Universidad Tecnológica de la Mixteca

Instituto de Física y Matemáticas

Lic. en Matemáticas Aplicadas

"EL TEOREMA DE TYCHONOFF Y SU APLICACIÓN EN ESPACIOS L^p"

Tesis

Para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Presenta:

PABLO JORGE HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

Directores de tesis:

Dr. Franco Barragán Mendoza
Dr. Victor A. Cruz Barriguete

Huajuapan de León, Oaxaca, diciembre de 2014

El Teorema de Tychonoff y su aplicación en espacios L^p

Pablo Jorge Hernández Hernández

Dedicatoria

A mis queridos padres,
Miguel y Adela por toda su confianza
e inmensurable apoyo.

A mis hermanos,
por orden de aparición:
Edgar, Victor y Daniel
por todo su cariño
y sus valiosas palabras de apoyo.

A Luz,
por su ilimitada comprensión y
fortificante apoyo cuando más lo necesite.

Pablo Jorge Hernández Hernández

Agradecimientos

Dame un pez, y comeré este día, enseñame a pescar
y comeré toda la vida.

Proverbio chino

Primero que todo quiero agradecer a mi familia: a mis señores padres, Miguel Angel Hernández Vásquez y Adela Violeta Hernández Sánchez todo su amor, su confianza y sobre todo su ilimitado apoyo. A ellos debo todo lo que soy, sus consejos me han llevado muy lejos y siempre por el buen camino. A mis hermanos Edgar Miguel, Victor Jesus y Daniel Jesus quiero agradecer por todo su apoyo moral, así como por su inagotable comprensión y cariño. A Luz Méndez Martínez quiero agradecer toda su comprensión y apoyo incondicional en los momentos más difíciles de mi carrera.

Especialmente quiero expresar mis más sinceros agradecimientos al Dr. Victor Alberto Cruz Barriguete por su apoyo incondicional y constante interés durante todo el desarrollo de este trabajo, sin su ayuda esto no hubiera sido posible. Con igual entusiasmo, quiero agradecer al Dr. Franco Barragán Mendoza su valiosa disposición y atención para llevar acabo este trabajo, sus importantes observaciones en cada una de las etapas de la Tesis y sobre todo por el tiempo dedicado a la revisión de la misma. De igual manera, quiero expresar mis agradecimientos a los Doctores Jesús Fernando Tenorio Arvide y Salvador Sánchez Perales por todo el tiempo que ellos dedicaron a la lectura de este trabajo, sus finas observaciones contribuyeron formidablemente a la mejora de este trabajo. También, quiero agradecer al maestro Armando Romero Morales por sus comentarios y observaciones.

También, quiero agradecer a mis maestros de la UTM, especialmente a Verónica Borja Macias y Jesús Alejandro Hernández Tello por toda la confianza, el apoyo y la amistad que me brindaron. Asimismo, quisiera agradecer a cada uno de los maestros que han contribuido en mi formación académica, gracias por su dedicación, de cada uno de ellos he aprendido mucho. Particularmente quiero agradecer al maestro Cruz Humberto Orozco López, por quien descubrí mi gusto por las matemáticas.

Finalmente, quiero agradecer a la SEP por el apoyo económico concedido, mediante la *beca de titulación-2014.* para la conclusión de este trabajo.

A todos y cada uno de los anteriormente mencionados, ¡muchas gracias!

Pablo Jorge Hernández Hernández

Índice general

Prefacio

Todo camino, por más largo que sea. Comienza por un pequeño paso.

Anónimo

La temática de este trabajo se encuentra dentro de las ramas de la matemática conocidas como *Análisis* y *Topología*. La redacción de este trabajo de Tesis tiene como propósito presentar los elementos básicos que permitan comprender *el Teorema de Tychonoff* y mostrar su utilidad en *espacios* L^p. Hablar del Teorema de Tychonoff es hablar de uno de los conceptos más importantes dentro de la Topología como lo es la *compacidad*. La compacidad tuvo sus primeras apariciones alrededor del año 1900. Pero, ¿que es la compacidad? La compacidad es una propiedad meramente topológica que poseen determinados conjuntos y que los hace "parecerse" a los subconjuntos finitos. No obstante, la compacidad puede ser estudiada en conjuntos dotados de diversas estructuras matemáticas que dan lugar a los espacios métricos, espacios topológicos y espacios normados, cada uno de estos espacios goza de importantes propiedades y relaciones que motivan y hacen interesante el estudio de los subconjuntos compactos en dichos espacios. Por esta razón, durante este trabajo estudiamos la compacidad en cada uno de los espacios anteriormente mencionados. El trabajo se estructura de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, se proporcionan los elementos básicos de la *Teoría de Conjuntos* para el desarrollo de nuestro trabajo como lo son: los conjuntos parcialmente ordenados, el Axioma de Elección, los Principios de Inducción y el producto cartesiano de conjuntos.

El Capítulo 2, está dedicado al estudio de los *subconjuntos compactos* en un *espacio métrico*. Presentamos una introducción a los espacios métricos, suficiente para nuestros fines. Se destacan los elementos más notables entre los que figuran: *los subconjuntos abiertos*, *la bola cerrada*, *el n-cubo* y el *ω-cubo*. También, algunos de los resultados más importantes relacionados con la compacidad de los subconjuntos de un espacio métrico, se presentan diversas formas de determinar si un subconjunto de un espacio métrico es compacto, véase, por ejemplo el Teorema 2.62. En este capítulo estudiaremos la compacidad de la bola cerrada unitaria en los *espacios métricos Euclideanos*, lo cual resulta ser relativamente sencillo gracias al *Teorema de Heine-Borel*

2.68. Al final de este capítulo presentamos una serie de interrogantes, consecuencia de intentar generalizar la idea de la demostración del Teorema de Heine-Borel. Podemos adelantar algunas de éstas: ¿Es el ω-cubo un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\omega$? ¿La bola cerrada unitaria es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\omega$?

En el Capítulo 3, se estudia la compacidad del ω-cubo y para ello es necesario generalizar la idea de subconjunto abierto presente de manera muy natural en un espacio métrico lo que motiva el concepto de *espacio topológico*. Bajo el mismo objetivo, se estudia la *topología de Tychonoff* sobre el producto cartesiano de espacios topológicos, pues es con esta topología que se asegura la compacidad del ω-cubo. Algunos autores afirman que el Teorema de Tychonoff es el resultado más importante de la Topología General. Cierto o no, lo que no se discute es el lugar que ocupa dentro del Análisis y la Topología, debido a sus diversas aplicaciones.

En el Capítulo 4 se pretende responder la pregunta: ¿La bola cerrada unitaria es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\omega$? Para lo cual, es necesario estudiar a los *espacios normados*. Como todo espacio normado es también un espacio métrico con la métrica inducida por la norma, todos los conceptos y resultados obtenidos en el Capítulo 2 para espacios métricos son aplicables a espacios normados. Otra propiedad realmente interesante que poseen los espacios normados es que es posible hablar de la *dimensión de un espacio normado*. Veremos entonces, que los *espacios normados de dimensión finita* son muy parecidos a los espacios métricos euclideanos, resulta que en un espacio normado de dimensión finita el Teorema de Heine-Borel sigue siendo válido. Sin embargo, en un espacio normado de dimensión infinita las cosas cambian, la bola cerrada unitaria ya no es un subconjunto compacto. De esta manera, la compacidad, en espacios normados de dimensión infinita, no se puede caracterizar mediante las nociones de subconjunto cerrado y acotado. Entonces, surge la siguiente pregunta ¿Qué condición o condiciones debemos de agregar a un subconjunto de un espacio normado de dimensión infinita, para que se tenga la compacidad? Esta pregunta, motiva nuestro último capítulo y a la vez nos permite cumplir con el objetivo principal de nuestro trabajo de Tesis.

En el Capítulo 5, se estudia la compacidad en dos espacios de funciones diferentes: El espacio de las funciones continuas y el espacios de las funciones Lebesgue integrables. Para ambos espacios se presentan criterios que permiten caracterizar a los subconjuntos compactos. En el espacio de las funciones continuas este criterio se conoce como *el Teorema de Arzelá-Ascoli*. Mientras que en el espacio de las funciones Lebesgue integrables se le conoce como *el Teorema de Frèchet-Kolmogorov* y en la demostración del mismo se utiliza el Teorema de Tychonoff. En las áreas de análisis, ecuaciones en derivadas parciales, espacios de funciones entre otros el Teorema de Frèchet-Kolmogorov representa un papel muy importante.

Algunas consideraciones que hay que tomar en cuenta acerca de la estructura de este trabajo son las siguientes:

- Al principio de cada capítulo hemos presentado un breve resumen de lo que se abordará.
- Con el símbolo ✧ denotamos la culminación de una demostración.
- Al final del trabajo hemos incluido un Glosario de símbolos que contiene los símbolos más relevantes del trabajo y su respectivo significado.
- También, hemos incorporado un índice alfabético y un índice de figuras para facilitar y agilizar la lectura de los capítulos.
- Hemos incluido un apéndice, con la finalidad de motivar la medida e integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y que el lector no encuentre problemas con la lectura del Capítulo 5.

Cabe destacar, que la redacción y estructura de este trabajo se ha llevado acabo pensando siempre en los alumnos como los próximos lectores, por lo que nos propusimos realizar un trabajo de Tesis lo más autocontenido posible con la finalidad de que el joven lector tenga que consultar el menor número de material bibliográfico posible.

Espero que este trabajo les resulte útil, cautivador y motivador.

Pablo Jorge Hernández Hernández
Huajuapan de León, Oaxaca
12 de diciembre de 2014

Capítulo 1

Elementos de la teoría de conjuntos

En todo proceso de elección para el cual se cumplan dos hechos: que el número de elecciones a realizar es infinito y que no se pueda definir de modo general cómo se efectúan esa infinidad de elecciones: El Axioma de Elección es necesario.

José Alfredo Amor Montaño

Muchos conjuntos presentan un orden natural entre sus elementos, como es el caso de los números naturales y enteros. En este capítulo se generaliza esta noción de orden a un conjunto arbitrario. Así también, se presenta un axioma fundamental en Matemáticas; el *Axioma de Elección*. Se hace hincapié en su importancia y se presentan algunas de sus equivalencias más importantes.

1.1 Conjunto parcialmente ordenado

Un orden para un conjunto es definido como una relación que permite comparar elementos del conjunto. A continuación presentamos un primer "tipo" de orden sobre un conjunto.

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Una relación binaria $\preceq$ sobre X es un ***orden parcial para*** X, si cumple las siguientes propiedades:

(1) Para todo $x \in X$, se satisface $x \preceq x$.

(2) Si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces $x = y$, para cada $x, y \in X$.

(3) Si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$, para cada $x, y, z \in X$.

Las propiedades (1), (2) y (3) se conocen como propiedad ***reflexiva***, ***antisimétrica*** y ***transitiva***, respectivamente; al par $(X, \preceq)$ se le llama ***conjunto parcialmente ordenado*** y $x \preceq y$ se lee como: "x precede a y" o "y sigue a x".

Un conjunto parcialmente ordenado X, será indicado por $(X, \preceq)$, siempre que sea necesario indicar explícitamente el orden parcial. Además, si X es un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq X$, la relación inducida sobre B es un orden parcial para B. Esto es, $(B, \preceq)$ es también un conjunto parcialmente ordenado.

Notación 1.2. En un conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$, escribiremos $x \prec y$ si $x \preceq y$ y $x \neq y$.

Enseguida se muestran algunos ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados:

Ejemplo 1.3. En $\mathcal{P}(X)$, la colección de todos los subconjuntos de un conjunto X, la relación $A \preceq B$ definida por $A \preceq B$ si y sólo si $A \subseteq B$, es un orden parcial para $\mathcal{P}(X)$.

Ejemplo 1.4. Dado un conjunto X no vacío. Es posible verificar que la relación $\preceq$ definida como $x \preceq y$ si y sólo si $x = y$, es un orden parcial para X.

Sin embargo, existen conjuntos sobre los cuales podemos definir una relación que no sea un orden parcial, esto es, dicha relación puede no ser: reflexiva, simétrica o transitiva. Como se muestra en los siguientes casos:

Ejemplo 1.5. En $\mathbb{R}$, la relación $\preceq$ definida como $x \preceq y$ si y sólo si $x < y$, donde $<$ es el orden "menor estricto" en $\mathbb{R}$, no es un orden parcial. Ésta no es reflexiva, pues $x \not< x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si cambiamos $<$ por $\leq$, la relación $\preceq$ es un orden parcial para $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.6. En $\mathbb{C}$, definamos la relación $\preceq$ de la siguiente manera, $z_1 \preceq z_2$ si y sólo si $|z_1| \leq |z_2|$. Dicha relación en $\mathbb{C}$, no es un orden parcial, ya que ésta no es antisimétrica. En efecto para $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$ se tiene que $|z_1| \leq |z_2|$ y $|z_2| \leq |z_1|$ sin embargo $z_1 \neq z_2$. Por lo tanto $\preceq$ no es un orden parcial para $\mathbb{C}$.

Los ejemplos anteriores muestran que una relación por más natural que parezca, no necesariamente es un orden parcial.

Un concepto que aparece en un conjunto parcialmente ordenado, como en el conjunto de los números reales, con el orden usual $\leq$, es el de cota superior e inferior.

Definición 1.7. Sean $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A, B \subseteq X$.

(1) Un elemento $a_0 \in X$ se llama ***cota superior de*** A, si para todo $a \in A$ se cumple, $a \preceq a_0$.

(2) Un elemento $b_0 \in X$ es una ***cota inferior de*** B, si para cada $b \in B$ se satisface, $b_0 \preceq b$.

A continuación presentamos un ejemplo de los conceptos anteriores.

Ejemplo 1.8. Dado el conjunto $X = \{1, 3, 5\}$, consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, como en el Ejemplo 1.3. Sea $A = \big\{\{1\}, \{1, 5\}\big\}$. Puesto que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto y $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$, de acuerdo con la parte (2) de la Definición 1.7, se tiene que $\emptyset$ es una cota inferior de A. Sin embargo, el conjunto vacío no es la única cota inferior de A. Notemos que el subconjunto $\{1\}$ también lo es. Por otro lado, como $\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\big\}$, se observa que cualquier elemento de A es un subconjunto del elemento $\{1, 3, 5\}$. Luego de la parte (1) de la Definición 1.7, se sigue que $\{1, 3, 5\}$ es una cota superior de A. No obstante, notemos que el subconjunto $\{1, 5\}$ es también una cota superior de A.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$, y considerando a X como subconjunto de si mismo, la Definición 1.7 motiva los siguientes conceptos.

Definición 1.9. Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado.

(1) Un elemento $M \in X$ se llama ***maximal***, si para todo $x \in X$, $M \preceq x$ implica $M = x$.

(2) Un elemento $m \in X$ se llama ***minimal***, si para cada $x \in X$, $x \preceq m$ implica $m = x$.

Ahora, ilustremos los conceptos de elemento maximal y minimal con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.10. Sea $X = \big\{\square, \triangle, \bigcirc\big\}$. Consideremos a X con el orden parcial determinado por la inclusión de conjuntos como en el Ejemplo 1.3. Dado que, cualesquiera dos objetos diferentes no están relacionados, todo elemento de X es maximal y minimal a la vez.

Cabe mencionar, no siempre existe un elemento maximal como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ definido como en el Ejemplo 1.5. Aquí, no existe elemento maximal, ya que no existe un número real x tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumpla que: $y \leq x$ o y no esté relacionado con x.

Un conjunto parcialmente ordenado en el que cualesquiera dos de sus elementos están relacionados recibe un nombre especial.

Definición 1.12. Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $(X, \preceq)$ es un ***conjunto totalmente ordenado*** si cualesquiera dos de sus elementos son comparables. En otras palabras: si $x, y \in X$, entonces $x \preceq y$ o $y \preceq x$.

La certeza de la existencia de un elemento "más pequeño" en cualquier subconjunto no vacío de un conjunto parcialmente ordenado, da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.13. Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$ se llama ***conjunto bien ordenado***, si todo subconjunto no vacío de X tiene un primer elemento. Es decir, para cada $A \subseteq X$ existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \preceq a$, para cada $a \in A$. En éste caso, decimos que $\preceq$ ***es un buen orden sobre*** X.

