



Universidad Tecnológica de la Mixteca

El operador de Schrödinger sobre intervalos y gráficas métricas

Tesis

para obtener el título de
Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Liliana Martínez Santiago

Director de tesis:

Dr. Salvador Sánchez Perales

Co-director:

M.C. Mario Lomelí Haro

Huajuapán de León, Oaxaca, junio de 2016.



Universidad Tecnológica de la Mixteca

El operador de Schrödinger sobre intervalos y gráficas métricas

Tesis

para obtener el título de
Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Liliana Martínez Santiago

Director de tesis:

Dr. Salvador Sánchez Perales

Co-director:

M.C. Mario Lomelí Haro

Huajuapán de León, Oaxaca, junio de 2016.

Dedicado a mis padres:

*Sebastian Martínez Hernández y
María Victoria Santiago Carranza*

Agradecimientos

A mi padre, gracias por apoyarme siempre y ser un ejemplo de vida para mí, eres la persona más admirable que conozco, gracias por los miles de consejos que me has dado y que me han ayudado a ser mejor cada día, te amo papá.

A mi madre, gracias por cuidarme y estar siempre para mí, gracias por tu amor incondicional y sobre todo por apoyarme, sin ti este logro no sería posible. Te amo mamá.

A mi esposo, gracias por el apoyo y la confianza que siempre depositas en mí, sin ti no hubiese sido posible la culminación de este proyecto. Gracias por sostenerme, por estar junto a mí cada vez que estoy por caerme y no permitir que eso pase. Gracias por darme el mejor regalo del mundo, nuestra hija, y sobre todo, gracias por todo tu amor y comprensión. Te amo Ángel.

A mi hija, mi más grande tesoro, mil gracias por existir y hacer de mí una mejor persona. Eres mi fortaleza y mi aliento, quien me da ánimos para seguir siempre adelante. Todos mis esfuerzos son para ti e inspirados en ti. Te amo mi pequeña Romina Victoria.

A mi familia, que me ha brindado su cariño y apoyo, en especial a mis primos Mateo, José y Luis, en quienes siempre he encontrado el cariño que se puede esperar de un hermano. A mi cuñada Adriana, por el cariño que siempre me mostró y el apoyo que nos ha brindado a mi esposo Ángel y a mí.

A mis amigos, que se convirtieron en parte de mi familia, Gustavo, Araceli y Joaquín gracias por no dejar que el paso de los años desgaste el cariño que nos tenemos. A los amigos que conocí en la licenciatura, gracias por sus consejos y por acompañarme en esta travesía. Los quiero.

A mis asesores, Dr. Salvador Sánchez Perales y MC. Mario Lomelí Haro, por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia científica en un marco de confianza, afecto y amistad, fundamentales para el logro de este trabajo.

A mis jurados, por sus valiosas sugerencias y sus acertados aportes durante el desarrollo de este trabajo.

Contenido

Agradecimientos	VII
Contenido	IX
Introducción	XI
Lista de símbolos	XIV
1. Preliminares	1
1.1. Funciones de variación acotada	1
1.2. Funciones absolutamente continuas	3
1.3. Operadores lineales no acotados	8
2. Transformaciones integrales sobre $L_2([a, b])$	11
3. El operador de Schrödinger sobre un intervalo	19
3.1. Propiedades espectrales	39
4. El operador de Schrödinger sobre una gráfica	53
4.1. Gráficas	53
4.2. Condiciones en los vértices de la gráfica	62
4.3. El operador de Sturm-Liouville en la gráfica	65
4.4. Propiedades espectrales	73
Conclusiones	77
Referencias	79
Índice Alfabético	81

Introducción

El estudio del operador de Schrödinger ha sido de gran relevancia debido al papel que desempeña en mecánica cuántica. De este operador se deriva la ecuación de Schrödinger que describe las energías y los estados estacionarios que caracterizan una partícula en un campo de fuerzas que deriva del potencial $q = q(x)$ [15, 4], considerando dependencia e independencia del tiempo, el caso que trabajaremos es unidimensional, independiente del tiempo.

El operador de Schrödinger es un operador de tipo Sturm-Liouville. Estos operadores han sido trabajados ampliamente, tanto en intervalos [16, 10], como en gráficas métricas [25, 26, 20]. En este proyecto de tesis estudiamos el operador de Schrödinger debido a que todo operador de tipo Sturm-Liouville puede llevarse a la forma del operador de Schrödinger mediante algunas manipulaciones algebraicas. Estudiaremos algunas propiedades que se derivan de la elección del dominio del operador de Schrödinger. Cabe resaltar que el dominio que definimos se da de la forma más general, englobando consigo diversas condiciones de contorno. El operador de Schrödinger se define como sigue

$$\mathcal{L}y = -y'' + qy$$

considerando que la función y puede estar definida sobre el intervalo $[0, 1]$ o sobre una gráfica métrica pensando y como un vector de funciones definidas en las aristas.

Regularmente, se hacen estudios del operador de Schrödinger considerando funciones en $C^2([a, b])$ y tomando q una función continua, cuyos resultados son clásicos y en su mayoría ampliamente conocidos (véase [14]). En este proyecto de tesis se aborda el operador de Schrödinger considerando espacios más generales contenidos en $L_2([a, b])$ y q una función Lebesgue integrable, en estos casos las pruebas de los resultados clásicos se complican. El estudio de espacios más generales resulta de gran utilidad puesto que al modelar problemas reales las funciones no siempre son continuas, esto hace que las funciones Lebesgue integrable sean más factibles.

En el capítulo 1, trabajamos funciones absolutamente continuas, pues se requieren para definir el dominio del operador. También, mostramos resultados para

operadores lineales y operadores no acotados, pues el operador \mathcal{L} es un operador lineal no acotado.

En el capítulo 2, se estudian las transformaciones integrales debido a que el inverso del operador de Schrödinger es un operador de este tipo. Se muestra que este tipo de operadores son compactos y ello nos permite conocer algunas propiedades espectrales del operador inverso de \mathcal{L} y por tanto de \mathcal{L} .

En el capítulo 3, definimos el dominio Ω_{vw} del operador en el intervalo a partir de funciones v, w fijas, si consideramos v, w específicas podemos generar diversas condiciones de contorno a través del Wronskiano para el operador \mathcal{L} , las funciones en este conjunto además son absolutamente continuas cuya derivada es absolutamente continua, y cumplen que el operador \mathcal{L} aplicado a estas funciones está en $L_2([0, 1])$. Las pruebas que realizamos se hicieron en forma general, es decir, no especificamos como son las funciones v y w . Mostramos que el operador de Schrödinger con este dominio es un operador lineal autoadjunto, para ello vemos la densidad del dominio sobre el espacio de funciones $L_2([0, 1])$, mostramos que el operador con este dominio es simétrico y que el dominio de su adjunto coincide con Ω_{vw} .

También mostramos algunas propiedades espectrales del operador. Se demuestra que los valores propios del operador de Schrödinger son reales, que las funciones propias de valores propios distintos son ortogonales, además mostramos que existe una sucesión de valores propios de \mathcal{L} .

En el capítulo 4, al igual que en el intervalo definimos el dominio \mathcal{D} del operador de Schrödinger para una gráfica métrica, como mencionamos anteriormente las funciones definidas en la gráfica pueden verse como vectores de funciones, cada una de las cuales junto con su derivada son absolutamente continuas y el operador aplicado a estas funciones está en $L_2([a, b])$, estas además satisfacen condiciones en sus nodos como las de continuidad, Kirchhoff y Dirichlet. Mostramos que este dominio hace que el operador sea autoadjunto, cuyas pruebas se realizaron con ideas propias. Antes de ello hacemos una pequeña revisión de la teoría de gráficas a fin de construir un árbol con raíz que es la gráfica que trabajamos en el proyecto. Las gráficas métricas por definición son gráficas en las que cada arista e tiene una longitud finita positiva l_e , este tipo de estructuras junto con el operador de Schrödinger autoadjunto nos llevan a formar gráficas cuánticas, que han sido objeto de estudio recientemente debido a sus aplicaciones, [12, 13, 3, 2]. Mostramos también algunas propiedades espectrales del operador sobre la gráfica. Cabe mencionar que una de las primeras aplicaciones de las gráficas cuánticas se dio en física, en el contexto de modelos de electrones libres para moléculas orgánicas hace unos sesenta años por Pauling [19], un enfoque que se ha desarrollado en años siguientes. También se han aplicado a la

INTRODUCCIÓN

superconductividad en materiales granulares y artificiales, en redes acústicas y electromagnéticas, e incluso las gráficas cuánticas se han simulado experimentalmente [21, 11, 8, 18].

Lista de símbolos

$\mathcal{P}([a, b])$	Conjunto de particiones del intervalo con extremos a,b
$V_a^b(f)$	Variación de f en el intervalo con extremos a,b
$\mathcal{BV}([a, b])$	Conjunto de funciones de variación acotada
$C^\infty([a, b])$	Conjunto de funciones infinitamente diferenciables
$C_c^\infty([a, b])$	Conjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte en (a,b)
X^\perp	Complemento ortogonal de un conjunto
$L([a, b])$	Conjunto de funciones Lebesgue integrable
$L_2([a, b])$	Conjunto de funciones cuyo cuadrado es Lebesgue integrable
\xrightarrow{u}	Convergencia uniforme
\mathcal{L}	Operador de Schrödinger
$W_x(\cdot, \cdot)$	Wronskiano de dos funciones en x
$\ f\ _2$	Norma en el espacio de funciones cuyo cuadrado es Lebesgue integrable
$\ \Gamma\ $	Norma de un operador
$\ A(y)\ _\infty$	Norma matricial
Ω_{vw}	Dominio del operador de Schrödinger sobre el intervalo
\mathcal{D}	Dominio del operador de Schrödinger sobre una gráfica
$\sigma(A)$	Espectro del operador A
d_v	Grado de un vértice
$R(v)$	Conjunto de aristas que surgen de v
$L_2(T)$	Espacio de funciones definidas sobre la gráfica cuyo cuadrado es Lebesgue integrable

Capítulo 1

Preliminares

Antes de trabajar con el operador de Schrödinger, es necesario dar algunos conceptos y resultados de las funciones de variación acotada y de las funciones absolutamente continuas, dado que serán de utilidad al plantear el dominio del operador. Además daremos resultados para operadores lineales acotados y no acotados, pues el operador de Schrödinger es un operador lineal no acotado y su inverso si existe es acotado.

1.1. Funciones de variación acotada

Definición 1.1 Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de particiones de $[a, b]$. Definimos y denotamos la variación de f en $[a, b]$ por

$$V_a^b(f) = \sup_{\{x_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{P}([a, b])} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Las funciones que verifican que $V_a^b(f) < \infty$ se conocen como **funciones de variación acotada**. Al conjunto de estas funciones lo denotamos como $\mathcal{BV}([a, b])$.

Teorema 1.2 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Luego

- (a) Si $f \in \mathcal{BV}([a, b])$, entonces $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_a^b(f)$ para cualquier $x \in [a, b]$.
- (b) Si $f \in \mathcal{BV}([a, b])$, entonces f es acotada en $[a, b]$.
- (c) Sea $c \in (a, b)$. Luego $f \in \mathcal{BV}([a, b])$ si y sólo si $f \in \mathcal{BV}([a, c])$ y $f \in \mathcal{BV}([c, b])$. Además se cumple $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.
- (d) Las funciones V y D definidas como: $V(x) = V_a^x(f)$, $a < x \leq b$, $V(a) = 0$ y $D(x) = V(x) - f(x)$, $x \in [a, b]$ son funciones crecientes en $[a, b]$.

(e) f se puede expresar como diferencia de dos funciones crecientes.

Demostración.

(a) Resulta de inmediato al considerar la partición $\{a, x, b\}$.

(b) $|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_a^b(f)$. Luego $|f(x)| \leq V_a^b(f) + |f(a)|$.

(c) \Rightarrow] Sea P una partición de $[a, c]$ y P^* una partición de $[c, b]$. Luego $P \cup P^*$ es una partición de $[a, b]$ y

$$\sum_{x_k \in P} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{x_k \in P^*} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V_a^b(f).$$

Fijando P^* y variando P obtenemos que

$$V_a^c(f) \leq V_a^b(f) - \sum_{x_k \in P^*} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Más aún, puesto que P^* arbitrario, tenemos que

$$V_c^b(f) \leq V_a^b(f) - V_a^c(f).$$

De esta manera, f es de variación acotada en $[a, c]$ y $[c, b]$ y además $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$.

\Leftarrow] Sea $Q = \{x_i\}_{i=0}^m$ una partición de $[a, b]$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $x_{i-1} < c < x_i$. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{i-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\quad + \sum_{k=i+1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^{i-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_{i-1})| \\ &\quad + |f(x_i) - f(c)| + \sum_{k=i+1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq V_a^c(f) + V_c^b(f). \end{aligned}$$

Así, f es de variación acotada en $[a, b]$ y $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

(d) V claramente es creciente. Veamos que D también lo es. Sean $a \leq x < y \leq b$. Luego $f(y) - f(x) \leq V_x^y(f) = V(y) - V(x)$, esto implica que $V(x) - f(x) \leq V(y) - f(y)$. Así, $D(x) \leq D(y)$. ■

1.2. Funciones absolutamente continuas

Definición 1.3 Una función f es **absolutamente continua en** $[a, b]$ si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier familia finita de intervalos ajenos $I_i = (a_i, b_i) \subset [a, b]$ se tiene que si

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

El conjunto de las funciones que son absolutamente continuas sobre $[a, b]$ se denota por $AC([a, b])$.

Daremos algunos resultados sobre funciones absolutamente continuas, pues posteriormente nos serán de utilidad para definir el dominio del operador de Schrödinger.

Teorema 1.4 Sea f una función absolutamente continua, entonces f es de variación acotada.

Demostración. Sea f una función absolutamente continua. Consideremos $\epsilon = 1$, así existe $\delta > 0$ tal que para cualquier familia finita $I_i = (a_i, b_i)$ de subintervalos ajenos de $[a, b]$, se tiene que si

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < 1.$$

En particular, consideramos dos puntos x, y en $[a, b]$ tales que $x < y$ y $|x - y| < \delta$, tomamos una partición $P_x = \{x_i\}_{i=0}^n$ del intervalo $[x, y]$ y agregamos los puntos a, b a P_x , se tiene una partición para el intervalo $[a, b]$, luego para esta partición

$$|f(x_0) - f(a)| + \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(b) - f(x_n)| < 1,$$

así

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < 1 - |f(x_0) - f(a)| - |f(b) - f(x_n)|,$$

esto implica que

$$V_x^y(f) < 1.$$

Sea $\{z_i\}_{i=1}^m$ una partición de $[a, b]$ tal que $\|z_i - z_{i-1}\| = \delta$. Entonces por la aditividad de la variación

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{n-1} V_{z_i}^{z_{i+1}}(f) < \infty.$$

Por tanto f es de variación acotada. ■

Enunciaremos el siguiente teorema.

Teorema 1.5 Si f es una función monótona, entonces f es diferenciable casi dondequiera.

Una prueba del teorema anterior la encontramos en [23].

Teorema 1.6 Toda función absolutamente continua sobre un intervalo $[a, b]$ es diferenciable casi dondequiera.

Demostración. Sea f una función absolutamente continua, luego por el teorema 1.4, la función f es de variación acotada, así por el teorema 1.2 se obtiene

$$f = f_1 - f_2,$$

donde f_1, f_2 son funciones monótonas crecientes, y dado que toda función creciente es diferenciable casi en todo punto de $[a, b]$, concluimos que f es diferenciable casi en todo punto de $[a, b]$. ■

Teorema 1.7 (Vitali) Si f es una función absolutamente continua definida en $[a, b]$ y $f' = 0$ casi dondequiera, entonces f es constante en $[a, b]$.

Una prueba del teorema de Vitali la encontramos en [24]. Consideremos el espacio $L([a, b])$ que consiste de funciones Lebesgue integrables en el intervalo $[a, b]$.

Lema 1.8 Si f es creciente en $[a, b]$, entonces f' es Lebesgue integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$.

Demostración. Sean f una función creciente en $[a, b]$ y h_n una sucesión de valores decreciente que tiende a 0. Definimos la función ψ como sigue

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b], \\ f(b) & x \geq b. \end{cases}$$

Luego

$$\psi_{h_n}(x) = \frac{\psi_{h_n}(x + h_n) - \psi_{h_n}(x)}{h_n},$$

tiende a $f'(x)$ casi dondequiera. Por otro lado, dado que $\psi_{h_n}(x) \geq 0$, para todo x y h_n , aplicamos el lema de Fatou y obtenemos que

$$\int_a^b f'(x)dx \leq \underline{\lim} \int_a^b \psi_{h_n}(x)dx,$$

pero

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_{h_n}(x)dx &= \frac{1}{h_n} \left(\int_a^b \psi_{h_n}(x + h_n) - \psi_{h_n}(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{h_n} \left(\int_a^b \psi_{h_n}(x + h_n)dx - \int_a^b \psi_{h_n}(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{h_n} \left(\int_{a+h_n}^{b+h_n} \psi_{h_n}(x) - \int_a^b \psi_{h_n}(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{h_n} \left(\int_b^{b+h_n} \psi_{h_n}(x) - \int_a^{a+h_n} \psi_{h_n}(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{h_n} \left(h_n f(b) - \int_a^{a+h_n} f(x)dx \right), \end{aligned}$$

y como

$$\int_a^{a+h_n} f(x)dx \geq h_n f(a),$$

se cumple

$$\underline{\lim} \frac{1}{h_n} \int_a^{a+h_n} f(x)dx \geq f(a),$$

así

$$\underline{\lim} \int_a^b \psi_{h_n}(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

Por lo tanto, f' es Lebesgue integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$. ■

Lema 1.9 Si F se define sobre $[a, b]$ como $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ entonces $F' = f$ casi dondequiera.

Demostración. Sea $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, luego dado que $f = f_+ - f_-$, donde f_+ y f_- son la parte positiva y negativa de f , se tiene que F es diferencia de dos funciones crecientes, así $F'(x)$ existe casi dondequiera, resta probar que

$F'(x) = f(x)$ casi dondequiera.

Supongamos que f es una función acotada, esto es, $|f(x)| < K$. Sea h_n una sucesión de valores decreciente que tiende a 0. Entonces

$$\left| \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \right| = \left| \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f(t) dt \right| \leq K$$

y

$$\frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \rightarrow F'(x)$$

casi dondequiera. Por el teorema de la convergencia dominada, para $c \in [a, b]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^c F'(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left(\int_{a+h_n}^{c+h_n} F(x) dx - \int_a^c F(x) dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left(\int_c^{c+h_n} F(x) dx - \int_a^{a+h_n} F(x) dx \right) \\ &= F(c) - F(a), \end{aligned}$$

así

$$\int_a^c (F'(x) - f(x)) = 0$$

para todo $c \in [a, b]$. Por lo que $F'(x) = f(x)$ casi dondequiera.

Ahora, supongamos que f no es acotada, dado que $f = f_+ - f_-$, es suficiente hacer la prueba para f positiva. Sean $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones tales que

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq n, \\ n & f(x) > n \end{cases}.$$

Entonces,

$$\int_a^x [f(t) - f_n(t)] dt,$$

es una función positiva y creciente respecto a x . Luego, su derivada existe casi dondequiera y es no negativa. Por otra parte, dado que f_n es acotada, se tiene que

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f_n(t) dt = f_n(x)$$

casi dondequiera. Así, F' existe casi dondequiera y

$$F'(x) \geq f_n(x),$$

cuando $n \rightarrow \infty$,

$$F'(x) \geq f(x)$$

casi dondequiera. De esto se tiene que

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La otra desigualdad se tiene por el lema 1.8, lo que implica que

$$\int_a^b [F'(x) - f(x)]dx = 0,$$

por tanto, $F'(x) = f(x)$ casi dondequiera. ■

Teorema 1.10 Sea f una función definida sobre $[a, b]$. Luego f es absolutamente continua sobre $[a, b]$ si y sólo si f es derivable casi dondequiera y $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

Demostración.

\Rightarrow]

Sea f una función absolutamente continua, entonces f es de variación acotada, así $f = f_1 - f_2$, donde f_1, f_2 son funciones crecientes. Dado que, por el lema 1.8 f_1' y f_2' son Lebesgue integrables, f' es Lebesgue integrable. Por lo que podemos definir $F(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt$. Sea $h = f - F$, luego h es diferenciable casi dondequiera. Diferenciando h se tiene que

$$h'(x) = f'(x) - F'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$$

casi dondequiera. Por el teorema 1.7, h es constante, y

$$h(x) = h(c) = f(c) - f(c) = 0,$$

para todo $x \in [a, b]$. Por tanto

$$f = F.$$

\Leftarrow]

Consideremos la función $F(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt$ y una familia finita de subintervalos ajenos $I_i = (a_i, b_i)$ de $[a, b]$, $1 \leq i \leq n$, tales que $|b_i - a_i| < \frac{\epsilon}{n}$, entonces

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f'(t)|dt = \int_A |f'(t)|dt,$$

donde $A = \cup_{i=1}^n I_i$. Dado que los subintervalos I_i son ajenos

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(I_i) < n \frac{\epsilon}{n} = \epsilon,$$

luego por la continuidad absoluta de la integral

$$\int_A |f'(t)| < \epsilon,$$

por tanto F es una función absolutamente continua. ■

Teorema 1.11 Sea f una función definida sobre $[a, b]$ y $c \in [a, b]$. Luego $f \in AC([a, b])$ si y sólo si $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt$.

