



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**“VALUACIÓN DE OPCIONES EN EL MODELO DE
VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA DE HESTON: UN NUEVO
MÉTODO ANALÍTICO DE SOLUCIÓN”**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

MARÍA CONCEPCIÓN ROJAS BRENA

DIRECTOR DE TESIS:

PROF. JUAN CARLOS MENDOZA SANTOS

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, SEPTIEMBRE DE 2015

Valuación de opciones en el modelo de volatilidad
estocástica de Heston: un nuevo método analítico de
solución

María Concepción Rojas Brena

Septiembre

Dedicado a mi familia



Agradecimientos

A mi familia, principalmente a mis padres Jacinto y Amanda por brindarme su apoyo incondicional en todo momento. Gracias por aquellos valores que me han inculcado a través de la vida, con los cuales hoy he podido concluir mi meta, por darme la oportunidad de tener una educación de calidad pero sobre todo, gracias por la confianza que han depositado en mi. Mi especial agradecimiento a mi hermana Nallely por su paciencia, generosidad y complicidad, gracias por estar conmigo siempre que te necesito. Agradezco a mis hermanos Uriel y Juan Carlos por ser siempre un ejemplo de inteligencia, valentía, capacidad y superación. Finalmente gracias a mis sobrinos, Jonathan y Johana por ser mi inspiración. Los amo.

A mi asesor de tesis el profesor Juan Carlos Mendoza Santos por su dedicación y apoyo otorgado durante el desarrollo de este trabajo de tesis, por facilitarme siempre los medios suficientes para llevar a cabo las actividades propuestas y por todos los consejos brindados durante el tiempo que trabajamos juntos.

A mis sinodales, M.C. Adolfo Maceda Méndez, DR. Víctor A. Cruz Barrigüete y DR. Guillermo A. Lancho Romero por sus correcciones y sugerencias que han ayudado a que éste sea un mejor trabajo.

A mis amigos y compañeros que conocí durante mi estancia en esta universidad, gracias por compartir tantos momentos increíbles e inolvidables.

Índice general

Introducción	1
1. Introducción al cálculo estocástico	5
1.1. Probabilidad	5
1.2. Procesos estocásticos	11
1.3. Movimiento Browniano	14
1.4. Integral estocástica	17
1.5. Lema de Itô	21
1.6. Ecuaciones diferenciales estocásticas	23
2. Introducción a las matemáticas financieras	27
2.1. Introducción a la teoría de opciones	27
2.1.1. Tipos de opciones	29
2.1.2. Valor de la prima	33
2.1.3. Opciones como cobertura y como inversión	34
2.2. Modelo de Black-Scholes	35
2.2.1. Ecuación de Black-Scholes	35
2.2.2. Solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.	39
2.2.3. Valuación de opciones por la fórmula de Black-Scholes	45
3. Análisis de los modelos de volatilidad estocástica	51
3.1. Volatilidad	51
3.1.1. Volatilidad implícita	52
3.2. Modelos con volatilidad estocástica	53
3.2.1. Modelo de Hull-White	55
3.2.2. Modelo de Stein-Stein	57
3.2.3. Modelo de Heston	58
4. Análisis de los problemas de contorno para valuación de opciones	67
4.1. Introducción a la EDP de segundo orden	67
4.2. Introducción a las ecuaciones con condiciones iniciales y de contorno	68
4.3. Análisis de las condiciones de frontera para el modelo de Heston	70

5. Generalización del método de Harper	75
5.1. Introducción al método modificado Harper	75
5.2. Análisis de la EDP de segundo orden general mediante el método de Harper	87
5.2.1. Ecuaciones del tipo parabólico	91
5.2.2. Ecuaciones del tipo elíptico	93
6. Un nuevo método analítico para la solución del modelo de Heston	99
6.1. Aplicación del método de Harper a la EDP de Black-Scholes	99
6.2. Aplicación del método generalizado de Harper a la EDP de Heston	101
6.2.1. Caso I	103
6.2.2. Caso II	105
7. Soluciones específicas para el modelo de Heston	109
7.1. Caso I	109
7.1.1. Caso a	109
7.1.2. Caso b	111
7.2. Caso II	112
7.2.1. Caso a	112
7.2.2. Caso b	113
Conclusiones	119
Apéndices	121
A. Ecuación de Calor	121
B. Función de Heaviside	123
C. Método de las características	125
D. Método de Charpit	127
Bibliografía	130

Introducción

Las opciones son instrumentos financieros que nos ofrecen la oportunidad de cubrir riesgos o aprovechar cambios en el precio de un activo subyacente. En los últimos años, la teoría de valuación de opciones ha cobrado una gran importancia en el mundo de las finanzas y la inversión.

La valuación de opciones se remonta al año 1900 con la tesis doctoral de Louis Bachelier, “The Théorie Spéculation”, donde propone un modelo matemático que intenta representar conceptos financieros. En este modelo, Bachelier propuso modelar el precio de una acción como un movimiento Browniano. Sin embargo, en ese tiempo nadie le dio importancia, hasta 1960; en ese año, Paul Samuelson descubre la tesis de Bachelier, la cual toma de base para su investigación futura. Samuelson nota que proponer el movimiento Browniano como el comportamiento de el precio de una acción tiene el inconveniente de tomar valores negativos y en lugar de eso propuso el movimiento Browniano geométrico.

Años después y retomando el trabajo de Bachelier y Samuelson, Fischer Black y Myron Scholes publican su artículo “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, en 1973 [2]. En este artículo desarrollaron un modelo para valorar una opción europea sobre una acción. Después de una serie de artículos, Robert Merton formalizó y extendió la metodología de Black-Scholes. En 1997 fue entregado el premio Nobel de economía a Scholes y Merton por sus trabajos en esta materia.

Históricamente, la valuación de opciones ha tenido como herramienta principal la famosa fórmula de Black-Scholes, hasta la caída de la bolsa en 1987 (Lunes negro), donde el modelo de Black-Scholes pasó a ser cuestionado. El hecho de considerar la volatilidad como un parámetro fijo implicaba que el modelo no representaba características críticas de la volatilidad para ayudar a prevenir situaciones críticas como la caída de la bolsa en 1987.

Han surgido distintos modelos de valuación de opciones que abandonan el supuesto de volatilidad constante del modelo de Black-Scholes y que tratan de capturar las características de la volatilidad observada en los mercados financieros. Entre estos se encuentran los modelos de volatilidad estocástica, los cuales proponen que la volatilidad sea guiada por un movimiento Browniano como el precio del activo subyacente.

En 1993, Steven L. Heston en su artículo “A Closed-Form Solution Options with Stochastic Volatility” [7], propone un modelo de volatilidad estocástica para valorar una opción

de compra de una acción, donde supone que la volatilidad sigue un movimiento Browniano correlacionado con el movimiento Browniano para el precio de la acción. Este modelo es una generalización del modelo de Black-Scholes, en el se obtienen funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo como una solución de una ecuación diferencial parcial (EDP) de segundo orden. A través de estas probabilidades se obtiene una fórmula similar a la de Black-Scholes para valorar opciones.

Por otro lado, J. F. Harper (1994) en su artículo “Reducing Parabolic Partial Differential Equations to Canonical Form” [6], bajo la aplicación en tres ecuaciones particulares, explica un método para resolver EDP’s de segundo orden del tipo parabólico. Entre una de estas aplicaciones se encontraba la ecuación de Black-Scholes, donde el modelo de Black-Scholes era asociado a un problema de condiciones iniciales y de contorno.

Actualmente, la valuación de opciones utilizando modelos de volatilidad estocástica están basados en el planteamiento de problemas de condiciones iniciales y de contorno. El problema de contorno asociado al modelo de volatilidad estocástica de Heston ha sido resuelto por métodos como, la transformada de Fourier, la transformada de Laplace, la transformada de Mellin , entre otros.

El objetivo principal de este trabajo de tesis es generalizar el método de Harper para resolver una EDP de segundo orden general de tipo parabólico y elíptico, de tal manera que nos permita aplicar dicho método a la EDP asociada al modelo de Heston.

El trabajo de tesis se presentará en siete capítulos distribuidos de la siguiente manera.

En el capítulo 1 se introducen conceptos matemáticos de probabilidad, cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales estocásticas, necesarios para la comprensión de los modelos que describen el comportamiento de los mercados financieros. Además, se presenta la fórmula fundamental del cálculo estocástico; es decir, el lema de Itô [16, pág. 112].

En el capítulo 2 se da una breve introducción de la teoría en opciones, su clasificación y algunas características necesarias para entender los modelos de valuación de opciones. Posteriormente, se realiza la descripción de modelo de Black-Scholes, realizando la deducción y solución de la EDP asociada a este modelo.

En el capítulo 3 analizamos el concepto de volatilidad, principalmente el concepto de volatilidad implícita y se estudian tres modelos de volatilidad estocástica, modelo de Hull-White, modelo de Stein-Stein y modelo de Heston, y se mencionan las ventajas y desventajas de estos modelos.

En el capítulo 4 se da la forma general de las EDP’s de segundo orden, y su clasificación. Además, se mencionan los tipos de condiciones iniciales y de contorno que existen. Por último, se transformará la EDP asociada al modelo de Heston bajo un cambio de variable para representarla como un problema con condiciones iniciales y de contorno.

En el capítulo 5 se desarrolla el método propuesto por J. F. Harper, el cuál nos permite encontrar nuevas soluciones a las EDP's en términos de una función que es solución de la EDP de calor homogénea. Posteriormente realizaremos una generalización del método de Harper para resolver EDP's de segundo orden general.

El capítulo 6 realizamos la aplicación del método de J. F. Harper a la ecuación de Black-Scholes, después se hace la aplicación del método generalizado de Harper a la ecuación asociada al modelo propuesto por Steven L. Heston, el cuál reduce dicha ecuación a una EDP más sencilla, donde aparecen menos términos.

Finalmente, en el capítulo 7 se presenta una aplicación del método generalizado de Harper al modelo de Steven L. Heston, para unos casos concretos de los parámetros de dicho modelo.

Para terminar este trabajo de tesis se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Introducción al cálculo estocástico

Una de las herramientas más utilizadas por los analistas financieros es el cálculo estocástico, ya que en él descansa prácticamente toda la teoría financiera en tiempo continuo. Observaciones de los precios de activos, tipos de cambio en divisas, y otros sistemas que evolucionan a través del tiempo, frecuentemente son modelados con procesos estocásticos.

Este capítulo lo iniciaremos introduciendo los conceptos básicos correspondientes a la teoría de probabilidad con la finalidad de que más adelante se tenga una mejor comprensión sobre los conceptos relacionados con el cálculo estocástico. Posteriormente, se proporcionarán los conceptos más importantes en la teoría del cálculo estocástico tales como, proceso estocástico, movimiento Browniano, integral de Itô y ecuación diferencial estocástica y se desarrollarán algunas propiedades de los conceptos antes mencionados. Por último, se enunciará uno de los resultados más conocidos en cálculo estocástico, el lema de Itô, el cual será de gran utilidad cuando se estudien los modelos para la valuación de opciones.

1.1. Probabilidad

El concepto básico sobre el que se basa toda la teoría de probabilidad es el concepto de experimento aleatorio.

Definición 1.1. *Un experimento aleatorio es un experimento que cumple con las siguientes tres condiciones*

- a) *Tiene al menos dos posibles resultados.*
- b) *El conjunto de posibles resultados se conoce antes de que el experimento se realice.*
- c) *Puede repetirse bajo las mismas condiciones.*

Ejemplo 1.1. *El lanzamiento de una moneda dos veces.*

Otra definición de gran importancia es el conjunto de todos los posibles resultados.

Definición 1.2. *El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio es llamado **espacio muestral** y se denota por Ω .*

Ejemplo 1.2. *El espacio muestral de el experimento aleatorio del ejemplo 1.1 está dado por:*

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Se denotará por \mathcal{F} a la colección de los subconjuntos del espacio muestral. Nuevos elementos de \mathcal{F} son generados por las operaciones usuales de conjuntos, unión, intersección y complemento. Si \mathcal{F} es cerrado bajo las operaciones finitas de \mathcal{F} , se dice que la colección es una *álgebra* de Ω .

Si Ω es un conjunto finito, toda la información relevante del experimento aleatorio pertenece al álgebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sin embargo, cuando el conjunto es infinito se necesita extender las operaciones a una colección numerable de elementos en \mathcal{F} . Para cubrir ambos casos, se pide que la colección sea cerrada bajo operaciones numerables, a esta nueva colección se le conoce como σ -álgebra [1, pág. 169].

Definición 1.3. *Sea Ω un espacio muestral no vacío y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. La colección \mathcal{F} es llamada una σ -álgebra si cumple las siguientes condiciones*

- a) $\Omega \in \mathcal{F}$.
- b) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
- c) Si (A_n) es una sucesión numerable de conjuntos en \mathcal{F} , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Ejemplo 1.3. *Algunos ejemplos de σ -álgebra de subconjuntos del espacio muestral del ejemplo 1.2 son:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}. \\ \mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \{HH, HT\}, \{TH, TT\}, \Omega\}. \\ \mathcal{F}_2 &= \mathcal{P}(\Omega). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4. *Otro ejemplo de σ -álgebra es el que contiene a todos los intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos de \mathbb{R} es la σ -álgebra de Borel definida como*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a < b\} = \{(-\infty, b], b \in \mathbb{R}\} = \{(-\infty, b), b \in \mathbb{R}\}.$$

A los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les llama conjuntos de Borel, Borelianos o conjuntos de Borel medibles.

A la pareja (Ω, \mathcal{F}) se define como *espacio medible* [14, pág. 23] y a los elementos de \mathcal{F} se les llama *eventos*. El conjunto \emptyset es llamado *evento imposible*, el conjunto $\{\omega\}$ que contiene un sólo resultado posible $\omega \in \Omega$ es conocido como *evento elemental*, y Ω es el *evento seguro*. A la pareja (Ω, \mathcal{F}) se le llama espacio medible debido a que se puede definir una medida de probabilidad para dicho espacio.

Definición 1.4. Una **medida de probabilidad** en un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que satisface las siguientes condiciones

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) Para cada sucesión (A_n) de elementos de \mathcal{F} , disjuntos a pares (es decir, $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$) se cumple que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Ejemplo 1.5. Supongamos que en el lanzamiento de una moneda hay una probabilidad de $\frac{1}{3}$ que salga H y una probabilidad de $\frac{2}{3}$ que salga T , obtenemos las probabilidades de cada uno de los elementos del conjunto ω de el ejemplo 1.2

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(HH) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2, & \mathbb{P}(TH) &= \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right), \\ \mathbb{P}(HT) &= \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right), & \mathbb{P}(TT) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2, \end{aligned}$$

en donde las probabilidades de los subconjuntos de Ω están definidos de la forma

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega).$$

por ejemplo

$$\mathbb{P}(\{HH, HT\}) = \mathbb{P}(HH) + \mathbb{P}(HT) = \frac{3}{9}.$$

La terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es llamada **espacio de probabilidad** y a $\mathbb{P}(A)$ se le llama **probabilidad de A** .

La medida $\mathbb{P}(A)$ cuantifica la creencia acerca de la ocurrencia del evento $A \in \mathcal{F}$. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, se dice que “ A ocurre con probabilidad 1” o “ A ocurre casi seguramente (c.s.)”.

El modelado de fenómenos aleatorios en lugar del espacio de probabilidad, son funciones del espacio de probabilidad sobre otro espacio medible. Estas funciones son llamadas *variables aleatorias*, las cuales van de un espacio de probabilidad al espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ [14, pág. 25].

Definición 1.5. Una **variable aleatoria** (v.a.) X es una función del espacio medible Ω a \mathbb{R} , esto es

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

y que cumple que la imagen inversa de cualquier conjunto de Borel pertenece \mathcal{F} , i.e.,

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}, \text{ para cada } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ejemplo 1.6. Podemos definir una variable aleatoria $X = X(\omega) \in \{0, 1\}$, en donde ω pertenece al espacio muestral generado por el lanzamiento de una moneda, $\Omega = \{H, T\}$ como: $X(H) = 0$ y $X(T) = 1$.

Ejemplo 1.7. El precio de un activo por sí solo representa un número aleatorio.

Toda variable aleatoria tiene asociada una función, llamada *función de distribución*. La descripción de una variable aleatoria requiere analizar su función de distribución.

Definición 1.6. Sea X una v.a., se define a la **función de distribución** de X como una función $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A la función $F(x)$ también se le conoce como *función de distribución acumulada*. Las funciones de distribución contienen toda la información de las variables aleatorias, incluyendo su correspondiente medida de probabilidad [1, pág. 198].

Teorema 1.1. Sea $F(x)$ la función de distribución de una v. a.. Entonces, se tiene que

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- b) Si $x \leq y$, entonces $F(x) \leq F(y)$.
- c) $F(x)$ es continua por la derecha; es decir, $F(x+) = F(x)$.

Las v.a.'s se clasifican en varios tipos, dependiendo de las características de su respectiva función de distribución. Al menos existen tres tipos, discretas, continuas y mixtas (combinación de las dos anteriores) [1, pág. 201].

Definición 1.7. Sea X una v.a. con función de distribución $F(x)$. Entonces, se tiene que

- a) Si $F(x)$ es constante a trozos en un conjunto a lo más numerable de intervalos, entonces se dice que X es una v.a. **discreta**. En este caso, se dice que la función $F(x)$ es una **función de distribución discreta**.
- b) Si $F(x)$ es continua para todo x , entonces se dice que X es una v.a. **continua** y también, en este caso, se dice que la función $F(x)$ es una función de distribución continua

Definición 1.8. Sea X una v.a. discreta con función de distribución $F(x)$. Si x_1, x_2, \dots , son puntos de discontinuidad de $F(x)$, se define la función $f(x)$, llamada **función de probabilidad** de X , como

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-) > 0 & \text{si } x = x_1, x_2, \dots, \\ 0 & \text{si } x \neq x_1, x_2, \dots. \end{cases}$$

Las distribuciones continuas se clasifican a su vez en distribuciones *absolutamente continuas* y distribuciones *singulares* [14, pág. 80].

Definición 1.9. Sea X un v.a. continua con función de distribución $F(x)$. Si existe una función Lebesgue integrable $f(x)$ no negativa, tal que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \text{ para todo } a < b,$$

entonces se dice que la v.a. X es **absolutamente continua**. Y a la función $f(x)$ se le llama **función de densidad** de X .

Algunos ejemplos de funciones discretas de probabilidad son: distribución uniforme discreta, distribución binomial, distribución geométrica. Las distribuciones continuas más comunes son: distribución uniforme continua, distribución exponencial y distribución normal, entre otras.

Consideremos ahora situaciones que involucren más de una v.a. asociada con el mismo experimento aleatorio. Recordemos que se ha considerado como elemento base un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ cuando solo hay una v.a., para este caso, la σ -álgebra de Borel esta dada por

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n\}, \quad a_i < b_i.$$

Definición 1.10. Un **vector aleatorio** n -dimensional $X = (X_1, \dots, X_n)$ es una función medible del espacio muestral Ω a \mathbb{R}^n ; es decir,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tal que,

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \text{ para cada } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Se dice que el vector X es un vector aleatorio discreto si cada una de sus coordenadas es una v.a. discreta, y se dice que es un vector aleatorio continuo si todas sus coordenadas son v.a.'s continuas [16, pág. 14]. Un vector aleatorio X genera un espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P})$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n .

En forma análoga al caso unidimensional, un vector aleatorio puede ser estudiado mediante su función de distribución conjunta.

Definición 1.11. La **función de distribución** (o *distribución multivariada*) del vector aleatorio X es una función $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$F_X(x) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

También como en el caso unidimensional, los vectores tienen asociado una función de probabilidad o de densidad según sea el caso.

Definición 1.12. Sea X un vector aleatorio. Entonces, se cumple que

a) Si X es un vector aleatorio discreto, su **función de probabilidad** es la función $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Si X es un vector aleatorio continuo, con función de distribución F_X , se dice que X es *absolutamente continua* si existe una función no negativa y Lebesgue integrable $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ tal que,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

La distribución normal es una distribución de probabilidad muy importante para este trabajo de tesis.

Definición 1.13. Consideremos X un v.a. continua. Se dice que X tiene **distribución normal** (o *gaussiana*) si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

en donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. En este caso se escribe, $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Se puede demostrar que μ es la *esperanza* y σ la *varianza* de la v.a. X (véase [14, Pág. 85]). En particular, si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, entonces se dice que X tiene una distribución *normal estándar* [1, pág. 272], en este caso la función de densidad se reduce a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

1.2. Procesos estocásticos

El concepto de proceso estocástico es fundamental para el desarrollo de la teoría financiera en tiempo continuo y en ambientes de riesgos (véase [15]). Los procesos estocásticos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables aleatorias en el tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles, etc..

Un proceso estocástico es un objeto matemático que nos ayuda a modelar la evolución de un fenómeno aleatorio a lo largo del tiempo. La aleatoriedad se captura a través de un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . A continuación se presentará la definición formal de un proceso estocástico [16, pág. 23].

Definición 1.14. *Un proceso estocástico X es una colección de variables aleatorias*

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega), \quad (1.1)$$

definida para algún espacio Ω .

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados de acuerdo a la cardinalidad del conjunto T ; si T es finito o infinito numerable diremos que se trata de un proceso estocástico a tiempo discreto, en caso contrario, si T es no numerable entonces será un proceso estocástico en tiempo continuo [16, pág. 23].

Puesto que uno de nuestros objetivos es aplicar esta herramienta matemática en el área de finanzas y ya que toda actividad económica se lleva a cabo en un intervalo de tiempo acotado, a partir de ahora vamos a tomar a T como: $T = [0, T]$, el cual representará un intervalo de tiempo cerrado. Así, nosotros trabajaremos solo con procesos estocásticos en tiempo continuo.

A veces es más conveniente escribir $X(\omega, t)$ en lugar de $X_t(\omega)$, pues esta notación nos permite visualizar a los procesos estocásticos como una función de dos variables

$$(\omega, t) \rightarrow X(\omega, t),$$

con dominio $\Omega \times T$ y codominio \mathbb{R} .

Obsérvenos que si se fija algún tiempo t , el proceso estocástico se convierte en una variable aleatoria, mientras tanto, fijando $\omega \in \Omega$, el proceso estocástico se convierte en una función que depende del tiempo

$$t \rightarrow X_t(\omega), \quad t \in T,$$

a esta función se le conoce como: *trayectoria, realización o ruta muestral del proceso* (X_t) [16, pág. 23].

En los procesos financieros, para poder hacer pronósticos es necesario conocer los precios presentes y pasados de los activos y conforme transcurre el tiempo la información pasada no se olvide. Esta idea se formaliza en el concepto filtración.

Definición 1.15. Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una **filtración** en (Ω, \mathcal{F}) es una colección $(\mathcal{F}_t)_{(t \geq 0)}$ de σ -álgebras de Ω , tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para cualquier $0 \leq s \leq t$.

Una filtración puede ser considerada como una estructura de información dinámica y conforme ésta aumenta, significa que se conoce más y más información, y la pasada no se olvida. Mientras que la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se conoce como *espacio de probabilidad*, a $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ se le llama un *espacio de probabilidad filtrado* [14, pág. 131].

Ejemplo 1.8. Consideremos el experimento aleatorio de tirar una moneda n veces. Donde un elemento del espacio muestral Ω es de la forma $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$, una sucesión finita de H 's y T 's. Podemos definir una filtración como un conjunto de σ -álgebras \mathcal{F}_m , donde cada σ -álgebra \mathcal{F}_m denotará la información que tenemos en los m primeros lanzamientos. Nuestro primer elemento de la filtración es $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \omega\}$.

Ahora, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} A_H &= \text{Los elementos de } \Omega \text{ que empiezan con } H = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = H\}, \\ A_T &= \text{Los elementos de } \Omega \text{ que empiezan con } T = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = T\}, \end{aligned}$$

en base a estos conjuntos contruimos nuestra segunda σ -álgebra, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A_H, A_T, \Omega\}$.

Para poder definir \mathcal{F}_2 tomamos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A_H H &= \text{Los elementos de } \Omega \text{ que empiezan con } HH = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = H, \omega_2 = H\}, \\ A_H T &= \text{Los elementos de } \Omega \text{ que empiezan con } HT = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = H, \omega_2 = T\}, \\ A_T H &= \text{Los elementos de } \Omega \text{ que empiezan con } TH = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = T, \omega_2 = H\}, \\ A_T T &= \text{Los elementos de } \Omega \text{ que empiezan con } TT = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = T, \omega_2 = T\}, \end{aligned}$$

con lo anterior, definimos a \mathcal{F}_3 como $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, A_H, A_T, A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}, A_{HH}^c, A_{HT}^c, A_{TH}^c, A_{TT}^c, A_{HH} \cup A_{HT}, A_{HH} \cup A_{TH}, A_{HH} \cup A_{TT}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{HT} \cup A_{TT}, A_{TH} \cup A_{TT}, \Omega\}$.

En general, \mathcal{F}_m se va a ir construyendo con los conjuntos de Ω_n , los cuales son escritos con los primeros m lanzamientos.

Como a un proceso estocástico a tiempo continuo se le visualiza como un conjunto infinito de variables aleatorias, entonces describir su distribución es complicado; para esto es necesario conocer las distribuciones en dimensión finita.

Definición 1.16. Sea (X_t) un proceso estocástico, $n \in \mathbb{N}$, y una colección finita $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ de tiempos distintos. Las distribuciones

$$\{\mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B), B \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n\},$$

son llamadas **distribuciones en dimensión finita (fidis)** de (X_t) .

Se puede conceptualizar las fidis mucho más fácilmente que la complicada distribución de un proceso estocástico, pues esta tiene infinitas variables aleatorias; además se puede demostrar que las fidis determinan la distribución del proceso estocástico X_t . En este sentido, nos referiremos a la colección de las fidis como la distribución de los procesos estocásticos. El resultado que demuestra la existencia de un proceso asociado a una familia de fidis se le conoce como el *teorema de extensión de Kolmogorov*.

Definición 1.17. Sea (X_t) un proceso estocástico, $n \in \mathbb{N}$, y una colección finita t_1, t_2, \dots, t_n de valores con índice distintos.

- a) Se dice que (X_t) es **estrictamente estacionario**, si las fidis son invariantes bajo cambios de los índices t

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}), \quad (1.2)$$

para todas las posibles elecciones de índices $t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \geq 0$, y h tal que $t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h \in T$; es decir,

$$\mathbb{P}((X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \in A) = \mathbb{P}((X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}) \in A),$$

para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

- b) Un proceso (X_t) es **H -similar** si las fidis de (X_t) satisfacen la siguiente condición

$$(T^H X_{t_1}, T^H X_{t_2}, \dots, T^H X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{Tt_1}, X_{Tt_2}, \dots, X_{Tt_n}), \quad (1.3)$$

para cada $H > 0$; es decir,

$$P((T^H X_{t_1}, T^H X_{t_2}, \dots, T^H X_{t_n}) \in A) = P((X_{Tt_1}, X_{Tt_2}, \dots, X_{Tt_n}) \in A),$$

para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

En el análisis de la teoría estocástica, el concepto de medida permite introducir otros conceptos.

Definición 1.18. Sea (X_t) un proceso estocástico. Entonces se cumple lo siguiente,

- a) Se dice que (X_t) es **medible** si para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ el conjunto $\{(\omega, t) : X_t(\omega) \in B\}$ pertenece a la σ -álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$; es decir, la aplicación

$$(\omega, t) \rightarrow X_t(\omega) : (\Omega \times T, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

es medible.

- b) Si para todo $t \in T$, X_t es una v.a. \mathcal{F}_t -**medible**, entonces se dice que (X_t) es adaptado a la filtración (\mathcal{F}_t) .

Adaptar un proceso estocástico (X_t) significa que X_t no tiene más información que (\mathcal{F}_t) . Es decir, que el valor que tome X_t depende solamente de la información disponible al tiempo t . Como puede observarse, la adaptabilidad es una propiedad muy importante y afortunadamente la mayoría de los procesos estocásticos que se utilizan en finanzas la tienen.

Los procesos estocásticos predecibles en un tiempo continuo son conceptos difíciles de visualizar. La definición exacta involucra σ -álgebras generadas por $\Omega \times \mathbb{R}$. Para nuestro objetivo, es suficiente describir sólo una subclase de procesos predecibles.

Definición 1.19. Un proceso estocástico (X_t) es **predecible** si cumple una de las siguientes características,

- a) Es un proceso adaptado por la izquierda. En particular, los procesos continuos adaptados.
- b) Es un límite (casi seguramente, en probabilidad) que da una sucesión de procesos adaptados continuos por la izquierda.
- c) Es una función Borel medible de un proceso predecible.

Los procesos estocásticos continuos por la izquierda son predecibles, en el sentido de que

$$X_t = \lim_{s \uparrow t} X_s = X_{-s}.$$

1.3. Movimiento Browniano

En 1827 el botánico Robert Brown (1773-1858) observaba bajo el microscopio partículas de polen, con gran sorpresa observó que cuando dichas partículas estaban suspendidas en el agua y en otros líquidos, estas se movían sin cesar y se desplazaban en forma errática, lo que hoy se conoce como movimiento Browniano [15]. Desde entonces ha cautivado la atención de un sin número de importantes científicos en muchas y diversas disciplinas. Sin duda, el movimiento Browniano se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera y económica en tiempo continuo.

Definición 1.20. Un proceso (W_t) es un **movimiento Browniano** de parámetro σ^2 si cumple las siguientes propiedades,

- a) $W_0 = 0$, $\mathbb{P} - c.s.$
- b) *Incrementos independientes*, fijados n instantes $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, los incrementos $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}$, son variables independientes.
- c) *Incrementos normales*, para $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t - s))$.
- d) *Trayectorias continuas*, las trayectorias $t \rightarrow W_t$ son continuas $\mathbb{P} - c.s.$

El movimiento Browniano es un proceso gaussiano, ya que sus componentes son independientes y normales. Si $\sigma^2 = 1$, se dice que (W_t) es un movimiento Browniano estándar; sin embargo cualquier movimiento Browniano no estándar se puede convertir en uno estándar a través de un cambio de variable $\tau = \sigma^2 t$ o al considerar un nuevo proceso definido por $\frac{W_t}{\sigma}$ (véase [3, pág. 151]).

A partir de ahora por movimiento Browniano se entenderá como un movimiento Browniano estándar. Notemos que si en la propiedad c) de la definición anterior se considera $s = 0$, entonces se tiene que $W_t \sim N(0, t)$. Además, esta propiedad nos asegura que los incrementos son estacionarios.

La condición de trayectorias continuas es en el sentido de que dado un proceso Browniano (W_t) , siempre existe una versión continua de (W_t) . Esto se puede deducir de la normalidad de los incrementos y utilizando el teorema de continuidad de Kolmogorov.

Un movimiento Browniano es 0.5-autosimilar. Es decir, para $\tau > 0$ y cualquier elección de $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ se cumple:

$$(\sqrt{\tau}W_{t_1}, \sqrt{\tau}W_{t_2}, \dots, \sqrt{\tau}W_{t_n}) = (W_{\tau t_1}, W_{\tau t_2}, \dots, W_{\tau t_n}). \quad (1.4)$$

Más aún, se cumple la propiedad

$$(\sqrt{\tau}W_{\frac{t}{\tau}}) = (W_t), \quad (1.5)$$

para cualquier $\tau > 0$, a esta propiedad se le conoce como *propiedad de escalamiento*.

El siguiente resultado es un resumen de algunas propiedades del movimiento Browniano.

Teorema 1.2. Sea (W_t) un movimiento Browniano, entonces se cumplen las siguientes propiedades

- a) Tiene una función covarianza $\gamma(t, s) = \text{cov}(W_t, W_s) = \min\{t, s\}$.
- b) La variación cuadrática de las trayectorias sobre $[0, T]$ es T $\mathbb{P} - c.s.$

- c) La variación de las trayectorias sobre $[0, T]$ es finita $\mathbb{P} - c.s.$
 d) Las trayectorias no son diferenciables en t , $\mathbb{P} - c.s.$ para cualquier $t \geq 0$.

A continuación presentaremos algunos ejemplos de procesos Brownianos

Ejemplo 1.9. Puente Browniano.

Sea (W_t) un movimiento Browniano. El proceso (Z_t) definido por

$$Z_t = W_t - tW_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Claramente se tiene que,

$$Z_0 = W_0 - 0W_1 = 0 \quad y \quad Z_1 = W_1 - 1W_1 = 0.$$

Por esta simple razón, el proceso Z_t lleva por nombre puente Browniano o movimiento Browniano sujeto (para más detalle véase [14, pág. 203]).

Ejemplo 1.10. Movimiento Browniano con deriva.

Sea W_t un movimiento Browniano. El proceso (X_t) definido por

$$X_t = \sigma W_t + \mu t, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

se le conoce como movimiento Browniano con deriva μ . La constante σ^2 se le conoce como coeficiente de difusión.