Es importante observar que todo conjunto bien ordenado X es también totalmente ordenado, pues todo subconjunto $\{a, b\} \subseteq X$ tiene un primer elemento, y así a y b son comparables.

Ejemplo 1.14. El conjunto de los números naturales es un conjunto bien ordenado con la relación de orden usual.

Ejemplo 1.15. El orden parcial inducido por la relación de contención de subconjuntos, no es un buen orden sobre $\mathcal{P}(X)$, si X es un conjunto que tiene más de un elemento. Por ejemplo, si $X = \{a, b\}$ entonces $\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$ y en la subcolección $\big\{\{a\}, \{b\}\big\}$ de $\mathcal{P}(X)$ ninguno de ambos conjuntos está contenido en el otro.

1.2 Axioma de Elección

Dada una colección infinita de conjuntos no vacíos, ¿es posible definir un conjunto de tal manera que éste contenga un único elemento de cada uno de los conjuntos? A manera de comprender mejor la situación veamos dos ejemplos:

(1) Dada una colección infinita de conjuntos no vacíos donde cada conjunto no vacío consta de un par de zapatos, el izquierdo y el derecho. ¿Se puede elegir un elemento de cada uno de los conjuntos? La respuesta es clara, sí se puede; incluso se puede dar una regla: de cada conjunto (que es, un par de zapatos), elíjase digamos, el zapato derecho.

(2) Dado ahora una colección infinita de conjuntos no vacíos donde cada conjunto consta de un par de calcetines. ¿Se puede elegir un elemento de cada uno de los conjuntos? Es claro, que sí es posible realizar dicha elección. Sin embargo, lo haremos sin dar explícitamente una regla de cómo realizarla, ya que dado un par de calcetines difícilmente se logra diferenciar el calcetín derecho del calcetín izquierdo. Estaremos respondiendo simplemente que existe una elección, sin definirla.

Axioma de Elección 1.16. Si I es un conjunto no vacío de índices y $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos, entonces existe un conjunto S consistente de exactamente un elemento de cada X_α.

Observación 1.17. El Axioma de Elección también se puede expresar como sigue:
Si $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $f \colon I \to \bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que $f(\alpha) \in X_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. A la función f con las propiedades descritas anteriormente se le llama ***función de elección para*** $\bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$.

De este modo el Axioma de Elección dice que toda colección no vacía de conjuntos no vacíos tiene una función de elección. Notemos que el Axioma de Elección garantiza la existencia de dicha función, pero no la exhibe, es decir, no muestra explícitamente la regla de correspondencia para esta función.

Resulta sorprendente que el Axioma de Elección, con su enunciado tan sencillo, sea equivalente a proposiciones que aparentemente nada tienen que ver con él. Por ejemplo, las proposiciones que enunciaremos enseguida.

Lema de Zorn 1.18. Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío, en el que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.

Principio del buen orden 1.19. Todo conjunto puede ser bien ordenado, es decir: si X es cualquier conjunto, entonces existe un orden parcial $\preceq$ de tal forma que $(X, \preceq)$ es un conjunto bien ordenado.

De esta manera, dada la importancia del Axioma de Elección, resulta sustancial tener en cuenta el siguiente resultado, donde se presentan algunas de sus equivalencias más importantes para nuestro trabajo.

Teorema 1.20. Son equivalentes:

(1) Axioma de Elección.

(2) Lema de Zorn.

(3) Principio del Buen Orden.

La demostración escapa a nuestros propósitos. Sin embargo, puede consultar el libro *Topology de Dugundji* [9, pág. 31].

Es importante hacer hincapié sobre la existencia de muchas otras equivalencias del Axioma de Elección, algunas de las cuales pueden ser consultadas en el libro *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias de José A. Amor* [1, pág. 95].

1.3 Principios de Inducción

El *Principio de Inducción Matemática* es, sin lugar a dudas, una de las herramientas más poderosas de las que dispone un matemático para demostrar resultados.

Principio de Inducción Matemática 1.21. Dada una proposición matemática $\boldsymbol{P}(n)$ formulada para todo $n \in \mathbb{N}$, que satisface:

(1) $\boldsymbol{P}(1)$ es cierto,

(2) Si la validez de $\boldsymbol{P}(k)$ para todo $k < n$ implica la validez de $\boldsymbol{P}(n)$, entonces $\boldsymbol{P}(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

No es difícil comprender cómo trabaja este principio. Pensemos las proposiciones $\boldsymbol{P}(n)$ como fichas de dominó: la condición (2) nos dice que si la ficha $\boldsymbol{P}(n)$ cae, entonces tira la siguiente ficha $\boldsymbol{P}(n+1)$. Sin embargo, la condición (1) nos dice que la primera ficha $\boldsymbol{P}(1)$ ha caído. Luego, el Principio de Inducción Matemática simplemente afirma que todas las fichas acaban cayendo una tras otra.

Es posible probar que el Principio de Inducción Matemática es equivalente a el *principio del buen orden para los números naturales*: Cualquier subconjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo. Esta equivalencia nos permite generalizar el Principio de Inducción Matemática a cualquier conjunto bien ordenado, obteniendo así, el *Principio de Inducción Transfinita.*

Principio de Inducción Transfinita 1.22. Consideremos $(I, \preceq)$ un conjunto bien ordenado y sea $\boldsymbol{P}(\alpha)$ una proposición matemática formulada para cada $\alpha \in I$. Supongamos que se cumplen:

(1) Si β_0 es el primer elemento de I, entonces $\boldsymbol{P}(\beta_0)$ es verdadera,

(2) La validez de $\boldsymbol{P}(\beta)$ para cada $\beta \prec \alpha$ implica la validez de $\boldsymbol{P}(\alpha)$, entonces $\boldsymbol{P}(\alpha)$ es verdadera para cada $\alpha \in I$.

Demostración. Supongamos que $\boldsymbol{P}(\alpha)$ no es verdadera para todo $\alpha \in I$. Entonces existe $\alpha_0 \in I$ tal que $\boldsymbol{P}(\alpha_0)$ no es verdadera. Sea $I^{'} = \{\alpha \in I \colon \boldsymbol{P}(\alpha) \text{ es falso}\}$. Luego, de la condición (1) se sigue que $I^{'}$ es un subconjunto no vacío de I tal que $\beta_0 \notin I$. Como I es un conjunto bien ordenado, existe $\alpha_0 \in I^{'}$ tal que para todo elemento $\alpha \in I^{'}$ se tiene que $\alpha_0 \preceq \alpha$. Notemos, que todo elemento $\beta \in I$ con $\beta \prec \alpha_0$ satisface que $\beta \notin I^{'}$. De esta manera se tiene que, $\boldsymbol{P}(\beta)$ es verdadera para todo $\beta \prec \alpha_0$, pero no para α_0, lo que contradice la condición (2). Esta contradicción demuestra lo deseado. ✧

Posteriormente, en la Sección 3.4 veremos una importante aplicación del Principio de Inducción Transfinita.

1.4 Producto Cartesiano

En esta sección se define el *producto cartesiano de conjuntos*, partimos definiendo este concepto para una colección finita de conjuntos, seguidamente lo hacemos para una colección infinita numerable y culminamos la sección definiendo *el producto cartesiano de una colección arbitraria de conjuntos.*

Producto cartesiano de una colección finita de conjuntos

Se define y denota ***el producto cartesiano de una colección finita de conjuntos*** $X_1, \ldots, X_k$ como:

$$\prod_{n=1}^{k} X_n = \Big\{(x_1, \ldots, x_k) \colon x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}\Big\}.$$

Usualmente, el producto cartesiano de los conjuntos $X_1, \ldots, X_k$ también se denota por $X_1 \times \cdots \times X_k$. El producto cartesiano de una colección finita de conjuntos no vacíos es un conjunto no vacío. En efecto, puesto que para cada $n \in \{1, \ldots, k\}$, existe $x_n \in X_n$, basta considerar el elemento $(x_1 \ldots, x_k)$. Por otro lado, notemos que los elementos del conjunto $\prod_{n=1}^{k} X_n$ pueden ser considerados como funciones $f \colon \big\{1, \ldots, k\big\} \to \bigcup_{n=1}^{k} X_n$ tales que, $f(n) \in X_n$ para cada $n \in \{1, \ldots, k\}$.

Generalizando la noción del producto cartesiano de una colección finita de conjuntos, se define enseguida *el producto cartesiano de una colección infinita numerable de conjuntos.*

Producto cartesiano de una colección infinita numerable de conjuntos

Consideremos la colección de conjuntos no vacíos $\big\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\big\}$, ***el producto cartesiano de la familia infinita numerable de conjuntos*** $\big\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\big\}$ se denota y define como:

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \Big\{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \colon x_n \in X_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Para facilitar la referencia de los elementos del conjunto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, denotamos un elemento $(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ mediante, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. También, aludimos al producto cartesiano de la familia de conjuntos $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, mediante la notación $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Observemos que el producto cartesiano $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ puede ser considerado como la familia de todas la funciones $f \colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ tales que, a cada número $k \in \mathbb{N}$ asocian un elemento $f(k)$ en X_k. En este caso, convencerse que el conjunto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ no es vacío ya no resulta tan simple y se requiere del Axioma de Elección 1.16. Posterguemos la justificación para unos párrafos posteriores.

Manteniendo una idea similar a los casos anteriores, enseguida, definimos *el producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos.*

Producto cartesiano de una colección arbitraria de conjuntos

Definición 1.23. Sean I un conjunto no vacío y $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos. El ***producto cartesiano de la familia arbitraria de conjuntos*** $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$, es el conjunto que se denota y define como:

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \left\{ x\colon I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \mid x(\alpha) \in X_\alpha \text{ para cada } \alpha \in I \right\}.$$

Para $\beta \in I$, el conjunto X_β se llama ***β-ésimo factor*** del producto cartesiano $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

Para la colección de conjuntos $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ como en la Definición 1.23, el Axioma de Elección 1.16, garantiza la existencia de una función, $f\colon I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que $f(\alpha) \in X_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. De esta manera, el Axioma de Elección 1.16 asegura que el producto cartesiano $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, no es vacío.

Notación 1.24. De la Observación 1.17, para $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ y $\alpha \in I$, se tiene que $x(\alpha) \in X_\alpha$. Luego, el elemento $x(\alpha) \in X_\alpha$ se denotará por x_α. De esta manera, para aludir a un elemento de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ usamos la notación $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Observemos que no hay nada en las definiciones del producto cartesiano de conjuntos presentadas anteriormente que requiera que los conjuntos sean distintos entre si. De hecho, podrían ser todos iguales a un conjunto no vacío X. En ese caso, el producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_k$ lo denotaremos por X^k y es simplemente el conjunto de todas los elementos de la forma $(x_1, \ldots, x_k)$ con $x_n \in X$, para cada $n \in \{1, \ldots, k\}$. Análogamente, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ se denota por X^ω y es el conjunto de todos los elementos $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que, $x_n \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente ejemplo se sigue como consecuencia de las observaciones anteriores.

Ejemplo 1.25. Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales y k un número entero positivo fijo, entonces $\mathbb{R}^k$ representa el conjunto de todos los elementos $(x_1, \ldots, x_k)$ donde $x_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \{1, \ldots, k\}$. De manera similar, se tiene que $\mathbb{R}^\omega$ es el conjunto de todos los elementos $(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ tales que $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Los subconjuntos de un producto cartesiano de conjuntos reciben un nombre especial, como se muestra en la próxima definición.

Definición 1.26. Sean I un conjunto no vacío y $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos. Si $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, el subconjunto $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ se llama ***subproducto***.

Enseguida, presentamos una función que establece una estrecha relación entre el producto cartesiano de una familia de conjuntos y un conjunto en particular en la colección.

Definición 1.27. Sean I un conjunto no vacío, $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos y $\beta \in I$. La función $\pi_\beta \colon \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\beta$ definida por la regla, $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha\in I}\big) = x_\beta$, para cada $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, se le llama ***proyección sobre la β-ésima coordenada***.

Observación 1.28. Como consecuencia de la Definición 1.27, para $\alpha \in I$ fijo y $A_\alpha \subseteq X_\alpha$, se tiene que $\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ es un subconjunto del producto cartesiano $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Enseguida se presenta una lista de afirmaciones acerca de la relación entre subproductos e imágenes inversas de conjuntos bajo la función proyección presentada en la Definición 1.27.

Proposición 1.29. Sean I un conjunto no vacío y $\{X_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos. Se cumplen las siguientes condiciones:

a) Para cada $\alpha \in I$, sea $A_\alpha \subseteq X_\alpha$. Si $F = \{\alpha \in I \colon A_\alpha \neq X_\alpha\}$, entonces $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$. Además, para cada $J \subseteq I$ tal que $F \subseteq J$, se tiene que $\bigcap_{\alpha\in J} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$.

b) Un subconjunto A de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es un subproducto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ si y sólo si $A = \prod_{\alpha\in I} \pi_\alpha(A)$.

c) Sean A un subproducto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Entonces $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \in A$ si y sólo si existen $\{z_\alpha\}_{\alpha\in I} \in A$ y $J \subseteq I$ tales que $x_\alpha = z_\alpha$, para cada $\alpha \in J$, y $x_\alpha \in \pi_\alpha(A)$ si $\alpha \in I \setminus J$.

Demostración. Probemos a). Para ello verifiquemos que $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ y viceversa. Sea $x \in \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$. Luego, $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$ con $x_\alpha \in A_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. Esto es, para todo $\alpha \in I$, se tiene que, $x \in \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$ y así, $x \in \bigcap_{\alpha\in I} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$. Sin embargo, observemos que:

$$\bigcap_{\alpha\in I} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) = \left(\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha\notin F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)\right). \tag{1.1}$$

Dado que $F = \{\alpha \in I \colon A_\alpha \neq X_\alpha\}$, para todo $\alpha \notin F$, se tiene que $A_\alpha = X_\alpha$. Lo que implica que, $\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, si α no es un elemento de F. Así,

$$\bigcap_{\alpha\notin F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha. \tag{1.2}$$

Luego, de la igualdad (1.2) y la Observación 1.28 se tiene que,

$$\bigcap_{\alpha\in I} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) = \left(\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)\right) \cap \prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) \tag{1.3}$$

Por lo tanto, $x \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$.

Ahora veamos que $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$. Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$, entonces para cada $\alpha \in F$ ocurre que $x_\alpha \in A_\alpha$. Puesto que, para todo $\alpha \notin F$ se satisface que $A_\alpha = X_\alpha$, es claro que, $x_\alpha \in A_\alpha$ para todo $\alpha \notin F$. Por lo tanto, $x \in \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$.

Bajo, las mismas condiciones de la parte a) del Teorema 1.29. Consideremos un subconjunto de índices $J \subseteq I$ tal que $F \subseteq J$. De la ecuación (1.3), haciendo $I = J$ no es difícil ver que se cumple,

$$\bigcap_{\alpha\in J} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha),$$

lo que completa la prueba de a).

Verifiquemos que b) se cumple. Probemos primero que la condición es suficiente. Sea A un subproducto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Entonces, existen $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ tales que $A = \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$. Como, $A_\alpha = \pi_\alpha\left(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$ para cada $\alpha \in I$, se tiene que, $A = \prod_{\alpha\in I} \pi_\alpha(A)$. Verifiquemos enseguida que la condición es necesaria. Supongamos que $A = \prod_{\alpha\in I} \pi_\alpha(A)$. Para cada $\alpha \in I$, de la Definición 1.27 se sigue que, $\pi_\alpha(A) \subseteq X_\alpha$. Luego, de acuerdo con la Definición 1.26, el subconjunto A es un subproducto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Así, se prueba b).

