UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Una Caracterización de las Lógicas Paraconsistentes Ideales

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

JOSÉ RAMÓN SANTIAGO VARGAS

DIRECTOR DE TESIS:

JESÚS ALEJANDRO HERNÁNDEZ TELLO

CODIRECTOR DE TESIS:

VICTOR A. CRUZ BARRIGUETE

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.
Septiembre de 2015

Dedicado a los dos pilares de mi vida: al ser que me dio la vida, mi mamá, y al ser que me mando Dios para guiar, mi hermano.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me brindaron su apoyo en el transcurso de esta etapa. A mi familia, mi mamá y mi hermano, y a la familia Ramos Cristiani que me dieron ánimos y la ayuda necesaria para salir adelante. A mis amigos Nallely Ortega, Alejandro Viveros, Anadeli Zavaleta, David Benítez, Pedro Antonio, Citlalli Hernández, Adriana Vásquez y Concepción Brena que estuvieron presentes cuando más lo necesitaba. A todos mis profesores que me dieron las herramientas necesarias, pero en particular a la profesora Verónica Borja y al profesor Alejandro Tello que su apoyo y lecciones no se quedaron solo en el aula, si no iban más allá. Además agradezco al profesor Víctor Cruz por integrarme al proyecto: Aplicaciones Cuasiconformes y Problemas Inversos UTMIX-PTC-036 del programa PROMEP que me apoyo en el trayecto de este trabajo.

A todos muchas gracias, estoy en deuda con ustedes y que Dios los bendiga.

Prefacio

El manejo de información contradictoria es uno de los problemas más complejos e importantes cuando se tiene la necesidad de razonar bajo incertidumbre. Para manejar este tipo de información se necesita una lógica que permita contradicciones pero que no conduzca a teorías triviales, por lo que la lógica clásica no es una opción para tales situaciones. De manera precisa, que no existan teorías triviales en el caso más simple, es decir, en una lógica proposicional, significa que deben existir letras proposicionales p y q en el lenguaje de la lógica tales que $p, \neg p \nvdash q$, equivalentemente el átomo p junto con su negación no deducen al átomo q, a las lógicas que satisfacen esto se les llama *lógicas paraconsistentes* [15, 16].

Existen diferentes tipos de razonamiento, por mencionar algunos, el clásico, el modal y el paraconsistente. En cualquiera de estos tipos de razonamiento el objetivo consiste en determinar si una conclusión se puede deducir a partir de un conjunto de hipótesis. Para ello el razonamiento clásico trabaja únicamente con dos valores de verdad y no admite posibilidades o creencias como lo hace el modal, y en ambos casos ante hipótesis contradictorias cualquier conclusión es válida, no así es el caso del razonamiento paraconsistente.

La necesidad de utilizar razonamiento paraconsistente se ha vuelto evidente en los últimos años. Por ejemplo muchos sistemas de información son frecuentemente contradictorios debido a su tamaño y diversidad, así que la manera en que tales sistemas responden a preguntas que hacen los usuarios es utilizando una lógica paraconsistente, de lo contrario estos sistemas serían inútiles.

En la actualidad hay una gran cantidad de lógicas paraconsistentes y de igual forma estudios sobre éstas (véase e.g. [8, 10, 11, 13]). El problema es saber cuáles de éstas utilizar. De aquí la necesidad de establecer criterios para decidir qué lógicas son las adecuadas o las *ideales* para enfrentar este tipo de situaciones.

La intuición nos dice que una lógica paraconsistente *ideal* debe preservar todo lo posible de la lógica clásica, pero también permitir teorías inconsistentes no triviales (véase e.g. [14, 15]), esto nos conduce a la pregunta: *¿Qué significa que una lógica preserve todo lo posible de la lógica clásica?* Se ha visto que esta petición involucra fundamentalmente tres aspectos:

I. Contención en lógica clásica.

II. Paraconsistencia maximal.

III. Un lenguaje razonable.

Enseguida presentamos de manera intuitiva el significado de estas propiedades y en capítulos posteriores los analizaremos con detalle.

El punto I nos dice que las lógicas paraconsistentes que son adecuadas deben demostrar a lo más lo que demuestra lógica clásica. La parte II, paraconsistencia maximal, nos pide que las lógicas tengan la mayor cantidad de teoremas de lógica clásica. Esto se puede realizar de dos maneras: una es pensar que si la lógica paraconsistente se extiende entonces pierde la paraconsistencia la otra es que al extenderse se vuelva lógica clásica. Sería deseable que I y II fueran satisfechos.

Aunque lo anterior no es suficiente pues en [4] se demuestra que la lógica trivaluada cuyo único conectivo es la negación de Sette [20] es maximalmente paraconsistente y está contenida en lógica clásica, pero esta lógica no sería aceptada como una lógica paraconsistente ideal pues su lenguaje no es lo suficientemente expresivo. Por lo tanto las lógicas que queremos llamar paraconsistentes ideales deben tener un lenguaje que nos permita expresar lo que necesitamos, es decir un lenguaje razonable.

Finalmente deseamos que tenga una lógica paraconsistente ideal es la de poseer un lenguaje razonable, con esto queremos decir que en su lenguaje debe existir un conectivo de negación que le haga honor a su nombre, en el sentido de comportarse tanto como sea posible como la negación en lógica clásica.

Las propiedades mencionadas previamente se han establecido de forma intuitiva, tanto que son un poco ambigüas. A partir del capítulo 2, daremos definiciones formales de estos conceptos y veremos si están relacionados, y con ello estableceremos una definición precisa de lo que llamaremos lógica paraconsistente ideal. Posteriormente identificaremos si algunas de las lógicas paraconsistentes que se han estudiado son ideales, y finalmente veremos cómo construir lógicas paraconsistentes ideales de una manera sistemática.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Para formalizar una lógica es necesario definir primero el lenguaje, su sintaxis y su semántica. En la siguiente sección se presentan algunas proposiciones, las cuales nos muestran que ciertos conectivos lógicos pueden ser escritos a partir de otros. Esto es relevante al definir el lenguaje de una lógica puesto que el conjunto de conectivos básicos se reduce.

1.1. Sintaxis y Semántica

La *sintaxis* se refiere a la forma de construcción de las fórmulas y la semántica es la interpretación que se les da. Algunos conceptos indispensables son los siguientes.

Definición 1.1. *Una **proposición lógica** es una afirmación que tiene sólo un valor de verdad, verdadero o falso, estos valores se representan generalmente por t y f (1 y 0) respectivamente.*

Definición 1.2. *Un **lenguaje proposicional** $\mathcal{L}$ es una tripleta $\langle P, C, A\rangle$ donde P es un conjunto no vacío formado por proposiciones lógicas representadas por $p, q, r, \ldots$ (a estos elementos se les denomina letras proposicionales o fórmulas atómicas), C denota un conjunto de conectivos lógicos tales como $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ [1]. A es un conjunto de símbolos de puntuación tales como paréntesis y comas que facilitan la redacción y comprensión de fórmulas.*

Definición 1.3. *Una **fórmula bien formada** se define recursivamente como:*

1. *Cualquier fórmula atómica es una fórmula bien formada.*

2. *$\blacktriangle\varphi$ donde φ es una fórmula bien formada y $\blacktriangle$ es un conectivo unario.*

3. *$\varphi * \phi$ donde φ y ϕ son fórmulas bien formadas y $*$ es un conectivo binario.*

Con $W_{\mathcal{L}}$ denotamos al conjunto de fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}$ y a sus elementos con letras griegas φ, ϕ, σ posiblemente indexadas.

[1] En lógica clásica y en algunos otros casos se puede considerar solamente a $\{\neg\ ,\ \wedge\}$, $\{\neg\ ,\ \vee\}$ ó $\{\Rightarrow\ ,\ \neg\}$ como conjunto de conectivos, a los elementos de cada pareja se les llama *conectivos primitivos* ya que basándose sólo en estos se pueden definir los demás.

Definición 1.4. *Cualquier función n-aria* $f : \mathcal{V}^n \longrightarrow \mathcal{V}$ *con* $\mathcal{V}$ *un conjunto no vacío de valores de verdad recibe el nombre de* ***función de verdad****.*

Para los siguientes tres resultados consideremos que $\mathcal{V} = \{0, 1\}$ y que las tablas de los conectivos son como en lógica clásica [2].

Proposición 1.1. *Cada función de verdad está generada por una fórmula bien formada en términos únicamente de* $\vee, \wedge, \neg$*.*

Corolario 1.1. *Cada función de verdad puede ser generada por una fórmula bien formada que solamente tenga conectivos de alguno de los conjuntos* $\{\vee\ ,\ \neg\}$ *ó* $\{\wedge\ ,\ \neg\}$ *ó* $\{\Rightarrow\ ,\ \neg\}$*.*

Proposición 1.2. *Los conectivos binarios* $\downarrow$ *y* $|$ [3] *son los únicos que por sí solos son adecuados para la construcción de cualquier función de verdad.*

Definición 1.5. *Sea* φ *una fórmula proposicional, con* $Atoms(\varphi)$ *denotamos al conjunto definido como:*

$$Atoms(\varphi) = \begin{cases} \{\varphi\} & \textit{Si } \varphi \textit{ es una letra proposicional.} \\ Atoms(\psi) & \textit{Si } \varphi = \neg\psi. \\ Atoms(\psi) \cup Atoms(\phi) & \textit{Si } \varphi = \psi * \phi. \end{cases}$$

Después de los resultados anteriores, veamos ahora algunas definiciones básicas, que nos ayudarán a comprender el concepto de lógica proposicional a partir de relaciones de consecuencia, para así después definir lo que es una lógica paraconsistente.

1.2. Relaciones de Consecuencia

Definición 1.6. *Dado un conectivo unario* $\diamondsuit$ *en* $\mathcal{L}$ *y* $\varphi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$*, definimos la aplicación del operador unario i veces de forma recursiva como:*

$$\diamondsuit^0\varphi = \varphi;\ \diamondsuit^i\varphi = \diamondsuit(\diamondsuit^{i-1}\varphi), i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definición 1.7. *Cualquier subconjunto de* $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ *recibe el nombre de* ***teoría*** *y se denota por* $\mathcal{T}$ *o* $\mathcal{S}$*. Además, si la teoría es un conjunto finito diremos que es una teoría finita y la denotaremos con* Δ *o* Γ*.*

[2] Las interpretaciones clásicas son:

$\neg$	
0	1
1	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	f	t
0	0	0
1	0	1

[3] Las tablas de verdad de los operadores NOR y NAND, $\downarrow$ y $|$ respectivamente son las siguientes:

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

$|$	f	t
0	1	1
1	1	0

Definición 1.8. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, una* ***relación de consecuencia tarskiana*** $\vdash$*, TCR por sus siglas en inglés, es una relación binaria entre teorías de $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ y fórmulas en $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$, que satisface las siguientes tres condiciones:*

Reflexividad	*Si $\psi \in \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T} \vdash \psi$.*
Monotonía	*Si $\mathcal{T} \vdash \psi$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T}' \vdash \psi$.*
Transitividad	*Si $\mathcal{T} \vdash \psi$ y $\mathcal{T}', \psi \vdash \phi$ entonces $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \vdash \phi$.*

Que una TCR sea reflexiva se puede interpretar diciendo que *cualquier teoría debe concluir al menos las hipótesis que la conforman.* La propiedad de monotonía indica que si con un conjunto de hipótesis podemos obtener alguna conclusión, entonces al agregarle más información seguiremos obteniendo la misma conclusión. La transitividad de TCR [4] hace evidente su nombre si hacemos $\mathcal{T}' = \emptyset$, la teoría vacía. Esta propiedad también se conoce como *corte.*

A continuación presentamos ejemplos de relaciones que satisfacen algunas de las propiedades, con la finalidad de exhibir que son independientes. Para esto consideremos un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ con un conectivo $\neg$.

Ejemplo 1.1. Sea $\vdash = \{(\mathcal{T}, \psi) \in P(\mathcal{W}_{\mathcal{L}}) \times \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{T} = \{\psi\}\}$. Veamos qué propiedades de las antes mencionadas cumple esta relación de consecuencia. Para $\psi, \phi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$:

1. No cumple reflexividad pues tenemos que $\psi \in \mathcal{T} = \{\psi, \phi\}$ pero $\mathcal{T} \nvdash \psi$.

2. No es monótona pues, se tiene que $\psi \vdash \psi$ y que $\{\psi\} \subseteq \mathcal{T}' = \{\psi, \phi\}$ pero $\mathcal{T}' \nvdash \psi$ a consecuencia de que $\mathcal{T}' \neq \{\psi\}$.

3. Supongamos que $\mathcal{T} \vdash \psi$ y $\mathcal{T}', \psi \vdash \phi$. Es decir, se satisfacen las hipótesis de transitividad, la primera fuerza a que $\mathcal{T} = \{\psi\}$ mientras que la segunda tiene dos casos:

   a) $\psi = \phi$ y $\mathcal{T}' = \emptyset$

   b) $\psi = \phi$ y $\mathcal{T}' = \{\psi\}$

   dada cualquier combinación de estos dos casos se satisface $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \vdash \phi$. Por lo tanto $\vdash$ es transitiva.

Ejemplo 1.2. Sea $\vdash = \{(\mathcal{T}, \psi) \in P(\mathcal{W}_{\mathcal{L}}) \times \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \mid \psi \in \mathcal{T} \text{ } o \text{ } \mathcal{T} = \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \backslash \{\psi, \neg\psi\}\}$.

1. Es claro que la propiedad de reflexividad se cumple por como está definida la relación de consecuencia.

2. Considerando a las teorías $\mathcal{T} = \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \backslash \{\psi, \neg\psi\}$ y $\mathcal{T}' = \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \backslash \{\psi\}$ se prueba que la relación de consecuencia no es monótona.

3. Esta relación de consecuencia no cumple transitividad ya que al tomar las teorías $\mathcal{T} = \{\psi, \neg\phi\}$ y $\mathcal{T}' = \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \backslash \{\phi, \neg\phi\}$, con $\psi \neq \phi$, se demuestra que no satisface esta condición.

[4] La unión de teorías, $\varphi \cup \psi$, se denotara como φ, ψ.

Los ejemplos anteriores muestran relaciones que sólo satisfacen transitividad y reflexividad respectivamente. Veamos ahora una relación que satisface monotonía y transitividad únicamente.

Ejemplo 1.3. Sea $\vdash = \{(\mathcal{T}, \psi) \in P(\mathcal{W_L}) \times \mathcal{W_L} \mid \psi, \neg\psi \in \mathcal{T}\}$.

1. No cumple reflexividad puesto que si se toma a $\mathcal{T} = \{\psi\}$ se tiene que $\psi \in \mathcal{T}$ pero $\mathcal{T} \nvdash \psi$.
2. Supongamos que $\mathcal{T} \vdash \psi$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, luego $\psi, \neg\psi \in \mathcal{T}$ a consecuencia de nuestra primera hipótesis, más aún $\psi, \neg\psi \in \mathcal{T}'$, esto por la contención de las teorías, con lo cual $\mathcal{T}' \vdash \psi$ y por lo tanto es monótona.
3. Si se cumple $\mathcal{T} \vdash \psi$ y $\mathcal{T}', \psi \vdash \phi$, de esta última tenemos que $\phi, \neg\phi \in \mathcal{T}' \cup \{\psi\}$ luego $\phi, \neg\phi \in \mathcal{T}' \cup \mathcal{T}$ y como consecuencia $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \vdash \phi$, por lo tanto es transitiva.

