (4.9) tenemos la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\gamma''(x) = \frac{\gamma'(x)^2 + 1}{\gamma(x)}. \tag{4.10}$$

Realizando el cambio de variable

$$v(x) = \gamma'(x),$$

la ecuación (4.10) se reduce a la siguiente ecuación diferencial

$$v'(x)\frac{dv}{d\gamma} = \frac{v(x)^2 + 1}{\gamma},$$

la cual tiene por solución

$$v(x)^2 + 1 = \gamma(x)^2.$$

Así, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\gamma'(x) = \sqrt{\gamma(x)^2 - 1}. \tag{4.11}$$

Al resolver la ecuación (4.11) obtenemos

$$\gamma(x) = \cosh(x + c)$$

donde la constante c se determina con las condiciones $\gamma(a) = \gamma_a$ y $\gamma(b) = \gamma_b$.

A la superficie de revolución generada por la curva $\gamma(x) = \cosh(x + c)$, cuya parametrización está dada por $\varphi\colon [0, 2\pi] \times [a, b] \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia $\varphi(u, v) = (\cos(u)\cosh(v+c), \operatorname{sen}(u)\cosh(v+c), v)$, la llamaremos **catenoide** y se puede obsevar en la Figura 4.2.

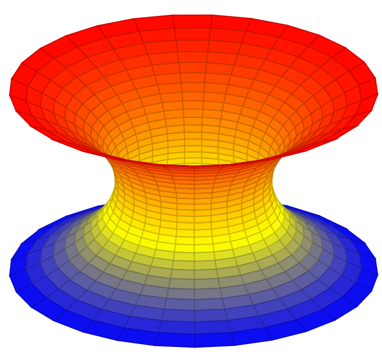


Figura 4.2: Superficie catenoide.

Por lo tanto, la curva que pasa por los puntos p_1 y p_2, y que minimiza el área de su perficie de revolución, es única y está dada por un coseno hiperbólico. Veremos que el método de variaciones se puede generalizar para resolver el problema en el caso de superficies dadas como la gráfica de una función $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donde Ω es un dominio del plano.

4.2. Superficies mínimas dadas como gráficas de una función

Consideremos una superficie S dada como la gráfica de una función suave $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$. Sabemos que el área de la superficie S, está dada por

$$A(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\, dudv.$$

Lo primero que debemos de notar es que podemos definir una variación de manera análoga a la Definición 4.1.1.

Definición 4.2.1.
Consideremos $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una ***variación*** *de f es una función f^t tal que*

$$f^t = f + th,$$

donde $h \in \mathcal{H} = \{h\colon \Omega \to \mathbb{R} | h \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})\, y\, h(q) \equiv 0\, para\, todo\, q\, en\, \partial\Omega\}$ y para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (véase la Figura 4.3).

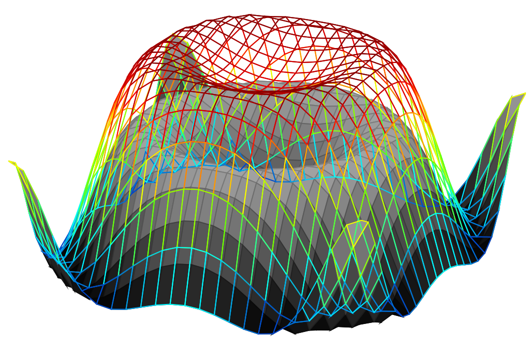


Figura 4.3: Gráfica de una función (gris) y una variación (colores).

Notemos que el área de la superficie generada por una variación de f, la cual denotaremos por S^t, está dada por

$$\begin{aligned} A(S^t) = & \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (f_u + th_u)^2 + (f_v + th_v)^2} dudv \\ = & \iint_{\Omega} \sqrt{\langle (1, f_u + th_u, f_v + th_v), (1, f_u + th_u, f_v + th_v) \rangle} dudv. \end{aligned}$$

Por lo tanto la primer variación de $A(S^t)$ está dada por

$$\begin{aligned}
\delta A[h] = &\ \frac{d}{dt}\iint_{\Omega}\sqrt{\langle(1, f_u + th_u, f_v + th_v), (1, f_u + th_u, f_v + th_v)\rangle}\, dudv\Big|_0 \\
= &\ \iint_{\Omega}\frac{\langle(0, h_u, h_v), (1, f_u + th_u, f_v + th_v)\rangle}{\sqrt{\langle(1, f_u + th_u, f_v + th_v), (1, f_u + th_u, f_v + th_v)\rangle}}\, dudv\Big|_0 \\
= &\ \iint_{\Omega}\frac{h_u f_u + h_v f_v}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\, dudv.
\end{aligned}$$

En conclusión, la primer variación de f está dada por

$$\delta A[h] = \iint_{\Omega}\frac{\langle\nabla f, \nabla h\rangle}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\, dudv. \tag{4.12}$$

Usando la identidad

$$\left\langle\nabla h, \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\right\rangle = h\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\right) - \mathrm{div}\left(\frac{h\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\right), \tag{4.13}$$

se tiene que la expresión (4.12), se puede escribir como

$$\delta A[h] = \iint_{\Omega}\left\{h\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\right) - \mathrm{div}\left(\frac{h\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\right)\right\} dudv. \tag{4.14}$$

Por el Teorema de la divergencia en dimensión dos (véase [2], pág. 473), tenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega}\mathrm{div}\left(\frac{h\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\right) dudv = &\ \int_{\partial\Omega}\left\langle\frac{h\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \mathbf{N}\right\rangle ds \\
= &\ \int_{\partial\Omega} h\left\langle\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \mathbf{N}\right\rangle ds
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario a la curva que es la frontera de Ω.

Como $h \in \mathcal{H}$

$$\int_{\partial\Omega} h\left\langle\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \mathbf{N}\right\rangle ds = 0.$$

Lo que reduce la expresión (4.14) a

$$\delta A[h] = \iint_{\Omega} h\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\right) dudv.$$

Por otra parte, observemos que $\delta A[h] = 0$ es equivalente a

$$\iint_{\Omega} h\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|f\|^2}}\right) dudv = 0.$$

Por el Teorema 4.1.1

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\right)=0.$$

Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\right) &= \frac{f_{xx}\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}-f_x\left(\dfrac{f_xf_{xx}+f_yf_{xy}}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\right)}{1+\|\nabla f\|^2}+\\
&\quad+\frac{f_{yy}\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}-f_y\left(\dfrac{f_xf_{xy}+f_yf_{yy}}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\right)}{1+\|\nabla f\|^2}\\
&= \frac{(1+f_x^2+f_y^2)(f_{xx}+f_{yy})-f_x(f_xf_{xx}+f_yf_{xy})}{(1+\|\nabla f\|^2)^{\frac{3}{2}}}+\\
&\quad-\frac{f_y(f_xf_{xy}+f_yf_{yy})}{(1+\|\nabla f\|^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{f_{xx}(1+f_y^2)+f_{yy}(1+f_x^2)-2f_xf_yf_{xy}}{(1+\|\nabla f\|^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que, si S es una superficie dada como la gráfica de una función suave f, entonces f es un mínimo del funcional del área, si y sólo si, satisface

$$(1+f_u^2)f_{vv}+(1+f_v^2)f_{uu}-2f_uf_vf_{uv}=0. \tag{4.15}$$

A la ecuación en derivadas parciales de segundo orden (4.15) se le llama **ecuación de las superficies mínimas.**

Observemos que de la ecuación (4.15), cualquier polinomio de dos variables de grado uno es una superficie mínima, es decir, **cualquier plano es una superficie mínima**, pues sus segundas derivadas parciales son cero.