Nótese que para cada $t \in T$, $E[X_t] = \mu t$. Esta función determinista influye esencialmente en las formas de las trayectorias del proceso, de aquí que a este proceso se le conoce como Movimiento Browniano con deriva (véase [16, pág. 41]).

Aún cuando el movimiento Browniano es una base en la construcción de los modelos financieros, este no puede, por sí solo representar el movimiento de todas las variables financieras. Los precios de los activos, por ejemplo, no son descritos apropiadamente por un movimiento Browniano, ni siquiera por un movimiento Browniano con deriva, ya que los precios no pueden ser negativos. Así, en 1973 Black, Scholes y Merton sugirieron otro proceso como modelo para la especulación de precios (véase [15, pág. 39]), el cual es nuestro tercer ejemplo.

Ejemplo 1.11. Movimiento Browniano Geométrico.

Sea W_t un movimiento Browniano. El proceso Y_t definido por

$$Y_t = \exp(\sigma W_t + \mu t), \tag{1.6}$$

se llama movimiento Browniano geométrico.

El movimiento Browniano geométrico se obtiene por una transformación exponencial del movimiento Browniano con deriva. Para un t fijo, la v.a. Y_t tiene una distribución lognormal con media μt y varianza $\sigma^2 t$. Es decir,

$$\ln(Y_t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t).$$

Se puede generalizar el movimiento Browniano geométrico (Y_t) al definir

$$Y_t = Y_0 \exp(X_t), \tag{1.7}$$

donde Y_0 puede ser una variable aleatoria.

1.4. Integral estocástica

Nuestro primer objetivo en esta sección, es darle un sentido a la siguiente expresión,

$$\int_0^T X_t dW_t.$$

Esta integral con respecto a W_t es llamada la **integral estocástica de Itô**, **Integral de Itô** o simplemente la **integral estocástica**.

El concepto de integral estocástica, donde el integrador es un movimiento Browniano y el integrando es un conjunto de funciones aleatorias con determinadas propiedades, fue desarrollado por K. Itô en 1944 en el artículo Stochastic Integral [12]. Aunque, como el mismo Itô lo reconoce, el primero en definir la integral estocástica fue N. Wiener en 1934, pero para integrandos no aleatorios, suaves y con cuadrado integrable. Debido a que Itô fue quien trabajo en el caso más general, por lo regular se le atribuye a él, la teoría de cálculo estocástico.

Durante las últimas seis décadas, la teoría de cálculo estocástico se ha estudiado extensamente y también aplicado a un amplio rango de campos científicos que involucran el estudio de comportamientos irregulares. Una de las aplicaciones más notables es la teoría de Black-Scholes en finanzas, por la cual Merton y Scholes ganaron el premio Nobel en Economía en 1997 [2].

El método que utilizó Itô para definir la integral estocástica es una combinación de las técnicas usadas en la integral de Riemman y la integral de Lebesgue.

Así que comencemos por construir la integral de Riemman (Para una construcción más detallada véase [16, pág. 88]).

Sea $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y una partición $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ del intervalo $[0, t]$, entonces

$$\sum_{j=1}^n f(s_j)(t_j - t_{j-1}),$$

donde $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$ es un punto arbitrario para j , son las sumas de Riemann que aproximan a la integral de f ; es decir, la integral de f se obtiene tomando el límite de esta suma cuando n tiende a infinito.

Para el caso estocástico, las sumas son de la forma

$$\sum_{j=1}^n f(s_j)(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}),$$

donde W_t es un movimiento Browniano y $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

La primera diferencia que existe entre la integral de Riemman y la de Itô consiste en que el valor de la integral de Riemman no depende de la elección de los puntos $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$, en cambio el límite de aproximación para el caso estocástico sí. Otra diferencia entre la integral de Itô y la integral de Riemman es el tipo de convergencia, pues las aproximaciones en la integral de Riemann convergen en \mathbb{R} , mientras que en la integral de Itô se aproxima por sucesiones de v.a.'s en L^2 .

Ejemplos de Integral estocástica son

$$\int_0^T (dW_t)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n W_t - W_{t-1} = T, \text{ en } L^2. \quad (1.8)$$

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_t^2 - T), \text{ en } L^2. \quad (1.9)$$

$$\int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3}(W_t)^3 - \frac{1}{2}(W_t^2 - T), \text{ en } L^2. \quad (1.10)$$

Observación 1.1. El valor de las integrales (1.8), (1.9) y (1.10) se obtuvo cuando el integrando es evaluado en el extremo izquierdo de cada intervalo de la partición de $[0, T]$. En caso de que sea evaluado en el centro o en el extremo derecho del intervalo el valor de la integral es diferente [15].

Extendamos la definición de integral estocástica. Primero, definiremos la integral de Itô para un proceso estocástico simple; es decir, aquellos procesos cuyas trayectorias toman un número finito de valores.

Definición 1.21. Sea $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, una partición finita del intervalo $[0, T]$. Un **proceso estocástico simple** es un proceso (C_t) definido por,

$$C_t = \sum_{i=0}^n Z_i \cdot I_{[t_i - t_{i-1}]}(t), \quad C_T = Z_n,$$

en donde $E[Z_i^2] < \infty$ para todo i , y la sucesión de v.a.'s (Z_i) es adaptado a $\mathcal{F}_{t_{i-1}}^W$; es decir, (Z_i) es una función de (W_s) , $s \leq t_{i-1}$.

Observemos que un proceso estocástico simple es un proceso constante por pedazos, con trayectorias continuas, y con límite por la izquierda. Las condiciones dadas en la definición (1.21) garantizan que (C_t) sea cuadrado integrable para cada t y adaptado a la filtración \mathcal{F}_t .

La integral estocástica para un proceso simple se define de la siguiente manera.

Definición 1.22. La **integral estocástica de un proceso simple** (C_t) en $T \in [0, T]$ con respecto del movimiento Browniano W_t , denotada por $I_T(C)$, esta dadá por

$$I_T(C) = \int_0^T C_t dW_t = \sum_{i=0}^n C_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \sum_{i=0}^n Z_i \Delta_i W. \quad (1.11)$$

Además, si $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, entonces

$$I_t(C) = \int_0^t C_s dW_s = \int_0^t C_s I_{[0,t]}(s) dW_s, \quad (1.12)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} Z_i \Delta_i W + Z_k (W_t - W_{t_{k-1}}), \quad (1.13)$$

donde $\sum_{i=0}^0 Z_i \Delta_i W = 0$.

Definición 1.23. Se define el conjunto ν , como el conjunto de las funciones

$$f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R},$$

tales que f es medible y adaptado a la filtración (\mathcal{F}_t^W) , y además cumplen

$$E \left[\int_0^T f(\omega, t)^2 ds \right] < \infty.$$

donde $E[X]$ representa la esperanza o el valor esperado de X .

La definición de la integral de Itô de una función $f \in \nu$, se dará a través de aproximaciones de esta función con procesos simples.

Teorema 1.3. *Sea $f \in \nu$ arbitraria. Entonces existe una sucesión de procesos simples $(C_t^{(n)})$ tal que*

$$\int_0^t E \left[(f - C_s^{(n)})^2 \right] ds \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

En el procedimiento de aproximación, primero se aproximan funciones acotadas y continuas por procesos simples. Posteriormente, las funciones $f \in \nu$ se aproximan por funciones $f^{(n)} \in \nu$ continuas y acotadas. Por último, una función $f \in \nu$ arbitraria se aproxima por funciones $f^{(n)} \in \nu$ acotadas.

Teorema 1.4 (Integral de Itô). *Sea $f \in \nu$. Entonces, para cada $t \in [0, T]$, la integral de Itô de f está definida por*

$$I_t(f) = \int_0^t f(\omega, s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t C_s^{(n)} dW_s, \quad (1.14)$$

donde $C_t^{(n)}$ es una sucesión de procesos simples tal que

$$\int_0^t E \left[(f - C_s^{(n)})^2 \right] ds \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

La integral de Itô cumple con las siguientes propiedades [16].

Teorema 1.5. *Sea $f, g \in \nu$. Entonces las integrales estocásticas $(I_t(f))$ y $(I_t(g))$ cumplen las siguientes propiedades*

a) *Isometría de Itô*

$$E \left[(I_t(f))^2 \right] = \int_0^t E \left[f(w, s)^2 \right] ds, \quad t \in [0, T].$$

b) *Si $f_n \in \nu$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $E \left[\int_0^t (f - f_n)^2 ds \right] \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces*

$$\int_0^t f dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n dW_s \text{ en } L^2.$$

c) *Media cero*

$$E[I_t(f)] = 0.$$

d) *Linealidad*

$$I_t(cf + g) = cI_t(f) + I_t(g). \quad \text{para todo } c \in \mathbb{R}.$$

e)

$$\int_0^t f dW_s = \int_0^u f dW_s + \int_u^t f dW_s, \quad 0 \leq u < t.$$

1.5. Lema de Itô

Hablando estrictamente, el objetivo del cálculo estocástico es la integral y no la diferencial. Cuando se escribe una ecuación diferencial estocástica, realmente se está pensando en una integral estocástica. Así pues, una ecuación diferencial estocástica es una notación simplificada de una integral estocástica.

Las reglas básicas de diferenciación estocástica están determinadas por la siguiente tabla de multiplicación

$$\begin{array}{c|cc} & dt & dW_t \\ \hline dt & 0 & 0 \\ dW_t & 0 & dt \end{array} .$$

A partir de estas reglas se definen otras reglas más complicadas. Por ejemplo, las reglas de diferenciación estocástica de sumas, productos y cocientes (por ejemplo, véase [15, pág. 80] para otro tipo de diferenciación estocástica).

Muchas veces la integral de Riemann es calculada con ayuda del teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena [18, pág. 26]. Sin embargo, en el contexto estocástico no existe una teoría de diferenciación, sólo una teoría de integración, entonces no es posible utilizar la regla de la cadena.

No obstante, es posible establecer una nueva definición de la regla de la cadena para las integrales estocásticas, conocida como fórmula de Itô, cambio de variable o Lema de Itô, siendo ésta la herramienta fundamental del cálculo estocástico. Para definir la fórmula de Itô se necesita definir una nueva clase de procesos.

Definición 1.24 (Proceso de Itô). *Un proceso de Itô unidimensional es un proceso estocástico (X_t) definido por*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(\omega, s) ds + \int_0^t \sigma(\omega, s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.15)$$

donde $\mu(\omega, s)$ y $\sigma(\omega, s)$ son procesos predecibles, tales que

$$\int_0^t \mu(\omega, s) ds + \int_0^t |\sigma(\omega, s)|^2 ds < \infty, \quad \mathbb{P} - c.s. \text{ para todo } t \geq 0.$$

En el cálculo de variables reales la regla de la cadena es obtenida considerando los términos de primer orden en una expansión en la serie de Taylor, y se consideran solo los términos de primer orden, ya que $(dt)^2$ es una cantidad despreciable y se escribe

$$(dt)^2 = 0.$$

La regla central del cálculo estocástico que hace la distinción con el cálculo de las variables reales, es que el número cuadrado de una cantidad infinitesimal normal es significativa. Específicamente, se tiene que si W_t es un movimiento Browniano estandarizado, entonces

$$(dW_t)^2 = dt.$$

Considere una función $y = f(X_t, t)$. Debido a que $(dW_t)^2 = dt$, es conveniente calcular la diferencial de y considerando los términos de segundo orden en una expansión en la serie de Taylor y así obtener la fórmula de Itô (para una demostración de el lema de Itô, (véase [3, pág. 196]).

Teorema 1.6 (Lema de Itô). *Sea (X_t) un proceso de Itô dado por*

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

y una función $f(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Entonces $Y_t = f(X_t, t)$ es un nuevo proceso de Itô y

$$\begin{aligned} dY_t &= f_{X_t}(X_t, t)dX_t + f_t(X_t, t)dt + 1/2 f_{X_t X_t}(X_t, t) \cdot (dW_t)^2 \\ &= (f_t(X_t, t) + \mu f_{X_t}(X_t, t) + 1/2 \sigma^2 f_{X_t X_t}(X_t, t)) dt + \sigma f_{X_t}(X_t, t)dW_t, \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde $(dX_t)^2 = (dW_t) \cdot (dW_t)$ se calcula de acuerdo a las siguientes reglas

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0 \quad y \quad dW_t \cdot dW_t = dt.$$

El siguiente resultado es un caso particular del teorema anterior.

Teorema 1.7. *Sea (W_t) un movimiento Browniano y $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s)ds, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T. \quad (1.17)$$

Generalizamos el lema de Itô (teorema 1.6) para dos procesos de Itô.

Teorema 1.8. *Sea $f(x, y) \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. (X_t) y (Y_t) dos procesos de Itô dados por*

$$X_t = \mu_X dt + \sigma_X dW_{X_t} \quad Y_t = \mu_Y dt + \sigma_Y dW_{Y_t},$$

con $Cov(dW_{X_t}, dW_{Y_t}) = \rho$. Entonces

$$\begin{aligned} df(X_t, Y_t) &= (f_t(X_t, Y_t) + \mu_X f_{X_t}(X_t, Y_t) + \mu_Y f_{Y_t}(X_t, Y_t) + \frac{1}{2} \sigma_X^2 f_{X_t X_t}(X_t, Y_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma_Y^2 f_{Y_t Y_t}(X_t, Y_t) + \rho \sigma_X \sigma_Y f_{X_t Y_t}(X_t, Y_t)) dt \\ &\quad + \sigma_X f_{X_t}(X_t, Y_t) dW_{X_t} + \sigma_Y f_{Y_t}(X_t, Y_t) dW_{Y_t}. \end{aligned}$$

1.6. Ecuaciones diferenciales estocásticas

El concepto de ecuación diferencial estocástica está muy relacionado con el concepto de la integral estocástica. Este nuevo concepto forma una nueva herramienta para la construcción y análisis de modelos estocásticos.

Consideremos una función $x(t)$ diferenciable, definida para $t \geq 0$ y $g(x(t), t)$ una función que cumple con el siguiente problema de condiciones iniciales.

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t), t), \quad x(0) = x_0.$$

Para todo $0 \leq t \leq T$, entonces $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) $x'(t) - g(t) = 0$, con la condición inicial x_0 .

La ecuación anterior, puede escribirse en términos diferenciales

$$dx(t) = g(x(t), t)dt, \quad x(0) = x_0,$$

o de forma equivalente en una ecuación integral

$$x(t) = x(0) + \int_0^t g(x(s), s)ds.$$

Si en la condición inicial de una EDO se considera una v.a. o si en los coeficientes hay funciones aleatorias, o en una combinación de ambos casos, se dice que es una *ecuación diferencial aleatoria* y se resuelve como una EDO trayectoria por trayectoria [16, pág. 134].

El *proceso de ruido blanco* (ξ_t) se define formalmente como la derivada del movimiento Browniano,

$$\xi_t = \frac{dW_t}{dt} = W'_t.$$

Puesto que W_t no es diferenciable, entonces no existe como una función de t en el sentido usual.

Cuando en una EDO se introducen ruidos aleatorios, tal como el proceso de ruido blanco, entonces a la nueva ecuación se le conoce como ecuación diferencial estocástica (EDE).

Definición 1.25. *Sea (W_t) un movimiento Browniano. Una **ecuación diferencial estocástica** (EDE) dirigida por el movimiento Browniano es una ecuación escrita de la forma*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad (1.18)$$

en donde las funciones $\mu(x, t)$ y $\sigma(x, t)$ se conocen como *coeficiente de deriva* y *coeficiente de difusión*, respectivamente; X_0 es la variable inicial y X_t define al proceso desconocido.

La EDE del proceso desconocido (X_t) frecuentemente es llamada la *dinámica* de (X_t) . El coeficiente de difusión $\sigma(X_t, t)$ funciona como una escala de aleatoriedad generada por el movimiento Browniano.

Se dará por hecho la existencia de un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. También se supondrá que $\mu, \sigma : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas, X_0 es una v.a. continua \mathcal{F}_0 -medible y (W_t) es adaptado a la filtración (\mathcal{F}_t) .

A continuación se mostrará como resolver algunas EDE's clásicas.

Ejemplo 1.12. *Planteamiento de una EDE para el precio de un activo con tasa de interés r .*

Se sabe que un activo sin volatilidad; es decir, un activo que su precio no sufre fluctuaciones (libre de riesgos) a través del tiempo, el crecimiento que representa es exponencial y esta dado por

$$X_t = X_0 \exp(rt),$$

donde X_0 representa el precio actual del activo y X_t será el precio futuro de este activo al tiempo t . Derivando esta ecuación obtenemos

$$\frac{dX_t}{X_t} = r dt,$$

la cual representa el incremento relativo en el precio del activo.

Para obtener un modelo mas realista, se generaliza la EDO, al sumarle una componente estocástica σ , la cual nos representará las alteraciones que el precio del activo puede sufrir.

$$\frac{dX_t}{X_t} = r dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

Luego, el modelo para el precio de un activo con volatilidad está representado por la siguiente EDE

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

donde, nuestro coeficiente de deriva es rX_t y el coeficiente de difusión esta dado por σX_t y X_0 estará representando el precio inicial del activo, σ la volatilidad del activo.

Una vez obtenida la EDE, veamos como resolverla. Consideresé la función definida $f(x) = \ln x$, entonces, $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Si hacemos $Y_t = f(X_t)$, entonces aplicamos el lema de Itô,

$$\begin{aligned} dY_t &= d(\ln(x)) \\ &= \left(\frac{1}{X_t} r X_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X_t^2} \right) (\sigma X_t)^2 \right) dt + \frac{1}{X_t} \sigma X_t dW_t \\ &= \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que nuestro nuevo proceso de Itô está dado por:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s \\ &= Y_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t, \end{aligned}$$

Puesto que $Y_t = \ln(X_t)$, entonces

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t,$$

finalmente, concluimos que

$$X_t = X_0 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t\right],$$

es la solución buscada.

Nota 1.1. La ecuación dada en el ejemplo anterior representa un movimiento Browniano geométrico, este proceso es el modelo tradicional para los precios de las acciones y este supone que sigue una distribución log-normal (para más detalles véase [15, pág. 149]).

Ejemplo 1.13. *Considérese la siguiente EDE*

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

Para resolver esta EDE, consideremos $f(x, t) = x \exp(\mu t)$, luego, $f_x(x, t) = \exp(\mu t)$, $f_{xx}(x, t) = 0$ y $f_t(x, t) = x\mu \exp(\mu t)$, entonces hacemos

$$Y_t = X_t \exp(\mu t),$$

aplicando el lema de Itô, obtenemos que

$$\begin{aligned} dY_t &= X_t \mu \exp(\mu t) dt + \exp(\mu t) dX_t \\ &= -\exp(\mu t) X_t dt + \sigma \exp(\mu t) dW_t + X_t \mu \exp(\mu t) dt \\ &= \sigma \exp(\mu t) dW_t. \end{aligned}$$

Luego,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma \exp(\mu s) dW_s.$$

Por tanto, la solución de la EDE está dada por

$$X_t = \exp(-\mu t) \left(X_0 + \int_0^t \sigma \exp(\mu s) dW_s \right).$$

Capítulo 2

Introducción a las matemáticas financieras

Sin perder de vista sus aplicaciones en los mercados financieros, la teoría en finanzas se ha convertido en una nueva línea de investigación dentro de las matemáticas. Muchos desarrollos teóricos en finanzas han encontrado inmediata aplicación en los derivados financieros. Una de las aplicaciones más importantes es la desarrollada por Black, Scholes y Merton, la cual expone una fórmula para valuación de opciones financieras.

En la primera parte de este capítulo presentaremos una breve introducción a los derivados financieros, con énfasis en la teoría de opciones financieras; es decir, proporcionaremos la definición de opción, sus características, los tipos de opciones que existen y los factores que son necesarios para determinar el precio de estas.

En la segunda parte de este capítulo, se realizará la descripción del modelo de valuación de opciones propuesto por Black y Scholes en 1973, y exponemos la deducción de la EDP, donde la solución a dicha ecuación representa el precio de una opción. En la tercera parte, resolveremos la EDP de Black-Scholes y se obtendrá la famosa fórmula de Black-Scholes.

Finalmente se hará una aplicación de la fórmula de Black-Scholes sobre una acción de la empresa FEMSA, la cuál se cotiza en la Bolsa Mexicana de Valores.

2.1. Introducción a la teoría de opciones

Los mercados financieros han jugado un papel muy importante y trascendental, con gran influencia en la calidad de las decisiones de inversión y por tanto, en economía, estos ofrecen una gama de instrumentos con diversas relaciones de rentabilidad. Históricamente, los mercados financieros estaban formados por dos tipos de instituciones, bolsas (acciones, bonos y otros tipos de títulos) y bancos. Recientemente han surgido los mercados de derivados (derivados financieros).

Los derivados financieros son muy útiles para la administración de riesgos, pueden reducir los costos y mejorar rendimientos. Para entender mejor el funcionamiento de los derivados, veamos primero a que nos referimos cuando decimos riesgo. El riesgo de mercado se puede entender como, el peligro que se corre por cambios adversos en el precio de un activo (divisas, materias primas, bonos, etc.). Se definirá primero la ausencia de riesgo.

Definición 2.1. *Un activo sin riesgo es un activo que tiene un valor futuro predecible.*

¿Existe este tipo de Activos?. La respuesta es sí. Un ejemplo es un bono cupón cero, se puede comprar un bono hoy por 100 pesos, con una tasa de interés del 6 por ciento, hasta un tiempo determinado, cuando se obtendrán 106 pesos de regreso.

Definición 2.2. *Un activo con riesgo es un activo que no está seguro de tener un valor fijo en el futuro.*

El ejemplo básico es una acción. Otro ejemplo de activo con riesgo son las monedas extranjeras (dólares, yenes, etc.) ya que está expuesto a que la tasa de interés baje adversamente o que la moneda se devalúe. Esto significa que puede incrementar o disminuir su valor; es decir, ganancias o pérdidas.

Los derivados financieros, como su nombre lo indica, son instrumentos cuyo valor se deriva de la evolución de precios de otros activos llamados *activos subyacentes* [11]. Los activos subyacentes utilizados pueden ser muy variados: acciones, valores de renta fija, divisas, tipos de interés, materias primas y productos más sofisticados. En términos más prácticos, podemos entender al derivado como un pacto cuyos términos se fijan hoy pero la transacción se hace en una fecha futura establecida [8].

Los derivados pueden subdividirse en contratos adelantados (forwards, futuros), swaps y opciones.

Definición 2.3. *Un contrato adelantado es un acuerdo para comprar (o vender) un activo en una fecha futura específica, T , por un precio específico, K .*

Un contrato adelantado puede ser un forward o un futuro. Un contrato **forward** es un acuerdo entre dos partes que obliga a una de las partes a vender y a la otra a comprar el activo a un precio establecido en una fecha futura. Usualmente este tipo de acuerdo se lleva a cabo entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y alguno de sus clientes corporativos. Los contratos forward son hechos según las necesidades específicas de las dos partes: tipo de subyacente, tamaño del contrato, fecha de vencimiento, lugar y condiciones de entrega. El problema de la valuación del forward es determinar el valor K que debe ser escrito en el contrato [11].

Un **futuro**, al igual que un contrato forward, son acuerdos que obligan a ambas partes a cumplir dicho acuerdo. A diferencia que un forward, los futuros son negociados en un mercado organizado. Este tipo de contratos tiene características establecidas, principalmente en

tamaño y fecha de vencimiento. Los futuros son impersonalizados; es decir, las dos partes involucradas no se conocen. En ambos contratos (forward y futuros), se dice que la parte compradora del contrato toma una posición larga y la vendedora una posición corta.

Por otro lado, un **swap** es un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo en varias fechas futuras en base a una fórmula predeterminada [15]. Un contrato forward puede ser visto como el ejemplo más simple de un swap, en donde el intercambio de flujos en efectivo se realiza en una sola fecha futura, recíprocamente, un swap puede ser visto como una suma finita de forwards.

Una **opción** es un acuerdo entre dos personas para vender o comprar un activo en una fecha futura a un precio establecido. La persona que compra la opción tiene derecho a comprar o vender el activo subyacente, mientras el emisor de la opción tiene la obligación de cumplir el contrato, independientemente si le conviene o no; es decir, cuando llega la fecha de vencimiento el comprador de la opción decide si el trato se lleva a cabo o no [11].

A simple vista, el acuerdo puede ser desventajoso para el que emite la opción, para compensar esto, el que adquiere la opción debe pagar una cantidad llamada *prima* al vendedor, con el pago de la prima el comprador adquiere derechos y ninguna obligación. El principal problema en las opciones es ¿cuál es el pago “justo” por este derecho? o en otras palabras, ¿cuál es el valor de la opción?.

Al momento que se realiza un contrato de una opción se especifican algunas características del activo subyacente y los siguientes datos:

- a) Fecha de vencimiento (fecha de ejercicio): Fecha de expiración del derecho del contenido de la opción.
- b) Precio de ejercicio: Precio acordado al cual va ser comprado (o vendido) el activo.
- c) Prima o precio de la opción: Monto que el tenedor paga al emisor por adquirir el derecho de comprar (o vender).
- d) Derecho que se adquiere: derecho de compra o derecho de venta.

2.1.1. Tipos de opciones

Las opciones pueden ser clasificadas de acuerdo al derecho que otorgan o en función del momento en que pueden ejercerse.

Cuando las opciones son clasificadas dependiendo el tiempo en que pueden ser cobradas, resaltan dos tipos de opciones:

- *Opción europea*: sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento.
 - *Opción americana*: puede ejercerse en cualquier momento, a partir de la fecha en que se realiza el acuerdo hasta la fecha del vencimiento.
-

Existen otro tipo de opciones, las opciones exóticas, estas opciones son más complejas que las opciones europeas y americanas, ya que se pueden ejercer de acuerdo a especificaciones particulares del comprador, así que incorporan bastantes variantes que puede llegar a complicar el cálculo de la valuación de las opciones. Algunos ejemplos de opciones exóticas son:

- *Opción Bermuda*: sólo se ejerce en momentos específicos (determinados previamente), entre la fecha de compra de la opción y la fecha de vencimiento.
- *Opción digitales*: su rentabilidad de esta opción es o bien, una cierta cantidad fija o nada.
- *Opción barrera*: la opción deja de existir o comienza a existir cuando el activo subyacente alcanza un determinado valor.
- *Opción asiática*: son aquellas que su valor depende de la media del valor del activo subyacente en un periodo determinado.

Por otra parte, si se clasifican de acuerdo al derecho que otorgan, existen dos tipos: opción de compra y opción de venta.

Definición 2.4. Una **opción de compra** (*option call*) otorga al propietario el derecho, más no la obligación de comprar un activo a un precio K determinado, en una fecha futura T determinada.

La prima de una opción de compra se denotará por C y el precio del activo en el tiempo de vencimiento T por S_T . De la misma manera que en un forward o futuro, quién compra la opción se dice que toma una posición larga y quién vende toma una posición corta.

Cuando un inversor compra una opción de compra espera que el precio de subyacente suba en los mercados; es decir, tiene expectativas alcistas. Si en la fecha de vencimiento, las sospechas del inversor son ciertas, y el precio del subyacente es mayor al precio de ejercicio fijado en el acuerdo, entonces el inversor ejercerá la opción ya que puede comprar el activo subyacente a un menor precio que en el mercado. Por lo contrario, si el precio del subyacente es menor al precio de ejercicio entonces el inversor no ejercerá la opción, y perderá la inversión, es decir, el precio de la prima [11].

El *beneficio al comprar* una opción de compra puede ser obtenido por la siguiente fórmula

$$b_c = \max\{0, S_T - K\} - C.$$

Por otra parte, el vendedor de la opción recibirá la prima y a cambio de este ingreso, cuando llegue la fecha de vencimiento, tendrá la obligación de vender el activo subyacente al precio de ejercicio, a medida que el precio del subyacente sea mayor en el momento del vencimiento, menos ventajosa será el acuerdo para el vendedor, ya que tiene la obligación de entregar al precio de ejercicio un activo que en ese momento puede tener un precio superior, y debe asumir las pérdidas; si por el contrario el precio del subyacente es menor que el precio

de ejercicio, el que compró la opción no ejercerá su derecho y la ganancia del vendedor será la prima.

El *beneficio de vender* una opción de compra se calcula con la siguiente fórmula

$$b_c^* = C - \max\{0, S_T - K\}.$$

La venta de una opción de compra, supone ganancias limitadas y posibles pérdidas ilimitadas. Y viceversa, la compra supone pérdidas limitadas y posibles ganancias ilimitadas. Véase la figura (2.1)

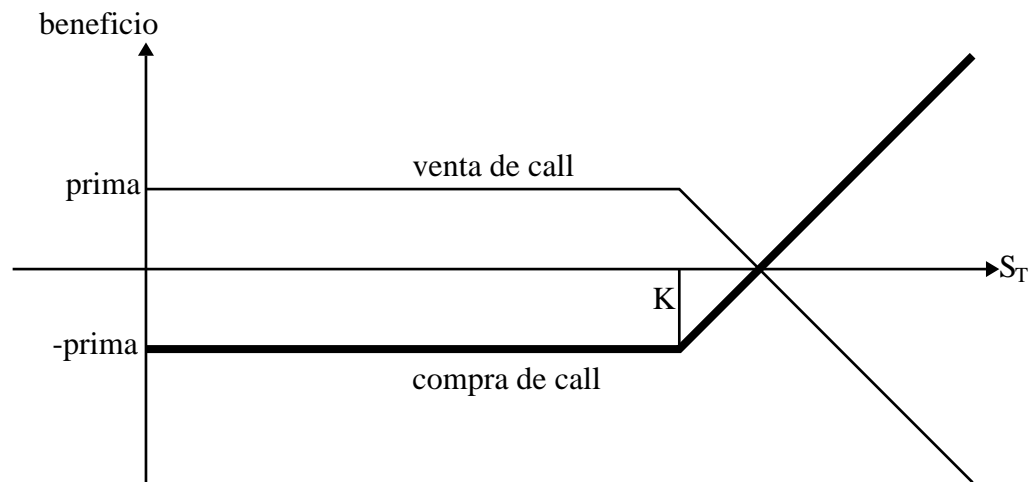


Figura 2.1: Gráfica de beneficio de una opción de compra.

Ejemplo 2.1. *Supongamos que las acciones de una compañía llamada KAO se cotizan en 15 pesos. Existen expectativas alcistas y se espera que en seis meses valgan 16 pesos, entonces se compra una opción de compra para 100 acciones que le da el derecho de comprar a 15.5 pesos cada acción, a una fecha de vencimiento de seis meses. Para esto se debe pagar una prima de 0.5 pesos por cada acción. Supongamos que dentro de seis meses puede pasar cualquiera de las siguientes opciones:*

- a) *La acción cuesta menos que el precio de ejercicio. Supongamos que cuestan 15 pesos, entonces no se ejercerá el derecho, pues no se va a comprar a 15.5 pesos las acciones que en el mercado se pueden comprar a 15 pesos, en este caso se perdería el costo de la prima; es decir, su pérdida es de: $100 \times 0.5 = 50$ pesos.*
- b) *Si en la fecha de vencimiento las acciones de KAO se cotizan en 16 pesos, entonces se ejercería la opción, pero al momento de realizar los cálculos, observamos que se está pagando 0.5 pesos por cada opción, entonces su beneficio sería $(16 - 15.5) \times 100 = 50$ pesos, al cual le quitamos el costo de la prima, de 50 pesos, por tanto, no habrá ni pérdidas, ni ganancias.*

- c) Ahora supongamos que las acciones se cotizan a 16.5 pesos, se ejercerá la opción y se tendrá como beneficio 1 peso por cada opción, entonces en total la ganancia sería $(16.5 - 15.5) \times 100 = 100$ pesos, menos el valor de la opción 50 pesos, la ganancia es: 50 pesos.

El problema en la valuación de opciones es determinar el valor de la prima; es decir, calcular la cantidad justo que se debe pagar al que vende la opción para obtener el derecho de elegir más adelante si el contrato se lleva a cabo o no.

Definición 2.5. Una **opción de venta** (*option put*) otorga al propietario el derecho, más no la obligación de vender un activo a un precio K determinado, en un tiempo T futuro también determinado.

La prima de un contrato de venta se denotará por P . La compra de una opción de venta u opción put se realiza cuando el inversor tiene expectativas bajistas, esto es cuando el inversor piensa que el precio del activo subyacente va a disminuir. Al contrario de una opción de compra, si al momento de la fecha de vencimiento, el precio del activo es menor que el precio de ejercicio entonces al inversor le interesará ejercer la opción. Por otro lado, si el precio del activo es mayor, entonces el inversor no ejerce la opción y pierde la prima.

El beneficio al comprar una opción de venta se obtiene mediante la siguiente fórmula

$$b_p = \max\{0, K - S_T\} - P.$$

El vendedor de la opción de venta, a cambio de la prima recibida en el momento de la formalización del acuerdo, estará obligado a comprar el activo al precio de ejercicio K , en el caso que el comprador ejerce la opción, aunque en el mercado se encuentre más barato.