A continuación se presenta una relación que cumple ninguna de las propiedades.

Ejemplo 1.4. Sea $\vdash = \{(\mathcal{T}, \psi) \in P(\mathcal{W_L}) \times \mathcal{W_L} \mid \neg\psi \notin \mathcal{T}\}$.

1. Tomando a la teoría $\mathcal{T} = \{\psi, \neg\psi\}$ se muestra que la relación de consecuencia no es reflexiva.
2. Consideremos $\mathcal{T} = \{\psi\}$ y $\mathcal{T}' = \{\psi, \neg\psi\}$ para probar que la propiedad de monotonía no se cumple.
3. Esta relación no es transitiva ya que basta tomar a $\mathcal{T} = \{\psi, \neg\phi\}$ y $\mathcal{T}' = \{\phi\}$ para ver que no cumple la propiedad.

El siguiente ejemplo muestra una TCR.

Ejemplo 1.5. Sea $\vdash = \{(\mathcal{T}, \psi) \in P(\mathcal{W_L}) \times \mathcal{W_L} \mid \psi \in \mathcal{T}\}$.

1. La reflexividad se cumple por como está definida la relación de consecuencia.
2. Si $\mathcal{T} \vdash \psi$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ entonces se tiene que $\psi \in \mathcal{T}$ y $\psi \in \mathcal{T}'$ con lo cual $\mathcal{T}' \vdash \psi$ por lo tanto cumple con la propiedad de monotonía.
3. Supongamos que $\mathcal{T} \vdash \psi$ y $\mathcal{T}', \psi \vdash \phi$ esto implica que $\phi \in \mathcal{T}' \cup \{\psi\}$ así $\phi \in \mathcal{T}' \cup \mathcal{T}$ con lo que $\mathcal{T}', \mathcal{T} \vdash \phi$, por lo tanto la relación de consecuencia es transitiva.

	Reflexividad	Monotonía	Transitividad
Ejemplo 1.1			✓
Ejemplo 1.2	✓		
Ejemplo 1.3		✓	✓
Ejemplo 1.4			
Ejemplo 1.5	✓	✓	✓

Tabla 1.1: Comparativo de las propiedades cumplidas por las tcr propuestas.

Definición 1.9. *Definimos la **sustitución** Θ de p_i por ψ en la fórmula φ denotado por $\Theta(\varphi)[\psi \backslash p_i]$ del siguiente modo:*

$$\Theta(\varphi)[\psi\backslash p_i] = \begin{cases} \varphi & Si\ \varphi \ \ atómica\ y \ \ \varphi \neq p_i. \\ \psi & Si \ \ \varphi = p_i. \end{cases}$$

Definición 1.10. *Sea $\vdash$ una TCR para $\mathcal{L}$, entonces $\vdash$ es:*

- ***estructural**, si para cada $\mathcal{L}$-sustitución Θ, teoría $\mathcal{T}$ y fórmula ψ; si $\mathcal{T} \vdash \psi$ entonces $\Theta(\mathcal{T}) \vdash \Theta(\psi)$.*
- ***no trivial**, si existe alguna teoría no vacía $\mathcal{T}$ y alguna fórmula ψ tal que $\mathcal{T} \nvdash \psi$.*
- ***finitaria**, si para cada teoría $\mathcal{T}$ y cada fórmula ψ donde $\mathcal{T} \vdash \psi$ existe una teoría finita $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$ tal que $\Gamma \vdash \psi$.*

El pedir estructuralidad a la relación es con la intención de que preserve deducciones bajo sustituciones. Notemos que si no le exigimos la no trivialidad, entonces lo que tendríamos es una lógica en donde toda fórmula puede ser deducida a partir de cualquier teoría. Por último la propiedad de ser finita nos habla de desechar de una teoría lo que no nos sirva y sólo quedarnos con lo fundamental para la deducción de la fórmula.

Como podemos observar en la tabla 1.1 sólo el ejemplo 1.5 muestra una TCR y nos servirá para ver las propiedades recién mencionadas, en efecto:

Ejemplo 1.6. Consideremos $\vdash = \{(\mathcal{T}, \psi) \in P(\mathcal{W_L}) \times \mathcal{W_L} \mid \psi \in \mathcal{T}\}$, verifiquemos las propiedades antes mencionadas:

- Supongamos que $\mathcal{T} \vdash \psi$ y realicemos una sustitución Θ a $\mathcal{T}$, en particular se está aplicando a ψ, luego $\Theta(\psi) \in \Theta(\mathcal{T})$ pues $\psi \in \mathcal{T}$ y así la deducción se conserva.
- Basta tomar a $\mathcal{T} = \{\neg\psi\}$ y a la fórmula ψ para verificar que no es trivial.
- Sea $(\mathcal{T}, \psi) \in \vdash$ arbitraria, luego sea $\Gamma = \bigcap\{\mathcal{T}' \in P(\mathcal{W_L}) \mid \mathcal{T}' \vdash \psi\} = \{\psi\}$, así Γ es una teoría finita y además $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$. Por lo tanto $\vdash$ es finita.

En este punto ya podemos definir el concepto de lógica proposicional, que es medular en el desarrollo de este trabajo.

1.3. Lógica Proposicional

Dado un lenguaje proposicional definiremos una lógica proposicional basándonos en la noción de relación de consecuencia. Existen otras formas de definir una lógica tales como cálculo de secuentes, de forma axiomática (tipo Hilbert), empleando deducción natural o matrices, por citar algunas.

Definición 1.11. *Una **lógica proposicional** es una dupla L=$\langle\mathcal{L},\vdash\rangle$, tal que $\mathcal{L}$ es un lenguaje proposicional y $\vdash$ es una relación de consecuencia tarskiana estructural, finita y no trivial, para $\mathcal{L}$.*

Ahora que se ha definido el concepto de *lógica proposicional* a partir de relaciones de consecuencia podemos formar la lógica proposicional $\mathrm{L}_1 = \langle\mathcal{L},\vdash_1\rangle$, donde $\vdash_1$ está definida como en el ejemplo 1.5. Como ya se mostró, en el ejemplo 1.6, cumple las propiedades de la definición 1.10, por tanto es una TCR estructural, finita y no trivial.

Definición 1.12. *Una lógica $\mathrm{L}' = \langle\mathcal{L},\vdash'\rangle$ es una **extensión** de una lógica $\mathrm{L} = \langle\mathcal{L},\vdash\rangle$ si $\vdash\subseteq\vdash'$. Diremos que L' es una extensión propia de L si $\vdash\subsetneq\vdash'$.*

Notemos que el lenguaje $\mathcal{L}$ de las lógicas debe ser el mismo para poder hablar de extensión.

Ejemplo 1.7. Consideremos las siguientes TCRs

- $\vdash_1= \{(\mathcal{T},\psi) \in P(\mathcal{W}_\mathcal{L}) \times \mathcal{W}_\mathcal{L} \mid \psi \in \mathcal{T}\}$.
- $\vdash_2= \{(\mathcal{T},\psi) \in P(\mathcal{W}_\mathcal{L}) \times \mathcal{W}_\mathcal{L} \mid \psi \in \mathcal{T}$ ó $\neg\psi \in \mathcal{T}\}$.

Se puede verificar que la relación de consecuencia $\vdash_2$ da a lugar a una lógica proposicional y que además $\vdash_1\subseteq\vdash_2$, ya que si $\mathcal{T} \vdash_1 \psi$ entonces $\mathcal{T} \vdash_2 \psi$, luego L_2 es una extensión de L_1.

Definición 1.13. *Una **regla** en un lenguaje $\mathcal{L}$ es una dupla $\langle\Gamma,\psi\rangle$, con $\Gamma \in P(\mathcal{W}_\mathcal{L})$ y $\psi \in \mathcal{W}_\mathcal{L}$, donde $\Gamma \cup \{\psi\}$ es una teoría finita. Denotaremos tal regla por Γ/ψ.*

Notemos que Γ debe ser finita, pues de lo contrario $\Gamma \cup \{\psi\}$ no podría ser una regla.

Definición 1.14. *Sea $\mathrm{L} = \langle\mathcal{L},\vdash\rangle$ una lógica proposicional. **La extensión de** L **por un conjunto de reglas $\mathcal{S}$ en $\mathcal{L}$**, es la extensión $\mathrm{L}^* = \langle\mathcal{L},\vdash^*\rangle$ de L tal que $\Delta \vdash^* \varphi$ siempre y cuando $\Delta \vdash \varphi$ o $\Delta/\varphi \in \mathcal{S}$.*

Extender L por un conjunto de axiomas significa extenderla por reglas del tipo: $\emptyset/\psi$.

En reglas del tipo Γ/ψ se puede pensar que Γ son las hipótesis y ψ es la conclusión que queremos se cumpla, es decir, que cada vez que sepamos que se satisfacen las hipótesis se satisface la conclusión. Cuando extendemos una lógica mediante reglas lo que estamos haciendo es añadir casos que queremos que se validen.

Si al extender una lógica usamos reglas Γ/ψ donde Γ es una teoría vacía, estaríamos agregando resultados que queremos que se satisfagan sin hipótesis es por eso que estas reglas son conocidas como esquemas de axioma.

En este momento tenemos la noción de lo que es una lógica proposicional y cómo extenderla, basándose en relaciones de consecuencia, ahora definimos el concepto de una lógica paraconsistente y enseguida damos un ejemplo de ésta. Este concepto es de suma importancia en este trabajo.

Definición 1.15. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional con un conectivo unario $\neg$. Una lógica $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ es llamada* **$\neg$-paraconsistente**, *si existen dos fórmulas $\psi, \phi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$, tales que $\psi, \neg\psi \nvdash \phi$.*

Ejemplo 1.8. Sea $\mathrm{L}_2 = \langle \mathcal{L}, \vdash_2 \rangle$ con

$$\vdash_2 = \{(\mathcal{T}, \psi) \in P(\mathcal{W}_{\mathcal{L}}) \times \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \mid \psi \in \mathcal{T} \text{ ó } \neg\psi \in \mathcal{T}\}.$$

Tomando a $\psi, \phi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ con $\psi \neq \phi$ se tiene que $\{\psi, \neg\psi\} \nvdash_2 \phi$.

Con lo cual L_2 es $\neg$-paraconsistente.

1.4. Matrices Multivaluadas

Las matrices multivaluadas son otra herramienta que nos ayudará a definir lógicas, además las matrices que relacionan la sintaxis y la semántica nos brindan un instrumento adecuado para analizar la paraconsistencia.

Definición 1.16. *Una* ***matriz multivaluada*** *para un lenguaje $\mathcal{L}$ es una tripleta $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$, donde:*

- *$\mathcal{V}$ es un conjunto no vacío de valores de verdad.*
- *$\mathcal{D}$ es un subconjunto no vacío propio de $\mathcal{V}$, que recibe el nombre de conjunto de valores designados de $\mathcal{V}$.*
- *$\mathcal{O}$ incluye una función n-aria $\tilde{\diamondsuit}_{\mathcal{M}} : \mathcal{V}^n \to \mathcal{V}$ por cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de $\mathcal{L}$, a la cual llamaremos la interpretación del conectivo $\diamond$.*

Notación Por $\bar{\mathcal{D}}$ denotaremos al conjunto $\mathcal{V} \backslash \mathcal{D}$.

El conjunto $\mathcal{D}$ es usado para definir satisfactibilidad y validez.

Definición 1.17. *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz para $\mathcal{L}$:*

- *Una* ***$\mathcal{M}$-valuación*** *para $\mathcal{L}$ es una función $\nu : \mathcal{W}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{V}$ tal que para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de $\mathcal{L}$ y cuales quiera $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$*

$$\nu(\diamondsuit(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = \tilde{\diamondsuit}(\nu(\psi_1), \ldots, \nu(\psi_n)).$$

Al conjunto de todas las $\mathcal{M}$-valuaciones lo denotaremos con $\Lambda_{\mathcal{M}}$.

- *Una valuación $\nu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$ es un **$\mathcal{M}$-modelo** de una fórmula ψ si pertenece al conjunto*

$$mod_{\mathcal{M}}(\psi) = \{\nu \in \Lambda_{\mathcal{M}} \mid \nu(\psi) \in \mathcal{D}\}.$$

Los $\mathcal{M}$-modelos de una teoría $\mathcal{T}$ son los elementos del conjunto

$$mod_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) = \bigcap_{\psi \in \mathcal{T}} mod_{\mathcal{M}}(\psi).$$

- *Diremos que una fórmula ψ es **$\mathcal{M}$-satisfacible** si $mod_{\mathcal{M}}(\psi) \neq \emptyset$. Una teoría $\mathcal{T}$ es $\mathcal{M}$-satisfacible si $mod_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$.*

Definición 1.18. *La **relación de consecuencia inducida por una matriz** $\mathcal{M}$, denotada como $\vdash_{\mathcal{M}}$, está definida por*

$$\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{M}} \psi \text{ si } mod_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) \subseteq mod_{\mathcal{M}}(\psi).$$

Notación Denotaremos por $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ a la dupla $\langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{M}} \rangle$, donde $\mathcal{M}$ es una matriz para $\mathcal{L}$ y $\vdash_{\mathcal{M}}$ es la relación de consecuencia inducida por $\mathcal{M}$.

Proposición 1.3. *Para cada lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ y una matriz finita [5] $\mathcal{M}$ para $\mathcal{L}$, se tiene que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{M}} \rangle$ es una lógica proposicional.*

La prueba de esta proposición se encuentra en [21, 22].

Definición 1.19. *Diremos que una matriz $\mathcal{M}$ **es paraconsistente** si y sólo si la lógica $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ lo es.*

A continuación presentamos algunas matrices multivaluadas que inducen algunas lógicas.

Ejemplo 1.9. La lógica clásica está inducida por la matriz $\mathcal{M}_2 = \langle \{1, 0\}, \{1\}, \{\tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \tilde{\neg}\} \rangle$.

$\tilde{\vee}$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\tilde{\wedge}$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\tilde{\neg}$	
1	0
0	1

[5] Una matriz finita es aquella donde su conjunto de valores de verdad sea finito.