Teorema 1.12 (Fórmula de integración por partes) Si $f, g \in AC([a, b])$ entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Teorema 1.13 Sean $[a, b]$ un intervalo y g una función monótona en $[a, b]$. Consideremos f una función definida en $g([a, b])$ y supongamos que existe la integral de Lebesgue $\int_{g([a, b])} f(x)dx$. Entonces existe también la integral de Lebesgue $\int_{[a, b]} f(g(t))g'(t)dt$ y se tiene que

$$\int_{g([a, b])} f(x)dx = \int_{[a, b]} f(g(t))g'(t)dt.$$

El teorema anterior nos será de utilidad en la demostración de un resultado que damos más adelante.

Varios de los resultados presentados en esta sección se pueden generalizar a funciones de valores en \mathbb{C} , como por ejemplo, la definición 1.1, la definición 1.3, el teorema 1.4, el teorema 1.11, el teorema 1.12 y el teorema 1.13.

1.3. Operadores lineales no acotados

Definición 1.14 Sea H un espacio de Hilbert y $D(A)$ un subespacio lineal de H . Un operador lineal A es una aplicación lineal

$$A : D(A) \longrightarrow H$$

donde $D(A)$ se llama *dominio* de A .

En las definiciones siguientes consideraremos a H como un espacio de Hilbert y a $D(A)$ como un subespacio lineal de H .

Definición 1.15 Se dice que un *operador lineal* A es *simétrico* si

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$$

para todo $u, v \in D(A)$.

Definición 1.16 Sean V un espacio vectorial con producto interno y sea $X \subset V$. El *complemento ortogonal de* X se define como el conjunto de todos los vectores en V que son ortogonales a X :

$$X^\perp = \{v \in V : \forall u \in X, \langle v, u \rangle = 0\}$$

Definición 1.17 El *operador adjunto* A^* de un operador lineal A con dominio $D(A)$ denso en H , se define como sigue:

$$A^*u = \hat{u},$$

donde

$$u \in D(A^*) = \{u \in H : \exists \hat{u} \in H, \langle Av, u \rangle = \langle v, \hat{u} \rangle, \forall v \in D(A)\}$$

Observación 1.18 El operador A^* está bien definido.

Demostración. Debemos probar que \hat{u} es único. Sean $\hat{u}_1, \hat{u}_2 \in H$ tales que

$$\langle u, Av \rangle = \langle \hat{u}_1, v \rangle$$

$$\langle u, Av \rangle = \langle \hat{u}_2, v \rangle$$

para todo $v \in D(A)$. Así

$$\langle \hat{u}_1 - \hat{u}_2, v \rangle = 0$$

Entonces, se tiene que $\hat{u}_1 - \hat{u}_2 \in D(A)^\perp$. Por otro lado, tenemos que $D(A)$ es denso en H , lo cual implica que

$$\begin{aligned} D(A)^\perp &= \overline{D(A)}^\perp \\ &= H^\perp \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

así

$$\hat{u}_1 - \hat{u}_2 = 0$$

y con ello

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_2$$

Por lo tanto, concluimos que A^* está bien definido. ■

Definición 1.19 Un operador $A : D(A) \longrightarrow H$ con dominio denso en H es **autoadjunto** si $A^* = A$.

Teorema 1.20 Sea $A : D(A) \longrightarrow H$ un operador simétrico con dominio denso en H . Si $D(A^*) \subseteq D(A)$, entonces A es autoadjunto.

Demostración. Sean A un operador simétrico, A^* su operador adjunto y $u \in D(A)$. Como A es simétrico cumple que $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ para cada $v \in D(A)$, luego $u \in D(A^*)$. Así $D(A) \subseteq D(A^*) \subseteq D(A)$, por lo que

$$D(A) = D(A^*).$$

Ahora, por la observación 1.18

$$A^*u = Au.$$

Por lo tanto, podemos concluir que A es un operador autoadjunto. ■

Capítulo 2

Transformaciones integrales sobre $L_2([a, b])$

El estudio de las transformaciones integrales es de nuestro interés debido a que cuando existe el inverso del operador de Schrödinger, este es una transformación integral.

Sea G una función continua de valores complejos definida sobre $[a, b] \times [a, b]$. Se define la transformación integral $\Gamma : L_2([a, b]) \rightarrow L_2([a, b])$ como

$$\Gamma(f)(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt \quad (2.1)$$

Puesto que $G(x, \cdot), f \in L_2([a, b])$ y $|G(x, t)f(t)| \leq \frac{|G(x, t)|^2 + |f(t)|^2}{2}$, se tiene que $G(x, \cdot)f$ está en $L([a, b])$, así $\Gamma(f)(x)$ existe para cada $x \in [a, b]$. La función $\Gamma(f)$ es continua. En efecto, si $x_n, x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ son tales que $x_n \rightarrow x$ entonces $G(x_n, t) \rightarrow G(x, t)$ para cada $t \in [a, b]$. Puesto que $|G(x_n, t)f(t)| \leq \frac{M^2 + |f(t)|^2}{2}$ para alguna constante $M > 0$, y esta función es Lebesgue integrable sobre $[a, b]$, entonces por el teorema de la convergencia dominada,

$$\int_a^b G(x_n, t)f(t)dt \rightarrow \int_a^b G(x, t)f(t)dt,$$

es decir $\Gamma(f)(x_n) \rightarrow \Gamma(f)(x)$.

Proposición 2.1 $\Gamma : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ es acotado.

Demostración. Sea $f \in L_2([a, b])$ luego

$$\begin{aligned} \|\Gamma(f)\|_2^2 &= \int_a^b |\Gamma(f)(x)|^2 dx = \int_a^b \left| \int_a^b G(x, t) f(t) dt \right|^2 dx \\ &= \int_a^b |\langle G(x, \cdot), \bar{f} \rangle|^2 dx \\ &\leq \int_a^b \|G(x, \cdot)\|_2^2 \|f\|_2^2 dx = \left[\int_a^b \|G(x, \cdot)\|_2^2 dx \right] \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

■

Lema 2.2 Sea $\mathcal{F} = \{\Gamma(f) \mid f \in L_2([a, b]) \text{ y } \|f\|_2 \leq 1\}$. Este conjunto de funciones tiene las siguientes propiedades:

1. \mathcal{F} es uniformemente acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|\Gamma(f)(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ y toda $T(f) \in \mathcal{F}$.
2. \mathcal{F} es equicontinua, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in [a, b]$, si $|x - y| < \delta$ entonces $|\Gamma(f)(x) - \Gamma(f)(y)| < \epsilon$ para toda $T(f) \in \mathcal{F}$.

Demostración. 1.) Sea $\Gamma(f) \in \mathcal{F}$; puesto que G es continua sobre el compacto $[a, b] \times [a, b]$, existe $M^* > 0$ tal que $|G(x, t)| \leq M^*$ para toda $(x, t) \in [a, b] \times [a, b]$.

$$\begin{aligned} |\Gamma(f)(x)| &= \left| \int_a^b G(x, t) f(t) dt \right| \\ &= |\langle G(x, \cdot), \bar{f} \rangle| \\ &\leq \|G(x, \cdot)\|_2 \|f\|_2 \\ &\leq \sqrt{\int_a^b |G(x, t)|^2 dt} \leq M^* \sqrt{b - a} = M. \end{aligned}$$

2.) Sea $\epsilon > 0$, dado que G es continua sobre el compacto $[a, b] \times [a, b]$, ésta es uniformemente continua sobre $[a, b] \times [a, b]$, así existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times [a, b]$ con $\|(x, y) - (x', y')\| < \delta$, se tiene

$$|G(x, t) - G(x', t')| < \frac{\epsilon}{\sqrt{b - a}}.$$

Sean $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$, luego

$$\begin{aligned}
 |\Gamma(f)(x) - \Gamma(f)(y)| &= \left| \int_a^b [G(x, t) - G(y, t)] f(t) dt \right| \\
 &= |\langle G(x, \cdot) - G(y, \cdot), \bar{f} \rangle| \\
 &\leq \|G(x, \cdot) - G(y, \cdot)\|_2 \|f\|_2 \\
 &\leq \sqrt{\int_a^b |G(x, t) - G(y, t)|^2 dt} \\
 &\leq \sqrt{\frac{\epsilon^2}{b-a}}(b-a) = \epsilon.
 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3 (Arzelà-Ascoli) Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico completo. Considere el espacio $C(X, Y)$ de las funciones continuas de X en Y , con la métrica $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Sea $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ luego $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto en $C(X, Y)$ si y sólo si \mathcal{F} es equicontinua y para cada $x \in X$, $\overline{\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}}$ es compacto en Y .

Teorema 2.4 Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $L_2([a, b])$ con $\|f_n\|_2 \leq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $g \in L_2([a, b])$ tales que

$$\Gamma(f_{n_k}) \xrightarrow{u} g.$$

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L_2([a, b])$, con $\|f_n\|_2 \leq 1$ y sea $\mathcal{F} = \{\Gamma(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Note que \mathcal{F} es un subconjunto de $C([a, b], \mathbb{C})$, además, por el Lema 2.2, \mathcal{F} es equicontinua y es uniformemente acotada. Esta última propiedad hace que para cada $x \in [a, b]$, $\overline{\{\Gamma(f_n)(x)\}}$ sea un conjunto acotado y por tanto compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Así por el Teorema de Arzelà-Ascoli, $\overline{\mathcal{F}}$ es un subconjunto compacto de $C([a, b], \mathbb{C})$, de modo que, \mathcal{F} es secuencialmente compacto. Luego existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $g \in \mathcal{F}$ tal que $\Gamma(f_{n_k}) \rightarrow g$ con la métrica d_∞ .

Sea $\epsilon > 0$. Existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_\epsilon$, $d_\infty(\Gamma(f_{n_k}), g) < \epsilon$. Esto implica que, para cada $k \geq k_\epsilon$,

$$|\Gamma(f_{n_k})(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |\Gamma(f_{n_k})(x) - g(x)| = d_\infty(\Gamma(f_{n_k}), g) < \epsilon$$

para toda $x \in [a, b]$.

■

Definición 2.5 Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Decimos que T es un operador compacto si para cada sucesión acotada $\{x_n\}$ en X , existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ y un elemento $y \in Y$ tales que

$$T(x_{n_k}) \rightarrow y.$$

Teorema 2.6 Γ es un operador compacto.

Demostración. En el teorema 2.4, $\Gamma(f_{n_k})$ no solamente converge hacia g uniformemente, también lo hace en la norma $\|\cdot\|_2$. En efecto, dado que

$$\Gamma(f_{n_k}) \xrightarrow{u} g,$$

se tiene que $|\Gamma(f_{n_k}) - g|^2 \xrightarrow{u} 0$, así

$$\int_a^b |\Gamma(f_{n_k}) - g|^2 \xrightarrow{u} 0,$$

luego

$$\|\Gamma(f_{n_k}) - g\|_2^2 \rightarrow 0.$$

■

Lema 2.7 Si el operador Γ definido en (2.1) es simétrico, entonces

$$\|\Gamma\| = \sup_{\substack{u \in L_2([a, b]) \\ \|u\|_2 \leq 1}} |\langle \Gamma u, u \rangle|.$$

Demostración. Sea $u \in L_2([a, b])$ tal que $\|u\|_2 = 1$, luego

$$|\langle \Gamma u, u \rangle| \leq \|\Gamma u\|_2 \|u\|_2 \leq \|\Gamma\| \|u\|_2 \|u\|_2 = \|\Gamma\|.$$

Así

$$\sup_{\substack{u \in L_2([a, b]) \\ \|u\|_2 \leq 1}} |\langle \Gamma u, u \rangle| \leq \|\Gamma\|.$$

Demostremos la desigualdad contraria. Sea $u \in L_2([a, b])$ tal que $\|u\|_2 = 1$. Notemos que

$$\|\Gamma u\|_2 = \frac{\|\Gamma u\|_2^2}{\|\Gamma u\|_2} = \left\langle \Gamma u, \frac{\Gamma u}{\|\Gamma u\|_2} \right\rangle.$$

Si $v = \frac{\Gamma u}{\|\Gamma u\|_2}$, se tiene que $\langle \Gamma u, v \rangle \in \mathbb{R}$. Así

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(u + v), u + v \rangle &= \langle \Gamma u, u \rangle + \langle \Gamma u, v \rangle + \langle \Gamma v, u \rangle + \langle \Gamma v, v \rangle \\ &= \langle \Gamma u, u \rangle + \langle \Gamma u, v \rangle + \langle v, \Gamma u \rangle + \langle \Gamma v, v \rangle \\ &= \langle \Gamma u, u \rangle + \langle \Gamma u, v \rangle + \overline{\langle \Gamma u, v \rangle} + \langle \Gamma v, v \rangle \\ &= \langle \Gamma u, u \rangle + 2\langle \Gamma u, v \rangle + \langle \Gamma v, v \rangle \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \langle \Gamma(u - v), u - v \rangle &= \langle \Gamma u, u \rangle - \langle \Gamma u, v \rangle - \langle \Gamma v, u \rangle + \langle \Gamma v, v \rangle \\
 &= \langle \Gamma u, u \rangle - \langle \Gamma u, v \rangle - \langle v, \Gamma u \rangle + \langle \Gamma v, v \rangle \\
 &= \langle \Gamma u, u \rangle - \langle \Gamma u, v \rangle - \overline{\langle \Gamma u, v \rangle} + \langle \Gamma v, v \rangle \\
 &= \langle \Gamma u, u \rangle - 2\langle \Gamma u, v \rangle + \langle \Gamma v, v \rangle.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, poniendo $N = \sup_{\substack{u \in L_2([a, b]) \\ \|u\|_2 \leq 1}} |\langle \Gamma u, u \rangle|$,

$$\left| \left\langle \frac{\Gamma(u + v)}{\|u + v\|_2}, \frac{u + v}{\|u + v\|_2} \right\rangle \right| \leq N$$

y

$$\left| \left\langle \frac{\Gamma(u - v)}{\|u - v\|_2}, \frac{u - v}{\|u - v\|_2} \right\rangle \right| \leq N,$$

esto implica que

$$\langle \Gamma(u + v), u + v \rangle \leq N\|u + v\|_2^2$$

y

$$-\langle \Gamma(u - v), u - v \rangle \leq N\|u - v\|_2^2.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 &\langle \Gamma u, u \rangle + 2\langle \Gamma u, v \rangle + \langle \Gamma v, v \rangle - (\langle \Gamma u, u \rangle - 2\langle \Gamma u, v \rangle + \langle \Gamma v, v \rangle) \\
 &\leq N(\|u + v\|_2^2 + \|u - v\|_2^2)
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 4\langle \Gamma u, v \rangle &\leq N(\|u + v\|_2^2 + \|u - v\|_2^2) \\
 &= 2N(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2) \\
 &= 2N(1 + 1) = 4N.
 \end{aligned}$$

Así,

$$\|\Gamma u\|_2 \left\langle \Gamma u, \frac{\Gamma u}{\|\Gamma u\|_2} \right\rangle \leq N$$

y por tanto

$$\|\Gamma\| \leq \sup_{\substack{u \in L_2([a, b]) \\ \|u\|_2 \leq 1}} |\langle \Gamma u, u \rangle|$$

■

Teorema 2.8 Sea Γ el operador definido en (2.1) y suponga que Γ es simétrico. Si $\lambda = \|\Gamma\|$ entonces λ o $-\lambda$ es un valor propio de Γ .

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, dado que

$$\|\Gamma\| - \frac{1}{n} \leq \|\Gamma\| = \sup_{\substack{u \in L_2([a, b]) \\ \|u\|_2 \leq 1}} |\langle \Gamma u, u \rangle|,$$

existe $u_n \in L_2([a, b])$ con $\|u_n\|_2 = 1$ tal que

$$|\langle \Gamma u_n, u_n \rangle| \leq \|\Gamma\|.$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Gamma u_n, u_n \rangle = \|\Gamma\| = \lambda,$$

de esta forma, existe $\{u_{n_k}\}$ subsucesión de $\{u_n\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \Gamma u_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \lambda$$

o

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \Gamma u_{n_k}, u_{n_k} \rangle = -\lambda.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que ocurre lo primero y denotamos de nuevo a la subsucesión como $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como Γ es compacto existe $\{u_{n_k}\}$ subsucesión de $\{u_n\}$ y $\phi \in L_2([a, b])$ tal que $\Gamma(u_{n_k}) \xrightarrow{u} \phi$. Esto implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \|\Gamma u_{n_k}\|_2 - \|\phi\|_2 \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Gamma u_{n_k} - \phi\|_2 \rightarrow 0$$

así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Gamma u_{n_k}\|_2 = \|\phi\|_2.$$

Demostremos que $\phi \neq 0$ y que $\Gamma\phi = \lambda\phi$. Observemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\Gamma u_{n_k} - \lambda u_{n_k}\|_2^2 &= 2\|\Gamma u_{n_k}\|_2^2 + 2\|\lambda u_{n_k}\|_2^2 - 2\|\Gamma u_{n_k} + \lambda u_{n_k}\|_2^2 \\ &= 2\|\Gamma u_{n_k}\|_2^2 + 2|\lambda| - \langle \Gamma u_{n_k} + \lambda u_{n_k}, \Gamma u_{n_k} + \lambda u_{n_k} \rangle \\ &= 2\|\Gamma u_{n_k}\|_2^2 + 2|\lambda| - \langle \Gamma u_{n_k}, \Gamma u_{n_k} \rangle - \langle \Gamma u_{n_k}, \lambda u_{n_k} \rangle \\ &\quad - \langle \lambda u_{n_k}, \Gamma u_{n_k} \rangle - \langle \lambda u_{n_k}, \lambda u_{n_k} \rangle \\ &= 2\|\Gamma u_{n_k}\|_2^2 + 2|\lambda| - \|\Gamma u_{n_k}\|_2^2 - 2\lambda \langle \Gamma u_{n_k}, u_{n_k} \rangle \\ &\quad - \lambda^2 \langle u_{n_k}, u_{n_k} \rangle \\ &= \|\Gamma u_{n_k}\|_2^2 + 2 + \lambda^2 - 2\lambda \langle \Gamma u_{n_k}, u_{n_k} \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \|\phi\|_2^2 + \lambda^2 - 2\lambda^2$$

esto es

$$0 \leq \lambda^2 < \|\phi\|_2^2.$$

Observe también que

$$\|\Gamma u_{n_k} - \lambda u_{n_k}\|_2^2 \leq \|\Gamma\|^2 \|u_{n_k}\|_2^2 + \lambda^2 - 2\lambda \langle \Gamma u_{n_k}, u_{n_k} \rangle$$

así

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Gamma u_{n_k} - \lambda u_{n_k}\|_2^2 &\leq \|\Gamma\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda \\ &= \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\Gamma\phi - \lambda\phi\|_2 &\leq \|\Gamma\phi - \Gamma(\Gamma u_{n_k})\|_2 + \|\Gamma(\Gamma u_{n_k}) - \lambda\Gamma u_{n_k}\|_2 + \|\lambda\Gamma u_{n_k} - \lambda\phi\|_2 \\ &\leq \|\Gamma\| \|\phi - \Gamma u_{n_k}\|_2 + \|\Gamma\| \|\Gamma u_{n_k} - \lambda u_{n_k}\|_2 + \lambda \|\Gamma u_{n_k} - \phi\|_2 \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $k \rightarrow \infty$. Por lo tanto

$$\Gamma\phi = \lambda\phi.$$

■

Capítulo 3

El operador de Schrödinger sobre un intervalo

En este capítulo hablaremos del operador de Schrödinger, que es un caso particular de un operador de tipo Sturm-Liouville. Trabajaremos el operador de Schrödinger en un intervalo y en una gráfica.

Se dice que un operador L es de *tipo Sturm-Liouville* si satisface:

$$Lu = \left[-\frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} u \right) + qu \right],$$

donde p es una función diferenciable de valores reales tal que $p \neq 0$ en $[a, b]$ y q es una función integrable en $[a, b]$.

Al *operador de tipo Sturm-Liouville* con $p = 1$ se le conoce como **operador de Schrödinger**, y satisface la ecuación:

$$\mathcal{L}u = -u'' + qu,$$

donde q es una función de valores reales y Lebesgue integrable en $[a, b]$. La función q se conoce como *función potencial*.

Denotaremos por $W_x(\cdot, \cdot)$ al Wronskiano de dos funciones en el punto x .

Observación 3.1 Si $y, y', z, z' \in AC([a, b])$ entonces

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle = W_a(\bar{z}, y) - W_b(\bar{z}, y) + \langle y, \mathcal{L}z \rangle.$$

Demostración. Sean $y, y', z, z' \in AC([a, b])$, luego

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle = \int_a^b \mathcal{L}y(x) \bar{z}(x) dx = \int_a^b [-y''(x) + q(x)y(x)] \bar{z}(x) dx$$

$$= - \int_a^b y''(x)\bar{z}(x)dx + \int_a^b q(x)y(x)\bar{z}(x)dx. \quad (3.1)$$

Ahora, dado que $y', \bar{z} \in AC([a, b])$, aplicamos integración por partes a la primera integral de (3.1):

$$- \int_a^b y''(x)\bar{z}(x)dx = -\bar{z}(x)y'(x)|_a^b + \int_a^b y'(x)\bar{z}'(x)dx. \quad (3.2)$$

Además, puesto que $\bar{z}', y' \in AC([0, 1])$ aplicamos nuevamente integración por partes a la segunda integral de la igualdad de (3.2), así

$$\int_a^b y'(x)\bar{z}'(x)dx = \bar{z}'(x)y(x)|_a^b - \int_a^b y(x)\bar{z}''(x)dx$$

luego, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}y, z \rangle &= -\bar{z}(x)y'(x)|_a^b + \bar{z}'(x)y(x)|_a^b - \int_a^b y(x)\bar{z}''(x)dx + \int_a^b q(x)y(x)\bar{z}(x)dx \\ &= -\bar{z}(x)y'(x)|_a^b + \bar{z}'(x)y(x)|_a^b + \int_a^b y(x)[- \bar{z}''(x) + q(x)\bar{z}(x)] dx \\ &= W_a(\bar{z}, y) - W_b(\bar{z}, y) + \langle y, \mathcal{L}z \rangle \end{aligned}$$

■

En este proyecto de tesis trabajaremos con funciones absolutamente continuas y por simplicidad para el siguiente capítulo, las funciones estarán definidas sobre el intervalo $[0, 1]$.