El vendedor asume más riesgo que el comprador, ya que sus posibilidades de pérdida son ilimitadas y de ganancias limitadas, para el comprador sus posibilidades de ganancias son ilimitadas y sus pérdidas limitadas. Véase la figura (2.2).

El beneficio obtenido al vender una opción de venta se determina mediante la siguiente fórmula:

$$b_p^* = P - \max\{0, K - S_T\}.$$

Ejemplo 2.2. Retomando el ejemplo (2.1), donde las acciones de una compañía llamada KAO se cotizan en 15 pesos. Existen expectativas bajistas, esperan que en seis meses valgan 14.5 pesos, entonces se compra una opción de venta para 100 acciones que le da el derecho de venderlas a 15 pesos, a una fecha de vencimiento de seis meses. Para esto debe pagar una prima de 0.5 pesos por cada acción. Supongamos que dentro de seis meses puede pasar cualquiera de las siguientes opciones:

- a) La acción cuesta menos que el precio de ejercicio. Supongamos que cuestan 14 pesos, entonces se ejercerá el derecho y su ganancia será: $100(15 - 14) - 50 = 50$ pesos.

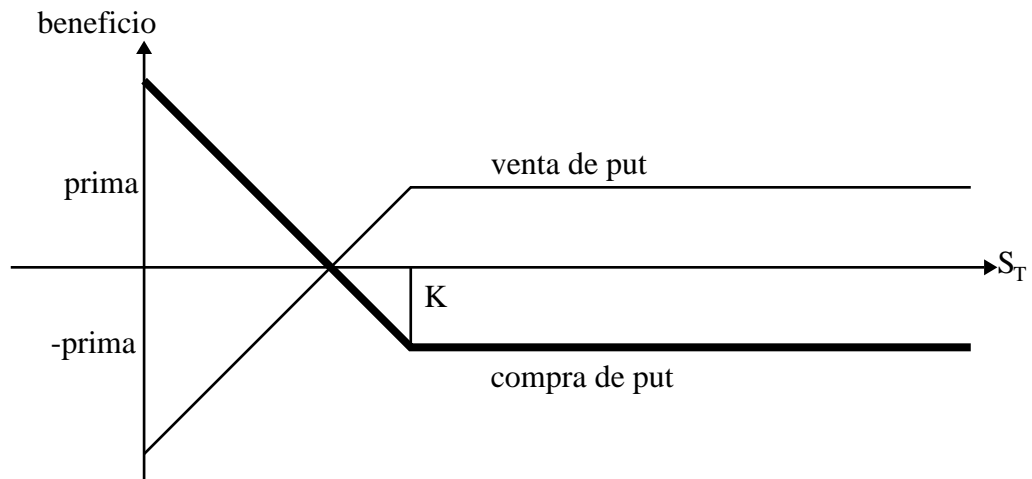


Figura 2.2: Gráfica de beneficio de una opción de venta.

- b) Si en la fecha de vencimiento las acciones de KAO se cotizan en 14.5 pesos, entonces se ejercerá la opción, pero al momento de realizar los cálculos vemos que no tendrá ni pérdidas, ni ganancias.
- c) Ahora supongamos que las acciones se cotizan a 15 pesos, no se ejercerá el derecho y su pérdida será el valor de la prima, 50 pesos.

2.1.2. Valor de la prima

Uno de los principales objetivos en la teoría de opciones es el cálculo de la prima. El precio de la prima de una opción tiene dos componentes, el valor intrínseco y el valor extrínseco (valor temporal):

$$\text{Prima} = \text{valor intrínseco} + \text{valor extrínseco}.$$

El valor intrínseco lo podemos ver como el valor que tendría la opción si se ejerce la opción en la fecha de vencimiento (véase [18, pág. 34]). El precio de una opción de compra está dado por

$$\text{call} = \max\{0, S_T - K\},$$

y para una opción de venta se expresa como

$$\text{put} = \max\{0, K - S_T\},$$

donde S_T es el precio del activo al llegar a la fecha de vencimiento T y K el precio de ejercicio.

La parte extrínseca del valor de la opción es el valor que agrega el vendedor para cubrirse de una alteración en los precios que le pueda ocasionar una pérdida mayor cuando el comprador la ejerza (véase [11, pág. 206]).

De las expresiones para *call* y *put* vemos que un aumento en el precio del subyacente S_T , significa que aumenta el valor intrínseco para las opciones de compra y disminuye para las de venta; es decir, el precio de la prima de una opción es afectada por el precio del subyacente. La prima de una opción está en función de otras cuatro variables:

- a) La *volatilidad* del activo subyacente, es uno de los parámetros que afectan el valor de las opciones, específicamente el valor extrínseco. Cuando mayor es la volatilidad mayor va a ser el costo de la prima, tanto para las opciones de compra, como para las opciones de venta.
- b) El *precio de ejercicio* influye de manera obvia (basta ver como se modifica el valor intrínseco) en el valor de la opción, si el precio de ejercicio sube, entonces disminuye la *call* y aumenta la *put*.
- c) El *tiempo*, cuando más lejano sea la fecha de ejercicio, mayor será el valor del derecho, sin importar que sea opción de compra o de venta. Entre más se aproxima el tiempo a la fecha de ejercicio, menos es el valor de la opción.
- d) El *tipo de interés* (al mismo plazo que el vencimiento de la opción), puesto que los movimientos del tipo de interés afectan el costo de financiación. Una subida de éstos disminuyen el valor actual del precio de ejercicio, por lo que el valor de la prima de una opción de compra aumentará, mientras el valor de una opción de venta disminuirá.

2.1.3. Opciones como cobertura y como inversión

La *cubertura* es una estrategia con la que se intenta reducir el riesgo de el precio de un determinado portafolio; es decir, la posible pérdida producida por movimientos desfavorables de los precios [11]. Para realizar una cobertura debe tomarse una posición contraria a la que se desea cubrir de manera que ambas se compensen mutuamente, manteniendo al conjunto sin cambios a los movimientos de precios del mercado. Básicamente se trata de que la posible pérdida que puede sufrir un portafolio, sea compensada con la ganancia obtenida en los derivados.

Cubrir un portafolio con opciones puede asimilarse a la compra de un seguro. Para eliminar el riesgo de que el portafolio baje, se paga una prima en opciones que proporcionen suficientes ganancias para compensar estas pérdidas. Hay dos posibilidades de cubrir el riesgo, con una opción de venta o con una opción de compra.

Supongamos que tenemos un portafolio de 100 acciones de la empresa KAO y se requiere construir una cobertura en opciones de venta, se comprará una opción de venta cuyo precio de ejercicio este más cercano al precio actual de la acción. La posición resultante es una curva con beneficios ilimitados y pérdidas limitadas (el pago de la prima).

Por otro lado, si deseamos construir una cobertura del mismo portafolio pero esta vez con opciones de compra, entonces se supone la venta de un número equivalente de opciones

de compra al número de acciones que se tiene en el portafolio, con la cual debería vender un contrato por el cual recibirá la prima correspondiente. Esta estrategia limita las pérdidas por bajas en el precio de la acción, además de que puede proporcionar una rentabilidad extra si las acciones se mantienen estables (para más detalles, véase [11, pág. 229]).

Un inversor puede utilizar las opciones para intentar obtener beneficios sobre los movimientos en los precios de los activos en el mercado, cuando existen expectativas de evolución sobre los precios. En general y sin entrar en muchos detalles, algunas estrategias que se pueden llevar a cabo con estos instrumentos, como inversión son:

- a) Si las expectativas sobre un determinado subyacente son alcistas, podría comprarse una opción de compra.
- b) Si las expectativas sobre el subyacente son bajistas, la estrategia sería comprar opciones de venta.
- c) Si se espera que el subyacente apenas fluctúe, la alternativa a seguir podría ser vender opciones e ingresar la prima correspondiente.

2.2. Modelo de Black-Scholes

En 1973, Fisher Black y Myrons Scholes en su artículo “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, bajo el supuesto de equilibrio general, desarrollaron un modelo para valorar una opción europea de compra sobre una acción que no paga dividendos, cuyo precio es conducido como *movimiento Browniano geométrico* [2]. Es importante también destacar el trabajo de Robert Merton, quien formalizó y extendió la metodología de Black y Scholes en una serie de artículos. Estas contribuciones establecieron los fundamentos de lo que hoy se conoce como matemáticas financieras modernas, por esta razón, Myrons Scholes y Robert Merton recibieron el premio Nobel de economía en 1997, desafortunadamente para ese entonces Fisher Black ya había fallecido [15].

2.2.1. Ecuación de Black-Scholes

En esta sección exponemos una derivación intuitiva de la ecuación en derivadas parciales estocásticas conocida como el *modelo de Black-Scholes*. Deduciremos la EDP de Black-Scholes cuando el precio del activo subyacente, una acción, es guiado por un movimiento Browniano geométrico. Dicha EDP es de segundo orden del tipo parabólico y su solución determina el precio de una opción europea de compra cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento. Esta ecuación es muy popular y representa la base para valorar muchos y muy diversos productos derivados, ya que para diferentes condiciones de frontera sus soluciones representan los precios de los distintos derivados financieros que se encuentran disponibles en el mercado.

Los supuestos básicos del modelo de Black- Scholes son [18]:

- a) El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
- b) El precio del activo subyacente es guiado por un movimiento Browniano geométrico; es decir, el precio es log-normal y los rendimientos son normales.
- c) La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo.
- d) Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas; podemos vender el activo subyacentes aunque aun no lo tengamos.
- e) El mercado del subyacente es líquido y divisible; es decir, podemos vender o comprar el subyacente en cualquier fracción de unidad.
- f) No hay costos de transacción, esto es, que no existen comisiones e impuestos.
- g) El mercado opera en forma continua (no hay fines de semana, ni días festivos).
- h) Los mercados están en equilibrio; es decir, no existen oportunidades de arbitraje. En otras palabras, todos portafolios construidos libres de riesgo nos deben dar el mismo rendimiento.
- i) Existe un mercado de crédito, un sistema bancario en el que los agentes podemos prestar o pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento.

Ahora, para obtener la ecuación de Black-Scholes consideramos un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, t]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^W, \mathbb{P})$. Se supone que el cambio en el precio del activo subyacente S_t al tiempo t , es determinado por el movimiento Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (2.1)$$

En este caso, $\mu \in \mathbb{R}$, representa el rendimiento medio esperado y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. El proceso dW_t modela las fluctuaciones propias del mercado del subyacente y como bien se sabe, por definición de movimiento Browniano, satisface, $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$, $E[dW_t] = 0$ y $var[dW_t] = E[(dW_t)^2] = dt$. En el ejemplo 1.4, obtuvimos que la solución de (2.1) es

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \right].$$

Observemos que el proceso $(S_t)_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Es importante recordar que (2.1) es una expresión simplificada de la siguiente expresión

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u, \quad t \in [0, T].$$

El valor o precio de una opción europea de compra esta claramente en función de los distintos parámetros que intervienen en los términos o cláusulas del contrato, tales como, el precio de ejercicio K , la vida del contrato $T - t$, donde T es la fecha de vencimiento y t es la fecha de inicio del contrato. Por supuesto, el valor también dependerá de las propiedades del activo subyacente, tales como, su precio S_t , el rendimiento esperado μ , volatilidad σ , así como la tasa de interés r que prevalece en el mercado de crédito. Por lo anterior, se puede escribir el valor de una opción como

$$c = c(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r).$$

Observemos que S_t y t son las variables más importantes del contrato. Por esta razón, en lo que sigue, no se hará mención explícita de los parámetros, T, K, r, σ y μ , excepto cuando sea necesario. Es decir, que el valor de la opción se denotará simplemente como $c = c(S_t, t)$.

Durante el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$, el precio del activo subyacente cambia de S_t a $S_t + dS_t$, en consecuencia, el precio de la opción cambia de c a $c + dc$. El cambio marginal en el precio de la opción se obtiene mediante el lema de Itô, como

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} dW_t. \quad (2.2)$$

Por otra parte, consideremos un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el activo subyacente de precio $c(S_t, t)$. Si Π_t representa el valor actual del portafolio, entonces

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t). \quad (2.3)$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante dt , debido a fluctuaciones propias del mercado está dado por

$$d\Pi_t = \omega_1 dS_t + \omega_2 dc. \quad (2.4)$$

Después de sustituir (2.1) y (2.2) en (2.4), se obtiene la siguiente expresión para el cambio de valor en el portafolio

$$d\Pi_t = \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) contiene dos tipos de términos. Los términos de tendencia multiplicados por dt y el término aleatorio, multiplicado por dW_t . Este último modela el riesgo de mercado del portafolio, el cual se puede eliminar si se eligen, adecuadamente a las cantidades ω_1 y ω_2 en la construcción del portafolio (véase [15, pág. 43]).

Con el fin de eliminar el riesgo de mercado del portafolio se debe elegir ω_1 y ω_2 de tal manera que se anule el término estocástico de la ecuación (2.5); es decir, supongamos que se cumple la siguiente ecuación

$$\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} = 0.$$

Claramente, existen infinitas posibilidades para lograr tal objetivo. Si por ejemplo, se toman $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\frac{\partial c}{\partial S_t} := -\Delta$, se tiene que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \quad (2.6)$$

Es usual referirse a esta elección particular como *cobertura Delta* [15, pág. 43]. Esta estrategia de cobertura es dinámica, ya que durante el periodo $[t, t + dt]$, la cantidad $\frac{\partial c}{\partial S_t}$ cambia con S_t y t . La cobertura Delta es aplicable sólo durante el instante dt , de otra manera, al transcurrir el tiempo, la cobertura se deteriora paulatinamente perdiendo su efectividad.

Si se emplea esta cobertura en (2.3), se obtiene

$$\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t,$$

lo cual significa que se está cubriendo una venta en corto de Δ unidades del activo subyacente con una opción de compra.

También se supone que existe un mercado de crédito libre de riesgo de incumplimiento; es decir, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa constante compuesta continuamente r , a todos los plazos, y en consecuencia, libre de riesgo de incumplimiento. Por ejemplo, si un agente deposita B_0 pesos, entonces el saldo en la cuanta bancaria al tiempo t , está dado por

$$B_t = B_0 e^{rt}.$$

De esta manera, el rendimiento en su cuenta es de

$$dB_t = rB_t dt,$$

junto con la condición inicial B_0 .

Bajo la elección $\omega_1 = -\Delta$ y $\omega_2 = 1$, el valor del portafolio resultante es, $\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t$. Si esta cantidad se deposita en un banco que paga una tasa de interés r , entonces el cambio en el valor del portafolio, durante dt es

$$d\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\Delta)} r dt = (c - \Delta S_t) r dt, \quad (2.7)$$

en este caso, dt es el tiempo en el que se aplica r .

Otra característica en el modelo de Black-Scholes es que, “no existen oportunidades de arbitrajes” (para una mejor comprensión de como se utiliza este supuesto véase [8, pág. 13]). Por lo tanto, bajo este supuesto de equilibrio general en los mercados, se tiene

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = d\Pi_t^{(r)}. \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.6) y (2.7) en (2.8), obtenemos

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt = \left(-\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c \right) r dt.$$

O de forma equivalente, esta ecuación se escribe como

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + S_t r \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc = 0, \quad (2.9)$$

la cual es conocida como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Las condiciones de frontera y final para determinar una única solución están dadas, respectivamente, por

$$c(0, t) = 0 \quad y \quad c(S_t, t) = \max(S_t - K, 0). \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) es una EDP lineal del tipo parabólico. La linealidad significa que si tiene dos soluciones, entonces la suma de ellas también es una solución. En otras palabras, si todos los activos de un portafolio satisfacen la ecuación (2.9), entonces el portafolio también lo satisface.

Por último, el hecho de que la EDP sea parabólica, significa que se puede relacionar con la ecuación de calor [15, pág. 105].

2.2.2. Solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

En esta sección se transformará la EDP de Black-Scholes (2.9) en la ecuación de difusión de calor mediante unos cambios sucesivos de variables. La ecuación de calor tiene soluciones analíticas explícitas que son sencillas de tratar. Estas soluciones describen como se propaga el calor de una varilla de longitud infinita al transcurrir el tiempo, después de que se ha calentado en un tiempo inicial. Una vez que se obtiene la solución de la ecuación de calor, se invierten los cambios de variable, con el fin de determinar el precio de una opción de compra.

Es conveniente para el desarrollo de esta sección tener en mente la EDP de Black-Scholes, la ecuación del precio de una opción de compra (2.9), $c(S_t, t)$, esta dada por

$$\frac{\partial c(S_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c(S_t, t)}{\partial S_t^2} + S_t r \frac{\partial c(S_t, t)}{\partial S_t} - rc(S_t, t) = 0,$$

junto con las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} c(0, t) &= 0, & c(S_t, t) &\approx S_t, & \text{cuando } S_t &\rightarrow \infty \\ c(S_t, T) &= \max(S_t - K, 0)', \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera son muy intuitivas. En efecto, si todo el mundo tuviera acceso al subyacente en cualquier fecha y sin costo alguno, entonces el costo para comprarlo en el futuro sería gratuito. Por otro lado, si el precio del activo subyacente es muy costoso, la opción de comprarla en el futuro también es muy costosa (para más detalle véase [18, pág. 46]).

Como se menciono al principio de esta sección, para transformar la EDP de Black-Scholes en la ecuación de difusión de calor se requiere de varios cambios de variables. Considere primero los siguientes cambios de variables y la definición de un parámetro adimensional

$$S_t = Ke^{x_t}, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{y} \quad k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \quad (2.11)$$

Las nuevas variables, x_t y τ , representan, el rendimiento del activo ajustado por el precio de ejercicio, suponiendo que $S_0 = 1$ y el tiempo invertido, desde la fecha de ejercicio hacia atrás, salvo el factor constante $\frac{1}{2}\sigma^2$. El precio de la opción mediante estos cambios se denotará como

$$c(S_t, t) = K\nu(x_t, \tau). \quad (2.12)$$

Podemos ver que el valor intrínseco de la opción de compra satisface (2.10), la cual se escribe como

$$\begin{aligned} c(S_t, T) &= K \max(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= K \nu(x_t, 0), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde

$$\nu(x_t, 0) = \max(e^{x_t} - 1, 0). \quad (2.14)$$

Ahora, se calculan las derivadas de $c(S_t, t)$ con respecto de t y S_t , en términos de las derivadas parciales de ν con respecto a τ y x_t , utilizando el cambio de variable propuesto en (2.11). Despejando x_t y τ en (2.11) obtenemos

$$x_t = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \quad \text{y} \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t).$$

Así, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(S_t, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} K\nu(x_t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} K\nu\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right) \\ &= -\frac{1}{2}K\sigma^2 \frac{\partial \nu}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La derivada parcial de $c(S_t, t)$ con respecto a S_t esta dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(S_t, t)}{\partial S_t} &= \frac{\partial}{\partial S_t} K\nu(x_t, \tau) \\ &= \frac{\partial}{\partial S_t} K\nu\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right) \\ &= \frac{K}{S_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \\ &= e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por último, la segunda derivada parcial de $c(S_t, t)$ con respecto de S_t está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c(S_t, t)}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \\ &= \frac{1}{K e^{x_t}} \left(e^{-x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \\ &= \frac{1}{K} \left(e^{-2x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17) en la EDP de Black-Scholes (2.9), se obtiene

$$-\frac{1}{2} K \sigma^2 \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{1}{2} K e^{2x_t} \sigma^2 \left(e^{-2x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) + r K e^{x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} e^{-x_t} - r K \nu = 0,$$

Usando (2.11), esta última ecuación se escribe como

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + (k-1) \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + k \nu = 0. \quad (2.18)$$

Ahora, hacemos un segundo cambio de variable, para simplificar aun más la ecuación (2.18). Para esto definimos la nueva función $\nu(x_t, \tau)$, como

$$\nu(x_t, \tau) = e^{\alpha x_t + \beta \tau} u(x_t, \tau). \quad (2.19)$$

Las derivadas parciales de ν con respecto a x_t y τ son

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u \right), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_t} = e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u \right). \quad (2.21)$$

Derivando parcialmente una vez más con respecto a x_t , se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \\ &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha^2 u \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.20), (2.21) y (2.22) en (2.18), obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u - \alpha^2 u - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} - (k-1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u \right) + k u = 0.$$

Esta ecuación se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u[\beta - \alpha^2 - (k-1)\alpha + k] = \frac{\partial u}{\partial x_t} (2\alpha + k - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}. \quad (2.23)$$

Ahora, elegimos las constantes α y β , de tal manera que cumplan con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\alpha + k - 1 &= 0, \\ \beta - \alpha^2 - (k-1)\alpha + k &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema esta dada por

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad (2.24)$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2. \quad (2.25)$$

Después de sustituir (2.24) y (2.25) en (2.23), se obtiene la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}, \quad -\infty < x_t < +\infty, \quad \tau > 0, \quad (2.26)$$

junto con la condición

$$u(x_t, 0) = u_0(x_t) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t}, 0\right). \quad (2.27)$$

Pero de la ecuación (2.14) se sigue que

$$\nu(x_t, \tau) = e^{\alpha x_t + \beta \tau} u(x_t, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} u(x_t, \tau).$$

Así, haciendo $\tau = 0$, en esta última ecuación, obtenemos que

$$\nu(x_t, 0) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t} u(x_t, 0),$$

luego, la ecuación (2.27) se escribe como

$$\begin{aligned} u(x_t, 0) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t} \nu(x_t, 0) \\ &= \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t}, 0\right). \end{aligned}$$

La solución de la ecuación de calor (2.26), junto con la condición (2.27) [véase Apéndice A], está dada por

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{s-x_t}{4\tau}} ds. \quad (2.28)$$

Ahora, consideremos el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{s - x_t}{\sqrt{2\tau}}.$$

En este caso, se cumple que

$$ds = \sqrt{2\tau} dy.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{s-x_t}{\sqrt{2\tau}}^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_t + \sqrt{2\tau}y) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Por otro lado, de (2.27) se tiene que

$$u_0(s) = \max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}, 0\},$$

entonces, usando esta última ecuación se tenemos

$$\begin{aligned} u(x_t, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \{e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}\} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \Psi(k+1) - \Psi(k-1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

En la segunda igualdad se ha utilizado el hecho de que

$$e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} > 0,$$

implica que

$$y > -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}.$$

Las cantidades $\Psi(k+1)$ y $\Psi(k-1)$, se calcularán en forma separada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi(k+1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t} e^{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t} e^{-\frac{1}{2}[y^2 - (k+1)\sqrt{2\tau}y]} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}[y^2 - (k+1)\sqrt{2\tau}y + \frac{1}{2}(k+1)^2\tau]} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}[y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Consideremos el siguiente cambio de variable

$$\epsilon = y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau},$$

en este caso

$$d\epsilon = dy.$$

Si tomamos a

$$y = \frac{-x_t}{\sqrt{2\tau}},$$

entonces,

$$\epsilon = -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2} = -\frac{x_t + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}.$$

Sustituimos ϵ en la integral (2.29), luego se sigue que

$$\begin{aligned} \Psi(k+1) &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{\{\epsilon > -\frac{x_t + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{\{-\infty < \epsilon < \frac{x_t + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{x_t + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}, \quad (2.31)$$

y

$$\Phi(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon, \quad (2.32)$$

es la función acumulada de una variable normal estándar. El cálculo de $\Psi(k-1)$ es análogo al cálculo de $\Psi(k+1)$, sólo que en lugar del argumento $k+1$ en su lugar se sustituye $k-1$. Es decir,

$$\begin{aligned} \Psi(k-1) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \int_{\{-\infty < \epsilon < \frac{x_t + (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2), \end{aligned}$$

donde

$$d_2 = \frac{x_t + (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}, \quad (2.33)$$

y

$$\Phi(d_2) = \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon. \quad (2.34)$$

Dado que $x_t = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)$, $\tau = \frac{1}{2}(T-t)$, $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$, a partir de (2.31) y (2.33), se tiene que

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Por último, dado que

$$c = K\nu(x_t, \tau),$$

con

$$\begin{aligned}\nu(x_t, \tau) &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x_t, \tau) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} (\Psi(k+1) - \Psi(k-1)),\end{aligned}$$

entonces, la solución de la ecuación de Black-Scholes resulta estar dada por

$$\begin{aligned}c &= K \left(e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} (\Psi(k+1) - \Psi(k-1)) \right. \\ &= K \left(e^{-\frac{1}{2}(k-1)x_t - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x_t + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2) \right) \right. \\ &= K (e^{x_t} \Phi(d_1) - e^{k\tau} \Phi(d_2)) \\ &= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2).\end{aligned}\tag{2.35}$$

2.2.3. Valuación de opciones por la fórmula de Black-Scholes

El objetivo de esta sección es presentar una aplicación de la fórmula de Black-Scholes (2.35) en datos reales, tomando el precio de alguna acción, con datos recopilados en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

Para hacer la aplicación de la fórmula de Black-Scholes en una situación real, se obtuvieron los precios de la acción y los valores de los CETES a 28 días, durante el periodo del 1 enero al 31 de diciembre del 2013. Esta recopilación nos permitió establecer los parámetros σ , r y S_0 , (K y T se pueden establecer de manera libre), y así poder calcular el precio de una opción.

Para este trabajo, el activo subyacente que se eligió fue la acción de FEMSA, que se cotiza en la BMV. En la recopilación de datos, se obtuvieron un total de 261 observaciones del precio de cierre de la acción estudiada. Estos datos que se obtuvieron son de los días hábiles de la BMV. En la tabla (2.1) se presentan los datos obtenidos del 1 de enero al 31 de diciembre del 2013. De igual forma se representa su gráfica correspondiente, donde el eje horizontal son los días hábiles consecutivos y el eje vertical el valor de la acción correspondiente a cada día.

Ahora, se construirá la opción de compra europea que dependerá del precio de la acción de FEMSA. Para esta construcción se tienen que determinar los valores de los parámetros de los que depende la fórmula de Black-Scholes (2.35).

Precios de las acciones de Femsa Enero-Diciembre 2013												
Días	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1	188.22	198.04	210.54	196.77	194.36		182.17	183.44		169.46	157.50	
2	191.36			204.63	197.45		181.67	184.85	164.57	167.91		156.15
3	190.86			203.51	199.91	183.12	185.08		162.47	165.30		154.42
4	191.15	198.04	205.76	204.58		183.06	184.26		162.31	164.59	157.15	153.45
5		198.58	199.72	202.52		178.78	179.62	187.62	165.68		152.04	154.01
6		197.79	202.15		193.60	182.45		184.88	167.79		151.57	152.76
7	189.20	196.08	200.76		195.48	182.67		185.24		162.77	150.08	
8	188.68	196.86	201.82	203.48	191.98		180.09	185.22		161.77	148.10	
9	191.24			206.52	191.53		178.25	184.65	168.01	160.30		154.60
10	190.34			210.61	191.50	185.64	176.63		169.97	162.07		156.07
11	193.45	194.59	197.33	207.51		183.71	180.04		173.40	164.22	147.37	158.03
12		194.59	198.69	207.56		181.56	179.82	182.80	172.52		150.57	158.03
13		196.44	200.44		192.00	182.66		179.94	172.79		149.27	154.03
14	193.87	198.38	198.82		193.93	181.65		180.98		163.38	148.52	
15	194.02	199.13	195.63	207.60	197.75		176.13	179.87		160.95	150.58	
16	195.19			210.82	192.59		173.50	179.11	172.79	158.84		155.22
17	194.26			211.25	192.81	182.13	174.40		172.93	157.49		154.07
18	196.68	198.70	195.63	213.05		180.75	174.43		175.79	156.38	150.58	156.17
19		199.67	195.54	214.92		180.52	170.80	183.59	177.16		146.90	156.96
20		203.14	196.09		191.04	177.59		179.80	173.76		149.89	157.22
21	196.70	204.29	194.50		187.58	169.42		178.76		157.46	147.30	
22	196.56	203.84	191.25	215.33	185.90		170.13	174.67		163.40	146.23	
23	196.72			216.12	190.19		177.27	173.76	172.32	160.27		159.00
24	195.47			200.77	187.57	170.44	176.70		171.75	157.05		158.66
25	196.43	204.02	191.47	193.72		168.84	180.02		172.42	156.42	146.97	158.66
26		205.32	196.70	195.57		172.80	182.35	172.35	172.18		148.60	157.77
27		207.35	196.73		187.12	174.50		170.53	168.61		153.40	158.28
28	199.70	212.36	196.73		189.95	180.82		166.25		156.70	155.97	
29	201.84		196.73	194.47	184.41		177.34	164.14		155.81	159.84	
30	199.34			194.36	186.29		176.00	157.74	163.45	159.64		159.45
31	197.92				185.13		178.79			159.02		157.92

Cuadro 2.1: Tabla de los precios de las acciones de la empresa FEMSA.

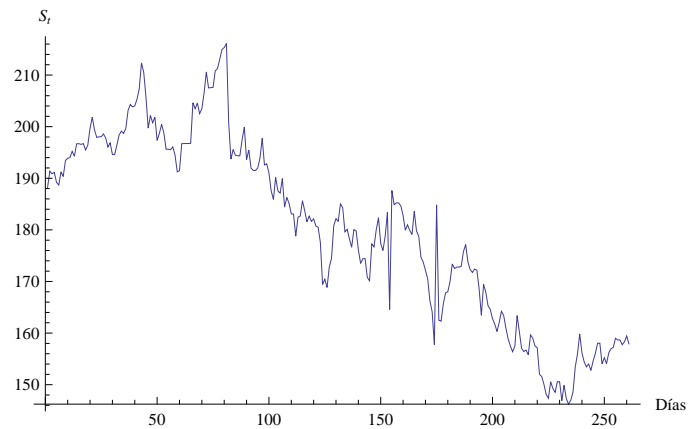


Figura 2.3: Gráfica de los precios de las acciones de la empresa FEMSA.

- a) S_0 : El precio de la acción al tiempo 0 (tiempo inicial), se tomará como el promedio aritmético de los precios de las acciones de Femsa que se obtuvieron durante el tiempo de observación. En este caso, $S_0 = 180.42333333$ pesos.
- b) r : La tasa de interés libre de riesgo, se tomará como el promedio aritmético de la tasa de interés de los CETES a 28 días en el periodo observado. En este caso, $r = 3.75461538$.
- c) σ : La volatilidad del activo subyacente, se tomará como la desviación estándar de la utilidad logarítmica; es decir, la desviación estándar de $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$, con $t = 0, 1, 2, \dots, 250$, $\sigma = 0.10029559$ pesos.
- d) T : Fecha de vencimiento de la opción, es un parámetro libre, se tomará a un año, $T = 1$ año.
- e) K : El precio de ejercicio, al igual que el tiempo, es un parámetro libre (o casi libre) y se tomará $K = S_0 \pm 3$ pesos. Para diferentes ejemplos.

Nota 2.1. El precio de las acciones sigue una distribución log-normal, puesto que así se puede descartar que tome valores negativos. Por esta razón se considera la utilidad logarítmica para obtener la volatilidad.

Ejemplo 2.3. *Suponga que se quiere realizar un contrato de opción de compra tipo europea, con los siguientes datos*

- a) $S_0 = 180.423333$ pesos.
- b) $K = 183.423333$ pesos.
- c) $t = 1$ año.
- d) $r = 0.037546$.

e) $\sigma = 0.100295$ pesos.

¿Cuál es el valor de esta opción?

Para responder a esta pregunta, se utilizará la fórmula de Black-Scholes obtenida en la sección anterior. De (2.31) y (2.33), tenemos

$$d_1 = \frac{x_t + (k + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} = 0.260080,$$

y

$$d_2 = \frac{x_t + (k - 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} = 0.159784.$$

Evaluamos d_1 y d_2 en (2.32) y (2.34) respectivamente, se sigue que

$$\Phi(0.26008041) = \int_{-\infty}^{0.26008041} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 0.602599,$$

y

$$\Phi(0.15978482) = \int_{-\infty}^{0.15978482} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 0.563475.$$

Ahora, sustituimos los valores anteriores en la fórmula de Black-Scholes (2.35), obtenemos

$$\begin{aligned} c &= S_0\Phi(d_1) - Ke^{-r(T)}\Phi(d_2) \\ &= 180.423333(0.602599) - (183.423333)(0.963149)(0.563475) \\ &= 9.177174 \text{ pesos.} \end{aligned}$$

En otras palabras, con el precio del activo subyacente a 180.423333 pesos, con un precio de ejercicio establecido como 183.423333 pesos, con una fecha de vencimiento de 1 año, el comprador de la opción deberá pagar 9.177174 pesos como prima, para realizar dicho contrato.

Ejemplo 2.4. Ahora, supongamos que el precio de ejercicio es $K = 177.423333$ pesos y los demás parámetros son iguales que en el ejemplo anterior. ¿Cuál es el valor de la opción con esta nueva modificación?