Ejemplo 1.10. La lógica de Priest [18, 19] está inducida por la matriz LP $= \langle\{1, 0, \top\}, \{1, \top\}, \{\tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \tilde{\neg}\}\rangle$, donde $\vee, \wedge$ y $\neg$ tienen las siguientes interpretaciones:

$\tilde{\vee}$	1	0	$\top$
1	1	1	1
0	1	0	$\top$
$\top$	1	$\top$	$\top$

$\tilde{\wedge}$	1	0	$\top$
1	1	0	$\top$
0	0	0	0
$\top$	$\top$	0	$\top$

$\tilde{\neg}$	
1	0
0	1
$\top$	$\top$

Ejemplo 1.11. La lógica de Sette está inducida por la matriz LS $= \langle\{1, 0, \top\}, \{1, \top\}, \{\tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}\}\rangle$, donde $\vee, \wedge, \neg$ y $\rightarrow$ tienen las siguientes interpretaciones:

$\tilde{\vee}$	1	0	$\top$
1	1	1	1
0	1	0	1
$\top$	t	t	t

$\tilde{\wedge}$	1	0	$\top$
1	1	0	1
0	0	0	0
$\top$	1	0	1

$\tilde{\neg}$	
1	0
0	1
$\top$	1

$\tilde{\rightarrow}$	1	0	$\top$
1	1	0	1
0	1	1	1
$\top$	1	0	1

Hasta aquí ya tenemos la herramienta necesaria para definir una lógica proposicional por dos vías. Teniendo un lenguaje proposicional y una relación de consecuencia o teniendo una matriz multivaluada del lenguaje proposicional, pero sobre todo lo más importante es que ya se definió cuándo una lógica es paraconsistente. Ahora necesitaremos nuevos conceptos para poder ir formando la definición de lógica paraconsistente ideal.

Capítulo 2

Contención en Lógica Clásica

La contención en lógica clásica, es un concepto ampliamente utilizado en la literatura científica relacionada con la lógica. De manera intuitiva, podemos decir que una lógica L está contenida en lógica clásica si tiene el mismo lenguaje que la clásica y además que la lógica clásica es una extensión de L. El problema con la definición intuitiva, es que no queda claro qué quiere decir que L tenga el mismo lenguaje que lógica clásica. Con esto nos cuestionamos si el lenguaje es diferente simplemente por cambiar el signo usual para la conjunción por algún otro, aunque su valuación sea la misma o como vimos en el Corolario 1.1, podemos utilizar diferentes parejas de conectivos como primitivos y entonces definir los otros como abreviaciones. ¿Con esto tenemos un lenguaje diferente? o ¿cuál es el lenguaje que debemos tomar como el lenguaje de lógica clásica? La elección de tal lenguaje puede ser subjetiva, y entonces el problema es, que de esta elección depende que podamos decir que una lógica L esté o no contenida en lógica clásica. Veamos un ejemplo para esclarecer un poco lo que estamos diciendo.

Ejemplo 2.1. En [12] se da una prueba de que la lógica de la inconsistencia formal, LFI1[1] es maximalmente paraconsistente en relación a lógica clásica, si es que el lenguaje de clásica es elegido como $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$. La lógica LFI1 tiene también un conectivo unario $\bullet$[2] que no se puede definir en términos de los otros conectivos del lenguaje, por lo que para poder hablar de que LFI1 esté contenida en clásica con el conectivo $\bullet$, debemos enriquecer "el lenguaje de lógica clásica" agregando un correspondiente conectivo $\bullet$ y dar una interpretación apropiada de él. Esta lógica que se obtiene al agregar $\bullet$ a $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\}$, se llama lógica clásica proposicional extendida o por sus siglas en inglés ECPL[3], es una extensión conservativa de lógica clásica, lo cual quiere decir que las tautologías de ECPL y lógica clásica son exactamente las mismas, también en [12] se demuestra que si se agrega una tautología τ de ECPL a LFI1 que no sea demostrable en LFI1 puede conducir a diferentes lógicas, a saber a ECPL o a una lógica trivial, dependiendo de la tautología τ que sea seleccionada. En resumen, lo anterior quiere decir que decidir si LFI1 es o no maximal

[1] LFI1 $= \langle \{t, f, m\}, \{t, m\}, \{\tilde{\vee}, \tilde{\neg}, \tilde{\bullet}\} \rangle$.
[2] $\upsilon(\bullet\mathrm{A}) := 1 - \mid 2\upsilon(A) - 1 \mid$.
[3] Extended Classic Propositional Logic.

respecto a lógica clásica no es sencillo siguiendo la definición intuitiva pues el lenguaje de clásica y LFI1 no son los mismos. Más aún si se hace una elección diferente[4] para la interpretación bivaluada de $\bullet$ esto podría implicar que la misma lógica LFI1 no esté contenida en lógica clásica.

Por lo tanto resulta evidente la necesidad de establecer una definición precisa de lo que significa que una lógica esté contenida en lógica clásica, lo cual veremos en la siguiente sección.

2.1. $\neg$-Contención en Lógica Clásica

Definición 2.1. *Sea* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *una lógica proposicional para un lenguaje* $\mathcal{L}$ *que contiene al conectivo unario* $\neg$*.*

1. *Una* $\neg$***-interpretación*** *bivalente para* $\mathcal{L}$ *es una función* F *que asocia una tabla de verdad de dos valores con cada conectivo de* $\mathcal{L}$*, tal que la asignación que hace la función* F *del conectivo* $\neg$*, es decir* $\mathrm{F}(\neg)$*, es la tabla clásica de la negación* [5]*. Denotamos mediante* $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$ *la matriz bivaluada para* $\mathcal{L}$ *inducida por* F*.*

2. L ***está*** F***-contenida en lógica clásica****, si para cada* $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ *se tiene que:* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ *implica que* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} \psi$*.*

3. L ***está*** $\neg$***-contenida en lógica clásica****, si existe alguna* $\neg$*-interpretación bivalente* F *tal que* L *está* F*-contenida en lógica clásica.*

En la definición 2.1 el punto uno habla de la restricción de la $\neg$-interpretación bajo el operador unario $\neg$ del lenguaje y así a los demás operadores podemos darles una nueva interpretación o sólo restringir sus valores de verdad. En el siguiente punto se está pidiendo que se conserve la deducibilidad de la lógica L bajo $\neg$-interpretaciones, ya que $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ nos dice que a partir de las hipótesis $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ se puede concluir ψ y esta condición $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} \psi$ dice que las mismas premisas deduzcan a ψ pero ahora bajo las interpretaciones de los conectivos de L bajo F, con lo que $\vdash \subseteq \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}$.

Veamos la definición anterior pero ahora desde el punto de vista de matrices multivaluadas.

Definición 2.2. *Sea* $\mathcal{M}$ *una matriz de* $\mathcal{L}$*, entonces:*

- $\mathcal{M}$ ***está*** F***-contenida en lógica clásica*** *si* $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ *también lo está.*
- $\mathcal{M}$ ***está*** $\neg$***-contenida en lógica clásica*** *si y sólo si* $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ *lo está.*

[4] Esta elección es posible de acuerdo a la definición presentada en [12]

[5]

p	$\neg p$
t	f
f	t

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz para un lenguaje $\mathcal{L}$ con conectivo $\neg$, se tiene que:*

a) Si $\mathcal{M}$ está $\neg$-contenida en lógica clásica, entonces existe un elemento $t \in \mathcal{D}$ tal que $\neg t \notin \mathcal{D}$.

b) $\mathcal{M}$ es paraconsistente si y sólo si existe un elemento $\top \in \mathcal{D}$, tal que $\neg \top \in \mathcal{D}$.

Demostración.

a) Sea $\mathcal{M}$ una matriz para el lenguaje $\mathcal{L}$ con conectivo $\neg$ y que está $\neg$-contenida en la lógica clásica, esto es que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ está $\neg$-contenida en lógica clásica. Luego, por lo anterior se tiene que existe alguna $\neg$-interpretación bivalente F tal que $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$ está F-contenida en lógica clásica. Así, por definición de $\neg$-interpretación la tabla de verdad de $\neg$ es la misma que en lógica clásica, por lo tanto existe $t \in \mathcal{D}$ tal que $\neg t \notin \mathcal{D}$.

b) Sea $\mathcal{M}$ una matriz paraconsistente, luego $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ también es paraconsistente, y por lo tanto existen átomos $p, q \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ tal que $p, \neg p \nvdash_{\mathcal{M}} q$, es decir $mod(p, \neg p) \nsubseteq mod(q)$. Para que esto sea válido debe existir al menos un elemento en $mod(p, \neg p) = mod(p) \cap mod(\neg p)$. Por lo tanto existe un elemento en $\mathcal{V}$, que denotaremos por $\top$, tal que $\top \in \mathcal{D}$ y $\neg \top \in \mathcal{D}$.
Supongamos que existe $\top \in \mathcal{D}$, tal que $\neg \top \in \mathcal{D}$. Tomemos la teoría formada por $\{p, \neg p\}$, con $p \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$, entonces $mod_{\mathcal{M}}(p, \neg p) \neq \emptyset$ pues existe una valuación ν tal que $\nu(p) = \top \in \mathcal{D}$ y $\nu(\neg p) = \neg \nu(p) = \neg \top \in \mathcal{D}$ y además si tomamos a $q \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ distinto de p $\nu(q) \notin \mathcal{D}$, así $p, \neg p \nvdash_{\mathcal{M}} q$, por lo tanto, $\mathcal{M}$ es paraconsistente.

□

Corolario 2.1. *Cualquier matriz $\mathcal{M}$ que esté $\neg$-contenida en lógica clásica y sea paraconsistente tiene al menos 3 valores de verdad.*

Demostración. Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz $\neg$-contenida en lógica clásica y paraconsistente, luego se tiene que existe $t \in \mathcal{D}$ y que $\neg t \notin \mathcal{D}$, además existe $\top \in \mathcal{D}$ y que $\neg \top \in \mathcal{D}$, todo esto por la proposición 2.1. Así $\mathcal{D}$ tiene al menos dos valores de verdad, ahora recordemos que $\mathcal{D}$ es subconjunto propio de $\mathcal{V}$, con lo cual $\mathcal{V}$ tiene al menos tres valores de verdad. □

Notemos que si en el corolario anterior omitimos la hipótesis de que la matriz sea paraconsistente entonces cambiará la cardinalidad de nuestro conjunto de valores de verdad a al menos dos elementos. Por lo tanto una lógica paraconsistente requiere tener como mínimo dos elementos en su conjunto de valores designados. Por lo que es interesante estudiar las matrices que tengan al menos tres valores de verdad y si restringimos sus valores de verdad a los clásicos sus operadores se comporten de forma clásica. Formalizaremos este concepto en la siguiente sección.

2.2. Matrices Proto-clásicas

Definición 2.3. *Una matriz $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ es **proto-clásica**, si existe un único elemento $a \in \mathcal{V}$, tal que $a \in \mathcal{D}$ y $\neg a \notin \mathcal{D}$.*

Para una mejor comprensión de la definición anterior, chequemos los siguientes ejemplos y determinemos quién es y quién no es proto-clásica.

Ejemplo 2.2.
Consideremos el lenguaje:
$\mathcal{L}_1 = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{A} \rangle$

- $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{C} = \{\neg_1, \star_1\}$
- $\mathcal{A}$={(,),,}

Caracterizado por la matriz:
$\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{V}_1, \mathcal{D}_1, \mathcal{O}_1 \rangle$

- $\mathcal{V}_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{D}_1 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{O}_1 = \{\tilde{\neg}_1, \tilde{\star}_1\}$

$\tilde{\neg}_1$	
0	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	1
$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\tilde{\star}_1$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1
1	1	1	1	0

Ejemplo 2.3.
$\mathcal{L}_2 = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{A} \rangle$

- $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{C} = \{\neg_2, \star_2\}$
- $\mathcal{A}$={(,),,}

$\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{V}_2, \mathcal{D}_2, \mathcal{O}_2 \rangle$

- $\mathcal{V}_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{D}_2 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{O}_2 = \{\tilde{\neg}_2, \tilde{\star}_2\}$

$\tilde{\neg}_2$	
0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\tilde{\star}_2$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0
$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	0
1	0	0	0	$\frac{1}{3}$

En los ejemplos anteriores lo resaltado en negritas muestra elementos designados cuya negación no es designada por lo que la única matriz que es proto-clásica es el ejemplo 2.3. Además como podemos ver en el ejemplo 1.19 la matriz de la lógica clásica es proto-clásica.

Notación Dada una matriz $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ proto-clásica, denotaremos por t al elemento a de $\mathcal{V}$ tal que $a \in \mathcal{D}$ y $\neg a \notin \mathcal{D}$ y con f al elemento $\neg t$, así en matrices proto-clásicas $t \in \mathcal{D}$, $f \notin \mathcal{D}$, y $f = \neg t$.

A continuación se presenta un resultado que da pie a que el conectivo unario que funge como la negación en la lógica que se esté trabajando, se comporte como la negación en lógica clásica con los valores f, t.

Proposición 2.2. *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz paraconsistente que está $\neg$-contenida en lógica clásica. Si $\mid \mathcal{D} \mid = 2$ entonces $\mathcal{M}$ es una matriz proto-clásica donde $\neg f = t$.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{M}$ está $\neg$-contenida en lógica clásica por la proposición 2.1 existe un elemento $t \in \mathcal{D}$ tal que $\neg t \notin \mathcal{D}$. Por hipótesis se tiene que $\mathcal{M}$ es paraconsistente así que existe un elemento $\top \in \mathcal{D}$ tal que $\neg \top \in \mathcal{D}$, por tanto $\mathcal{D} = \{t, \top\}$ con $\neg t \notin \mathcal{D}$, así $\mathcal{M}$ es proto-clásica. Resta probar que $\neg f = t$, en efecto, como $\mathcal{M}$ está $\neg$-contenida entonces $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ está F-contenida en lógica clásica para alguna F, por esto último se tiene que para $p \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ si $p, \neg\neg p \nvdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} \neg\neg\neg p$ entonces $p, \neg\neg p \nvdash_{\mathcal{M}} \neg\neg\neg p$ donde la primera deducción obedece a la interpretación de la negación en lógica clásica, por consiguiente es válido. Ahora como $p, \neg\neg p \nvdash_{\mathcal{M}} \neg\neg\neg p$ es porque existe un modelo de $\{p, \neg\neg p\}$ que no está en $mod_{\mathcal{M}}(\neg\neg\neg p)$, así $\neg\neg t = \neg f = t$

□

2.3. Matrices Clásicamente Cerradas y Semi-clásicas

En la sección anterior nos enfocamos en las matrices y que el comportamiento de su negación fuera como el de la negación en lógica clásica, pero esto no es suficiente para modelar de una forma adecuada todos los teoremas de lógica clásica o la mayor cantidad posible de ellos. Necesitamos por tanto establecer más condiciones para el resto de los conectivos.

Definición 2.4. *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz proto-clásica de $\mathcal{L}$:*

- *Un operador n-ario $\tilde{\diamond}$ de $\mathcal{M}$ es **clásicamente cerrado**, si $\tilde{\diamond}(a_1, \ldots, a_2) \in \{t, f\}$ para cada conectivo n-ario $\diamond$ de $\mathcal{L}$, y cada $a_1, \ldots, a_2 \in \{t, f\}$.*
- *$\mathcal{M}$ **es clásicamente cerrada**, si todos sus operadores son clásicamente cerrados.*
- *$\mathcal{M}$ **es semi-clásica** si es clásicamente cerrada y $\neg f = t$.*

Prestemos atención a los siguientes ejemplos para poder comprender la definición anterior. Basta que observemos los valores 0 y 1 (recordemos que f y t) para poder identificar que operadores de las siguientes matrices son clásicamente cerrados y cuáles son semi-clásicas.