Un operador puede ser autoadjunto en cierto espacio de funciones mientras que en otros no serlo, por ejemplo el operador de Schrödinger es un operador autoadjunto en el espacio $C_c^\infty([a, b])$ de funciones infinitamente diferenciable con soporte en (a, b) , y no es autoadjunto en el espacio $C^\infty([a, b])$ de funciones infinitamente diferenciables, por tal motivo es necesario definir un dominio para que el operador de Schrödinger sea autoadjunto.

Antes de definir el dominio del operador de Schrödinger y probar que \mathcal{L} es un operador autoadjunto requerimos de algunos resultados que se demostrarán a continuación.

Primero probaremos que la ecuación $\mathcal{L}y - \lambda y = g$ tiene solución y además esta solución es única.

Sea Ω^* el siguiente conjunto:

$$\Omega^* = \{f \in L_2([0, 1]) : f, f' \in AC([0, 1]) \text{ y } \mathcal{L}f \in L_2([0, 1])\}.$$

Lema 3.2 Sean $c \in [0, 1]$, $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $g \in L_2([0, 1])$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q - \lambda & 0 \end{pmatrix}$, donde q es la función potencial. Definamos $K : C([0, 1], \mathbb{C}^2) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C}^2)$ como

$$K(u)(x) = \int_c^x A(s)u(s)ds$$

y $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^2$ como

$$w(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \int_c^x \begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds.$$

Luego, existe una solución única $f \in \Omega^*$ del siguiente problema con valor inicial

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \lambda I)y = g & c.d. \\ y(c) = \alpha \\ y'(c) = \beta \end{cases} \quad (3.3)$$

si y sólo si existe una solución única $u \in C([0, 1], \mathbb{C}^2)$ para la ecuación

$$z = K(z) + w. \quad (3.4)$$

Demostración. Supongamos que existe una solución $f \in \Omega^*$ del problema con valor inicial

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \lambda I)y = g & c.d. \\ y(c) = \alpha \\ y'(c) = \beta. \end{cases}$$

Definamos $u = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$, luego $u \in C([0, 1], \mathbb{C}^2)$ y para cada $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 K(u)(x) + w(x) &= \int_c^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(s) - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(s) \\ f'(s) \end{pmatrix} ds \\
 &\quad + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \int_c^x \begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds \\
 &= \int_c^x \begin{pmatrix} f'(s) \\ (q(s) - \lambda)f(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \int_c^x \begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds \\
 &= \begin{pmatrix} f(c) + \int_c^x f'(s) ds \\ f'(c) + \int_c^x (q(s) - \lambda)f(s) ds - \int_c^x g(s) ds \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} f(c) + \int_c^x f'(s) ds \\ f'(c) + \int_c^x (f''(s) + g(s)) - \int_c^x g(s) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} f(c) + \int_c^x f'(s) ds \\ f'(c) + \int_c^x f''(s) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} = u(x)
 \end{aligned}$$

lo cual implica que $u = K(u) + w$.

Sea $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in C([0, 1], \mathbb{C}^2)$ solución de la ecuación $z = K(z) + w$, luego para cada $x \in [0, 1]$ se cumple que

$$u_1(x) = \alpha + \int_c^x u_2(s) ds$$

y

$$u_2(x) = \beta + \int_c^x ((q(s) - \lambda)u_1(s) - g(s)) ds.$$

Como $u_1(c) = \alpha$ y $u_2(c) = \beta$ se tiene que $u_1, u_2 \in AC([0, 1])$. Más aún, dado que u_2 es continua,

$$u_1'(x) = u_2(x), \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

De aquí, $u_1' \in AC([0, 1])$. Luego por el teorema 1.11, para cada $x \in [0, 1]$,

$$u_1'(x) = u_1'(c) + \int_c^x u_1''(s) ds,$$

así

$$u_1'(c) + \int_c^x u_1''(s) ds = u_1'(x) = u_1'(c) + \int_c^x (q(s) - \lambda)u_1(s) - \int_c^x g(s)$$

y con ello

$$\int_c^x (-u_1''(s) + q(s)u_1(s) - \lambda u_1(s) - g(s)) ds = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Por lo tanto, por el teorema 1.11,

$$-u_1'' + qu_1 - \lambda u_1 - g = 0 \quad c.d.$$

de modo que

$$(\mathcal{L} - \lambda I)u_1 = g \quad c.d.$$

luego $u_1 \in \Omega^*$ y satisface el problema con valor inicial (3.3).

Veamos ahora la unicidad de las soluciones. Supongamos que $f_1, f_2 \in \Omega^*$ son soluciones del problema con valor inicial (3.3) y que la ecuación (3.4) tiene solución única, luego $u_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$, como ya vimos, satisfacen la ecuación (3.4), pero como esta ecuación tiene solución única, $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} = u_1 = u_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$, y así $f_1 = f_2$.

Ahora, supongamos que el problema con valor inicial (3.3) tiene solución única. Sean $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ soluciones de la ecuación (3.4), esto implica, como vimos anteriormente que u_1, v_1 son soluciones de la ecuación (3.3), así

$$u_1 = v_1$$

y dado que $u_2 = u_1'$ y $v_2 = v_1'$ (vea (3.5)), se tiene que $u_2 = v_2$, por tanto

$$u = v.$$

■

Teorema 3.3 Si $g \in L_2([0, 1])$ entonces existe una única solución $f \in \Omega^*$ de la ecuación diferencial

$$(\mathcal{L} - \lambda I)y = g, \quad \lambda \in \mathbb{C};$$

que satisface la condición inicial

$$y(c) = \alpha, \quad y'(c) = \beta; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad c \in [0, 1].$$

Demostración. Sean K y w como en el lema 3.2.

Veamos que para cada $h \in C([0, 1], \mathbb{C}^2)$, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$ se cumple que

$\|K^n(h)(x)\|_\infty \leq \frac{(a_1(x))^n}{n!} \|h\|_\infty$, donde $a_1(x) = \int_c^x \|A(y)\|_\infty dy$ y $\|A(y)\|_\infty$ ¹ denota la norma matricial.

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} \|K(h)(x)\|_\infty &= \left\| \int_c^x A(y)h(y)dy \right\|_\infty \\ &\leq \int_c^x \|A(y)h(y)\|_\infty dy \\ &\leq \int_c^x \|A(y)\|_\infty \|h(y)\|_\infty dy \end{aligned}$$

luego como $\|h(y)\|_\infty = \max\{|h_1(y)|, |h_2(y)|\} \leq \max_{x \in [0,1]} \{|h_1(x)|, |h_2(x)|\} = \|h\|_\infty$ se tiene que

$$\|K(h)(x)\|_\infty \leq a_1(x) \|h\|_\infty.$$

Si suponemos que $\|K^n(h)(x)\|_\infty \leq \frac{(a_1(x))^n}{n!} \|h\|_\infty$ se cumple, veamos que pasa para $n + 1$,

$$\begin{aligned} \|K^{n+1}(h)(x)\|_\infty &= \left\| \int_c^x A(y)K^n(h)(y)dy \right\|_\infty \\ &\leq \int_c^x \|A(y)\|_\infty \|K^n(h)(y)\|_\infty dy \end{aligned}$$

por hipótesis de inducción

$$\|K^{n+1}(h)(x)\|_\infty \leq \int_c^x \|A(y)\|_\infty \frac{(a_1(y))^n}{n!} \|h\|_\infty dy.$$

Tomando el cambio de variable $z = a_1(y)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|K^{n+1}(h)(x)\|_\infty &\leq \frac{\|h\|_\infty}{n!} \int_0^{a_1(x)} z^n dz \\ &= \frac{\|h\|_\infty}{n!} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^{a_1(x)} = \frac{(a_1(x))^{n+1}}{(n+1)!} \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Ahora, como

$$\|K^n(w)(x)\|_\infty \leq \frac{[a_1(x)]^n}{n!} \|w\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1(x))^n}{n!} \|w\|_\infty = \|w\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1(x))^n}{n!} \leq \|w\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} < \infty,$$

¹ $\|A(y)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

para algún $M \geq 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} K^n(w)(x)$ converge uniformemente sobre $[0, 1]$. Para cada $x \in [0, 1]$, sea $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n(w)(x)$. De esta manera, $u \in C([0, 1], \mathbb{C}^2)$. Luego, para $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 K(u)(x) + w(x) &= \int_c^x A(y) \sum_{n=0}^{\infty} K^n(w)(y) dy + w(x) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_c^x A(y) K^n(w)(y) dy + w(x) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} K(K^n(w))(x) + w(x) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} K^{n+1}(w)(x) + w(x) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} K^n(w)(x) - w(x) + w(x) = u(x).
 \end{aligned}$$

Hemos así probado que la ecuación (3.4) tiene solución. Ahora, probemos que la solución es única.

Supongamos que \tilde{u} es otra solución en $C([0, 1], \mathbb{C}^2)$ de la ecuación (3.4), entonces $u - \tilde{u}$ es continua y

$$u - \tilde{u} = K(u) + w - K(\tilde{u}) - w = K(u) - K(\tilde{u}) = K(u - \tilde{u}),$$

esto implica que $u - \tilde{u} = K^n(u - \tilde{u})$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego

$$\|u(x) - \tilde{u}(x)\|_{\infty} = \|K^n(u - \tilde{u})(x)\|_{\infty} \leq \frac{(a_1(x))^n}{n!} \leq \frac{M^n}{n!},$$

aplicando límite cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in [0, 1]$ se tiene que

$$\|u(x) - \tilde{u}(x)\|_{\infty} = 0,$$

así $u - \tilde{u} = 0$, y con ello se tiene que $u = \tilde{u}$.

Luego, dado que u es solución única de la ecuación (3.4), por el lema 3.2 se tiene que existe una única solución de la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)y = g$ que satisface la condición inicial

$$y(c) = \alpha \qquad y'(c) = \beta.$$

El teorema 3.3 nos garantiza la existencia de la solución a la ecuación $-y'' + qy = \lambda y$. En este caso estamos tomando $g = 0$ y sólo requerimos que la función $q(x)$ sea una función Lebesgue integrable. ■

Ejemplo 3.4 Consideremos la función potencial $q \in L([0, 1])$, $\frac{\hbar^2}{2m} \in \mathbb{R}$ y la ecuación

$$\frac{\hbar^2}{2m} y'' + qy - \lambda y = 0 \quad (3.6)$$

La ecuación de este ejemplo podemos verla como

$$-y'' + \frac{2m}{\hbar^2} qy - \frac{2m}{\hbar^2} \lambda y = 0,$$

redefiniendo se tiene

$$-y'' + q_1 y - \lambda_1 y = 0,$$

donde $q_1 = \frac{2m}{\hbar^2} q$ y $\lambda_1 = \frac{2m}{\hbar^2} \lambda$.

La ecuación (3.6) es fundamental en mecánica cuántica ya que describe las energías y los estados estacionarios que caracterizan una partícula en un campo de fuerzas que deriva del potencial $q = q(x)$, independientemente del tiempo, [15].

◇

El Wronskiano de dos soluciones de la ecuación $\mathcal{L}y = \lambda y$ es constante, lo cual se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 3.5 Sean $\phi(x, \lambda)$ y $\theta(x, \lambda)$ dos soluciones de la ecuación $\mathcal{L}y = \lambda y$. El Wronskiano de las funciones ϕ y θ es una función que no depende de x .

Demostración. Recordemos que el Wronskiano de ϕ y θ se define como

$$W(\phi(x, \lambda), \theta(x, \lambda)) = \phi(x, \lambda)\theta'(x, \lambda) - \phi'(x, \lambda)\theta(x, \lambda)$$

Para ver que el Wronskiano no depende de x , calculemos su derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(\phi, \theta) &= \frac{d}{dx} (\phi(x, \lambda)\theta'(x, \lambda) - \phi'(x, \lambda)\theta(x, \lambda)) \\ &= \phi(x, \lambda)\theta''(x, \lambda) - \phi''(x, \lambda)\theta(x, \lambda). \end{aligned}$$

Dado que ϕ y θ son soluciones de la ecuación $\mathcal{L}y = \lambda y$, se tiene que

$$\frac{d}{dx} W(\phi, \theta) = [q(x) - \lambda]\phi(x, \lambda)\theta(x, \lambda) - [q(x) - \lambda]\phi(x, \lambda)\theta(x, \lambda) = 0,$$

sin importar el valor que tome x , por lo cual, efectivamente el Wronskiano de ϕ y θ no depende de x . ■

Por otro lado, hay una fórmula explícita para el Wronskiano de dos soluciones de la ecuación $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, la cual se conoce como fórmula de *Abel-Liouville*.

Teorema 3.6 (*Fórmula de Abel-Liouville para el Wronskiano*) Si $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ son soluciones de la ecuación $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, donde $a, b \in L([0, 1])$, el Wronskiano de ambas soluciones verifica que

$$W(y_1, y_2) = Ce^{-\int a(x)dx}.$$

Demostración. Sean y_1, y_2 soluciones de la ecuación $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, por tanto

$$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 = 0 \tag{3.7}$$

$$y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2 = 0. \tag{3.8}$$

Si multiplicamos la ecuación (3.7) por y_2 y la ecuación (3.8) por y_1 se tiene lo siguiente

$$y_1''y_2 + a(x)y_1'y_2 + b(x)y_1y_2 = 0 \tag{3.9}$$

$$y_2''y_1 + a(x)y_2'y_1 + b(x)y_2y_1 = 0 \tag{3.10}$$

igualando la ecuación (3.9) y la ecuación (3.10) se tiene que

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + a(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dx}W(y_1, y_2) + a(x)W(y_1, y_2) = 0. \tag{3.11}$$

La ecuación (3.11) es una ecuación diferencial de primer orden que podemos resolver fácilmente por el método de factor integrante, obteniendo como solución

$$W(y_1, y_2) = Ce^{-\int a(t)dt}$$

Por lo que hemos probado la fórmula de *Abel-Liouville*. ■

Dado que nosotros trabajamos con la ecuación $\mathcal{L}y = \lambda y$, $a(x) = 0$. Esto implica que en la fórmula de Abel-Liouville el término de la exponencial desaparece, reafirmando con ello que el Wronskiano de dos soluciones de la ecuación $\mathcal{L}y = \lambda y$ es constante, es decir no depende de x .

Lema 3.7 Sean $g \in C([0, 1])$ y $u_1, u_2, u'_1, u'_2 \in AC([0, 1])$ que satisfacen la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)u = 0$ y $W(u_1, u_2) = 1$. Consideremos $c \in [0, 1]$, si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se define por

$$f(x) = u_1(x) \left(\alpha + \int_c^x u_2(y)g(y)dy \right) + u_2(x) \left(\beta - \int_c^x u_1(y)g(y)dy \right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (3.12)$$

entonces

$$f'(x) = u'_1(x) \left(\alpha + \int_c^x u_2(y)g(y)dy \right) + u'_2(x) \left(\beta - \int_c^x u_1(y)g(y)dy \right) \quad (3.13)$$

para toda $x \in [0, 1]$, además f pertenece a Ω^* y satisface la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)f = g$ c.d.

Demostración. Sean $h_1(x) = \alpha + \int_c^x u_2(y)g(y)dy$ y $h_2(x) = \beta - \int_c^x u_1(y)g(y)dy$, como u_1g y u_2g son continuas, diferenciando la ecuación (4.23) se tiene que

$$f'(x) = u'_1(x) \left(\alpha + \int_c^x u_2(y)g(y)dy \right) + u'_2(x) \left(\beta - \int_c^x u_1(y)g(y)dy \right).$$

Luego como $u'_1, u'_2 \in AC([0, 1])$, existe un conjunto N de medida nula tal que f' es diferenciable sobre $[0, 1] \setminus N$. Considerando a $x \in [0, 1] \setminus N$, se tiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= u''_1(x) \left(\alpha + \int_c^x u_2(y)g(y)dy \right) + u'_1(x)u_2(x)g(x) \\ &\quad + u''_2(x) \left(\beta - \int_c^x u_1(y)g(y)dy \right) - u'_2(x)u_1(x)g(x) \\ &= u''_1(x) \left(\alpha + \int_c^x u_2(y)g(y)dy \right) + u''_2(x) \left(\beta - \int_c^x u_1(y)g(y)dy \right) \\ &\quad - W(u_1, u_2)g(x) \\ &= (q(x) - \lambda)u_1(x) \left(\alpha + \int_c^x u_2(y)g(y)dy \right) \\ &\quad + (q(x) - \lambda)u_2(x) \left(\beta - \int_c^x u_1(y)g(y)dy \right) - g(x) \\ &= (q(x) - \lambda)f(x) - g(x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

y con ello

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x) - \lambda f(x) &= -f''(x) + q(x)f(x) - \lambda f(x) \\ &= -(q(x) - \lambda)f(x) + g(x) + (q(x) - \lambda)f(x) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Por lo anterior vemos que f satisface la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)f = g$ casi en todo punto. Notemos además que $\mathcal{L}f \in L_2([0, 1])$ y por las ecuaciones (4.23) y (3.13) se tiene que $f \in \Omega^*$. Por tanto, hemos probado el lema. ■

Observación 3.8 De (3.14) se observa que $f'' \in L([0, 1])$, dado que u'_1 y u'_2 son absolutamente continuas, y por tanto u''_1, u''_2 son Lebesgue integrables.

Lema 3.9 Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, entonces existe una función $f \in \Omega^*$ tal que $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \beta$, $f(1) = \gamma$ y $f'(1) = \delta$.

Demostración. Consideremos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Sean $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \Omega^*$ soluciones no triviales de la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)u = 0$ con condiciones iniciales $u_1(0) = u'_2(0) = 1 = v_1(1) = v'_2(1)$, $u'_1(0) = u_2(0) = 0 = v'_1(1) = v_2(1)$ y $g \in C([0, 1])$. Por el lema 3.7,

$$f_1(x) = u_1(x) \left(\alpha + \int_0^x u_2(y)g(y)dy \right) + u_2(x) \left(\beta - \int_0^x u_1(y)g(y)dy \right)$$

y

$$f_2(x) = v_1(x) \left(\gamma + \int_1^x v_2(y)g(y)dy \right) + v_2(x) \left(\delta - \int_1^x v_1(y)g(y)dy \right)$$

son soluciones de la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)u = g$ c.d., además satisfacen que $f_1(0) = \alpha$, $f'_1(0) = \beta$ y $f_2(1) = \gamma$, $f'_2(1) = \delta$.

Al definir la función \tilde{f} como sigue

$$\tilde{f}(x) = \left(\int_1^x u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 f_1(x) + \left(\int_0^x u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 f_2(x),$$

se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) &= 2 \left(\int_1^x u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right) u_2(x)^2 v_2(x)^2 f_1(x) + \left(\int_1^x u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 f'_1(x) \\ &+ 2 \left(\int_0^x u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right) u_2(x)^2 v_2(x)^2 f_2(x) + \left(\int_1^x u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 f'_2(x), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0) &= \left(\int_1^0 u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 \alpha, \\ \tilde{f}(1) &= \left(\int_0^1 u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(0) &= \left(\int_1^0 u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 \beta, \\ \tilde{f}'(1) &= \left(\int_0^1 u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 \delta.\end{aligned}$$

Dado que

$$\left(\int_1^0 u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 = \left(- \int_0^1 u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 = \left(\int_0^1 u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2$$

y como $m = \left(\int_0^1 u_2(y)^2 v_2(y)^2 dy \right)^2 \neq 0$, pues $u_1, u_2 \in \Omega^*$ y son soluciones no triviales de la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)u = 0$, se tiene que la función

$$\hat{f} = \frac{\tilde{f}}{m}$$

satisface que $\hat{f}(0) = \alpha$, $\hat{f}(1) = \gamma$, $\hat{f}'(0) = \beta$ y $\hat{f}'(1) = \delta$. Note que $\tilde{f}, \tilde{f}' \in AC([0, 1])$ y además es fácil verificar que $\mathcal{L}f \in L_2([0, 1])$, basta con obtener f'' y asociar unos términos de $\mathcal{L}f$. Así $\hat{f} \in \Omega^*$. ■

Lema 3.10 Supongamos que V es un espacio de vectores sobre el campo \mathbb{C} . Si l, l_1, \dots, l_n son funcionales lineales definidos en todo V tal que l_1, \dots, l_n son linealmente independientes y $\bigcap_{j=1}^n Ker(l_j) \subset Ker(l)$, entonces $l = \sum_{j=1}^n \alpha_j l_j$ para algunas constantes $\alpha_j \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sean l_1, \dots, l_n funcionales lineales linealmente independientes. Se define la aplicación

$$\begin{aligned}H : V &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ f &\longmapsto (l_1(f), \dots, l_n(f)).\end{aligned}$$

Esta aplicación es sobreyectiva, pues si $x = (x_1, \dots, x_n) \in Ran(H)^\perp$ entonces

$$\sum_{j=1}^n x_j l_j(f) = 0,$$

para toda $f \in V$, así dado que l_1, \dots, l_n son linealmente independientes, $Ran(H)^\perp = \{0\}$. Por lo cual existen vectores $f_1, f_2, \dots, f_n \in V$ tales que

$$l_j(f_k) = 0 \quad \text{para } j \neq k$$

$$l_j(f_j) = 1.$$

Para $f \in V$,

$$f - \sum_{j=1}^n l_j(f) f_j \in \bigcap_{j=1}^n \text{Ker}(l_j)$$

y así

$$l(f) - \sum_{j=1}^n l_j(f) l(f_j) = 0.$$

Por tanto, basta tomar $\alpha_j = l(f_j)$. ■

Proposición 3.11 Sea H un espacio con producto interior y E un subespacio de H tal que $\overline{E} = H$. Si $h \in H$ es tal que para cada $e \in E$, $\langle e, h \rangle = 0$, entonces $h = 0$.