Ejemplo 4.2.1.
Busquemos soluciones para la ecuación de las superficies mínimas, comencemos suponiendo que $f(u,v)=h(u)+g(v)$. Así la ecuación (4.15) toma la forma

$$(1+h'(u)^2)g''(v)+(1+g'(v)^2)h''(u)=0,$$

la cual podemos escribir como

$$\frac{h''(u)}{1+h'(u)^2}=-\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2},$$

ya que u y v son variables independientes, podemos proponer una variable de separación a, luego tenemos

$$\frac{h''(u)}{1+h'(u)^2} = a. \tag{4.16}$$

Realizando el cambio de variable

$$h'(u) = s(u),$$

la ecuación (4.16) toma la forma de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{s'(u)}{1+s(u)^2} = a,$$

la cual tiene por solución

$$\arctan(s(u)) = au + c_1,$$

luego

$$s(u) = \tan(au + c_1),$$

por lo tanto, tenemos

$$h'(u) = \tan(au + c_1),$$

así, podemos concluir

$$h(u) = \frac{1}{a}\ln\left[\cos(au + c_1)\right] + k_1.$$

De manera similar

$$g(v) = \frac{1}{a}\ln\left[\cos(av + c_2)\right] + k_2.$$

Observemos que si

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi+2c_1}{2a} + 2n\pi, \frac{\pi-2c_1}{2a} + 2n\pi\right) \times \left(-\frac{\pi+2c_2}{2a} + 2n\pi, \frac{\pi-2c_2}{2a} + 2n\pi\right)$$

entonces la función que buscamos está dada por $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y su regla de correspondencia está dada por

$$f(u,v) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\cos(au + c_1)}{\cos(av + c_2)}\right) + k.$$

A la gráfica de esta función se le llama ***superficie mínima de Scherk*** *o simplemente* ***superficie de Scherk****. En la Figura 4.4 podemos ver la gráfica de f en el caso de que $a = 1$ y c_1, c_2, c_3 y k son cero, además nos restringimos al conjunto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.*

Por otra parte, notemos que hasta este punto sólo tenemos tres ejemplos de superficies mínimas, las cuales son la **catenoide**, la **superficie de Scherk** y **el plano**, y como se ilustra con la superficie de Scherk, es posible que la superficie no esté parametrizada sobre todo el plano, así una pregunta válida es ¿existe alguna superficie mínima S tal que su dominio de parametrización sea todo el plano, pero que su gráfica no sea un plano?

Antes de poder decidir algo sobre la respuesta a la pregunta anterior, enunciaremos un resultado técnico que nos resultará útil para resolver nuestra interrogante.

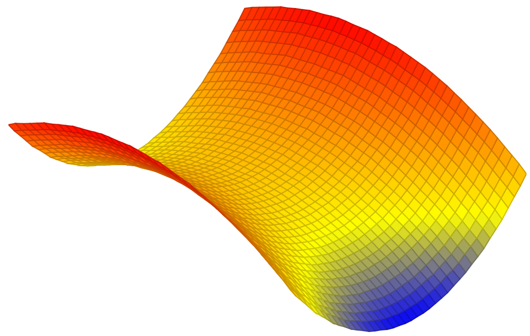


Figura 4.4: Superficie de Scherk.

Lema 4.2.1.
Consideremos una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que es solución de la ecuación*

$$f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2 = 1, \tag{4.17}$$

sujeto a la condición $f_{uu} > 0$*. Entonces* f *es un polinomio de grado dos.*

Demostración.
Consideremos (u_0, v_0), (u_1, v_1) puntos fijos en $\mathbb{R}^2$, definimos la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia

$$h(t) = f\left(u_0 + t(u_1 - u_0), v_0 + t(v_1 - v_0)\right),$$

así, al derivar con respecto a la variable t

$$h'(t) = (u_1 - u_0)f_u + (v_1 - v_0)f_v \tag{4.18}$$

y

$$h''(t) = (u_1 - u_0)^2 f_{uu} + 2(u_1 - u_0)(v_1 - v_0)f_{uv} + (v_1 - v_0)^2 f_{vv} \geq 0 \tag{4.19}$$

donde las funciones están evaluadas en $(u_0+t(u_1-u_0), v_0+t(v_1-v_0))$. De la desigualdad (4.19) tenemos que

$$h'(1) \geq h'(0),$$

o de manera equivalente

$$(x_1 - x_0)(p_1 - p_0) + (y_1 - y_0)(q_1 - q_0) \geq 0, \tag{4.20}$$

donde

$$p_i = f_u(u_i, v_i), \quad q_i = f_v(u_i, v_i).$$

Consideremos la transformación dada por

$$\xi(u, v) = u + f_u(u, v) \quad \eta(u, v) = v + f_v(u, v).$$

Denotando

$$\xi_i(u, v) = \xi(u_i, v_i) \quad \eta(u, v) = \eta(u_i, v_i).$$

tenemos que por (4.20) se cumple

$$(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 \geq (u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2, \tag{4.21}$$

por lo tanto la aplicación que manda las coordenas (u, v) en (ξ, η) incrementa la distancia euclideana.

Por otra parte, tenemos que el jacobiano de la transformación está dado por

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = 1 + f_{uu} + f_{vv} + f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2. \tag{4.22}$$

Como f es solución de la ecuación (4.17), tenemos que (4.22) se escribe como

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = 2 + f_{uu} + f_{vv} \geq 2,$$

y por lo tanto la aplicación de cambio de coordenadas es localmente inyectiva, con lo que concluimos que el cambio de coordenadas es un difeomorfismo.

Así, podemos pensar a la función f como una función que depende de las variables ξ y η. Considerando $\zeta = \xi + i\eta$ definimos

$$F(\zeta) = F(\xi, \eta) = u - iv - (f_u - i f_v).$$

A continuación veremos que F es holomorfa, notemos que agrupando parte real e imaginaria de F tenemos $F(\xi, \eta) = u - f_u + i(f_v - v)$. Si denotamos a $u - f_u$ por A y a $f_v - v$ por B tenemos (por la regla de la cadena)

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - f_{uu} \frac{\partial u}{\partial \xi} - f_{uv} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - f_{uu} \frac{\partial u}{\partial \eta} - f_{uv} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \xi} = f_{uv} \frac{\partial u}{\partial \xi} + f_{vv} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi}, \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \eta} = f_{uv} \frac{\partial u}{\partial \eta} + f_{vv} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta}. \tag{4.26}$$

Observemos que por el Teorema de la función inversa

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1 + f_{vv}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}, \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{f_{uv}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}, \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{f_{uv}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}, \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1 + f_{uu}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}. \tag{4.30}$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.27), (4.28),(4.29) y (4.30) en (4.23), (4.24), (4.25) y (4.26), tenemos

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{f_{vv} - f_{uu}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}, \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = -\frac{2f_{uv}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \xi} = \frac{2f_{uv}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}, \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \eta} = \frac{f_{vv} - f_{uu}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}. \tag{4.34}$$

De aquí que A y B cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemman y por lo tanto tenemos que F es holomorfa y entera, además tenemos

$$F'(\zeta) = \frac{f_{vv} - f_{uu} + 2if_{uv}}{2 + f_{uu} + f_{vv}}.$$

Observemos que se cumple la relación

$$1 - \|F'(\zeta)\|^2 = \frac{4}{2 + f_{uu} + f_{vv}} > 0,$$

luego, por el Teorema de Liouville (véase [10], pág. 173), $F(\zeta)$ es constante.

Por otra parte, tenemos que

$$f_{uu} = \frac{\|1 - F'\|^2}{1 - \|F'\|^2}, \quad f_{uv} = \frac{i(\overline{F}\,' - F')}{1 - \|F'|^2}, \quad f_{vv} = \frac{\|1 + F'\|^2}{1 - \|F'\|^2}$$

de aquí que f_{uu}, f_{uv} y f_{vv} son constantes, con lo cual se tiene el resultado deseado. ♣

Así, utilizando el Lema 4.2.1 podemos demostrar el siguiente resultado, el cual nos da una respuesta directa a la pregunta de cuántas superficies mínimas expresadas como la gráfica de una función están definidas en todo el plano.

Teorema de Bernstein.
Consideremos una superficie mínima dada como la gráfica de una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces la superficie es un plano. En otras palabras, la única solución de la ecuación de las superficies mínimas definida sobre todo el plano es un polinomio de a lo más grado uno.

Demostración.
Denotemos

$$W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Observemos que la ecuación (4.15), puede escribirse como

$$-\frac{\partial}{\partial u}\frac{f_u f_v}{W}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{1+f_u^2}{W}=0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1+f_v^2}{W}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{f_u f_v}{W}=0.$$

De aquí que existe una función $\tilde{f}$ tal que

$$\tilde{f}_{uu}=\frac{1+f_u^2}{W},$$

$$\tilde{f}_{uv}=\frac{f_u f_v}{W},$$

$$\tilde{f}_{uu}=\frac{1+f_v^2}{W}.$$

Notemos que estas derivadas parciales cumplen la condición

$$\tilde{f}_{uu}\tilde{f}_{vv}-\tilde{f}_{uv}^2=1$$

y además $\tilde{f}_{uu}>0$. Así por el Lema 4.2.1 tenemos que $\tilde{f}_{uu}$, $\tilde{f}_{uv}$, $\tilde{f}_{uu}$ son constantes, por lo tanto f_u y f_v son constantes. Por lo tanto tenemos que $f(u,v)$ es un polinomio de grado 1. ♣

A continuación veremos que existe una modificación del método variacional que se puede utilizar en el caso de superficies parametrizadas.

4.3. Superficies mínimas parametrizadas

La idea de esta sección es encontrar condiciones necearias y suficientes para que una superficie parametrizada sea mínima, esto lo realizaremos utilizando el método de las variaciones. Para esto definamos lo que es una variación de una parametrización.