Ejemplo 2.4. $\mathcal{L}_2 = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{A} \rangle$

- $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{C} = \{\neg_2, \star_2\}$
- $\mathcal{A}$={(,),,}

$\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O}_2 \rangle$

- $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{D} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{O}_2 = \{\tilde{\neg}_2, \tilde{\star}_2\}$

$\tilde{\neg}_2$	
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\tilde{\star}_2$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$	1	$\mathbf{0}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0
$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	0
1	$\mathbf{0}$	0	0	$\mathbf{\frac{1}{3}}$

Ejemplo 2.5. $\mathcal{L}_3 = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{A} \rangle$

- $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{C} = \{\neg_3, \star_3\}$
- $\mathcal{A}$={(,),,}

$\mathcal{M}_3 = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O}_3 \rangle$

- $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{D} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{O}_3 = \{\tilde{\neg}_3, \tilde{\star}_3\}$

$\tilde{\neg}_3$	
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\tilde{\star}_3$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0
1	$\mathbf{1}$	0	0	$\mathbf{0}$

Ejemplo 2.6. $\mathcal{L}_4 = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{A} \rangle$

- $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{C} = \{\neg_4, \star_4\}$
- $\mathcal{A}$={(,),,}

$\mathcal{M}_4 = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O}_4 \rangle$

- $\mathcal{V} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{D} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
- $\mathcal{O}_4 = \{\tilde{\neg}_4, \tilde{\star}_4\}$

$\tilde{\neg}_4$	
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\tilde{\star}_4$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\mathbf{1}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0
1	$\mathbf{1}$	0	0	$\mathbf{0}$

Notemos que en el ejemplo 2.4 tenemos una matriz que sólo es proto-clásica, luego en el ejemplo 2.5 se muestra una matriz que es clásicamente cerrada pero no semi-clásica y por último en el ejemplo 2.6 también se puede observar una matriz clásicamente cerrada que además cumple que $\neg f = t$, con lo que se vuelve una matriz semi-clásica.

Definición 2.5. *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz semi-clásica de $\mathcal{L}$. La **¬-interpretación bivalente** $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$ **inducida por** $\mathcal{M}$ está definida por $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}(\diamond) = \tilde{\diamond}_{\mathcal{M}} \backslash \{t, f\}$ donde $\tilde{\diamond}_{\mathcal{M}} \backslash \{t, f\}$ es la reducción de $\tilde{\diamond}_{\mathcal{M}}$ a $\{t, f\}$.*

Proposición 2.3. *Cualquier matriz semi-clásica $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ está ¬-contenida en lógica clásica. Más aún, $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$ es la única ¬-interpretación bivalente, tal que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ está $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-contenida en lógica clásica.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ una matriz semi-clásica de $\mathcal{L}$, luego $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$ es la ¬-interpretación bivalente inducida por $\mathcal{M}$. Tomemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ tal que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \nvdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}_{\mathcal{M}}}} \psi$, es decir, existe una $\mathcal{M}_{\mathrm{F}_{\mathcal{M}}}$-valuación ν tal que $\nu(\psi) = f$ y $\nu(\varphi_i) = t$ con, $i = \overline{1, n}$; luego como $\mathcal{M}$ es semi-clásica implica que sea clásicamente cerrada. Así ν también es una $\mathcal{M}$-valuación, es decir, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \nvdash_{\mathcal{M}} \psi$, con lo cual $\mathcal{M}$ está $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-contenida en lógica clásica. Supongamos que existe una ¬-interpretación bivalente F tal que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ está F-contenida y además $\mathrm{F} \neq \mathrm{F}_{\mathcal{M}}$, luego existe un conectivo n-ario en $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{F}(\diamond) \neq \mathrm{F}_{\mathcal{M}}(\diamond)$. Así existen $a_1, \ldots, a_n \in \{t, f\}$ tal que $\mathrm{F}(\diamond)(a_1, \ldots, a_n) \neq \mathrm{F}_{\mathcal{M}}(\diamond)(a_1, \ldots, a_n)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathrm{F}(\diamond)(a_1, \ldots, a_n) = t$ y $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}(\diamond)(a_1, \ldots, a_n) = f$. Ahora, consideremos $p, \diamond(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \vdash_{\mathcal{M}} \neg p$ que es válido por ser $\mathcal{M}$ proto-clásica, como consecuencia de lo anterior se tiene que $p, \diamond(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} \neg p$, lo cual es una contradicción, puesto que en $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$ el conjunto de valores de verdad está dado por $\{t, f\}$. Por lo tanto $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$ es la única ¬-interpretación con la cual $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ está ¬-contenida. □

Nota: Es importante notar que la condición de ser clásicamente cerrada no puede ser omitida de la definición de una matriz semi-clásica aún cuando la matriz sea paraconsistente. Veamos en el siguiente ejemplo $\mathcal{L} = \{\neg, \star\}$, y la matriz $\mathcal{M}_{\star} = \langle \{t, f, \top\}, \{t, \top\}, \mathcal{O} \rangle$ para $\mathcal{L}$, en donde $\neg t = f$, $\neg f = t$, $\neg \top = \top$ y $\star t = \star f = \top$, $\star \top = t$. En el artículo [3] se muestra que la matriz $\mathcal{M}_{\star}$ es proto-clásica, que cumple la condición de $\neg f = t$, es paraconsistente, que está ¬-contenida en lógica clásica pero no es clásicamente cerrada.

Recordemos que el conjunto mínimo de conectivos de la lógica clásica que incluye a la negación necesita otro conectivo que puede ser conjunción, disyunción o implicación, este último es el más empleado por su forma de relacionar proposiciones del tipo: **si se suponen ciertas hipótesis se puede concluir o implicar un determinado resultado**. Luego el comportamiento de la implicación es de especial importancia en este trabajo ya que queremos modelar lógicas que aun cuando partan de hipótesis contradictorias se puedan deducir resultados no triviales. Hasta este punto sólo se han establecido condiciones acerca de la negación, en el capítulo siguiente trataremos al conectivo implicación.

Capítulo 3

Lenguaje Suficientemente Expresivo

Para que una lógica sea útil debe tener un lenguaje suficientemente expresivo, esto es, que nos permita modelar el pensamiento humano, por ejemplo, la lógica clásica. Sin embargo, la paraconsistencia maximal por sí misma no es suficiente para garantizar la expresividad. De hecho, como se muestra en [4], existen lógicas maximalmente paraconsistentes con muy poco poder de expresividad, tal como la lógica trivaluada que tiene únicamente como conectivo la negación de Sette. Con el propósito de obtener la expresividad requerida, solicitamos que en la lógica exista un conectivo negación, del cual se desprende la paraconsistencia, que sea clásicamente cerrado, y un conectivo implicación que permita convertir las implicaciones en deducciones y viceversa, todo esto gracias al teorema de la deducción [1]. Una consecuencia de las condiciones que le exigimos a la negación en el capítulo anterior se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *una lógica que está* $\neg$*-contenida en lógica clásica. Entonces para cada fórmula* ψ*:* $\psi \nvdash \neg\psi$ *y* $\neg\psi \nvdash \psi$*.*

Demostración. Dada cualquier $\psi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$ se cumple que $\psi \nvdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} \neg\psi$, por tener la misma interpretación de la negación en lógica clásica, por lo cual $\psi \nvdash \neg\psi$. El otro caso se demuestra de manera análoga. □

La importancia de esta última proposición radica en el hecho de que si se supone verdadero cierto resultado no podemos deducir su negación lo cual es algo deseable en la modelación del razonamiento. Además de este comportamiento respecto a la negación deseamos que la implicación cumpliera con el Teorema de la deducción ya que es uno de los principales resultados para facilitar la demostración automática de teoremas.

3.1. Lógicas Normales

Definición 3.1. *Un conectivo binario* $\supset$ *es una* ***implicación propia*** *para una lógica* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$*, si para cada teoría* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{L}$*:*

[1] vease e.g. E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic, Fourth Edition*,1997

$$\mathcal{T}, \psi \vdash \varphi \textit{ si y sólo si } \mathcal{T} \vdash \psi \supset \varphi$$

Si contamos con una negación cuyo comportamiento es cercano al de clásica y con una implicación propia tendremos una lógica en la que se podrá expresar la mayor parte del razonamiento clásico. Entonces la noción de lenguaje suficientemente expresivo lo podemos reducir a la siguiente definición.

Definición 3.2. *Una lógica $\neg$-paraconsistente* L *es* ***normal****, si está $\neg$-contenida en lógica clásica y tiene una implicación propia.*

Proposición 3.2. *Sea* L *una lógica que está* F*-contenida en lógica clásica para alguna* F*. Si $\supset$ es una implicación propia de* L*, entonces* F($\supset$) *es la interpretación clásica de la implicación.*

Demostración. Supongamos que L está F-contenida en lógica clásica. Se tiene que $p \vdash_{\mathrm{L}} p$, por la reflexividad de $\vdash_{\mathrm{L}}$, entonces $\vdash_{\mathrm{L}} p \supset p$, puesto que $\supset$ es una implicación propia de L, luego $\vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} p \supset p$, ya que L está F-contenida en lógica clásica, así en $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$ se cumple que $t \supset t = f \supset f = t$. Después por ser TCR $p, q \vdash_{\mathrm{L}} q$, lo cual implica que $p \vdash_{\mathrm{L}} q \supset q$, por tanto $\vdash_{\mathrm{L}} p \supset (q \supset q)$, ya que $\supset$ es una implicación propia de L. Por lo anterior y como L está F-contenida en lógica clásica se tiene que $\vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} p \supset (q \supset q)$, así $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$ debe satisfacer $f \supset t = t$. Sabemos que $p \supset q \vdash_{\mathrm{L}} p \supset q$, por ser $\supset$ una implicación propia se tiene que $p \supset q, p \vdash_{\mathrm{L}} q$ luego por estar $\neg$-contenida se cumple que $p \supset q, p \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} q$, ahora supongamos que $t \supset f = t$, entonces $q \supset q \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} p \supset q$. Aplicando la propiedad de transitividad a esto último con $p \supset q, p \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} q$ se obtiene $q \supset q, p \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} q$ pero si tomamos la valuación ν con $\nu(p) = t$ y $\nu(q) = f$ se tiene que $\nu(q \supset q, p) = t$ con lo que $mod_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}(q \supset q, p) \nsubseteq mod_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}(q)$ lo cual es una contradicción, por lo tanto, $t \supset f = f$. □

No todas las lógicas paraconsistentes tienen una implicación propia, incluso si están $\neg$-contenidas en lógica clásica. La siguiente proposición muestra una famosa lógica paraconsistente que carece de una implicación propia.

Lema 3.1. *Los conectivos de la Lógica de Priest (LP) son $\leq_k$ monótonos, es decir si ψ_i es una fórmula bien formada de LP para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, ν y μ son valuaciones tales que $\nu(\psi_i) \leq_k \mu(\psi_i)$*[2]*, entonces $\nu(\diamond(\psi_1, \ldots, \psi_n)) \leq_k \mu(\diamond(\psi_1, \ldots, \psi_n))$ donde $\diamond$ es un conectivo n-ario definido en términos de los conectivos $\neg, \vee, \wedge$ de LP.*

Demostración. Sea $\diamond$ cualquier conectivo n-ario, como este conectivo sólo tiene tres conectivos primitivos $\neg, \vee, \wedge$; entonces cualquier otro conectivo estará expresado en términos de ellos por lo tanto es suficiente con verificar que los conectivos primarios son $\leq_k$ monótonos. Luego:

i) El conectivo $\neg$ es monótono, en efecto:

[2] El orden entre los valores de verdad de esta lógica es $\{t, f, \top\}$

$$\begin{array}{ccc}
t \leq_k \top & \text{y} & \neg(t) \leq_k \neg(\top) \\
f \leq_k \top & \text{y} & \neg(f) \leq_k \neg(\top) \\
t \leq_k t & \text{y} & \neg(t) \leq_k \neg(t) \\
f \leq_k f & \text{y} & \neg(f) \leq_k \neg(f) \\
\top \leq_k \top & \text{y} & \neg(\top) \leq_k \neg(\top)
\end{array}$$

ii) El conectivo $\vee$ es monótono, en efecto:
Supongamos que $\nu(\psi_1) \leq \mu(\psi_1)$ y $\nu(\psi_2) \leq \mu(\psi_2)$ entonces $\nu(\psi_1 \vee \psi_2)$ tiene tres posibles valores:

1. $\nu(\psi_1 \vee \psi_2) = t$ en cuyo caso $\nu(\psi_1) = t$ o $\nu(\psi_2) = t$ luego $\mu(\psi_1) \in \{t, \top\}$ o $\mu(\psi_2) \in \{t, \top\}$ y en cualquier caso $\mu(\psi_1 \vee \psi_2) \in \{t, \top\}$ luego $\nu(\psi_1 \vee \psi_2) \leq_k \mu(\psi_1 \vee \psi_2)$.
2. $\nu(\psi_1 \vee \psi_2) = \top$ de donde $\nu(\psi_1) = \top$ o $\nu(\psi_2) = \top$ luego $\mu(\psi_1)$ o $\mu(\psi_2) = \top$ y así $\mu(\psi_1 \vee \psi_2) = \top$ así $\nu(\psi_1 \vee \psi_2) \leq_k \mu(\psi_1 \vee \psi_2)$.
3. $\nu(\psi_1 \vee \psi_2) = f$ de donde $\nu(\psi_1) = f$ y $\nu(\psi_2) = f$ y así $\mu(\psi_1) \in \{f, \top\}$ y $\mu(\psi_2) \in \{f, \top\}$ luego $\mu(\psi_1 \vee \psi_2) \in \{f, \top\}$ así $\nu(\psi_1 \vee \psi_2) \leq_k \mu(\psi_1 \vee \psi_2)$.

iii) El conectivo $\wedge$ es monótono. Su prueba es análoga al caso anterior

□

Proposición 3.3. *La lógica trivaluada de Priest no tiene una implicación propia.*

Demostración. Supongamos que $\supset$ es una implicación propia para LP. Entonces $\supset$ es $\leq_k$-monótona. Como LP es semi-clásica entonces por la proposición 2.3 está $\neg$-contenida para alguna $\neg$-interpretación bivalente F. Ahora por esto último y por la proposición 3.2 tenemos que $\mathrm{F}(\supset)$ es la implicación clásica así se tiene que $\tilde{\supset}(f, f) = t$. Luego tenemos que $f \leq_k \top$ y $f \leq_k f$ así por la $\leq_k$-monotonía de $\supset$ y el hecho de que $\tilde{\supset}(f, f) = t$ se tiene que $\tilde{\supset}(\top, f) \in \mathcal{D}$. Ahora tenemos que $p \supset q \vdash_{\mathrm{LP}} p \supset q$ por ser $\supset$ una implicación propia se tiene que $p \supset q, p \vdash_{\mathrm{LP}} q$ pero si tomamos la valuación ν tal que $\nu(p) = \top$ y $\nu(q) = f$ tenemos que $p \supset q, p \nvdash_{\mathrm{LP}} q$ lo cual es una contradicción. □

Hasta este momento ya tenemos una negación y una implicación que bajo una $\neg$-interpretación se comportan tal como la negación e implicación clásica. Gracias al conectivo implicación $\supset$ es posible realizar de una manera directa todas las inferencias de premisas en la lógica a teoremas en esa lógica.
En el próximo capítulo revisaremos el último punto o la última propiedad que se le exige a las lógicas paraconsistentes para poder llamarlas ideales. Esto dará pie a una serie de teoremas que nos irán dando los requisitos mínimos para definir este tipo de lógicas.