Resta probar c). Sean A un subproducto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Probemos que la condición es necesaria. Supongamos que $x \in A$. Veamos que existen $z \in A$ y $J \subseteq I$ tales que, $x_\alpha = z_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ y $x_\alpha \in \pi_\alpha(A)$ si $\alpha \notin J$. Como $x \in A$, basta tomar $z = x$ y $J = I$. Justifiquemos ahora que la condición es suficiente. Supongamos que existen $z \in A$ y $J \subseteq I$ tales que, $x_\alpha = z_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ y $x_\alpha \in \pi_\alpha(A)$ si $\alpha \notin J$. Comprobemos que $x \in A$. Dado que A es un subproducto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, por la parte b) del Teorema 1.29 sabemos que $A = \prod_{\alpha\in I} \pi_\alpha(A)$. De esta manera, es suficiente probar que para cada $\alpha \in I$ se satisface que, $x_\alpha \in \pi_\alpha(A)$. Pero, esto es cierto, pues por hipótesis sabemos que si $\alpha \in J$, $x_\alpha = z_\alpha$ lo que implica que, $x_\alpha \in \pi_\alpha(A)$ y para cada $\alpha \notin J$ se tiene que, $x_\alpha \in \pi_\alpha(A)$. Por lo tanto, $x \in A$. ✧

Capítulo 2

Compacidad en espacios métricos

Encontrar lo sencillo dentro de lo complejo, lo finito dentro de lo infinito no es una mala descripción del objetivo y la esencia de las matemáticas.

Jacob Schwartz

Algunos de los objetivos de este capítulo son: presentar el concepto de *subconjunto compacto* en un *espacio métrico* y mostrar algunas maneras para caracterizar dichos subconjuntos. Particularmente, estamos interesados en los subconjuntos compactos de un *espacio métrico euclideano*, ya que nuestro objetivo principal en este capítulo es estudiar la *compacidad* de *la bola cerrada* en un espacio métrico euclideano. Con la finalidad de cumplir nuestros objetivos, presentamos en primer lugar algunos conceptos y resultados fundamentales en espacios métricos en general.

2.1 Espacios métricos

La noción de qué tan "cerca" o "lejos" estamos de un determinado objeto está íntimamente ligado al concepto de *distancia*. Para formalizar el concepto de distancia entre dos entidades, convenimos inicialmente que la distancia es una función la cual, a cada par de objetos en un conjunto determinado le asigna un número real positivo (su "separación"). Sin embargo, esta función no puede ser arbitraria como se ve en la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ es una ***métrica*** o ***distancia en*** X si cumple:

(1) Para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(2) Para todo $x, y \in X$, se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) Para cualesquiera $x, y, z \in X$, se satisface $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

A la propiedad (3) se le conoce como ***desigualdad del tríangulo***. Mientras que al par (X, d) se le llama ***espacio métrico***.

Dado un espacio métrico (X, d), si la métrica está implícita o no hay peligro de confusión nos referimos a (X, d) simplemente como el espacio métrico X.

Es importante, destacar que en un mismo conjunto, es posible definir diferentes métricas, que dan lugar a diferentes espacios métricos. Más adelante, se presentarán algunos ejemplos.

En un espacio métrico (X, d), dado cualquier subconjunto A de X, de la Definición 2.1, se cumple que para cualesquiera dos elementos $x, y \in A$, la distancia $d(x, y)$ entre ellos, está bien definida. Esto motiva el siguiente concepto.

Definición 2.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Si A es un subconjunto no vacío de X, entonces la función $d_A \colon A \times A \to \mathbb{R}$ definida por $d_A(x, y) = d(x, y)$ (la función d restringida al subproducto $A \times A$) es una métrica en A y al par (A, d_A) se le llama ***subespacio métrico de*** (X, d).

Notación 2.3. Para la métrica de un subespacio se mantiene la misma notación que para la métrica en el espacio métrico, a menos que sea necesario, se especificará lo contrario.

El siguiente ejemplo muestra una métrica que aunque carece de complejidad, nos indica que todo conjunto no vacío puede ser dotado de una métrica.

Ejemplo 2.4. Dado cualquier conjunto no vacío X, la función $\overline{d} \colon X \times X \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\overline{d}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \; x \neq y; \\ 0, & \text{si } \; x = y, \end{cases}$$

es una métrica en X. A esta métrica se le llama ***métrica discreta en*** X y se dice que $(X, \overline{d})$ es un ***espacio métrico discreto***. De esta manera, todo conjunto $X \neq \emptyset$ admite una métrica.

Enseguida, definimos en $\mathbb{R}^n$ la *métrica Euclideana*, que da origen a un espacio métrico bastante famoso por los cursos de cálculo de varias variables, el *espacio métrico euclideano*.

Ejemplo 2.5. Para algún $n \in \mathbb{N}$ fijo, sea $\mathbb{R}^n$ como en el Ejemplo 1.25. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, la función $d_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por la regla,

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

es una métrica en $\mathbb{R}^n$. Esta métrica se llama ***métrica Euclideana*** y a $(\mathbb{R}^n, d_2)$ se le llama ***espacio métrico euclideano***. Es común referirse a la métrica Euclideana en $\mathbb{R}^n$, como la ***métrica usual*** en $\mathbb{R}^n$.
Cuando $n = 1$, se tiene el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, donde la ***métrica usual*** se define y denota de la siguiente manera, $d_1(x, y) = |x - y|$, para cualesquiera x, y en $\mathbb{R}$ y $| \cdot |$ denota la función valor absoluto.

Notación 2.6. De ahora en adelante, nos referimos al elemento $\underbrace{(0,\ldots,0)}_{n\text{-veces}} \in \mathbb{R}^n$ como ***el origen en*** $\mathbb{R}^n$ y lo denotamos con $\vec{0}$. A excepción, del caso $n = 1$, que seguirá siendo denotado únicamente por 0.

De los Ejemplos 2.4 y 2.5 sabemos que en $\mathbb{R}^n$ es posible definir la métrica discreta $\overline{d}$, que origina el espacio métrico discreto, y la métrica Euclideana que da lugar al espacio métrico euclideano. Sin embargo, no son las únicas métricas que pueden ser definidas en $\mathbb{R}^n$. Una tercer métrica en $\mathbb{R}^n$ se exhibe en el siguiente ejemplo.

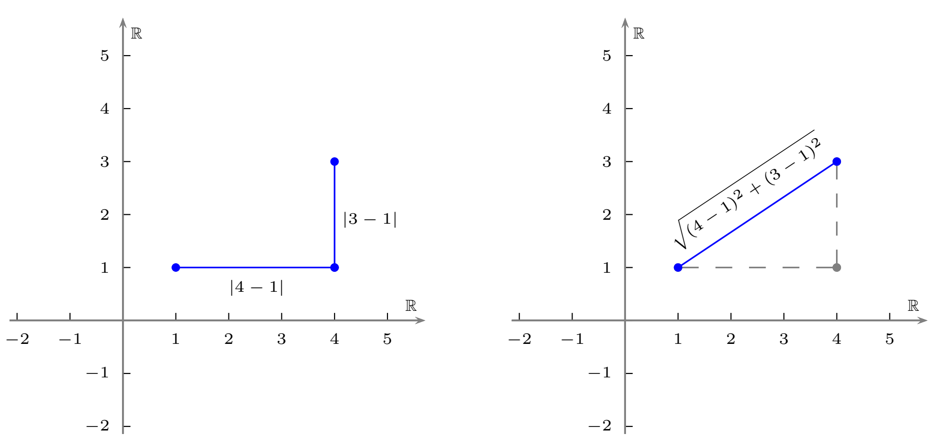
Ejemplo 2.7. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$ fijo. La función $d_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, descrita por la regla,

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

es una métrica en $\mathbb{R}^n$, a la que nos referiremos como ***la métrica del taxista***.

En el Ejemplo 2.7 se manifiesta una cuestión bastante importante que ya había sido anticipada en el párrafo que le sucede a la Definición 2.1. En un mismo conjunto se pueden definir distancias distintas. La elección de una u otra dependerá de nuestros intereses y de su conveniencia para resolver problemas.

No es difícil interpretar cómo actúan las métricas d_1 y d_2 en $\mathbb{R}^2$ a la hora de calcular la distancia entre dos elementos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$. Utilizando la métrica del taxista, hallamos primero la distancia horizontal entre x_1 y x_2, luego, le agregamos la distancia vertical entre y_1 e y_2. Mientras que, con la métrica Euclideana, lo hacemos aplicando *el Teorema de Pitágoras* para hallar la longitud de la hipotenusa del triángulo definido por los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y (x_2, y_1). En la Figura 2.1 se ilustra el análisis anterior para los puntos $(1, 1)$ y $(3, 4)$ en $\mathbb{R}^2$.



(a) Métrica d_1

(b) Métrica d_2

Figura 2.1: Un par de métricas en $\mathbb{R}^2$.

Continuando con la comparación de las métricas del taxista y Euclideana sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$, no es difícil plantear situaciones en las que una métrica sea más conveniente que la otra. Imaginemos que nos encontramos en una gran ciudad con todas sus calles dispuestas en sentido horizontal y vertical y etiquetadas con los números enteros, así, es posible trazar sobre la gran ciudad un gran plano cartesiano imaginario, localizando el centro de la ciudad en punto con coordenadas $(0,0)$. Un taxista que recoge un pasaje en la esquina con coordenadas $(1,1)$ con destino en la esquina con coordenadas $(4,3)$, irá primero sobre la calle 1-horizontal en dirección de la calle 3-vertical hasta llegar a la esquina $(1,3)$ y luego girará en dirección de la calle 3-horizontal hasta llegar a su destino, la esquina $(4,3)$. Es claro, que si deseamos medir la distancia que recorrió el taxista, es más natural usar la métrica del taxista que la métrica Euclideana. De aquí, por que la denominación métrica del taxista.

2.2 Subconjuntos abiertos

Es momento de exhibir una primera clase de subconjuntos presente en un espacio métrico en general, los *subconjuntos abiertos*. No obstante, mostremos primeramente el concepto de *bola abierta*, elemento fundamental para definir a los subconjuntos abiertos.

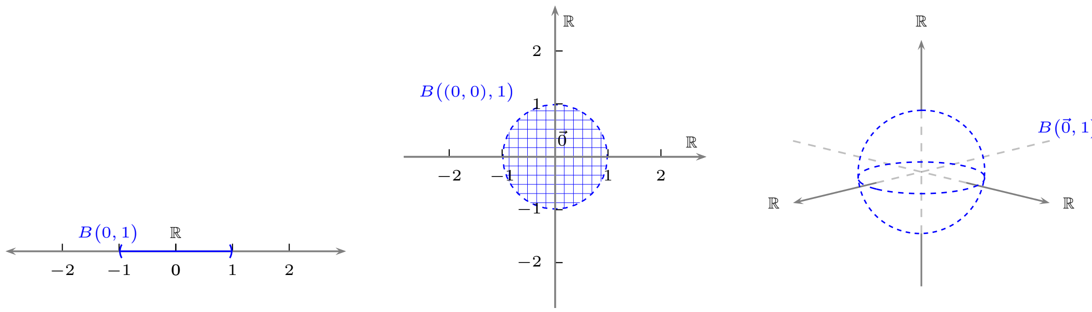
Definición 2.8. Sea (X,d) un espacio métrico. Si x_0 es un punto de X y r un número real positivo, la ***bola abierta con centro en*** x_0 ***y radio*** r, es el subconjunto de X que se denota y define como:

$$B(x_0,r)=\big\{x\in X\colon d(x,x_0)<r\big\}.$$

Es decir, es el conjunto de puntos en X cuya distancia a x_0 es estrictamente menor que el número real positivo r.

El ejemplo siguiente ilustra geométricamente las bolas abiertas con la métrica d_2 centradas en $\vec{0}$ y radio 1 en los espacios métricos euclideanos más esenciales.

Ejemplo 2.9. La Figura 2.2 ilustra en los espacios métricos euclideanos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ las respectivas bolas abiertas con centro en el origen y radio 1 bajo la métrica d_2. En la figura 2.2-(a), se observa que en el espacio métrico euclideano $(\mathbb{R},|\cdot|)$, la bola abierta con centro en 0 y radio 1, es el intervalo abierto $(-1,1)$. De la figura 2.2-(b), se aprecia que la bola abierta con centro en $\vec{0}$ y radio 1 en $\big(\mathbb{R}^2,d_2\big)$ es un disco centrado en el origen y radio 1 sin el borde que le rodea. Finalmente, en la figura 2.2-(c) se contempla la bola abierta con centro en $\vec{0}$ y radio 1 en $\big(\mathbb{R}^3,d_2\big)$ la cual se visualiza como una esfera sólida centrada en el origen de radio 1 sin el borde que la cubre.



(a) Bola abierta en $\mathbb{R}$. (b) Bola abierta $\mathbb{R}^2$. (c) Bola abierta en $\mathbb{R}^3$.

Figura 2.2: Ilustración geométrica de bolas abiertas en espacios métricos euclideanos.

Observación 2.10. En general, en el espacio métrico euclideano $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, de la Definición 2.16, la bola abierta con centro en 0 y radio $r > 0$, es el subconjunto, $B(0,r) = (-r, r)$. Esto es, $B(0,r)$ es el intervalo abierto, $(-r, r)$.

En un subconjunto arbitrario no vacío de un espacio métrico, la noción de bola abierta, nos lleva al siguiente concepto.

Definición 2.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $E \subseteq X$. Un punto $x \in E$ es un ***punto interior de*** E si existe un número real positivo r, tal que $B(x, r) \subseteq E$. En otras palabras, un punto interior de E es un punto de E que es el centro de alguna bola abierta contenida en E. Al conjunto de todos los puntos interiores de un subconjunto E se le llama ***interior de*** E y se denota por $\operatorname{int}(E)$.

Es importante observar que el conjunto $\operatorname{int}(E)$ puede ser vacío sin que lo sea E. Por ejemplo en el espacio métrico euclideano $\mathbb{R}$, si consideramos el subconjunto finito $E = \{1, 3, 5\}$, es claro que ninguna bola abierta con centro en algún punto del conjunto está contenida en E. Más aún, dado un subconjunto E de un espacio métrico, se sigue de la Definición 2.11 que el conjunto formado por todos los puntos interiores de E es un subconjunto de E. Es decir, se tiene que $\operatorname{int}(E) \subseteq E$. Así, un subconjunto E con la propiedad de que cada uno de sus puntos sean puntos interiores amerita un nombre especial.

Definición 2.12. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto E de X se dice que es un ***subconjunto abierto de*** X si todos sus puntos son puntos interiores. Esto es, $\operatorname{int}(E) = E$.

Dados un espacio métrico (X, d), un punto $x_0 \in X$ y r un número real positivo, surgen preguntas muy naturales respecto al conjunto $B(x_0, r)$. ¿Por que se le llama bola abierta?, ¿Será acaso que tiene alguna relación con la Definición 2.12? Las respuestas a estas interrogantes se encuentran en el siguiente resultado.

Proposición 2.13. En un espacio métrico (X, d) para cada $x \in X$ y $r > 0$, la bola abierta con centro en x y radio r es un conjunto abierto de X.

Demostración. Sea $y \in B(x,r)$. Veamos que existe $r_1 > 0$ tal que $B(y,r_1) \subseteq B(x,r)$. Definamos $r_1 = r - d(x,y)$. Es claro que $r_1 > 0$. Para cada $z \in B(y,r_1)$, de la desigualdad del triángulo se sigue que:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r_1 = r$$

Así, $z \in B(x,r)$ y por lo tanto $B(y,r_1) \subseteq B(x,r)$. ✧

Para finalizar esta sección, se exhiben enseguida algunas propiedades de los subconjuntos abiertos de un espacio métrico en general. Estas propiedades, caracterizan a los subconjuntos abiertos.

Teorema 2.14. Sea (X,d) un espacio métrico. Las propiedades siguientes se cumplen:

a) Los conjuntos X y $\emptyset$ son subconjuntos abiertos de X.

b) Si $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ es un subconjunto abierto de X.

c) Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ es un subconjunto abierto de X.

Demostración. La demostración de a) no es complicada. El conjunto vacío es abierto por vacuidad, de la Definicion 2.12 se tiene que $\operatorname{int}(\emptyset) = \emptyset$ pues no existen elementos en el conjunto $\emptyset$ que sean puntos interiores del mismo, así que $\emptyset$ es un subconjunto abierto de X. Sea $x_0 \in X$. Veamos que existe $r > 0$ tal que $B(x_0,r) \subseteq X$. Basta tomar $r = 1$ (o cualquier otro número real positivo) ya que de la definición de $B(x_0,1)$ (todos los puntos de X cuya distancia a x_0 es menor que 1) se sigue que $B(x_0,1) \subseteq X$, luego X es un subconjunto abierto.
Para demostrar b), sea $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$. Entonces $x \in E_{\alpha_0}$, para algún $\alpha_0 \in I$. Como E_{α_0} es un subconjunto abierto de X, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq E_{\alpha_0}$, pero $E_{\alpha_0} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ es un subconjunto abierto de X.