Definición 4.3.1.
*Consideremos una superficie S parametrizada por $\varphi\colon \Omega\to S$, el vector normal unitario a S denotado por N, una función suave $h\colon \Omega\to\mathbb{R}$ y un número real $\varepsilon>0$. Una **variación normal de S determinada por** h es una función φ^t tal que*

$$\varphi^t=\varphi+thN.$$

Observemos que una variación normal es la parametrización de una superficie, a la cual denotaremos por S^t (véase la Figura 4.5). Por otra parte tenemos que los vectores tangentes a la variación están dados por

$$\varphi_u^t=\varphi_u+th_uN+thN_u,$$

$$\varphi_v^t=\varphi_v+th_vN+thN_v.$$

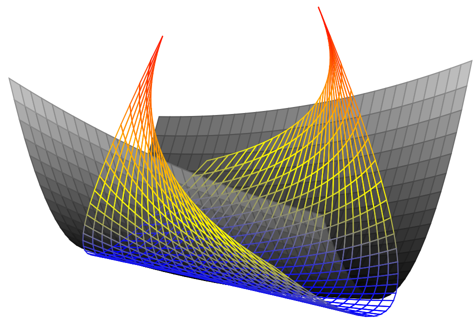


Figura 4.5: Superficie (gris) y una variación normal de una superficie (colores).

Los coeficientes de la primer forma fundamental están dados por

$$E(t) = E - 2the + O(t^2), \tag{4.35}$$
$$F(t) = F - 2thf + O(t^2), \tag{4.36}$$
$$G(t) = G - 2thg + O(t^2), \tag{4.37}$$

donde por $O(t^2)$ denotamos a un término cuadrático en la variable t.

Observemos que por (4.35), (4.36) y (4.37) tenemos

$$\begin{aligned} E(t)G(t) - F(t)^2 = & \ (E - 2the + O(t^2))(F - 2thf + O(t^2)) \\ & -(G - 2thg + O(t^2))^2 \\ = & \ GE - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + O(t^2) \\ = & \ (GE - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} = & \ \sqrt{(GE - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2)} \\ = & \ \sqrt{EG - F^2}\sqrt{1 - 4thH + O(t^2)}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Completando cuadrados en la segunda raíz de (4.38) tenemos

$$\sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} = \sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2),$$

así, el área de una variación normal está dada por

$$A(S^t) = \iint_\Omega \left\{ \sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2) \right\} dudv. \tag{4.39}$$

A la expresión (4.39) se le conoce como el **funcional de área para una superficie parametrizada**. Observemos que su primer variación está dada por

$$\begin{aligned} \delta A[h] = & \ \frac{d}{dt} \iint_\Omega \left\{ \sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2) \right\} dudv\Big|_0 \\ = & \ -2 \iint_\Omega \left\{ hH\sqrt{EG - F^2} + O(t) \right\}\Big|_0 dudv. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primer variación del funcional de área para una superficie parametrizada, está dada por

$$\delta A[h] = -2 \iint_{\Omega} hH\sqrt{EG - F^2}dudv. \tag{4.40}$$

Definición 4.3.2.
Una superficie se dice ***superficie mínima*** *si su primer variación es cero para toda variación normal.*

Observemos que la definición no es muy útil para determinar si una superficie es o no mínima. Veremos a continuación un resultado que nos permita decidir si una superficie es mínima o no.

Teorema 4.3.1.
Consideremos una superficie S con curvatura media H. Entonces S es mínima si y sólo si la curvatura media es idénticamente cero.

Demostración.
Supongamos que $H \equiv 0$, luego, de la fórmula de la primer variación tenemos que $\delta A[h] = 0$ para toda función $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Por otra parte, supongamos que $\delta A[h] = 0$ y además que existe $q \in \Omega$ tal que $H(q) \neq 0$, definimos $h : \Omega \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $h(q) = H(q)$ y $h \equiv 0$ fuera de una pequeña vecindad de q. Observemos que

$$\delta A[h] = -2 \iint_{\Omega} h^2\sqrt{EG - F^2}dudv < 0$$

en la vecindad de q, luego S no es mínima, lo que contradice nuestros supuestos, por lo tanto $H(q) = 0$ para todo q en Ω. ♣

Sabemos por el Lema 2.1.1 que las superficies dadas como gráficas de una función son un caso particular de las superficies parametrizadas, así veamos a qué se traduce la condición de que la curvatura media sea idénticamente cero para este tipo de superficies.

Consideremos una superficie mínima S dada como la gráfica de una función suave $f\colon \Omega \to S$, sabemos, por la relación (3.23) que la curvatura media de una superficie S está dada por

$$H = \frac{Ge + Eg - 2Ff}{2(EG - F^2)},$$

ya que S está dada como la gráfica de una función, tenemos

$$H = \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} + (1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_uf_vf_{uv}}{2(1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - (f_uf_v)^2)},$$

por lo tanto tenemos que al ser S mínima se cumple que

$$(1 + f_u^2)f_{vv} + (1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_uf_vf_{uv} = 0$$

la cual, es la **ecuación de las superfices mínimas**.

Por otra parte, sabemos que toda superficie se puede ver como la imagen de una función $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, es decir, la podemos ver como una tripleta de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\colon \Omega \to \mathbb{R}$, ¿cómo es que la condición de ser mínima se ve reflejada en las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$?

4.4. La representación de Weierstrass-Enneper

Consideremos una superficie S y una parametrización de S que denotaremos por φ, sin pérdida de generalidad podemos suponer que φ está dada en coordenadas isotermas, así, se cumplen las siguientes relaciones

$$\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle, \tag{4.41}$$
$$\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0. \tag{4.42}$$

Derivando las expresiones (4.41) y (4.42) tenemos

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = 0, \tag{4.43}$$
$$\langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle = 0, \tag{4.44}$$
$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle, \tag{4.45}$$
$$\langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle. \tag{4.46}$$

Al combinar las expresiones (4.43) y (4.46) tenemos

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = 0.$$

Por lo tanto, se sigue

$$\langle \Delta\varphi, \varphi_v \rangle = 0, \tag{4.47}$$

donde $\Delta\varphi = \varphi_{uu} + \varphi_{vv}$.

De manera análoga, al combinar las expresiones (4.44) y (4.45) concluimos que

$$\langle \Delta\varphi, \varphi_u \rangle = 0. \tag{4.48}$$

Notemos que de las relaciones (4.47) y (4.48) obtenemos que $\Delta\varphi$ es ortogonal al plano tangente a la superficie en cada punto, por lo tanto

$$\|\Delta\varphi\| = \pm\langle \Delta\varphi, N \rangle = \pm(e + g).$$

Recordemos que la curvatura media H está dada por

$$H = \frac{g + e}{2\lambda^2},$$

por lo tanto, tenemos que la curvatura media puede escribirse como

$$H = \frac{1}{2\lambda^2}\langle \Delta\varphi, N \rangle. \tag{4.49}$$

Observemos que a partir de la condición (4.49), obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.4.1.
Consideremos una superficie S parametrizadas por coordenadas isotermas, luego S es mínima si y sólo si su paramaterización es armónica.

Demostración.
Consideremos una superficie mínima S, de aquí que $H \equiv 0$, luego por (4.49), tenemos que $\langle \Delta\varphi, N \rangle = 0$ y como $N \neq 0$ para todo punto en S, entonces $\Delta\varphi = 0$.

Supongamos que $\Delta\varphi = 0$, luego por (4.49) tenemos que $H = 0$, por lo tanto S es mínima. ♣

Antes de continuar analizaremos un ejemplo que ilustra el hecho de que una superficie armónica no siempre es mínima.

Ejemplo 4.4.1.
Consideremos una superficie S parametrizada por la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia

$$\varphi(u, v) = (u^2 - v^2, u, uv).$$

Una visualización de esta superficie se puede observar en la Figura 4.6. Observemos que las funciones coordenadas son armónicas y además

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (2u, 1, v), \\ \varphi_v &= (-2v, 0, u); \end{aligned}$$

así, los coeficientes de su primera forma fundamental están dados por

$$\begin{aligned} E &= 4u^2 + v^2 + 1, \\ F &= -3uv, \\ G &= 4v^2 + u^2, \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que S no está dada en coordenadas isotermas, veamos que tampoco es mínima, para esto primero calculemos el vector normal a S:

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_u}{\|\varphi_u \times \varphi_u\|} = \frac{1}{4u^4 + 4v^4 - 8u^2v^2 + 4}(u, 2v^2 - 2u^2, 2).$$

Por lo tanto, los coeficientes de la segunda forma fundamental están dados por

$$\begin{aligned} e &= \frac{2u}{4u^4 + 4v^4 - 8u^2v^2 + 4}, \\ f &= \frac{2}{4u^4 + 4v^4 - 8u^2v^2 + 4}, \\ g &= \frac{-2u}{4u^4 + 4v^4 - 8u^2v^2 + 4}. \end{aligned}$$

Así, la curvatura media de S está dada por

$$H = \frac{6uv^2 - 6u^3 + 12uv - 2}{2(4u^4 + 4v^4 - 8u^2v^2 + 4)[(4u^2 + v^2 + 1)(4v^2 + u^2) - 9u^2v^2]}.$$

La cual, claramente no es idénticamente cero, por lo tanto tenemos que S no es mínima.