Capítulo 4

Paraconsistencia Maximal

En este capítulo veremos como extender una lógica con el afán de que se pueda demostrar tanto como sea posible en lógica clásica, esto significa de alguna manera que sea maximal, pero todo esto se tiene que lograr sin perder la paraconsistencia de nuestra lógica.

El concepto de maximalidad en lógicas paraconsistentes se puede plantear comparando la lógica paraconsistente que se suponemos maximal con otras lógicas y pidiendo que satisfaga alguna propiedad en específico, en esta caso, estamos hablando del concepto conocido como "maximalidad relativa".
Por otro lado una lógica paraconsistente puede ser maximal en el sentido absoluto si no es comparando con otra lógica, comenzaremos por definir este último.

4.1. Tipos de Maximalidad

Definición 4.1. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional y* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *una lógica $\neg$-paraconsistente, entonces diremos que* L *es* ***maximalmente paraconsistente, en el sentido fuerte****, si cualquier extensión propia de* L *no es $\neg$-paraconsistente.*

Definición 4.2. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional y* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *una lógica $\neg$-paraconsistente, entonces diremos que* L *es* ***maximalmente paraconsistente, en el sentido débil****, si toda extensión de* L *cuyo conjunto de teoremas contenga propiamente al de* L*, no es $\neg$-paraconsistente.*

Las definiciones anteriores tienen una gran diferencia pues la primera extiende a la lógica por medio de reglas mientras que la segunda la extiende sólo por axiomas y la similitud de estas definiciones es que buscan o desean que las extensiones de la lógica L pierdan su paraconsistencia.

Ejemplo 4.1. Consideremos la lógica de Sobociński, dada por $\mathrm{S} = \langle \{t, f, \top\}, \{t, \top\}, \{\tilde{\rightarrow}, \tilde{\neg}\} \rangle$ donde $\tilde{\neg} t = f, \tilde{\neg} f = t, \tilde{\neg} \top = \top$ y

$$a \tilde{\to} b = \begin{cases} \top & \text{si } a = b = \top. \\ f & \text{si } a >_t b \text{ (donde } t >_t \top >_t f). \\ t & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El conjunto de proposiciones válidas de S son axiomatizadas por un sistema tipo Hilbert $\mathrm{H_S}$ con Modus Ponens como única regla de inferencia. La lógica correspondiente $\langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{H_S}} \rangle$ tiene las siguientes propiedades:

- Teorema de la completez débil: ψ es demostrable en $\vdash_{\mathrm{H_S}}$ si y sólo si $\vdash_{\mathrm{S}} \psi$, es decir, ψ es válida en S.

- Equivale al fragmento puramente multiplicativo de la lógica semi-relevante $\mathrm{RM}_{\tilde{\to}}$. En particular, la siguiente versión del teorema de la deducción relevante se cumple en $\mathrm{H_S}$.

$$\Gamma, \psi \vdash_{\mathrm{H_S}} \varphi \text{ si bien } \Gamma \vdash_{\mathrm{H_S}} \varphi \text{ o } \Gamma \vdash_{\mathrm{H_S}} \psi \to \varphi$$

En el artículo [6] se muestra que $\langle \mathcal{L}, \mathrm{H_S} \rangle$ es maximalmente paraconsistente en el sentido débil. De hecho, se muestra que esta lógica es paraconsistente, pero cualquier otra extensión del conjunto de teoremas de $\mathrm{H_S}$, por un axioma no demostrable, resulta lógica clásica o bien una lógica trivial. Por otro lado, la lógica $\langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{H_S}} \rangle$ no es maximalmente $\neg$-paraconsistente en el sentido fuerte, ya que $\vdash_{\mathrm{S}}$ es una extensión propia de $\vdash_{\mathrm{H_S}}$. En efecto, se cumple que $\neg(p \to q) \vdash_{\mathrm{S}} p$ pero $\neg(p \to q) \nvdash_{\mathrm{H_S}} p$.

4.2. Maximalidad Relativa a Lógica Clásica

Después de analizar la maximalidad paraconsistente es turno de ver ahora como tener tantos axiomas de la lógica clásica como sean posibles y por supuesto bajo qué condiciones.

Definición 4.3. *Sea* F *una* $\neg$*-interpretación para un lenguaje* $\mathcal{L}$ *con un conectivo unario* $\neg$*:*

- *Una fórmula* ψ *es una* F**- *tautología clásica***, *si cada valuación bivalente, de cada conectivo* $\diamond$ *de* $\mathcal{L}$ *respecto a la tabla de verdad* $\mathrm{F}(\diamond)$*, satisface* ψ*.*

- *Una lógica* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *es* F***-completa***, *si en su conjunto de teoremas están incluidas todas las* F*-tautologías clásicas.*

Definición 4.4. *Sea* F *una* $\neg$*-interpretación. Una lógica* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *es* F***-maximal relativa a lógica clásica*** *si se cumple lo siguiente:*

- L *está* F*-contenida en lógica clásica.*

- *Si* ψ *es una* F*-tautología clásica no demostrable en* L*, entonces al agregar* ψ *a* L *como un nuevo esquema de axioma, se obtiene una lógica* F*-completa.*

Definición 4.5. *Sean* F *una* $\neg$*-interpretación y* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$*, entonces diremos que:*

- L *es* F***-maximalmente paraconsistente relativa a lógica clásica****, si es* $\neg$*-paraconsistente y* F*-maximal relativa a lógica clásica.*
- L *es* ***maximalmente paraconsistente relativa a lógica clásica*** *si existe una* $\neg$*-interpretación bivalente* F *tal que* L *sea* F*-maximalmente paraconsistente relativa a lógica clásica.*

Ejemplo 4.2.

- Definamos la lógica L_S en algún lenguaje estándar $\mathcal{L}_{CL}$ de lógica clásica de la forma siguiente:

$$\mathcal{T} \vdash_{\mathrm{L}_S} \psi \text{ si } \psi \in \mathcal{T} \text{ o } \psi \text{ es una } \mathcal{L}_{CL}\text{-tautología clásica}$$

Se puede verificar que:

1. L_S es una lógica.
2. L_S está $\neg$-contenida en lógica clásica.
3. L_S es $\neg$-paraconsistente.
4. Es maximalmente relativa a lógica clásica.

Así que L_S es maximalmente paraconsistente relativa a lógica clásica.

Definición 4.6. *Sea* F *una* $\neg$*-interpretación. Una lógica* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *es* ***fuertemente*** **F*-maximal relativa a lógica clásica*** *si se cumple lo siguiente:*

- L *está* F*-contenida en lógica clásica.*
- *Si* $\Gamma \nvdash_{\mathrm{L}} \psi$ *y* $\Gamma \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} \psi$*, entonces la mínima extensión* $\mathrm{L}' = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{L}'} \rangle$ *de* L*, que cumple* $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}'} \psi$*, es* $\mathrm{L}_{\mathrm{F}} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}} \rangle$*.*

Definición 4.7. *Sea* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$*, una lógica paraconsistente para un lenguaje con un conectivo unario* $\neg$*.* L *es* ***fuertemente maximal relativa a lógica clásica*** *si existe una* $\neg$*-interpretación bivalente* F *tal que* L *es fuertemente* F*-maximal relativa a lógica clásica.*

Lema 4.1. *Sean* $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{L}} \rangle$ *una lógica paraconsistente, y* F *una* $\neg$*-interpretación bivalente de* $\mathcal{L}$*. Si* L *es fuertemente* F*-maximal relativa a lógica clásica entonces es* F*-completa.*

Demostración. La regla $\{p, \neg p\}/q$ es obviamente válida en $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$. Como L es paraconsistente, esta regla no es válida en L. Sea L' la extensión de L por esta regla. Como L es F-maximal relativa a lógica clásica fuertemente, $\mathrm{L}' = \mathrm{L}_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}$ por definición 4.6, y así L' es F-completa, por definición 4.4. Falta demostrar que L' tiene el mismo conjunto de teoremas que L. Para esto notemos que como L está $\neg$-contenida en lógica clásica, no existe fórmula ψ tal que tanto ψ y $\neg\psi$ son válidas en L. Se sigue que la regla $\{p, \neg p\}/q$ es admisible en L. Esto nos lleva que su adición a L no cambia el conjunto de fórmulas válidas. $\square$

Proposición 4.1. *Ninguna lógica paraconsistente normal es maximalmente relativa a lógica clásica fuertemente.*

Demostración. Supongamos que existe una $\neg$-interpretación bivalente F para el lenguaje de una lógica paraconsistente normal L, y que L es F-maximal relativa a lógica clásica fuertemente. Notemos que L está F-contenida en lógica clásica y además posee una implicación propia $\supset$, todo esto por ser normal. Luego por la proposición 3.2, se tiene que $\mathrm{F}(\supset)$ es la implicación clásica. De esta forma $\vdash_{\mathcal{M}_\mathrm{F}} p \supset (\neg p \supset q)$ es un axioma bajo $\vdash_{\mathcal{M}_\mathrm{F}}$ con lo cual es una F-tautología así se tiene que $\vdash_\mathrm{L} p \supset (\neg p \supset q)$ ya que por el lema 4.1 L es F-completa. Luego las siguientes equivalencias son válidas por ser $\supset$ una implicación propia:

$$\vdash_\mathrm{L} p \supset (\neg p \supset q) \quad \text{si y sólo si} \quad p \vdash_\mathrm{L} \neg p \supset q \quad \text{equivalentemente} \quad p, \neg p \vdash_\mathrm{L} q$$

y esto último contradice la paraconsistencia de L. □

El extender una lógica y que no pierda su paraconsistencia, además de poder tener tantas tautologías sean posibles como en lógica clásica, fue el tema principal y meta de esta sección. Con lo cual quedan definidas las propiedades que mencionamos al principio del trabajo. Ahora es tiempo de definir exactamente lo que es una lógica paraconsistente ideal y revisar algunos resultados que nos auxilien a llegar al objetivo del escrito, que es caracterizar a las lógicas paraconsistentes ideales.

Capítulo 5

Lógicas Paraconsistentes Ideales

Recordemos que las lógicas paraconsistentes son sistemas que nos auxilian a trabajar con información contradictoria pero ¿Cómo saber cúal de estos sistemas es el adecuado o la mejor opción para lo que requerimos? A lo largo de estos capítulos hemos definido con exactitud las propiedades de las que se hablaba al principio del trabajo, es momento de vincular estos conceptos para poder definir lo que es una lógica paraconsistente ideal y desarrollar resultados que nos ayuden a estructurarlas, con lo cual daremos respuesta a la pregunta anterior. Veamos la siguiente definición.

Definición 5.1. *Una lógica $\neg$-paraconsistente* L *es llamada **ideal**, si ésta es normal, maximal relativa a lógica clásica y maximalmente paraconsistente.*

Las matrices trivaluadas nos brindan el marco más popular para razonar con datos contradictorios, la principal razón de esto es que proporcionan la forma semántica más simple de definir lógicas paraconsistentes, recordemos el corolario 2.1.

5.1. Lógicas Trivaluadas Paraconsistentes Ideales

Veamos algunas consecuencias de las matrices trivaluadas $\neg$-paraconsistentes al restringirlas a ciertas condiciones.

Proposición 5.1. *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz trivaluada $\neg$-paraconsistente y $\neg$-contenida en lógica clásica. Entonces $\mathcal{M}$ es proto-clásica, y es isomorfa a una matriz $\mathcal{M}' = \langle \{t, f, \top\}, \{t, \top\}, \mathcal{O} \rangle$, en donde $\neg t = f$, $\neg f = t$ y $\neg \top \in \{t, \top\}$.*

Demostración. Este resultado es directo de las proposiciones 2.1 y 2.2 □

Proposición 5.2. *Sea $\mathcal{M}$ una matriz trivaluada $\neg$-paraconsistente tal que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ es normal. Entonces $\mathcal{M}$ es semi-clásica.*

Demostración. Como $\mathcal{M}$ es normal, entonces está F-contenida en lógica clásica para alguna $\neg$-interpretación bivalente F. Como $\mathcal{M}$ está $\neg$-contenida en lógica clásica y además es una matriz trivaluada paraconsistente por la proposición 5.1, se tiene que $\mathcal{M}$ es proto-clásica y que además $\neg t = f$ y $\neg f = t$ con lo que resta probar que $\mathcal{M}$ es clásicamente cerrada. Definimos $\psi \star \varphi = (\psi \supset \varphi) \supset \varphi$, así $\mathrm{F}(\star)$ es la disyunción clásica, esto por la proposición 3.2. Debido al comportamiento de la disyunción clásica:

$$\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{M}_\mathrm{F}} \psi \star \varphi \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \vdash_{\mathcal{M}_\mathrm{F}} \neg\psi \star \varphi \quad \text{implica} \quad \mathcal{T} \vdash_{\mathcal{M}_\mathrm{F}} \varphi. \tag{5.1}$$

Además, como $\supset$ es una implicación propia para $\mathrm{L}_\mathcal{M}$ se tiene:

$$\psi \vdash_\mathcal{M} \psi \star \varphi \quad \text{y} \quad \varphi \vdash_\mathcal{M} \psi \star \varphi \tag{5.2}$$

Para demostrar que $\mathcal{M}$ es clásicamente cerrada suponemos que existe un conectivo n-ario $\diamond$ que no es clásicamente cerrado, es decir, que existen algunos $a_1, \ldots, a_n \in \{t, f\}$ tales que $\tilde{\diamond}(a_1, \ldots, a_n) \notin \{t, f\}$. Para todo $1 \leq i \leq n$ definimos:

$$\varphi_i = \begin{cases} p_i & \text{si } a_i = t. \\ \neg p_i & \text{si } a_i = f. \end{cases}$$

Ahora sea $\psi = \psi_1 \star \ldots \star \psi_n$, donde:

$$\psi_i = \begin{cases} \neg p_i & \text{si } \varphi_i = p_i. \\ p_i & \text{si } \varphi_i = \neg p_i. \end{cases}$$

Entonces todos los $\mathcal{M}$-modelos de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ son $\mathcal{M}$-modelos de $\diamond(p_1, \ldots, p_n) \star \psi$ y $\neg \diamond (p_1, \ldots, p_n) \star \psi$. Así $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_\mathcal{M} \diamond(p_1, \ldots, p_n) \star \psi$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_\mathcal{M} \neg \diamond (p_1, \ldots, p_n) \star \psi$. Sabemos que $\mathrm{L}_\mathcal{M}$ está F-contenida en lógica clásica por lo cual $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{M}_\mathrm{F}} \diamond(p_1, \ldots, p_n) \star \psi$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{M}_\mathrm{F}} \neg\diamond(p_1, \ldots, p_n) \star \psi$ y ahora por la condición (5.1) se tiene que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{M}_\mathrm{F}} \psi$, lo cual es una contradicción pues los modelos de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ no son modelos de ψ.