Consideremos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{f \in \Omega^* : f(0) = 0, f(1) = 0 \text{ y } f'(0) = 0, f'(1) = 0\}, \\ \mathcal{V} &= \{v \in \Omega^* : W_0(\overline{v}, v) = 0 \wedge W_0(\overline{v}, f) \neq 0 \text{ para algún } f \in \Omega^*\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

y

$$\mathcal{W} = \{w \in \Omega^* : W_1(\overline{w}, w) = 0 \wedge W_1(\overline{w}, f) \neq 0 \text{ para algún } f \in \Omega^*\}, \quad (3.16)$$

donde $W_0(\cdot, \cdot)$ y $W_1(\cdot, \cdot)$ denotan al Wronskiano de dos funciones evaluadas en 0 y 1, respectivamente. Sean $v \in \mathcal{V}$ y $w \in \mathcal{W}$ fijos, definimos el siguiente conjunto

$$\Omega_{vw} = \{f \in \Omega^* : W_0(v, f) = 0 \wedge W_1(w, f) = 0\}.$$

Consideremos al conjunto Ω_{vw} como dominio del operador de Schrödinger.

Para que el operador de Schrödinger sea un operador autoadjunto se requiere que su dominio consista de funciones en Ω^* , las cuales cumplan ciertas condiciones de frontera, estas condiciones se conocen como *condiciones de contorno separadas*, entre ellas se encuentran las condiciones de Dirichlet, de Neumann y de Nicoletti.

- Condición de Dirichlet

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 0. \end{aligned}$$

Para este tipo de condiciones basta tomar $v \in \mathcal{V}$ de tal manera que $v(0) = 0$ y $v'(0) = 1$, de esta manera se tiene que $f(0) = 0$. Considerando $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(1) = 0$ y $w'(1) = 1$ se tiene que $f(1) = 0$. Así, el dominio del operador de Schrödinger es el conjunto

$$\Omega_{vw} = \{f \in \Omega^* : f(0) = 0 \text{ y } f(1) = 0\}.$$

- Condición de Neumann

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0, \\ f'(1) &= 0. \end{aligned}$$

Similarmente, consideramos $v \in \mathcal{V}$ tal que $v(0) = 1$ y $v'(0) = 0$, $w \in \mathcal{W}$ tal que $w(1) = 1$ y $w'(1) = 0$, de aquí $f'(0) = 0$ y $f'(1) = 0$. Por tanto

$$\Omega_{vw} = \{f \in \Omega^* : f'(0) = 0 \text{ y } f'(1) = 0\}.$$

- Condición de Nicoletti

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(1) = 0; \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} f'(0) = 0, \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

En este caso tomamos $v \in \mathcal{V}$ y $w \in \mathcal{W}$ tales que $v(0) = 0$ y $v'(0) = 1$, $w(1) = 1$ y $w'(1) = 0$, o bien $v \in \mathcal{V}$ y $w \in \mathcal{W}$ tales que $v(0) = 1$ y $v'(0) = 0$, $w(1) = 0$ y $w'(1) = 1$, así

$$\Omega_{vw} = \{f \in \Omega^* : f(0) = 0 \text{ y } f'(1) = 0\},$$

u

$$\Omega_{vw} = \{f \in \Omega^* : f'(0) = 0 \text{ y } f(1) = 0\}.$$

Las condiciones anteriores hacen que con el dominio Ω_{vw} , para cualesquiera $v \in \mathcal{V}$ y $w \in \mathcal{W}$, el operador de Schrödinger sea un operador autoadjunto. Este hecho lo probaremos más adelante.

Teorema 3.12 Si $v \in \mathcal{V}$ entonces para $f, g \in \Omega^*$ se cumple:

$$W_0(v, f) = 0 \quad \iff \quad W_0(v, \bar{f}) = 0 \quad (3.17)$$

y

$$W_0(v, f) = W_0(v, g) = 0 \quad \implies \quad W_0(\bar{g}, f) = 0. \quad (3.18)$$

El resultado también es válido para dos funciones evaluadas en 1.

Demostración. Sea $v \in \mathcal{V}$, luego $W_0(\bar{v}, v) = 0$ y existe $\hat{f} \in \Omega^*$ tal que $W_0(\bar{v}, \hat{f}) \neq 0$. Probemos (3.17). Supongamos que $W_0(v, f) = 0$, entonces

$$W_0(\bar{v}, \bar{f})W_0(v, f) = 0,$$

esto es

$$\bar{v}(0)v(0)\bar{f}'(0)f'(0) - \bar{v}(0)v'(0)\bar{f}(0)f(0) - \bar{v}'(0)v(0)\bar{f}(0)f'(0) + \bar{v}'(0)v'(0)\bar{f}(0)f(0) = 0.$$

Al sumar $v'(0)\overline{\hat{f}}(0)\overline{v}(0)f'(0) - v'(0)\overline{\hat{f}}(0)\overline{v}(0)f'(0)$ y $\overline{v}'(0)f(0)v(0)\overline{\hat{f}}'(0) - \overline{v}'(0)f(0)v(0)\overline{\hat{f}}'(0)$ a la expresión anterior y asociando términos, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{v}(0)f'(0)[v(0)\overline{\hat{f}}'(0) - \overline{\hat{f}}(0)v'(0)] + \overline{v}'(0)f(0)[v'(0)\overline{\hat{f}}(0) - v(0)\overline{\hat{f}}'(0)] \\ &\quad + \overline{v}(0)v'(0)[\overline{\hat{f}}(0)f'(0) - \overline{\hat{f}}'(0)f(0)] - \overline{v}'(0)v(0)[\overline{\hat{f}}(0)f'(0) - \overline{\hat{f}}'(0)f(0)] \\ &= [v(0)\overline{\hat{f}}'(0) - \overline{\hat{f}}(0)v'(0)][\overline{v}(0)f'(0) - \overline{v}'(0)f(0)] \\ &\quad - [\overline{v}(0)v'(0) - \overline{v}'(0)v(0)][\overline{\hat{f}}'(0)f(0) - \overline{\hat{f}}(0)f'(0)], \end{aligned}$$

luego, como $W_0(\overline{v}, v) = 0$,

$$0 = [v(0)\overline{\hat{f}}'(0) - \overline{\hat{f}}(0)v'(0)][\overline{v}(0)f'(0) - \overline{v}'(0)f(0)],$$

así

$$[\overline{v}(0)\hat{f}'(0) - \hat{f}(0)\overline{v}'(0)][v(0)\overline{\hat{f}}'(0) - v'(0)\overline{\hat{f}}(0)] = \overline{0} = 0.$$

Dado que $W(\overline{v}, \hat{f}) \neq 0$ se cumple que

$$W_0(v, \overline{\hat{f}}) = 0.$$

Ahora supongamos que $W_0(v, \overline{\hat{f}}) = 0$, esto implica que

$$W_0(v, \overline{\hat{f}})W_0(\overline{v}, \hat{f}) = 0.$$

Si hacemos un procedimiento similar al anterior, desarrollamos, sumamos y restamos los términos $\overline{v}(0)\overline{\hat{f}}'(0)v'(0)\overline{\hat{f}}(0)$ y $\overline{v}'(0)\overline{\hat{f}}(0)v(0)\overline{\hat{f}}'(0)$, obtenemos que

$$[\overline{v}(0)\overline{\hat{f}}'(0) - \overline{v}'(0)\overline{\hat{f}}(0)][v(0)\overline{\hat{f}}(0) - v'(0)\overline{\hat{f}}'(0)] = 0.$$

Así

$$[v(0)f'(0) - v'(0)f(0)][\overline{v}(0)\hat{f}(0) - \overline{v}'(0)\hat{f}'(0)] = \overline{0} = 0;$$

pero como $W_0(\overline{v}, \hat{f}) \neq 0$, se tiene que

$$W_0(v, f) = 0.$$

Para probar que (3.18) se cumple, supongamos que $W_0(v, f) = 0$ y $W_0(v, g) = 0$. Por (3.17) $W_0(v, \overline{\hat{f}}) = 0$, entonces

$$W_0(v, \overline{\hat{f}})W_0(\overline{\hat{f}}, g) = 0,$$

desarrollando, sumando y restando los términos $v'(0)\overline{\hat{f}}(0)g(0)\overline{f}'(0)$ y $v(0)\overline{\hat{f}}'(0)g'(0)\overline{f}(0)$, se obtiene

$$[-v(0)\overline{\hat{f}}'(0) + v'(0)\overline{\hat{f}}(0)][g(0)\overline{f}'(0) - g'(0)\overline{f}(0)] + W_0(v, g)W_0(\overline{\hat{f}}, f) = 0,$$

luego

$$[-\overline{v}(0)\hat{f}'(0) + \overline{v}'(0)\hat{f}(0)][\overline{g}(0)f'(0) - \overline{g}'(0)f(0)] = \overline{0} = 0,$$

esto es

$$-W_0(\overline{v}, \hat{f})W_0(\overline{g}, f) = 0;$$

lo cual implica que

$$W_0(\overline{g}, f) = 0.$$

■

Lema 3.13 Para cada $v \in \mathcal{V}$ y $w \in \mathcal{W}$, \mathcal{L} es simétrico en Ω_{vw} .

Demostración. Sean $y, z \in \Omega_1$, luego $y, y', z, z' \in AC([0, 1])$, así por la observación 3.1 se cumple que

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle = W_0(\overline{z}, y) - W_1(\overline{z}, y) + \langle y, \mathcal{L}z \rangle.$$

Luego por (3.18) se tiene $W_0(\overline{z}, y) = 0$ y $W_1(\overline{z}, y) = 0$, por tanto

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle = \langle y, \mathcal{L}z \rangle.$$

■

Observación 3.14 El operador \mathcal{L} es simétrico en Ω_1 , pues $\Omega_1 \subset \Omega_{vw}$.

Lema 3.15 Sean $u_1, u_2, u'_1, u'_2 \in AC([0, 1])$ tales que satisfacen la ecuación $\mathcal{L}u = 0$, y $W(u_1, u_2) = 1$. Considere $h \in L_2([0, 1])$, si $k \in L_2([0, 1])$ es tal que $\langle \mathcal{L}f, h \rangle = \langle f, k \rangle$, para todo $f \in \Omega_1$, entonces existen $\tilde{h} \in \Omega^*$ y constantes α_1, α_2 tales que $\mathcal{L}\tilde{h} = k$ y $h = \tilde{h} + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.

Demostración. Sean $h, k \in L_2([0, 1])$ tales que $\langle \mathcal{L}f, h \rangle = \langle f, k \rangle$ para cada $f \in \Omega_1$. Por el teorema 3.3, existe $\tilde{h} \in \Omega^*$ tal que $\mathcal{L}\tilde{h} = k$.

Se definen los funcionales $l : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ y $l_i : C_c([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$.

$$l(g) = \int_0^1 (\bar{h} - \tilde{h})g,$$

$$l_i(g) = \int_0^1 \bar{u}_i g, \quad i = 1, 2.$$

Los funcionales l_1 y l_2 son linealmente independientes, en efecto, sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, supongamos que $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 = 0$, esto es, para cada $g \in C([0, 1])$

$$\alpha_1 \int_0^1 \bar{u}_1 g + \alpha_2 \int_0^1 \bar{u}_2 g = 0,$$

luego

$$\int_0^1 (\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2) g = 0, \quad \forall g \in C([0, 1]),$$

Así, por la proposición 3.11

$$\overline{\alpha_1} u_1 + \overline{\alpha_2} u_2 = 0,$$

pero como $W(u_1, u_2) = 1$, u_1, u_2 son linealmente independientes, se tiene que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$ y por lo tanto l_1 y l_2 son linealmente independientes.

Veamos que $Ker(l_1) \cap Ker(l_2) \subseteq Ker(l)$. Sea $g \in Ker(l_1) \cap Ker(l_2)$, luego

$$\int_0^1 \bar{u}_1 g = l_1(g) = 0$$

y

$$\int_0^1 \bar{u}_2 g = l_2(g) = 0.$$

Por lo tanto la función

$$f = \bar{u}_1 \int_0^{(\cdot)} \bar{u}_2 g + \bar{u}_2 \int_0^{(\cdot)} \bar{u}_1 g$$

cumple que $f(0) = 0 = f(1)$. Además por el lema 3.7, $f \in \Omega^*$,

$$f' = \bar{u}'_1 \int_0^{(\cdot)} \bar{u}_2 g + \bar{u}'_2 \int_0^{(\cdot)} \bar{u}_1 g$$

y $\mathcal{L}f = g$ c.d., así

$$f'(0) = 0 = f'(1).$$

Luego $f \in \Omega_1$, en consecuencia

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\bar{h} - \tilde{h}) g &= \int_0^1 (\bar{h} - \tilde{h}) \mathcal{L}f = \int_0^1 (\bar{h} \mathcal{L}f - \tilde{h} \mathcal{L}f) \\ &= \langle \mathcal{L}f, h \rangle - \langle \mathcal{L}f, \tilde{h} \rangle = \langle f, k \rangle - \langle \mathcal{L}f, \tilde{h} \rangle \\ &= \langle f, k \rangle - \langle f, \mathcal{L}\tilde{h} \rangle \\ &= \langle f, k \rangle - \langle f, k \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

La ecuación (3.19) se debe a la observación 3.1 y a que $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$, por lo cual $g \in \text{Ker}(l)$. Por el lema 3.10, $l = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2$, así para cada $z \in C([0, 1])$

$$l(z) = \alpha_1 l_1(z) + \alpha_2 l_2(z),$$

esto es

$$\int_0^1 (\bar{h} - \tilde{h})z = \alpha_1 \int_0^1 \bar{u}_1 z + \alpha_2 \int_0^1 \bar{u}_2 z.$$

Así

$$\int_0^1 (\bar{h} - \tilde{h} - \alpha_1 \bar{u}_1 - \alpha_2 \bar{u}_2)z = 0 \quad \forall z \in C([0, 1])$$

esto implica, por la proposición 3.11, que

$$h - \tilde{h} - \bar{\alpha}_1 u_1 - \bar{\alpha}_2 u_2 = 0$$

y por tanto

$$h = \tilde{h} + \bar{\alpha}_1 u_1 + \bar{\alpha}_2 u_2.$$

■

Teorema 3.16 El operador \mathcal{L} con dominio Ω_1 es densamente definido, esto es, $\overline{\Omega_1} = L_2([0, 1])$.

Demostración. Supongamos que $\overline{\Omega_1} \neq L_2([0, 1])$, luego $\Omega_1^\perp \neq \{0\}$, así existe $k \in \Omega_1^\perp$ tal que $k \neq 0$.

Tomemos $u_1, u_2, u'_1, u'_2 \in AC([0, 1])$ tales que satisfacen la ecuación $\mathcal{L}u = 0$ y el Wronskiano $(u_1, u_2) = 1$. Por la observación 3.1 podemos tomar $h \in L_2([0, 1])$ tal que $\langle \mathcal{L}f, h \rangle = \langle f, \mathcal{L}h \rangle$, para toda $f \in \Omega_1$. Sea $k_1 = \mathcal{L}h$ y $k_2 = k_1 + k$, luego $k_2 \neq k_1$ y para cada $f \in \Omega_1$,

$$\begin{aligned} \langle f, k_2 \rangle &= \langle f, k_1 + k \rangle = \langle f, k_1 \rangle + \langle f, k \rangle \\ &= \langle f, k_1 \rangle = \langle \mathcal{L}f, h \rangle \end{aligned}$$

es decir

$$\langle \mathcal{L}f, h \rangle = \langle f, k_2 \rangle \quad \forall f \in \Omega_1.$$

Entonces por el lema 3.15, existen $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \Omega^*$ y escalares $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ tales que

$$\mathcal{L}\tilde{h}_1 = k_1, \quad \mathcal{L}\tilde{h}_2 = k_2,$$

$$h = \tilde{h}_1 + \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2$$

y

$$h = \tilde{h}_2 + \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2,$$

esto implica que

$$\tilde{h}_1 + \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 = \tilde{h}_2 + \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2,$$

así

$$\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{11})u_1 + (\alpha_{22} - \alpha_{12})u_2,$$

luego

$$\mathcal{L}(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2) = (\alpha_{21} - \alpha_{11})\mathcal{L}u_1 + (\alpha_{22} - \alpha_{12})\mathcal{L}u_2 = 0,$$

de aquí se tiene que

$$\mathcal{L}\tilde{h}_1 = \mathcal{L}\tilde{h}_2,$$

esto es

$$k_1 = k_2,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto hemos probado que \mathcal{L} es un operador densamente definido. ■

Teorema 3.17 Para cada $v \in \mathcal{V}$ y $w \in \mathcal{W}$, el operador \mathcal{L} con dominio Ω_{vw} es un operador autoadjunto.

Demostración. Por el lema 3.13 sabemos que \mathcal{L} es un operador simétrico y como $\Omega_1 \subset \Omega_{vw}$, por el teorema 3.16 se tiene que $\overline{\Omega_{vw}} = L_2([0, 1])$, por tanto nos resta probar que $D(\mathcal{L}^*) \subset \Omega_1$.

Sea $h \in D(\mathcal{L}^*)$, entonces existe $k \in L_2([0, 1])$ tal que

$$\langle \mathcal{L}f, h \rangle = \langle f, k \rangle \quad , \forall f \in \Omega_{vw}; \quad (3.20)$$

luego, por el lema 3.15 existen $\tilde{h} \in \Omega^*$ y constantes α_1, α_2 tales que $\mathcal{L}\tilde{h} = k$ y $h = \tilde{h} + \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2$, lo que implica que $h \in \Omega^*$.

Por otra parte

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}f, h \rangle &= W_0(\bar{h}, f) - W_1(\bar{h}, f) + \langle f, \mathcal{L}h \rangle \\ &= W_0(\bar{h}, f) - W_1(\bar{h}, f) + \langle f, \mathcal{L}\tilde{h} \rangle \\ &= W_0(\bar{h}, f) - W_1(\bar{h}, f) + \langle f, k \rangle, \end{aligned}$$

así, para cada $f \in \Omega_{vw}$, $W_0(\bar{h}, f) - W_1(\bar{h}, f) = 0$. Sea $f \in \Omega_{vw}$, por el lema 3.9, existe $g \in \Omega^*$ de tal forma que

$$g(0) = f(0), \quad g'(0) = f'(0), \quad g(1) = 0, \quad g'(1) = 0.$$

Notemos que

$$W_0(v, g) = v(0)g'(0) - v'(0)g(0) = v(0)f'(0) - v'(0)f(0) = W_0(v, f) = 0$$

y

$$W_1(w, g) = w(1)g'(1) - w'(1)g(1) = 0,$$

así $g \in \Omega_{vw}$.

Ahora

$$\begin{aligned} W_0(\bar{h}, f) &= \bar{h}(0)f'(0) - \bar{h}'(0)f(0) \\ &= \bar{h}(0)g'(0) - \bar{h}'(0)g(0) \\ &= \bar{h}(0)g'(0) - \bar{h}'(0)g(0) - [\bar{h}(1)g'(1) - \bar{h}'(1)g(1)] \\ &= W_0(\bar{h}, g) - W_1(\bar{h}, g) = 0, \end{aligned}$$

de aquí se tiene que

$$\forall f \in \Omega_{vw}, W_0(\bar{h}, f) = 0. \quad (3.21)$$

Por el lema 3.9 existe $g_1 \in \Omega^*$ tal que

$$g_1(0) = v(0), \quad g_1'(0) = v'(0), \quad g_1(1) = 0, \quad g_1'(1) = 0;$$

luego

$$W_0(v, g_1) = v(0)g_1'(0) - v'(0)g_1(0) = 0$$

y

$$W_1(v, g_1) = v(1)g_1'(1) - v'(1)g_1(1) = 0,$$

así, $g_1 \in \Omega_{vw}$.

Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned} W_0(\bar{h}, v) &= \bar{h}(0)v'(0) - \bar{h}'(0)v(0) \\ &= \bar{h}(0)g_1'(0) - \bar{h}'(0)g_1(0) \\ &= W_0(\bar{h}, g_1) = 0, \end{aligned}$$

así $W_0(v, \bar{h}) = 0$. Luego por el teorema 3.12

$$W_0(v, h) = 0.$$

De igual manera se prueba que $W_1(w, h) = 0$. Por lo tanto $h \in \Omega_{vw}$.

Con todo hemos probado que \mathcal{L} es un operador autoadjunto en Ω_{vw} . ■

3.1. Propiedades espectrales

En esta sección veremos algunas propiedades que cumple el espectro del operador de Schrödinger \mathcal{L} , es decir el conjunto de valores propios de \mathcal{L} . Consideraremos como dominio de \mathcal{L} al conjunto Ω_{vw} .