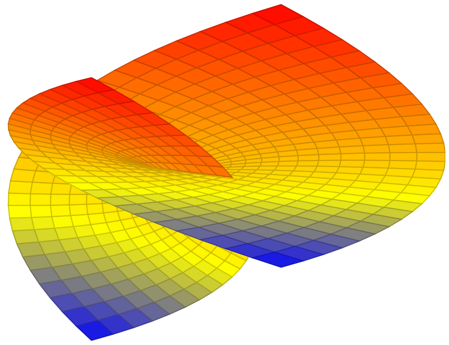


Figura 4.6: Superficie armónica no mínima.

Consideremos una superficie S paramétrizada por $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)$ y $w = u + iv$. Definimos las funciones

$$\varphi_j = 2\,\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial w} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial u} - i\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial v} \tag{4.50}$$

donde $j = 1, 2, 3$.

Notemos que al elevar φ_j al cuadrado, tenemos que

$$\varphi_j^2 = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial u} - i\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial u}\right)^2 - 2\,i\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial u}\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial v} - \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial v}\right)^2.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} \varphi_j^2 = &\ \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial u}\right)^2 - \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial v}\right)^2 - 2i\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial u}\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial v} \\ = &\ E - G - 2iF.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Por otra parte, de (4.50)

$$\|\varphi_j\|^2 = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial v}\right)^2,$$

así, tenemos que se verifica

$$\sum_{j=1}^{3} \|\varphi_j\|^2 = E + G. \tag{4.52}$$

Observemos que en el caso particular de que la parametrización esté dada por coordenas isotermas, se tiene

$$\sum_{j=1}^{3} \varphi_j(w)^2 = 0, \tag{4.53}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \|\varphi_j\|^2 > 0. \tag{4.54}$$

Si S es una superficie mínima, sabemos que las coordenadas $\tilde{\varphi}_j$ son armónicas y φ_j son analíticas. Así a cada superficie mínima le corresponden una tripleta de funciones analíticas φ_j con las propiedades (4.53) y (4.54), veamos si el recíproco también es válido.

Notemos que

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial w} = \frac{1}{2}\varphi_j,$$

con $j = 1, 2, 3$. Así, por hipótesis y las relaciones (4.51) y (4.52) tenemos que $F = 0$, $E = G$ y $E > 0$ en todo Ω, por lo tanto tenemos que la parametrización de la superficie está dada en coordenadas isotermas.

Las funciones coordenadas son armónicas pues

$$\Delta\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\varphi_j = 0,$$

y cada φ_j es analítica.

Así, como las coordenadas son isotermas y además armónicas, por el Teorema 4.49 tenemos que la superficie parametrizada por $\tilde{\varphi}$ es mínima.

Lo anterior lo podemos resumir en el siguiente enunciado.

Teorema 4.4.1.
Consideremos una superficie diferenciable S paramétrizada en coordenadas isotermas por $\tilde{\varphi}\colon \Omega \to S$ y $w = u + iv$. Entonces las funciones

$$\varphi_j = 2\,\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial w} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial u} - i\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial v}$$

para $j = 1, 2, 3$, son analíticas y tienen las propiedades (4.53) y (4.54).

Recíprocamente, consideremos una tripleta de funciones $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ analíticas en una región simplemente conexa Ω tal que satisfacen (4.53) y (4.54), entonces las funciones

$$\tilde{\varphi}_i = \left\{\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} \varphi_j(w)dw\right\},$$

con $j = 1, 2, 3$, donde por $\displaystyle\int_{z_0}^{z} \varphi_j(w)dw$ denotamos la integral sobre cualquier curva que una z_0 con z, son una parametrización isoterma de una superficie mínima.

Observemos que el Teorema 4.4.1 se pide que la región sea simplemente conexa para que la integral no dependa del camino. Por otra parte notemos que el Teorema 4.4.1 nos da una manera de construir superficies mínimas a partir de una tripleta de funciones analíticas que cumplen algunas condiciones específicas. Veremos a continuación un Lema técnico que nos permitirá reducir el número de funciones que se necesitan en el Teorema 4.4.1.

Lema 4.4.2.
Consideremos una función analítica f y una función meromorfa g ambas definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supongamos que f tiene un cero de órden al menos $2m$ en todos los puntos en donde g tiene un polo de órden m, entonces

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} f(1-g^2), \tag{4.55}$$

$$\varphi_2 = \frac{i}{2} f(1+g^2), \tag{4.56}$$

$$\varphi_3 = fg, \tag{4.57}$$

son analíticas y tienen la propiedad

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0. \tag{4.58}$$

Conversamente, dada una tripleta ordenada de funciones analíticas φ_1, φ_2, φ_3 definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ con la propiedad (4.58), entonces existe una función analítica f y una función meromorfa g tales que se verifican las identidades (4.55), (4.56) y (4.57) excepto si $\varphi_1 = i\varphi_2$ y la representación es única.

Demostración.
Consideremos una función analítica f y una función meromorfa g. Supongamos que f tiene un cero de orden al menos $2m$ en todos los puntos donde g tiene un polo de orden m. Definimos las funciones φ_1, φ_2, φ_3 como en (4.55), (4.56), (4.57). Tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_1^2 &= \frac{1}{4} f^2(1-2g^2+g^4), \\
\varphi_2^2 &= -\frac{1}{4} f^2(1+2g^2+g^4), \\
\varphi_3^2 &= f^2 g^2.
\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0.$$

Notemos que la condición de los ceros de f y los polos de g, garantizan que las funciones φ_i son analíticas, pues tenemos que f se puede escribir como $f(z) = (z-p)^k \tilde{f}(z)$ con $k \geq 2m$, donde la función $\tilde{f}$ es analítica y cumple con $\tilde{f}(p) \neq 0$; por otra parte, g se puede escribir como $g(z) = \dfrac{\tilde{g}(z)}{(z-p)^m}$, donde $\tilde{g}(z)$ es analítica y cumple $\tilde{g}(p) \neq 0$, de aquí que, $g(z)^2 = \dfrac{\tilde{g}(z)^2}{(z-p)^{2m}}$, por lo tanto tenemos que $fg^2(z) = (z-p)^{k-2m}\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)^2$, la cual claramente es analítica, así las funciones φ_j, con $j = 1, 2, 3$, al ser suma de funciones analíticas son analíticas.

Consideremos φ_1, φ_2, φ_3 funciones analíticas, tales que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$. Definimos las funciones

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2 \tag{4.59}$$

$$g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}. \tag{4.60}$$

Observemos que, como φ_1 y φ_2 son analíticas, entonces tambíen f es analítica. Por otra parte, tenemos que g es meromorfa pues es el cociente de funciones analíticas.

Ya que se satisface la igualdad

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2,$$

entonces tenemos

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -fg^2. \tag{4.61}$$

Observemos que de la relación (4.61) la primera función coordenada satisface

$$\varphi_1 = -fg^2 - i\varphi_2,$$

y de la relación (4.59)

$$-i\varphi_2 = f - \varphi_1.$$

Por otra parte, de la relación (4.61), la segunda función coordenada satisface

$$\varphi_2 = ifg^2 + i\varphi_1, \tag{4.62}$$

y de las identidades (4.61) y (4.62)

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2).$$

Sustituyendo φ_1 en (4.62) y despejando φ_2

$$\varphi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2).$$

De las relaciones (4.59) y (4.60) se verifica que

$$\varphi_3 = fg.$$

Observemos que la única forma de que esta representación falle es que en (4.60) ocurra que $\varphi_1 = i\varphi_2$, en cuyo caso tenemos que $\varphi_3 = 0$. ♣

Por lo tanto, combinando los Lemas 4.4.1 y 4.4.2 tenemos el siguiente resultado

Teorema de representación de Weierstrass-Enneper.
Dada una superficie mínima, existe una parametrización isoterma de la forma

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} f(w)(1 - g(w)^2)dw\right\}, \tag{4.63}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} if(w)(1 + g(w)^2)dw\right\}, \tag{4.64}$$

$$\varphi_3(z) = \mathrm{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} f(w)g(w)dw\right\}, \tag{4.65}$$

en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, simplemente conexo, donde f es analítica y g es meromorfa en Ω, con f nula en los polos de g, si es que estos existen, con un cero de órden $2m$ donde g tiene un polo de órden m.