□

Lema 5.1. *Sea $\mathcal{M}$ una matriz $\neg$-paraconsistente trivaluada tal que $\mathrm{L}_\mathcal{M}$ es fuertemente maximal $\neg$-paraconsistente. Supongamos que existe alguna $\neg$-interpretación bivalente* F*, tal que $\mathrm{L}_\mathcal{M}$ está* F*-contenida en lógica clásica, pero $\mathrm{L}_\mathcal{M}$ no es* F*-maximal relativa a lógica clásica. Entonces $\mathcal{M}$ es clásicamente cerrada.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{L}_\mathcal{M}$ está F-contenida en lógica clásica, pero no es F-maximal relativa a lógica clásica, dado que existe una F-tautología clásica ψ_0 no demostrable en $\mathrm{L}_\mathcal{M}$ tal que anexándola como un axioma a $\mathrm{L}_\mathcal{M}$ resulta una lógica L^* que no es F-completa. Sea σ alguna F-tautología clásica no demostrable en L^*. Sea $\mathcal{S}^*$ el conjunto de todas las sustituciones de ψ_0. Entonces para cada teoría $\mathcal{T}$ y fórmula ϕ tenemos que:

$$\mathcal{T} \vdash_{\mathrm{L}^*} \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{T}, \mathcal{S}^* \vdash_\mathcal{M} \phi \tag{5.3}$$

ya que recordemos que L^* es una extensión de $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ que resultó de agregarle a ésta última ψ_0 como axioma. Como $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ es fuertemente maximal $\neg$-paraconsistente, particularmente para cada fórmula φ, ϕ se cumple que:

$$\mathcal{S}^*, \varphi, \neg\varphi \vdash_{\mathcal{M}} \phi. \tag{5.4}$$

Como $\nvdash_{\mathrm{L}^*} \sigma$ entonces por (5.3) $\mathcal{S}^* \nvdash_{\mathcal{M}} \sigma$. De aquí concluimos que hay una valuación $\nu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$ que es modelo de $\mathcal{S}^*$ pero $\nu(\sigma) = f$.

Ahora, mostremos que para cada fórmula ψ, $\nu(\psi) \in \{t, f\}$.

Hagámoslo por contradicción y supongamos que existe alguna ψ tal que $\nu(\psi) = \top$. Como ν es un modelo de $\mathcal{S}^*$ también es un modelo de $\mathcal{S}^* \cup \{\psi, \neg\psi\}$ por 5.1 y así es un modelo de σ, esto por la condición (5.4), con lo que $\nu(\sigma) \in \mathcal{D}$ pero esto es una contradicción pues se sabe que $\nu(\sigma) = f$. Con lo que se concluye que $\nu(\psi) \in \{t, f\}$ para toda ψ. Veamos que esto implica que todas las operaciones de $\mathcal{M}$ son clásicamente cerradas.
Sea $\diamond$ algún conectivo n-ario de $\mathcal{L}$ y sean $a_1, \ldots, a_n \in \{t, f\}$. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos:

$$\varphi_i = \begin{cases} p_i & \text{si } \nu(p_i) = a_i. \\ \neg p_i & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\nu(\varphi_i) = a_i$ y $\tilde{\diamond}(a_1, \ldots, a_n) = \tilde{\diamond}(\nu(\varphi_1), \ldots, \nu(\varphi_n)) = \nu(\diamond(\varphi_1, \ldots, \varphi_n))$ pero ya se demostró que el valor de verdad de ésta última formula está en $\{t, f\}$. $\square$

La importancia del lema anterior se ve reflejada en la construcción de la prueba del siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Sea $\mathcal{M}$ una matriz trivaluada que está $\neg$-contenida en lógica clásica. Si $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ es una lógica maximalmente paraconsistente en el sentido fuerte, entonces también es maximalmente paraconsistente relativa a lógica clásica.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ una matriz trivaluada que está $\neg$-contenida en lógica clásica, y tal que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ es fuertemente maximal $\neg$-paraconsistente. Entonces en particular $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ está F-contenida en lógica clásica para alguna F interpretación. Si $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ es F-maximal relativa a lógica clásica entonces habremos acabado. En otro caso, $\mathcal{M}$ es semi-clásica por el lema 5.1. Luego, por la proposición 2.3, tenemos que $\mathrm{F} = \mathrm{F}_{\mathcal{M}}$, y así $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ está $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-contenida en lógica clásica.

Ahora demostraremos que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ es $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-maximal relativa a lógica clásica. Esta prueba será similar a la demostración del lema 5.1.

Sea ψ' una $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-tautología no demostrable en $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ y sea $\mathcal{S}'^*$ el conjunto de todas sus sustituciones. Sea L'^* la lógica obtenida al agregarle ψ' como un nuevo axioma a $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$. Entonces para toda teoría $\mathcal{T}$ tenemos que:

$$\mathcal{T} \vdash_{\mathrm{L}'^*} \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{T}, \mathcal{S}'^* \vdash_{\mathcal{M}} \phi.$$

En particular como $\mathcal{M}$ es fuertemente maximal, la condición 5.4 también se cumple para $\mathcal{S}'^*$. Supongamos por contradicción que existe una $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-tautología σ no demostrable en L'^*. Entonces se tiene que $\nvdash_{\mathrm{L}'^*} \sigma$ y también se tiene que $\mathcal{S}'^* \nvdash_{\mathcal{M}} \sigma$. Luego hay una valuación $\nu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$ tal que:

$$\nu \text{ es modelo de } \mathcal{S}'^* \text{ pero } \nu(\sigma) = f.$$

Si existiera una fórmula ψ que $\nu(\psi) = \top$, entonces como ν es un modelo de $\mathcal{S}'^*$, también lo es para $\mathcal{S}'^* \cup \{\psi, \neg\psi\}$ y así por la condición 5.4 éste es un modelo de σ, y lo cual contradice el hecho de que $\nu(\sigma) = f$. Con lo cual $\nu(\psi) \in \{t, f\}$ para toda ψ, y así ν es una $\mathcal{M}_{\mathrm{F}_{\mathcal{M}}}$-valuación que asigna f a σ. Esto contradice el hecho de que $\vdash_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}_{\mathcal{M}}}} \sigma$, pues recordemos que es una σ es una $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-tautología.

Con esto concluimos que toda $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-tautología clásica es demostrable en L'^*, y por lo tanto $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ es $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$-maximal relativa a lógica clásica. □

Con ayuda de los resultados anteriores podemos formular el siguiente teorema, que es el más importante de esta sección ya que caracteriza las lógicas paraconsistentes trivaluadas ideales.

Teorema 5.2. *Toda lógica trivaluada $\neg$-paraconsistente y normal es ideal.*

Demostración. Por el teorema 5.1, es suficiente mostrar que cada lógica trivaluada normal paraconsistente es fuertemente maximal. Sea $\mathcal{M}$ una matriz trivaluada $\neg$-paraconsistente para un lenguaje $\mathcal{L}$ con una implicación propia, y que también está $\neg$-contenida en lógica clásica.

Sea $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ una extensión propia de $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$ por algún conjunto de reglas. Entonces existe una teoría Γ y una fórmula ψ en $\mathcal{L}$, tal que $\Gamma \vdash \psi$ pero $\Gamma \nvdash_{\mathcal{M}} \psi$. En particular, existe una valuación $\nu \in mod_{\mathcal{M}}(\Gamma)$ tal que $\nu(\psi) = f$. Consideremos la sustitución θ, definida para cada $p \in \mathrm{Atoms}(\Gamma \cup \{\psi\})$ por:

$$\theta(p) = \begin{cases} q_0 & \text{Si } \nu(p) = t. \\ \neg q_0 & \text{Si } \nu(p) = f. \\ p_0 & \text{Si } \nu(p) = \top. \end{cases}$$

donde p_0 y q_0 son dos átomos diferentes en $\mathcal{L}$. Notemos que $\theta(\Gamma)$ y $\theta(\psi)$ contienen (a lo más) las variables p_0 y q_0, y que para cada valuación $\mu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$, tal que $\mu(p_0) = \top$ y $\mu(q_0) = t$, se cumple que $\mu(\theta(\phi)) = \nu(\phi)$ para cada fórmula ϕ tal que $\mathrm{Atoms}(\{\phi\}) \subseteq \mathrm{Atoms}(\Gamma \cup \{\psi\})$. Así:

$$\begin{gathered} \text{Cualquier } \mu \in \Lambda_{\mathcal{M}}, \text{ tal que } \mu(p_0) = \top \text{ y } \mu(q_0) = t, \\ \text{es un } \mathcal{M}\text{-modelo de } \theta(\Gamma) \text{ que no } \mathcal{M}\text{-satisface a } \theta(\psi). \end{gathered} \tag{5.5}$$

Ahora consideremos los siguientes casos:

Caso I Existe una fórmula $\phi(p,q)$ tal que para cada $\mu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$, $\mu(\phi) \neq \top$ si $\mu(p) = \mu(q) = \top$.
En este caso, sea $\beta = \phi(p_0,p_0) \supset \phi(p_0,p_0)$. Notemos que $\mu(\beta) = t$ para cualquier $\mu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$ tal que $\mu(p_0) = \top$. Ahora como $\vdash$ es estructural, $\Gamma \vdash \psi$ implica que:

$$\theta(\Gamma)[\beta \backslash q_0] \vdash \theta(\psi)[\beta \backslash q_0]. \tag{5.6}$$

Por la definición de β y por (5.5), cualquier valuación $\mu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$ en donde $\mu(p_0) = \top$ es un modelo de $\theta(\Gamma)[\beta \backslash q_0]$ pero no $\mathcal{M}$-satisface $\theta(\psi)[\beta \backslash q_0]$. Por lo tanto:

$p_0, \neg p_0 \vdash_{\mathcal{M}} \theta(\gamma)[\beta \backslash q_0]$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Como $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ es más fuerte[1] que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$, esto implica que:

$$p_0, \neg p_0 \vdash \theta(\gamma)[\beta \backslash q_0] \text{ para toda } \gamma \in \Gamma. \tag{5.7}$$

El conjunto $\{p_0, \neg p_0, \theta(\psi)[\beta \backslash q_0]\}$ no es $\mathcal{M}$-satisfacible. Esto implica:

$$p_0, \neg p_0, \theta(\psi)[\beta \backslash q_0] \vdash_{\mathcal{M}} q_0.$$

De nuevo, como $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ es más fuerte que $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}$, tenemos que:

$$p_0, \neg p_0, \theta(\psi)[\beta \backslash q_0] \vdash q_0. \tag{5.8}$$

De (5.6) y (5.7) se tiene que:

$$p_0, \neg p_0 \vdash \theta(\psi)[\beta \backslash q_0]. \tag{5.9}$$

Ahora de (5.8), (5.9) y por la transitividad tenemos que:

$$p_0, \neg p_0 \vdash q_0.$$

Así $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ no es $\neg$-paraconsistente.

Caso II Para cada fórmula $\phi(p,q)$ y para cada $\mu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$, si $\mu(p) = \mu(q) = \top$ entonces $\mu(\phi) = \top$.
Hagamos un cambio de q_0 por $q_0 \supset q_0$, luego como $\vdash$ es estructural, y se sabe que $\Gamma \vdash \psi$, entonces

$$\theta(\Gamma)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0] \vdash \theta(\psi)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0]. \tag{5.10}$$

Recordando el apartado (5.5) y con la nueva sustitución entonces se tiene que cualquier valuación $\mu \in \Lambda_{\mathcal{M}}$ tal que $\mu(p_0) = \top$ y $\mu(q_0) \in \{t, f\}$ es un modelo de $\theta(\Gamma)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0]$ y no es modelo de $\theta(\psi)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0]$. Entonces el único $\mathcal{M}$-modelo de $\{p_0, \neg p_0, \theta(\psi)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0]\}$ es aquel donde tanto p_0 y q_0 toman el valor de $\top$. De lo anterior podemos concluir que $p_0, \neg p_0, \theta(\psi)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0] \vdash_{\mathcal{M}} q_0$. Luego,

$$p_0, \neg p_0, \theta(\psi)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0] \vdash q_0. \tag{5.11}$$

[1] L' es más fuerte que L si L' es una extensión de L

Utilizando de nuevo (5.5) (para $\mu(q_0) \in \{t, f\}$) y la condición del caso II (para $\mu(q_0) = \top$), se tiene que:

$$p_0, \neg p_0 \vdash \theta(\gamma)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0] \text{ para cada } \gamma \in \Gamma. \tag{5.12}$$

de las condiciones (5.12) y (5.10) se obtiene que:

$$p_0, \neg p_0 \vdash \theta(\psi)[q_0 \supset q_0 \backslash q_0].$$

Luego de ésta última y de la condición (5.1) tenemos que:

$$p_0, \neg p_0 \vdash q_0$$

y así $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ no es $\neg$-paraconsistente.

Con esto concluimos que dada cualquier extensión propia $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ de $L_{\mathcal{M}}$ no es $\neg$-paraconsistente, por consecuencia $L_{\mathcal{M}}$ es fuertemente maximal y por lo tanto $L_{\mathcal{M}}$ es ideal. □

El siguiente corolario presenta una caracterización sencilla de las lógicas paraconsistente ideales de tres valores.

Corolario 5.1. *Una lógica trivaluada $\neg$-paraconsistente es ideal si y sólo si es normal.*

Demostración. Supongamos que L es una lógica trivaluada $\neg$-paraconsistente ideal, luego por la definición de lógica paraconsistente ideal, L es normal. Ahora supongamos que L es una lógica trivaluada $\neg$-paraconsistente normal entonces por el teorema 5.2 se tiene que L es ideal. □

El número de lógicas trivaluadas es finito pero no todas ellas son paraconsistentes y menos aún ideales, por medio del corolario 5.1 de las $7(2^{3^9+3^3} - 1)$ [2] posibles lógicas trivaluadas las siguientes son paraconsistentes ideales.

Ejemplo 5.1. La lógica de Sette P_1 y todos sus fragmentos que contengan la negación de Sette, la lógica PAC, J_3 y las 2^{20} lógicas trivaluadas consideradas en [4] incluyendo las 2^{13} LFI de [14] son lógicas paraconsistentes ideales.

Aún cuando todas las lógicas descritas anteriormente son diferentes, comparten un núcleo común que asegura su naturaleza ideal, este núcleo puede capturarse usando la herramienta de las Nmatrices[3], matrices no deterministas, presentadas en [7] y que ya se han usado en [4] para caracterizar el núcleo de la maximalidad fuerte de las lógicas trivaluadas paraconsistentes.

[2] En las lógicas trivaluadas hay 3^3 operadores unarios y 3^9 operadores binarios distintos. Si se consideran solo este tipo de operadores entonces se tiene $2^{3^3+3^9} - 1$ conjuntos de conectivos no vacíos y distintos. Por cada subconjunto de conectivos es necesario elegir el conjunto de valores designados el cual no puede ser vacío por lo tanto hay $(2^3) - 1$ opciones y así tenemos $7(2^{3^9+3^3} - 1)$ posibles lógicas trivaluadas.