Para probar c), sea $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, existe $r_i > 0$ tal que $B(x,r_i) \subseteq E_i$. Luego, para $r = \min\{r_1,\ldots,r_n\}$, se tiene que $B(x,r) \subseteq B(x,r_i)$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. En consecuencia $B(x,r) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ y, por lo tanto $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ es un subconjunto abierto de X. ✧

Observación 2.15. La intersección arbitraria de subconjuntos abiertos de un espacio métrico X no necesariamente es un subconjunto abierto de X. En efecto, consideremos el espacio métrico euclideano $(\mathbb{R}, d_2)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $E_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Es claro que cada E_n es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, pero $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \{0\}$ no lo es.

Enseguida se presenta otra interesante clase de subconjuntos en un espacio métrico que guarda intima relación con los subconjuntos abiertos del mismo espacio métrico.

2.3 Subconjuntos cerrados

En esta sección presentamos otra clase bastante importante de subconjuntos en un espacio métrico en general, los *subconjuntos cerrados*. Pero primero, presentemos un elemento más dentro de los espacios métricos cuya definición refleja bastante similitud con la Definición 2.8. Este nuevo elemento es la *bola cerrada*.

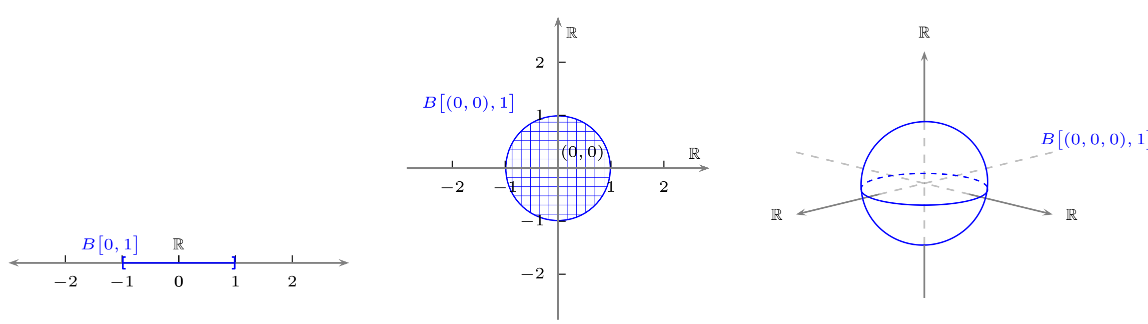
Definición 2.16. Sea (X, d) un espacio métrico. La ***bola cerrada con centro en*** $x_0 \in X$ ***y radio*** $r > 0$, es el subconjunto de X que se denota y define como sigue:

$$B[x, r] = \{x \in X \colon d(x, x_0) \leq r\}.$$

Es de importancia observar que las Definiciones 2.8 y 2.16 dependen en su totalidad de cómo esté definida la métrica d. Por esta razón, cabe mencionar que durante este trabajo siempre que se trate del conjunto $\mathbb{R}^n$ la métrica en cuestión será la métrica Euclideana d_2, a menos que se indique lo contrario.

Por otro lado, de la Definición 2.16 se deduce que en $\mathbb{R}$, la bola cerrada con centro en $0 \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ con la métrica Euclideana es el intervalo cerrado $[-r, r]$ que se denota por I_r. Por esta razón, denotamos a la bola cerrada con centro en 0 y radio r en $\mathbb{R}$ con la métrica Euclideana ya sea por $B[0, r]$ o mediante I_r.

En la Figura 2.3 se ilustran para los espacios métricos euclideanos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ las bolas cerradas centradas en el origen y radio 1. En relación con las bolas abiertas ilustradas en la Figura 2.2 se observa que, en los respectivos espacios métricos euclideanos, las bolas cerradas no son más que las bolas abiertas incluyendo el borde que les rodea.



(a) Bola cerrada en $\mathbb{R}$. (b) Bola cerrada $\mathbb{R}^2$. (c) Bola cerrada en $\mathbb{R}^3$.

Figura 2.3: Ilustración geométrica de bolas cerradas en espacios métricos euclideanos.

Observación 2.17. Como consecuencia inmediata de las definiciones de bola abierta y bola cerrada en un espacio métrico (X, d), para cualquier $x_0 \in X$ y $r > 0$ se cumple que, $B(x_0, r) \subseteq B[x_0, r]$.

Presentamos ahora el concepto de subconjunto cerrado de un espacio métrico.

Definición 2.18. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto F de X es un ***subconjunto cerrado de*** X si su complemento $X \setminus F$ es un subconjunto abierto de X.

Ejemplo 2.19. En un espacio métrico discreto $(X, \overline{d})$ todo subconjunto $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X.
En efecto, $X \setminus F$ es un subconjunto abierto ya que para cada $x \in X \setminus F$ al tomar $r = \frac{1}{2}$ se tiene que $B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$. Por lo tanto, $B\left(x, \frac{1}{2}\right) \subseteq X \setminus F$ y así F es un subconjunto cerrado de X.

Una pregunta natural que surge respecto a las Definiciones 2.16 y 2.18 es la siguiente: ¿Que relación tiene la bola cerrada con los subconjuntos cerrados de un espacio métrico? El siguiente resultado presenta una respuesta a la pregunta anterior.

Proposición 2.20. En un espacio métrico (X, d), la bola cerrada $B[x, r]$ es un conjunto cerrado de X, para cada $x \in X$ y $r > 0$.

Demostración. Veamos que $X \setminus B[x, r]$ es un subconjunto abierto de X. Sea $y \in X \setminus B[x, r]$ entonces $d(x, y) > r$, tomando $r' = d(x, y) - r > 0$ se tiene que $B(y, r') \subseteq X \setminus B[x, r]$, ya que si $z \in B(y, r')$ entonces $d(y, z) < r'$ y de la desigualdad del triángulo se tiene que,

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z) > d(x, y) - r' = r,$$

de aquí $z \in X \setminus B[x, r]$. Por lo tanto, $B(y, r') \subseteq X \setminus B[x, r]$, lo que demuestra la proposición. ✧

En la Sección 2.2 dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto A de X. Un punto $x_0 \in A$ con la propiedad que para todo número positivo r_x, la bola abierta con centro en x_0 y radio r_x, satisface, $B(x_0, r_x) \subseteq A$, recibió un nombre especial, se le denominó punto interior de A. Sin embargo, no son los únicos puntos que ameritan un nombre especial, ya que existen puntos $y_0 \in X$ con la característica que, para todo número $r_y > 0$, la bola abierta con centro en y_0 y radio r_y contiene puntos de A, estos puntos son llamados *puntos de clausura* de A. La importancia de los puntos clausura de un conjunto, radica en la estrecha relación que mantienen con la Definición 2.18, y es que, como veremos más adelante con sólo estudiar el conjunto de puntos clausura de un subconjunto en un espacio métrico es posible probar que dicho subconjunto es cerrado de X. En seguida se presenta la definición formal de un punto clausura.

Definición 2.21. Sea (X, d) un espacio métrico. Un punto $x \in X$ es un ***punto clausura de*** $F \subseteq X$ si para cada $r > 0$, la bola abierta con centro en x y radio r tiene puntos de F, es decir, $F \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos clausura de F se le llama ***cerradura o clausura de*** F y se denota por $\overline{F}$.

Ejemplo 2.22. En $(\mathbb{R}, d_2)$, si $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\overline{I} = [a, b]$.

Los subconjuntos cerrados de un espacio métrico al igual que los subconjuntos abiertos satisfacen algunas propiedades que los caracterizan. Estas propiedades son enunciadas en el siguiente resultado que es consecuencia del Teorema 2.14 y las leyes de De Morgan.

Proposición 2.23. Sea X un espacio métrico. Las siguientes propiedades se cumplen:

a) Los conjuntos X y $\emptyset$ son subconjuntos cerrados de X.

b) Si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una colección de subconjuntos cerrados de X, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ es un subconjunto cerrado de X.

c) Si $F_1, \ldots, F_n$ son subconjuntos cerrados de X, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ es un subconjunto cerrado de X.

El siguiente ejemplo muestra que la unión arbitraria de conjuntos cerrados no necesariamente es un conjunto cerrado.

Ejemplo 2.24. En $(\mathbb{R}, d_2)$ definamos $F_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. No es difícil ver que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = [0, 1)$ y este no es un subconjunto cerrado de $(\mathbb{R}, d_2)$.

En un espacio métrico (X, d), dado $F \subseteq X$, de la definición de punto clausura se tiene que, $F \subseteq \overline{F}$. Sin embargo, cuando ocurre que $\overline{F}$ está contenido en F resulta que F es un subconjunto cerrado de X como lo muestra el siguiente resultado, el cual es bastante útil para caracterizar subconjuntos cerrados de un espacio métrico al examinar únicamente la cerradura del conjunto F.

Teorema 2.25. Sea (X, d) un espacio métrico y $F \subseteq X$. Entonces, F es un subconjunto cerrado de X si y sólo si $F = \overline{F}$.

Demostración. Para la necesidad del teorema, únicamente resta probar que $\overline{F} \subseteq F$, pues de la Definición 2.21 se tiene que $F \subseteq \overline{F}$. De manera equivalente probemos que $X \setminus F \subseteq X \setminus \overline{F}$. Sea $x \in X \setminus F$. Como F es un subconjunto cerrado de X, por Definición 2.18 se tiene que $X \setminus F$ es un subconjunto abierto de X. Por lo tanto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq X \setminus F$. Es decir, $B(x, r) \cap F = \emptyset$. Luego, de la Definición 2.21 podemos concluir que $x \in X \setminus \overline{F}$. Por lo tanto, $X \setminus F \subseteq X \setminus \overline{F}$.
Para probar la suficiencia del teorema veamos que $X \setminus F$ es un subconjunto abierto de X. Sea $x \in X \setminus F$, como $F = \overline{F}$, $x \in X \setminus \overline{F}$. Luego por la Definición 2.21 existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq X \setminus F$. Por lo tanto, X es un subconjunto cerrado de X. ✧

Otro concepto inherente a un subconjunto de un espacio métrico es el de *punto de acumulación*.

Definición 2.26. Sea (X, d) un espacio métrico. Un punto $x \in X$ es un ***punto de acumulación de*** $F \subseteq X$ si para cada $r > 0$,

$$\big(B(x,r) \setminus \{x\}\big) \cap F \neq \emptyset.$$

Al conjunto de todos los puntos de acumulación de un subconjunto F se le llama ***conjunto derivado de*** F y se denota como F'. Notemos que todo punto de acumulación de F es también un punto cerradura de F.

Observación 2.27. En la Definición 2.26 de las propiedades de conjuntos se tiene que la condición $\big(B(x,r) \setminus \{x\}\big) \cap F \neq \emptyset$ es equivalente a $B(x,r) \cap \big(F \setminus \{x\}\big) \neq \emptyset$.

Veamos enseguida otra manera útil de caracterizar a los subconjuntos cerrados de un espacio métrico, estudiando únicamente los puntos de acumulación del subconjunto en cuestión.

Teorema 2.28. Sean (X, d) un espacio métrico y $F \subseteq X$. Se cumplen:

a) $\overline{F} = F \cup F'$.

b) F es un subconjunto cerrado de X si y sólo si $F' \subseteq F$.

Demostración. Probemos a). Sea $x \in \overline{F}$. Como $F \subseteq X$, si $x \in F$ no hay más que hacer. Supongamos que $x \notin F$. Veamos que $x \in F'$. Sea $r > 0$. Por hipótesis, $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$, no obstante, dado que $x \notin F$, ocurre que $F \setminus \{x\} = F$ y es por esto último que $B(x,r) \cap \big(F \setminus \{x\}\big) \neq \emptyset$. De modo que $\overline{F} \subseteq F \cup F'$. Ahora, tomemos $x \in F \cup F'$ y veamos que $x \in \overline{F}$. Si $x \in F$, no hay que probar. Por otro lado, si $x \in F'$, entonces para cada $r > 0$, se tiene que $B(x,r) \cap (F \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Sin embargo, como $(F \setminus \{x\}) \subseteq F$ se tiene que $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$ y así $x \in \overline{F}$. Por lo tanto, $F \cup F' \subseteq \overline{F}$. Lo que completa la prueba de a).
Enseguida, justifiquemos b). Supongamos que F es un subconjunto cerrado de X. Por el Teorema 2.25, se cumple que $\overline{F} = F$, pero, del inciso anterior sabemos que $\overline{F} = F \cup F'$, lo que implica que $F' \subseteq F$. Recíprocamente, supongamos que $F' \subseteq F$. Luego, del inciso a) de este teorema se concluye que $\overline{F} = F$. Y del Teorema 2.25, se sigue que F es un subconjunto cerrado de X. ✧

Otra importante propiedad que caracteriza a los puntos clausura de un subconjunto en un espacio métrico es, la de estar muy cerca, digamos "pegados", al subconjunto en cuestión. Esta caracterización se describe formalmente en la siguiente proposición.

Proposición 2.29. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x_0 \in X$. Se satisface lo siguiente: $x_0 \in \overline{A}$ si y sólo si $\inf\{d(x_0, a) \colon a \in A\} = 0$.

Demostración. Sea $x_0 \in \overline{A}$. Veamos que $\inf\{d(x_0, a) \colon a \in A\} = 0$. Es claro que 0 es una cota inferior del conjunto $\{d(x_0, a) \colon a \in A\}$. Resta probar que 0 es la mayor de las cotas inferiores. Sea $\epsilon > 0$ una cota inferior del conjunto $\{d(x_0, a) \colon a \in A\}$. Luego, para cada $a \in A$, se tiene que $\epsilon \leq d(x_0, a)$. Sin embargo, como $x_0 \in \overline{A}$, existe $a \in A$ tal que $d(x_0, a) < \epsilon$. Luego, ningún número mayor que 0 es cota superior de $\{d(x_0, a) \colon a \in A\}$. Por lo tanto, $\inf\{d(x_0, a) \colon a \in A\} = 0$.

Ahora, supongamos que $\inf\{d(x_0, a)\colon a \in A\} = 0$. Probemos que, $x_0 \in \overline{A}$. Por propiedad de ínfimo,[I] para cada $\epsilon > 0$ existe $a_0 \in A$ tal que $0 < d(x_0, a_0) < \epsilon$. Es decir, para todo $\epsilon > 0$ se tiene que, $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x_0 \in \overline{A}$. ✧

Las propiedades de los subconjuntos abiertos y cerrados de un espacio métrico (X, d) se resumen en la Figura 2.4.

(X, d) espacio métrico.

Subconjuntos abiertos de X. Subconjuntos cerrados de X.

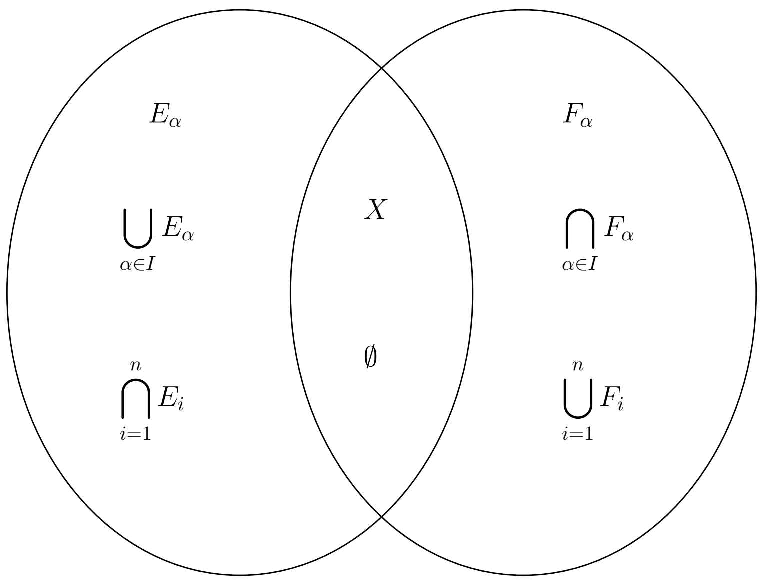


Figura 2.4: Propiedades de los subconjuntos abiertos y cerrados de un espacio métrico.