Definición 3.18 Sea $A : D(A) \rightarrow H$ un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{C}$. Decimos que λ es **valor propio** de A si existe $y \neq 0 \in D(A)$ que satisface la ecuación

$$Ay = \lambda y.$$

A y se le conoce como *función propia* y el conjunto de valores propios $\sigma(A)$ se conoce como *espectro de A* .

Lema 3.19 Todos los valores propios de \mathcal{L} son reales.

Demostración. Sea λ un valor propio y $y \in \Omega_{vw}$ su función propia correspondiente, luego

$$\begin{aligned} \lambda \|y\|^2 &= \langle \lambda y, y \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}y, y \rangle = \langle y, \mathcal{L}y \rangle \\ &= \langle y, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \|y\|^2, \end{aligned}$$

esto implica que $\lambda = \bar{\lambda}$. Así λ es real. ■

Lema 3.20 Sean $y(x, \lambda_1), z(x, \lambda_2) \in \Omega_{vw}$ funciones propias correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente de la ecuación $\mathcal{L}y = \lambda y$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces, las funciones y y z son ortogonales, es decir

$$\langle y, z \rangle = 0.$$

Demostración. Sean λ_1, λ_2 valores propios de \mathcal{L} y $y, z \in \Omega_{vw}$ sus correspondientes funciones propias. Supongamos que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, luego como \mathcal{L} es simétrico, se tiene que

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle = \langle y, \mathcal{L}z \rangle,$$

esto es

$$\langle \lambda_1 y, z \rangle = \langle y, \lambda_2 z \rangle.$$

Por el teorema anterior λ_1 y λ_2 son reales, así

$$\lambda_1 \langle y, z \rangle = \lambda_2 \langle y, z \rangle,$$

luego

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle y, z \rangle = 0,$$

y dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se tiene que

$$\langle y, z \rangle = 0;$$

por tanto y y z son ortogonales. ■

Teorema 3.21 Los valores propios de \mathcal{L} son simples, es decir, la multiplicidad geométrica es 1.

Demostración. Supongamos que λ es un valor propio de multiplicidad geométrica mayor que 1. Luego existen dos funciones propias $y_1, y_2 \in \Omega_{vw}$ correspondientes al valor propio λ , tales que

$$W_0(v, y_1) = 0, \quad W_0(v, y_2) = 0,$$

y

$$W_1(w, y_1) = 0, \quad W_1(w, y_2) = 0,$$

así por (3.17) del teorema 3.12 se tiene que $W_0(v, \bar{y}_1) = 0$ y $W_1(w, \bar{y}_1) = 0$, luego por (3.18) del teorema 3.12

$$0 = W_0(\bar{y}_1, y_2) = W_0(y_1, y_2),$$

y

$$0 = W_1(\bar{y}_1, y_2) = W_1(y_1, y_2).$$

Por otro lado, por el teorema 3.5 sabemos que en cualquier punto el Wronskiano debe ser constante, en este caso la constante es igual a cero, de aquí se tiene que y_1 y y_2 son linealmente dependientes, esto es

$$y_1 = \alpha y_2,$$

por tanto λ debe ser un valor propio simple. ■

Lema 3.22 Supongamos que $\lambda \in \rho(\mathcal{L})$. Entonces existen soluciones $u_0(x, \lambda)$ y $u_1(s, \lambda)$ de la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)f = 0$, las cuales pertenecen a Ω_{vw} . Además el resolvente de \mathcal{L} está dado por

$$(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}g(x) = \int_0^1 G(\lambda, x, y)g(y)dy$$

donde

$$G(\lambda, x, y) = \begin{cases} u_1(\lambda, x)u_0(\lambda, y), & x \geq y, \\ u_0(\lambda, x)u_1(\lambda, y), & x \leq y. \end{cases}$$

Demostración. Por el teorema 3.3, existen v_1, v_2 soluciones de la ecuación $(\mathcal{L} - \lambda I)y = 0$, tales que $W(v_1, v_2) = 1$. Consideremos la función $f = (\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}g \in \Omega_{vw}$, por el teorema 3.7,

$$f(x) = v_1(x) \left(\alpha + \int_0^x v_2(y)g(y)dy \right) + v_2(x) \left(\beta + \int_x^1 v_1(y)g(y)dy \right).$$

Tomando v_1, v_2 de tal forma que

$$v_1(0) = 1 = v_2'(0), \quad v_1'(1) = 0 = v_2(1),$$

se tiene que $\alpha = f(0)$ y $\beta = f'(0) - \int_0^1 v_1(y)g(y)dy$, por otro lado si tomamos a v_1, v_2 como sigue

$$v_1(1) = 1 = v_2'(1), \quad v_1'(1) = 0 = v_2(1),$$

$\alpha = f(1) - \int_0^1 v_2(y)g(y)dy$ y $\beta = f'(1)$. Si suponemos que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$, entonces

$$0 = v_1(0)\alpha + v_2(0) \left(\beta + \int_0^1 v_1(y)g(y)dy \right),$$

$$0 = v_1'(0)\alpha + v_2'(0) \left(\beta + \int_0^1 v_1(y)g(y)dy \right),$$

$$0 = v_1(1) \left(\alpha + \int_0^1 v_2(y)g(y)dy \right) + v_2(1)\beta,$$

y

$$0 = v_1'(1) \left(\alpha + \int_0^1 v_2(y)g(y)dy \right) + v_2'(1)\beta.$$

De aquí, $\alpha = \beta + \int_0^1 v_1(y)g(y)dy = \alpha + \int_0^1 v_2(y)g(y)dy = \beta = 0$, esto implica

$$\int_0^1 v_1(y)g(y)dy = \int_0^1 v_2(y)g(y)dy = 0.$$

Si suponemos que $f(1) \neq 0$, existe u_1 tal que $(\mathcal{L} - \lambda I)u_1 = 0$ y

$$u_1(1) = f(1), \quad u_1'(1) = f'(1),$$

y además satisface que $W_1(w, u_1) = 0$. Sea h tal que $(\mathcal{L} - \lambda I)h = 0$ y

$$h(1) = 0,$$

$$h'(1) = \frac{1}{f(1)}$$

luego

$$\begin{aligned} W_1(u_1, h) &= u_1(1)h'(1) - u_1'(1)h(1) \\ &= f(1)h'(1) - f'(1)h(1) \\ &= f(1)\frac{1}{f(1)} = 1. \end{aligned}$$

Así, por el teorema 3.7.

$$\tilde{f}(x) = u_1(x) \left(\alpha^* + \int_0^x h(y)g(y)dy \right) + h(x) \left(\beta^* + \int_x^1 u_1(y)g(y)dy \right).$$

Tomemos $\alpha^* = 1 - \int_0^1 h(y)g(y)$ y $\beta^* = 0$, entonces

$$\tilde{f}(1) = u(1)$$

y

$$\tilde{f}'(1) = u'(1),$$

luego, por el teorema 3.3,

$$f = \tilde{f}.$$

Por tanto

$$f(x) = u_1(x) \left(\alpha^* + \int_0^x h(y)g(y)dy \right) + h(x) \int_x^1 u_1(y)g(y)dy.$$

Por otro lado, existe u_2 tal que $(\mathcal{L} - \lambda I)u_2 = 0$ y

$$u_2(0) = f(0),$$

$$u_2'(0) = f'(0),$$

además cumple que $W_0(v, u_2) = 0$ y

$$\begin{aligned} W_0(u_1, u_2) &= u_1(0)u_2'(0) - u_1'(0)u_2(0) \\ &= u_1(0)f'(0) - u_1'(0)f(0) \\ &= u_1(0) \left[u_1'(0)\alpha^* + h'(0) \int_0^1 u_1(y)g(y)dy \right] \\ &\quad - u_1'(0) \left[u_1(0)\alpha^* + h(0) \int_0^1 u_1(y)g(y)dy \right] \\ &= [u_1(0)h'(0) - u_1'(0)h(0)] \int_0^1 u_1(y)g(y)dy \\ &= W_0(u_1, h) \int_0^1 u_1(y)g(y)dy = \int_0^1 u_1(y)g(y)dy. \end{aligned}$$

Pongamos $\bar{\beta} = \int_0^1 u_1(y)g(y)dy$, de aquí se tiene

$$W_0(u_1, \frac{u_2}{\bar{\beta}}) = 1.$$

Luego

$$f(x) = u_1(x) \left(\alpha + \int_0^x \frac{u_2(y)}{\bar{\beta}} g(y) dy \right) + \frac{u_2(x)}{\bar{\beta}} \left(\beta + \int_x^1 u_1(y)g(y)dy \right).$$

Como $f(0) = u_2(0)$, $\alpha = 0$, $\beta = \bar{\beta} - \int_0^1 u_1(y)g(y)dy = 0$, y si $u_0 = \frac{u_2}{\bar{\beta}}$, entonces

$$f(x) = u_1(x) \left(\int_0^x u_0(y)g(y)dy \right) + u_0(x) \left(\int_x^1 u_1(y)g(y)dy \right).$$

Por tanto

$$(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}g(x) = \int_0^1 G(\lambda, x, y)g(y)dy$$

donde

$$G(\lambda, x, y) = \begin{cases} u_1(\lambda, x)u_0(\lambda, y) & x \geq y, \\ u_0(\lambda, x)u_1(\lambda, y) & x \leq y. \end{cases}$$

■

Proposición 3.23 Sea $z \in \rho(\mathcal{L})$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Luego λ es valor propio de $(\mathcal{L} - zI)^{-1}$ respecto al vector propio ϕ si y sólo si $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de $\mathcal{L} - zI$ respecto al vector propio ϕ .

Demostración. Consideremos el valor propio de $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de $(\mathcal{L} - zI)^{-1}$, luego

$$(\mathcal{L} - zI)^{-1}\phi = \lambda\phi,$$

así

$$\begin{aligned} \phi &= (\mathcal{L} - zI)\lambda\phi \\ &= \lambda(\mathcal{L} - zI)\phi \end{aligned}$$

esto implica

$$\frac{1}{\lambda}\phi = (\mathcal{L} - zI)\phi,$$

Por tanto, $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de $\mathcal{L} - zI$, de la misma manera se prueba el recíproco. ■

Proposición 3.24 Sea $z \in \mathbb{C}$, luego $\lambda \in \mathbb{C}$ es una valor propio de \mathcal{L} respecto al vector propio ϕ si y sólo si $z + \lambda$ es un valor propio de \mathcal{L} respecto al vector propio ϕ .

Demostración. Consideremos $z \in \mathbb{C}$, luego

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - zI)\phi = \lambda\phi &\iff \mathcal{L}\phi - z\phi = \lambda\phi \\ &\iff \mathcal{L}\phi = z\phi + \lambda\phi \\ &\iff \mathcal{L}\phi = (z + \lambda)\phi. \end{aligned}$$

■

Proposición 3.25 Para cada $z \in \rho(\mathcal{L})$ con $z \in \mathbb{R}$, se tiene que

- 1) $\mathcal{L} - zI : \Omega_{vw} \rightarrow L_2([0, 1])$ es simétrico.
- 2) $(\mathcal{L} - zI)^{-1} : L_2([0, 1]) \rightarrow \Omega_{vw}$ es simétrico.

Demostración.

- 1) Sean $f, g \in \Omega_{vw}$, luego

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{L} - zI)f, g \rangle &= \langle \mathcal{L}f - zf, g \rangle = \langle \mathcal{L}f, g \rangle - z\langle f, g \rangle \\ &= \langle f, \mathcal{L}g \rangle - \langle f, zg \rangle = \langle f, \mathcal{L}g - zg \rangle \\ &= \langle f, (\mathcal{L} - zI)g \rangle. \end{aligned}$$

- 2) Sean $g, h \in L_2([0, 1])$ y sean $\tilde{h} = (\mathcal{L} - zI)^{-1}h$, $\tilde{g} = (\mathcal{L} - zI)^{-1}g$. Luego

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{L} - zI)^{-1}g, h \rangle &= \langle (\mathcal{L} - zI)^{-1}g, (\mathcal{L} - zI)(\mathcal{L} - zI)^{-1}h \rangle \\ &= \langle \tilde{g}, (\mathcal{L} - zI)\tilde{h} \rangle = \langle (\mathcal{L} - zI)\tilde{g}, \tilde{h} \rangle \\ &= \langle g, (\mathcal{L} - zI)^{-1}h \rangle. \end{aligned}$$

■

Una de las propiedades espectrales importantes del inverso del operador de Schrödinger se enuncia en el siguiente teorema. Este teorema nos da la existencia de una sucesión infinita de valores propios del operador inverso de \mathcal{L} . Existe una relación entre los valores propios del operador inverso y los valores propios del operador \mathcal{L} , la cual se muestra en resultados posteriores, esta relación nos va a permitir resolver la ecuación $(\mathcal{L} - zI)y = f$.

Teorema 3.26 Si $z \in \rho(\mathcal{L})$ con $z \in \mathbb{R}$ entonces

a) El operador $(\mathcal{L} - zI)^{-1} : L_2([0, 1]) \longrightarrow \Omega_{vw}$ tiene una sucesión infinita de valores propios reales tales que

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| \geq \cdots$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0.$$

b) Para cada conjunto $\{\psi_0, \psi_1, \dots\}$ de manera que $\|\psi_n\|_2 = 1$ y $\Gamma\psi_n = \lambda_n\psi_n$, se tiene que $\{\psi_0, \psi_1, \dots\}$ es un conjunto ortonormal completo en $L_2([0, 1])$.

Demostración. Por la proposición 3.25, $(\mathcal{L} - zI)^{-1}$ es simétrico. Además por el lema 3.22,

$$(\mathcal{L} - zI)^{-1}(g)(x) = \int_0^1 G(x, t)g(t)dt,$$

donde

$$G(x, y) = \begin{cases} u_1(x)u_0(y) & x \geq y, \\ u_0(x)u_1(y) & x \leq y. \end{cases}$$

Sea $\Gamma = (\mathcal{L} - zI)^{-1}$. Dado que G es continua sobre $[0, 1] \times [0, 1]$, $\Gamma : L_2([0, 1]) \longrightarrow \Omega_{vw}$ es un operador compacto simétrico y, por tanto, por el teorema 2.8, si $\lambda = \|\Gamma\|$ entonces λ o $-\lambda$ es valor propio de Γ . Denotemos a este valor propio por λ_0 y por ϕ_0 su respectivo vector propio normalizado, es decir $\|\phi_0\| = 1$.

Como λ_0 es real, sin pérdida de generalidad podemos suponer que ϕ_0 es una función de valores reales. Consideremos la función

$$G_1(x, t) = G(x, t) - \lambda_0\phi_0(x)\phi_0(t).$$

Dado que $\phi_0 \in \Omega_{vw}$, G_1 verifica las mismas propiedades de regularidad que G , más aún, como $G(x, t) = G(t, x)$ para toda $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$, entonces G_1 también satisface esta propiedad. Si se define

$$\Gamma_1 : L_2[0, 1]) \longrightarrow \Omega_{vw}$$

como

$$\Gamma_1(g) = \int_0^1 G_1(x, t)g(t).$$

entonces $\Gamma_1(g) = \Gamma(g) - \lambda_0\phi_0(x) \int_0^1 \phi_0(t)dt$ y por tanto, $\Gamma_1(g) \in \Omega_{vw}$. Así Γ_1 está bien definida. Ahora como G_1 es continua, se tiene que Γ_1 es compacto. Probemos que

Γ_1 es simétrico.

$$\begin{aligned}
 \langle \Gamma_1 g, f \rangle &= \int_0^1 \Gamma_1 g(x) \bar{f}(x) dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, t) g(t) \bar{f}(x) dx dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, t) g(t) \bar{f}(x) dt dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, t) \bar{f}(x) dx g(t) dt \\
 &= \int_0^1 \overline{\int_0^1 G_1(x, t) f(x) dx} g(t) dt \\
 &= \int_0^1 \overline{\Gamma_1 f(t)} g(t) dt = \langle g, \Gamma f \rangle.
 \end{aligned}$$

Por el teorema 2.8, tomemos λ_1 valor propio de Γ_1 tal que $|\lambda_1| = \|\Gamma_1\|$. Sea ϕ_1 su respectivo vector propio normalizado, suponemos sin pérdida de generalidad que ϕ_1 es una función de valores reales. Demostremos que ϕ_1 es vector propio de Γ respecto al valor propio λ_1 . Observemos que, para cada $f \in L_2([0, 1])$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \langle \Gamma_1 f, \phi_0 \rangle &= \int_0^1 \Gamma_1 f(x) \phi_0(x) dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, t) f(t) dt (\phi_0(x)) dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 G(x, t) f(t) \phi_0(x) dt dx - \int_0^1 \int_0^1 \lambda_0 \phi_0(x) \phi(t) f(t) \phi_0(x) dt dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 G(t, x) \phi_0(x) dx f(t) dt - \lambda_0 \int_0^1 \phi_0^2(x) dx \int_0^1 \phi_0(t) dt \\
 &= \int_0^1 \Gamma \phi_0(t) f(t) dt - \lambda_0 \int_0^1 \phi_0(t) f(t) dt \\
 &= \int_0^1 \lambda \phi_0(t) f(t) - \int_0^1 \lambda \phi_0(t) f(t) = 0.
 \end{aligned}$$

Es decir, $\phi_0 \in \Gamma_1(L_2([0, 1]))^\perp$. En particular

$$0 = \langle \Gamma_1 \phi, \phi_0 \rangle = \lambda_1 \langle \phi_1, \phi_0 \rangle.$$

Si suponemos que $\|\Gamma_1\| \neq 0$, entonces ϕ_1 es ortogonal a ϕ_0 . Así

$$\begin{aligned}
 \Gamma \phi_1(x) &= \int_0^1 G(x, t) \phi_1(t) dt \\
 &= \int_0^1 [G_1(x, t) + \lambda_0 \phi_0(x) \phi_0(t)] \phi_1(t) dt \\
 &= \int_0^1 G_1(x, t) \phi_1(t) dt + \lambda_0 \phi_0(x) \int_0^1 \phi_0(t) \phi_1(t) dt \\
 &= \int_0^1 G_1(x, t) \phi_1(t) dt = \Gamma_1 \phi_1(x) = \lambda \phi_1(x).
 \end{aligned}$$

Resumiendo lo anterior se tiene:

- $|\lambda_1| = \|\Gamma_1\|$.
- ϕ_1 es una función de valores reales.
- $\Gamma_1\phi_1 = \lambda_1\phi_1$.
- $\|\phi_1\|_2 = 1$.
- $\phi_0 \in (\Gamma_1(L_2([0, 1])))^\perp$.
- Si $\|\Gamma_1\| \neq 0$ entonces $\langle \phi_1, \phi_0 \rangle = 0$ y $\Gamma\phi_1 = \lambda_1\phi_1$.

Similarmente a lo anterior, definimos

$$G_2(x, t) = G_1(x, t) - \lambda_1\phi_1(x)\phi_1(t)$$

y

$$\Gamma_2(g)(x) = \int_0^1 G_2(x, t)g(t)dt.$$

Luego $G_2(x, t) = G_2(t, x)$ para cada $x \in [0, 1] \times [0, 1]$, por tanto, Γ_2 es un operador compacto simétrico. Sea λ_2 valor propio de Γ_2 tal que $|\lambda_2| = \|\Gamma_2\|$ y ϕ_2 una función de valores reales con $\|\phi_2\|_2 = 1$ tal que $\Gamma_2\phi_2 = \lambda_2\phi_2$. Luego $\phi_1 \in \Gamma_2(L_2([0, 1]))^\perp$, por tanto $0 = \langle \Gamma_2\phi_2, \phi_1 \rangle = \langle \lambda_2\phi_2, \phi_1 \rangle = \lambda_2\langle \phi_2, \phi_1 \rangle$. Supongamos que $\|\Gamma_2\| \neq 0$, luego $\langle \phi_2, \phi_1 \rangle = 0$. Así $\Gamma_1\phi_2 = \lambda_2\phi_2$. Por otra parte, como $\phi_0 \in (L_2([0, 1]))^\perp$, se tiene que

$$0 = \langle \Gamma_1\phi_2, \phi_0 \rangle = \langle \lambda_2\phi_2, \phi_0 \rangle = \lambda_2\langle \phi_2, \phi_0 \rangle,$$

y por tanto

$$\Gamma\phi_2 = \lambda_2\phi_2.$$

Siguiendo con este procedimiento construimos un sucesión infinita $\{\lambda_n\}$ de valores propios de Γ siempre y cuando cada $\|\Gamma_n\| \neq 0$. Observemos que si para algún $n \in \mathbb{N}$, $\|\Gamma_n\| = 0$ entonces $\Gamma_n = 0$, así para cada $f \in L_2([0, 1])$,

$$0 = \Gamma_n(f) = \Gamma(f) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j\phi_j\langle f, \phi_j \rangle,$$

lo cual implica que

$$0 = (\mathcal{L} - zI)\Gamma(f) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j\langle f, \phi_j \rangle(\mathcal{L} - zI)(\phi_j),$$

es decir

$$f = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \langle f, \phi_j \rangle (\mathcal{L} - zI)(\phi_j),$$

esto es una contradicción cuando f no es continua.