[3] Las Nmatrices son una generalización de la semántica estándar de matrices, obtenida al relajar el principio de la verdad funcional, cuando el valor de una fórmula compuesta se selecciona de manera no determinada de algún conjunto de opciones.

Como hemos visto no es tan complicado formar una lógica trivaluada paraconsistente ideal pues requiere o se le exigen pocas condiciones. Después de analizar esta clase de lógicas veamos el caso general.

5.2. Una Construcción Sistemática de Lógicas Ideales

Una pregunta natural a responder en este punto es saber si existen lógicas ideales de más de tres valores. En esta sección no solo daremos una respuesta positiva a esta interrogante, sino que también mostraremos que para $n > 3$ existe una extensa familia de lógicas ideales n-valuadas, cada una de las cuales no es equivalente a cualquiera de las lógicas k-valuadas con $k < n$.

Proposición 5.3. *Sea $\mathcal{M}$ una matriz $\neg$-paraconsistente y semi-clásica para un lenguaje $\mathcal{L}$ con un conectivo unario $\diamond$ tal que para algún $n > 2$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $p, \neg p \vdash_{\mathcal{M}} \diamond^{n-2} p$.
2. $p, \neg p, \diamond^k p \vdash_{\mathcal{M}} q$ *para* $1 \leq k \leq n-3$.
3. $p, \neg p, \neg \diamond^k p \vdash_{\mathcal{M}} q$ *para* $1 \leq k \leq n-3$.

Entonces el conjunto de valores de verdad de $\mathcal{M}$ tiene al menos n elementos, incluyendo al menos $n-2$ elementos no designados.

Demostración. Tenemos que $\mathcal{M}$ es semi-clásica luego por la proposición 2.3 se tiene que $\mathcal{M}$ está $\neg$-contenida en lógica clásica. Como ya tenemos que $\mathcal{M}$ está $\neg$-contenida en lógica clásica entonces por la proposición 2.1 debe haber al menos un elemento $t \in \mathcal{D}$, tal que $f = \tilde{\neg} t \notin \mathcal{D}$ y al menos un elemento $\top \in \mathcal{D}$, tal que $\tilde{\neg}\top \in \mathcal{D}$, esto último por ser $\mathcal{M}$ $\neg$-paraconsistente.

Denotemos $\bot_k = \tilde{\diamond}^k \top$ para cada $1 \leq k \leq n-3$. Supongamos que además existe un $i \in \{1, \dots, n-3\}$ tal que $\bot_i \in \mathcal{D}$, luego consideremos la teoría $\{p, \neg p, \diamond^i p\}$ donde uno de sus $\mathcal{M}$-modelos es $\nu(p) = \top$ y $\nu(q) = f$ pero $\nu \notin mod_{\mathcal{M}}(q)$, así:

$$p, \neg p, \diamond^i p \nvdash_{\mathcal{M}} q$$

con lo que se contradice la condición 2, por lo tanto, $\bot_k \in \bar{\mathcal{D}}$ para $1 \leq k \leq n-3$.

Más aún, $\bot_1, \dots, \bot_{n-3}$ son todos diferentes entre sí, en efecto pues si existieran $\bot_j = \bot_k$ con $1 \leq j \leq k \leq n-3$ además para un $i > n-3$ se tendría que:

$$\diamond^i \top = \diamond^s (\diamond^k \top) = \diamond^s (\diamond^j \top).$$

Si $s + j \leq n-3$ entonces $\diamond^i \top \in \bar{\mathcal{D}}$, de lo contrario aplicamos nuevamente la idea y esto contradice la condición $p, \neg p \vdash_{\mathcal{M}} \diamond^{n-2} p$.

Supongamos que existe $i \in \{1, \ldots, n-3\}$ tal que $\bot_i = \top$, consideremos a la teoría $\mathcal{T} = \{p, \neg p, \neg \diamond^i p\}$ donde $\nu(p) = \top$ y $\nu(q) = f$, así ν pertenece a los $\mathcal{M}$-modelos de $\mathcal{T}$ pero $\nu \notin mod_{\mathcal{M}}(q)$ entonces $p, \neg p, \neg \diamond^i p \nvdash_{\mathcal{M}} q$ lo cual contradice la condición 3, por lo tanto, $\top \neq \bot_k$ para $1 \leq k \leq n-3$, de manera análoga se demuestra que $t \neq \bot_k$ para $1 \leq k \leq n-3$.

En este momento supongamos que $t = \top$ entonces $\neg t = \neg \top$ donde $f = \neg \top$, por ser $\mathcal{M}$ proto-clásica, pero esto es una contradicción pues $f \notin \mathcal{D}$ mientras que $\neg \top \in \mathcal{D}$, con lo cual $t \neq \top$. Por otro lado, como $\mathcal{M}$ es semi-clásica, $\tilde{\neg} f \in \mathcal{D}$. De aquí que f es distinto de $\bot_1, \ldots, \bot_{n-3}$. Obviamente, f es diferente a t y $\top$. Se sigue que $t, \top, f, \bot_1, \ldots, \bot_{n-3}$ son diferentes entre sí. □

Necesitamos tres lemas antes de poder enunciar el resultado principal de esta tesis, la caracterización de las lógicas paraconsistentes ideales n-valuadas. Para el resto del trabajo:

Sea $\mathcal{M}^i = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ una matriz n-valuada para un lenguaje que tiene lo siguiente:

I) un conectivo unario $\neg$.

II) un conectivo unario $\diamond$.

III) un conectivo binario $\supset$.

IV) dos constantes proposicionales $\check{f}$ y $\check{t}$.

Suponga que $n > 3$, y que se cumplen las siguientes condiciones en $\mathcal{M}^i$:

1. $\mathcal{V} = \{t, f, \top, \bot_1, \ldots, \bot_{n-3}\}$ y $\mathcal{D} = \{t, \top\}$.
2. La interpretación de la constante $\check{f}$ es el elemento f[4].
3. La interpretación de la constante $\check{t}$ es el elemento t.
4. $\tilde{\neg} t = f, \tilde{\neg} f = t$, y $\tilde{\neg} x = x$ en otro caso.
5. $\tilde{\diamond} t = f, \tilde{\diamond} f = t, \tilde{\diamond} \top = \bot_1, \tilde{\diamond} \bot_i = \bot_{i+1}$ para $i < n-3$, y $\tilde{\diamond} \bot_{n-3} = \top$.
6. $a \tilde{\supset} b = t$ si $a \notin \mathcal{D}$ y $a \tilde{\supset} b = b$ en otro caso.
7. Para cualquier conectivo n-ario $\star$ de $\mathcal{L}$, $\tilde{\star}$ es clásicamente cerrada.

Lema 5.2. $\mathrm{L}^i_{\mathcal{M}}$ *es una lógica $\neg$-paraconsistente normal.*

Demostración. Como $\top \in \mathcal{D}$ y $\tilde{\neg} \top \in \mathcal{D}$ entonces por la proposición 2.1 $\mathcal{M}^i$ es $\neg$-paraconsistente, luego por cómo se definieron los conectivos y por $\tilde{\neg} f = t$ entonces se tiene que $\mathcal{M}^i$ es semi-clásica. Ahora por esto último y por la proposición 2.3 se tiene que $\mathrm{L}^i_{\mathcal{M}}$ está $\neg$-contenida en lógica clásica.

Enseguida demostraremos que $\supset$ es una implicación propia.

Supongamos $\mathcal{T}, \varphi \vdash^i_{\mathcal{M}} \psi$ y que $\mathcal{T} \nvdash^i_{\mathcal{M}} \varphi \supset \psi$, es decir, existe una valuación ν tal que:

[4] Esta condición no se presenta en el artículo [3] pero si en [5].

$$\nu(\mathcal{T}) \in \mathcal{D} \text{ y } \nu(\varphi \supset \psi) \in \bar{\mathcal{D}}$$

luego esto último implica que:

$$\nu(\varphi) \in \mathcal{D} \text{ y } \nu(\psi) \in \bar{\mathcal{D}},$$

esto debido a como se definió $\supset$.
Así tenemos que:

$$\nu(\mathcal{T}) \in \mathcal{D},\ \nu(\varphi) \in \mathcal{D} \text{ y } \nu(\psi) \in \bar{\mathcal{D}},$$

con lo cual $\mathcal{T}, \varphi \nvdash^i_{\mathcal{M}} \psi$,lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente, si $\mathcal{T}, \varphi \vdash^i_{\mathcal{M}} \psi$ entonces $\mathcal{T} \vdash^i_{\mathcal{M}} \varphi \supset \psi$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T} \vdash^i_{\mathcal{M}} \varphi \supset \psi$ y que $\mathcal{T}, \varphi \nvdash^i_{\mathcal{M}} \psi$, es decir, existe una valuación ν tal que $\nu(\mathcal{T}, \varphi) \in \mathcal{D}$ y $\nu(\psi) \in \bar{\mathcal{D}}$ así $\nu(\mathcal{T}) \in \mathcal{D}$, $\nu(\varphi) \in \mathcal{D}$ y $\nu(\psi) \in \bar{\mathcal{D}}$ luego aplicando el operador a φ y ψ, y utilizando ν se tiene que:

$$\nu(\varphi \supset \psi) = \nu(\varphi) \tilde{\supset} \nu(\psi) \in \bar{\mathcal{D}}$$

por lo tanto $\psi \nvdash^i_{\mathcal{M}} \varphi \supset \psi$, lo cual es una contradicción. Así, si $\mathcal{T} \vdash^i_{\mathcal{M}} \varphi \supset \psi$ entonces $\mathcal{T}, \varphi \vdash^i_{\mathcal{M}} \psi$.

Por lo tanto, $\supset$ es una implicación propia y como $\mathrm{L}^i_{\mathcal{M}}$ está $\neg$-contenida en lógica clásica entonces $\mathrm{L}^i_{\mathcal{M}}$ es normal. $\square$

Lema 5.3. *$\mathcal{M}^i$ es fuertemente maximal.*

Demostración. Primero notemos que para cualquier $a \in \mathcal{V} \backslash \{t, f\}$ existe un $0 \leq j_a \leq n-2$, tal que una valuación μ es un $\mathcal{M}^i$-modelo de $\{\diamond^{j_a} p, \neg \diamond^{j_a} p\}$ si y sólo si $\mu(p) = a$.
Por ejemplo para:

$$a = \top,\ j_a = 0 \quad \text{o} \quad j_a = n-2 \text{ y } \mu(p) = \top,$$

tenemos que μ es un $\mathcal{M}^i$-modelo de $\{\diamond^{j_a} p, \neg \diamond^{j_a} p\}$ pues $\tilde{\diamond}^0 \top = \top \in \mathcal{D}$ y $\tilde{\neg}\tilde{\diamond}^0 \top = \top \in \mathcal{D}$, luego para los demás valores de verdad, excluyendo a t y f, se tiene que $j_{\perp_i} = n - 2 - i$.

Sea $\mathrm{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathrm{L}} \rangle$ cualquier extensión propia de $\mathrm{L}^i_{\mathcal{M}}$. Entonces existen algunas $\psi_1, \ldots, \psi_k$ y φ, tal que $\psi_1, \ldots, \psi_k \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$, pero $\psi_1, \ldots, \psi_k \nvdash^i_{\mathcal{M}} \varphi$.

De esto último se sigue que existe una valuación μ, tal que $\mu(\psi_i) \in \mathcal{D}$ para todo $1 \leq i \leq k$, y $\mu(\varphi) \in \bar{\mathcal{D}}$. Sean $p_1, \ldots, p_m$ los átomos que aparecen en $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi\}$.

Dado un átomo p_{i_0} tal que $\mu(p_{i_0}) = f$ sustituyámoslo por $\check{f}$ y dado un átomo p_{i_0} tal que $\mu(p_{i_1}) = t$ sustituyámoslo por $\check{t}$, de tal modo que después de la sustitución cualquier otro átomo

p que aparezca satisface que $\mu(p) \in \mathcal{V}\backslash\{t, f\}$. Ahora sea $j_i = j_{\mu(p_i)}$ para $1 \leq i \leq m$. Por observaciones hechas anteriormente, μ es el único modelo del conjunto

$$\Psi = \{\diamond^{j_1} p_1, \neg \diamond^{j_1} p_1\} \cup \ldots \cup \{\diamond^{j_m} p_m, \neg \diamond^{j_m} p_m\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{\diamond^{j_i} p_i, \neg \diamond^{j_i} p_i\}$$

Se sigue que $\Psi \vdash^i_{\mathcal{M}} \psi_i$ esto porque $\mu(\psi_i) \in \mathcal{D}$ para todo $1 \leq i \leq k$ y tomando a q como un nuevo átomo se tiene que $\Psi \cup \{\varphi\} \vdash^i_{\mathcal{M}} q$ y que $\Psi \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathrm{L}} q$, esto último porque L es una extensión de $\mathrm{L}^i_{\mathcal{M}}$. Luego se tiene $\Psi \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \vdash_{\mathrm{L}} q$, pero recordemos que $\Psi \vdash_{\mathrm{L}} \psi_i$ para todo $1 \leq i \leq k$, así $\Psi \vdash_{\mathrm{L}} q$. Ahora sustituyendo p_i por $\diamond^{n-j_i-2} p$ tendremos que $\Psi = \bigcup_{i=1}^{m} \{\diamond^{n-2} p, \neg \diamond^{n-2} p\}$ con lo cual $\Psi = \{\diamond^{n-2} p, \neg \diamond^{n-2} p\}$. Este último conjunto en $\mathrm{L}^i_{\mathcal{M}}$ tiene la forma de $\{p, \neg p\}$. Por lo tanto $p, \neg p \vdash_{\mathrm{L}} q$, y así L no es paraconsistente. $\square$

Lema 5.4. $\mathcal{M}^i$ *es maximalmente* $\neg$*-paraconsistente relativa a lógica clásica.*

Demostración. Sean φ una fórmula que no es $\mathcal{M}^i$-válida, y $\mathcal{S}$ el conjunto de las instancias de φ. Supongamos por contradicción que existe una tautología clásica θ tal que $\mathcal{S} \nvdash^i_{\mathcal{M}} \theta$. Sea $\mathcal{T}$ una teoría maximal que extiende a $\mathcal{S}$, tal que $\mathcal{T} \nvdash^i_{\mathcal{M}} \theta$. Entonces para cada fórmula ψ, o se cumple que $\psi \in \mathcal{T}$ ó $\mathcal{T}, \psi \vdash^i_{\mathcal{M}} \theta$ se tiene que $\mathcal{T} \vdash^i_{\mathcal{M}} \psi \supset \theta$. Podemos notar,

$$\mathcal{T} \vdash^i_{\mathcal{M}} \psi \quad \text{si y sólo si} \quad \psi \in \mathcal{T}. \tag{5.13}$$

Ahora, para cualquier valor de verdad $a \in \mathcal{V}$ y fórmula $\psi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$, definimos las fórmulas $\phi^a_1(\psi)$ y $\phi^a_2(\psi)$ como sigue:

$$\begin{array}{lll}
\phi^t_1(\psi) = \psi & \phi^t_2(\psi) = \neg \diamond \psi & \\
\phi^f_1(\psi) = \neg\psi & \phi^f_2(\psi) = \diamond\psi & \\
\phi^\top_1(\psi) = \psi & \phi^\top_2(\psi) = \neg\psi & \\
\phi^{\perp_i}_1(\psi) = \diamond^{n-2-i}\psi & \phi^{\perp_i}_2(\psi) = \neg\phi^{\perp_i}_1\psi & \text{para } i = 1.\ldots, n-3
\end{array}$$

Se puede checar que se puede checar que para cualquier $a \in \mathcal{V}, \psi \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}}$, y una $\mathcal{M}$-valuación ν se cumple lo siguiente:

$$\nu(\psi) = a \text{ si y sólo si } \nu \text{ satisface } \phi^a_1(\psi) \text{ y } \phi^a_2(\psi). \tag{5.14}$$

Ahora definimos una valuación ν como: $\nu(\psi) = a$ si $\phi^a_1(\psi) \in \mathcal{T}$ y $\phi^a_2(\psi) \in \mathcal{T}$. Mostraremos los siguientes hechos:

1. ν está bien definida:

   Esto se deriva de los siguientes hechos:

   a) Debe haber una $a \in \mathcal{V}$ tal que $\mu(\psi) = a$.