2.4 Sucesiones

Definición 2.30. Sea X un conjunto no vacío. Una ***sucesión en*** X es una función $f\colon \mathbb{N} \to X$. Se denota a la imagen de $n \in \mathbb{N}$ bajo f como x_n.

Pudiendo sustituir la x por cualquier otra letra, los elementos x_n, se llaman ***términos de la sucesión*** y suelen escribirse en forma de “lista” ordenada en sentido creciente del subíndice como $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ expresión que será abreviada de aquí en adelante como $\{x_n\}$.

Definición 2.31. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ un sucesión en X. Se dice que un elemento x en X es el ***límite de la sucesión*** $\{x_n\}$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ siempre que $n \geq N$. Esto último también se expresa diciendo que $\{x_n\}$ ***converge a*** x ***en*** X y se denota por $x_n \to x$.

[I]**Proposición**: Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 = \inf A$. Se cumple que: para todo $\epsilon > 0$ existe $a_0 \in A$ tal que: $x_0 \leq a_0 < x_0 + \epsilon$.

Observación 2.32. En un espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ converge a x si y sólo si para cualquier número positivo ϵ, la bola abierta con centro en x y radio ϵ contiene a todos los términos x_n de la sucesión excepto un número finito de ellos. Equivalentemente, el conjunto formado por los elementos de la sucesión que no están en la bola abierta con centro en x y radio ϵ es un conjunto finito.

La siguiente proposición exhibe una consecuencia interesante de la desigualdad del triángulo respecto a la convergencia de una sucesión en un espacio métrico.

Proposición 2.33. El límite de una sucesión convergente en un espacio métrico es único.

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x_n \to x$ y $x_n \to y$. Luego, para cada $\epsilon > 0$ existen $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\text{Si } n \geq N_x, \text{ entonces } d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\text{Si } n \geq N_y, \text{ entonces } d(x_n, y) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $N = \max\{N_x, N_y\}$, si $n \geq N$, por la desigualdad del triángulo, se tiene que:

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

luego, la propiedad (1) de la Definición 2.1 y desigualdades anteriores implican que $0 \leq d(x, y) \leq \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Lo que significa que $d(x, y) = 0$ y por lo tanto $x = y$. ✧

Definición 2.34. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Se dice que la sucesión $\{y_{n_k}\}$ es una ***subsucesión de la sucesión*** $\{x_n\}$, si existe una función inyectiva y creciente $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que para todo k en $\mathbb{N}$ se cumple que $y_{n_k} = x_{g(k)}$.

Teorema 2.35. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en un espacio métrico X, entonces toda subsucesión de ella converge al mismo límite.

Demostración. Sean $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$ y $\{y_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$. Luego, existe una función inyectiva y creciente $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $y_{n_k} = x_{g(k)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Usemos la Observación 2.32 para probar que $x_{n_k} \to x$. Sea $\epsilon > 0$, por la Observación 2.32, el conjunto: $\big\{n \in \mathbb{N}\colon x_n \notin B(x, \epsilon)\big\}$ es finito. Por otro lado, notemos que:

$$g^{-1}\Big(\big\{n \in \mathbb{N}\colon x_n \notin B(x, \epsilon)\big\}\Big) = \big\{k \in \mathbb{N}\colon x_{g(k)} \notin B(x, \epsilon)\big\} = \big\{n_k \in \mathbb{N}\colon y_{n_k} \notin B(x, \epsilon)\big\}.$$

Luego, como g es una función inyectiva la colección, $\big\{n_k \in \mathbb{N}\colon y_{n_k} \notin B(x, \epsilon)\big\}$ es finita, ya que contiene a lo más, igual número de elementos que el conjunto $\big\{n \in \mathbb{N}\colon x_n \notin B(x, \epsilon)\big\}$. Por lo tanto, de la Observación 2.32, se sigue que $y_{n_k} \to x$. Lo que completa la prueba del teorema. ✧

Enseguida exponemos algunos resultados donde se exhiben relaciones que existen entre los puntos clausura, la cerradura de un subconjunto y las sucesiones en un espacio métrico.

Lema 2.36. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Si $x \in A'$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que $x_n \to x$.

Demostración. Sea $x \in A'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \left(B\left(x, \frac{1}{n}\right) \setminus \{x\}\right) \cap A$, en otras palabras, existe $x_n \in A$ tal que:

$$0 < d(x_n, x) < \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

De esta manera, es posible definir una sucesión $\{x_n\}$ en A, de modo que todos sus términos sean distintos. En efecto, si para $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 < n_2$ los elementos $x_1, x_2 \in A$ que satisfacen la ecuación (2.1) son tales que $x_{n_1} = x_{n_2}$. Por la propiedad Arquimediana[II] aplicada a $\frac{1}{r}$, donde $r = d(x_{n_1}, x)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < r$. De la desigualdad (2.1), se tiene que:

$$\frac{1}{m} < d(x_{n_1}, x) < \frac{1}{n_1}. \tag{2.2}$$

Sin embargo, dado que x es un punto de acumulación de A, existe $z \in A$ tal que $d(z,x) < \frac{1}{m}$. Luego, de la desigualdad (2.2), se satisface lo siguiente:

$$d(z,x) < \frac{1}{m} < d(x_{n_1}, x) = d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{n_2} < \frac{1}{n_1}.$$

Así, $z \neq x_1$ y $d(z,x) < \frac{1}{n_2}$. Lo que implica que es factible elegir a x_2 distinto de x_1. Por lo tanto, es posible definir una sucesión $\{x_n\}$ en A con la propiedad de que todos sus elementos x_n son distintos y para cada x_n se cumple que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$.
Para concluir, veamos que $x_n \to x$. Sea $\epsilon > 0$. Por la Propiedad Arquimediana aplicada a $\frac{1}{\epsilon}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Luego, para cada $n \geq N$ se cumple lo siguiente:

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Por lo tanto, $x_n \to x$, lo que termina la demostración. ✧

El siguiente teorema es una herramienta bastante útil, ya que proporciona una manera de caracterizar a los subconjuntos cerrados, en términos de sucesiones.

Teorema 2.37. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X,d). Se sigue que:

a) $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que $x_n \to x$.

b) A es un subconjunto cerrado de X si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ en A tal que $x_n \to x$, para algún $x \in X$, se cumple que $x \in A$.

Demostración. Veamos la prueba de a). Para la necesidad, sea $x \in \overline{A}$. Del Teorema 2.28 sabemos que $\overline{A} = A \cup A'$. Entonces si $x \in A$, basta tomar la sucesión constante $\{x_n\}$ donde $x_n = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De otra forma, si $x \in A'$, por el Lema 2.36, existe una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que

[II]**Propiedad Arquimediana**: Si $x \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x < N$.

$x_n \to x$. Respecto a la suficiencia, sea $\{x_n\}$ una sucesión en A tal que x_n converge a x. Veamos que $x \in \overline{A}$. Sea $\epsilon > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: Si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. Esto es, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(x, \epsilon)$. Equivalentemente, para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, de la Definición 2.21 se sigue que $x \in \overline{A}$.
Probemos que b) es cierto. Sean A un subconjunto cerrado de X y $\{x_n\}$ una sucesión en A tal que $x_n \to x$, para algún $x \in X$. Por Teorema 2.25, se tiene que $A = \overline{A}$. Luego, de la parte a) del Teorema 2.37 se sigue que $x \in A$. Lo que prueba la necesidad de la parte b) del Teorema 2.37. Ahora, supongamos que para toda sucesión $\{x_n\}$ en A tal que $x_n \to x$ se cumple que $x \in A$. Probemos que A es un subconjunto cerrado de X. Por la parte b) del Teorema 2.28 basta probar que $A' \subseteq A$. Sea $x \in A'$, por el Lema 2.36 existe una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que $x_n \to x$. Luego, por hipótesis se tiene que $x \in A$. Lo que implica que $\overline{A} \subseteq A$. Por lo tanto, A es subconjunto cerrado de X. Así, se tiene la prueba de b). ✧

Entre todas las sucesiones en un espacio métrico, existen aquellas que poseen la propiedad que para índices suficientemente grandes los términos se van acercando unos a otros tanto como se desee.

Definición 2.38. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}$ es una ***sucesión de Cauchy*** si para cada $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que:

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \text{ para todo } n, m \geq N.$$

El siguiente resultado expone una importante relación entre las sucesiones convergentes y las sucesiones de Cauchy.

Teorema 2.39. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en un espacio métrico (X, d), entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Veamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \text{ siempre que } n, m \geq N.$$

Como $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$, entonces $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, basta tomar $N = N_0$ ya que si $n, m \geq N_0$ entonces:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

y así la prueba está completa. ✧

El recíproco del Teorema 2.39 no es en general cierto, pues existen sucesiones de Cauchy en algunos espacios métricos que no son sucesiones convergentes. Para muestra vea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.40. Consideremos el conjunto de los números racionales con la métrica usual y la sucesión en $\mathbb{Q}$ definida como, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. En el libro *Introducción al Cálculo y al análisis matemático de Courant y John* [8, pág. 102] se presenta una demostración sobre la convergencia de esta sucesión en $\mathbb{R}$ al *número de Euler*. Por el Teorema 2.39, la sucesión definida anteriormente es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, su límite no es un número racional. Por lo tanto, la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ no es una sucesión convergente en $\mathbb{Q}$.

El Ejemplo 2.40 motiva la importancia de identificar con un nombre especial a los espacios métricos en los que cualquier sucesión de Cauchy es convergente. De esta manera, las sucesiones de Cauchy promueven una clasificación dentro de los espacios métricos, como lo refleja el siguiente concepto.

Definición 2.41. Un espacio métrico X es ***completo*** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X. Se dice que $A \subseteq X$ es un ***subconjunto completo***, si como subespacio métrico de X lo es.

Ejemplo 2.42. El conjunto de los números reales es un espacio métrico completo con la métrica Euclideana, para una demostración vease el libro *Topología de espacios métricos de I. Irribarren* [13, pág. 119]. De la completez de $(\mathbb{R}, d_2)$ se sigue que $\mathbb{R}^n$ es un conjunto completo visto como espacio métrico euclideano, una demostración de esta última afirmación puede ser consultada en el libro *Real analysis de Kolmogorov y Fomin* [15, pág. 57].

De los Ejemplos 2.40 y 2.42 se observa que la completez es una propiedad fundamental que distingue a los números reales de los números racionales.

Por el Teorema 2.35, sabemos que si una sucesión tiene límite x, entonces cualquier subsucesión converge al mismo límite. Sin embargo, el recíproco no es en general cierto. La sucesión $\{(-1)^n\}$, tiene dos subsucesiones constantes y por tanto convergentes, $\{1\}$ y $\{-1\}$ pero la sucesión $\{(-1)^n\}$ carece de límite. No obstante, al imponer la hipótesis de que la sucesión sea de Cauchy es suficiente para garantizar su convergencia cuando alguna subsucesión tenga límite. En el siguiente resultado se muestra que el recíproco del Teorema 2.35 es cierto siempre que la sucesión sea de Cauchy.

Teorema 2.43. Si una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) admite una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}$, entonces $\{x_n\}$ converge y converge al mismo límite que $\{y_{n_k}\}$.

Demostración. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X y $\{y_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$. Luego, existe una función inyectiva $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se satisface que $y_{n_k} = x_{g(k)}$. Supongamos que y_{n_k} converge a x. Veamos que $\{x_n\}$ converge a x. Sea $\epsilon > 0$. Se tienen las siguientes propiedades:
Por ser $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{si } n, m \geq N_1, \text{ entonces } d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.3}$$

Por otro lado, como $y_{n_k} \to x$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{Si } k \geq N_2, \text{ entonces } d(y_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.4}$$

Como g es inyectiva, el conjunto $M = g^{-1}\big(\{1, \ldots, N_1 - 1\}\big)$ es finito, ya que si $n_1, n_2 \in M$ y $n_1 \neq n_2$ entonces $g(n_1) \neq g(n_2)$, por lo tanto M tiene a lo más $N - 1$ elementos. Sea $U = \max M$ y consideremos $N > \max\big\{U, N_2\big\}$. Por la ecuación (2.4), se tiene que:

$$d(y_{n_N}, x) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.5}$$

Como $N > U$, se cumple que $m \notin M$. Por lo tanto, necesariamente $g(m) \geq N_1$. Luego, dado que, $y_{n_N} = x_{g(N)}$ por la conclusión (2.3), se tiene que:

$$\text{si } n \geq N_1, \text{ entonces } d(x_n, y_{n_N}) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.6}$$

De esta manera, si $n \geq N$, de la desigualdad del triángulo y las ecuaciones (2.5) y (2.6) se deduce que:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto, $x_n \to x$. ✧

Proposición 2.44. Sean (X, d) un espacio métrico completo y A un subconjunto de X. Se sigue que A es un espacio métrico completo si y sólo si A es un subconjunto cerrado de X.

Demostración. Primero, supongamos que A es completo como subespacio métrico de X y utilizando la parte b) del Teorema 2.28, veamos que A es una subconjunto cerrado de X. Sea $x \in A'$. Por Lema 2.36, existe una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que x_n converge a algún elemento x en X. Del Teorema 2.39, se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en A. Sin embargo, dado que A es completo, $\{x_n\}$ converge a un elemento de A. Por la Proposición 2.33, se satisface que $x \in A$. Así, $A' \subseteq A$. Por la parte b) del Teorema 2.28, se sigue que A es un subconjunto cerrado de X.
Ahora, supongamos que A es un subconjunto cerrado de X y probemos que A es completo como subespacio métrico de X. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en A, así también es una sucesión de Cauchy en X. Como X es completo, la sucesión $\{x_n\}$ converge a x en X. Por hipótesis, A es un subconjunto cerrado y por la parte b) del Teorema 2.37, se tiene que $x \in A$. Por lo tanto, A es un espacio métrico completo. ✧

2.5 Subconjuntos compactos

En esta sección presentamos los elementos más importantes para nuestro trabajo y que por el momento se definen dentro de los espacios métricos. Se trata de los *subconjuntos compactos*. El concepto de subconjunto compacto generaliza la noción de subconjunto finito. En efecto, de la definición que presentamos se ve inmediatamente que todo subconjunto finito es un subconjunto compacto, y a pesar de que existen subconjuntos infinitos compactos veremos que sus propiedades los hacen muy semejantes a los subconjuntos finitos. Históricamente la idea de subconjunto compacto tuvo su origen en el conocido *Teorema de Heine-Borel*, en un espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^n$, el cual establece que los subconjuntos compactos en un espacio métrico euclideano son aquellos subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.45. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X es ***acotado*** si existe un número $M > 0$ tal que, para cualesquiera dos elementos $x, y \in A$, se tiene que $d(x, y) \leq M$. Además, dada una sucesión $\{x_n\}$ de elementos en X, diremos que $\{x_n\}$ es una ***sucesión acotada*** si $\operatorname{Im}\big(\{x_n\}\big)$[III] es un subconjunto acotado de X.

Veamos la siguiente caracterización para subconjuntos acotados en un espacio métrico.

Proposición 2.46. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Luego, A es acotado si y sólo si para cualquier $x_0 \in X$, existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B\big(x_0, M\big)$.