De acuerdo a la construcción de los valores propios, se observa que

$$\|\Gamma\| \geq \|\Gamma(\phi_1)\|_2 = \|\lambda_1 \phi_1\|_2 = |\lambda_1| = \|\Gamma_1\| \geq \|\Gamma_1(\phi_2)\|_2 = \|\lambda_2 \phi_2\|_2 = |\lambda_2| = \|\Gamma_2\| \geq \dots$$

es decir

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| \geq \dots$$

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $\varphi_n(x, t) = \phi_n(x)\phi_n(t)$, la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal en $L_2([0, 1] \times [0, 1])$. Los coeficientes de Fourier de la función G se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} \langle G, \varphi_n \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 G(x, t) \varphi_n(x, t) dx dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 G(x, t) \phi_n(t) dt \right) \phi_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \Gamma(\phi_n)(x) \phi_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \lambda_n \phi_n^2(x) dx = \lambda_n. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Bessel, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |G(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0.$$

Sea $\{\psi_0, \psi_1, \dots\}$ un conjunto en $L_2([0, 1])$ tal que $\|\psi_n\|_2 = 1$ y $\Gamma\psi_n = \lambda_n\psi_n$, probemos que es un conjunto ortonormal completo en $L_2([0, 1])$. Por el lema 3.20, $\{\psi_0, \psi_1, \dots\}$ es un conjunto ortonormal. Mostremos primero que para cada $y \in \Omega_{vw}$, se tiene que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \langle y, \psi_n \rangle \psi_n \tag{3.22}$$

en la norma de $L_2([0, 1])$. Sea $y \in \Omega_{vw}$. Pongamos $f = (L - zI)y$, luego $y = \Gamma f$. Por lo tanto,

$$\langle y, \psi_n \rangle = \langle \Gamma f, \psi_n \rangle = \langle f, \Gamma \psi_n \rangle = \lambda_n \langle f, \psi_n \rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \left\| y - \sum_{n=0}^{m-1} \langle y, \psi_n \rangle \psi_n \right\|_2 &= \left\| \Gamma f - \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \langle f, \psi_n \rangle \psi_n \right\|_2 \\
 &= \|\Gamma_m f\|_2 \\
 &\leq \|\Gamma_m\| \|f\|_2 \\
 &= |\lambda_m| \|f\|_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned}$$

lo cual implica que la igualdad (3.22) es válida en $L_2([0, 1])$.

Sean $f \in L_2([0, 1])$ y $\epsilon > 0$. Como $\overline{\Omega_{vw}} = L_2([0, 1])$, existe $y \in \Omega_{vw}$ tal que $\|f - y\|_2 < \frac{\epsilon}{4}$. Por la igualdad (3.22), existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $N \geq N_0$,

$$\left\| y - \sum_{n=0}^N \langle y, \psi_n \rangle \psi_n \right\|_2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para $N \geq N_0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|f\|_2 &\leq \left\| f - \sum_{n=0}^N \langle f, \psi_n \rangle \psi_n \right\|_2 + \left\| \sum_{n=0}^N \langle f, \psi_n \rangle \psi_n \right\|_2 \\
 &= \left\| f - \sum_{n=0}^N \langle f, \psi_n \rangle \psi_n \right\|_2 + \sqrt{\left\langle \sum_{n=0}^N \langle f, \psi_n \rangle \psi_n, \sum_{n=0}^N \langle f, \psi_n \rangle \psi_n \right\rangle} \\
 &= \left\| f - \sum_{n=0}^N \langle f, \psi_n \rangle \psi_n \right\|_2 + \sqrt{\sum_{n=0}^N |\langle f, \psi_n \rangle|^2}.
 \end{aligned}$$

También, por la desigualdad de Bessel,

$$\sqrt{\sum_{n=0}^N |\langle f, \psi_n \rangle|^2} \leq \|f\|_2.$$

Así

$$\begin{aligned}
 0 \leq \|f\|_2 - \sqrt{\sum_{n=0}^N |\langle f, \psi_n \rangle|^2} &\leq \|f - \sum_{n=0}^N \langle f, \psi_n \rangle \psi_n\|_2 \\
 &\leq \|f - y\|_2 + \|y - \sum_{n=0}^N \langle y, \psi_n \rangle \psi_n\|_2 \\
 &\quad + \|\sum_{n=0}^N \langle f - y, \psi_n \rangle \psi_n\|_2 \\
 &\leq \|f - y\|_2 + \|y - \sum_{n=0}^N \langle y, \psi_n \rangle \psi_n\|_2 \\
 &\quad + \sqrt{\sum_{n=0}^N |\langle f - y, \psi_n \rangle|^2} \\
 &\leq \|f - y\|_2 + \|y - \sum_{n=0}^N \langle y, \psi_n \rangle \psi_n\|_2 + \|f - y\|_2 \\
 &\leq 2\|f - y\|_2 + \|y - \sum_{n=0}^N \langle y, \psi_n \rangle \psi_n\|_2 \\
 &< 2\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \psi_n \rangle|^2,$$

lo cual implica que

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n,$$

en la norma del espacio $L_2([0, 1])$. ■

Observación 3.27 Los valores propios de Γ son exactamente los obtenidos en el teorema 3.26.

En efecto, supóngase $\{\lambda_n\}$ como en el teorema 3.26 y sea $\{\psi_n\}$ un conjunto en $L_2([0, 1])$, tal que $\|\psi_n\|_2 = 1$ y $\Gamma\psi_n = \lambda_n\psi_n$. Si existiese un valor propio λ de Γ que cumpla que $\lambda \neq \lambda_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y fuese $\psi \neq 0$ el vector propio correspondiente, se tendría por el lema 3.20, que ψ es ortogonal a todos los vectores propios ψ_n .

Luego por la completitud de $\{\psi_0, \psi_1, \dots\}$ se tiene que

$$\|\psi\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \psi, \psi_n \rangle|^2 = 0$$

lo cual es una contradicción por el hecho de ser ψ continua y diferente de 0.

Observación 3.28 Sean $z \in \rho(\mathcal{L})$ con z real, $\{\lambda_n\}$ todos los valores propios de $\mathcal{L} - zI$ diferentes de 0 y $\{\phi_n\}$ un conjunto de $L_2([0, 1])$ tal que $\|\phi_n\|_2 = 1$ y $(\mathcal{L} - zI)\phi_n = \lambda_n\phi_n$. Luego por la proposición 3.23 para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Gamma\phi_n = \frac{1}{\lambda_n}\phi_n$, así por la observación anterior $\{\frac{1}{\lambda_n}\}$ son los valores propios generados en el teorema 3.26, luego $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ es un conjunto ortonormal completo en $L_2([0, 1])$. De esta forma si $f \in L_2([0, 1])$,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n.$$

Afirmamos que

$$\Gamma f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \Gamma(\phi_n)(x)$$

uniformemente sobre $[0, 1]$. En efecto, para $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(f)(x) - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \Gamma(\phi_n)(x) \right| \\ &= \left| \int_0^1 G(x, t) f(t) dt - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_0^1 G(x, t) \phi_n(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 G(x, t) [f(t) - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(t)] dt \right| \\ &= \left| \langle G(x, \cdot), f - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \rangle \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|G(x, \cdot)\| \left\| f - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \\ &\leq M \left\| f - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \quad \text{para algún } M > 0 \\ &= M \left\| f - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

De esta forma si $y = \Gamma(f)$, entonces y es solución del problema

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - zI)y = f \\ y \in \Omega_{vw}. \end{cases}$$

Capítulo 4

El operador de Schrödinger sobre una gráfica

Trabajar con el operador de Schrödinger sobre gráficas métricas ha causado mucho interés debido a sus diversas aplicaciones. Por ejemplo, hay una relación entre las gráficas métricas y la resistividad eléctrica de redes eléctricas, la cual se establece en el teorema de Foster (1949), este teorema considera la resistencia a lo largo de las aristas como la longitud que hay entre los vértices que la componen, una prueba del teorema de Foster la encontramos en [1].

4.1. Gráficas

La teoría de gráficas surge en el siglo XVIII con el famoso problema de los puentes de Königsberg, el cual fue resuelto por el matemático suizo Leonhard Euler entre 1707 y 1786 (véase [17]).

La ciudad de Königsberg tenía en el siglo XVIII siete puentes. El problema era cruzar por todos los puentes exactamente una vez y volver al punto de partida. Éste es considerado como el primer resultado de la teoría de gráficas. En la solución se utiliza la topología de la gráfica que se asocia a los puentes, pues sólo importan las conexiones entre las islas y no las distancias que existe entre ellas. Euler prueba que no se puede cruzar por todos los puentes exactamente una vez y volver al punto de partida, en [6] podemos encontrar una prueba de este hecho.

Definición 4.1 Una **gráfica** $\Gamma(V, E)$ está compuesta por un conjunto finito de vértices (nodos) $V = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ y un conjunto de aristas $E = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$, donde cada arista $e \in E$ une dos vértices $v_i, v_j \in V$. En este caso, diremos que v_i y v_j son *adyacentes*.

Identificaremos cada arista como una pareja de vértices $[v_i, v_j]$. En las figuras 4.1 y 4.2 mostramos dos ejemplos de gráficas.

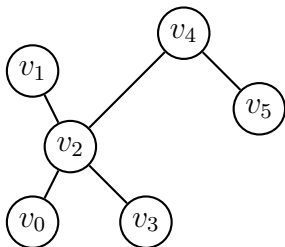


Figura 4.1: Ejemplo de gráfica conexa.

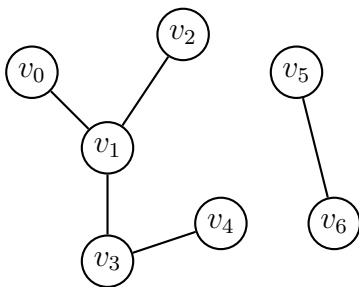


Figura 4.2: Ejemplo de gráfica no conexa.

Una gráfica es un objeto que nos indica cómo se conectan los vértices, sin darles un sentido geométrico, por lo cual, podemos decir que una gráfica posee información topológica (nos referimos a la forma de la gráfica). Por ejemplo, en una gráfica no es necesario conocer en dónde se encuentran los vértices o a qué distancia se encuentran unos de otros. La figura 4.3 muestra dos representaciones de la misma gráfica, pues se conserva la manera en que se conectan los vértices.

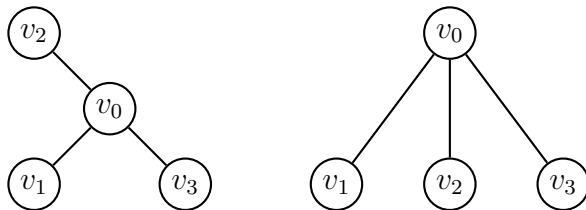


Figura 4.3: Dos representaciones de la misma gráfica

Definición 4.2 Dada un gráfica $\Gamma(V, E)$. Decimos que $\Gamma'(V', E')$ es una **subgráfica** de Γ si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.

Definición 4.3 Un **camino** es una sucesión de vértices $P = v_{\alpha_0}v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_n}$ donde v_{α_i} es adyacente a $v_{\alpha_{i+1}}$. Además, diremos que v_{α_0} y v_{α_n} son los extremos del camino y que P une a v_{α_0} con v_{α_n} . La *longitud del camino* es el número de aristas que forman los vértices de la sucesión.

Definición 4.4 Sea $P = v_{\alpha_0}v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_n}$ un camino, si los vértices v_{α_i} , con $i = 0, \dots, n$, son diferentes entre si, diremos que P es un **camino simple**.

En particular, trabajaremos con caminos simples, por lo que, al referirnos a un camino, éste será un camino simple. Notemos que cuando se tiene un camino formado por n vértices la longitud del camino será $n - 1$. Para la gráfica de la figura 4.4 un camino del vértice v_0 al vértice v_7 está dado por la siguiente sucesión:

$$P = v_0v_1v_2v_3v_7$$

y la longitud del camino es 4.

Definición 4.5 Un **ciclo** es una sucesión $C = v_{\alpha_0}v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_n}v_{\alpha_0}$ donde $v_{\alpha_0}v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_n}$ es un camino y v_{α_0} y v_{α_n} son adyacentes.

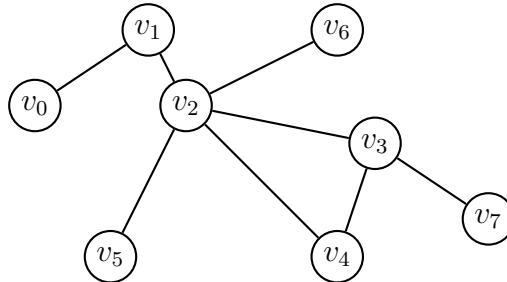


Figura 4.4: Ejemplo de gráfica con un ciclo.

En la figura 4.4, encontramos el ciclo:

$$C = v_2v_3v_4v_2$$

Con estas definiciones ahora podemos decir cuándo una gráfica es conexa.

Definición 4.6 Decimos que una **gráfica** $\Gamma(V, E)$ es **conexa** si para todo par de vértices $u, v \in V$ existe un camino que une a u y v .

Si una gráfica no es conexa, se dice que la gráfica es desconexa. La figura 4.1 muestra una gráfica conexa mientras que la figura 4.2 es un gráfica que no es conexa.

Definición 4.7 Un **árbol** es una gráfica $T(V, E)$ conexa en la cual no hay ciclos.

Definición 4.8 Un *subárbol* $T'(V', E')$ es una subgráfica de una gráfica $\Gamma(V, E)$ que además es un árbol.

Como hemos mencionado antes podemos ver una gráfica indistintamente como un objeto topológico. Si consideramos que los vértices de la gráfica se encuentran en un espacio determinado, la teoría de topología algebraica nos brinda algunas estructuras que consideramos como gráficas. Para ello, haremos una revisión de algunos conceptos de la topología algebraica.

Definición 4.9 Si tenemos $k + 1$ puntos en \mathbb{R}^n , $k \leq n$, el *k-simplex*, *símplice* o *simplex* de dimensión k generado por estos puntos es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a $\{v_0, \dots, v_k\}$.

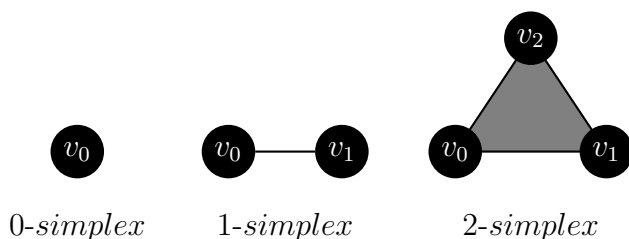


Figura 4.5: Ejemplos de simplex o símplices.

La figura 4.5 nos muestra algunos ejemplos de símplices.

Observación. Los símplices o simplex de dimensión 1 son desde el enfoque de la teoría de gráficas, dos vértices unidos por una arista. En general, representaremos los símplices o simplex de la misma forma que las gráficas.

Definición 4.10 Si S es un simplex de dimensión k generado por $A = \{v_0, \dots, v_k\}$, y S' es generado por $B \subseteq A$, entonces decimos que S' es una *cara* de S y se denota por $S' \preceq S$. Si además $B \neq A$, entonces diremos que S' es una *cara propia* de S .

Para aclarar un poco más la idea de la definición de cara de un simplex, las figuras 4.6 y 4.7 muestran las caras del 1-simplex y del 2-simplex respectivamente.



Figura 4.6: Caras del 1-simplex.

Definición 4.11 Un *complejo simplicial* K es una colección de simplex en algún \mathbb{R}^n establecido que satisfacen las siguientes condiciones.

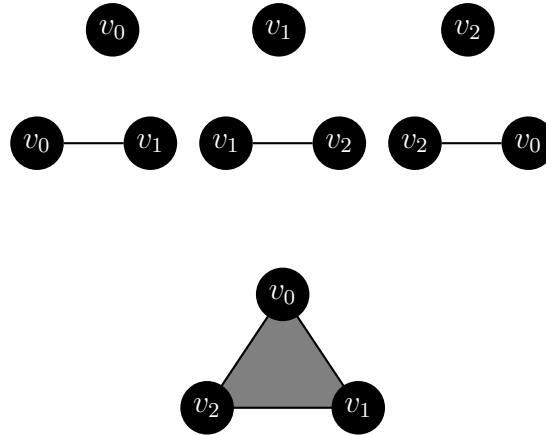


Figura 4.7: Caras del 2-simplex.

1. Si $S \in K$ y $S' \preceq S$ entonces $S' \in K$
2. Si $S_1, S_2 \in K$ y $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ entonces $S_1 \cap S_2 \preceq S_1$ y $S_1 \cap S_2 \preceq S_2$

La *dimensión de un complejo simplicial* K es la mayor dimensión de los simplex de K .

Definición 4.12 Dado un complejo simplicial K , se define el **poliedro** $|K|$ como la unión de todos los símplexes de K . La *dimensión del poliedro* $|K|$ es la misma que la del complejo simplicial K .

Para la gráfica de la figura 4.8, el complejo simplicial K está dado como el siguiente conjunto:

$$K = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_2, v_5], [v_3, v_4], [v_4, v_2]\}$$

y el poliedro $|K|$ corresponde a la figura dada.

Definición 4.13 Una gráfica es un poliedro $|K|$ de manera que la dimensión del complejo simplicial K es 1.

A continuación daremos la definición de árbol desde el punto de vista de la topología algebraica.

Definición 4.14 Un poliedro $|T|$ en \mathbb{R}^n es un **árbol** si es simplemente conexo y su dimensión es 1.

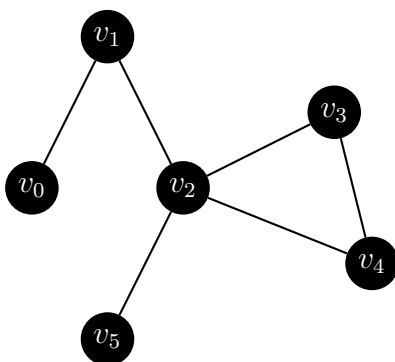


Figura 4.8: Complejo simplicial.

Hasta el momento hemos considerado gráficas en las que no importa en qué sentido se recorren las aristas, pero para lo fines de este trabajo, será necesario considerar en qué sentido se recorren las aristas de nuestra gráfica, es decir cada arista deberá tener asociada una dirección. Cuando se tiene la arista $[v_i, v_j]$, la dirección está definida por cómo se recorren los vértices, en este caso, el vértice inicial es v_i y el vértice final es v_j .

Definición 4.15 Se dice que $\Gamma(V, E)$ es una **gráfica dirigida**, si cada arista $[v_i, v_j]$ tiene asociada una dirección, esto es, posee un vértice inicial v_i y un vértice final v_j .

Cuando no se especifica la dirección, cada arista $[v_i, v_j]$ puede recorrerse en ambos sentidos, en este caso $[v_i, v_j] = [v_j, v_i]$. Mientras que, cuando se especifica la dirección las aristas $[v_i, v_j]$ y $[v_j, v_i]$ son diferentes, pues aunque unen los mismos vértices tienen direcciones opuestas. Ahora, cada arista puede representarse como una flecha, donde la punta indica en qué dirección se recorren los puntos, así una gráfica dirigida puede verse como en la figura 4.9.

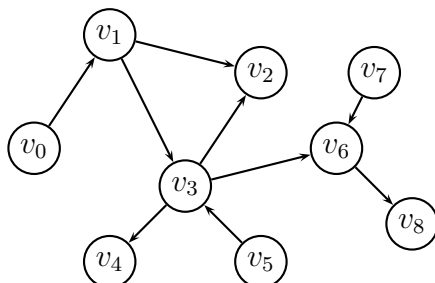


Figura 4.9: Ejemplo de una gráfica dirigida.

Definición 4.16 El *grado de entrada de un vértice* v , es el número de aristas para las cuales v es vértice final.

Definición 4.17 El *grado de salida de un vértice* v , es el número de aristas para las cuales v es vértice inicial.

Definición 4.18 El *grado de un vértice* v , es la suma del grado de entrada y el grado de salida del vértice v .

Denotaremos el grado de un vértice v por d_v . Consideraremos un tipo de gráfica específico, el cual se conoce como árbol con raíz, cuya definición puede ser dada desde dos enfoques: desde la teoría de gráficas o bien desde la topología algebraica, aunque en ambos casos, como hemos mencionado antes, nos referimos a la misma gráfica.

Definición 4.19 Sea $T(V, E)$ un árbol. T se llama *árbol con raíz*, si T es una gráfica dirigida y además hay un único vértice v_0 , al cual llamamos raíz de T , que cumple que su grado de entrada es igual a 0, y cada vértice $v \in V, v \neq v_0$, tiene grado de entrada 1.

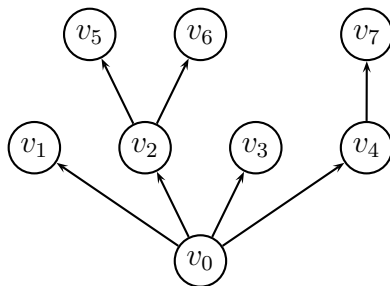


Figura 4.10: Ejemplo de árbol con raíz v_0 .

Teniendo un árbol con raíz podemos definir un orden, para lo cual establecemos los siguientes casos:

Sean a y b dos puntos en T .

- Si b es vértice, decimos que $a \leq b$ si a pertenece a alguna arista que se forma con dos vértices del camino que conecta a la raíz v_0 con b .
- Si b no es vértice, $b \in e_j = [v_i, v_j]$, decimos que $a \leq b$, si $a \leq v_i$ o si $d(a, v_j) \geq d(b, v_j)$, donde d es la métrica usual de \mathbb{R}^n .

Conociendo estos conceptos sólo nos resta dar la definición de una gráfica métrica.

Definición 4.20 Una gráfica Γ se llama **gráfica métrica** si a cada arista e de Γ se le asigna una longitud positiva l_e .

Hasta el momento no hemos mencionado cómo será el operador de Schrödinger en una gráfica. Antes de dar esta definición, daremos unas especificaciones del árbol con raíz $T(V, E)$ que trabajaremos en los problemas inversos que se mencionaron brevemente en la introducción y posteriormente daremos la definición de función en la gráfica.