      En efecto, sea $\phi^a_3(\psi) = \phi^a_1(\psi) \supset (\phi^a_2(\psi) \supset \theta)$. Por 5.14, cada $\mathcal{M}^i$-valuación satisface

$\phi_1^a(\psi)$ y $\phi_2^a(\psi)$ para alguna $a \in \mathcal{V}$. Por lo tanto:

$$\{\phi_3^a(\psi) \mid a \in \mathcal{V}\} \vdash^i_{\mathcal{M}} \theta.$$

Ahora, si $\mu(\psi) \neq a$ para algún $a \in \mathcal{V}$, entonces $\phi_1^a(\psi) \notin \mathcal{T}$ o $\phi_2^a(\psi) \notin \mathcal{T}$, así $\mathcal{T} \cup \{\phi_1^a(\psi), \phi_2^a(\psi)\}$ es una extensión propia de $\mathcal{T}$. Por consiguiente, $\mathcal{T} \cup \{\phi_1^a(\psi), \phi_2^a(\psi)\} \vdash^i_{\mathcal{M}} \theta$, y así $\mathcal{T} \vdash^i_{\mathcal{M}} \phi_3^a(\psi)$ por el teorema de la deducción. En consecuencia, si $\mu(\psi) \neq a$ para cada $a \in \mathcal{V}$ obtenemos que $\mathcal{T} \vdash^i_{\mathcal{M}} \phi_3^a(\psi)$ para cada $a \in \mathcal{V}$, y así $\mathcal{T} \vdash^i_{\mathcal{M}} \theta$ lo cual es una contradicción pues recordemos que $\mathcal{T} \nvdash_{\mathcal{M}^i} \Theta$.

b) Si suponemos que $a \neq b$, no es posible que $\mu(\psi) = a$ y $\mu(\psi) = b$. Si este fuera el caso, $\phi_1^a(\psi), \phi_2^a(\psi), \phi_1^b(\psi), \phi_2^b(\psi)$ estarían en $\mathcal{T}$. Pero por (5.14), en el caso de que $a \neq b$ el conjunto $\{\phi_1^a(\psi), \phi_2^a(\psi), \phi_1^b(\psi), \phi_2^b(\psi)\}$ no sería $\mathcal{M}^i$-satisfacible y entonces tendríamos que $\phi_1^a(\psi), \phi_2^a(\psi), \phi_1^b(\psi), \phi_2^b(\psi) \vdash^i_{\mathcal{M}} \theta$, lo cual contradice las hipótesis.

2. ν es una valuación legal[5]:
Sea $\psi = \diamond(\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Supongamos que $\nu(\psi_i) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n$ y $\tilde{\diamond}(a_1, \ldots, a_n) = b$. Entonces para cada i se tiene que $\phi_1^{a_i}(\psi_i) \in \mathcal{T}$ y $\phi_2^{a_i}(\psi_i) \in \mathcal{T}$. Ahora por (5.13), para $j = 1, 2$:
$$\bigcup_{i=1}^{n} \{\phi_1^{a_i}(\psi_i), \phi_2^{a_i}(\psi_i)\} \vdash^i_{\mathcal{M}} \phi_j^b(\psi).$$
Resulta que $\phi_j^b(\psi) \in \mathcal{T}$ para $j = 1, 2$. Por tanto, por la definición de ν, $\nu(\psi) = b$, que es, $\nu(\diamond(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = \tilde{\diamond}(a_1, \ldots, a_n)$, según sea necesario.

3. ν es un modelo de $\mathcal{T}$ que no es un modelo de θ:
Sea $\psi \in \mathcal{T}$. Si $\neg\psi \in \mathcal{T}$ entonces $\phi_1^{\top}(\psi) \in \mathcal{T}$ y $\phi_2^{\top}(\psi) \in \mathcal{T}$, así $\nu(\psi) = \top \in \mathcal{D}$. En el caso contrario si $\neg\psi \notin \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T} \nvdash_{\mathcal{M}^i} \neg\psi$ con lo cual $\mathcal{T}, \neg\psi \vdash_{\mathcal{M}^i} \theta$ y por el teorema de la deducción se tiene $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{M}^i} \neg\psi \supset \theta$ y así $\neg\psi \supset \theta \in \mathcal{T}$. Además se puede verificar que $\psi, \neg\psi \supset \theta, \neg\diamond\psi \supset \theta \vdash^i_{\mathcal{M}} \theta$ lo cual implica que $\neg\diamond\psi \supset \theta \notin \mathcal{T}$ por lo tanto $\neg\diamond\psi \in \mathcal{T}$. Resulta que en este caso $\phi_1^t(\psi) \in \mathcal{T}$ y $\phi_2^t(\psi) \in \mathcal{T}$, así otra vez $\nu(\psi) = t \in \mathcal{D}$.
Claramente, ν no puede ser un modelo de θ, pues si $\nu(\theta) \in \{t, \top\}$, entonces en particular $\phi_1^t(\theta) = \theta$ o $\phi_1^{\top}(\theta) = \theta$. En ambos casos $\theta \in \mathcal{T}$, lo cual es una contradicción a la hipótesis $\mathcal{T} \nvdash_{\mathcal{M}^i} \theta$.

4. ν es una valuación clásica:
Mostraremos que ν está en $\{t, f\}$. Asumamos por contradicción que existe $a \notin \{t, f\}$ y ψ_a tal que $\nu(\psi_a) = a$. Esto implica que para cada b existe una fórmula ψ_b tal que $\nu(\psi_b) = b$ (En efecto, ya que $\nu(\theta) \notin \mathcal{D}$, $\nu(\theta \supset \theta) = t$ y $\nu(\neg(\theta \supset \theta)) = f$, así $\psi_t = \theta \supset \theta$ y $\psi_f = \neg(\theta \supset \theta)$. Para $b \notin \{t, f\}$, ψ_b puede ser tomada como una fórmula de la forma $\diamond^k\psi_a$, donde k es tal que $\tilde{\diamond}^k a = b$). Como φ no es válida en $\mathcal{M}^i$, existe una $\mathcal{M}^i$-valuación μ tal que $\mu(\varphi) \notin \mathcal{D}$. Asumamos que $\mathrm{Atoms}(\varphi) = \{q_1, \ldots, q_k\}$ y que $\mu(q_i) = b_i$ para $i = 1, \ldots, k$.

[5] Una valuación será legal si preservas las interpretaciones.

Sea $\psi = \varphi\{\psi_{b_i/q_i}\}$. Entonces $\nu(\psi) = \mu(\varphi) \notin \mathcal{D}$. Por otro lado, $\psi \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ y como ν es un modelo de $\mathcal{T}$ se tiene que $\nu(\psi) \in \mathcal{D}$, lo cual es una contradicción.

Ahora, como θ es una tautología clásica y ν es una valuación clásica, necesariamente $\nu(\theta) = t$, pero esto contradice el hecho que ν no es un modelo de θ. Esto concluye la prueba del lema 5.4. $\square$

Teorema 5.3. *Bajo las hipótesis mencionadas,* $\mathrm{L}^i_{\mathcal{M}} = \langle \mathcal{L}, \vdash^i_{\mathcal{M}} \rangle$ *es una lógica* $\neg$*-paraconsistente ideal* n*-valuada que no es equivalente a cualquier lógica* k*-valuada con* $k < n$*.*

Demostración. Se sigue de la definición de lógica paraconsistente ideal y de los últimos tres lemas. $\square$

Ejemplo 5.2. Sea la matriz $\mathcal{M}_4 = \langle \{t, f, \top\ \bot\}, \{t, \top\}, \mathcal{O} \rangle$ para el lenguaje que consiste de los siguientes conectivos:

1. Un conectivo implicación $\supset$, definido como:

$$a \tilde{\supset} b = t \text{ si } a \in \{f, \bot\} \text{ y } a \tilde{\supset} b = b \text{ si } a \in \{t, \top\},$$

2. El conectivo negación $\neg$ definido por:

$$\tilde{\neg} t = f,\ \tilde{\neg} f = t,\ \tilde{\neg} \top = \top \text{ y } \tilde{\neg} \bot = \bot.$$

3. El conectivo $\rightharpoondown$, definido por:

$$\tilde{\rightharpoondown} t = t,\ \tilde{\rightharpoondown} f = f,\ \tilde{\rightharpoondown} \top = \bot \text{ y } \tilde{\rightharpoondown} \bot = \top.$$

Se puede verificar que definiendo $\diamond\psi = \neg \rightharpoondown \psi$, la matriz $\mathcal{M}_4$ satisface todas las condiciones necesarias para aplicar el teorema 5.3. Por lo tanto $\mathrm{L}_{\mathcal{M}_4}$ es una lógica tetra-valuada paraconsistente ideal, que no es equivalente a alguna lógica tri-valuada.

Capítulo 6

Conclusiones

La presente tesis tuvo como objetivo definir y caracterizar las lógicas paraconsistentes ideales, recordemos que desde el principio se había mencionado que éstas serían las que conserven tanto principios del razonamiento clásico como sea posible, pero que en situaciones contradictorias no conduzcan a teorías triviales.

Para llegar a este resultado, primero se tuvo que identificar el conjunto de condiciones mínimas que debe satisfacer una lógica para considerarse paraconsistente ideal, se llegó a la conclusión de que además de conservar tanto como sea posible de la lógica clásica también era importante que una lógica paraconsistente ideal tuviera la propiedad de contención en lógica clásica con la finalidad de asegurarse de que lo que fuese válido en las lógicas que se estaban construyendo también fuera válido en lógica clásica.

Después se necesitaba un método de deducción, por lo que se les pidió tener un conectivo implicación que bajo una F-interpretación cumpliera la característica arriba mencionada entonces ésta se comportaría como una implicación propia, es decir, muy parecida a una implicación propia. Es decir muy parecida a la implicación clásica que ya conocemos.

Cumplir las dos condiciones anteriores no era suficiente así que se tuvo que exigir una propiedad más, que su paraconsistencia fuese maximal, es decir, que su paraconsistencia no se perdiera al extenderla.

El resultado de estas tres condiciones fue una lógica paraconsistente ideal, pero aquí no había acabado el trabajo pues buscábamos una metodología para crear estas lógicas o poder identificar a partir de su estructura si es o no ideal.

Se comenzó por analizar a las lógicas trivaluadas paraconsistentes y resultó que estas forman un grupo especial dentro de este tipo de lógicas pues las exigencias son mínimas para poder saber si estamos tratando con una lógica ideal más aún se sabe con exactitud el número de lógicas trivaluadas paraconsistentes ideales.

Por último se checaron resultados para poder generalizar esta caracterización para lógicas con n valores de verdad, con $n > 3$. Aquí lo que se tuvo que hacer es una demostración seccionada en lemas los cuales por separado son resultados interesantes.

Con esto último logramos el objetivo que nos habíamos propuesto desde el principio que era caracterizar a las lógicas paraconsistentes ideales, que fue lo que se hizo en el teorema 5.3.

Bibliografía

[1] J. A. Anderson. *An introduction to neural networks.* Mit Press, 1995.

[2] O. Arieli y A. Avron. *The value of the four values.* Artificial Intelligence, 102(1):97-141, 1998.

[3] O. Arieli, A. Avron y A. Zamansky. *Ideal Paraconsistent Logics.* Studia Logica, 99(1-3): 31-60, 2011.

[4] O. Arieli, A. Avron y A. Zamansky. *Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics.* Studia Logica, 97(1): 31-60, 2011.

[5] O. Arieli, A. Avron y A. Zamansky. *What is an ideal logic for reasoning with inconsistency?* AAAI Press, 706-711, 2011.

[6] A. Avron *Relevant Entailment - Semantics and formal systems.* J. Symb. Log., 49(2): 334-342, 1984.

[7] A. Avron y I. Lev. *Non-deterministic multi-valued structures.* Journal of Logic and Computation, 15:241-261,2005.

[8] D. Batens, C. Mortensen, G. Priest y J. Van Bendegem. *Frontiers of Paraconsistent Logic,* Studies in Logic and Computation, 8, 2000.

[9] N. Belnap. *A useful four-valued logic.* Modern Uses of Multiple-Valued Logics, 7-37, 1977.

[10] J. Y. Béziau, W. Carnielli y D. Gabbay. *Handbook of Paraconsistency.* Logic and Cognitive Systems, 2007.

[11] M. Bremer. *An Introduction to Paraconsistent Logics.* Peter Lang, 2005.

[12] W. Carnielli, J. Marcos y S. de Amo. *Formal inconsistency and evolutionary databases.* Logic and logical philosophy, 8:115-152, 2000.

[13] W. Carnielli, M. Coniglio e I. D'Ottaviano. *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent,* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematicas, 2001.

[14] W. Carnielli, M. Coniglio y J. Marcos. *Logics of formal inconsistency.* Handbook of Philosophical Logic, 14:1-93, 2007.

[15] N. Da Costa. *On the theory of inconsistent formal systems.* Notre Dame Journal of Formal Logic, 15:497-510, 1974.

[16] S. Jaśkowski. *On the discussive conjunction in the propositional calculus for inconsistent deductive systems.* Logic, Language and Philosophy, 7:57-59, 1999.

[17] E. Mendelson *Introduction to Mathematical Logic.* 1997.

[18] G. Priest. *Logic of paradox.* Journal of Philosophical Logic, 8:219-241, 1979.

[19] G. Priest. *Reasoning about truth.* Artificial Intelligence, 39:231-244, 1989.

[20] A. M. Sette. *On propositional calculus* P_1. Mathematica Japonica, 16:173-180,1973.

[21] D. J. Shoesmith y T. J. Smiley. *Deducibility and many-valuedness.* Journal of Symbolic Logic, 36:610-622, 1971.

[22] D. J. Shoesmith y T. J. Smiley. *Multiple Conclusion Logic.* Bulletin of the American Mathematical Society, 2(1): 242-246, 1978.