Primero obtenemos el valor de d_1 y d_2

$$d_1 = \frac{x_t + (k + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} = 0.591682$$

y

$$d_2 = \frac{x_t + (k - 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} = 0.491386.$$

Evaluando d_1 y d_2 en (2.32) y (2.34) respectivamente,

$$\Phi(0.591682) = \int_{-\infty}^{0.591682} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 0.722968$$

y

$$\Phi(0.491386) = \int_{-\infty}^{0.491386} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 0.688423,$$

sustituyendo en la fórmula de Black-Scholes (2.35), obtenemos

$$\begin{aligned} c &= S_0\Phi(d_1) - Ke^{-r(T)}\Phi(d_2) \\ &= 180.423333(0.722968) - (177.423333)(0.963149)(0.688423) \\ &= 12.799059 \text{ pesos.} \end{aligned}$$

Para un precio de ejercicio $k = 177.423333$ pesos, el precio a pagar es de 12.799059 pesos, para realizar dicho contrato.

Observación 2.1. El precio de la opción de compra europea que es calculado es solo para una acción, si el contrato es para un número fijo de acciones n , entonces el precio total se obtiene multiplicando n por el precio de la opción de compra europea que se calculó para el caso de una acción.

Ejemplo 2.5. ¿Cuál es el precio de una opción de compra tipo europea, si los parámetros tienen los siguientes valores ?

- a) $S_0 = 180.423333$ pesos.
- b) $K = 183.423333$ pesos.
- c) $t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$ años.
- d) $r = 0.037546$.
- e) $\sigma = 0.100295$ pesos.

En este ejemplo, se está variando el parámetro T , y los otros cuatro parámetros se dejan fijos, con el objetivo de ver como afecta el parámetro del tiempo a el valor de la opción. Se puede observar en la tabla y gráfica (2.4) que el precio de la opción incrementa cuando T aumenta; es decir, el precio de la opción europea es una función creciente con respecto al tiempo.

T	c
0.5	6.975855
1.0	9.177174
1.5	10.653436
2.0	11.750670
2.5	12.601408
3.0	13.273658
3.5	13.809532
4.0	14.237170
4.5	14.576340
5.0	14.841659

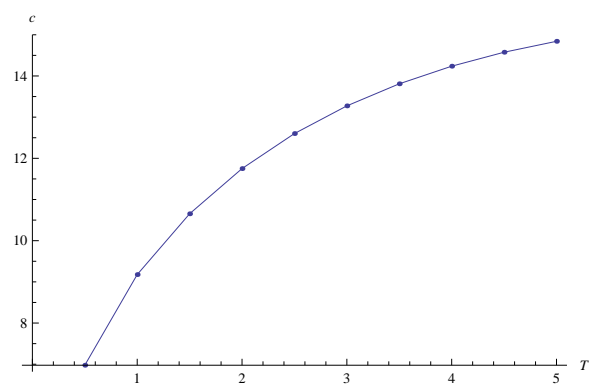


Figura 2.4: Tabla y Gráfica de los precios de las opciones con respecto al tiempo.

Capítulo 3

Análisis de los modelos de volatilidad estocástica

Uno de los principales problemas en finanzas, consiste en que se tiene que tomar riesgos para obtener beneficios, pero tanto los riesgos como los beneficios pertenecen al futuro. Es así como se busca minimizar los riesgos de las pérdidas a través del tiempo, y a la vez maximizar los rendimientos esperados. Black-Scholes (1973) y Merton (1974) desarrollaron un modelo para valuar el precio de las opciones, en donde las opciones pueden ser consideradas como un seguro, en el que el precio de este seguro depende de los riesgos y los riesgos se miden a partir de la volatilidad .

Históricamente la valuación de opciones, ya sea de una opción de compra, o de venta, ha tenido como herramienta principal a la famosa fórmula de Black-Scholes, la cuál se basa en el supuesto que la volatilidad es constante. Sin embargo, estudios recientes han demostrado que la volatilidad no es un parámetro constante, si no un parámetro aleatorio [19].

El carácter aleatorio de esta variable a dado paso a otros modelos llamados modelos de *volatilidad estocástica*, entre ellos están los modelos de Hull-White, Stein-Stein y Heston. Los cuales dejan que la volatilidad sea guiada por un movimiento Browniano.

El objetivo de este capítulo es analizar el concepto de volatilidad y el efecto que tiene esta variable en los modelos para valuación de opciones. En la segunda parte del capítulo se estudiará los tres modelos de volatilidad estocástica antes mencionados, se mencionarán ventajas y desventajas de cada uno de ellos. El estudio se profundiza más con el modelo propuesto por Heston, debido a que es uno de los principales objetivos de este trabajo de tesis.

3.1. Volatilidad

En este trabajo de tesis, el estudio de la volatilidad se asocia a la rentabilidad de los activos subyacentes, por lo que entenderemos a la volatilidad como una medida de riesgo que se deriva de los cambios de la rentabilidad de los activos, la causa de estos cambios se

encuentran en las variaciones de los precios.

En la estructura del mercado se presentan los precios de los activos como un proceso que evoluciona a lo largo del tiempo, de igual manera, la rentabilidad derivada de estos cambios posee una estructura temporal íntimamente relacionada con los precios. Por lo que se puede considerar la volatilidad como una serie temporal, y no como un parámetro que está fijo a lo largo del tiempo (como se considera en el modelo de Black-Scholes). Por lo que se define a la volatilidad de la siguiente manera.

Definición 3.1. *La volatilidad es una medida de la intensidad de los cambios aleatorios en la rentabilidad de los activos; la representación gráfica de una serie histórica de rendimientos se asocia a la volatilidad con la amplitud de las fluctuaciones de los rendimientos.*

En los fenómenos financieros la volatilidad se caracteriza por:

- a) Exceso de curtosis en la mayoría de las series temporales.
- b) Existencia de periodos de alta y baja volatilidad denominados *conglomerados de volatilidad*. Esto es, si la volatilidad es alta (o baja) en un periodo, tiende a seguir siéndola para el siguiente periodo.
- c) De manera ocasional se puede producir periodos de alta volatilidad en momentos concretos. A este comportamiento se le conoce como *discontinuidades de salto en los precios*.
- d) Los periodos de alta o baja volatilidad acostumbran a venir acompañados de periodos en los que la volatilidad es más moderada a largo plazo.
- e) Movimientos conjuntos de la volatilidad. Cuando se estudian en diferentes mercados las series para el mismo activo, se observa que los movimientos importantes en un mercado están relacionados con los movimientos importantes en otro mercado.

Las características anteriores muestran las existencias de regularidades en el comportamiento que permite la modelación de la volatilidad. Conocer la volatilidad actual y predecir la volatilidad futura es necesaria para tener una mejor medida de riesgo [9].

3.1.1. Volatilidad implícita

En la negociación de opciones se utiliza como estimador de volatilidad la llamada **volatilidad implícita**. En la fórmula de Black-Scholes hay cinco parámetros que debemos conocer antes de poder encontrar el valor de una opción; K y T , son parámetros que se especifican en el contrato, S_0 y r , son dos parámetros que pueden ser observados en los mercados, y por último la volatilidad σ (véase la ecuación 2.2.1). La volatilidad es la desviación estándar anualizada de los rendimientos del activo subyacente, correspondiente del tiempo t al tiempo T , el valor de este parámetro, es un valor futuro, que no conocemos y no puede ser observado (véase [8, pág. 131]).

Sin embargo, es posible encontrar este parámetro tomando en cuenta los valores de las opciones que se encuentran en el mercado; es decir, resolver el problema inverso, dado el precio de la opción del mercado, se encuentra la volatilidad con ayuda de la fórmula de Black-Scholes. Además, este valor es único, esto es posible pues la función para calcular el valor de la opción es creciente con respecto a la volatilidad, a esta volatilidad que corresponde al precio de la opción se le llama *volatilidad implícita* (véase [8, 131]).

El principal problema que representa el cálculo de la volatilidad implícita es que no es posible invertir la fórmula de Black-Scholes para despejar la volatilidad en función del precio y del resto de las variables, pero se puede encontrar su valor si resolvemos el problema numéricamente. Entre los métodos numéricos más utilizados para determinar la volatilidad implícita están, el método de bisección y el método de Newton-Raphson. Una vez obtenida la volatilidad implícita con el precio del mercado de una opción, puede emplearse para negociar otras opciones posteriormente.

A pesar de la gran popularidad de la fórmula de Black-Scholes, en los últimos años han aparecido muchos estudios poniendo en manifiesto el comportamiento empírico de dicha fórmula, entre ellos, Rubinstein (1985), Skeikh(1991), Fung y Hsieh (1991), entre otros. Estos estudios aseguran que cuando se invierte la fórmula de Black-Scholes para encontrar la volatilidad implícita en el precio del mercado de las opciones, se encuentra que las volatilidades implícitas tiende a estar relacionadas con el precio de ejercicio. Esta característica empírica contradice el supuesto en el modelo de Black-Scholes, que nos dice que la volatilidad es constante.

La relación empírica que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio se le llama *curva sonrisa* (véase [23, pág. 17]).

Ejemplo 3.1. *En la volatilidad implícita en el precio de las acciones es frecuente observar que la volatilidad del precio de las acciones tiende a aumentar cuando los precios disminuyen, análogamente, la volatilidad del precio de las acciones tiende a disminuir cuando los precios aumentan [véase la gráfica 3.1].*

Dada la evidencia empírica existente en contra del supuesto de volatilidad constante de la fórmula de Black-Scholes, los investigadores en matemáticas financieras han tratado de proponer modelos alternativos que traten de incorporar el efecto de la curva sonrisa.

3.2. Modelos con volatilidad estocástica

Como se mencionó en la sección anterior, la volatilidad de un activo no es constante, ni es observable. Por lo tanto, se requiere un tratamiento adecuado en la valuación de opciones, ya que justamente en el mercado de opciones ésta es la variable que se negocia. La alternativa idónea es modelarla como un proceso estocástico (véase [23]).

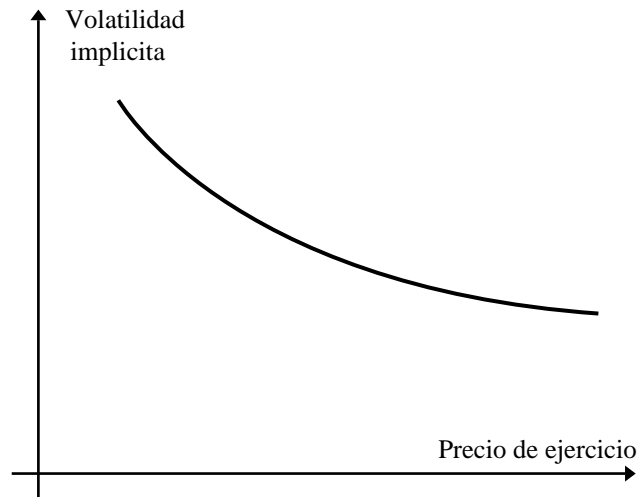


Figura 3.1: Curva de volatilidad para opciones sobre acciones.

Los modelos de volatilidad estocástica para valorar opciones se caracterizan por describir la dinámica del precio del subyacente por el siguiente proceso estocástico

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t,$$

donde W_t es un movimiento Browniano geométrico y σ_t es un proceso de volatilidad, donde este proceso debe cumplir ciertas condiciones para que S_t tenga solución. Por ejemplo, el proceso de volatilidad debe permanecer positivo todo el tiempo, para que esto suceda se cambia σ_t por un función positiva $f(Y_t)$, donde Y_t es un proceso estocástico específico.

En la literatura los procesos estocásticos más comunes para Y_t son:

a) Log-Normal (LN)

$$dY_t = \mu Y_t dt + \xi Y_t dU_t.$$

b) Ornstein-Uhlenbeck (OU)

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta dU_t.$$

c) Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

$$dY_t = k(\theta - Y_t)dt + \eta\sqrt{Y_t}dU_t.$$

Donde U_t es un movimiento Browniano geométrico; que en general está correlacionado con el movimiento Browniano W_t ; es decir, $Cov(W_t, U_t) = \rho dt$, donde $\rho \in [-1, 1]$.

Modelos con volatilidad estocástica			
Modelo	ρ	Y_t - Proceso	$f(Y_t)$
Hull-White	$\rho = 0$	Log-Normal	$f(Y_t) = \sqrt{Y_t}$
Stein-Stein	$\rho = 0$	Ornstein-Uhlenbeck	$f(Y_t) = Y_t $
Heston	$\rho \neq 0$	Cox-Ingersoll-Ross	$f(Y_t) = \sqrt{Y_t}$

Cuadro 3.1: Características generales de los modelos de volatilidad estocástica

Durante los últimos años han surgido numerosos modelos de volatilidad estocástica, en este trabajo de tesis solo vamos a mencionar a tres de ellos, Hull-White (1987), Stein-Stein (1991) y Heston (1993), en el cuadro (3.1) se muestran características generales de dichos modelos.

Nota 3.1. El proceso Ornstein-Uhlenbeck es caracterizado por presentar reversión a la media.

Proposición 3.1. *Si la volatilidad del activo subyacente es conducida por un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck, entonces la varianza es conducida por un proceso del tipo Cox, Ingersoll y Ross(1985).*

En efecto, supongamos que la volatilidad estocástica, σ_t , del precio de la acción sigue un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck; es decir,

$$d\sigma_t = -\beta\omega_t dt + \delta dU_t.$$

Aplicando el lema de Itô a $Y_t = \sigma_t^2$ se obtiene,

$$d\sigma_t^2 = (\delta^2 - 2\beta\sigma_t^2)dt + 2\delta\sigma_t^2 dU_t, \quad (3.1)$$

el cuál puede ser escrito de manera similar el proceso de Cox, Ingersoll y Ross como

$$d\sigma_t^2 = a(b - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dU_t, \quad (3.2)$$

donde los nuevos parámetros están dados por

$$a = 2\beta, \quad b = \frac{\delta^2}{2\beta} \quad \text{y} \quad \gamma = 2\delta. \quad .$$

3.2.1. Modelo de Hull-White

El modelo propuesto por Hull y White en 1987 es su artículo “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities” para valuar opciones se basa en que la volatilidad del activo subyacente es guiada por un movimiento Browniano geométrico [10], la fórmula resultante es una aproximación que considera una serie de Taylor hasta términos de tercer orden.

En este modelo el precio de activo subyacente sigue una distribución Log-Normal, y está dado por la siguiente ecuación,

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t, \quad (3.3)$$

donde el parámetro r representa la tasa de interés libre de riesgo y se le agrega el supuesto que la varianza del activo subyacente sigue un movimiento Browniano, similar a un proceso Log-Normal

$$dV_t = \mu V_t dt + \xi V_t dU_t, \quad (3.4)$$

donde el proceso $(W_t)_{t \in [0, t]}$ y el proceso $(U_t)_{t \in [0, t]}$ son movimientos Brownianos geométricos definidos en un espacio de probabilidad con filtración aumentada $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^W)$, y $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}_t^U\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^U)$, respectivamente.

Además, supongamos que

$$Cov(W_t, U_t) = 0,$$

es decir, la varianza no está correlacionado con el precio del activo [4].

La EDP planteada en el modelo de Hull-White es

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \xi^2 V_t \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} - rc + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \mu V_t \frac{\partial c}{\partial V_t} = 0. \quad (3.5)$$

Para encontrar la solución de esta EDP, definimos la varianza estocástica promedio

$$\bar{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T V_u du, \quad (3.6)$$

donde V_u es la solución de la ecuación (3.4). El valor de una opción europea está dado por la fórmula de valuación de Black-Scholes, cuando se integra sobre la distribución de probabilidad de la varianza estocástica promedio; es decir, la solución de la EDP (3.5) es

$$c(S_t, V_t, t) = \int_0^\infty c_{BS}(S_t, t; \bar{V}_{t,T}) h(\bar{V}_{t,T} | V_t) d\bar{V}_{t,T}, \quad (3.7)$$

donde h es una función de densidad de $\bar{V}_{t,T}$, condicional en V_t y c_{BS} es el valor de la fórmula de Black-Scholes con varianza $\bar{V}_{t,T}$, tomando en cuenta que $\bar{V}_{t,T} = \sigma_{t,T}^2$, entonces

$$c_{BS}(S_t, t; \sigma_{t,T}^2) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (3.8)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_{t,T}^2\right)(T-t)}{\sigma_{t,T}\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_{t,T}^2\right)(T-t)}{\sigma_{t,T}\sqrt{T-t}}.$$

Estos resultados se obtuvieron del trabajo de tesis [4].

Una de las desventajas de este modelo radica en que la dinámica de la volatilidad no representa reversión a la media, esto significa que la volatilidad no tiende a tomar el valor de la media al pasar el tiempo (véase [19]). Uno de los modelos que soluciona este problema es el modelo de Stein-Stein.

3.2.2. Modelo de Stein-Stein

El método propuesto por Elias M. Stein y Jemery C. Stein en 1991 en su artículo “Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach”, deriva una solución en forma cerrada para la valuación de opciones. La idea principal de este modelo consiste en que la volatilidad es modelada por un proceso de Ornstein-Uhlenbeck [22]. El modelo de Stein-Stein esta definido por los siguientes procesos

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ d\sigma_t &= \alpha(m - \sigma_t) dt + \beta dU_t, \end{aligned}$$

donde el proceso $(W_t)_{t \in [0, t]}$ y el proceso $(U_t)_{t \in [0, t]}$ son movimientos Brownianos geométricos definidos en un espacio de probabilidad con filtración aumentada $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^W)$ y $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}_t^U\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^U)$, respectivamente.

Con α , β y m constantes, además los procesos W_t y U_t son independientes; es decir,

$$Cov(W_t, U_t) = 0.$$

El parámetro α es la tasa de reversión a la media a largo plazo, a β se le conoce como *volatilidad de la volatilidad*, y m es la media a largo plazo del proceso de volatilidad (véase [19, pág. 19]).

Para el precio de una opción europea a través de la expectativa neutral al riesgo descontada a la distribución terminal del precio de la acción tiene que ser conocido. Si no hay deriva y el precio de la acción inicial es $S_0 = 1$, entonces Stein y Stein utilizando métodos de inversión de Fourier (véase [19, pág. 23]) muestran que la solución en forma cerrada para la distribución del precio de las acciones es

$$f_0(S_t, t) = \frac{1}{2\pi S_t^{-\frac{3}{4}}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I \left(\left(\eta^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{t}{2} \right) e^{i\eta \log S_t} d\eta \right). \quad (3.9)$$

Cuando la deriva es $\alpha > 0$ y $S_0 > 0$, entonces

$$f(S_t, t) = \frac{e^{-rt}}{S_0} f_0 \left(\frac{S_t e^{-rt}}{S_0}, t \right).$$

Los parámetros de la ecuación (3.9) están dados por

$$I = \exp\left(\frac{L\sigma_0^2}{2} + M\sigma_0 + N\right).$$

Las siguientes definiciones de las variables L, M y N , determinan a I , como función de todas las variables primitivas en el modelo.

$$L = -A - a \frac{\text{Senh}(\alpha\beta^2 t) + b\text{Cosh}(\alpha\beta^2 t)}{\text{Cosh}(\alpha\beta^2 t) + b\text{Senh}(\alpha\beta^2 t)},$$

$$M = B \left(\frac{b\text{Senh}(\alpha\beta^2 t) + b^2\text{Cosh}(\alpha\beta^2 t) + 1 - b^2}{\text{Cosh}(\alpha\beta^2 t) + b\text{Senh}(\alpha\beta^2 t)} - 1 \right),$$

$$N = \frac{a - A}{2a^2} (a^2 - AB^2 - B^2 a) \beta^2 t + \frac{B^2(A^2 - a^2)}{2a^3} \left(\frac{(2A + a) + (2A - a)e^{2a\beta^2 t}}{A + a + (a - A)e^{2a\beta^2 t}} \right) \\ + \frac{2AB^2(a^2 - A^2)e^{a\beta^2 t}}{a^3(A + a + (a - A)e^{2a\beta^2 t})} - \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2} \left(\frac{A}{a} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) e^{2a\beta^2 t} \right],$$

$$A = \frac{-\alpha}{\beta}, \quad B = \frac{m\alpha}{\beta^2}, \quad C = \frac{-\lambda}{\beta^2 t}, \quad a = \sqrt{A^2 - 2C}, \quad b = -\frac{a}{A}.$$

3.2.3. Modelo de Heston

En 1993, Steven I. Heston en su artículo “A Closed-Form Solution Options with Stochastic Volatility”, valua una opción sobre una acción con volatilidad estocástica. Un aspecto importante en este artículo es que se obtienen las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo como soluciones de una EDP de segundo orden lineal. A través de estas probabilidades se obtiene una fórmula similar a la de Black-Scholes para valuar una opción de compra [7].

El modelo propuesto por Heston es el más popular entre los modelos de volatilidad estocástica, pues el proceso para la volatilidad es no negativa y representa reversión a la media [5]. Además, fue uno de los primeros modelos que pudo explicar el fenómeno de la curva sonrisa. Una característica notable en el modelo de Heston es que presenta una fórmula cerrada para el precio de una opción con el supuesto de correlación entre el precio del activo y su volatilidad.

A continuación, daremos la dinámica estocástica que conduce a la volatilidad en el modelo Heston. Supongase que el precio de una acción S_t , sigue un proceso de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t, \quad (3.10)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, y representa el retorno esperado del precio del activo subyacente. $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano sobre un espacio de probabilidad con una filtración aumentada $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^W)$. Se supone además, que la volatilidad instantánea σ_t del precio de

la acción sigue un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck, entonces se tiene que la varianza, V_t sigue un proceso del tipo Cox, Ingresoll y Ross (por la proposición 3.1); es decir,

$$dV_t = K(\theta - V_t)dt + \eta\sqrt{V_t}dU_t, \quad (3.11)$$

donde θ es la volatilidad esperada a largo plazo, K es la velocidad a la cual la volatilidad tiende hacia su media de largo plazo y η es la volatilidad en la volatilidad. $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano sobre el espacio de probabilidad con filtración aumentada $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}_t^U\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^U)$. Además, se supone que los procesos dW_t y dU_t se encuentran correlacionados entre sí, de tal manera que

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt,$$

con $\rho \in [-1, 1]$.

Sea $c = c(S_t, V_t, t)$ el valor de una opción de compra. Utilizando el Lema de Itô para dos procesos estocásticos (Teorema 1.8), encontramos que la dinámica del valor de $c(S_t, V_t, t)$ esta dada por

$$\begin{aligned} dc &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\eta^2 V_t \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + k(\theta - V_t) \frac{\partial c}{\partial V_t} + \rho\eta V_t S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} \right) dt \\ &\quad + \sqrt{V_t} S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} dW_t + \eta\sqrt{V_t} \frac{\partial c}{\partial V_t} dU_t. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta última ecuación se puede escribir como

$$dc = \mu_c(S_t, V_t, t)cdt + \sigma_c(S_t, V_t, t)cdW_t + \xi_c(S_t, V_t, t)cdU_t, \quad (3.13)$$

donde

$$\mu_c(S_t, V_t, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\eta^2 V_t \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + k(\theta - V_t) \frac{\partial c}{\partial V_t} + \rho\eta V_t S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} \right),$$

$$\sigma_c(S_t, V_t, t) = \left(\frac{\sqrt{V_t} S_t}{c} \right) \frac{\partial c}{\partial S_t},$$

y

$$\xi_c(S_t, V_t, t) = \left(\frac{\eta\sqrt{V_t}}{c} \right) \frac{\partial c}{\partial V_t}.$$

Ahora, consideremos el portafolio

$$\Pi_t = \gamma_0 S_t + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2,$$

con γ_0 unidades de una acción, γ_1 y γ_2 unidades de dos opciones sobre la acción con diferente fecha de vencimiento.

El cambio en el valor del portafolio esta dado por

$$d\Pi_t = \gamma_0 dS_t + \gamma_1 dc_1 + \gamma_2 dc_2.$$

Así, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= (\gamma_0 \mu S_t + \gamma_1 \mu_1 c_1 + \gamma_2 \mu_2 c_2) dt \\ &\quad + (\gamma_0 \mu \sqrt{V_t} + \gamma_1 \sigma_1 c_1 + \gamma_2 \sigma_2 c_2) dW_t \\ &\quad + (\gamma_1 \xi_1 c_1 + \gamma_2 \xi_2 c_2) dU_t, \end{aligned}$$

donde

$$\mu_i = \mu_{c_i}, \quad \sigma_i = \sigma_{c_i}, \quad \xi_i = \xi_{c_i}.$$

Elegimos a las constantes γ_1 , γ_2 y γ_0 tales que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\xi_2}{c_1(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)}, \\ \gamma_2 &= \frac{\xi_1}{c_2(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)}, \\ \gamma_0 &= \frac{\sigma_2 \xi_1}{\sqrt{V_t} S_t (\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} - \frac{\sigma_1 \xi_2}{\sqrt{V_t} S_t (\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} = \frac{1}{\sqrt{V_t} S_t}, \end{aligned}$$

con el objetivo de eliminar los coeficientes de los factores de riesgo dW_t y dU_t .

Así, obtenemos que

$$d\Pi_t = \left(\frac{\mu}{\sqrt{V_t}} + \frac{\xi_2 \mu_1}{(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} - \frac{\xi_1 \mu_2}{(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} \right) dt.$$

La ecuación anterior se iguala con el rendimiento libre de riesgo que se obtiene con un deposito en una cuenta bancaria,

$$\Pi_t r dt = \left(\frac{1}{\sqrt{V_t}} + \frac{\xi_2}{(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} - \frac{\xi_1}{(\xi_1 \sigma_2 - \xi_2 \sigma_1)} \right) r dt.$$

Entonces, se sigue que

$$\left(\frac{\sigma_2}{\xi_2} \right) \left(\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} \right) = \left(\frac{\sigma_1}{\xi_1} \right) \left(\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} - \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} \right),$$

lo que implica, que la cantidad anterior, es independiente de tiempo de vencimiento. Por lo tanto, se puede escribir,

$$\left(\frac{\sigma_c}{\xi_c} \right) \left(\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} - \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} \right) = m(S_t, V_t, t),$$

para alguna función $m(S_t, V_t, t)$.

De la ecuación anterior, se tiene que

$$m(S_t, V_t, t)\xi_c = \mu_c - r - \sigma_c \left(\frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} \right).$$

Sustituyendo las definiciones de μ_c , σ_c y ξ_c , junto con la ecuación (3.13), obtenemos

$$m(S_t, V_t, t)\eta\sqrt{V_t}\frac{\partial c}{\partial V_t} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\eta^2 V_t \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + k(\theta - V_t) \frac{\partial c}{\partial V_t} + \rho\eta V_t S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} - rc.$$

Despejando obtenemos la EDP del modelo de Heston,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\eta^2 V_t \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \frac{\partial c}{\partial V_t} \\ + \rho\eta V_t S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} - rc = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $\lambda(S_t, V_t, t) = m(S_t, V_t, t)\eta\sqrt{V_t}$. Esta función λ se le conoce como el *premio al riesgo* por la volatilidad (véase [19]).

Además, suponemos que $\lambda(S_t, V_t, t)$ es proporcional a V_t ; es decir,

$$\lambda(S_t, V_t, t) = \bar{\lambda}V_t,$$

donde $\bar{\lambda}$ es una constante.

Así, bajo el supuesto de que la función $\lambda(S_t, V_t, t)$, el precio de una opción europea de compra con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T , con volatilidad estocástica, satisface la EDP (3.14) junto con las siguientes condiciones auxiliares (véase [7]),

$$\begin{aligned} c(S_t, V_t, T) &= \max(S_T - K, 0), \\ c(0, V_t, t) &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial S_t}(\infty, V_t, t) &= 1, \\ \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial S_t} + k\theta \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial V_t} - rc(S_t, 0, t) &= 0, \\ c(S_t, \infty, t) &= S_t. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La primera condición auxiliar, representa el valor intrínseco del valor de una opción, la segunda, tercera y quinta condición auxiliar se puede justificar con la fórmula de valuación de una opción de compra de Black-Scholes, la cuarta condición auxiliar se obtiene al sustituir $V_t = 0$ en la ecuación (3.14).

En forma análoga a como se obtuvo la fórmula de Black-Scholes, proponemos la siguiente solución para la EDP del modelo de Heston

$$c(S_t, V_t, t) = S_t P_1 - e^{-r(T-t)} K P_2, \quad (3.16)$$

donde $P_1 = P_1(S_t, V_t, t)$ y $P_2 = P_2(S_t, V_t, t)$.

Se escribe la ecuación (3.14) en términos del logaritmo del precio actual del activo subyacente; es decir

$$x_t = \ln(S_t), \quad (3.17)$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial S_t} &= \frac{\partial c}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t} \frac{\partial c}{\partial x_t}, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \frac{\partial x_t}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t^2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x_t^2} - \frac{\partial c}{\partial x_t} \right), \\ \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\frac{\partial c}{\partial V_t} \right) \frac{\partial x_t}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t} \frac{\partial^2 c}{\partial x_t \partial V_t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación de Heston (3.14), llegamos a la siguiente EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t \frac{\partial^2 c}{\partial x_t^2} + \rho \eta V_t \frac{\partial^2 c}{\partial x_t \partial V_t} + \frac{1}{2} \eta^2 V_t \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \left(r - \frac{1}{2} V_t \right) \frac{\partial c}{\partial x_t} \\ + [k(\theta - V_t) - \lambda V_t] \frac{\partial c}{\partial V_t} - rc = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ahora, en base a (3.16) y (3.17), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial x_t} &= e^{x_t} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial x_t}, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial x_t^2} &= e^{x_t} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - k e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2}, \\ \frac{\partial c}{\partial V_t} &= e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial V_t} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial V_t}, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} &= e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial V_t^2} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial V_t^2}, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial x_t \partial V_t} &= e^{x_t} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial V_t} + \frac{\partial P_1}{\partial V_t} \right) - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial V_t}, \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} + k e^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial t} - r K e^{-r(T-t)} P_2. \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en (3.18) se obtiene

$$\begin{aligned}
& e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} - \frac{1}{2} V_t K e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} + \rho \eta V_t e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial V_t} - \\
& \rho \eta V_t K e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial V_t} + \frac{1}{2} \eta^2 V_t e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial V_t^2} - \frac{1}{2} \eta^2 V_t K e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial V_t^2} + \left(r + \frac{1}{2} V_t \right) e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial x_t} - \\
& \left(r - \frac{1}{2} V_t \right) K e^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial x_t} + [k(\theta - V_t) + \bar{\lambda} V_t - \rho \eta V_t] e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial V_t} - \\
& [k(\theta - V_t) - \bar{\lambda} V_t] K e^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial V_t} = 0.
\end{aligned}$$

La ecuación anterior se puede escribir como

$$e^{X_t} f(P_1) - e^{-r(T-t)} K f(P_2) = 0.$$

Una solución para esta ecuación es

$$f(P_1) = 0 \quad \text{y} \quad f(P_2) = 0,$$

lo que implica,

$$\begin{aligned}
f(P_1) &= \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + \rho \eta V_t \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial V_t} + \frac{1}{2} \eta^2 V_t \frac{\partial^2 P_1}{\partial V_t^2} \\
&+ \left(r + \frac{1}{2} V_t \right) \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + [k(\theta - V_t) + \bar{\lambda} V_t + \rho \eta V_t] \frac{\partial P_1}{\partial V_t} = 0, \\
f(P_2) &= \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} + \rho \eta V_t \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial V_t} + \frac{1}{2} \eta^2 V_t \frac{\partial^2 P_2}{\partial V_t^2} \\
&+ \left(r - \frac{1}{2} V_t \right) \frac{\partial P_2}{\partial x_t} + [k(\theta - V_t) + \bar{\lambda} V_t] \frac{\partial P_2}{\partial V_t} = 0.
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que las funciones $P_1 = P_1(x_t, V_t, t)$ y $P_2 = P_2(x_t, V_t, t)$ satisfacen la siguiente EDP

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{1}{2} V_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t^2} + \rho \eta V_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t \partial V_t} + \frac{1}{2} \eta^2 V_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial V_t^2} \\
& + [r - u_j V_t] \frac{\partial P_j}{\partial x_t} + [a - b_j V_t] \frac{\partial P_j}{\partial V_t} = 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

con $j = 1, 2$; donde $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = k\theta$, $b_1 = k + \bar{\lambda} - \eta\rho$, $b_2 = k - \bar{\lambda}$.