Como hemos mencionado trabajaremos con un árbol con raíz $T(V, E) \in \mathbb{R}^n$, donde $V = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_r\}$, sin pérdida de generalidad consideraremos a v_0 como la raíz de nuestro árbol.

Definición 4.21 Un vértice $v \in V$ se llama **vértice frontera** si es extremo de una sola arista. Ésta a su vez se llama **arista frontera**.

Definición 4.22 Si un vértice $v \in V$ no es vértice frontera, se dice que es un **vértice interno** y la arista a la que pertenece la llamamos **arista interna**.

El conjunto de vértices V , puede dividirse en dos conjuntos ajenos, V_I y V_F que son conjuntos formados por los vértices internos y los vértices frontera, respectivamente. A partir de estos podemos distinguir los siguientes conjuntos:

Para cada vértice $v \in V_I$, definimos el conjunto

$$R(v) = \{e \in E : e = [v, w], w \in V\}$$

esto es, $R(v)$ es el conjunto de todas las aristas para las cuales v es vértice inicial.

La longitud del camino de v_0 a cada vértice $v \in V$, nos permite clasificar al conjunto de vértices V , en subconjuntos que contienen a los vértices que están a longitud μ de la raíz, los cuales denotaremos por $V^{(\mu)}$.

Denotaremos por $long(v)$ a la longitud del camino de v_0 a v . Para el árbol T , sea $\sigma = \max_{j=1, \dots, r} long(v_j)$, la cual llamaremos *altura del árbol*. Así los conjuntos $V^{(\mu)}$ de T son los siguientes:

$$V^{(\mu)} = \{v \in V : long(v) = \mu\}$$

y para las aristas de T se tienen el conjuntos

$$E^{(\mu)} = \{e \in E : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$$

con $\mu = 1, \dots, \sigma$.

En este trabajo se considerará que la raíz v_0 de T es un vértice frontera, y que hay p vértices frontera además de la raíz. Es decir, tenemos $p + 1$ vértices frontera, así el conjunto de vértices frontera V_F de T es como sigue:

$$V_F = \{v_0, \dots, v_p\}$$

El resto de los vértices, pertenecen al conjunto $V_I = \{v_{p+1}, \dots, v_r\}$ que contiene a los vértices internos, donde $v_{p+1} \in V^{(1)}$ y v_j , $j > p + 1$, son enumerados conforme $long(v_j)$ crece. Para referirnos a las aristas de T , las enumeraremos con respecto a su vértice final, es decir, $e_j = [v_i, v_j]$.

Observación: Una característica de los árboles es que si su conjunto de vértices tiene $n + 1$ elementos entonces, su conjunto de aristas tiene n elementos.

La gráfica con la que trabajaremos es un árbol con raíz $T(V, E)$ en \mathbb{R}^n , que cumple:

- $V = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$
- $V_F = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ y $V_I = \{v_{p+1}, \dots, v_r\}$
- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$
- La raíz del árbol es el vértice v_0 .
- El grado del vértice v_0 es 1.
- Si $e_j = [v_i, v_j] \in E$, la distancia entre los vértices v_i y v_j está dada por la métrica usual de \mathbb{R}^n y es igual a 1.
- Los vértices v_1, \dots, v_p están a la misma distancia de la raíz v_0 .

En adelante todas las gráficas que consideraremos serán árboles con raíz, refiriéndonos a ellos como árbol o árbol con raíz de manera indistinta.

Para ejemplificar el árbol con raíz que trabajaremos y la numeración de vértices y aristas que expusimos anteriormente, mostramos la figura 4.11.

Retomando la gráfica $T(V, E)$ que hemos trabajado, una arista $e_j = [v_i, v_j] \in T$ es un segmento de recta que une los puntos $v_i, v_j \in \mathbb{R}^n$, así que podemos parametrizarla por el parámetro $x \in [0, 1]$. Sean $g_j : [0, 1] \rightarrow e_j$, tal que

$$g_j(x) = xv_i + (1 - x)v_j$$

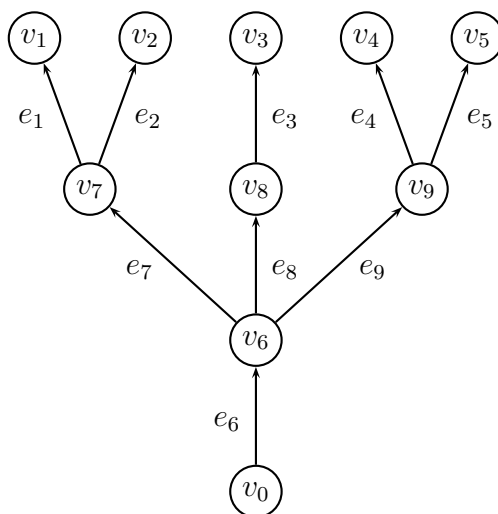


Figura 4.11: Numeración de los vértices de T .

para cada $j = 1, \dots, r$. Definimos el espacio $L_2(e_j)$ como

$$L_2(e_j) = \{u \in L_2([0, 1]) : u = f_j \circ g_j, f_j : e_j \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Observación: $L_2(e_j)$ es un subespacio vectorial de $L_2(T)$.

Definición 4.23 El espacio de funciones definidas sobre la gráfica Γ cuyo cuadrado es Lebesgue integrable se define como:

$$L_2(\Gamma) = \bigoplus_{j=1}^r L_2(e_j).$$

De esta manera una función $Y \in L_2(\Gamma)$ es de la forma

$$Y(x) = (y_1(x), \dots, y_r(x)) \tag{4.1}$$

donde $y_i(x) = (f_i \circ g_i)(x)$.

En la siguiente sección veremos qué condiciones deben cumplir los vértices de la gráfica que trabajaremos, condiciones que serán de gran utilidad en el planteamiento de nuestros problemas inversos.

4.2. Condiciones en los vértices de la gráfica

Mencionaremos algunas condiciones en los vértices de una gráfica, las cuales se imponen a nuestra gráfica T , cabe aclarar que se pueden agregar otras condiciones,

las cuales usualmente dependen del problema que se esté tratando (véase, por ejemplo [7, 5]).

De las condiciones más generales se encuentran las denominadas *condiciones estándar* que consisten de la condición de continuidad y de la condición de Kirchhoff que planteamos a continuación, cabe mencionar que estas condiciones se aplican a cada vértice interno de una gráfica. Enfocaremos las definiciones a la gráfica T que hemos construido, para ello consideramos una función $Y = (y_1, \dots, y_r)$ definida en T .

Recordemos que cada función y_i está definida del intervalo $[0, 1]$ a \mathbb{R} , por lo que, las condiciones en los vértices se reducen a considerar el comportamiento de cada y_i en los extremos del intervalo $[0, 1]$.

■ **Condición de continuidad**

Para cada vértice interno v_k se cumple

$$y_i(1) = y_k(0)$$

para cada arista $e_j \in R(v_k)$.

■ **Condición de Kirchhoff**

Para cada vértice interno v_k se cumple

$$\sum_{e_j \in R(v_k)} y'_j(1) = y'_k(0).$$

Nota 4.24 Las condiciones estándar están dadas considerando la numeración de los vértices que planteamos previamente.

Mostraremos más claramente esta condición y la condición de Kirchhoff con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.25 Consideraremos el árbol con raíz $T(V, E)$ de la Figura 4.12, donde $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ y $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Para esta gráfica el conjunto de vértices internos y el conjunto de vértice frontera son respectivamente $V_I = \{v_3\}$ y $V_F = \{v_0, v_1, v_2\}$. Las condiciones de continuidad y de Kirchhoff se establecen únicamente en los vértices internos, en este caso el vértice v_3 . Mostraremos ambas condiciones para este vértice.

$R(v_3)$	Condición de continuidad	Condición de Kirchhoff
$\{e_1, e_2\}$	$y_1(1) = y_3(0)$ $y_2(1) = y_3(0)$	$y'_1(1) + y'_2(1) = y'_3(0)$

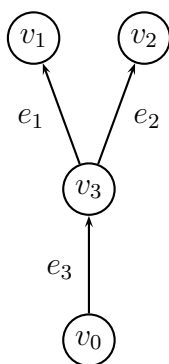


Figura 4.12: Ejemplo de árbol con raíz.

◇

Además de las condiciones de continuidad y de Kirchhoff, también consideraremos las *Condiciones en los vértices de Dirichlet* que se conocen como *condiciones de desacoplamiento* que esencialmente “desconectan las aristas” de la gráfica, es decir, podemos tomar aristas que comparten un vértice de forma independiente. Aunque sólo consideraremos las condiciones de Dirichlet, cabe mencionar que éstas no son las únicas condiciones de desacoplamiento, podemos mencionar, por ejemplo la condición de Neumann (véase [9]). A continuación mostramos estas condiciones.

■ **Condiciones en los vértices de Dirichlet:**

$$Y|_{v_j} = 0 \quad \text{para } v_j \in V_F.$$

■ **Condiciones en los vértices de Neumann:**

$$Y'|_{v_j} = 0 \quad \text{para } v_j \in V_F.$$

Las condiciones de Dirichlet pueden aplicarse a todo el conjunto de vértices V o a un subconjunto de él. En este trabajo aplicaremos la condición de Dirichlet a los vértices frontera de la gráfica. Cuando ocurre esto las condiciones de Dirichlet también se conocen como *condiciones de frontera o contorno*.

Ejemplo 4.26 Retomamos el árbol con raíz $T(V, E)$ de la figura 4.12, donde $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ y la función $Y(x) = [y_1(x), y_2(x), y_3(x)]$.

Mostraremos la condición de Dirichlet para los vértices de T .

Vértice	Condicion de Dirichlet
v_0	$y_3(1) = (f_3 \circ g_3)(1) = f(v_0) = 0$
v_1	$y_1(0) = (f_1 \circ g_1)(0) = f(v_1) = 0$
v_2	$y_2(0) = (f_2 \circ g_2)(0) = f(v_2) = 0$

◇

Las condiciones de Dirichlet también se conocen como condiciones tipo δ extendidas. Las condiciones tipo δ se definen como sigue

$$y'_{p+1}(0) = \alpha_{v_0} y_{p+1}(0)$$

$$y'_j(1) = \alpha_{v_j} y_j(1) \quad j = 1, \dots, p$$

Estas condiciones reciben su nombre porque son análogas a las condiciones en la semirecta, es decir considerando el intervalo $[0, \infty)$, que se obtienen para el operador de Schrödinger con un potencial δ (véase [22]). Decimos que las condiciones de Dirichlet son *condiciones tipo δ extendidas* porque se obtienen considerando el límite cuando $\alpha_{v_k} \rightarrow \infty$.

Uno de los puntos principales de este capítulo es construir la gráfica cuántica.

Definición 4.27 Una **gráfica cuántica** es un gráfica métrica en la cual un operador diferencial autoadjunto está definido sobre las funciones en la gráfica, además de condiciones en sus vértices, como la condición de Dirichlet, Kirchhoff y continuidad.

Para construir nuestra gráfica cuántica es necesario un operador diferencial autoadjunto, en particular trabajaremos con un operador de tipo Sturm-Liouville, el cual se define en la siguiente sección y se prueba también que es un operador autoadjunto.

4.3. El operador de Sturm-Liouville en la gráfica

Definición 4.28 Sean $Y = (y_1, \dots, y_r)$ y $q = (q_1, \dots, q_r) \in L_2(T)$, donde T es el árbol con raíz que definimos anteriormente. El **operador de Schrödinger sobre una gráfica métrica** se define como

$$\mathcal{L}Y = (\mathcal{L}_1 y_1, \dots, \mathcal{L}_r y_r)$$

donde $\mathcal{L}_i y_i = -y_i'' + q_i y_i$ es el operador de Schrödinger.

La función q se conoce como *función potencial*. En este trabajo consideraremos que cada q_i , $i = 1, \dots, r$, cumple que $q_i \in L([0, 1])$.

Para que el árbol T sea una gráfica cuántica, es necesario que el operador de Schrödinger \mathcal{L} de la definición 4.28, sea un operador lineal autoadjunto. De acuerdo al teorema 1.20, debemos verificar tres condiciones: que \mathcal{L} es un operador simétrico, que $D(\mathcal{L}^*) \subset D(\mathcal{L})$ y que $D(\mathcal{L})$ es denso en $L_2(T)$.

Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{A} = \{y \in L_2(T) : y_j = (f_j \circ g_j), f_j : e_j \rightarrow \mathbb{R}, y_j, y_j' \in AC([0, 1])\}$$

y

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{A} : \mathcal{L}y \in L_2(T), y \text{ satisface las condiciones de continuidad, de Kirchhoff y Dirichlet}\}$$

El dominio que consideramos para el operador de Schrödinger \mathcal{L} es el conjunto \mathcal{D} .

Teorema 4.29 El operador de Schrödinger $\mathcal{L} : \mathcal{D} \rightarrow L_2(T)$ es un operador lineal simétrico.

Demostración. Veamos \mathcal{L} es un operador lineal. Sean $u, v \in \mathcal{D}$ y α un escalar.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u + \alpha v) &= -(u'' + \alpha v'') + q(u + \alpha v) \\ &= -u'' + qu + \alpha(-v'' + qv) = \mathcal{L}u + \alpha\mathcal{L}v. \end{aligned}$$

Ahora, probemos que \mathcal{L} es simétrico. Sean $y, z \in \mathcal{D}$

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle_{L_2(T)} = \sum_{i=1}^r \langle \mathcal{L}y_i, z_i \rangle_{L_2(e_i)} = \sum_{i=1}^r \int_0^1 \mathcal{L}y_i(x) z_i(x) dx.$$

Donde, para cada $i = 1, \dots, r$, la integral $\int_0^1 \mathcal{L}y_i(x) z_i(x) dx$ está bien definida, pues $\mathcal{L}y_i, z_i \in L_2([0, 1])$. Además por la observación 3.1, para cada $i = 1, \dots, r$

$$\langle \mathcal{L}y_i, z_i \rangle = y_i(x) z_i'(x) \Big|_0^1 - y_i'(x) z_i(x) \Big|_0^1 + \langle y_i, \mathcal{L}z_i \rangle,$$

así

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle_{L_2(T)} = \sum_{i=1}^r \left(y_i(x) z'_i(x) \Big|_0^1 - y'_i(x) z_i(x) \Big|_0^1 + \langle y_i, \mathcal{L}z_i \rangle \right).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \left(y_i(x) z'_i(x) \Big|_0^1 - y'_i(x) z_i(x) \Big|_0^1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^r (y_i(1) z'_i(1) - y_i(0) z'_i(0) - y'_i(1) z_i(1) + y'_i(0) z_i(0)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Esta suma contempla cada una de las aristas de T , por lo que la podemos estructurar de tal forma que recorramos las aristas de T partiendo de las aristas frontera e_1, \dots, e_p hasta concluir con la raíz. Así, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & \sum_{v_k \in V^{(\sigma-1)}} \left[\sum_{e_j \in R(v_k)} (y_j(1) z'_j(1) - y_j(0) z'_j(0) - y'_j(1) z_j(1) + y'_j(0) z_j(0)) \right. \\ & \quad \left. + y_k(1) z'_k(1) - y_k(0) z'_k(0) - y'_k(1) z_k(1) + y'_k(0) z_k(0) \right] \end{aligned}$$

y como estamos considerando las aristas frontera, por la condición de Dirichlet se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{v_k \in V^{(\sigma-1)}} \left[\sum_{e_j \in R(v_k)} (y_j(1) z'_j(1) - y'_j(1) z_j(1)) \right. \\ & \quad \left. + y_k(1) z'_k(1) - y_k(0) z'_k(0) - y'_k(1) z_k(1) + y'_k(0) z_k(0) \right] \end{aligned}$$

luego por la condición de continuidad $f_j(1) = f_k(0)$ para $e_j \in R(v_k)$, con esto se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{v_k \in V^{(\sigma-1)}} \left[y_k(0) \left[\sum_{e_j \in R(v_k)} (z'_j(1)) - z_k(0) \right] \right. \\ & \quad \left. + z_k(0) \left[\sum_{e_j \in R(v_k)} (-y'_k(1)) + y'_k(0) \right] + y_k(1) z'_k(1) - y'_k(1) z_k(1) \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado la condición de Kirchoff nos dice que $\sum_{e_j \in R(v_k)} f'_j(1) = f'_k(0)$, por tanto la suma se reduce a lo siguiente

$$\sum_{v_k \in V^{(\sigma-1)}} [y_k(1) z'_k(1) - y'_k(1) z_k(1)]$$

La condición anterior puede ser reescrita considerando a los vértices $v_j \in V^{(\sigma-2)}$, pues cada v_k corresponde al vértice final de la arista $[v_m, v_k]$, donde $v_m \in V^{(\sigma-2)}$. Notemos que $v_k \in R(v_m)$, y que el número de elementos $R(v_m)$ puede ser mayor a 1. Así, reescribimos la suma de la siguiente forma

$$\sum_{v_m \in V^{(\sigma-2)}} \left[\sum_{e_j \in R(v_m)} (y_j(1)z'_j(1) - y'_j(1)z_j(1)) \right. \\ \left. + y_m(1)z'_m(1) - y_m(0)z'_m(0) - y'_m(1)z_m(1) + y'_m(0)z_m(0) \right],$$

considerando nuevamente la condición de continuidad y la de Kirchhoff para los vértices $v_m \in V^{(\sigma-2)}$, la suma anterior se reduce a lo siguiente

$$\sum_{v_m \in V^{(\sigma-2)}} [y_m(1)z'_m(1) - y'_m(1)z_m(1)],$$

este resultado se puede reescribir como lo hicimos anteriormente considerando los vértices $v_n \in V^{(\sigma-3)}$, continuando con este proceso llegamos al vértice v_{p+1} , que es el único vértice en $V^{(1)}$, por lo que de la ecuación (4.2) queda

$$y_{p+1}(1)z'_{p+1}(1) - y'_{p+1}(1)z_{p+1}(1),$$

lo cual es igual a cero dada la condición de Dirichlet en la raíz del árbol.

Del procedimiento anterior tenemos que

$$\sum_{i=1}^r \left(y_i(x)z'_i(x)|_0^1 - y'_i(x)z_i(x)|_0^1 \right) = 0,$$

de aquí se tiene que

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle = \langle y, \mathcal{L}z \rangle .$$

Por lo cual, \mathcal{L} es un operador lineal simétrico. ■

Probaremos que el operador de Schrödinger \mathcal{L} sobre una gráfica métrica es un operador lineal autoadjunto. Para ello mencionaremos un resultado del análisis matemático.

Teorema 4.30 Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H . Para u en H existe un único $m_0 \in M$ tal que

$$\|u - m_0\|_H = \min_{m \in M} \|u - m\|_H.$$

Más aún, $n_0 = u - m_0 \in M^\perp$ así

$$u = m_0 + n_0$$

donde $m_0 \in M$ y $n_0 \in M^\perp$. Finalmente, tal representación a través de $M \oplus M^\perp$ es única.

Teorema 4.31 El operador de Schrödinger $\mathcal{L} : \mathcal{D} \rightarrow L_2(\Gamma)$ es un operador lineal autoadjunto.

Demostración. Para ver que el operador \mathcal{L} en una gráfica métrica con dominio \mathcal{D} es un autojunto, por el teorema 1.20 debemos probar que \mathcal{L} es simétrico, que su dominio es denso en $L_2(\Gamma)$ y que $\mathcal{D} \subset D(\mathcal{L}^*)$.

Por el teorema 4.29 sabemos que el operador \mathcal{L} es un operador lineal simétrico. Veamos que $\overline{\mathcal{D}} = L_2(\Gamma)$.

Supongamos lo contrario, esto es, existe $Z \in L_2(\Gamma)$ de tal manera que $Z \notin \overline{\mathcal{D}}$. Entonces por el teorema 4.30 existe $H \in \overline{\mathcal{D}}$ tal que

$$Z - H \in \overline{\mathcal{D}}^\perp,$$

por tanto

$$\|Z - H\| = d(Z, \overline{\mathcal{D}}).$$

Sea $i = 1, \dots, r$ fijo, veamos que $z_i - h_i = 0$. Para ello demostremos que para todo $y \in L_2([0, 1])$ se cumple que $\langle z_i - h_i, y \rangle = 0$.

Como $\overline{\Omega_1} = L_2([0, 1])$, entonces existe una sucesión de funciones $y_n \in \Omega_1$ tal que $y_n \rightarrow y$, por lo cual

$$\langle z_i - h_i, y_n \rangle \rightarrow \langle z_i - h_i, y \rangle.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, se define

$$Y_n = (0, 0, \dots, y_n, \dots, 0, 0)$$

donde y_n ocupa la i -ésima posición, notemos que $Y_n \in \overline{\mathcal{D}}$, así

$$\langle Z - H, Y_n \rangle = 0$$

esto es

$$\langle z_1 - h_1, 0 \rangle + \dots + \langle z_i - h_i, y_n \rangle + \dots + \langle z_r - h_r, 0 \rangle = 0$$

por tanto

$$\langle z_i - h_i, y_n \rangle = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\langle z_i - h_i, y \rangle = 0$$

lo cual implica que

$$z_i - h_i = 0$$

y dado que i es arbitrario, $Z - H = 0$ y con ello se tiene que

$$\|Z - H\| = 0,$$

y por tanto $Z \in \overline{\mathcal{D}}$, pero esto contradice nuestro supuesto. Por lo que concluimos que $\overline{\mathcal{D}} = L_2(\Gamma)$.