Demostración. Supongamos que A es acotado. Sea $x_0 \in X$. Como A es acotado existe $M_1 > 0$ tal que, para cualesquiera $x, y \in A$, se tiene que, $d(x, y) \leq M_1$. Consideremos un elemento $a \in A$ fijo y definamos $M = M_1 + 2d(a, x_0)$. Probemos que $A \subseteq B(x_0, M)$. Sea $x \in A$. Luego, como A es acotado y $a, x \in A$, por desigualdad del triángulo, se tiene que:

$$d(x, x_0) \leq d(x, a) + d(a, x_0) \leq M_1 + d(a, x_0) < M.$$

Por lo tanto, $A \subseteq B(x_0, M)$, lo que prueba la necesidad de la proposición.
Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in X$, existe $M_x > 0$ tal que $A \subseteq B\big(x, M_x\big)$. Veamos que existe $M > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$, se tiene que, $d(x, y) \leq M$. Sea $x_0 \in X$ fijo. Por hipótesis existe $\frac{M_0}{2} > 0$ tal que $A \subseteq B\big(x_0, \frac{M_0}{2}\big)$. En otras palabras, para todo $x \in A$, se cumple $d(x, x_0) < \frac{M_0}{2}$. Luego, por la desigualdad del triángulo, para cualesquiera $x, y \in A$, se satisface la siguiente desigualdad:

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < \frac{M_0}{2} + \frac{M_0}{2} = M_0.$$

Por lo tanto, tomando $M = M_0$, se prueba la suficiencia de la proposición. ✧

El siguiente lema no soló es herramienta indispensable para probar un posterior resultado al mismo, si no que más adelante hacemos uso de ella para verificar un caso muy particular del *Teorema de Heine-Borel*.

Lema 2.47. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado en el espacio métrico euclideano $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, con $a_n \leq b_n$. Si los intervalos cerrados I_n están anidados, esto es, si $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$, entonces existe un número $z \in \mathbb{R}$ tal que $z \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

[III]**Definición:** Sea $f \colon X \to Y$ una función de X con valores en Y. Se define y denota ***la imagen de la función*** f como: $\operatorname{Im}(f) = \{f(x) \colon x \in X\}$

Demostración. Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$, se satisface que $I_n \subseteq I_{n-1}$ se sigue que $a_n \leq b_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, el conjunto $\{a_n \in \mathbb{R} \colon n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ y está acotado superiormente. Hagamos $z = \sup\{a_n \in \mathbb{R} \colon n \in \mathbb{N}\}$. De la definición de z, para cada $n \in \mathbb{N}$, se satisface que $a_n \leq z$. Probemos que el número que buscados es z, para ello, sólo resta probar que que $z \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z = \sup\{a_n \in \mathbb{R} \colon n \in \mathbb{N}\}$ es suficiente probar que para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que b_k es una cota superior del conjunto $\{a_n \in \mathbb{R} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos los siguientes casos:

(1) Si $n \leq k$, entonces $I_n \subseteq I_k$, por tanto $a_n \leq b_n \leq b_k$,

(2) Si $n < k$, entonces $I_k \subseteq I_n$, por tanto $a_n \leq b_k \leq b_n$,

de ambos casos se tiene para $k \in \mathbb{N}$ fijo, $a_n \leq b_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto b_k es una cota superior del conjunto $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Luego, puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n \leq z \leq b_n$, se sigue que $z \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ✧

A continuación presentamos una interesante consecuencia del Lema 2.47, cuya demostración puede ser consultada en el libro *Introducción al análisis matemático de una variable de Bartle y Sherbert* [4, pág. 98].

Teorema de Bolzano-Weirstrass 2.48. Para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ de números reales, el conjunto $\mathrm{Im}(\{x_n\})$ tiene al menos un punto de acumulación.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico (X, d). De la Definición 2.45, que el subconjunto A sea acotado equivale a que el conjunto de números reales: $\{d(x, y) \colon x, y \in A\}$ esté acotado superiormente. Esto, motiva el siguiente concepto.

Definición 2.49. Sea A un subconjunto acotado de un espacio métrico. El ***diámetro del conjunto*** A es el número que se define y denota por:

$$\mathrm{diám}(A) = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in A\}.$$

Para la definición de *subconjunto compacto* que presentamos en este trabajo es necesario el siguiente concepto.

Definición 2.50. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$.

a) Una familia $\{O_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X es una ***cubierta para*** A, si $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$.

b) Si para algún subconjunto $J \subseteq I$ se satisface que $A \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$, se dice que $\{O_j\}_{j \in J}$ es una ***subcubierta para*** A.

c) Una cubierta $\{O_i\}_{i \in I}$ para A se llama ***cubierta abierta para*** A, si O_i es un subconjunto abierto de X, para todo $i \in I$.

Es momento de presentar en un espacio métrico, el concepto que será el actor principal en el resto de nuestro trabajo, nos referimos al concepto de *subconjunto compacto*.

Definición 2.51. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto K de X se llama ***subconjunto compacto de*** X, si toda cubierta abierta para K admite por lo menos una subcubierta finita. Esto es, si $\{O_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta para K, entonces existen índices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ en I tales que:

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} O_{i_n}.$$

Se dice que un espacio métrico (X, d) es compacto, si considerado como un subconjunto de X lo es.

Veamos que todo subconjunto finito de un espacio métrico es compacto.

Ejemplo 2.52. Sea (X, d) un espacio métrico y K un subconjunto finito de X. Probemos que K es un subconjunto compacto de X. Como K es un subconjunto finito, sin pérdida de generalidad supongamos que $K = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Sea $\mathcal{O}$ una cubierta abierta para K. Así, para cada $x_i \in K$, existe $O_i \in \mathcal{O}$ con $x_i \in O_i$, lo que implica que $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} O_i$. De esta manera, la colección $\big\{O_i \colon i \in \{1, \ldots, k\}\big\}$ es una subcubierta finita para A. Por lo tanto, K es un subconjunto compacto de X.

Veamos ahora un resultado que será de utilidad a la hora de probar el *Teorema de Heine-Borel*.

Teorema 2.53. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y K un subconjunto de X. Si K es un subconjunto cerrado de X, entonces K es un subconjunto compacto de X.

Demostración. Sea $\{O_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta para K, veamos que $\{O_i\}_{i\in I}$ admite subcubiertas finitas para K. Como K es un subconjunto cerrado de X, se tiene que $X \setminus K$ es un subconjunto abierto de X y la colección $\big\{X \setminus K\big\} \cup \{O_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta para X. En efecto, sea $x \in X$. Si $x \in K$, como $\{O_i\}_{i\in I}$ es una cubierta para K, existe algún O_{i_0} en $\{O_i\}_{i\in I}$ tal que $x \in O_{i_0}$. De otra forma $x \in X \setminus K$. La compacidad de X implica que existen $i_1, \ldots, i_n$ en I tales que $X \subseteq \left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} O_j\right) \cup (X \setminus K)$. Sin embargo, dado que $K \subseteq X$ y $K \cap (X \setminus K) = \emptyset$, se tiene que $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} O_j$. De esta manera dada una cubierta abierta arbitraria para K hemos hallado una subcubierta finita para K. Por lo tanto, K es un subconjunto compacto de X. ✧

A continuación se presenta un par de resultados en los que se aprecian algunas de las propiedades que poseen los subconjuntos compactos en un espacio métrico en general. Por ejemplo, todo subconjunto compacto es un subconjunto cerrado y acotado del espacio métrico en cuestión.

Proposición 2.54. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Si K es un subconjunto compacto de X entonces K es un subconjunto cerrado de X.

Demostración. Si $K = X$, por la Proposición 2.14, no hay más que hacer. De otra forma, probemos que $(X \setminus K) \cap \overline{K} = \emptyset$. Supongamos que K es un subconjunto propio de X con K compacto. Luego, existe $x_0 \in X$, tal que $x_0 \notin K$ y así, para cada $x \in K$, se tiene que $x_0 \neq x$. Esto implica que $d(x, x_0) > 0$. Para cada $x \in K$, definamos $r_x = \frac{d(x,x_0)}{2}$. Por la Proposición 2.13, para cada $x \in K$ los conjuntos $B(x, r_x)$ y $B(x_0, r_x)$ son subconjuntos abiertos de X tales que $B(x, r_x) \cap B(x_0, r_x) = \emptyset$. En efecto, para algún $x \in K$, sea $z \in B(x, r_x)$. Veamos que $z \notin B(x_0, r_x)$. De la desigualdad del triángulo se tiene que:

$$2r_x = d(x, x_0) \leq d(x, z) + d(x_0, z) < r_x + d(z, x_0). \tag{2.7}$$

Así, $d(z, x_0) > r_x$. Por lo tanto $B(x, r_x) \cap B(x_0, r_x) = \emptyset$, para cada $x \in K$. Notemos que, $\{B(x, r_x) \colon x \in K\}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X que cubre a K. En efecto, por la Proposición 2.13, para cada $x \in K$ el conjunto $B(x, r_x)$ es un subconjunto abierto de X y todo punto de K es el centro de alguna bola abierta en la colección. Como K es compacto, es posible hallar $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$. Definamos,

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i}) \text{ y } S = \bigcap_{i=1}^{n} B(x_0, r_{x_i}).$$

De la Proposición 2.14, se tiene que S y T son subconjuntos abiertos de X tales que $K \subseteq T$, $x \in S$ y $T \cap S = \emptyset$. Sea $z \in T$. Veamos que $z \notin S$. Por definición de T, existe $x_i \in K$ tal que $z \in B(x_i, r_{x_i})$. Sin embargo, por la conclusión de la ecuación (2.7) se tiene que $B(x_i, r_{x_i}) \cap B(x_0, r_{x_i}) = \emptyset$, lo cual implica que $z \notin B(x_0, r_{x_i})$. Luego, de la definición de S se sigue que $z \notin S$. Por lo tanto, $T \cap S = \emptyset$. De esta manera, hemos verificado la existencia de un subconjunto abierto S de X tal que $x_0 \in S$ y un subconjunto abierto T de X con $K \subseteq T$ tales que $S \cap T = \emptyset$, luego, $K \cap T = \emptyset$. Como S es un conjunto abierto de X por Definición 2.12, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq S$. Por lo tanto $B(x_0, r) \cap T = \emptyset$, lo que implica que, $x_0 \notin \overline{K}$. Como el punto x_0 fue tomado en $(X \setminus K)$. Hemos probado que $(X \setminus K) \cap \overline{K} = \emptyset$. Luego, de las propiedades de conjuntos se tiene que, $\overline{K} \subseteq K$, consecuentemente se cumple que, $\overline{K} = K$. Por lo tanto, de la Proposición 2.25, se sigue que K es un subconjunto cerrado de X. ✧

Proposición 2.55. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Si K es un subconjunto compacto de X entonces A es un subconjunto acotado de X.

Demostración. Supongamos que K es un subconjunto compacto de X. Para $\epsilon = 1$, la colección $\{B(x, 1) \colon x \in K\}$ es una cubierta abierta para K. Como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1). \tag{2.8}$$

Sea $L = \text{máx}\{d(x_i, x_j) \colon i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Consideremos cualesquiera $x, y \in K$. En virtud de la ecuación (2.8), existen $x_i, x_j \in K$ tales que $x \in B(x_i, 1)$ y $y \in B(x_j, 1)$. Luego, de la desigualdad del triángulo se tiene que:

$$d(x,y) \leq d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,y) < 1 + 1 + L = 2 + L. \tag{2.9}$$

Definiendo $M = 2 + L$, se tiene que para cualesquiera $x, y \in K$, $d(x,y) \leq 2 + L$. Por lo tanto K es un subconjunto acotado de X. ✧

Existen maneras de caracterizar subconjuntos compactos en un espacio métrico arbitrario. En esta sección se abordan las caracterizaciones más importantes para nuestro trabajo. Primero presentemos algunos conceptos que serán utilizados en dichas caracterizaciones.

Definición 2.56. Un subconjunto K de un espacio métrico (X,d) cumple con la ***propiedad de Bolzano- Weirstrass*** si todo subconjunto infinito de K tiene un punto de acumulación en K.

Definición 2.57. Un subconjunto K de un espacio métrico (X,d) es ***secuencialmente compacto*** si toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto en K.

Definición 2.58. Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto K de X es ***totalmente acotado*** si para cada $\epsilon > 0$, existe un subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de K tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$. Se dice que el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ forma una ***ϵ-cubierta*** de K.

Lema 2.59. Todo espacio métrico secuencialmente compacto es totalmente acotado.

Demostración. Sea (X,d) un espacio métrico secuencialmente compacto, veamos que X es totalmente acotado. Sea $\epsilon > 0$. Elijamos $x_1 \in X$ de forma arbitraria y consideremos $B(x_1, \epsilon)$. Si esta bola abierta contiene todo punto de X, entonces $\{x_1\}$ forma una ϵ-cubierta para X y por tanto X es totalmente acotado. Sin embargo, si existe $x_2 \in X \setminus B(x_1, \epsilon)$, consideremos el conjunto $B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$. Si esta unión contiene cada punto de X, entonces el conjunto $\{x_1, x_2\}$ forma una ϵ-cubierta para X y por lo tanto X resulta ser totalmente acotado. Continuando de manera inductiva con este razonamiento, alguna unión finita de bolas $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$, debe contener cada punto de X. De no ser así, este proceso continua de forma indefinida obteniendo una sucesión de puntos $\{x_n\}$ en X, tal que, cualesquiera dos elementos de ésta se encuentran a una distancia mayor que ϵ. De esta manera la sucesión $\{x_n\}$ no admite subsucesiones convergentes en K. Contradiciendo el supuesto de que K es secuencialmente compacto. Por lo tanto, algún subconjunto de X de la forma $\{x_1, \ldots, x_n\}$ debe ser una ϵ-cubierta para X, lo que implica que X es totalmente acotado. ✧

Definición 2.60. Sea $\{O_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta para un espacio métrico X. Un número real $a > 0$ se llama ***número de Lebesgue de la cubierta abierta*** $\{O_i\}_{i \in I}$ si todo subconjunto de X cuyo diámetro es menor que a está contenido en al menos un O_i de $\{O_i\}_{i \in I}$.

El siguiente resultado lo presentamos sin demostración. Para más detalles, consulte el libro *Introducction to topology and modern analysis de G. Simmons* [22, pág. 122].

Lema 2.61. En un espacio métrico secuencialmente compacto toda cubierta abierta tiene un número de Lebesgue.

En el siguiente resultado, se presentan las caracterizaciones para subconjuntos compactos en espacios métricos arbitrarios más primordiales para nuestro trabajo, éstas, a su vez resaltan la importancia de los subconjuntos compactos en otras áreas de la matemática.

Teorema 2.62. Sea K un subconjunto de un espacio métrico (X, d). Son equivalentes:

(1) K es un subconjunto compacto de X.

(2) K cumple la propiedad de Bolzano-Weirstrass.

(3) K es secuencialmente compacto.

(4) K es completo y totalmente acotado.