Las funciones $P_1(x_t, V_t, t)$ y $P_2(x_t, V_t, t)$ son conocidas como *probabilidades ajustadas* o *probabilidades neutrales al riesgo* (véase [19]). Desafortunadamente, no existe una expresión analítica para estas probabilidades. Por otro lado, se puede demostrar que las funciones características, $f_j(x_t, V_t, T; \Phi)$, de las probabilidades neutrales al riesgo, satisfacen las ecuaciones (3.19), junto con la condición final

$$f_j(x_t, V_t, T; \Phi) = e^{i\Phi x_t}, \quad \text{con } j = 1, 2. \tag{3.20}$$

Las funciones características que resuelven dicha EDP tienen la forma

$$f_j = e^{C+DV_t+i\Phi x_t},$$

con $f_j = f_j(x_t, V_t, T; \Phi)$, $C = C(T - t; \Phi)$ y $D = D(T - t; \Phi)$.

De (3.20) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_t} &= i\Phi f_j, & \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} &= -\Phi^2 f_j, \\ \frac{\partial f_j}{\partial V_t} &= D f_j, & \frac{\partial^2 f_j}{\partial V_t^2} &= D^2 f_j, \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t \partial V_t} &= i\Phi D f_j, & \frac{\partial f_j}{\partial t} &= \left(\frac{\partial C}{\partial t} + V_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) f_j. \end{aligned}$$

Se evalúa f_j en (3.19) y se sustituyen las anteriores derivadas parciales,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V_t\Phi^2 f_j + \rho\eta V_t i\Phi D f_j + \frac{1}{2}\eta^2 V_t D^2 f_j + (r + u_j V_t) i\Phi f_j \\ + (a - b_j V_t) D f_j + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + V_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) f_j &= 0, \\ \left(-\frac{1}{2}\Phi^2 + \rho\eta i\Phi D + \frac{1}{2}\eta^2 D^2 + u_j i\Phi - b_j D + \frac{\partial D}{\partial t} \right) V_t + \left(r i\Phi + a D + \frac{\partial C}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos un sistema de ecuaciones con dos variables

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Phi^2 + \rho\eta i\Phi D + \frac{1}{2}\eta^2 D^2 + u_j i\Phi - b_j D + \frac{\partial D}{\partial t} &= 0, \\ r i\Phi + a D + \frac{\partial C}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema está dada por:

$$\begin{aligned} C(T - t, \Phi) &= r i\Phi(T - t) + \frac{a}{\eta^2} \left[(b_j - \rho\eta i\Phi + d)(T - t) - 2 \ln \left(\frac{1 - g e^{d(T-t)}}{1 - g} \right) \right], \\ D(T - t, \Phi) &= \frac{b_j - \rho\eta i\Phi + d}{\eta^2} \left[\frac{1 - e^{d(T-t)}}{1 - g e^{d(T-t)}} \right], \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} g &= \frac{b_j - \rho\eta u_j i + d}{b_j - \rho\eta u_j i - d}, \\ d &= \sqrt{(\rho\eta i\Phi - b_j)^2 - \eta^2(2u_j i\Phi - \Phi^2)}. \end{aligned}$$

Utilizando las siguientes identidades

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\Phi x} f(\Phi)}{i\Phi} \right] d\Phi,$$

$$\mathbb{P}[X > x] = 1 - F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\Phi x} f(\Phi)}{i\Phi} \right] d\Phi.$$

Tenemos que las funciones P_1 y P_2 están dadas por

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\Phi \ln K} f_{j;x_t, V_t, t}(\Phi)}{i\Phi} \right] d\Phi, \quad (3.21)$$

con $j = 1, 2$.

Una vez obtenidas las funciones P_j las sustituimos en la ecuación (3.16) para obtener la solución de la EDP para el modelo de Heston.

Observemos que en general las integrales dadas por (3.21) no se pueden calcular por métodos analíticos. Sin embargo, estas se pueden resolver utilizando métodos numéricos.

Capítulo 4

Análisis de los problemas de contorno para valuación de opciones

La teoría de las ecuaciones diferenciales parciales es un área de estudio de gran importancia en matemáticas debido a su relación con los fenómenos naturales. Estos fenómenos implican cambios que se pueden describir por medio de la construcción de modelos matemáticos. Frecuentemente estos modelos involucran una ecuación en la que una función y sus derivadas parciales representan un papel importante.

Una EDP que modelan un sistema físico por lo general tiene un número infinito de soluciones. Para poder seleccionar la función que representan la solución de un problema físico, se necesita imponer condiciones auxiliares que caracterizan al sistema que se modela. Estas condiciones se les conoce como *condiciones iniciales* y de *frontera*.

El objetivo de este capítulo es analizar una EDP de segundo orden en su forma general y su clasificación. Posteriormente, analizar las condiciones de frontera que existen junto con las condiciones iniciales. En la última sección de capítulo, se tomará la EDP propuesta en el modelo estocástico de Heston junto con sus condiciones adicionales, para representarlo como un problema de EDP de segundo orden con condiciones iniciales y de frontera.

4.1. Introducción a la EDP de segundo orden

La forma general de la EDP de segundo orden lineal en dos variables está dada por la siguiente ecuación

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y). \quad (4.1)$$

Si $G(x, y) = 0$ se dice que la ecuación (4.1) es homogénea, y si $G(x, y) \neq 0$ entonces se dice que es una ecuación no homogénea.

Estas ecuaciones se clasifican en tres tipos, hiperbólico, parabólico y elíptico. En la clasificación solo intervienen los coeficientes $A(x, y)$, $B(x, y)$ y $C(x, y)$ de la EDP y se clasifican

de acuerdo al valor del discriminante $B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)$. A continuación, proporcionamos la clasificación y varios ejemplos sencillos de los diferentes tipos de EDP's que existen.

- a) **Hiperbólica.** Si el discriminante es mayor que cero, $B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y) > 0$, entonces se dice que la EDP es de tipo hiperbólico. Este tipo de ecuaciones surgen en problemas físicos en los que aparece el fenómeno de la propagación de ondas.

Ejemplo 4.1. La ecuación que describe la propogación de ondas esta dada por la ecuación de onda; la cual se expresa como

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

donde c es una constante llamada velocidad de propagación de las ondas.

- b) **Parabólica.** La EDP (4.1) es de tipo parabólico si el discriminante es igual a cero; es decir, $B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y) = 0$. Este tipo de ecuaciones en general surgen en problemas físicos, en donde aparece el fenómeno de la difusión de calor.

Ejemplo 4.2. La ecuación que describe la propagación de calor a lo largo de una varilla unidimensional de longitud L , esta dada por

$$u_t = k u_{xx},$$

donde k es una constante, la cual es llamada coeficiente de difusividad.

- c) **Elíptica.** La EDP (4.1) es de tipo elíptico si $B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y) < 0$. En general, este tipo de ecuaciones surgen en el estudio de los fenómenos estacionarios (independientes del tiempo).

Ejemplo 4.3. La ecuación de Laplace en el plano se expresa mediante la siguiente ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

4.2. Introducción a las ecuaciones con condiciones iniciales y de contorno

En la mayor parte, los sistemas físicos que se estudian son finitos; es decir, están limitados por una frontera, como por ejemplo, el problema de la propagación de calor a lo largo de una varilla de longitud L . Además, usualmente se ejerce cierto control sobre el sistema actuando sobre la frontera del mismo. Este tipo de condiciones adicionales técnicamente se llaman **condiciones de frontera** o **contorno** y debe complementar a la EDP cuando el sistema tiene frontera; es decir, cuando el sistema es finito.

Existe una infinidad de posibilidades en que podemos efectuar el control de contorno de frontera de un sistema. Sin embargo, en la práctica hay tres tipos fundamentales de condiciones de frontera. A continuación enumeramos los tres casos y damos un ejemplo sencillo de estos (al lector interesado de sugiere consultar [13]).

- a) **Condiciones de Dirichlet.** En general este problema describe el valor de la función incógnita, u , en toda la frontera de la región de interés, por ejemplo la región $0 \leq x \leq L$, (También son conocidas como condiciones de primer orden).

Ejemplo 4.4. *Consideremos una varilla de longitud L , sus extremos están a la temperatura T_1 y T_2 , entonces, para este caso las condiciones de Dirichlet están dadas por*

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, \quad t > 0.$$

- b) **Condiciones de Neumann.** Este problema describe el valor de la derivada normal de la función incógnita, $\frac{\partial u}{\partial n}$, en toda la frontera de la región de interés (también se le conoce como condiciones de segundo orden).

Ejemplo 4.5. *Consideremos la misma varilla del ejemplo (4.4) con sus extremos aislados. Para este caso las condiciones de Neumann que satisfacen este fenómeno de propagación están dada por*

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

- c) **Condiciones de Robin o Mixtas.** Este caso generaliza a los dos anteriores. El problema describe el valor de una combinación lineal de la función incógnita, u , y su derivada normal, $\frac{\partial u}{\partial n}$, en cada punto de la región de frontera.

Ejemplo 4.6. *Estas condiciones de frontera en los fenómenos de propagación se utilizan cuando en dichos fenómenos existe el fenómeno de conversión. Para este caso, las condiciones de Robin se expresan como*

$$u(0, t) + \alpha u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) + \beta u_x(L, t) = 0, \quad \text{con } t > 0.$$

donde α y β son constantes.

Por otro lado, es bastante frecuente que una de las variables del sistema modelado represente al tiempo, podemos interpretar que la EDP nos dice como evoluciona con el tiempo la magnitud que representa la función u . Para poder calcular la magnitud de la función u , se necesita conocerla en el tiempo $t = 0$.

Dependiendo del orden de la ecuación respecto a la variable temporal, puede que sea necesario conocer también otras características de u en $t = 0$, como por ejemplo, el valor de su derivada temporal. A esta conjunto de condiciones se le conoce como **condiciones iniciales**, y al igual que las condiciones de frontera, estas condiciones deben complementar a la EDP (véase [13, pág. 3]). Una vez definidas las condiciones iniciales y de frontera ya se esta en condiciones de plantear los problemas de condiciones iniciales y de frontera.

Ejemplo 4.7. Para la ecuación de onda, consideremos el siguiente problema de contorno.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi, & t \geq 0; \\ u(x, 0) &= \text{sen}(x), & u(x, 0) &= \text{cos}(x), \\ u(0, t) &= 0, & u(\pi, t) &= 1. \end{aligned}$$

4.3. Análisis de las condiciones de frontera para el modelo de Heston

Para iniciar esta sección se volverá a escribir la EDP propuesta en el modelo de Heston en el capítulo 3, junto con sus condiciones adicionales.

De la ecuación (3.14), la ecuación del modelo de Heston está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\eta^2 V_t \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \frac{\partial c}{\partial V_t} \\ + \rho\eta V_t S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} - rc = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

y sus condiciones adicionales son

$$\begin{aligned} c(S_t, V_t, T) &= \max(S_T - K, 0), \\ c(0, V_t, t) &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial S_t}(\infty, V_t, t) &= 1, \\ \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial S_t} + k\theta \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial V_t} - rc(S_t, 0, t) &= 0, \\ c(S_t, \infty, t) &= S_t. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Expresamos la ecuación (4.2) como una EDP de segundo orden que solo dependa de las variables S_t y V_t , la cual se expresará de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A(S_t, V_t)c_{S_t S_t} + B(S_t, V_t)c_{S_t V_t} + C(S_t, V_t)c_{V_t V_t} + \\ D(S_t, V_t)c_{S_t} + E(S_t, V_t)c_{V_t} + F(S_t, V_t)c = Q(S_t, V_t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para lograr este objetivo, proponemos una solución de la forma

$$c(S_t, V_t, t) = \phi(t)u(S_t, V_t). \quad (4.5)$$

Las derivadas parciales de solución $c(S_t, V_t, t)$ dada por (4.4), resultan ser

$$\begin{aligned} c_{S_t}(S_t, V_t, t) &= \phi(t)u_{S_t}(S_t, V_t), \\ c_{V_t}(S_t, V_t, t) &= \phi(t)u_{V_t}(S_t, V_t), \\ c_{S_t S_t}(S_t, V_t, t) &= \phi(t)u_{S_t S_t}(S_t, V_t), \\ c_{S_t V_t}(S_t, V_t, t) &= \phi(t)u_{S_t V_t}(S_t, V_t), \\ c_{V_t V_t}(S_t, V_t, t) &= \phi(t)u_{V_t V_t}(S_t, V_t), \\ c_t(S_t, V_t, t) &= \phi'(t)u(S_t, V_t). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas parciales en la ecuación de Heston (4.2), obtenemos la siguiente EDP

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V_t S_t^2 \left(\phi(t) \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2} \right) + \rho\eta V_t S_t \left(\phi(t) \frac{\partial^2 u}{\partial S_t \partial V_t} \right) + \frac{1}{2}\eta^2 V_t \left(\phi(t) \frac{\partial^2 u}{\partial V_t^2} \right) + r S_t \left(\phi(t) \frac{\partial u}{\partial S_t} \right) \\ + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \left(\phi(t) \frac{\partial u}{\partial V_t} \right) - r\phi(t)u + \dot{\phi}(t)u = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \phi(t) \left[\frac{1}{2}V_t S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2} + \rho\eta V_t S_t \frac{\partial^2 u}{\partial S_t \partial V_t} + \frac{1}{2}\eta^2 V_t \frac{\partial^2 u}{\partial V_t^2} + r S_t \frac{\partial u}{\partial S_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \frac{\partial u}{\partial V_t} \right] \\ + (\dot{\phi}(t) - r\phi(t))u = 0, \end{aligned}$$

donde el punto sobre la función significa derivada con respecto de t .

Supongamos que la función $\phi(t)$ cumple con la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{\phi}(t) - r\phi(t) = 0, \quad (4.6)$$

cuya solución en el intervalo $0 \leq t \leq T$ esta dada por

$$\phi(t) = e^{-r(T-t)}. \quad (4.7)$$

Por lo tanto, la EDP propuesta para el modelo de Heston se expresa de la siguiente manera

$$\frac{1}{2}V_t S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2} + \rho\eta V_t S_t \frac{\partial^2 u}{\partial S_t \partial V_t} + \frac{1}{2}\eta^2 V_t \frac{\partial^2 u}{\partial V_t^2} + r S_t \frac{\partial u}{\partial S_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \frac{\partial u}{\partial V_t} = 0. \quad (4.8)$$

Ahora, analicemos las condiciones adicionales para el modelo propuesto por Heston, para poder determinar cuales de estas condiciones adicionales se pueden considerar como condiciones iniciales y de frontera.

a) La primera condición adicional esta dada por

$$c(S_t, V_t, T) = \max(S_T - K, 0).$$

Esta condición se puede escribir de la siguiente forma

$$c(S_t, V_t, T) = (S_T - K)H(S_T - K),$$

donde $H(X)$ es la función de Heaviside (véase Apéndice B). Para este caso se tiene que

$$H(S_T - K) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \leq 0, \\ 1 & \text{si } S_T > 0. \end{cases}$$

Luego

$$\phi(T)u(S_t, V_t) = u(S_t, V_t) = (S_T - K)H(S_T - K).$$

Por lo tanto, la primera condición adicional también puede escribirse de la siguiente manera

$$u(S_t, V_t) = (S_T - K)H(S_T - K). \quad (4.9)$$

b) Para la segunda condición adicional, dada por la siguiente ecuación

$$c(0, V_t, t) = 0,$$

utilizamos la ecuación (4.5). Luego, obtenemos que

$$c(0, V_t, t) = \phi(t)u(0, V_t) = 0.$$

Así, se sigue que

$$u(0, V_t) = 0. \quad (4.10)$$

c) Ahora, consideremos la condición adicional

$$\frac{\partial c}{\partial S_t}(\infty, V_t, t) = 1.$$

De esta ecuación se sigue que

$$\frac{\partial c}{\partial S_t}(\infty, V_t, t) = \lim_{s_t \rightarrow \infty} \frac{\partial c(S_t, V_t, t)}{\partial S_t} = \phi(t) \lim_{s_t \rightarrow \infty} \frac{\partial u(S_t, V_t)}{\partial S_t} = 1.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\lim_{s_t \rightarrow \infty} \frac{\partial u(S_t, V_t)}{\partial S_t} = \frac{1}{\phi(t)}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial u(\infty, V_t)}{\partial S_t} = e^{r(T-t)}. \quad (4.12)$$

d) La cuarta condición adicional

$$\frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial S_t} + k\theta \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial V_t} - rc(S_t, 0, t) = 0,$$

la sustituimos en la ecuación (4.5) y obtenemos

$$\begin{aligned} u(S_t, 0) \frac{d\phi(t)}{dt} + rS_t \phi(t) \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial S_t} + k\theta \phi(t) \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial V_t} - r\phi(t)u(S_t, 0) &= 0 \\ u(S_t, 0) (re^{-r(T-t)}) + e^{-r(T-t)} \left(rS_t \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial S_t} + k\theta \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial V_t} - ru(S_t, 0) \right) &= 0 \\ e^{-r(T-t)} \left(rS_t \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial S_t} + k\theta \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial V_t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

como $e^{-r(T-t)} \neq 0$ para todo t , tenemos que la cuarta condición adicional se escribe como

$$rS_t \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial S_t} + k\theta \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial V_t} = 0. \quad (4.13)$$

e) Finalmente, tomamos la última condición adicional, dada por la siguiente ecuación

$$c(S_t, \infty, t) = S_t.$$

De esta ecuación, obtenemos que

$$\begin{aligned} c(S_t, \infty, t) &= \lim_{V_t \rightarrow \infty} c(S_t, V_t, t) \\ &= \phi(t) \lim_{V_t \rightarrow \infty} u(S_t, V_t) \\ &= S_t. \end{aligned}$$

Luego, se tiene

$$\lim_{V_t \rightarrow \infty} u(S_t, V_t) = \frac{S_t}{\phi(t)}. \quad (4.14)$$

Por lo tanto, la quinta condición adicional se escribe como

$$u(S_t, \infty) = S_t e^{r(T-t)}. \quad (4.15)$$

Por otro lado, en la mayoría de los problemas de aplicación del modelo de Heston se toma la ecuación (4.7) como condición inicial y a la ecuación (4.8) como condición de frontera.

En ese sentido obtenemos el siguiente problema de frontera para el modelo de Heston:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2} + \rho \eta V_t S_t \frac{\partial^2 u}{\partial S_t \partial V_t} + \frac{1}{2} \eta^2 V_t \frac{\partial^2 u}{\partial V_t^2} + rS_t \frac{\partial u}{\partial S_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \frac{\partial u}{\partial V_t} &= 0, \\ u(0, V_t) &= 0. \end{aligned}$$

Para este caso, definimos las siguientes *condiciones auxiliares* dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\infty, V_t)}{\partial S_t} &= e^{r(T-t)}, \\ rS_t \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial S_t} + k\theta \frac{\partial u(S_t, 0)}{\partial V_t} &= 0, \\ u(S_t, \infty) &= S_t e^{r(T-t)}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Para terminar este capítulo, observemos que las condiciones auxiliares dadas por la ecuación (4.16) no pueden ser consideradas como condiciones de frontera o como condiciones iniciales asociadas a la EDP del modelo propuesto por Heston. Sin embargo, pueden ser utilizadas para determinar las funciones $\lambda(S_t, V_t, t)$ (véase [21]).

Capítulo 5

Generalización del método de Harper

Últimamente, en la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales de segundo orden no han surgido nuevos métodos para encontrar soluciones de dichas ecuaciones. El método más común para resolver una EDP de segundo orden consiste en convertir dicha ecuación en una más sencilla, llamada comúnmente *forma canónica*, éste es el método que se utilizó para resolver la ecuación de Black-Scholes en el capítulo 2.

En 1994, J. F. Harper en su artículo “Reducing Parabolic Partial Differential Equations to Canonical Form” desarrolló un método para resolver la ecuación de Black-Scholes. Este método fue aplicado para resolver una EDP de segundo orden del tipo parabólico [6]. El cuál consiste en encontrar las soluciones de la ecuación original en términos de las soluciones de la ecuación de calor. Este método ha resultado ser efectivo para resolver algunos problemas con condiciones iniciales y de contorno.

En la primera sección de este capítulo mostraremos el método de Harper para resolver una EDP de segundo orden de tipo parabólico, este método nos permitirá encontrar nuevas soluciones a las ecuaciones en términos de una función, la cual resulta ser solución de la ecuación de calor homogénea. En la segunda sección del capítulo, siguiendo las mismas ideas del método de Harper, se expondrá una generalización de dicho método; este nuevo método resolverá una EDP de segundo orden del tipo parabólico y elíptico.

5.1. Introducción al método modificado Harper

En esta sección se mostrará el método de Harper para resolver una EDP de segundo orden con coeficientes variables no homogéneas del tipo parabólico (véase [21]), las cuales son de la forma

$$A(x, y)u_{xx} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Los casos cuando $D(x, y) = 0$ o $E(x, y) = 0$ serán analizados en [20]. En este trabajo de tesis solo se va a desarrollar el caso cuando los coeficientes $D(x, y)$ y $E(x, y)$ de la ecuación

(5.1) son ambos distintos de cero, entonces se tiene que la EDP (5.1) es de la forma

$$A(x, y)u_{xx} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = Q(x, y). \quad (5.2)$$

Ahora, apliquemos el método de Harper a la EDP (5.2); es decir, se ignora el término de la segunda derivada, por lo que se considera que la ecuación (5.2) tiene la siguiente **EDP auxiliar** de primer orden

$$D(x, y)v_x + E(x, y)v_y = Q(x, y) - F(x, y)v, \quad (5.3)$$

donde las ecuaciones características de esta EDP de primer orden [véase el Apéndice C], están dadas por

$$\frac{dx}{D(x, y)} = \frac{dy}{E(x, y)} = \frac{dv}{Q(x, y) - F(x, y)v}. \quad (5.4)$$

Para obtener la primera curva característica, tomamos el primer par de ecuaciones, el cuál puede ser escrito como

$$\frac{dx}{D(x, y)} - \frac{dy}{E(x, y)} = 0. \quad (5.5)$$

La solución de esta ecuación define la primera curva característica asociada a la ecuación (5.3) la cual está dada por

$$\varphi_0(x, y) = a_0 = \text{const.}, \quad (5.6)$$

donde a_0 es una constante de integración. Además, esta curva característica cumple con la siguiente EDP de primer orden

$$D(x, y)\varphi_{0x}(x, y) + E(x, y)\varphi_{0y}(x, y) = 0. \quad (5.7)$$

Supongamos ahora, que se pueden obtener las variables independientes x y y de la ecuación (5.6) y se expresan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x &= \phi_1(a_0, y), \\ y &= \gamma_1(x, a_0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Por otro lado, para obtener la segunda curva característica, se toma el otro par de ecuaciones caractísticas:

$$\frac{dy}{E(x, y)} = \frac{dv}{Q(x, y) - F(x, y)v}. \quad (5.9)$$

Esta ecuación puede ser escrita como una ecuación diferencial ordinaria en la variable independiente y , dada por

$$\frac{dv}{dy} + \frac{F(x, y)}{E(x, y)}v = \frac{Q(x, y)}{E(x, y)}.$$

Utilizando la ecuación (5.8), se puede eliminar la dependencia de la variable x en la ecuación anterior; es decir, se tiene que

$$\frac{dv(\phi_1(a_0, y), y)}{dy} + \frac{F(\phi_1(a_0, y), y)}{E(\phi_1(a_0, y), y)}v(\phi_1(a_0, y), y) = \frac{Q(\phi_1(a_0, y), y)}{E(\phi_1(a_0, y), y)}. \quad (5.10)$$

El factor integrante de esta ecuación esta dado por

$$\mu(y) = \exp \left(\int \frac{F(\phi_1(a_0, y), y)}{E(\phi_1(a_0, y), y)} dy \right). \quad (5.11)$$

Introducimos una nueva variable $w(x, y)$, definida mediante la siguiente ecuación.

$$w(x, y) = \exp \left(\int \frac{F(\phi_1(a_0, y), y)}{E(\phi_1(a_0, y), y)} dy \right) v(x, y) = \mu(y)v(x, y).$$

Luego, la solución de la ecuación (5.10) y a la vez de la **EDP auxiliar** (5.3) se pueden expresar como

$$v(x, y) = \exp \left(- \int \frac{F(\phi_1(a_0, y), y)}{E(\phi_1(a_0, y), y)} dy \right) w(x, y) = \mu^{-1}(y)w(x, y). \quad (5.12)$$

Ahora, determinamos la función $v(x, y)$ que aparece en esta última ecuación. Para esto, encontramos las derivadas parciales de la función $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} v_x &= \exp \left(\int \frac{F}{E} dy \right) w_x, \\ v_y &= \exp \left(- \int \frac{F}{E} dy \right) w_y - \frac{F}{E} \exp \left(- \int \frac{F}{E} dy \right) w. \end{aligned}$$

Y sustituimos estas derivadas en la **EDP auxiliar** (5.3), se obtiene entonces la siguiente ecuación

$$D(x, y)w_x + E(x, y)w_y = \exp \left(\int \frac{F}{E} dy \right) Q(x, y).$$

De la ecuación (5.11), se tiene que la ecuación anterior se puede escribir como

$$D(x, y)w_x + E(x, y)w_y = \mu(y)Q(x, y). \quad (5.13)$$

Ahora, resolvemos esta EDP de primer orden. Las ecuaciones características asociadas a esta EDP de primer orden son

$$\frac{dx}{D(x, y)} = \frac{dy}{E(x, y)} = \frac{dw}{\mu(y)Q(x, y)}. \quad (5.14)$$

Para obtener la primera curva característica, tomamos el primer par de ecuaciones, el cual se puede escribir como

$$\frac{dx}{D(x, y)} - \frac{dy}{E(x, y)} = 0.$$

Se puede observar en esta última ecuación que la primera curva característica coincide con la que se obtuvo de la ecuación (5.6) y está dada por

$$\varphi_0(x, y) = a_0.$$

Para obtener la segunda curva característica, tomamos el segundo par de las ecuaciones características

$$\frac{dx}{D(x, y)} = \frac{dw}{\mu(y)Q(x, y)},$$

la cual puede ser escrita como la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dw(x, y)}{dx} = \frac{Q(x, y)}{D(x, y)}\mu(y). \quad (5.15)$$

Ahora, eliminamos la dependencia de la variable y en esta última ecuación, usando la ecuación (5.8), obtenemos que:

$$\frac{dw(x, \gamma_1(x, a_0))}{dx} = \frac{Q(x, \gamma_1(x, a_0))}{D(x, \gamma_1(x, a_0))}\mu(\gamma_1(x, a_0)).$$

Integrando esta ecuación, se sigue que

$$w = \int \frac{Q(x, \gamma_1(x, a_0))}{D(x, \gamma_1(x, a_0))}\mu(\gamma_1(x, a_0))dx + b_0,$$

donde b_0 es una constante de integración, la cual cumple

$$b_0 = \psi_0(a_0) = \psi_0(\varphi_0(x, y)).$$

Así, obtenemos que

$$w = Q_0(x, a_0) + \psi_0(\varphi_0(x, y)),$$

con

$$Q_0(x, a_0) = \int \frac{Q(x, \gamma_1(x, a_0))}{D(x, \gamma_1(x, a_0))}\mu(\gamma_1(x, a_0))dx.$$

Luego, definimos la función

$$\sigma(y) = \mu^{-1}(y),$$

sustituyendo las últimas dos ecuaciones en (5.12), se tiene que la solución de la ecuación diferencial ordinaria (5.10) es

$$v(x, y) = \sigma(y)Q_0(x, a_0) + \sigma(y)\psi_0(\varphi_0(x, y)).$$

Ahora, utilizamos la ecuación (5.8) para quitar la dependencia de la variable y , en el primer término de esta última ecuación, así se obtiene

$$v(x, y) = \sigma(\gamma_1(x, a_0))Q_0(x, a_0) + \sigma(y)\psi_0(\varphi_0(x, y)). \quad (5.16)$$

Finalmente, en forma análoga a la ecuación (5.16), proponemos una solución para la ecuación (5.2) de la siguiente forma

$$u(x, y) = N(y)U(X(x, y), Y(y)) + M(x), \quad (5.17)$$

donde las nuevas variables $X(x, y)$ y $Y(y)$ están definidas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} X(x, y) &= \varphi_0(x, y), \\ Y &= Y(y). \end{aligned} \quad (5.18)$$

La variable $X(x, y)$ cumple con la EDP de primer orden dada por la ecuación (5.10); esto es por como se definió esta nueva variable. Es decir la variable $X(x, y)$ cumple con la ecuación

$$D(x, y)X_x(x, y) + E(x, y)X_y(x, y) = 0. \quad (5.19)$$

Ahora, introducimos la siguiente convección. La función $M(x)$ se introduce para eliminar el término no homogéneo en la ecuación (5.2), lo que implica que:

$$\text{si } Q(x, y) = 0, \text{ entonces } M(x) = 0.$$

Mientras que la función $N(y)$ se introduce para eliminar el término que contiene a la variable incógnita $u(x, y)$, en consecuencia se tiene que:

$$\text{si } F(x, y) = 0, \text{ entonces } N(y) = 1.$$

Para determinar la EDP que cumple la nueva función $U(X(x, y), Y(y))$, encontramos las derivadas parciales de la nueva solución $u(x, y)$, derivando parcialmente la ecuación (5.17), se sigue que:

$$\begin{aligned} u_x &= NX_x U_X + M', \\ u_y &= NX_y U_X + NY_y U_Y + \dot{N} U, \\ u_{xx} &= NX_x^2 U_{XX} + NX_{xx} U_X + M''. \end{aligned}$$

Donde la prima denota la derivada con respecto a la variable x y el punto con respecto de la variable y .

Sustituimos estas derivadas parciales en la EDP (5.2) y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} ANX_x^2 U_{XX} + N(AX_{xx} + DX_x + EX_y)U_X + NEY_y U_Y + \\ (E \dot{N} + FN)U + AM'' + DM' + FM = Q. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ahora, supongamos que las funciones $M(x)$ y $N(y)$ cumplen con las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} AM'' + DM' + FM &= Q(x, y), \\ E \dot{N} + FN &= 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

respectivamente. Con estas últimas ecuaciones y tomando en cuenta que la variable $X(x, y)$ cumple con la EDP (5.19), la EDP (5.21) se reduce a

$$AX_x^2 U_{XX} + AX_{xx} U_X + EY_y U_Y = 0. \quad (5.22)$$

Finalmente, para poder simplificar aun más la ecuación anterior y con el objetivo de obtener la ecuación de calor homogénea, supondremos que la nueva variable $X(x, y)$ cumple con uno de los siguientes casos

- a) $X_{xx} = 0$,
 b) $X_{xx} \neq 0$.

Primero analizaremos el caso cuando $X_{xx} = 0$. Para este caso, la EDP (5.22) se reduce a la siguiente ecuación:

$$AX_x^2 U_{XX} + EY_y U_Y = 0,$$

la cual se puede escribir como,

$$\left(-\frac{E}{AX_x^2}\right) Y_y U_Y = U_{XX}.$$

Ahora, supongamos que la nueva variable $Y(y)$ cumple con la siguiente ecuación

$$Y_y = -\frac{A}{E} X_x^2. \quad (5.23)$$

Entonces, la ecuación (5.22) se reduce a la ecuación de calor homogénea

$$U_Y = U_{XX}. \quad (5.24)$$

Así, la solución de la ecuación (5.2), está dado por la siguiente ecuación

$$u(x, y) = N(y)U(X(x, y), Y(y)) + M(x), \quad (5.25)$$

donde $U(X, Y)$ es la solución de la ecuación de calor homogénea (5.24) y las funciones $M(x)$ y $N(y)$ cumplen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} A(x, \gamma_1(x, a_0))M''(x) + D(x, \gamma_1(x, a_0))M'(x) + F(x, \gamma_1(x, a_0))M(x) &= Q(x, \gamma_1(x, a_0)), \\ E(\phi_1(a_0, y), y) \dot{N}(y) + F(\phi_1(a_0, y), y)N(y) &= 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

respectivamente. Además, integrando la ecuación (5.23) tenemos que la nueva variable $Y(y)$, está dada por

$$Y(y) = -\int \frac{A(\phi_1(a_0, y), y)}{E(\phi_1(a_0, y), y)} X_x^2(\phi_1(a_0, y), y) dy. \quad (5.27)$$

Ahora, analizaremos el caso cuando $X_{xx} \neq 0$. Entonces, escribimos la ecuación (5.22) de la siguiente manera

$$A_1(x, y)U_{XX} + D_1(x, y)U_X + E_1(x, y)U_y = 0, \quad (5.28)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= AX_x^2(x, y), \\ D_1(x, y) &= AX_{xx}(x, y), \\ E_1(x, y) &= E(x, y). \end{aligned}$$

Además, supongamos que la nueva la variable $Y(y)$ cumple con la siguiente ecuación diferencial

$$Y_y(y) = 1.$$

Por lo tanto, de esta ecuación y de la ecuación (5.18) se sigue que

$$\begin{aligned} x &= \phi_2(X, Y), \\ y &= Y. \end{aligned}$$

Esto implica, que podemos escribir la ecuación (5.28) en términos de las nuevas variables $X(x, y)$ y $Y(y)$ como

$$A_1(X, Y)U_{XX} + D_1(X, Y)U_X + E_1(X, Y)U_Y = 0. \quad (5.29)$$

Observemos que esta nueva EDP es análoga a la ecuación original (5.2), a diferencia que ahora la nueva EDP es homogénea y ya no tiene el coeficiente que acompaña al término U . Aplicamos nuevamente el método de Harper a la nueva EDP (5.29) y obtenemos que para este caso, la EDP auxiliar está dada por

$$D_1(X, Y)v_X + E_1(X, Y)v_Y = 0.$$

Sus ecuaciones características son

$$\frac{dX}{D_1(X, Y)} = \frac{dY}{E_1(X, Y)} = \frac{dv}{0}. \quad (5.30)$$

Tomamos el primer par de ecuaciones para obtener la primera curva característica, la cual se puede escribir como

$$\frac{dX}{D_1(X, Y)} - \frac{dY}{E_1(X, Y)} = 0.$$

Observemos que esta ecuación tiene una forma similar a la que se obtuvo cuando se buscó la primera curva característica de la EDP auxiliar (5.3). Así, que suponemos que la primera curva característica asociada a la EDP (5.30) está dada por

$$\varphi_1(X, Y) = a_1 = \text{const.},$$

donde a_1 es una constante de integración. También, esta primera curva característica cumple con la siguiente EDP

$$D_1(X, Y)\varphi_{1X}(X, Y) + E_1(X, Y)\varphi_{1Y}(X, Y) = 0.$$

En forma análoga, a como se realizó en la primera parte de la aplicación del método de Harper, se va a suponer que se pueden obtener las variables independientes $X(x, y)$ y $Y(y)$ de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} X &= \phi_2(a_1, Y), \\ Y &= \gamma_2(X, a_1). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Tomamos el segundo par de ecuaciones para encontrar la segunda curva característica

$$\frac{dX}{D_1(x, y)} = \frac{dv}{0}.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos la segunda curva característica

$$v = v(X, Y) = b_1,$$

donde b_1 es una constante de integración.