Nos resta probar que $\mathcal{D} \subset D(\mathcal{L}^*)$. Sea $z \in D(\mathcal{L}^*)$, entonces existe $k \in L_2(T)$ tal que

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle = \langle y, k \rangle \quad \forall y \in \mathcal{D}.$$

Sea $\hat{y} = (0, 0, \dots, \hat{y}_i, \dots, 0, 0)$, con $\hat{y}_i \in \Omega_1$, entonces $\hat{y} \in \mathcal{D}$ luego

$$\langle \mathcal{L}\hat{y}, z \rangle = \langle \hat{y}, k \rangle,$$

esto es

$$\sum_{i=1}^r \langle \mathcal{L}\hat{y}_i, z_i \rangle = \sum_{i=1}^r \langle \hat{y}_i, k_i \rangle,$$

pero como el i -ésimo término de \hat{y} es el único diferente de cero, se tiene que

$$\langle \mathcal{L}\hat{y}_i, z_i \rangle = \langle \hat{y}_i, z_i \rangle.$$

Así, por el lema 3.15 existen $\tilde{z} \in \Omega^*$ y constantes α_1, α_2 tales que $\mathcal{L}\tilde{z} = k$ y $z_i = \tilde{z} + \alpha_1 u_1 \alpha_2 u_2$, esto implica que $z_i \in \Omega^*$ y

$$W_0(z_i, \hat{y}_i) - W_1(z_i, \hat{y}_i) = 0,$$

haciendo lo mismo para $i = 1, \dots, r$, obtenemos que para cada $y \in \mathcal{D}$

$$\sum_{i=1}^r W_0(z_i, \hat{y}_i) - W_1(z_i, \hat{y}_i) = 0. \quad (4.3)$$

Consideremos la función $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0, y_r)$, como en la prueba del teorema 4.29, dado que $y_{p+1} = y_{p+2} = \dots = y_{r-1} = 0$ reescribimos (4.3) como

$$\begin{aligned} & \sum_{e_j \in R(v_m)} [y_j(1)z'_j(0) - y_j(0)z'_j(0) - y'_j(1)z_j(1) + y'_j(0)z_j(0)] \\ & + y_r(1)z'_r(1) - y_r(0)z'_r(0) - y'_r(1)z_r(1) + y'_r(0)z_r(0). \end{aligned}$$

Por el lema 3.9, existe y_r tal que

$$y_r(0) = 0, \quad y_r(1) = 0, \quad y'_r(0) = 0, \quad y'_r(1) = 0;$$

para cada $e_m \in r(v_r)$ fijo, por el lema 3.9,

$$y_m(0) = 0, \quad y_m(1) = 0, \quad y'_m(0) = 1, \quad y'_m(1) = 0$$

y para $e_j \neq e_m$ se tiene que

$$y_j(0) = 0, \quad y_j(1) = 0, \quad y'_j(0) = 0, \quad y'_j(1) = 0,$$

con esto se tiene que

$$z_m(0) = 0.$$

Haciendo lo mismo para cada $e_j \in R(v_r)$

$$z_j(0) = 0.$$

Ahora, por el lema 3.9 tomamos y_r de tal manera que

$$y_r(0) = 1, \quad y_r(1) = 0, \quad y'_r(0) = 0, \quad y'_r(1) = 0;$$

y para cada $e_j \in r(v_r)$,

$$y_j(0) = 0, \quad y_j(1) = y_r(0) = 1, \quad y'_j(0) = 0, \quad y'_j(1) = 0,$$

de aquí

$$\sum_{e_j \in R(v_r)} z'_j(1) = z'_r(0).$$

Hasta el momento z , satisface la condición de Dirichlet en v_j , para $e_j \in R(v_r)$ y la condición de Kirchhoff en el vértice v_r . Nuevamente por el lema 3.9 tomamos y_r tal que

$$y_r(0) = 1, \quad y_r(1) = 0, \quad y'_r(0) = 1, \quad y'_r(1) = 0;$$

tomamos $e_m \in r(v_r)$ fijo,

$$y_m(0) = 0, \quad y_m(1) = 0, \quad y'_m(0) = 1, \quad y'_m(1) = 1,$$

y para $e_j \neq e_m \in R(v_r)$

$$y_j(0) = 0, \quad y_j(1) = 0, \quad y'_j(0) = 0, \quad y'_j(1) = 0,$$

luego

$$z_m(0) = z_r(0)$$

haciendo lo mismo para cada $e_j \in R(v_r)$ se tiene

$$z_j(1) = z_r(0), \quad \forall e_j \in R(v_r).$$

De manera similar para cada $v_k \in V^{(\sigma-1)}$ consideramos $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_r)$ y realizamos el procedimiento anterior, con lo que se obtiene

$$z_j(0) = 0 \quad j = 1, \dots, p$$

y que para cada $v_k \in V^{\sigma-1}$

$$\begin{cases} z_j(1) = z_k(0) \\ \sum_{e_j \in R(v_k)} z'_j(1) = z'_k(0). \end{cases} \quad (4.4)$$

Ahora, asumimos que (4.4) se cumple. Sea $v_m \in V^{(\sigma-2)}$ tal que $v_{m+1} \in V^{\sigma-1}$, si la función $y = (y_1 \dots, y_p, 0, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_r)$, entonces (4.3) es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{e_j \in R(v_m)} [y_j(1)z'_j(1) - y'_j(1)z_j(1)] \\ & + y_m(1)z'_m(1) - y_m(0)z'_m(0) - y'_m(1)z_m(1) + y'_m(0)z_m(0). \end{aligned}$$

Por el lema 3.9, podemos considerar y_m tal que

$$y_m(0) = 1, \quad y_m(1) = 0, \quad y'_m(0) = 0, \quad y'_m(1) = 0,$$

y para cada $e_j \in R(v_m)$

$$y_j(0) = 0, \quad y_j(1) = 1, \quad y'_j(0) = 0, \quad y'_j(1) = 0,$$

de aquí se tiene

$$\sum_{e_j \in R(v_m)} z'_j(1) = z'_m(0),$$

para obtener la condición de continuidad, por el lema 3.9 tomamos

$$y_m(0) = 0, \quad y_m(1) = 0, \quad y'_m(0) = 1, \quad y'_m(1) = 0.$$

Fijamos $e_j \in R(v_m)$ y consideramos

$$y_j(0) = 0, \quad y_j(1) = 0, \quad y'_j(0) = 0, \quad y'_j(1) = 1,$$

y para $e_i \neq e_j \in R(v_m)$

$$y_i(0) = 0, \quad y_i(1) = 0, \quad y'_i(0) = 0, \quad y'_i(1) = 0,$$

así

$$z_j(1) = z_m(0) \quad \forall e_j \in R(v_m).$$

El procedimiento que realizamos para v_m , hacemos para $v_k \in V^{\sigma-2}$, similarmente continuamos con los vértices en $V^{(\sigma-3)}$ y así sucesivamente hasta llegar al vértice v_{p+1} que es el único vértice en $V^{(1)}$, así (4.3) es igual

$$\begin{aligned} & \sum_{e_j \in R(v_{p+1})} [y_j(1)z'_j(1) - y'_j(1)z_j(1)] \\ & + y_{p+1}(1)z_{p+1}(1) - y_{p+1}(0)z'_{p+1}(0) - y'_{p+1}(1)z_{p+1}(1) + y'_{p+1}(0)z_{p+1}(0). \end{aligned}$$

Del mismo modo que hicimos con los demás vértices obtenemos que

$$\begin{cases} z_j(1) = z_{p+1}(0) \\ \sum_{e_j \in R(v_{p+1})} z'_j(1) = z'_{p+1}(0). \end{cases}$$

Finalmente, por el lema 3.9 tomamos y_{p+1} tal que

$$y_{p+1}(0) = 0, \quad y_{p+1}(1) = 0, \quad y'_{p+1}(0) = 0, \quad y'_{p+1}(1) = 1,$$

y para cada $e_j \in R(v_{p+1})$

$$y_j(0) = 0, \quad y_j(1) = 0, \quad y'_j(0) = 0, \quad y'_{p+1}(1) = 0,$$

así

$$z_{p+1}(1) = 0.$$

Por tanto z satisface la condición de Dirichlet, la condición de continuidad y la condición de Kirchhoff, entonces $z \in \mathcal{D}$.

Con todo hemos probado que el operador \mathcal{L} en una gráfica métrica es un operador lineal autoadjunto. ■

Del teorema 4.31 tenemos que el operador \mathcal{L} es un operador autoadjunto, por lo que, el árbol $T(V, E)$ que construimos anteriormente junto con el operador \mathcal{L} y las condiciones de Dirichlet, de Kirchhoff y de continuidad forman una gráfica cuántica.

4.4. Propiedades espectrales

En esta sección mostraremos algunos resultados sobre el comportamiento espectral del operador de Schrödinger sobre la gráfica que trabajamos: un árbol con raíz.

Las condiciones de Dirichlet que mencionamos anteriormente hacen que el espectro de un operador sobre la gráfica tenga ciertas características, en particular

para un árbol se cumple que si $\lambda \in \sigma(T)$ entonces λ es un valor propio simple. Esto se debe a las condiciones que se establecen en los vértices de T .

Existen condiciones en los vértices de la gráfica conocidas como *condiciones tipo δ* , entre las que se encuentran la condición de Kirchhoff y de continuidad, por otro lado se encuentran las que son de la forma

$$\sum_{e \in E_v} f'(v) = \alpha f(v),$$

donde E_v denota el conjunto de aristas e_j a las que pertenece v . Si tomamos el límite cuando $\alpha \rightarrow \infty$ se tiene la condición de Dirichlet.

Teorema 4.32 Sea Γ_α la gráfica que se obtiene al intercambiar el escalar α' por α de la condición tipo δ de la gráfica $\Gamma_{\alpha'}$. Si $-\infty < \alpha < \alpha' \leq \infty$, entonces

$$\lambda_n(\Gamma_\alpha) \leq \lambda_n(\Gamma_{\alpha'}) \leq \lambda_{n+1}(\Gamma_\alpha).$$

Si el valor propio $\lambda(\Gamma_{\alpha'})$ es simple y su función propia $f(v)$ o $\sum f'(v)$ es diferente de cero, se cumple que la desigualdad es estricta

$$\lambda_n(\Gamma_\alpha) < \lambda_n(\Gamma_{\alpha'}) < \lambda_{n+1}(\Gamma_\alpha).$$

El teorema anterior nos permite probar el siguiente corolario, el cual nos da un criterio para caracterizar el espectro de nuestra gráfica T .

Corolario 4.33 Sea $T(V, E)$ un árbol con condiciones tipo δ en sus vértices internos y condiciones tipo δ extendidas definidas en sus vértices frontera. Si al valor propio λ le corresponde una función propia que cumple que es diferente de cero en todos los vértices internos de T , entonces λ es un valor propio simple.

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre el número de vértices internos.

Si un árbol no tiene vértices internos, se cuenta con una arista, así en este caso se tiene un intervalo, lo cual ya probamos en el teorema 3.21.

Supongamos que se cumple para cualquier natural menor a n y probemos que también se cumple para n .

Supongamos que el valor propio λ y su correspondiente función propia f , satisfacen que f es diferente de cero en todos los vértices internos y que λ no es simple. Dado que λ no es simple existe otra función propia g linealmente independiente a f correspondiente a λ . Tomemos un vértice arbitrario $v \in V$, si cortamos el árbol en este vértice, es decir separamos el árbol en d_v sub-árboles que tienen en común

el vértice v . Luego en al menos uno de los sub-árboles g no es idénticamente cero en todos sus vértices internos. Sea T' dicho sub-árbol. Para T' , λ y f existe $\alpha < \infty$ para la condición tipo δ extendida, similarmente existe $\alpha' \leq \infty$ para T' , λ y g . Denotaremos por T'_α y $T'_{\alpha'}$ a los sub-árboles correspondientes a α y α' . Así, λ es simple para T'_α y por hipótesis de inducción λ es simple en T'_α , por el teorema 4.32 esto implica que

$$\lambda(T'_\alpha) < \lambda(T'_{\alpha'}) < \lambda(T'_\alpha),$$

lo cual no es posible pues en todos los casos es el mismo valor λ . Por tanto λ debe ser un valor propio simple de T . ■

Consideremos el árbol con raíz T que definimos anteriormente, las condiciones de Dirichlet, de Kirchhoff, de continuidad y la ecuación

$$-y'' + qy = \lambda y \quad y \in \mathcal{D}. \quad (4.5)$$

Los lemas que damos a continuación son generalizaciones de los lemas que aplicamos al intervalo.

Lema 4.34 Todos los valores propios de la ecuación (4.5) con las condiciones de Dirichlet, de Kirchhoff y de continuidad son reales.

Lema 4.35 Sean $y(x, \lambda_1)$ y $z(x, \lambda)$ funciones propias correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente de la ecuación (4.5). Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces, las funciones y y z son ortogonales, es decir

$$\langle y, z \rangle = 0.$$

Conclusiones

El objetivo de este proyecto de tesis fue hacer una revisión de la teoría espectral del operador de Schrödinger, que a su vez es un operador de tipo Sturm-Liouville.

Se hizo un análisis del operador de Schrödinger sobre gráficas métricas, el cual nos llevó a hacer una revisión de esta teoría sobre el intervalo $[0, 1]$, ya que toda arista es homeomorfa a este conjunto, y en general todo intervalo $[a, b]$ se lleva al $[0, 1]$ mediante un cambio de variable.

Trabajamos con dos conjuntos como dominios del operador de Schrödinger \mathcal{L}

$$\Omega_1 = \{f \in \Omega^* : f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0\}$$

y

$$\Omega_{vw} = \{f \in \Omega^* : W_0(v, f) = 0 \wedge W(w, f) = 0\},$$

mostrando que el primero no hace que el operador de Schrödinger sea autoadjunto, no obstante el operador es simétrico en este conjunto y también cumple que es denso en $L_2([0, 1])$, ésta fue una observación que se requirió demostrar para probar que el dominio del operador de Schrödinger, en la gráfica, es densamente definido. Cabe destacar que en la literatura que se revisó este hecho no se prueba.

Se probó que para cualesquiera $v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}$ (vea (3.15), (3.16)), el conjunto Ω_{vw} hace que el operador de Schrödinger sea autoadjunto, para ello adaptamos resultados de otros operadores no acotados enfocándolos al operador de Schrödinger y al intervalo $[0, 1]$. Se observó que tomando v y w específicas se establecen condiciones de contorno en el intervalo. En este trabajo se dieron algunos ejemplos.

Lo anterior permitió ver el comportamiento espectral del operador. Se probó que existe una sucesión infinita de valores propios reales para el operador de Schrödinger y que sus respectivos vectores propios forman un conjunto ortonormal completo para $L_2([0, 1])$.

Se hizo una revisión de la teoría de gráficas a fin de construir un árbol con raíz. Se consideraron condiciones en los vértices de la gráfica de continuidad,

Kirchhoff y Dirichlet para hacer que el operador de Schrödinger sea un operador autoadjunto. Con estas condiciones se define el dominio del operador de Schrödinger \mathcal{D} y se muestra que este dominio hace del operador de Schrödinger un operador simétrico, que este conjunto es denso en $L_2(T)$ y que el dominio de su operador adjunto coincide con \mathcal{D} . Cuando se trabaja con problemas espectrales inversos sobre gráficas métricas, los especialistas en el tema asumen que el dominio del operador hace que éste sea autoadjunto, sin hacer las pruebas correspondientes. La bibliografía referente a esto es muy escasa y en la mayoría de artículos y libros no existen pruebas de este hecho. En este trabajo se realizaron las demostraciones suficientes para probar que el operador de Schrödinger es autoadjunto considerando un árbol con raíz. Cabe destacar que todas estas pruebas fueron ideas propias.

Mostrar que el operador de Schrödinger sobre una gráfica métrica es autoadjunto, resultó complicado debido a la nula bibliografía, estas pruebas fueron realizadas de forma constructiva sin la necesidad de resultados de teoría especializada, de esta forma se da una aportación a literatura de este tema. Además, en este trabajo se conjuntaron diversas teorías, por ejemplo operadores integrales, operadores compactos, junto con el análisis de la teoría de Schrödinger, a fin de analizar ciertas propiedades espectrales para el operador de Schrödinger.

Finalmente queda plantear las líneas futuras de investigación. Como continuación natural es la de profundizar un poco más el estudio de las gráficas cuánticas, revisar a detalle las funciones de Weyl en el caso del intervalo y el vector de Weyl en el caso de la gráfica para posteriormente trabajar problemas inversos en el intervalo y en un árbol con raíz.

Referencias

- [1] BAKER, M., Y FABER, X. Metrized graphs, laplacian operators, and electrical networks. *Contemporary Mathematics 415* (2006), 15–34.
- [2] BERKOLAIKO, G. *Quantum Graphs and Their Applications: Proceedings of an AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Quantum Graphs and Their Applications, June 19-23, 2005, Snowbird, Utah*, vol. 415. American Mathematical Soc., 2006.
- [3] BERKOLAIKO, G., Y KUCHMENT, P. *Introduction to quantum graphs*. No. 186. American Mathematical Soc., 2013.
- [4] BLUMEL, R. *Foundations of Quantum Mechanics: From Photons to Quantum Computers*. Jones & Bartlett Learning, 2011.
- [5] CARLSON, R. Linear network models related to blood flow. *Contemporary Mathematics 415* (2006), 65.
- [6] CHARTRAND, G. *Introductory Graph Theory*. Dover Books on Mathematics Series. Dover, 1977.
- [7] CHEN, K., MOLCHANOV, S., Y VAINBERG, B. Localization on avron-exner-last graphs: I. local perturbations. *Contemporary Mathematics 415* (2006), 81–92.
- [8] FLESIA, C., JOHNSTON, R., Y KUNZ, H. Strong localization of classical waves: a numerical study. *EPL (Europhysics Letters) 3, 4* (1987), 497.
- [9] FRIEDLANDER, L. Determinant of the schrodinger operator on a metric graph. *Contemporary Mathematics 415* (2006), 151–160.
- [10] HANSON, G. W., Y YAKOVLEV, A. B. Sturm-liouville operators. 291–364.
- [11] HUL, O., BAUCH, S., PAKOŃSKI, P., SAVYTSKYI, N., ŻYCKOWSKI, K., Y SIRKO, L. Experimental simulation of quantum graphs by microwave networks. *Physical Review E 69, 5* (2004), 056205.

-
- [12] KUCHMENT, P. Quantum graphs: I. some basic structures. *Waves in Random media* 14, 1 (2004), S107–128.
- [13] KUCHMENT, P. Quantum graphs: an introduction and a brief survey. *arXiv preprint arXiv:0802.3442* (2008).
- [14] LEVITAN, B., Y SARGSIAN, I. *Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society.
- [15] MANNERS, J. *Quantum Physics: An Introduction*. The physical world. Taylor & Francis, 2000.
- [16] MARCHENKO, V. *Sturm-Liouville Operators and Applications*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., 2011.
- [17] MERCADO, C. *Matemática: Razonamiento Y Aplicaciones 10/e*. Pearson/Addison Wesley, 2006.
- [18] MITTRA, S. W. L. *Analytical techniques in the theory of guided waves*. Macmillan series in electrical science. Macmillan, 1971.
- [19] PAULING, L. The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules. *The Journal of Chemical Physics* 4, 10 (1936), 673–677.
- [20] PIVOVARCHIK, V. Inverse problem for the sturm-liouville equation on a star-shaped graph. *Math. Nachr* 280, 13-14 (2007), 1595–1619.
- [21] S., A. Superconductivity of networks. a percolation approach to the effects of disorder. *Physical Review B* 27, 3 (1983), 1541.
- [22] S. ALBEVERIO, F. *Solvable Models in Quantum Mechanics*. American Mathematical Soc.
- [23] THIELMAN, H. *Theory of Functions of Real Variables*. Prentice-Hall mathematics series. Prentice-Hall, 1962.
- [24] VAN ROOIJ, A., Y SCHIKHOF, W. *A Second Course on Real Functions*. Cambridge University Press, 1982.
- [25] YURKO, V. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs. *Inverse problems* 21, 3 (2005), 1075.
- [26] YURKO, V. A. Inverse problems for Sturm-Liouville operators on graphs with a cycle. *Operators and Matrices* 2, 4 (2008), 543–553.
-

Índice Alfabético

- $L_2(\Gamma)$, 62
- Árbol, 56
- Árbol dirigido con raíz, 59
- Arista
 - frontera, 60
- Camino, 55
 - simple, 55
- Cara
 - de un simplex, 56
 - propia de un simplex, 56
- Ciclo, 55
- Complejo simplicial, 56
- Condición
 - de Continuidad, 63
 - de Dirichlet, 64
 - de Kirchhoff, 63
 - de Neumann, 64
- Condición de
 - Dirichlet, 64
 - Neumann, 64
- Dimensión de
 - complejo simplicial, 57
 - poliedro, 57
- Espectro del operador, 39
- Fórmula de Abel-Liouville, 27
- Función
 - de variación acotada, 1
 - sobre la gráfica, 62
- Función
 - absolutamente continua, 3
- Gráfica, 54
 - conexa, 55
 - cuántica, 65
 - dirigida, 58
 - métrica, 60
- Grado de
 - entrada de un vértice, 59
 - salida de un vértice, 59
 - un vértice, 59
- Integración por partes, 8
- Longitud del camino, 55
- Operador
 - adjunto, 9
 - autoadjunto, 10
 - de Schrödinger, 19
 - lineal, 9
 - simétrico, 9
 - tipo Sturm-Liouville, 19
- Operador de Schrödinger
 - en la gráfica, 66
- Poliedro, 57
- Símplice o simplex, 56
- Subárbol, 56
- Subgráfica, 55
- Vértice
 - frontera, 60
 - interno, 60
- Vértices
 - adyacentes, 53
- Variación de f , 1