Demostración. El esquema de la demostración se indica en el siguiente diagrama:

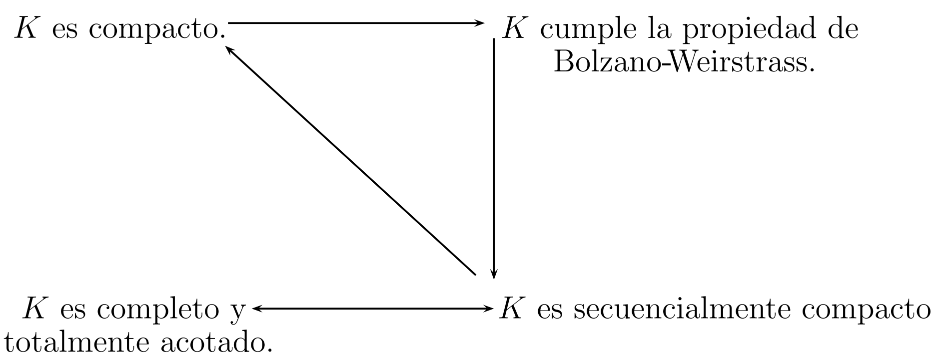


Figura 2.5: Esquema de la demostración del Teorema 2.62

Veamos que (1) implica (2). La demostración la realizamos por contradicción. Sea T un subconjunto infinito de K tal que T no tiene puntos de acumulación en K. Es decir, $T^{'} \cap K = \emptyset$. Así, para cada x en K existe $r_x > 0$ tal que,

$$B(x, r_x) \cap T = \begin{cases} \emptyset, \text{ si } x \notin T; \\ x, \text{ si } x \in T. \end{cases} \tag{2.10}$$

Luego, la colección $\mathcal{O} = \{B(x, r_x) \colon x \in K\}$ es una cubierta abierta para K. Sin embargo, como K es compacto, existe $\mathcal{O}_1 = \{B(x_i, r_{x_i}) \colon x_i \in K, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ subcolección finita de $\mathcal{O}$ tal que,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i}).$$

Entonces por (2.10), K tiene a lo más n elementos, lo cual es una contradicción pues T es un subconjunto infinito de K, y así, K no es finito.
Veamos que (2) implica (3). Supongamos que todo subconjunto infinito de K tiene un punto de acumulación en K y veamos que toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X. Supongamos que $T = \operatorname{Im}(\{x_n\})$ es un conjunto infinito, pues de lo contrario existe un término de la sucesión que se repite un número infinito de veces. Como consecuencia $\{x_n\}$ admite una subsucesión constante y por tanto convergente. Como K tiene la propiedad de Bolzano-Weirstrass, T tiene un punto de acumulación $x \in K$. Luego, por Lema 2.36 existe una sucesión $\{x_{n_k}\}$ en T tal que $x_{n_k} \to x$. Así, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente en K. Por lo tanto, K es secuencialmente compacto. De esta manera, hemos probado que (3) se deduce de (2).
Ahora veamos que la afirmación (3) implica (1). Supongamos que toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto de K y probemos que K es un subconjunto compacto de X. Sea $\{O_i\}$ una cubierta abierta para K. Por Lema 2.61, esta cubierta tiene un número de Lebesgue a. Definamos $\epsilon = \frac{a}{3}$. Luego, por Lema 2.59, existe una ϵ-cubierta $\{x_1, \ldots, x_n\}$ para K, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, se tiene que $\operatorname{diám}(B(x_j, \epsilon)) \leq 2\epsilon = \frac{2a}{3} < a$. Luego, por la definición de número de Lebesgue, para cada $j = 1, \ldots, n$, existe O_{i_j} tal que $B(x_j, \epsilon) \subseteq O_{i_j}$. Además, dado que cada punto de K pertenece a $B(x_{j_0}, \epsilon)$, para algún $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$, la colección $\{O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}\}$ es una subcubierta finita para $\{O_i\}$. Por lo tanto, X es compacto. Así, hemos probado que (1) se deduce de (3)
Para completar la demostración resta probar que (3) es necesario y suficiente para (4). Primero, supongamos que K es completo y totalmente acotado. Veamos que toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K. Como K es completo, es suficiente mostrar que toda sucesión en K tiene una subsucesión de Cauchy en K. Sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de elementos en K, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}$ consiste sólo de términos diferentes, pues si tuviera un término repetido un número infinito de veces, tendría una subsucesión constante y por lo tanto convergente. Además, sin problema alguno las repeticiones finitas de términos pueden omitirse (sólo es cuestión de etiquetas). Como K es totalmente acotado, para $r = 1$ existe un subconjunto finito $\{x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1\}$ en K tal que,

$$K = \bigcup_{i=1}^{n_1} B\left(x_i^1, 1\right).$$

Por el principio de las casillas[IV] una de las bolas, digamos $B_1 \in \left\{B(x_i^1, 1) : i = 1, \ldots, n_1\right\}$, contiene un número infinito de puntos x_n de la sucesión. Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N_1} \in B_1$, luego dado que K es totalmente acotado es fácil ver que cualquier subconjunto de K también lo es, en particular

[IV] ***Principio de las casillas.*** Si se dispone de n casillas para colocar m objetos y $m > n$, entonces en alguna casilla deberán colocar por lo menos dos objetos

$B_1 \cap K$ es totalmente acotado. Así, para $r = \frac{1}{2}$ existe $\{x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2\}$ en $B_1 \cap K$ tal que

$$B_1 \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i^2, \frac{1}{2}\right).$$

Luego, por el principio de las casillas, existe $B_2 \in \left\{B(x_i^2, 1) : i = 1, \ldots, n_2\right\}$, la cual contiene un número infinito de términos de la sucesión. Elijamos, $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N_2} \in B_2$ y $N_2 > N_1$. Notemos que es posible elegir a N_2 mayor que N_1 ya que de no ser posible se tendría que B_2 tiene a lo más un número finito de términos de la sucesión, hecho que por la elección de B_2 no es cierto. Continuando de manera inductiva con este procedimiento, se tiene una sucesión de bolas anidadas,

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq B_4 \supseteq \cdots \supseteq B_n \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

donde, B_n es una bola de radio $r = \frac{1}{n}$ y una sucesión creciente de enteros $\{N_n\}$ tal que $x_{N_n} \in B_n$. Así, $\{x_{N_n}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$. Resta probar que $\{x_{N_n}\}$ es una sucesión de Cauchy en K. Sea $\epsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana aplicada a $\frac{2}{\epsilon}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, si $n > m \geq N$, se tiene que, $B_n \subseteq B_m \subseteq B_N$. Así, para $x_n, x_m \in B_N$ y $z \in K$ tal que $B_N = B(z, \frac{1}{N})$ se sigue que:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, z) + d(x_m, z) < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Así, $\{x_{Nn}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$ tal que $\{x_{Nn}\}$ es de Cauchy en K y que converge en K, pues por hipótesis K es un espacio métrico completo. De esta manera, K es secuencialmente compacto.

Finalmente, supongamos que K es secuencialmente compacto y veamos que K es completo y totalmente acotado. Probemos primero que K es completo, sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en K. Es suficiente probar que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en K. Como K es secuencialmente compacto, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$. Luego por Teorema 2.43, la sucesión $\{x_n\}$ converge al mismo límite que la subsucesión $\{x_{n_k}\}$. Así, $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en K. Por lo tanto, K es un espacio métrico completo. Del Lema 2.59 se sigue que K es totalmente acotado. ✧

El Teorema 2.62 puede ser considerado como uno de los teoremas más relevantes en este trabajo, puesto que presenta una valiosa variedad de caracterizaciones para subconjuntos compactos en un espacio métrico en general. Entre estas caracterizaciones, encontramos aquellas que involucran sucesiones, puntos de acumulación y la noción de completez junto con el concepto de conjunto totalmente acotado.

2.6 Compacidad en espacios métricos euclideanos

En un espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^n$ es posible dar una caracterización bastante sencilla para subconjuntos compactos. Resulta, que en un espacio métrico euclideano los subconjuntos compactos son aquellos que son cerrados y acotados. Esta caracterización, se expresa en el *Teorema de*

Heine-Borel, que es el "plato fuerte" de esta sección. No obstante, antes de pasar al "plato fuerte", comencemos con un "aperitivo", el*pequeño Teorema de Heine-Borel* que tiene como consecuencia, casi inmediata que en el conjunto de los números reales con la métrica Euclideana, los intervalos cerrados son subconjuntos compactos. A diferencia del Teorema de Heine-Borel, este es sólo un caso particular, por ello el nombre, pequeño Teorema de Heine-Borel. La idea de su demostración, no puede ser generalizada a un espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$, como es el caso de la demostración del Teorema de Heine-Borel presentada más adelante.

El pequeño Teorema de Heine-Borel 2.63. Consideremos el espacio métrico euclideano $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $K \subsetneq \mathbb{R}$. Se sigue que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ si y sólo si K es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Demostración. Probemos la necesidad. Sea K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Demostremos primero que K es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $O_n = (-n, n)$. De la propiedad Arquimediana se tiene que, $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Y así, $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$. Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que O_n es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, la colección $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta para K. Como K es un subconjunto compacto en $\mathbb{R}$, existen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} O_{n_i}$. Tomando $M = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$ se tiene que, $K \subseteq O_M = (-M, M)$, esto significa que para cualesquiera dos elementos $x, y \in K$ se satisface que $|x - y| \leq 2M$. Por lo tanto, de acuerdo con la Definición 2.45, K es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.
Ahora, usando la Definición 2.18 verifiquemos que K es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Comprobemos que $\mathbb{R} \setminus K$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Sea $x_0 \in \mathbb{R} \setminus K$, veamos que existe un número real positivo r tal que $B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $E_n = \mathbb{R} \setminus B\big[x_0, \frac{1}{n}\big]$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ por la Proposición 2.20, tenemos que $B\big[x_0, \frac{1}{n}\big]$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Luego, de la Definición 2.18, se tiene que E_n es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Se cumple,

$$\mathbb{R} \setminus \{x_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{2.11}$$

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ de la definición de E_n se verifica que $x_0 \notin E_n$, lo que implica que $\{x_0\} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \emptyset$. Posteriormente, como consecuencia de las propiedades de conjuntos se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Ahora, veamos que $\mathbb{R} \setminus \{x_0\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Tomemos $z \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Luego, $|z - x_0| > 0$, y por la propiedad Arquimediana aplicada a $\frac{1}{r}$ donde $r = |x_0 - z|$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < |x_0 - z|$, esto es, $z \notin B\big[x_0, \frac{1}{n_0}\big]$, o equivalentemente $z \in \mathbb{R} \setminus B[x_0, n_0]$. Esto último significa que, $z \in E_{n_0}$. Por lo tanto, dada la arbitrariedad con la que fue elegido z en $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ se tiene que, $\mathbb{R} \setminus \{x_0\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Lo que prueba la igualdad (2.11). Es claro, que $K \subseteq \mathbb{R}$, sin embargo, puesto que $x_0 \notin K$, por la ecuación (2.11) se deduce que $K \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Se observa también, de la igualdad (2.11) que la colección $\{E_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para K. Puesto que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ existen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que: $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_{n_i}$. Haciendo, $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ se tiene que, $K \subseteq E_m$. Dado que, $E_m = \mathbb{R} \setminus B\big[x_0, \frac{1}{m}\big]$ se sigue que:

$$K \cap B\left(x_0, \frac{1}{m}\right) = \emptyset, \tag{2.12}$$

como consecuencia de la ecuación (2.12) y de las propiedades de conjuntos tenemos que:

$$B\left(x_0, \frac{1}{m}\right) \subseteq \mathbb{R} \setminus K. \tag{2.13}$$

De esta manera, para $x_0 \in \mathbb{R} \setminus K$ hemos hallado un número real positivo $r = \frac{1}{m}$, tal que $B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R} \setminus K$. Pero, como x_0 fue tomado de manera arbitraria en $\mathbb{R} \setminus K$ tenemos que $\mathbb{R} \setminus K$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Así, hemos probado la necesidad del teorema.
Para probar el recíproco procedamos por contradicción, supongamos que K es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ pero K no es un subconjunto compacto en $\mathbb{R}$. Entonces, existe una subcubierta abierta para K que no admite subcubiertas finitas para K. Sea $\mathcal{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dicha cubierta tal que, K no esta contenida en la unión de alguna subcolección finita de elementos de $\mathcal{O}$. Esto es, para $\mathcal{O}$ como arriba, la siguiente proposición es verdadera para K,

$\boldsymbol{P}(X)$: X no está contenido en la unión de ningún número finito de elementos de $\mathcal{O}$.

Puesto que K es un subconjunto acotado en $\mathbb{R}$, por la Proposición 2.46, para $0 \in \mathbb{R}$ existe $M > 0$ tal que $K \subseteq B(0, M)$. Sin embargo, dado que $B(0, M) \subseteq B[0, M]$ y que en el espacio métrico euclideano $\mathbb{R}$ se cumple que, $B[0, M]$ no es más que el intervalo cerrado $[-M, M]$ se sigue que,

$$K \subseteq [-M, M]. \tag{2.14}$$

Haciendo, $I_1 = [-M, M]$, se tiene que, $K \cap I_1 = K \cap [-M, M] = K$. Luego, por hipótesis, $\boldsymbol{P}(K \cap I_1)$ es verdadero. Posteriormente, bisecamos el intervalo I_1 en dos subintervalos $I_1^{'} = [-M, 0]$ e $I_1^{''} = [0, M]$. Se cumple que al menos uno de los dos subconjuntos $K \cap I_1^{'}$, $K \cap I_1^{''}$ debe ser no vacío y hacer verdadera la proposición $\boldsymbol{P}$, ya que si ambos subconjuntos $K \cap I_1^{'}$ y $K \cap I_1^{''}$ están contenidos en la unión de algún número finito de elementos en $\mathcal{O}$, el conjunto $[-M, M] = [-M, 0] \cup [0, M]$ también lo será. Luego, de la ecuación (2.14) se sigue que K estará contenido en la unión de un número finito de elementos en $\mathcal{O}$ contradiciendo el supuesto inicial de que $\boldsymbol{P}(K)$ es verdadero. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\boldsymbol{P}(K \cap I_1^{'})$ es verdadera, es decir, que el conjunto $K \cap I_1^{'}$ no está contenido en la unión de algún número finito de elementos de $\mathcal{O}$, y definamos $I_2 = I_1^{'}$. Se sigue que $\boldsymbol{P}(K \cap I_2)$ es verdadera. A continuación, bisecamos el intervalo I_2 en dos subintervalos $I_2^{'}$ e $I_2^{''}$, de realizar un razonamiento análogo al aplicado con los subintervalos $I_1^{'}$ e $I_1^{''}$, supongamos sin pérdida de generalidad que el subconjunto $K \cap I_2^{'}$ es no vacío y hace verdadera la proposición $\boldsymbol{P}$, seguidamente, haciendo $I_3 = I_2^{'}$, notemos que de manera símilar a I_1, I_2 se cumple que, $\boldsymbol{P}(K \cap I_3)$ es verdadera y se procede aplicando un razonamiento similar al aplicado a los subintervalos I_1 e I_2. Continuando inductivamente con este razonamiento, podemos construir una colección de intervalos cerrados $\{I_n\}$, de tal manera que, $\boldsymbol{P}(K \cap I_n)$ es cierto para cada $n \in \mathbb{N}$ y entre los intervalos se cumple la siguiente propiedad, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$. Diremos, que dicha colección de intervalos cerrados es una sucesión de intervalos cerrados anidados. Por el Lema 2.47 existe $z \in \mathbb{R}$ tal que tal que $z \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que cada intervalo I_n tiene un número infinito de puntos en K, pues de no ser así el subconjunto $K \cap I_n$ tendría sólo un número finito de puntos y podría ser cubierto por un número finito de elementos en $\mathcal{O}$, contradiciendo el supuesto de que $\boldsymbol{P}(K \cap I_n)$ es verdadera. Se deduce de esta observación, que z es un punto de acumulación de K. En efecto, sea $\epsilon > 0$, veamos que $\big(B(z, \epsilon) \setminus \{z\}\big) \cap K \neq \emptyset$. Como cada intervalo I_n contiene un número infinito de elementos en K, basta verificar que para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, se cumple que, $I_{n_0} \subseteq B(z, \epsilon)$. Puesto que, cada uno de los intervalos I_n fueron obtenidos por bisecciones repetidas del intervalo $I_1 = [-M, M]$, no es difícil ver que para $n \in \mathbb{N}$ fijo, la longitud del intervalo I_n es $\frac{M}{2^{n-2}}$. Luego, para n_0 suficientemente grande se puede conseguir que, $\frac{M}{2^{n_0-2}} < \epsilon$. Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $z \in I_n$, si $x \in I_{n_0}$ se cumple que, $|x - z| < \frac{M}{2^{n_0-2}} < \epsilon$, desigualdad que resulta en, $I_{n_0} \subseteq B(z, \epsilon)$. Por lo tanto, z es un punto de acumulación de K. Como K es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}$ por la parte (b) de la Proposición 2.28, tenemos que $z \in K$ por lo que existe $O_{\alpha_0} \in \mathcal{O}$ tal que $z \in O_{\alpha_0}$. Puesto que O_{α_0} es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a z, existe $r > 0$ tal que $B(z, r) \subseteq O_{\alpha_0}$. Luego, es posible tomar $k \in \mathbb{N}$, lo suficientemente grande de tal manera que,

$$I_k \subseteq B(z, r) \subseteq O_{\alpha_0}. \tag{2.15}$$

Sin embargo, observemos que $K \cap I_k \subseteq I_k$, y por la ecuación (2.15), se tiene que $K \cap I_k$ está contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathcal{O}$, particularmente está contenido en el subconjunto $\big\{O_0\big\} \in \mathcal{O}$. Lo que contradice el hecho que, para todo intervalo cerrado I_n, se satisface que $\boldsymbol{P}(I_n \cap K)$ es verdadero. Esta contradicción se originó de haber supuesto que existía una cubierta abierta para K que no admitía subcubiertas finitas para K, en otras palabras de haber supuesto que K no es compacto. Por lo tanto, se concluye que K es un subconjunto compacto en $\mathbb{R}$. Lo que completa la demostración. ✧

De esta manera, considerando al conjunto de los números reales como un espacio métrico con la métrica Euclideana y con la ayuda del pequeño Teorema de Heine-Borel 2.63 nos encontramos en las mejores condiciones para probar que un subconjunto de números reales es un subconjunto compacto, sin necesidad de utilizar la Definición 2.51, ya que usualmente es mucho más difícil probar que toda cubierta abierta admite una subcubierta finita a mostrar que el subconjunto en cuestión es cerrado y acotado. Para una muestra de la utilidad del pequeño Teorema de Heine-Borel veamos el siguiente par de ejemplos.