Recíprocamente, dada una función analítica f y una función meromorfa g, ambas definidas en un dominio simplemente conexo Ω, entonces las funciones definidas por (4.63), (4.64) y (4.65) generan una parametrización isoterma de una superficie mínima.

Así, a partir de este Teorema somos capaces de encontrar superficies mínimas de una nueva manera. Ahora veremos un ejemplo de como utilizar el Teorema para construir una superficie mínima.

Ejemplo 4.4.2.
Consideremos las funciónes analíticas $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con regla de correspondencia $f(z) = 1$ y $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con regla de correspondencia $g(z) = z$. Luego las funciones coordenadas de la superficie que inducen f y g están dadas por

$$\varphi_1 = \operatorname{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}(1-w^2)dw\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{z - \frac{z^3}{3} + c\right\} = \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2\right) + k_1,$$

$$\varphi_2 = \operatorname{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} \frac{i}{2}(1+w^2)dw\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{z + \frac{z^3}{3} + c\right\} = -\frac{1}{2}\left(-v + \frac{v^3}{3} - u^2v\right) + k_2,$$

$$\varphi_3 = \operatorname{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} wdw\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{z^2 + c\right\} = \frac{u^2 - v^2}{2} + k_3.$$

Observemos que así hemos encontrado nuestra primer superficie mínima generada a partir de la representación de Weierstrass-Enneper, la cual lleva por nombre superficie de Enneper, la cual puede verse en la Figura 4.7.

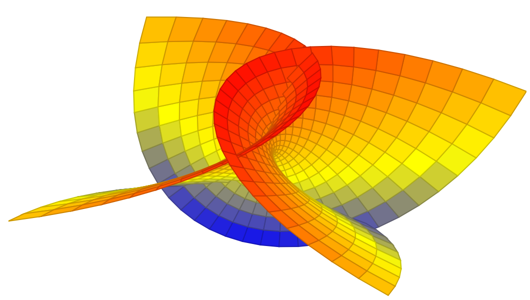


Figura 4.7: Superficie de Enneper.

Al par de funciones (f, g) se les llama **datos de Weierstrass**, notemos que los datos de Weierstras $(\lambda f, g)$, con λ real, generan la misma superficie que (f, g) con la diferencia que es una dilatación con factor λ.

Por otra parte, notemos que de la definición de las φ_j tenemos (ya que la superficie esta parametrizada por coordenas isotermas)

$$\lambda^2 = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} |\varphi_i|^2 = \left(\frac{|f|(1+|g|^2)}{2} \right)^2 .$$

Observemos que hasta este punto tenemos caracterizadas a las superficies mínimas de distintas formas, todas equivalentes, así surge ahora la cuestión de analizar algunos aspectos de las superficies mínimas, como la aplicación de Gauss, por mencionar alguno. En el siguiente capítulo veremos un pequeño análisis del comportamiento de las superficies mínimas.

Capítulo 5

Algunas propiedades de las superficies mínimas

En este capítulo analizaremos algunos aspectos generales de las superficies mínimas, como son, por ejemplo, el comportamiento de su aplicación de Gauss, la curvatura gaussiana y la desigualdad isoperimétrica para las superficies mínimas.

5.1. La aplicación de Gauss de una superficie mínima

Consideremos una superfice S cuya parametrización es φ, supongamos que φ está dada como lo indica la representación de Weierstrass-Enneper. Calculemos la regla de correspondencia de la aplicación de Gauss, sabemos que

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \operatorname{Im}(\varphi_2 \overline{\varphi_3}, \varphi_3 \overline{\varphi_1}, \varphi_1 \overline{\varphi_2}).$$

Sustituyendo los valores de las φ_j tenemos

$$N = \operatorname{Im}\left\{\left(\frac{i}{2} f(1+g^2)\overline{f}\,\overline{g}, fg\frac{1}{2}\overline{f}(1-\overline{g}^2), \left[\frac{1}{2} f(1-g^2)\right]\left[-\frac{i}{2}\overline{f}(1+\overline{g}^2)\right]\right)\right\}, \tag{5.1}$$

simplificando la expresión (5.1) tenemos que el vector normal se expresa como

$$N = \frac{\|f\|^2(1+\|g\|^2)}{4}(2\operatorname{Re}(g), 2\operatorname{Im}(g), \|g\|^2 - 1).$$

La norma del vector normal, se puede calcular en función de f y g como

$$\|N\|^2 = \left[\frac{\|f\|(1+\|g\|^2)}{2}\right]^2.$$

Observemos que de lo anterior, la aplicación de Gauss queda definida por $N\colon S \to \mathbb{S}^2$, con regla de correspondencia

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\|} = \left(\frac{2\operatorname{Re}(g)}{\|g\|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(g)}{\|g\|^2+1}, \frac{\|g\|^2-1}{\|g\|^2+1}\right).$$

Notemos que

$$N = \pi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ g, \tag{5.2}$$

donde $\pi_{\mathbf{N}}^{-1}$ es la inversa de la proyección estereográfica desde el polo norte. De aquí, como π_{N}^{-1} es analítica y g es meromorfa tenemos que N es una función analítica definida de Ω en $\mathbb{S}^2$. Podemos resumir lo anterior en el siguiente resultado.

Teorema 5.1.1.
Si S es una superficie mínima con datos de Weierstrass (f, g), entonces la aplicación de Gauss de la superficie es analítica.

Con esto podemos ver que la representación de Weierstrass-Enneper nos da mucha información de las superficies, pues nos dice como es la métrica y nos ayuda a calcular la aplicación de Gauss, la cual como ya se vio sólo depende de la función g.

Observemos que por la relación (5.2) tenemos que si g omite ciertos valores entonces N también omitirá algunos valores, de aquí que el problema de evitar puntos en la aplicación de Gauss se reduce a encontrar condiciones para g, así una pregunta que nos surge es ¿cuantos puntos de $\mathbb{S}^2$ puede omitir la aplicación de Gauss de una superficie? Antes de avanzar un poco más en la teoría veremos un concepto que nos ayudará a tratar con el problema.

Definición 5.1.1.
Consideremos una superficie S, definimos un ***camino a la frontera de una región*** *como la imagen de una función continua*

$$\gamma \colon [0, \infty) \to S,$$

tal que para todo subconjunto compacto K de la región existe un t_0 tal que $\gamma(t_0, \infty)$ queda fuera de K. Diremos que la superficie es completa si todo camino a la frontera tiene longitud infinita.

Veremos a continuación un resultado técnico que nos permitirá avanzar con el estudio de la aplicación de Gauss.

Lema 5.1.1.
Consideremos una función analítica f definida en el disco unitario $\mathbb{D}$ tal que no se anula en $\mathbb{D}$. Existe un camino γ a la frontera de $\mathbb{D}$ tal que

$$\int_{\gamma} \|f\| |dz| < \infty$$

Demostración.
Definimos

$$w = F(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi.$$

Consideremos $z = G(w)$ una rama de la función inversa tal que $G(0) = 0$, como $\|G(w)\| < 1$ entonces existe un R máximo con $\|w\| < R < \infty$, tal que $G(w)$ se puede definir en $\mathbb{D}_R$. Así, existe un punto $w_0 \in \mathbb{S}^1_R$ tal que $G(w)$ no se puede extender en una vecindad de w_0.

Denotemos por γ' al segmento que une 0 con w_0 y consideremos γ la imagen de γ' bajo $G(w)$. Observemos que γ es un camino a la frontera de $\mathbb{D}$, pues en caso contrario existiría una sucesión w_n, con $w_n \to w_0$ tal que $z_n = G(w_n) \to z_0$ con $\|z_0\| < 1$; de aquí que $F(z_0) = w_0$, y como $F'(z_0) = f(z_0) \neq 0$, entonces $F(z)$ aplica una vecindad de z_0 en una vecindad de w_0 de forma inyectiva, de aquí que $g(w)$ es extendible a una vecindad de w_0, por lo tanto γ es un camino que va a la frontera y

$$\int_\gamma \|f(z)\||dz| = \int_{\gamma'} |dw| = R < \infty.$$

Con lo que damos por terminada la demostración. ♣

Veamos ahora un resultado que nos muestra la relación entre los datos de Weierstrass y el comportamiento de la aplicación de Gauss.