Haciendo

$$b_1 = \psi_1(a_1),$$

se obtiene,

$$v = \psi_1(\varphi_1(X, Y)). \quad (5.32)$$

Siguiendo el método de Harper, y en forma análoga a esta ecuación, proponemos la solución para la EDP (5.29) de la forma

$$U(X, Y) = V(Z(X, Y), W(Y)). \quad (5.33)$$

Para este caso, se tiene que $M(X) = 0$ y $N(Y) = 1$. Además, las nuevas variables $Z(X, Y)$ y $W(Y)$, se definen como

$$Z(X, Y) = \varphi_1(X, Y), \quad (5.34)$$

$$W = W(Y). \quad (5.35)$$

La nueva variable $Z(X, Y)$ cumple con la siguiente ecuación

$$D_1(X, Y)Z_X(X, Y) + E_1(X, Y)Z_Y(X, Y) = 0, \quad (5.36)$$

esto debido a la forma en como se definió la nueva variable $Z(X, Y)$. Derivando parcialmente la nueva solución, se sigue que

$$\begin{aligned} U_X &= V_X = Z_X V_Z, \\ U_Y &= V_Y = Z_Y V_Z + W_Y V_W, \\ U_{XX} &= Z_X^2 V_{ZZ} + Z_{XX} V_Z. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas parciales en la EDP (5.29), obtenemos la siguiente EDP

$$A_1 Z_X^2 V_{ZZ} + (A_1 Z_{XX} + D_1 Z_X + E_1 Z_Y) V_Z + E_1 W_Y V_W = 0.$$

Dado que la variable $Z(X, Y)$ cumple con la ecuación (5.36), entonces la EDP anterior se reduce a

$$A_1 Z_X^2 V_{ZZ} + A_1 Z_{XX} V_Z + E_1 W_Y V_W = 0. \quad (5.37)$$

Para poder continuar con la aplicación del método de Harper suponemos que la nueva variable $Z(X, Y)$ cumple con uno de los dos siguientes casos

a) $Z_{XX} = 0$,

b) $Z_{XX} \neq 0$.

En forma analógica al caso cuando $X_{xx} = 0$, si se cumple la condición $Z_{XX} = 0$, entonces el método de Harper termina y la solución de la ecuación (5.37) está en términos de las soluciones de la ecuación de calor

$$V_W = V_{ZZ},$$

donde $W(Y)$ se define de la siguiente manera

$$W(Y) = - \int \frac{A_1(\phi_2(a_1, Y), Y)}{E_1(\phi_2(a_1, Y), Y)} Z_X^2 dY.$$

Finalmente, la solución de la ecuación (5.2) está dada por

$$u(x, y) = N(y)V(Z(X(x, y), Y(y)), W(Y(y))) + M(x), \quad (5.38)$$

donde la función $V(Z, W)$ es la solución de la ecuación de calor homogénea $V_W = V_{ZZ}$ y además las funciones $M(x)$ y $N(y)$ cumple con las ecuaciones (5.21), respectivamente.

Si por el contrario, la variable $Z(X, Y)$ cumple que $Z_{XX} \neq 0$. Entonces, la EDP (5.37) se puede escribir como

$$A_2(X, Y)V_{ZZ} + V_Z + V_W = 0, \quad (5.39)$$

donde

$$A_2(X, Y) = \frac{Z_X^2(X, Y)}{Z_{XX}(X, Y)},$$

y la variable $W(Y)$ se elige de tal manera que cumpla la siguiente ecuación

$$W_Y = \frac{A_1(\phi_2(a_1, Y), Y)}{E_1(\phi_2(a_1, Y), Y)} Z_{XX}.$$

Aplicamos por tercera y última vez el método de Harper, para este caso la EDP auxiliar asociada a la EDP (5.39) está dada por

$$v_Z + v_W = 0. \quad (5.40)$$

Las ecuaciones características asociadas a la EDP anterior son

$$\frac{dZ}{1} = \frac{dW}{1} = \frac{dv}{0}.$$

Obtenemos la primer curva característica con el primer par de ecuaciones característica, la cual está dada por

$$\varphi_2(Z, W) = Z - W = a_2 = \text{const.},$$

con a_2 una constante de integración.

El segundo par de ecuaciones características, se utilizará para encontrar la segunda curva característica, la cual resulta ser:

$$v = v(Z, W) = b_2,$$

donde b_2 es una constante de integración que cumple

$$b_2 = \psi_2(a_2).$$

Por lo tanto, tenemos que la solución de la EDP (5.40) está dada por:

$$v = v(Z, W) = \psi_3(\varphi_2(Z, W)).$$

Nuevamente, proponemos una solución para la EDP (5.39) de la siguiente forma

$$V(Z, W) = P(S(Z, W), T(Z, W)), \quad (5.41)$$

donde las nuevas variables $S(Z, W)$ y $T(W)$, se definen como:

$$\begin{aligned} S(Z, W) &= Z - W, \\ T &= T(W). \end{aligned}$$

Derivando parcialmente la nueva solución dada por (5.41), se tiene que

$$\begin{aligned} V_Z &= P_S, \\ V_W &= -P_Z + T_W P_T, \\ V_{ZZ} &= P_{SS}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas parciales en la ecuación (5.39), obtenemos la siguiente EDP

$$A_2(Z, W)P_{SS} + T_W P_T = 0.$$

Se define la nueva variable $T(W)$ de la siguiente manera

$$T(W) = -A_2(Z, W).$$

Así, la EDP(5.39) se reduce a la ecuación de calor homogénea

$$P_T = P_{SS}.$$

Finalmente, la solución de la ecuación (5.2) está dada por

$$u(x, y) = M(x) + N(y)P(S(Z(X(x, y), Y(y)), W(Y(y))), T(W(Y(y)))), \quad (5.42)$$

donde $P(S, T)$ es la solución de la ecuación de calor homogénea, y las ecuaciones $M(x)$ y $N(y)$ cumplen con las ecuaciones (5.21).

Ejemplo 5.1. *Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial*

$$u_{xx} + xu_x - yu_y + yu = 0.$$

Solución. Para este caso se tiene que $M(x) = 0$. Además, se tiene que

$$A(x, y) = 1, \quad D(x, y) = x, \quad E(x, y) = -y, \quad F(x, y) = y, \quad Q(x, y) = 0.$$

La nueva variable $X(x, y)$ está dada por

$$X(x, y) = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = \ln(xy) = a_0 = \text{const.},$$

y sus derivadas parciales son

$$X_x = \frac{1}{x}, \quad X_y = \frac{1}{y}, \quad X_{xx} = -\frac{1}{x^2} \neq 0.$$

Como tenemos que $X_{xx} \neq 0$, entonces la variable $Y(y)$ se define como $Y(y) = y$.

Proponemos la solución de la forma $u(x, y) = N(y)U(X(x, y), Y(x, y))$, donde la función $N(y)$ cumple con la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dN}{dy} - N = 0.$$

Por lo tanto, la función $N(y)$ está dada por $N(y) = C_0 e^y$. Encontramos $A_1(x, y)$, $D_1(x, y)$ y $E_1(x, y)$, luego se sigue que

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= A(x, y)X_x^2 = \frac{1}{x^2}, \\ D_1(x, y) &= A(x, y)X_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \\ E_1(x, y) &= E(x, y) = y. \end{aligned}$$

Observese que $x = \frac{e^X}{Y}$. Así,

$$\begin{aligned} A_1(X, Y) &= Y^2 e^{-2X}, \\ D_1(X, Y) &= -Y^2 e^{-2X}, \\ E_1(X, Y) &= -Y. \end{aligned}$$

Con estas nuevas variables y la solución propuesta se tiene que la EDP dada se transforma de la siguiente manera

$$Y^2 e^{-2X} U_{XX} - Y^2 e^{-2X} U_X - Y U_Y = 0.$$

Repetimos el procedimiento y ahora se propone una solución de la forma

$$U(X, Y) = V(Z(X, Y), W(Y)),$$

donde la variable $Z(X, Y)$ está dada por

$$Z(X, Y) = \int e^{2X} dX - \int Y dY = \frac{1}{2}e^{2X} - \frac{1}{2}Y^2 = a_1,$$

y sus derivadas parciales son

$$Z_X = e^{2X}, \quad Z_Y = -Y, \quad Z_{XX} = 2e^{2X} \neq 0.$$

Para este caso, la nueva variable $W(Y)$ está definida por

$$W(Y) = \int \frac{Y^2 e^{-2X}}{-Y} (2e^{2X}) dY = -Y^2.$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} e^{2X} &= 2Z - W, \\ Y^2 &= -W. \end{aligned}$$

Encontramos a $A_2(X, Y)$,

$$A_2(X, Y) = \frac{Z_X^2}{Z_{XX}} = \frac{1}{2}e^{2X},$$

entonces la EDP dada se reduce a la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}(2Z - W)V_{ZZ} + V_Z + V_W = 0.$$

Realizamos el procedimiento por tercera y última vez, para esto proponemos una nueva solución de la forma

$$V(Z, W) = P(S(Z, W), T(Z, W)),$$

donde la nueva variable $S(Z, W)$ está dada por:

$$S(Z, W) = \int dZ - \int dW = Z - W = a_2,$$

y la variable $T(W)$ es

$$T(W) = \int \frac{1}{2}(2Z - W)dW = \frac{1}{4}(W + 4a_2)W,$$

se elige $a_2 = \frac{1}{4}$, así, la ecuación se reduce una ecuación de calor homogénea

$$P_T = P_{SS}.$$

Por lo tanto la solución de la EDP está dada por

$$u(x, y) = C_0 e^Y P(S(Z, W), T(W)),$$

donde $P(S, T)$ es la solución de la ecuación de calor, y las constantes C_0 y a_2 se determinan mediante las condiciones iniciales y de contorno asociadas a la EDP dada.

5.2. Análisis de la EDP de segundo orden general mediante el método de Harper

En esta sección analizaremos la EDP de segundo orden con coeficientes variables no homogéneas, cuya forma general esta dada como

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = Q(x, y). \quad (5.43)$$

En forma análoga al método de Harper, se reducirá la EDP anterior en otra EDP más sencilla de resolver. Para empezar con el método, supongamos que $A(x, y) \neq 0$, $B(x, y) \neq 0$ y $C(x, y) \neq 0$ y además que estos coeficientes dependen simultáneamente de las variables independientes x y y .

Aplicando el método de Harper, se propone la solución de la ecuación (5.43) de la siguiente forma

$$u(x, y) = N(y)U(X, Y) + M(x). \quad (5.44)$$

De la misma manera que como se realizo en la sección 5.1, se introducen las funciones $M(x)$ y $N(y)$ para poder eliminar el término no homogéneo y el coeficiente que acompaña a $u(x, y)$, respectivamente de la ecuación (5.43).

La nueva variable $X(x, y)$ queda definida como solución de la EDP asociada, que para este caso esta dada por

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} = 0. \quad (5.45)$$

Si tomamos $u_x = v$, entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$A(x, y)v_x + B(x, y)v_y = 0,$$

donde las ecuaciones características están dadas por

$$\frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)} = \frac{dv}{0}.$$

Luego, la nueva variable $X(x, y)$ queda determinada por

$$X = \int \frac{dx}{A(x, y)} - \int \frac{dy}{B(x, y)} = \varphi_0(x, y) = a_0, \quad (5.46)$$

donde a_0 es una constante de integración.

Derivando parcialmente la solución propuesta en (5.44), se sigue que

$$\begin{aligned}
u_x &= NX_x U_X + NY_x U_Y + M', \\
u_y &= NX_y U_X + NY_y U_Y + \dot{N} U, \\
u_{xx} &= NX_x^2 U_{XX} + 2NX_x Y_x U_{XY} + NY_x^2 U_{YY} + NX_{xx} U_X + NY_{xx} U_Y + M'', \\
u_{xy} &= NX_x X_y U_{XX} + (NX_x Y_y + NY_x X_y) U_{XY} + NY_x Y_y U_{YY} + (NX_{x,y} + \dot{N} X_x) U_X \\
&\quad + (NY_{xy} + \dot{N} Y_x) U_Y, \\
u_{yy} &= NX_y^2 U_{XX} + 2NX_y Y_y U_{XY} + NY_y^2 U_{YY} + (2\dot{N} X_y + NX_{yy}) U_X \\
&\quad + (2\dot{N} Y_y + NY_{yy}) U_Y + \ddot{N} U.
\end{aligned}$$

Y sustituyendo estas derivadas parciales en la EDP (5.43), obtenemos la siguiente EDP

$$\begin{aligned}
&(ANX_x^2 + BNX_x Y_y + CNX_y^2)U_{XX} + [2ANX_x Y_x + BN(X_x Y_y + X_y Y_x) + 2CNX_y Y_y]U_{XY} \\
&+ (ANY_x^2 + BNY_x Y_y + CNY_y^2)U_{YY} + [ANX_{xx} + B(NX_{xy} + \dot{N} X_x) + C(NX_{yy} + 2\dot{N} X_y) \\
&+ DNX_x + ENX_y]U_X + [ANY_{xx} + B(NY_{xy} + \dot{N} Y_x) + C(NY_{yy} + 2\dot{N} Y_y) + DNY_x \\
&+ ENY_y]U_Y + (C\ddot{N} + E\dot{N} + FN)U + AM'' + DM' + FM = Q.
\end{aligned}$$

Ahora, suponemos que las funciones $M(x)$ y $N(y)$ cumplen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$AM'' + DM' + FM = Q, \quad (5.47)$$

$$C\ddot{N} + E\dot{N} + FN = 0, \quad (5.48)$$

respectivamente. Observemos que la ecuación (5.48) con la ecuación (5.21) son iguales, cuando $C = 0$. Entonces, esta última EDP se transforma en la siguiente EDP

$$\begin{aligned}
&N(AX_x^2 + BX_x Y_y + CX_y^2)U_{XX} + N[2AX_x Y_x + B(X_x Y_y + X_y Y_x) + 2CX_y Y_y]U_{XY} \\
&+ N(AY_x^2 + BY_x Y_y + CY_y^2)U_{YY} + [ANX_{xx} + B(NX_{xy} + \dot{N} X_x) + C(NX_{yy} + 2\dot{N} X_y) \\
&+ DNX_x + ENX_y]U_X + [ANY_{xx} + B(NY_{xy} + \dot{N} Y_x) + C(NY_{yy} + 2\dot{N} Y_y) + DNY_x + \\
&ENY_y]U_Y = 0.
\end{aligned}$$

Además, suponemos que la variable $Y(x, y)$ cumple con la siguiente EDP no lineal

$$AY_x^2 + BY_x Y_y + CY_y^2 = 0, \quad (5.49)$$

entonces la EDP anterior se convierte en

$$\begin{aligned}
&N[X_x(AX_x + BY_y) + CX_y^2]U_{XX} + N[2AX_x Y_x + B(X_x Y_y + X_y Y_x) + 2CX_y Y_y]U_{XY} \\
&+ [N(AX_{xx} + BX_{xy} + CX_{yy} + DX_x + EX_y) + \dot{N}(2CX_y + BX_x)]U_X \\
&[N(AY_{xx} + BY_{xy} + CY_{yy} + DY_x + EY_y) + \dot{N}(BY_x + 2CY_y)]U_Y = 0,
\end{aligned}$$

recordemos que la variable $X(x, y)$ cumple con la ecuación (5.45). Por lo tanto, esta EDP se reduce a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & NCX_y^2 U_{XX} + N[2AX_x Y_x + B(X_x Y_y + X_y Y_x) + 2CX_y Y_y] U_{XY} + \\ & [N(AX_{xx} + BX_{xy} + CX_{yy} + DX_x + EX_y) + \dot{N}(2CX_y + BX_x)] U_X + \\ & [N(AY_{xx} + BY_{xy} + CY_{yy} + DY_x + EY_y) + \dot{N}(BY_x + 2CY_y)] U_Y = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Introduciendo las siguientes funciones

$$H_0(f) = Cf_y^2, \quad (5.51)$$

$$H_1(f, g) = 2Afxgx + B(f_x g_y + f_y g_x) + 2Cf_y g_y, \quad (5.52)$$

$$H_2(f) = Af_{xx} + Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y, \quad (5.53)$$

y haciendo

$$A_1(x, y) = H_0(X), \quad (5.54)$$

$$B_1(x, y) = H_1(X, Y), \quad (5.55)$$

$$D_1(x, y) = H_2(X) + \frac{\dot{N}}{N}(BX_x + 2CX_y), \quad (5.56)$$

$$E_1(x, y) = H_2(Y) + \frac{\dot{N}}{N}(BY_x + 2CY_y), \quad (5.57)$$

finalmente la ecuación (5.50) se puede escribir como

$$A_1(x, y)U_{XX} + B_1(x, y)U_{XY} + D_1(x, y)U_X + E_1(x, y)U_Y = 0. \quad (5.58)$$

Por otro lado, supongamos que de las ecuaciones (5.46) y de la solución de la EDP no lineal (5.49) se pueden obtener variables independientes x y y en términos de las nuevas variables X y Y ; es decir,

$$x = \phi_1(X, Y),$$

$$y = \gamma_1(X, Y).$$

Utilizando estas dos últimas ecuaciones, obtenemos que la EDP (5.58) se transforma en la siguiente EDP

$$A_1(X, Y)U_{XX} + B_1(X, Y)U_{XY} + D_1(X, Y)U_X + E_1(X, Y)U_Y = 0, \quad (5.59)$$

donde los coeficientes de esta EDP están dados por

$$A_1(X, Y) = A_1(\phi_1(X, Y), \gamma_1(X, Y)),$$

$$B_1(X, Y) = B_1(\phi_1(X, Y), \gamma_1(X, Y)),$$

$$D_1(X, Y) = D_1(\phi_1(X, Y), \gamma_1(X, Y)),$$

$$E_1(X, Y) = E_1(\phi_1(X, Y), \gamma_1(X, Y)).$$

Antes de continuar con el método de Harper, se encontrará el valor de la variable $Y(x, y)$, la cual cumple con la siguiente EDP no lineal,

$$AY_x^2 + BY_xY_y + CY_y^2 = 0. \quad (5.60)$$

La ecuación anterior es una EDP no lineal, por lo tanto, se utilizará el método de Charpit para encontrar su solución (véase el Apéndice D). Para esto consideremos la siguiente función

$$F(p, q) = Ap^2 + Bpq + Cq^2 = 0, \quad (5.61)$$

donde $p = Y_x$ y $q = Y_y$.

Las ecuaciones características asociadas a esta ecuación son

$$\frac{dx}{B_q + 2A_p} = \frac{dy}{B_p + 2C_q} = \frac{dY}{0} = \frac{-dp}{A_x p^2 + B_x pq + C_x q^2} = \frac{-dq}{A_y p^2 + B_y pq + C_y q^2}.$$

Se observa que el tercer término de las ecuaciones características puede ser eliminado. Así, el valor de la variable $Y(x, y)$ es determinado solo por la ecuación

$$\frac{dx}{B_q + 2A_p} = \frac{dy}{B_p + 2C_q} = \frac{-dp}{A_x p^2 + B_x pq + C_x q^2} = \frac{-dq}{A_y p^2 + B_y pq + C_y q^2},$$

Junto con la ecuación:

$$dY(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy. \quad (5.62)$$

Considerando que la ecuación (5.61) solo es función de p y q , esta ecuación puede considerarse como un ecuación cuadrática tanto de la variable p como de la variable q . Así que, primero consideramos a la ecuación (5.61) como una ecuación cuadrática en la variable q . Luego sus soluciones son

$$\lambda_j(x, y) = \frac{-B(x, y) \pm \sqrt{B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)}}{2C(x, y)}, \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (5.63)$$

Haciendo $q(x, y) = \lambda_j(x, y)p(x, y)$ en la ecuación (5.62), obtenemos la solución

$$Y(x, y) = \int \exp\left(-\int \frac{\lambda_{jx}(x, y)}{\lambda_j(x, y)} dx\right) dx + \int \lambda_j(x, y) \exp\left(-\int \frac{\lambda_{jx}(x, y)}{\lambda_j(x, y)} dx\right) dy. \quad (5.64)$$

En el caso anterior obtuvimos la variable $Y(x, y)$ resolviendo la ecuación cuadrática para la variable $q(x, y)$. Sin embargo, la ecuación cuadrática puede resolverse para la variable $p(x, y)$, para este caso se obtienen los siguiente resultados

$$\begin{aligned} \lambda_j(x, y) &= \frac{-B(x, y) \pm \sqrt{B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)}}{2A(x, y)}, \quad \text{para } j = 1, 2. \\ p(x, y) &= \lambda_j(x, y)q(x, y). \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene que la variable $Y(x, y)$ también puede ser definida como

$$Y(x, y) = \int \lambda_j(x, y) \exp \left(- \int \frac{\lambda_{jy}(x, y)}{\lambda_j(x, y)} dy \right) dx + \int \exp \left(- \int \frac{\lambda_{jy}(x, y)}{\lambda_j(x, y)} dy \right) dy. \quad (5.65)$$

Para poder aplicar nuevamente el método de Harper a la EDP (5.59), se tiene que tomar en cuenta los casos cuando la EDP de segundo orden no homogénea (5.43), es de tipo hiperbólico, parabólico o elíptico, dependiendo del valor del siguiente discriminante

$$B^2(x, y) + 4A(x, y)C(x, y). \quad (5.66)$$

Como en la mayoría de las ecuaciones diferenciales parciales que aparecen en matemáticas financieras son del tipo parabólico y en algunos casos tienen soluciones complejas, como es el caso de la ecuación de Heston, en este trabajo de tesis solamente analizaremos los casos cuando la ecuación (5.43) es de tipo parabólico y elíptico.

5.2.1. Ecuaciones del tipo parabólico

Para el caso cuando la EDP de segundo orden dada por (5.43) sea del tipo parabólico, se tiene que sus coeficientes deben cumplir con la ecuación (5.66), la cual para este caso está dada por

$$B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) = 0, \quad (5.67)$$

y de la ecuación (5.63), se tendrá entonces que las funciones $\lambda_j(x, y)$ son de la forma

$$\lambda_j(x, y) = -\frac{B(x, y)}{2C(x, y)}, \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (5.68)$$

Por otro lado, se tiene que la variable $Y(x, y)$ es solución de la EDP no lineal (5.60)

$$AY_x^2 + BY_xY_y + CY_y^2 = 0.$$

Usando la ecuación (5.68), esta última ecuación se escribe como

$$AY_x^2 + 2\sqrt{AC}Y_xY_y + CY_y^2 = 0,$$

la cual puede factorizarse como

$$(\sqrt{A}Y_x + \sqrt{C}Y_y)^2 = 0.$$

Por lo tanto, para el caso cuando la EDP (5.43) sea de tipo parabólico, la variable $Y(x, y)$ también es solución de la siguiente ecuación

$$\sqrt{A}Y_x + \sqrt{C}Y_y = 0.$$

Ahora, utilizando la función $H_1(f, g)$ definida por (5.52), evaluada en las nuevas variables $X(x, y)$ y $Y(x, y)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} H_1(X, Y) &= 2AX_xY_x + B(X_xY_y + X_yY_x) + 2CX_yY_y \\ &= 2AX_xY_x - 2AX_xY_x - 2CX_yY_y + 2CX_yY_y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si la EDP (5.43) es de tipo parabólico, entonces la función $H_1(X, Y) = 0$ y la EDP (5.58) se reduce a la siguiente EDP

$$A_1(X, Y)U_{XX} + D_1(X, Y)U_X + E_1(X, Y)U_Y = 0.$$

Ejemplo 5.2. Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\text{sen}^2 x u_{xx} - 2y \text{sen} x u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$$

Transformaremos esta EDP a una EDP más sencilla. Para este caso en particular tenemos que $M(x) = 0$, $N(y) = 1$. Además, se tiene que:

$$A(x, y) = \text{sen}^2 x, \quad B(x, y) = -2y \text{sen} x, \quad C(x, y) = y^2, \quad D(x, y) = 0, \quad E(x, y) = 0.$$

Luego, se tiene que

$$B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) = 4y^2 \text{sen}^2 x - 4(\text{sen}^2 x)(y^2) = 0.$$

Entonces la EDP dada es de tipo parabólico y las funciones $\lambda_j(x, y)$ están dadas por

$$\lambda_j(x, y) = \frac{2y \text{sen} x}{2 \text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen} x}{y}.$$

Proponemos la solución de la forma

$$u(x, y) = U(X(x, y), Y(x, y)).$$

La primera curva característica es esta ecuación es la integral de la ecuación característica $\frac{dx}{\text{sen}^2(x)} = \frac{dy}{-2y \text{sen} x}$. La integral de esta ecuación nos define la nueva variable $X(x, y)$:

$$X(x, y) = \int \frac{dx}{\frac{1}{2} \text{sen}(x)} + \int \frac{dy}{y} = 2 \ln \left(\tan \left(\frac{1}{2} x \right) \right) + \ln y.$$

Y la nueva variable $Y(x, y)$ está dada por

$$\begin{aligned} Y(x, y) &= \int \exp \left(- \int \cot x dx \right) dx + \exp \left(\frac{\text{sen} x}{y} \right) \left(- \int \cot x dx \right) dy, \\ &= \ln \left(\tan \left(\frac{1}{2} x \right) \right) + \ln y. \end{aligned}$$

Con las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$\text{sen} x = \frac{2e^{X-Y}}{1 + e^{2(X-Y)}}, \quad \text{cos} x = \frac{1 - e^{2(X-Y)}}{1 + e^{2(X-Y)}}.$$

Por otro lado, las derivadas parciales de estas nuevas variables están dadas por

$$X_x = \frac{2}{\text{sen} x}, \quad X_y = \frac{1}{y}, \quad X_{xx} = \frac{2 \text{cos} x}{\text{sen}^2 x}, \quad X_{xy} = 0, \quad X_{yy} = -\frac{1}{y^2},$$

$$Y_x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad Y_y = \frac{1}{y}, \quad Y_{xx} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad Y_{xy} = 0, \quad Y_{yy} = -\frac{1}{y^2}.$$

Ahora, encontramos las funciones $H_0(X)$, $H_1(X, Y)$, $H_2(X)$ y $H_2(Y)$, las cuales resultan estar dadas por

$$\begin{aligned} H_0(X) &= 1, \\ H_1(X, Y) &= 0, \\ H_2(X) &= 2\cos x - 1 = \frac{1 - 3e^{2(X-Y)}}{1 + e^{2(X-Y)}}, \\ H_2(Y) &= \cos x - 1 = \frac{-2e^{2(X-Y)}}{1 + e^{2(X-Y)}}. \end{aligned}$$

Finalmente, la EDP dada se escribe

$$(1 + e^{2(X-Y)}) U_{XX} + (1 - 3e^{2(X-Y)}) U_X - 2e^{2(X-Y)} U_Y = 0.$$

Observemos que para poder encontrar una solución a esta última EDP podemos aplicar el método de Harper una vez más.