Lema 5.1.2.
Consideremos E un conjunto de al menos tres puntos de $\mathbb{S}^2$ tal que el polo norte N es elemento de E, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

I. *Una superficie mínima cuya aplicación de Gauss omite los puntos de E debe ser un plano.*

II. *Si f, g son funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tales que f no se anula en $\mathbb{D}$ y g no toma los valores de E bajo la proyección estereográfica desde $\boldsymbol{N}$, entonces existe un camino γ que va a la frontera del disco para el cual*

$$\int_\gamma \|f\|(1 + \|g\|^2)|dz| < \infty.$$

Demostración.
Supongamos que para un punto dado en E el inciso II es falso, entonces existen funciones analíticas con $f(z) \neq 0$, tal que

$$\int_\gamma \|f\|(1 + \|g\|^2)|dz| = \infty, \tag{5.3}$$

para todos los caminos que van a la frontera. Observemos que f y g son los datos de Weierstrass de una superficie S que por la ecuación (5.3) es completa, luego como $N = \pi_{\mathbf{N}}^{-1} \circ g$ tenemos que si g omite los puntos de E entonces N también los omite. Finalmente, por el Lema 5.1.2 tenemos que g no es constante pues en caso contrario tendríamos que la relación (5.3) no sería válida para todo camino γ, de aquí que la superficie S no es un plano y es una superficie completa cuya aplicación de Gauss omite al conjunto E. Por tanto tenemos que si ocurre I entonces ocurre II.

Supongamos que II es verdad para un E en particular. Sea S una superficie mínima simplemente conexa tal que N omite al conjunto E, veremos que S es un plano o no es completa. Observe que para esto tenemos dos casos

Caso 1. $D = \mathbb{C}$. Como E contiene al menos tres puntos, por (5.2) tenemos que g es una función meromorfa en todo el plano que omite más de dos puntos, de aquí que g es constante, por lo tanto N es constante y de aquí que S es un plano.

Caso 2. $D = \mathbb{D}$. Como f y g satisfacen II entonces existe un camino γ a la frontera de D tal que

$$\int_\gamma \|f\|(1 + \|g\|^2)|dz| = \infty,$$

luego S no es completa.

Con esto damos por terminada la demostración. ♣

Observemos que podemos combinar los Lemas 5.1.1 y 5.1.2 para obtener el siguiente resultado:

Teorema 5.1.2.
Si la aplicación de Gauss de una superficie mínima completa y simplemente conexa omite una vecindad de un punto, entonces S es un plano.

Demostración.
Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la vecindad que omite N es una vecindad del polo norte $\mathbf{N}$, luego por el Lema 5.1.2 debemos demostrar que

$$\int_\gamma \|f\|(1 + \|g\|^2)|dz| < \infty,$$

para algún camino γ, pero en este caso $f \neq 0$ y $\|g\| < M < \infty$, lo cual es cierto por el Lema 5.1.1. ♣

Sabemos que el vector normal nos ayuda a determinar cuál es la forma de la superficie, pues nos ayuda a encontrar las curvaturas media y gaussiana de una superficie. Como nos interesan las superficies mínimas tenemos que la curvatura media es identicamente cero, por tanto buscamos ahora saber cómo se comporta la curvatura gaussiana de una superficie mínima.

5.2. Curvatura gaussiana de las superficies mínimas

Calcularemos la curvatura gaussiana de la catenoide, sabemos que esta superficie tiene por parametrización

$$\varphi(u, v) = (\cos(u)\cosh(v + c), \operatorname{sen}(u)\cosh(v + c), v),$$

de donde

$$\varphi_u = (-\operatorname{sen}(u)\cosh(v + c), \cos(u)\cosh(v + c), 0),$$

$$\varphi_v = (\cos(u)\operatorname{senh}(v + c), \operatorname{sen}(u)\operatorname{senh}(v + c), 1),$$

de aquí, su primer forma fundamental está dada por

$$\begin{aligned} E &= \cosh^2(v+c) \\ F &= 0 \\ G &= \cosh^2(v+c) \end{aligned}$$

Así, esta es una parametrización por coordenadas isotermas, de aquí que la curvatura gaussiana está dada por

$$K = -\frac{\Delta \ln(\cosh(v+c))}{\cosh^2(v+c)} = -\frac{1}{\cosh^4(v+c)}.$$

Observemos que ya encontramos cómo es la curvatura gaussiana de una superficie mínima en particular, pero el cálculo de la curvatura de la superficie es, en general, complicado.

Recordemos que toda superficie mínima acepta una representación de Weierstrass-Enneper. Así, podemos calcular de forma exacta la curvatura gaussiana de las superficies mínimas. Un cálculo directo muestra que el factor de conformidad λ de la parametrización está dado por

$$\lambda = \frac{\|f\|(1+\|g\|^2)}{2}.$$

Así, por el Teorema 3.3.1 tenemos que la curvatura gaussiana de una superficie mínima S parametrizada por coordenadas isotermas está dada por

$$K = -\frac{\Delta \ln(\lambda)}{\lambda^2}. \tag{5.4}$$

Comencemos primero por calcular $\Delta \ln(\lambda)$. Observemos que por las propiedades del logaritmo

$$\ln\left(\frac{\|f\|(1+\|g\|^2)}{2}\right) = \ln\left(\frac{\|f\|}{2}\right) + \ln\left(1+\|g\|^2\right). \tag{5.5}$$

El primer término de (5.5) se puede calcular como

$$\Delta \ln\left(\frac{\|f\|}{2}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\partial z}\ln\left(\frac{\|f\|}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\ln(f) + \ln(\overline{f})\right\} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{f'}{f} = 0.$$

Por otra parte para el segundo sumando de (5.4) tenemos que

$$\Delta \ln(1+\|g\|^2) = 4\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\partial z}\ln(1+\|g\|^2) = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\overline{g}g'}{1+g\overline{g}} = \frac{4\|g'\|^2}{(1+\|g\|^2)^2}.$$

Por lo tanto

$$K = -\frac{4}{\|f\|^2(1+\|g\|^2)^2}\frac{4\|g'\|^2}{(1+\|g\|^2)^2} = -\left(\frac{4\|g'\|}{\|f\|(1+\|g\|^2)^2}\right)^2.$$

Teorema 5.2.1.
Consideremos una superficie mínima S con datos de Weierstrass (f, g). Entonces su curvatura gaussiana no es positiva en ningún punto y está dada por

$$K = -\left(\frac{4\|g'\|}{\|f\|(1+|g\|^2)^2}\right)^2.$$

Notemos que el caso en que $K = 0$ implica que g' es identicamente cero, por tanto g es constante, así tenemos que la aplicación de Gauss es una función constante, luego existe un único vector normal unitario para todo punto de S, por lo tanto tenemos que S es un plano.

Por otra parte, observemos que con este último resultado tenemos completo un análisis básico sobre las suerficies mínimas, las cuales, por la condición de cumplir $H = 0$ tenemos que son, localmente muy parecidas al plano, así vale la pena preguntarnos si es que la desigualdad isoperimétrica también es válida para las superficies mínimas.

5.3. La desigualdad isoperimétrica para superficies mínimas

Como ya hemos visto, una superficie mínima se caracteriza por tener curvatura media igual a cero, es decir, localmente es plana, así vale la pena preguntarse que tan plana es una superficie mínima, ¿acaso una superficie mínima es tan plana que se cumplirá la desigualdad isoperimética?

Desigualdad isoperimétrica para superficies mínimas.
Consideremos una superficie simplemente conexa y mínima S, denotemos la frontera de S por γ. Si A es el área de la superficie y L la longitud de γ entonces

$$4\pi A \leq L^2.$$

Demostración.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que γ está parametrizada por longitud de arco, luego la parametrización está dada como $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$.
Podemos trasladar γ de manera que satisfaga

$$\int_0^L \gamma_j(s)ds = 0.$$

El área de una superficie la podemos calcular mediante la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_\gamma \langle\varphi, N\rangle ds. \tag{5.6}$$

El lector interesado en la deducción de la fórmula (5.6) puede consultar una demostración en [3], pág. 79.

Consideremos el siguiente campo vectorial a lo largo de γ

$$W = \varphi - \frac{L}{2\pi} N.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
0 \leq &\ \frac{2\pi^2}{L} \int_\gamma \|W\|^2 ds \\
= &\ \frac{2\pi^2}{L} \left[\int_\gamma \|\varphi\|^2 ds - \frac{L}{\pi} \int_\gamma \langle \varphi, N \rangle ds + \frac{L^2}{4\pi^2} \int_\gamma \|N\|^2 ds \right] \\
= &\ \frac{2\pi^2}{L} \left[\int_\gamma \|\varphi\|^2 ds - \frac{2L}{\pi} A + \frac{L^3}{4\pi^2} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$0 \leq \frac{2\pi^2}{L} \int_\gamma \|\varphi\|^2 ds - 4\pi A + \frac{L^2}{2}. \tag{5.7}$$

Por otra parte, considerando las funciones $\tilde{\gamma}_j$ definidas sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ con regla de correspondencia

$$\tilde{\gamma}_j = \gamma_j \left(\frac{L}{2\pi} t \right).$$

Observemos que $\tilde{\gamma}_j$ es una reparametrización de γ_j en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por otra parte por el Lema de Wirtinger tenemos que

$$\int_0^L \gamma_k^2 ds \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2 ds.$$

De aquí que al calcular

$$\int_0^L \|\varphi\|^2 ds \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L \left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 ds = \frac{L^3}{4\pi^2}. \tag{5.8}$$

Así de las desigualdades (5.7) y (5.8) tenemos que

$$0 \leq \frac{2\pi^2}{L} \frac{L^3}{4\pi^2} - 4\pi A + \frac{L^2}{2}$$

de donde concluimos que

$$4\pi A \leq L^2$$

y con lo cual damos terminada la demostración. ♣

Con esto tenemos que las superficies mínimas cumplen con la desigualdad isoperimétrica al igual que el plano y con esto podemos decir la condición de que la curvatura media de una superficie sea cero se traduce a que la superficie es “más parecida” que las otras superficies al plano.

Conclusiones.

En este trabajo de tesis se estudiaron algunos temas relacionados con la teoría de las superficies mínimas. Se comenzó con el estudio de la desigualdad isoperimétrica en el plano para después plantear el problema de minimización del área como una generalización.

El primer caso de estudio de las superficies mínimas se da en las superficies de revolución, en esta sección se encuentra que la única superficie mínima de este tipo es la **catenoide**.

Después, se continua el análisis con el caso de superficies dadas como gráficas de funciones suaves de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. En esta sección se obtiene que la condición de ser mínima es equivalente a que la función cumpla con la **ecuación de las superficies mínimas**

$$(1 + f_u^2)f_{vv} + (1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} = 0$$

. Encontramos además que la única solución de la ecuación de las superficies mínimas definida sobre todo el plano es un polinomio de grado uno, de aquí que la superficie es un plano.

El estudio se continua con el caso de superficies parametrizadas y se llega al resultado de que la minimalidad es equivalente a que la curvatura media sea identicamente cero. Más adelante se encuentra que en el caso de que la parametrización esté dada en coordenadas isotermas la condición de minimalidad es equivalente a que las funciones coordenadas sean armónicas. Así, con ayuda de esta condición, se encuentra que existe una relación entre la teoría de funciones de variable compleja y las superficies mínimas, relación que desemboca en la **representación de Weierstrass-Enneper.** Podemos resumir las condiciones para encontrar superficies mínimas en el siguiente resultado.

Teorema de las superficies mínimas.
Consideremos una superficie S. Entonces los siguientes son equivalentes

- *S es mínima.*
- *La curvatura media de S es identicamente cero.*
- *Si S está dada como la gráfica de una función f, entonces f satisface la ecuación en derivadas parciales $(1 + f_u^2)f_{vv} + (1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} = 0$.*

- *Si φ es una parametrización de S en términos de cordenadas isotermas entonces las funciones coordenadas son armónicas.*

- *Existe una parametrización isoterma $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de la forma*

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(z) = & \quad \mathrm{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} \frac{1}{2} f(w)(1-g(w)^2)dw\right\}\\
\varphi_2(z) = & \quad \mathrm{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} \frac{i}{2} f(w)(1+g(w)^2)dw\right\}\\
\varphi_3(z) = & \qquad \mathrm{Re}\left\{\int_{z_0}^{z} f(w)g(w)dw\right\}.
\end{aligned}
$$

  en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, simplemente conexo, donde f es analítica y g es meromorfa en Ω, con f nula en los polos de g, si es que estos existen, con un cero de órden $2m$ donde g tiene un polo de orden m.

Por otra parte analizamos la curvatura media de las superficies mínimas y concluimos que la curvatura gaussiana es menor o igual que cero, así mismo analizamos el comportamiento de la aplicación de Gauss y por último encontramos que la desigualdad isoperimétrica es válida para las superficies mínimas.

Apéndice A

Elementos de la teoría de funciones de variable compleja

En este apéndice se enlistarán los resultados de la variable compleja que son necesarios para la lectura y comprensión de este trabajo de tésis. Para más detalles al respecto se sugiere al lector consultar [10].

A.1. Funciones holomorfas

Consideramos Ω un abierto de $\mathbb{C}$, una función $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la función f se puede escribir de la manera siguiente $f(w) = u(w) + iv(w)$ donde las funciones u, v son tales que $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$, veamos que se puede definir la derivada de una función de variable compleja de manera análoga a como se hace con funciones de variable real.

Definición A.1.1.
Consideremos $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto. Entonces se dice que f es diferenciable (en el sentido complejo) en $w_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}$$

existe. Este límite se denota por $f'(w_0)$. Así, $f'(w_0)$ es un número complejo. Se dice que f es analítica en Ω si f es diferenciable en el sentido complejo en cada $w_0 \in \Omega$. La frase f es analítica en w_0 significa que f es analítica en una vecindad de w_0.

No es difícil ver que las reglas de derivación para funciones de variable compleja son

Teorema A.1.1.
Supongamos que f y g son analíticas en un dominio Ω, donde Ω es abierto. Entonces se verifican las siguientes igualdades

- *$\alpha f + \beta g$ es analítica en Ω y $(\alpha f + \beta g)'(w) = \alpha f'(w) + \beta g'(w)$ para cualesquiera números complejos α, β.*

- *fg es analítica en Ω y $(fg)'(w) = f(w)g'(w) + f'(w)g(w)$.*

- *Si $g(w) \neq 0$ para toda $w \in \Omega$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es analítica en Ω y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(w) = \frac{f'(w)g(w) - f(w)g'(w)}{g^2(w)}.$$

- *Cualquier polinomio $a_0 + a_1 w + \ldots + a_n w^n$ es analítico en todo $\mathbb{C}$ con derivada $a_1 + \ldots + a_n n w^{n-1}$.*

- *En el caso de que $f(\Omega) \subset \Omega$ tenemos que $f \circ g$ es analítica y además*

$$(f \circ g)'(w) = f'(g(w))g'(w).$$

- *Cualquier función racional $\dfrac{a_0 + a_1 w + \ldots + a_n w^n}{b_0 + b_1 w + \ldots + b_n w^n}$ es analítica en el conjunto abierto que consiste de toda w aquellos puntos en los cuales el denominador es cero.*

Para una demostración véase [11], pág. 75.

Por otra parte, observemos que podemos ver a f como una función de $\mathbb{R}^2$ en si mismo, así será interesante saber cual es la relación entre la diferenciabilidad en el sentido complejo y la diferenciabilidad en el sentido real.

Ecuaciones de Cauchy-Riemman.
Consideremos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con Ω abierto. Entonces f' existe si y sólo si f es diferenciable en el sentido real y en $(x_0, y_0) = w_0$, u y v satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{A.1}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A.2}$$

A las ecuaciones (A.1) y (A.2) se les llama ***ecuaciones de Cauchy-Riemman****.*

Para una demostración vease [11], pág. 80.

A partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemman, podemos demostrar la siguiente propiedad sobre las funciones coordenadas de una función analítica

Lema A.1.1.
Consideremos una función analítica $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Entonces u y v son armónicas.

Demostración.
Como f es analítica entonces sabemos que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, derivando (A.1) con respecto a x y (A.2) con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{A.3}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \tag{A.4}$$

luego al sumar (A.3) con (A.4) tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

La ecuación para v se deduce con un razonamiento análogo. ♣

Si u y v son funciones con valores reales definidas en un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que la función con valores complejos $f = u + iv$ es analítica en Ω, decimos que u y v son **armónicas conjugadas.**

Principio de máximo para funciones armónicas.
Consideremos $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado. Si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es continua y armónica en Ω. Sea M el máximo de u en $\partial(\Omega)$. Entonces

- *se satisface $u(x, y) \leq M$ para toda (x, y) en Ω.*
- *Si $u(x, y) = M$ para algún (x, y) en Ω entonces u es constante en Ω.*

Para una demostración véase [11], pág. 193.

A.2. Integral de funciones holomorfas

En esta parte veremos como integrar funciones de variable compleja, para esto comencemos por considerar una función $h\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ con regla de correspondencia $h(t) = u(t) + iv(t)$, donde $u, v \in \mathcal{C}^\infty$, definimos

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Queremos extender esta definición a integrales de funciones a lo largo de curvas γ en $\mathbb{C}$. Así tenemos la siguiente definición.

Definición A.2.1.
*Consideremos una función continua $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, donde Ω en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y una curva suave $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma([a, b]) \subset \Omega$. Definimos la **integral de** f **a lo largo de** γ como*

$$\int_\gamma f(w)dw = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Observemos que de la Definición A.2.1 se podría pensar que la integral depende de la parametrización de la curva, se demuestra que la integral no depende de la parametrización, el lector interesado en la demostración de este resultado la puede consultar en [10], pág. 112.

Observemos que la integral de una función a lo largo de una curva satisface las siguientes propiedades.