5.2.2. Ecuaciones del tipo elíptico

Para este caso, se tiene que los coeficientes de la EDP (5.43) cumplen con la condición dada por (5.66); es decir, se tiene que

$$B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) < 0.$$

Por lo tanto, la ecuación cuadrática asociada a la EDP (5.43) tendrá raíces complejas, las cuales son

$$\lambda_j = \frac{-B(x, y) \pm i\sqrt{4A(x, y)C(x, y) - B^2(x, y)}}{2C(x, y)}, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Así tenemos que la EDP (5.43) se transformó en una EDP de la forma

$$A_1(X, Y)U_{XX} + B_1(X, Y)U_{XY} + D_1(X, Y)U_X + E_1(X, Y)U_Y = 0. \quad (5.69)$$

Aplicando nuevamente el método de Harper a la EDP anterior. Proponemos la siguiente solución para esta ecuación

$$U(X, Y) = V(Z(X, Y), W(X, Y)), \quad (5.70)$$

donde la nueva variable $Z(X, Y)$ es la solución de la EDP asociada a la ecuación (5.69)

$$A_1(X, Y)v_X + B_1(X, Y)v_Y = 0. \quad (5.71)$$

Para este caso, obtenemos las siguientes ecuaciones características

$$\frac{dX}{A_1(X, Y)} = \frac{dY}{B_1(X, Y)} = \frac{dv}{0}.$$

El primer par de ecuaciones características nos define a la nueva variable $Z(X, Y)$, la cual esta dada por

$$Z(X, Y) = \int \frac{dX}{A_1(X, Y)} - \int \frac{dY}{B_1(X, Y)} = \varphi_1(X, Y) = a_1 = \text{const.}, \quad (5.72)$$

con a_1 es una constante de integración. Además, esta nueva variable $Z(X, Y)$ cumple con la ecuación,

$$A_1(X, Y)Z_X + B_1(X, Y)Z_Y = 0. \quad (5.73)$$

Ahora, para obtener la nueva variable $W(X, Y)$, derivamos parcialmente la nueva solución dada por (5.70), luego se tiene que

$$\begin{aligned} U_X &= Z_X V_Z + W_X V_W, \\ U_Y &= Z_Y V_Z + W_Y V_W, \\ U_{XX} &= Z_X^2 V_{ZZ} + 2Z_X Z_W V_{XY} + Z_Y^2 V_{WW} + Z_{XX} V_X + W_{XX} V_W, \\ U_{XY} &= Z_X Z_Y V_{ZZ} + (Z_X W_Y + Z_Y W_X) V_{ZW} + W_X W_Y V_{WW} + Z_{XY} V_Z + W_{XY} Z_W. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en la EDP (5.69) y utilizando la ecuación (5.71), se obtiene que la ecuación (5.69) se escribe como

$$\begin{aligned} Z_X(A_1 W_X + B_1 W_Y) V_{XY} + W_X(A_1 W_X + B_1 W_Y) V_{YX} \\ + (A_1 Z_{XX} + B_1 Z_{XY} + D_1 Z_X + E_1 Z_Y) V_Z \\ + (A_1 W_{XX} + B_1 W_{XY} + D_1 W_X + E_1 W_Y) V_W = 0. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Supongamos ahora que la variable $W(X, Y)$ cumple con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} W_X(A_1 W_X + B_1 W_Y) &= 0, \\ A_1 W_X + B_1 W_Y &\neq 0, \end{aligned} \quad (5.75)$$

Entonces de la ecuación (5.75) se sigue que

$$W_X = 0. \quad (5.76)$$

De esta misma ecuación, se tiene que la ecuación (5.74) se reduce a la siguiente EDP

$$Z_X B_1 W_Y V_{XY} + (A_1 Z_{XX} + B_1 Z_{XY} + D_1 Z_X + E_1 Z_Y) V_Z + (E_1 W_Y) V_W = 0.$$

Para poder determinar la nueva variable $W(Y)$ supongamos que su derivada con respecto a la variable Y cumple con la siguiente condición

$$Z_X B_1 W_Y = 1.$$

Luego, la nueva variable $W(Y)$ queda definida de la siguiente manera

$$W(Y) = \int \frac{1}{Z_X B_1} dY. \quad (5.77)$$

La EDP (5.59) se transforma en la siguiente EDP

$$V_{ZW} + D_2(Z, W)V_Z + E_2(Z, W)V_W = 0, \quad (5.78)$$

con

$$\begin{aligned} D_2(X, Y) &= A_1Z_{XX} + B_1Z_{XY} + D_1Z_X + E_1Z_Y, \\ E_2(X, Y) &= E_1W_Y. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Por último, supongamos que podemos obtener las nuevas variables independiente X y Y en términos de las variables Z y W ; es decir, de las ecuaciones (5.72) y (5.77) se pueden obtener las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} X &= \phi_2(Z, W), \\ Y &= \gamma_2(Z, W). \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que nuestra EDP original (5.59) se reduce a la siguiente EDP

$$V_{XY} + D_2(Z, W)V_Z + E_1(Z, W)V_W = 0,$$

donde $D_2(Z, W)$ y $E_2(Z, W)$ están definidos como

$$\begin{aligned} D_2(Z, Y) &= D_2(\phi_2(Z, W), \gamma_2(Z, W)), \\ E_2(Z, Y) &= E_2(\phi_2(Z, W), \gamma_2(Z, W)). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Consideremos la siguiente EDP

$$y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0.$$

Para este caso en particular tenemos que $N(y) = 1$ y $M(x) = 0$. Además

$$A = y^2, \quad B = 2xy, \quad C = 2x^2, \quad D = 0, \quad E = y,$$

Luego, se tiene que

$$B(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) = 4x^2y^2 - 8x^2y^2 = -4x^2y^2 < 0.$$

Entonces, se tiene que la ecuación dada es de tipo elíptico, y las funciones $\lambda_j(x, y)$ están dadas por

$$\lambda_j(x, y) = \frac{-2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4y^2(2x^2)}}{2(2x^2)} = \frac{-2xy \pm \sqrt{-4x^2y^2}}{4x^2} = \frac{(-1 \pm i)y}{2x} = \alpha_j \frac{y}{x},$$

donde $\alpha_j = \frac{-1 \pm i}{2}$. Proponemos una solución de la forma

$$u(x, y) = U(X(x, y), Y(x, y)),$$

La ecuación asociada de esta ecuación es $y^2 v_x + 2xy v_y = 0$, donde la variable $X(x, y)$ es la solución de esta ecuación y está dada por

$$X(x, y) = \int x dx - \frac{1}{2} \int y dy = x^2 - \frac{1}{2} y^2.$$

Por otro lado, la nueva variable $Y(x, y)$ es

$$\begin{aligned} Y(x, y) &= \int \exp\left(-\int -\frac{1}{x} dx\right) dx + \alpha_j \int \frac{y}{x} \exp\left(-\int -\frac{1}{x} dx\right) dy \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{\alpha_j}{2} y^2. \end{aligned}$$

Con las ecuaciones anteriores obtenemos los siguientes valores

$$x^2 = \frac{2(\alpha_j X + Y)}{2\alpha_j + 1}, \quad y^2 = \frac{2(2Y - X)}{2\alpha_j + 1}, \quad x^2 y^2 = \frac{4(\alpha_j X + Y)(2Y - X)}{(2\alpha_j + 1)^2}.$$

Encontramos la derivadas parciales de $X(x, y)$ y $Y(x, y)$

$$X_x = 2x, \quad X_y = -y, \quad X_{xx} = 2, \quad X_{xy} = 0, \quad X_{yy} = -1,$$

$$Y_x = x, \quad Y_y = \alpha_j y, \quad Y_{xx} = 1, \quad Y_{xy} = 0, \quad Y_{yy} = \alpha_j.$$

También obtenemos las funciones $H_0(x)$, $H_1(x, y)$, $H_2(x)$ y $H_2(y)$, dadas en la sección 5.2

$$\begin{aligned} H_0(X) &= 2x^2 y^2, \\ H_1(X, Y) &= 2x^2 y^2, \\ H_2(X) &= y^2 - 2x^2, \\ H_2(Y) &= (1 + \alpha_j) y^2 + 2\alpha_j x^2. \end{aligned}$$

La EDP dada se transforma en

$$U_{XX} + U_{XY} + \frac{y^2 - 2x^2}{2x^2 y^2} U_X + \frac{(1 + \alpha_j) y^2 + 2\alpha_j x^2}{2x^2 y^2} U_Y = 0.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{y^2 - 2x^2}{2x^2 y^2} &= -\frac{(2\alpha_j + 1)^2 X}{4(\alpha_j X + Y)(2Y - X)}, \\ \frac{(1 + \alpha_j) y^2 + 2\alpha_j x^2}{2x^2 y^2} &= +\frac{(2\alpha_i + 1)^2 [2Y + (\alpha_j - 1)X]}{4(\alpha_j X + Y)(2Y - X)}, \end{aligned}$$

donde el término $(2\alpha_i + 1)^2 = -1$ para todo j . Finalmente la EDP dada se reduce a la siguiente EDP

$$U_{XX} + U_{XY} + \frac{X}{4(\alpha_j X + Y)(2Y - X)} U_X - \frac{[2Y + (\alpha_j - 1)X]}{4(\alpha_j X + Y)(2Y - X)} U_Y = 0.$$

Ahora, aplicamos nuevamente el método de Harper, proponemos una solución de la forma

$$U(X, Y) = V(Z(X, Y), W(Y)),$$

donde la nueva variable $Z(X, Y)$ es la solución de la ecuación asociada $v_X + v_Y = 0$, por lo tanto $Z(X, Y)$ está dada por

$$Z(X, Y) = \int dX - \int dY = X - Y = a_1 = \text{const.},$$

y la variable $W(Y)$ está dada por

$$W(Y) = \int \frac{1}{B_1 Z_X} dY = Y.$$

Con estas ecuaciones obtenemos que

$$Y = W, \quad X = Z + W,$$

luego

$$\begin{aligned} D_2(X, Y) &= -\frac{[\alpha_j X - 2Y]}{4(\alpha_j X + Y)(2Y - X)}. \\ E_2(X, Y) &= -\frac{([2Y + (\alpha_j - 1)X])}{4(\alpha_j X + Y)(2Y - X)}. \end{aligned}$$

Sustituimos $X = Z + W$ y $Y = W$, obtenemos

$$\begin{aligned} D_2(Z, W) &= -\frac{[\alpha_j Z + (2 + \alpha_j)W]}{4[\alpha_j Z + \overline{\alpha_j}W][W - Z]}. \\ E_2(Z, W) &= -\frac{\overline{(2 + \alpha_j)}Z + [\overline{\alpha_j}W]}{4[\alpha_j Z + \overline{\alpha_j}W][W - Z]}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación se reduce a la siguiente EDP

$$V_{ZW} - \frac{[\alpha_j Z + (2 + \alpha_j)W]}{4[\alpha_j Z + \overline{\alpha_j}W][W - Z]} V_Z - \frac{\overline{(2 + \alpha_j)}Z + [\overline{\alpha_j}W]}{4[\alpha_j Z + \overline{\alpha_j}W][W - Z]} V_W = 0. \quad (5.80)$$

Recordamos que la variable α_j está definida como $\alpha_j = \frac{-1 \pm i}{2}$. Para $j = 1$ se tiene que $\alpha_1 = \frac{-1+i}{2}$ y la EDP resultante es

$$[W - Z][(-1 + i)Z + (1 + i)W] V_{ZW} - [(3 + i)W + 2W] V_Z - [(-3 + i)Z + (1 + i)W] V_W = 0.$$

Para $j = 2$ se tiene que $\alpha_2 = \frac{-1-i}{2}$, obtenemos la EDP siguiente

$$[W - Z][(-1 - i)Z + (1 - i)W] V_{ZW} - [(3 - i)W + 2W] V_Z - [(-3 - i)Z + (1 - i)W] V_W = 0.$$

Capítulo 6

Un nuevo método analítico para la solución del modelo de Heston

En el capítulo anterior se desarrolló detalladamente el método de Harper para una EDP de segundo orden de tipo parabólico. Posteriormente se generalizó dicho método para resolver una EDP de segundo orden. El objetivo de este capítulo es aplicar este método a la EDP de Black-Scholes y a la EDP de Heston.

Iniciaremos el capítulo con la aplicación del método de Harper a la ecuación de Black-Scholes. En dicha aplicación se encuentra una solución a la ecuación de Black-Scholes en términos de la solución de la ecuación de calor.

En la segunda parte, se realiza la aplicación del método de generalizado de Harper a la ecuación de Heston, dicha aplicación se divide en dos casos los cuales dependen del valor que tome el parámetro ρ . En el primer caso, se realiza cuando $\rho = \pm 1$, en este caso la ecuación de Heston es una ecuación de tipo parabólico. El segundo caso es cuando $\rho \in (-1, 1)$, donde la ecuación de Heston es de tipo elíptico.

6.1. Aplicación del método de Harper a la EDP de Black-Scholes

Para aplicar el método de Harper al modelo de Black-Scholes, recordemos que la ecuación de Black-Scholes se escribe como:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{\partial c}{\partial t} - r c = 0. \quad (6.1)$$

Introducimos los siguientes cambios de variables $x = S_t$, $y = t$ y $c(S_t, t) = u(x, y)$. Así, tenemos que la ecuación de Black-Scholes se escribe como

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - r u = 0. \quad (6.2)$$

De acuerdo a la convención introducida en el capítulo 5, tenemos que la nueva función $M(x)$ es de la forma $M(x) = 0$. Además, para este caso se tiene que

$$A(x, y) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2, \quad B(x, y) = 0, \quad C(x, y) = 0, \quad D(x, y) = rx,$$

$$E(x, y) = 1, \quad F(x, y) = -r, \quad Q(x, y) = 0.$$

La ecuación característica asociada a la EDP (6.4) resulta ser

$$\frac{dx}{rx} = \frac{dy}{1}.$$

Luego, obtenemos que la nueva variable $X(x, y)$, la cual es solución de la ecuación anterior y esta dada por

$$X(x, y) = \frac{1}{r} \ln x - y = a_0 = \text{const..}$$

Las derivadas parciales de la variable $X(x, y)$ son

$$X_x(x, y) = \frac{1}{rx}, \quad X_y(x, y) = -1, \quad X_{xx}(x, y) = -\frac{1}{rx^2}, \quad X_{xy} = 0, \quad X_{yy} = 0.$$

Como $X_{xx} \neq 0$, entonces se define a la nueva variable Y como $Y(y) = y$. Ahora, proponemos una solución de la forma $u(x, y) = N(y)U(X(x, y), Y(y))$, donde la nueva función $N(y)$ cumple con la ecuación diferencial ordinaria $\dot{N}(y) - rN(y) = 0$, cuya solución esta dada por $N(y) = c_0 e^{ry}$.

Con esta nueva solución y nuevas variables, la EDP (6.4) se transforma en una EDP de la forma

$$A_1(X, Y)U_{XX} + D_1(X, Y)U_X + E_1(X, Y)U_Y = 0,$$

donde

$$A_1(X, Y) = \frac{\sigma^2 x^2}{2} \left(\frac{1}{r^2 x^2} \right) = \frac{\sigma^2}{2r^2},$$

$$D_1(X, Y) = \frac{\sigma^2 x^2}{2} \left(-\frac{1}{rx^2} \right) = -\frac{\sigma^2}{2r},$$

$$E_1(X, Y) = 1.$$

Así, nuestra nueva ecuación queda expresada de la siguiente manera

$$\frac{\sigma^2}{2r^2}U_{XX} - \frac{\sigma^2}{2r}U_X + U_Y = 0.$$

Aplicamos el procedimiento de Harper una vez más y proponemos una nueva solución de la forma

$$U(X, Y) = V(Z(X, Y), W(Y)).$$

Para este caso, la ecuación característica asociada esta dada por

$$-\frac{2r dx}{\sigma^2} = \frac{dy}{1}.$$

Ahora, definimos la nueva variable $Z(X, Y)$ como la solución de la ecuación anterior; es decir, tenemos que la nueva variable $Z(X, Y)$ esta dada por

$$Z(X, Y) = -\frac{2r}{\sigma^2}X - Y.$$

Las derivadas parciales de esta solución están dadas por

$$Z_X(X, Y) = -\frac{2r}{\sigma^2}, \quad Z_Y(X, Y) = -1, \quad Z_{XX}(X, Y) = 0, \quad Z_{XY} = 0, \quad Z_{YY} = 0.$$

Como la nueva variable $Z(X, Y)$ cumple con la condición $Z_{XX}(X, Y) = 0$, entonces la variable $W(Y)$ queda expresada como

$$W(Y) = -\int \frac{A_1(X, Y)}{E_1(X, Y)} Z_X^2 dY = -\int \frac{2}{\sigma^2} dY = -\frac{2}{\sigma^2} Y.$$

Con estas nuevas variables y la nueva solución propuesta, la EDP (6.4) se reduce a la ecuación de calor homogénea

$$V_W = V_{ZZ}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución de la ecuación de Black-Scholes esta dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N(y)U(X(x, y), Y(y)) \\ &= N(y)V(Z(X(x, y), Y(y)), W(Y(y))) \\ &= c_0 e^{ry} V(Z(X(x, y), Y(y)), W(Y(y))), \end{aligned}$$

donde la función $V(Z, X)$ es la solución de la ecuación de calor homogénea y c_0 es una constante de integración, que se puede determinar mediante las condiciones de contorno asociadas a la ecuación de Black-Scholes.

6.2. Aplicación del método generalizado de Harper a la EDP de Heston

En esta sección aplicaremos el método generalizado de Harper desarrollado en la sección 5.2 a la ecuación de Heston. Para esto, utilizamos la ecuación para el modelo de Heston que se encontró en el capítulo 4 (Véase en la ecuación 4.2), esta ecuación solo depende de dos términos, el precio de activo subyacente S_t y la volatilidad V_t . Tenemos que la ecuación de Heston esta dada por

$$\frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_t^2} + \rho \eta V_t S_t \frac{\partial^2 u}{\partial S_t \partial V_t} + \frac{1}{2} \eta^2 V_t \frac{\partial^2 u}{\partial V_t^2} + r S_t \frac{\partial u}{\partial S_t} + [k(\theta - V_t) - \lambda(S_t, V_t, t)] \frac{\partial u}{\partial V_t} = 0.$$

Introducimos los siguientes cambios de variables $S_t = x$ y $V_t = y$ y usando el hecho de que la función $\lambda(S_t, V_t, t)$ es proporcional a V_t ; es decir, $\lambda(S_t, V_t, t) = \bar{\lambda}V_t$ para un constante $\bar{\lambda}$ arbitraria, obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}x^2y\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \rho\eta xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\eta^2y\frac{\partial^2u}{\partial y^2} + rx\frac{\partial u}{\partial x} + [k(\theta - y) - \bar{\lambda}y]\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (6.3)$$

La EDP anterior esta escrita en la forma general de una EDP de segundo orden. Por lo tanto, podemos aplicar el método generalizado de Harper. Notemos primero que para este caso en particular, las funciones $M(x)$ y $N(y)$ definidas en el método generalizado de Harper toman los valores $M(x) = 0$ y $N(y) = 1$ respectivamente. Además, para este caso tenemos que

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \frac{1}{2}x^2y, & B(x, y) &= \rho\eta xy, & C(y) &= \frac{1}{2}\eta^2y, \\ D(x) &= rx, & E(y) &= k(\theta - y) - \bar{\lambda}y = h(y). \end{aligned} \quad (6.4)$$

La EDP auxiliar cuadrática es

$$\frac{1}{2}\eta^2y\lambda_j^2 + \rho\eta xy\lambda_j + \frac{1}{2}x^2y = 0, \quad (6.5)$$

cuyas raíces estan dadas por

$$\lambda_j(x, y) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}. \quad (6.6)$$

Analicemos primero el valor del discriminante $B^2 - 4AC$, para poder determinar de que tipo es la ecuación de Heston (6.3); es decir, tenemos que

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= \rho^2\eta^2x^2y^2 - 4\left(\frac{1}{2}x^2y\right)\left(\frac{1}{2}\eta^2y\right) \\ &= \rho^2\eta^2x^2y^2 - \eta^2x^2y^2 \\ &= \eta^2x^2y^2(\rho^2 - 1). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Observemos que cuando $\rho = \pm 1$ el discriminante es cero, entonces la ecuación de Heston es de tipo parabólico, y si $\rho \in (-1, 1)$, entonces la ecuación de Heston será de tipo elíptico. Notemos que para el caso en el que la ecuación de Heston sea del tipo hiperbólico es cuando $\rho \in (-\infty, -1)$ ó $\rho \in (1, \infty)$. Sin embargo, este último caso no analizará, ya que una de las hipótesis del modelo de Heston es que $\rho \in [0, 1]$.

Como hemos visto, la ecuación de Heston puede ser parabólica o elíptica, según sea el valor de ρ . Por lo tanto, la aplicación del método de Harper se dividirá en dos casos, cuando la ecuación sea de tipo parabólico; es decir, $\rho = \pm 1$ y cuando la ecuación sea de tipo elíptico; es decir, $\rho \in (-1, 1)$.

6.2.1. Caso I

Supongamos primero, que la ecuación de Heston (6.3) es una ecuación del tipo parabólico; es decir, $\rho = \pm 1$ y para este caso $B^2 - 4AC = 0$. Entonces, las raíces de la ecuación cuadrática asociada (6.5) están dadas por

$$\lambda(x, y) = \frac{-\rho\eta xy}{2\left(\frac{1}{2}\eta^2 y\right)} = \frac{-\rho\eta xy}{y\eta^2} = -\frac{\rho}{\eta}x.$$

Así, obtenemos que

$$\lambda(x, y) = \frac{-\rho}{\eta}x. \quad (6.8)$$

Ahora, proponemos una solución de la forma $u(x, y) = U(X(x, y), Y(x, y))$, donde la nueva variable $X(x, y)$, es la solución de la EDP asociada a la ecuación de Heston, la cual esta dada por

$$\frac{1}{2}xu_x + \rho\eta u_y = 0.$$

Luego, tenemos que la nueva variable $X(x, y)$ se define como

$$X(x, y) = \int \frac{dx}{\frac{1}{2}x} - \int \frac{dy}{\rho\eta} = 2\ln(x) - \frac{y}{\rho\eta} = a_0 = \text{const..}$$

Esta nueva variable cumple con la condición $AX_x + BX_y = yx - yx = 0$.

Por otro lado, de la ecuación (5.64), tenemos que la nueva variable $Y(x, y)$ esta dada por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} Y(x, y) &= \int e^{-\left(\int \frac{-\frac{\rho}{\eta}}{-\frac{\rho x}{\eta}} dx\right)} dx + \int -\frac{\rho x}{\eta} e^{-\left(\int \frac{-\frac{\rho}{\eta}}{-\frac{\rho x}{\eta}} dx\right)} dy \\ &= \ln(x) - \frac{\rho y}{\eta}. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos que

$$\begin{aligned} X(x, y) &= 2\ln(x) - \frac{y}{\rho\eta}, \\ Y(x, y) &= \ln(x) - \frac{\rho y}{\eta}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Las derivadas parciales de estas nuevas variables son

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{2}{x}, & X_y &= -\frac{1}{\rho\eta}, & X_{xx} &= -\frac{2}{x^2}, & X_{xy} &= 0, & X_{yy} &= 0. \\ Y_x &= \frac{1}{x}, & Y_y &= -\frac{\rho}{\eta}, & Y_{xx} &= -\frac{1}{x^2}, & Y_{xy} &= 0, & Y_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Con estas derivadas parciales tenemos que las funciones $H_i(x)$ con $i = 0, 1, 2$. Están dadas por

$$\begin{aligned} H_0(X) &= \left(\frac{1}{2}\eta^2 y\right) \left(-\frac{1}{\rho\eta}\right)^2 = \frac{1}{2\rho^2}y, \\ H_1(X, Y) &= 2(1 - \rho^2)y = 0, \\ H_2(X) &= 2r - y - [K(\theta - y) - \bar{\lambda}y] \left(\frac{1}{\rho\eta}\right) = 2r - y - \frac{1}{\rho\eta}h(y), \\ H_2(Y) &= r - \frac{1}{2}y - [K(\theta - y) - \bar{\lambda}y] \left(\frac{\rho}{\eta}\right) = \frac{1}{2} \left[2r - y - \frac{2\rho}{\eta}h(y)\right]. \end{aligned}$$

Para este caso, se tiene que $N(y) = 1$. Luego, se sigue que

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= \frac{1}{2\rho^2}y, \\ B_1(x, y) &= 0, \\ D_1(x, y) &= 2r - y - \frac{1}{\rho\eta}h(y), \\ E_1(x, y) &= \frac{1}{2} \left[2r - y - \frac{2\rho}{\eta}h(y)\right]. \end{aligned} \tag{6.10}$$

De la definición de las nuevas variables $X(x, y)$ y $Y(x, y)$ dadas por la ecuación (6.9), obtenemos que

$$y = \frac{\rho\eta(2Y - X)}{1 - 2\rho^2}. \tag{6.11}$$

Utilizando la ecuación (6.11) se tiene que

$$\begin{aligned} A_1(X, Y) &= -\frac{\eta}{2\rho}(2Y - X), \\ D_1(X, Y) &= 2r + \rho\eta(2Y - X) - \frac{1}{\rho}f_\rho(X, Y), \\ E_1(X, Y) &= \frac{1}{2} [2r + \rho\eta(2Y - X) - 2\rho f_\rho(X, Y)], \end{aligned}$$

donde la nueva función $f(X, Y)$ se define como

$$f_\rho(X, Y) = \frac{K\theta}{\eta} + \rho(K + \bar{\lambda})(2Y - X). \tag{6.12}$$

Así, obtenemos que la ecuación (6.3) se transforma a

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{2\rho}(2Y - X)U_{XX} + \left[2r + \rho\eta(2Y - X) - \frac{1}{\rho}f_\rho(X, Y)\right]U_X + \\ \frac{1}{2} [2r + \rho\eta(2Y - X) - 2\rho f_\rho(X, Y)]U_Y = 0. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta $\rho = \pm 1$, entonces, obtenemos dos ecuaciones dadas por

a) Para $\rho = 1$,

$$-\frac{\eta}{2}(2Y - X)U_{XX} + [2r + \eta(2Y - X) - f_1(X, Y)]U_X + \frac{1}{2}[2r + \eta(2Y - X) - 2f_1(X, Y)]U_Y = 0. \quad (6.13)$$

b) Para $\rho = -1$,

$$\frac{\eta}{2}(2Y - X)U_{XX} + [2r - \eta(2Y - X) + f_{-1}(X, Y)]U_X + \frac{1}{2}[2r - \eta(2Y - X) + 2f_{-1}(X, Y)]U_Y = 0. \quad (6.14)$$

Finalmente, estas ecuaciones pueden ser resueltas aplicando nuevamente el método de Harper, solo que es necesario conocer los valores de las constantes ρ , η , r , K , θ y $\bar{\lambda}$.

6.2.2. Caso II

Supongamos ahora, que la ecuación de Heston (6.3) es de tipo elíptico; es decir, para este caso se tiene que $\rho \in (-1, 1)$. Luego, las raíces de la ecuación cuadrática asociada (6.5) están dadas por

$$\lambda_j(x, y) = \left(\frac{-\rho \pm i\sqrt{1 - \rho^2}}{\eta} \right) x.$$

Introduciendo las cantidades z_j con $j = 1, 2$, definidas por la ecuación

$$z_j = \left(\frac{-\rho \pm i\sqrt{1 - \rho^2}}{\eta} \right). \quad (6.15)$$

Tenemos que esta última ecuación se escribe como

$$\lambda_j(x, y) = z_j x. \quad (6.16)$$

Ahora, proponemos la solución de la forma $u(x, y) = U(X(x, y), Y(x, y))$, donde la nueva variable $X(x, y)$ es la solución de la siguiente ecuación asociada a la ecuación de Heston (6.3), la cual está dada por

$$\frac{1}{2}x^2 y u_x + \rho \eta x y u_y = 0.$$

Luego, tenemos que la nueva variable $X(x, y)$ se define como

$$X(x, y) = \int \frac{dx}{\frac{1}{2}x} - \int \frac{dy}{\rho\eta} = 2\ln(x) - \frac{y}{\rho\eta} = a_0 = \text{const.},$$

En forma análoga, esta variable cumple con la condición $AX_x + BX_y = xy - xy = 0$.

De la ecuación (5.64), tenemos que la ecuación Y esta dada por

$$Y(x, y) = \ln(x) + z_i y.$$

Finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned} X(x, y) &= 2\ln(x) - \frac{y}{\rho\eta}, \\ Y(x, y) &= \ln(x) + z_i y. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Las derivadas parciales de estas nuevas variables son

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{2}{x}, & X_y &= -\frac{1}{\rho\eta}, & X_{xx} &= -\frac{2}{x^2}, & X_{xy} &= 0, & X_{yy} &= 0, \\ Y_x &= \frac{1}{x}, & Y_y &= z_i, & y_{xx} &= -\frac{1}{x^2}, & Y_{xy} &= 0, & Y_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Con estas derivadas parciales, tenemos que las funciones $H_i(x)$ para $i = 0, 1, 2$, están dadas por

$$\begin{aligned} H_0(X) &= \frac{1}{2}\eta^2 y \left(-\frac{1}{\rho\eta}\right)^2 = \frac{y}{2\rho^2}, \\ H_1(X, Y) &= \left(\frac{\rho + 2\rho^2\eta z_j - \eta z_j}{\rho}\right) y = \frac{g(\rho)}{\rho} y, \\ H_2(X) &= 2r - y - \frac{K(\theta - y) - \bar{\lambda}y}{\eta\rho} = 2r - y - \frac{1}{\rho\eta} h(y), \\ H_2(Y) &= r - \frac{1}{2}y + [K(\theta - y) - \bar{\lambda}y] z_i = \frac{1}{2} [2r - y + 2z_j h(y)], \end{aligned}$$

donde la función $h(y)$ esta definida por la ecuación (6.4) y la función $g(\rho)$ esta definida como $g(\rho) = 2\rho(1 - \rho^2) \pm i(2\rho^2 - 1)\sqrt{1 - \rho^2}$.

En este caso en particular, se tiene que la nueva función $N(Y)$ es de la forma $N(y) = 1$, luego se sigue que

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= \frac{y}{2\rho^2}, \\ B_1(x, y) &= \frac{g(\rho)}{\rho} y, \\ D_1(x, y) &= 2r - y - \frac{1}{\rho\eta} h(y), \\ E_1(x, y) &= \frac{1}{2} [2r - y + 2z_j h(y)]. \end{aligned}$$

De la nuevas variables $X(x, y)$ y $Y(x, y)$ dadas por la ecuación (6.17), obtenemos

$$y = \frac{\rho\eta(2Y - X)}{1 + 2\rho\eta z_j}.$$

Por lo tanto, podemos encontrar

$$\begin{aligned} A_1(X, Y) &= \frac{\eta(2Y - X)}{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)}, \\ B_1(X, Y) &= \frac{\eta(2Y - X)}{1 + 2\rho\eta z_j} g(\rho), \\ D_1(X, Y) &= 2r - \frac{\rho\eta(2Y - X)}{1 + 2\rho\eta z_j} - \frac{1}{\rho\eta} f(X, Y), \\ E_1(X, Y) &= \frac{1}{2} \left[2r - \frac{\rho\eta(2Y - X)}{1 + 2\rho\eta z_j} + 2z_j f(X, Y) \right], \end{aligned}$$

donde la función $f(X, Y)$ está definida de la siguiente manera

$$f(X, Y) = K\theta - \frac{\rho\eta(K + \bar{\lambda})}{1 + 2\rho\eta z_j} (2Y - X). \quad (6.18)$$

Finalmente, la EDP de Heston cuando $\rho \in (-1, 1)$ se reduce a la siguiente EDP

$$\begin{aligned} \frac{\eta(2Y - X)}{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)} U_{XX} + \frac{\eta(2Y - X)}{1 + 2\rho\eta z_j} g(\rho) U_{XY} + \left[2r - \frac{\rho\eta(2Y - X)}{1 + 2\rho\eta z_j} - \frac{1}{\rho\eta} f(X, Y) \right] U_X \\ + \frac{1}{2} \left[2r - \frac{\rho\eta(2Y - X)}{1 + 2\rho\eta z_j} + 2z_j f(X, Y) \right] U_Y = 0. \end{aligned}$$

Dividimos la ecuación entre $2Y - X$ y multiplicamos por $2\eta\rho z_j + 1$ y obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2\rho} U_{XX} + \eta g(\rho) U_{XY} + \left[\left(\frac{1 + 2\rho\eta z_j}{\rho\eta(2Y - X)} \right) (2\rho\eta r - f(X, Y)) - \rho\eta \right] U_X \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + 2\rho\eta z_j}{2Y - X} \right) (2r + 2z_j f(X, Y)) - \rho\eta \right] U_Y = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ahora, aplicamos nuevamente el método de Harper a la ecuación (6.19). Así que para esto, proponemos una nueva solución de siguiente la forma $U(X, Y) = V(Z(X, Y), W(Y))$, donde esta nueva variable $Z(X, Y)$ es la solución de la ecuación auxiliar asociada a la ecuación (6.19), la cual esta dada por

$$\frac{\eta}{2\rho} v_X + \eta g(\rho) v_Y = 0.$$

Luego, tenemos que la nueva variable $Z(X, Y)$ se define como

$$Z(X, Y) = \int 2\rho dX - \int \frac{1}{g(\rho) dY} = 2\rho X - \frac{1}{g(\rho)} Y,$$

y la variable $W(Y)$ esta definida por la ecuación (5.77), para este caso resulta ser

$$W(Y) = \int \frac{1}{2\rho\eta g(\rho)} dY = \frac{1}{2\rho\eta g(\rho)} Y.$$

Por lo, tanto la nuevas variables $Z(X, Y)$ y $W(Y)$ están definidas por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} Z(X, Y) &= 2\rho X - \frac{1}{g(\rho)}Y, \\ W(Y) &= \frac{1}{2\rho\eta g(\rho)}Y. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Con esta nuevas variables la EDP (6.19) se puede escribir de la siguiente forma

$$V_{ZW} + D_2(Z, W)V_Z + E_2(Z, W)V_W = 0,$$

donde los coeficientes $D_2(Z, W)$ y $E_2(Z, W)$ están definidos por la ecuación (5.79), los cuales resultan estar dados por:

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{2g(\rho)} \left\{ \left(\frac{1 + 2\rho\eta z_j}{\eta(2Y - X)} \right) [2r\eta(4\rho g(\rho) - 1) - 2f(X, Y)(2g(\rho) + \eta z_j)] - \rho\eta(4\rho g(\rho) - 1) \right\}, \\ E_1 &= \frac{1}{4\rho\eta g(\rho)} \left\{ \left(\frac{1 + 2\rho\eta z_j}{2Y - X} \right) [2r + 2z_j f(X, Y)] - \rho\eta \right\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, de las ecuaciones (6.20) se sigue que

$$2Y - X = \frac{2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z}{2\rho}.$$

Finalmente, la ecuación (6.3) se transforma en una EDP de la forma

$$V_{ZW} + D_2(Z, W)V_Z + E_2(Z, W)V_Y = 0,$$

donde los coeficientes $D_2(Z, W)$ y $E_2(Z, W)$ están dados por

$$\begin{aligned} D_2(Z, W) &= \frac{1}{2g(\rho)} \left\{ \left(\frac{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r\eta(4\rho g(\rho) - 1) - 2h_2(Z, W)(2g(\rho) + \eta z_j)] \right\} \\ &\quad + \frac{\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)}{2g(\rho)}, \\ E_2(Z, W) &= \frac{1}{4\eta g(\rho)} \left\{ \left(\frac{2(1 + 2\rho\eta z_j)}{2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z} \right) [2r + 2z_j h_2(Z, W)] - \eta \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente la EDP (6.3) se transforma en la siguiente EDP

$$\begin{aligned} &2g(\rho)V_{ZW} + \\ &\left\{ \left(\frac{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r\eta(4\rho g(\rho) - 1) - 2h_2(Z, W)(2g(\rho) + \eta z_j)] + \rho\eta(4\rho g(\rho) - 1) \right\} V_Z \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r + 2z_j h_2(Z, W)] - 1 \right\} V_W = 0, \end{aligned}$$

donde la función $h_2(Z, W)$ esta dada por

$$h_2(Z, W) = K\theta - \frac{\eta(K + \bar{\lambda})[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]}{2(1 + 2\rho\eta z_j)}.$$

Capítulo 7

Soluciones específicas para el modelo de Heston

Como se mencionó en los capítulos 3 y 4, para poder determinar las soluciones del modelo de Heston es necesario conocer el valor de los parámetros ρ , η , r , K , $\bar{\lambda}$ y θ . Dado que la mayoría de los casos que se analizan en matemáticas financieras, los valores de estas constantes se proponen dependiendo del problema que se esté analizando.

Por lo tanto, en este capítulo obtendremos algunas soluciones para el modelo de Heston con algunos valores específicos de estas constantes.