Teorema A.2.1.
Consideremos funciones continuas $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *y curvas suaves* γ, γ_1 *y* γ_2. *Luego se verifica*

- $\displaystyle\int_\gamma (\alpha f(w) + \beta g(w))dw = \alpha \int_\gamma f(w)dw + \beta \int_\gamma g(w)dw.$
- $\displaystyle\int_{-\gamma} f(w)dw = -\int_\gamma f(w)dw$, *donde* $-\gamma$ *es la curva* γ *recorrida de manera inversa.*
- $\displaystyle\int_{\gamma_1 \oplus \gamma 2} f(w)dw = \int_{\gamma_1} f(w)dw + \int_{\gamma_2} f(w)dw$, *donde por* $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ *entendemos recorrer primero* γ_1 *e inmediatamente después* γ_2.

La demostración se puede consultar en [11], pág. 112.

Veremos ahora una forma de saber si es o no posible que la integral no dependa de la curva y sólo dependa de los extremos de los mismos.

Teorema de independencia con respecto a la trayectoria.
Consideremos una función continua $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, *donde* Ω *es abierto y conexo. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

- *Las integrales son independientes de las trayectoria. Es decir, si* w_0 *y* w_1 *son dos puntos distintos en* Ω *y* γ_0, γ_1 *son trayectorias en* Ω *de* w_0 *a* w_1, *entonces* $\displaystyle\int_{\gamma_0} f(w)dw = \int_{\gamma_1} f(w)dw.$
- *Las integrales a lo largo de curvas cerradas son iguales a* 0. *Es decir si* Γ *es una curva cerrada contenida en* Ω *entonces* $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0.$
- *Existe una antiderivada global de* f *en todo* Ω. *Es decir existe una función* F, $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, *analítica en todo* Ω *tal que* $F'(w) = f(w)$.

La demostración se puede consultar en [11], pág. 118.

A.3. Singularidades de funciones

Recordando un poco la teoría de funciones de una variable real, existen un tipo particular de funciones que se puden expresar como una serie de potencias, también es posible en el caso de las funciones de variable compleja.

Teorema A.3.1.
Consideremos $r_1 > 0$ *y* $r_2 > r_1$ *y* $w_0 \in \mathbb{C}$, *tomando la región*

$$\Omega = \{w \in \mathbb{C} | r_1 < \|w_0 - w\| < r_2\}.$$

Si f es una función analítica en la región Ω. Entonces podemos escribir

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(w - w_0)^n},$$

donde ambas series convergen absolutamente en Ω y uniformemente en cualquier conjunto de la forma $B_{p_1,p_2} = \{w \in \mathbb{C} | p_1 \leq \|w - w_0\| \leq p_2\}$ donde $r_1 < p_1 < p_2 < r_2$. Si γ es un círculo alrededor de w_0 con radio r, $r_1 < r < r_2$, entonces los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w_0)^{n+1}} d\zeta$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - w_0)^{n-1} d\zeta.$$

*La serie para f es llamada **serie de Laurent** o **expansión de Laurent** alrededor de w_0 en el anillo Ω. Además la serie de Laurent es única.*

Para una demostración puede consultarse [11], pág. 243.

A partir de esto podemos definir los siguiente conceptos.

Definición A.3.1.
Consideremos una función analítica f en una región que contiene una vecindad de w_0 pero no a w_0, entonces w_0 es llamada una singularidad aislada.

Así tenemos que, si w_0 es una singularidad aislada de f entonces:

- Si todos los b_n, excepto un número finito, en la expanción de Laurent son cero, entonces w_0 es llamado un **polo de** f.

- Si k es el mayor entero tal que $b_k \neq 0$ entonces w_0 es llamado un **polo de orden** k.

- Si un número infinito de b_k es distinto de cero, w_0 es llamada una **singularidad esencial**.

- Si todos los b_k son cero, decimos que w_0 es una **singularidad removible**.

Una función que es analítica en una región Ω excepto para los polos en Ω, es llamada **meromorfa** en Ω.

Apéndice B

Graficas del trabajo

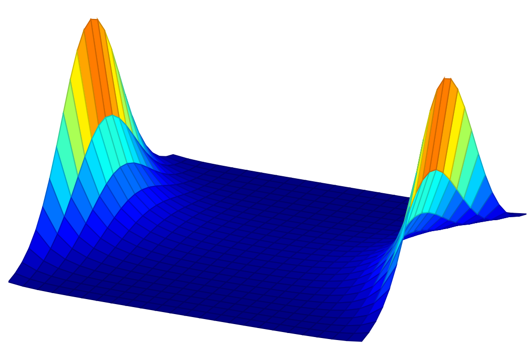
A lo largo del presente trabajo utilizamos diferentes figuras para ilustrar algunos conceptos y ejemplos, en esta sección nos concentraremos explicar como fueron generadas las figuras de las superficies.

Comenzaremos por ver como se genera una superficie dada como la gráfica de una función. Veremos como se genera la gráfica de este tipo de superficies en LaTeX, para esto debemos de utilizar los paquetes *tikz*, *pgfplots* y *graphicx*.

Recordemos que las superficies dadas como gráficas de funciones tienen por parametrización $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, así, tenemos que el código para generar a estas superficies está dada por

```
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[hide axis]
\addplot3 [domain=-2:2,y domain=-2:2,surf,colormap/jet]
(x,y,{exp(x^2-y^2)});
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

A continuación se muestra el resultado del código anterior.



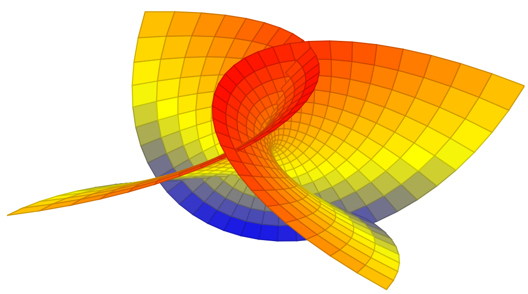
Veremos ahora el caso general para superficies parametrizadas, utilizaremos la superficie de Enneper para ilustrar el proceso de construcción de la superficie. Recordemos que una parametrización de esta superficie está dada por

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2\right) + k_1, \frac{-1}{2}\left(-v + \frac{v^3}{3} - u^2 v\right) + k_2, \frac{u^2 - v^2}{2} + k_3\right).$$

El código LaTeX de la superficie está dado por

```
\begin{figure}[h]
\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[view={20}{55}, hide axis]
\addplot3 [domain=-3:3,y domain=-3:3,samples=30,z buffer=sort,surf]
({(x-x^3*0.3+x*y^2)*0.5},{(-y+y^3*0.3-x^2*y)*0.5},{(x^2-y^2)*0.5});
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{center}
\end{figure}
```

El código anterior genera la figura siguiente



Como podemos observar, las parametrizaciones de las superfcies son muy importantes tanto para el estudio téorico de las superficies, como se vio en los diferentes capítulos de este trabajo, como para la visualización de las mismas a partir de sistemas computacionales.

Bibliografía

[1] Blåsjö, V. The isoperimetric problem. *The American Mathematical Monthly 112*, 6 (2005), 526–566.

[2] Buck, R. C., and Buck, E. F. *Advanced Calculus.* Tata McGraw-Hill Education.

[3] Chern, S. *MMA Studies in Mathematics, Volume 27 Global differential geometry.* The Mathematical Association of America, 1989.

[4] Dubrovin, B., Fomenko, A., and Novikov, S. Modern geometrymethods and applications. part i. the geometry of surfaces, transformation groups, and fields. *Graduate Texts in Mathematics 93*.

[5] Duren, P. *Harmonic mappings in the plane*, vol. 156. Cambridge University Press, 2004.

[6] Euler, L. Recherches sur la courbure des surfaces. *Mem. de l'Academie des Sciences de Berlin 16*, 119-143 (1760), 9.

[7] Grabinsky, G. *Teoría de la medida.* Las Prensas de Ciencias, 2009.

[8] Gray, A. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica.* CRC press, 2006.

[9] Lagrange, J. L. *Essai d'une nouvelle methode pour de'terminer les maxima, et les minima des formules integrales indefinies.* 1761.

[10] Marsden, J. E. *Elementary classical analysis.* Macmillan, 1993.

[11] Marsden, J. E., and Hoffman, M. J. *Análisis básico de variable compleja.* Trillas, 1996.

[12] Myint-u, T. *Partial differential equations of mathematical physics*, vol. 153. Elsevier, 1973.

[13] Oprea, J. *The mathematics of soap films: explorations with Maple*, vol. 10. American Mathematical Soc., 2000.

[14] Osserman, R. *A survey of minimal surfaces.* Courier Corporation, 2002.

[15] Palmas-Velasco, O., and Reyes-Victoria, J. *Curso de geometría diferencial. Parte 1. Curvas y superficies.* Las Prensas de Ciencias, 2008.

[16] Rogawski, J. *Calculus.* Macmillan, 2011.

[17] Sagan, H. *Introduction to the Calculus of Variations.* Courier Corporation, 2012.