7.1. Caso I

El primer caso que analizaremos en este capítulo corresponde cuando $\rho = \pm 1$, con $K = 0$, $\bar{\lambda} = 0$ y $r \approx 0$. Para esto, analizaremos la ecuación de Heston en dos partes, cuando $\rho = 1$ y posteriormente cuando $\rho = -1$.

7.1.1. Caso a

Empezaremos analizando cuando $\rho = 1$. Para esto, tomamos la ecuación (6.13), la cual esta dada por

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{2}(2Y - X)U_{XX} + [2r + \eta(2Y - X) - f_1(X, Y)]U_X \\ + \frac{1}{2}[2r + \eta(2Y - X) - 2f_1(X, Y)]U_Y = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

donde la función $f_1(X, Y)$ esta dada por (6.12)

$$f_1(X, Y) = \frac{K\theta}{\eta} + (K + \bar{\lambda})(2Y - X).$$

Tomando en cuenta que para el caso cuando $K = 0$, $\bar{\lambda} = 0$, la función $f_1(X, Y)$ toma el valor $f_1(X, Y) = 0$, y además, que el parámetro $r \approx 0$, obtenemos que la ecuación (7.1) se reduce a

$$-\frac{\eta}{2}(2Y - X)U_{XX} + \eta(2Y - X)U_X + \frac{\eta}{2}(2Y - X)U_Y = 0. \quad (7.2)$$

Aplicamos el método de Harper a esta última ecuación. Para este caso en particular, tenemos que las funciones $M(X)$ y $N(Y)$ toman los valores $M(X) = 0$ y $N(Y) = 1$. Además,

$$A_1(X, Y) = -\frac{\eta}{2}(2Y - X), \quad D_1(X, Y) = \eta(2Y - X), \quad E_1(X, Y) = \frac{\eta}{2}(2Y - X). \quad (7.3)$$

Ahora, proponemos una solución de la forma $U(X, Y) = V(Z(X, Y), W(Y))$, donde la nueva variable $Z(X, Y)$ es la solución de la ecuación asociada a la ecuación (7.2), la cual esta dada por

$$\eta(2Y - X)v_X + \frac{\eta}{2}(2Y - X)v_Y = 0.$$

Luego, tenemos que la nueva variable $Z(X, Y)$ esta definida como

$$Z(X, Y) = \int dX - 2 \int dY = X - 2Y = a_1 = const..$$

Las derivadas parciales de la nueva variable $Z(X, Y)$ son

$$Z_X = 1, \quad Z_Y = -2, \quad Z_{XX} = 0, \quad Z_{XY} = 0, \quad Z_{YY} = 0.$$

Como la nueva variable $Z(X, Y)$ cumple con la condición $Z_{XX}(X, Y) = 0$, entonces la variable $W(Y)$ queda expresado como

$$W(Y) = - \int \frac{A_1(X, Y)}{E_1(X, Y)} Z_X^2 dY = \int dY = Y.$$

Con estas nuevas variables y la solución propuesta, la ecuación (7.2) se reduce a la ecuación de calor homogénea

$$V_W = V_{ZZ}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución de la ecuación de Heston está dada por

$$\begin{aligned} c(S_t, V_t, t) &= C_0 e^{-(T-t)} u(S_t, V_t) \\ &= C_0 e^{-(T-t)} u(x(S_t), y(V_t)) \\ &= C_0 e^{-(T-t)} U(X(x(S_t), y(V_t)), Y(x(S_t), y(V_t))) \\ &= C_0 e^{-(T-t)} V(Z(X(x(S_t), y(V_t)), Y(x(S_t), y(V_t))), W(Y(x(S_t), y(V_t))))). \end{aligned}$$

donde la función $V(Z, W)$ es la solución de la ecuación de calor homogénea, C_0 es una constante de integración, que se puede determinar mediante las condiciones de frontera

asociadas a la ecuación de Heston. Y las variables x , y , X , Y , Z y W , están dadas por

$$\begin{aligned} x(S_t) &= S_t, \\ y(V_t) &= V_t, \\ X(x, y) &= 2\ln(x) - \frac{y}{\eta}, \\ Y(x, y) &= \ln(x) - \frac{y}{\eta}, \\ Z(X, Y) &= X - 2Y, \\ W(Y) &= Y. \end{aligned}$$

7.1.2. Caso b

Analizaremos el caso cuando $\rho = -1$. Para esto, tomamos la ecuación (6.14), la cual esta dada por

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2}(2Y - X)U_{XX} + [2r - \eta(2Y - X) + f_{-1}(X, Y)]U_X \\ + \frac{1}{2}[2r - \eta(2Y - X) + 2f_{-1}(X, Y)]U_Y = 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde la función $f_{-1}(X, Y)$ esta dada por (6.12)

$$f_{-1}(X, Y) = \frac{K\theta}{\eta} - (K + \bar{\lambda})(2Y - X).$$

Tomando en cuenta que para el caso cuando $K = 0$, $\bar{\lambda} = 0$, la función $f_{-1}(X, Y)$ toma el valor $f_{-1}(X, Y) = 0$, y además, que el parámetro $r \approx 0$, obtenemos que la ecuación (7.4) se reduce a

$$\frac{\eta}{2}(2Y - X)U_{XX} - \eta(2Y - X)U_X - \frac{\eta}{2}(2Y - X)U_Y = 0. \quad (7.5)$$

Aplicamos el método de Harper a esta última ecuación. Para este caso en particular, tenemos que las funciones $M(X)$ y $N(Y)$ toman los valores $M(X) = 0$ y $N(Y) = 1$. Además,

$$A_1(X, Y) = \frac{\eta}{2}(2Y - X), \quad D_1(X, Y) = -\eta(2Y - X), \quad E_1(X, Y) = -\frac{\eta}{2}(2Y - X). \quad (7.6)$$

Ahora, proponemos una solución de la forma $U(X, Y) = V(Z(X, Y), W(Y))$, donde la nueva variable $Z(X, Y)$ es la solución de la ecuación asociada a la ecuación (7.5), la cual esta dada por

$$-\eta(2Y - X)v_X - \frac{\eta}{2}(2Y - X)v_Y = 0.$$

Luego, tenemos que la nueva variable $Z(X, Y)$ esta definida como

$$Z(X, Y) = \int dX - 2 \int dY = X - 2Y = a_1 = const..$$

Las derivadas parciales de la nueva variable $Z(X, Y)$ son

$$Z_X = 1, \quad Z_Y = -2, \quad Z_{XX} = 0, \quad Z_{XY} = 0, \quad Z_{YY} = 0.$$

Como la nueva variable $Z(X, Y)$ cumple con la condición $Z_{XX}(X, Y) = 0$, entonces la variable $W(Y)$ queda expresada como

$$W(Y) = - \int \frac{A_1(X, Y)}{E_1(X, Y)} Z_X^2 dY = \int dY = Y.$$

Con estas nuevas variables y la solución propuesta, la ecuación (7.2) se reduce a la ecuación de calor homogénea

$$V_W = V_{ZZ}.$$

Por lo tanto tenemos que la solución de la ecuación de Heston está dada por

$$\begin{aligned} c(S_t, V_t, t) &= C_0 e^{-(T-t)} u(S_t, V_t) \\ &= C_0 e^{-(T-t)} u(x(S_t), y(V_t)) \\ &= C_0 e^{-(T-t)} U(X(x(S_t), y(V_t)), Y(x(S_t), y(V_t))) \\ &= C_0 e^{-(T-t)} V(Z(X(x(S_t), y(V_t)), Y(x(S_t), y(V_t))), W(Y(x(S_t), y(V_t))))). \end{aligned}$$

donde la función $V(Z, W)$ es la solución de la ecuación de calor homogénea, C_0 es una constante de integración, que se puede determinar mediante las condiciones de frontera asociadas a la ecuación de Heston. Y las variables x, y, X, Y, Z y W , están dadas por

$$\begin{aligned} x(S_t) &= S_t, \\ y(V_t) &= V_t, \\ X(x, y) &= 2\ln(x) + \frac{y}{\eta}, \\ Y(x, y) &= \ln(x) + \frac{y}{\eta}, \\ Z(X, Y) &= X - 2Y, \\ W(Y) &= Y. \end{aligned}$$

7.2. Caso II

El segundo caso que se analizará en este capítulo es cuando el parámetro ρ de la EDP de Heston pertenece al intervalo $(-1, 1)$. En la primera parte se resolverá la EDP cuando $\rho \in (-1, 1)$ y algunos parámetros con valor fijo. Mientras que en la segunda parte, se resolverá la EDP donde todos los parámetro toman valores específicos.

7.2.1. Caso a

Para este caso tenemos que $\rho \in (-1, 1)$, además, las variables $K, \bar{\lambda}$ y r , toman los valores $K = 0, \bar{\lambda} = 0$ y $r \approx 0$. Para analizar este caso consideramos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & 2g(\rho)V_{ZW} + \\ & \left\{ \left(\frac{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r\eta(4\rho g(\rho) - 1) - 2h_2(Z, W)(2g(\rho) + \eta z_j)] + \rho\eta(4\rho g(\rho) - 1) \right\} V_Z \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r + 2z_j h_2(Z, W)] - 1 \right\} V_W = 0. \end{aligned}$$

Para el caso cuando $K = 0$ y $\bar{\lambda} = 0$, entonces la función $h_2(Z, W) = 0$. Con esto y tomando el valor de $r \approx 0$, se tiene que esta ecuación se escribe como

$$2g(\rho)V_{ZW} + \rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)V_Z + \frac{1}{2}V_W = 0. \quad (7.7)$$

Esta ecuación es la ecuación de Euler-Darboux con coeficientes constantes. Cuya solución puede ser encontrada por el método de separación de variables, dependiendo del valor de la función $g(\rho)$ y de η (véase [17, pág. 24]).

7.2.2. Caso b

Para este último ejemplo, tomemos nuevamente la ecuación

$$2g(\rho)V_{ZW} + \left(\frac{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r\eta(4\rho g(\rho) - 1) - 2h_2(Z, W)(2g(\rho) + \eta z_j)] V_Z + \rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)V_Z + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r + 2z_j h_2(Z, W)] - 1 \right\} V_W = 0. \quad (7.8)$$

Esta ecuación es de la forma

$$A_2(Z, W)V_{ZW} + D_2(Z, W)V_Z + E_2(Z, W)V_W = 0.$$

donde los coeficientes $A_2(Z, W)$, $D_2(Z, W)$ y $E_2(Z, W)$ son números complejos. En este trabajo de tesis solo necesitamos la parte real de estos coeficientes, así que vamos a obtener la parte real de cada uno de estos coeficientes. Empezamos por $A_2(Z, W)$.

$$Re(A_2(Z, W)) = 4\rho(1 - \rho^2).$$

Tenemos que el coeficiente $D_2(Z, W)$ está dado por $D_2(Z, W) =$

$$\left(\frac{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r\eta(4\rho g(\rho) - 1) - 2h_2(Z, W)(2g(\rho) + \eta z_j)] + \rho\eta(4\rho g(\rho) - 1).$$

Luego, lo podemos escribir de la siguiente manera

$$(m \pm in)[(r \pm is) - (q \pm it)] + p \pm io,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} &= m \pm in, \\ 2r\eta(4\rho g(\rho) - 1) &= r \pm is, \\ 2h_2(Z, W)(2g(\rho) + \eta z_j) &= q \pm it, \\ \rho\eta(4\rho g(\rho) - 1) &= p \pm io. \end{aligned}$$

Se tiene que la parte real del coeficiente $D_2(Z, W)$ es

$$m(r - q) - n(s - t) + p.$$

Ahora, encontramos los valores m, n, r, s, q, t y p . Recordando que la función $g(\rho)$ esta dado por $g(\rho) = 2\rho(1 - \rho^2) \pm i(2\rho^2 - 1)\sqrt{1 - \rho^2}$, entonces tenemos que $4\rho g(\rho) - 1$ esta dado por

$$4\rho g(\rho) - 1 = [8\rho^2(1 - \rho^2) - 1] \pm i4\rho(2\rho^2 - 1)\sqrt{1 - \rho^2} = a \pm ib.$$

Así,

$$\begin{aligned} m + in &= \frac{2\rho(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]}, \\ &= \frac{2\rho(1 - 2\rho^2) \pm i4\rho^2\sqrt{1 - \rho^2}}{\eta[2\rho\eta(a \pm ib)W - Z]}, \\ &= \frac{c \pm id}{\eta[2\rho\eta aW - Z] \pm i2\rho\eta^2 bW} \left(\frac{\eta[2\rho\eta aW - Z] \mp i2\rho\eta^2 bW}{\eta[2\rho\eta aW - Z] \mp i2\rho\eta^2 bW} \right), \\ &= \frac{[\eta c[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta^2 b dW] \pm i[\eta d[2\rho\eta aW - Z] - 2\rho\eta^2 b cW]}{\eta^2[2\rho\eta aW - Z]^2 + 4\rho^2\eta^4 b^2 W^2}. \end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned} m &= \frac{[\eta c[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta^2 b dW]}{\eta^2[2\rho\eta aW - Z]^2 + 4\rho^2\eta^4 b^2 W^2}, \\ n &= \frac{[\eta d[2\rho\eta aW - Z] - 2\rho\eta^2 b cW]}{\eta^2[2\rho\eta aW - Z]^2 + 4\rho^2\eta^4 b^2 W^2}. \end{aligned}$$

Ahora, encontremos el valor de r y s .

$$\begin{aligned} r \pm is &= 2r\eta(4\rho g(\rho) - 1) \\ &= 2r\eta(a \pm ib) \\ &= 2r\eta a \pm i2r\eta b. \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} r &= 2r\eta a, \\ s &= 2r\eta b. \end{aligned}$$

Por último, encontremos q y t .

$$\begin{aligned} q \pm it &= 2h_2(Z, W)(2g(\rho) + \eta z_j) \\ &= 2(2g(\rho) + \eta z_j) \left(K\theta - \frac{\eta(K + \bar{\lambda})[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]}{2(1 + 2\rho\eta z_j)} \right) \\ &= (e \pm if) \left[K\theta - \frac{k[2\rho\eta aW - Z] \pm i2\rho\eta k bW}{c \pm id} \left(\frac{c \mp id}{c \mp id} \right) \right] \\ &= e \left(K\theta - \frac{kc[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta k b dW}{c^2 + d^2} \right) - f \left(\frac{2\rho\eta k b cW - kd[2\rho\eta aW - Z]}{c^2 + d^2} \right) \\ &\quad \pm i \left[f \left(K\theta - \frac{kc[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta k b dW}{c^2 + d^2} \right) + e \left(\frac{2\rho\eta k b cW - kd[2\rho\eta aW - Z]}{c^2 + d^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$q = e \left(K\theta - \frac{kc[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta kbdW}{c^2 + d^2} \right) - f \left(\frac{2\rho\eta kbcW - kd[2\rho\eta aW - Z]}{c^2 + d^2} \right),$$

$$t = f \left(K\theta - \frac{kc[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta kbdW}{c^2 + d^2} \right) + e \left(\frac{2\rho\eta kbcW - kd[2\rho\eta aW - Z]}{c^2 + d^2} \right).$$

Finalmente, se tiene que

$$p = \rho\eta a.$$

Ahora, analizamos el coeficiente $E_2(Z, W)$ el cual esta dado por

$$E_2(Z, W) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2(1 + 2\rho\eta z_j)}{\eta[2\rho\eta(4\rho g(\rho) - 1)W - Z]} \right) [2r + 2z_j h_2(Z, W)] - 1 \right\}.$$

De manera análoga, a como se obtuvo la parte real de coeficiente de $D_2(Z, W)$, observemos que

$$E_2(Z, W) = \frac{1}{2} ((m_1 \pm in_1)[2r + (q_1 \pm it_1)] - 1),$$

donde la parte real de esta complejo está dada por

$$Re(E_2(Z, W)) = \frac{1}{2} [(m_1(2r + q_1) - n_1 t_1) - 1].$$

Además, m_1 , n_1 , q_1 y t_1 están dados por

$$m_1 = \frac{[\eta c[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta^2 bdW]}{\rho\eta^2[2\rho\eta aW - Z]^2 + 4\rho^2\eta^4 b^2 W^2},$$

$$n_1 = \frac{[\eta d[2\rho\eta aW - Z] - 2\rho\eta^2 bcW]}{\rho\eta^2[2\rho\eta aW - Z]^2 + 4\rho^2\eta^4 b^2 W^2},$$

$$q_1 = \frac{2\rho}{\eta} \left(K\theta - \frac{kc[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta kbdW}{c^2 + d^2} \right) - \frac{2\sqrt{1 - \rho^2}}{\eta} \left(\frac{2\rho\eta kbcW - kd[2\rho\eta aW - Z]}{c^2 + d^2} \right),$$

$$t_1 = \frac{2\sqrt{1 - \rho^2}}{\eta} \left(K\theta - \frac{kc[2\rho\eta aW - Z] + 2\rho\eta kbdW}{c^2 + d^2} \right) + \frac{2\rho}{\eta} \left(\frac{2\rho\eta kbcW - kd[2\rho\eta aW - Z]}{c^2 + d^2} \right).$$

Luego, la parte real de la ecuación esta dada por

$$4\rho(1 - \rho^2)V_{ZW} + [m(r - q) - n(s - t) + p]V_Z + \frac{1}{2} [(m_1(2r + q_1) - n_1 t_1) - 1]V_W = 0.$$

Obtengamos la ecuación para los siguientes valores de los parámetros $\rho = 0.1$, $K = 1$, $\eta = 0.2$, $r = 0.3$ y $\theta = 0.01$.

$$a = 8\rho^2(1 - \rho^2) - 1 = -0.9208,$$

$$b = 4\rho(2\rho^2 - 1)\sqrt{1 - \rho^2} = -0.392\sqrt{.99},$$

$$c = 2\rho(1 - \rho^2) = .198,$$

$$d = 4\rho^2\sqrt{1 - \rho^2} = 0.04\sqrt{.99},$$

$$e = .592,$$

$$f = 1.92\sqrt{.99},$$

$$k = \rho\eta(K + \bar{\lambda}) = 0.02.$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{-0.007914W - 0.198Z}{0.2(-0.036832W - Z)^2 - 0.000048W^2}, \\
 n &= \frac{\sqrt{.99}(-0.004579W - 0.04Z)}{0.2(-0.036832W - Z)^2 - 0.000048W^2}, \\
 s &= -0.04704\sqrt{.99}, \\
 r &= -0.110496, \\
 q &= 0.00592 + \frac{0.000267W + 0.003865Z}{0.04078}, \\
 t &= \sqrt{.99} \left(0.0192 + \frac{0.000356W + 0.008077Z}{0.04078} \right), \\
 p &= -0.018416, \\
 m_1 &= \frac{-0.007914W - 0.198Z}{0.02(-0.036832W - Z)^2 - 0.000004W^2}, \\
 n_1 &= \frac{\sqrt{.99}(-0.004579W - 0.04Z)}{0.02(-0.036832W - Z)^2 - 0.000004W^2}, \\
 q_1 &= -0.01 + \frac{0.000121W + .001584Z}{0.00815}, \\
 t_1 &= \sqrt{.99} \left[0.01 + \frac{-0.000167W + 0.00404Z}{0.00815} \right].
 \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación (7.8) queda dada como

$$\begin{aligned}
 &0.396V_{ZW} + \\
 &+ \left\{ \frac{-0.007914W - 0.198Z}{0.2(-0.036832W - Z)^2} \left[-0.116416 - \frac{0.003865Z}{0.04078} \right] - 0.018416 \right\} V_Z \\
 &+ \frac{(.99)(-0.004579W - 0.04Z)}{0.2(-0.036832W - Z)^2} \left(-0.06624 - \frac{0.008077Z}{0.04078} \right) V_Z \\
 &+ \left\{ \frac{-0.007914W - 0.198Z}{0.02(-0.036832W - Z)^2} \left[0.59 + \frac{0.001584Z}{0.00815} \right] - 1 \right\} V_W \\
 &+ \frac{(.99)(-0.004579W - 0.04Z)}{0.02(-0.036832W - Z)^2} \left[0.01 + \frac{0.00404Z}{0.00815} \right] V_W = 0.
 \end{aligned}$$

Eliminando términos de cuarto orden, obtenemos que la ecuación anterior se reduce a la siguiente ecuación

$$0.396V_{ZW} + \frac{0.128372}{Z}V_Z = 0, \quad (7.9)$$

cuya solución esta dada por

$$V(Z, W) = \int \exp \left\{ -\frac{0.128372W}{0.396Z} \right\} \Phi_1(Z)dZ + \Psi_1(W). \quad (7.10)$$

De las ecuaciones (6.20) tenemos que

$$U(X, Y) = \int \exp \left\{ -\frac{0.128372Y}{(0.001552 \pm i0.007762\sqrt{.99})X + 0.0396Y} \right\} \Phi_2(X, Y) dX + \Psi_2(Y). \quad (7.11)$$

Considerando el cambio de variable (6.17)

$$u(x, y) = \int \exp \left\{ -\frac{0.256744\ln x + (0.04186 \pm i0.128372\sqrt{.99})y}{(0.041152 \pm i0.007762\sqrt{.99})\ln x - (0.057816 \pm i0.233454\sqrt{.99})y} \right\} \Phi_3(x, y) dx + \Psi_3(x, y).$$

Regresando a las variables originales, obtenemos la siguiente solución

$$u(S_t, V_t) = \int \exp \left\{ -\frac{0.256744\ln S_t + (0.04186 \pm i0.128372\sqrt{.99})V_t}{(0.041152 \pm i0.007762\sqrt{.99})\ln S_t - (0.057816 \pm i0.233454\sqrt{.99})V_t} \right\} \cdot \Phi_4(S_t, V_t) dS_t + \Psi_4(S_t, V_t).$$

Finalmente de la solución propuesta (4.5), tenemos que la solución a la ecuación de Heston para este caso particular está dado por

$$c(S_t, V_t, t) = \exp(-r(T-t)) \int \exp \left\{ -\frac{\alpha_1 \ln S_t + \beta_1 V_t}{\alpha_2 \ln S_t - \beta_2 V_t} \right\} \Phi(S_t, V_t) dS_t + \exp(-r(T-t)) \Psi(S_t, V_t), \quad (7.12)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.256744, \\ \beta_1 &= 0.04186 \pm i0.128372\sqrt{.99}, \\ \alpha_2 &= 0.041152 \pm i0.007762\sqrt{.99}, \\ \beta_2 &= 0.057816 \pm i0.233454\sqrt{.99}, \end{aligned}$$

donde las funciones $\Phi(S_t, V_t)$ y $\Psi(S_t, V_t)$ pueden ser determinadas con las condiciones de frontera e iniciales.

Conclusiones

En este trabajo de tesis presentamos de manera detallada el método de Harper, el cual fue desarrollado para resolver la EDP de segundo orden de Black-Scholes. Además, este método fue generalizado (modificado) para resolver EDP de segundo orden de tipo parabólico lineal. Esto nos permitió desarrollar una nueva herramienta matemática para encontrar soluciones de EDP's de tipo parabólico en términos de soluciones de EDP más sencillas.

Posteriormente en este trabajo de tesis realizamos una generalización del método de Harper para resolver EDP de segundo orden en forma general para los casos parabólico y elíptico; Ya que este tipo de ecuaciones son muy comunes en los problemas de contorno e iniciales que aparecen en matemáticas financieras, al mismo tiempo esta generalización también nos permitió proporcionar una nueva herramienta para resolver dichas EDP's.

Finalmente aplicamos la generalización del método de Harper a la ecuación de Heston, esto nos permitió resolver los siguiente problemas:

- a) Logramos transformar la EDP de Heston de siete términos y tres variables a una EDP de tres términos y dos variables.
- b) En algunos casos particulares en este trabajo de tesis se logró transformar la EDP del modelo de Heston a una ecuación de Calor. Esta transformación será reportada en un artículo de investigación, ya que hasta el momento no existe evidencia de que la EDP de Heston se puede reducir a una ecuación calor
- c) También logramos transformar la EDP del modelo de Heston a una ecuación del tipo elíptico con coeficientes complejos. Para unos valores particulares de los parámetros del modelo de Heston esta EDP elíptica se logro transformar a la conocida EDP de Darboux [17].

Sin embargo, en este trabajo de tesis no reportamos las soluciones de la ecuación de Darboux, ya que la solución de esta ecuación utiliza el método de separación de variables y el método de Riemman [17]. Además, debemos hacer notar que dicha solución no es tan sencilla de expresarse analíticamente debido a la complejidad de los coeficientes de la EDP del modelo de Heston; pero podemos obtener soluciones analíticas para algunos casos particulares de los parámetros del modelo de Heston (Véase la ecuacion 7.7 y 7.9 de la seccion 7).

Como trabajo futuro, se pueden emplear las condiciones iniciales y de contorno para encontrar soluciones específicas del modelo de Heston. Además, podemos aplicar el método generalizado de Harper a otros modelos de volatilidad estocástica como los modelos de Hull-White y Stein-Stein.

Apéndice A

Ecuación de Calor

El problema de contorno y de valores iniciales para la ecuación de calor se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Para resolver este problema de contorno, consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \sqrt{2}dW_t,$$

lo cuál conduce a

$$Y_T = Y_t + \sqrt{2}(W_T - W_t) = Y_t + \sqrt{2}W_{T-t}.$$

La función de densidad condicional de Y_T dado el valor de Y_t esta dado por

$$f_{Y_T|Y_t}(s|S_t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{4(T-t)}(s - Y_t)^2\right\}.$$

Si se definen las variables hacia atrás $x = Y_t$ y $\tau = T - t$, se tiene la siguiente función,

$$p(x, \tau; s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{4\tau}(s - x)^2\right\}.$$

Luego, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \tau} &= -\frac{1}{4\tau\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{4\tau}(s - x)^2\right\} + \frac{(s - x)^2}{8\tau^2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{4\tau}(s - x)^2\right\} \\ &= \left(\frac{(s - x)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right) p.\end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2\tau}(s - x)p,$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\tau}(s-x)\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2\tau}p \\ &= \frac{1}{2\tau}(s-x)\left(\frac{1}{2\tau}(s-x)p\right) - \frac{1}{2\tau}p \\ &= \left(\frac{(s-x)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right)p.\end{aligned}$$

Considérese ahora la función

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)p(x, \tau; s)ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds.$$

En particular, si $\tau = 0$, se cumple que

$$p(x, 0; s) = \delta(s - x),$$

donde $\delta(s - x)$ es una función de Dirac y es tal que su valor es cero para $s \neq x$ e infinito para $s = x$, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s - x)ds = 1.$$

En este caso se cumple que

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\delta(s - x)ds = u_0(x).$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación de calor con una condición inicial resulta ser la siguiente

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds.$$

Apéndice B

Función de Heaviside

Definición B.1. La función de Heaviside $H(x)$ es una función discontinua cuyo valor es 1 si el argumento es positivo y 0 para el resto

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Teorema B.1. Sea $H(x)$ una función de Heaviside. Entonces, se tiene que la función $H(x)$ cumple con las siguientes propiedades

a) El cambio de signo del argumento

$$H(-x) = 1 - H(x).$$

b) La derivada en el sentido de las distribuciones delta de Dirac

$$H'(x - a) = \delta(x - a).$$

c) La transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{H(x - a)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

d) Es la integral de la función delta de Dirac

$$H(x - a) = \int_{-\infty}^x \delta(x - a) dt.$$

Apéndice C

Método de las características

El método de las características se utiliza para encontrar las soluciones de las ecuaciones casi-lineales, las cuales se expresan de la forma

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y = R(x, y), \quad (\text{C.1})$$

donde la solución está dada por

$$f(\phi, \psi) = 0,$$

con f una función arbitraria y $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$ son funciones constantes que son soluciones del sistema de ecuaciones características asociadas:

$$\frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)} = \frac{du}{R(x, y)}.$$

Además, las soluciones de las ecuaciones características

$$\phi = c_1, \quad (\text{C.2})$$

$$\psi = c_2 = c_2(c_1). \quad (\text{C.3})$$

son llamadas curvas características asociadas a la ecuación (C.1)[13].

Para aplicar el método de las características a las ecuaciones lineales de primer orden, las cuales se expresan de la siguiente forma

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = R(x, y), \quad (\text{C.4})$$

primero se realiza un cambio de variable

$$u(x, y) = v(x, y)e^{-\xi(x, y)},$$

donde $\xi(x, y)$, satisface la ecuación

$$A(x, y)\xi_x + B(x, y)\xi_y = R(x, y).$$

Luego, la ecuación (C.4) se reduce a una ecuación de la forma

$$A(x, y)v_x + B(x, y)v_y = R(x, y),$$

cuya solución esta dada por

$$f(\phi, \psi) = 0.$$

Apéndice D

Método de Charpit

Consideremos la EDP de primer orden no lineal de dos variables independientes x y y dada por

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad (\text{D.1})$$

donde $p = u_x$ y $q = u_y$. Y sea $u = u(x, y)$ la superficie integral de la ecuación (D.1).

Derivando la igualdad (D.1) con respecto a x y a y , obtenemos

$$\begin{aligned} F_x + pF_u + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ F_y + pF_u + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Y como $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned} F_x + pF_u + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ F_y + pF_u + F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones características [13] para el sistema de ecuaciones anterior son

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u} = dt. \quad (\text{D.2})$$

Por otro lado, como u está relacionada con p y q mediante la ecuación

$$du = p dx + q dy, \quad (\text{D.3})$$

entonces, se sigue que

$$\frac{du}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q,$$

o bien,

$$\frac{du}{pF_p + qF_q} = dt, \quad (\text{D.4})$$

lo cual nos da la posibilidad de aumentar el sistema (D.2) con una ecuación más.

De esta manera y bajo la hipótesis de que $u = u(x, y)$ es solución de la ecuación (D.1), llegamos al sistema de ecuaciones que junto con la ecuación (D.3) nos da la posibilidad de hallar las integrales solución o ecuaciones características de la ecuación (D.1)

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = dt. \quad (\text{D.5})$$

Por otro lado, las ecuaciones paramétricas asociadas al sistema (D.2), están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= F_p, & \frac{dy}{d\tau} &= F_q, & \frac{dp}{d\tau} &= -(F_x + pF_u), \\ \frac{dq}{d\tau} &= -(F_y + qF_u), & \frac{du}{d\tau} &= -(pF_p + qF_q). \end{aligned}$$

de aquí, se obtiene las funciones $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ que son la solución de la ecuación (D.1).

Bibliografía

- [1] M. A. G. Álvarez. *Introducción a la teoría de la probabilidad. Primer curso*. Fondo de Cultura Económica, 2005.
 - [2] F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 1973.
 - [3] Z. Brzeźniak and T. Zastawniak. *Basic Stochastic Processes: A course through Exercises*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 1998.
 - [4] G. R. Espinoza. El modelo de Hull-White para opciones de volatilidad estocástica: Valuación de opciones sobre futuros del índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores. Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional, 2012.
 - [5] R. Frontczak. Valuing Options in Heston's Stochastic Volatility Model: Another analytical approach. *Journal of Applied Mathematics*, 2011, 2011.
 - [6] J. F. Harper. Reducing Parabolic Partial Differential Equations to Canonical Form. *European Journal of Applied Mathematics*, 5, 1994.
 - [7] S. L. Heston. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies* 6, 6, 1993.
 - [8] D. J. Higham. *An Introduction to Financial Option Valuation*. Cambridge University Press, 2004.
 - [9] D. G. Hobson. Stochastics Volatility. Master's thesis, University of Bath, 1996.
 - [10] J. Hull and A. White. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42, 1987.
 - [11] J. C. Hull. *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. Presentice Hall, edición 4, 2002.
 - [12] K. Itô. Stochastic Integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20, 1994.
 - [13] P. Puri, K. Kythe and M. Schferkötter. *Partial Differential Equations and Mathematic*. CRC Press, 1997.
 - [14] O. Knill. *Probability and Stochastic Processes with Applications*. Overseas Press, 2009.
-

-
- [15] F. V. Martínez. *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Cengage Learning, edición 2, 2008.
- [16] T. Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, volumen 6. World Scientific, 1998.
- [17] M. Smirnov, N. S. Kashlyakav and E. Gliner. *Differential Equations of Mathematical Physics*. North-Holland publishing company-amsterdan, 1964.
- [18] J. Deynne, P. Wilmott and S. Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press, 1993.
- [19] S.-H. Poon. The Heston Option Pricing Model. *Journal of Applied Mathematics*, 2011.
- [20] J. C. Santos. Un nuevo método de resolver la ecuación de calor con coeficientes variables. *Por aparecer*, 2015.
- [21] J. C. Santos. Una modificación del método de harper. *Por aparecer*, 2015.
- [22] E. Stein and J. Stein. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *Reviews of Financial Studies*, 4, 1991.
- [23] Y. Yang. Valuing a European Option with the Heston Model. Master's thesis, Rochester Institute of Technology, 2013.
-