Ejemplo 2.64. Consideremos el siguiente subconjunto de números reales,

$$K = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup [1,2].$$

En la Figura 2.6 hemos pintado algunos puntos del conjunto K. Observemos que, para $M = 2$, si $x, y \in K$ se tiene que, $d(x,y) \leq M$, luego, de acuerdo con la Definición 2.45, se sigue que K es un subconjunto acotado en $\mathbb{R}$. También, no es difícil ver que el conjunto de puntos de acumulación de K es $K' = [1,2]$ y claramente $[1,2] \subseteq K$. Esto es, K contiene a todos sus puntos de acumulación. Por la Proposición 2.28, podemos concluir que K es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Así, hemos probado que, K es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Luego, por el pequeño Teorema de Heine-Borel 2.63, se tiene que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

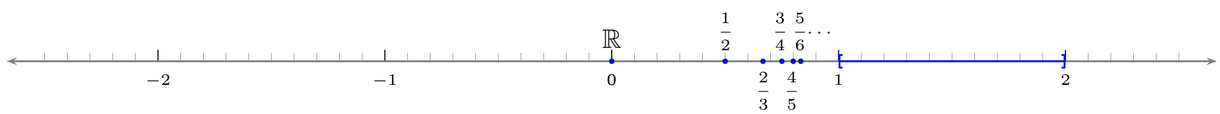


Figura 2.6: Aplicación del pequeño Teorema de Heine-Borel 2.63.

Ejemplo 2.65. El subconjunto $K_1 = [0, \infty)$ de números reales, no es acotado en $\mathbb{R}$, ya que para todo número real positivo M por la propiedad Arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y por lo tanto en K_1, tal que, $|0 - n_0| = n_0 > M$. Entonces, por el pequeño Teorema de Heine-Borel 2.63, se tiene que K_1 no es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

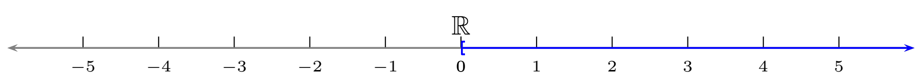


Figura 2.7: Otra aplicación del pequeño Teorema de Heine-Borel 2.63.

Presentemos ahora un elemento dentro de los espacios métricos que es a la vez un ingrediente más de nuestro plato fuerte. Se trata del *n-cubo*, y a continuación lo definimos con formalidad.

Definición 2.66. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}$ fijos. En el espacio métrico euclideano $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, para cada $i = 1, \ldots, n$, sea J_i la bola cerrada con centro en $z_i \in \mathbb{R}$ y radio r. Se define y denota el ***n*-cubo de lado** $2r$ **con centro en** $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ como el subconjunto de $\mathbb{R}^n$,

$$I_r^n = J_1 \times \cdots \times J_n.$$

Análogamente, para cada $i \in \mathbb{N}$ sea z_i un número real. Se define el ***ω*-cubo de lado** $2r$ **con centro en** $(z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$ como el producto cartesiano de la familia infinita numerable, $\{J_i : i \in \mathbb{N}, J_i = B[z_i, r] \text{ y } z_i \in \mathbb{R}\}$ y se denota por:

$$I_r^\omega = \prod_{i \in \mathbb{N}} J_i.$$

Observemos, que para $n = 1$, el 1-cubo de lado $2r$ no es más que el ya conocido intervalo cerrado $[-r, r] \subseteq \mathbb{R}$. Por esta razón, se denota el 1-cubo de lado $2r$ únicamente como I_r.

Proposición 2.67. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Consideremos el espacio métrico euclideano $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Para cada número real positivo r el n-cubo de lado $2r$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que I_r^n no es un subconjunto compacto en $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe una cubierta abierta $\mathcal{O}$ para I_r^n tal que para toda subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$ se cumple que $I_r^n \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1$. Consecuentemente, si dividimos a I_r^n en 2^n n-cubos de lado r, se cumple que al menos uno de ellos, digamos, Q_1, no está contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathcal{O}$, ya que de lo contrario, se tendría que $\mathcal{O}$ admite una subcubierta finita para I_r^n, contradiciendo el supuesto inicial. Si ahora, subdividimos Q_1 en 2^n $n-$cubos de lado $\frac{r}{2}$, se tiene que al menos uno de los n-cubos, digamos Q_2, no está contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathcal{O}$. Aplicando reiteradamente este mismo razonamiento, se obtiene una sucesión de n-cubos $\{Q_1, \ldots, Q_k, \ldots\}$ con la siguiente propiedad:

$$I_r^n \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \cdots \supseteq Q_k \supseteq \cdots,$$

y que para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto Q_k es un n-cubo de lado $\frac{r}{2^{k-1}}$ que no está contenido en la unión de ninguna subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$.
Para $k \in \mathbb{N}$, sea $z^k = (z_1^k, \ldots, z_n^k)$ el centro del n-cubo Q_k. Se deduce, que si $(x_1, \ldots, x_n) \in Q_k$ entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple:

$$|z_i^k - x_i| \leq \frac{r}{2^k}, \tag{2.16}$$

particularmente, para todo $j \geq k$ el centro z^j del n-cubo Q_j pertenece a Q_k y en consecuencia para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se satisface:

$$|z_i^k - z_i^j| \leq \frac{r}{2^k}. \tag{2.17}$$

Luego, de la desigualdad (2.17) para cada $i = 1, \ldots, n$ se sigue que, la sucesión $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y en consecuencia, como $\mathbb{R}$ es una espacio métrico completo, existe $z_i \in \mathbb{R}$ tal que $z_i^k \to z_i$. Por lo tanto, de la desigualdad (2.17) para cada $i = \{1, \ldots, n\}$ se satisface la siguiente desigualdad,

$$|z_i^k - z_i| \leq \frac{r}{2^k}. \tag{2.18}$$

Observemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ la sucesión $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en I_r. Sin embargo, por la Proposición 2.20, se tiene que I_r es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Luego, la Proposición 2.37 implica que $z_i \in I_r$. Así, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in I_r^n$. Como $\mathcal{O}$ es una cubierta abierta para I_r^n, existe $O_0 \in \mathcal{O}$ tal que $z \in O_0$. Dado que O_0 es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z, \epsilon) \subseteq O_0$. Ahora bien, si $x \in Q_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, de la desigualdad del triángulo y las desigualdades (2.16) y (2.18) se tiene que,

$$d_2(x, z) \leq d_2(x, z^k) + d_2(z^k, z) \leq \frac{r\sqrt{n}}{2^k} + \frac{r\sqrt{n}}{2^k} = \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}}. \tag{2.19}$$

Luego, por la propiedad Arquimediana existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{r\sqrt{n}}{2^{k_0-1}} < \epsilon$. Y así, $Q_{k_0} \subseteq B(z,\epsilon)$. De esta manera, para la subcolección $\mathcal{O}_1 = \{O_0\}$ de $\mathcal{O}$ se tiene que $Q_k \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1 = O_0$. No obstante, esto es una contradicción ya que recordemos que O_k había sido elegido de tal forma que, no podía ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{O}$ al suponer que I_r^n no era un subconjunto compacto. Por lo tanto, I_r^n es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. ✧

Posteriormente en el Capítulo 3, se alude a este resultado como una consecuencia casi inmediata de una variación del teorema que puede ser considerado como el "actor principal" de esta tesis, *el Teorema de Tychonoff.*

2.6.1 El Teorema de Heine-Borel

En un espacio métrico euclideano existe una condición necesaria y suficiente para caracterizar subconjuntos compactos que se conoce como el Teorema de Heine-Borel.

Teorema de Heine-Borel 2.68. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(\mathbb{R}^n, d_2)$ el espacio métrico euclideano y K un subconjunto propio de $\mathbb{R}^n$. Luego, K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si K es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$.

Antes de proceder con la demostración del Teorema de Heine-Borel, ilustremos la prueba de la suficiencia del Teorema de Heine-Borel para el caso del espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^2$. Consideremos el subconjunto K cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$, como se muestra en la Figura 2.8.

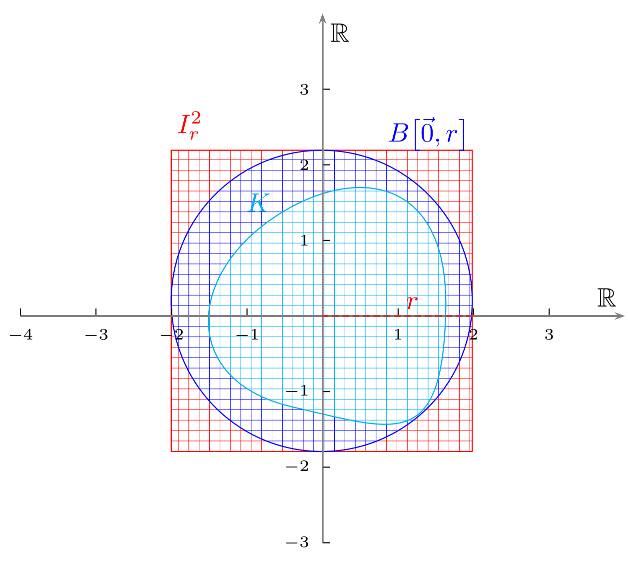


Figura 2.8: Esquema de la demostración del Teorema de Heine-Borel 2.68 en $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Como K es acotado, por la Proposición 2.46, para $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ existe un número real positivo r tal que, $K \subseteq B(\vec{0}, r)$. Sin embargo, para el 2-cubo de lado $2r$, como se ve en la Figura 2.8, no es difícil comprobar que $B[\vec{0}, r] \subseteq I_r^2$ y así también se verifica que, $K \subseteq I_r^2$. Luego, de la Proposición

2.67 sabemos que I_r^2 es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$. De esta manera tenemos que K es un subconjunto cerrado que se encuentra contenido en el subconjunto compacto I_r^2 de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, del Teorema 2.53 se tiene que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$.

Una vez ilustrada la idea de la demostración del Teorema de Heine-Borel, continuemos con su demostración.

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. En virtud de las Proposiciones 2.54 y 2.55, K es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Recíprocamente, supongamos que K es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Veamos que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. De la Proposición 2.46, para $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$, existe $r > 0$ tal que $K \subseteq B(\vec{0}, r)$. Luego, para cualesquiera $x, y \in K$ se tiene que:

$$d(x, y) \leq d(x, \vec{0}) + d(\vec{0}, y) < 2r.$$

Notemos, que $K \subseteq B(\vec{0}, r) \subseteq I_r^n$. Luego, $K \subseteq I_r^n$. Por la Proposición 2.67, sabemos que I_r^n es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Así, dado que $K \subseteq I_r^n$ y K es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, el Teorema 2.53 implica que K es compacto. De esta manera, la prueba está completa. ✧

2.6.2 La bola cerrada en espacios métricos euclideanos

Consideremos ahora, la bola cerrada en un espacio métrico euclideano. De la Definición 2.18, sabemos que dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número $r > 0$, la bola cerrrada con centro en x_0 y radio r es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$, que se denota y define como: $B[x, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$. En el caso, del espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^2$, la bola cerrada con centro en $\vec{0} = (0, 0)$ y radio 1 se visualiza como en la Figura 2.9.

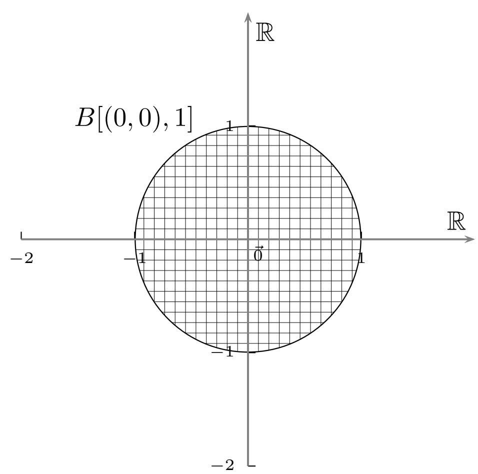


Figura 2.9: Bola cerrada con centro en $(0, 0)$ y radio 1 en el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

De la Proposición 2.20, sabemos que $B[\vec{0}, 1]$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$, además de acuerdo con la Definición 2.45 el subconjunto $B[\vec{0}, 1]$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, del Teorema de Heine-Borel 2.68 se concluye que la bola cerrada con centro en $(0,0)$ y radio 1 en el espacio métrico euclideano es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$. Como el razonamiento anterior puede ser aplicado a toda bola cerrada en un espacio métrico euclideano, podemos concluir por el Teorema de Heine-Borel 2.68, que toda bola cerrada es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

De esta manera, gracias al Teorema de Heine-Borel 2.68 resulta sencillo decidir cuándo un subconjunto de un espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^n$, es compacto. Sin embargo, ¿Qué pasa en $\mathbb{R}^\omega$?, ¿Seguirá siendo válido el Teorema de Heine-Borel 2.68?, ¿Bastará que un subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ sea cerrado y acotado para decidir si éste es compacto? La incertidumbre aparece, ya que realmente esto no es tan sencillo como en $\mathbb{R}^n$ con la métrica Euclideana. Hay muchas cuestiones con las que debemos de tener cuidado. Por ejemplo, en primer lugar, tenemos que saber cómo son los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^\omega$. ¿Serán acaso los mismos subconjuntos abiertos que en un espacio métrico euclideano? o ¿qué relación guardan con los subconjuntos abiertos de un espacio métrico euclideano? Supongamos, que ya hemos identificado a los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^\omega$. Consideremos un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^\omega$, del razonamiento ilustrado en el espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^2$, recordemos que fue necesario "colocar" al subconjunto cerrado en un subconjunto compacto, particularmente en el 2-cubo de lado $2r$, para algún $r > 0$, ¿será siempre posible hacer esto último en $\mathbb{R}^\omega$? Luego, una cuestión más se hace presente: dado un número positivo r, el ω-cubo de longitud $2r$ de la Definición 2.66, ¿es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\omega$?

Para dar respuesta a muchas de las preguntas presentadas en el párrafo anterior, en los próximos dos capítulos estudiamos conjuntos dotados de estructuras matemáticas una de ellos que generaliza la de espacio métrico y otra que forma parte de ellos, nos referimos a: los *espacios topológicos* y los *espacios normados* respectivamente. Es de importancia destacar que todo espacio métrico es simultáneamente un espacio topológico. En el siguiente capítulo abordamos los espacios topológicos, en estos espacios a diferencia de los espacios métricos no siempre es posible definir una métrica. Esto es, en general no se cuenta con la noción de distancia entre cualesquiera dos elementos del conjunto en cuestión, sin embargo, la variedad de propiedades con los que cuenta un espacio topológico compensa la no existencia en general de una métrica.

Capítulo 3

Compacidad en espacios topológicos

Si una ciudad es compacta entonces esta puede ser vigilada por un número finito de policías arbitrariamente miopes.

Hermann Weyl.

El objetivo principal de este capítulo es estudiar la compacidad del ω-cubo. Para ello se generaliza la idea de subconjunto abierto de un espacio métrico a conjuntos arbitrarios, lo que motiva el concepto de *topología sobre un conjunto*, dando origen al concepto de *espacio topológico*. Bajo el mismo objetivo, estudiamos la *topología de Tychonoff* sobre el producto cartesiano de espacios topológicos, ya que con esta topología, se asegura la compacidad del ω-cubo.

3.1 Espacios topológicos

El concepto de *espacio topológico* surgió bajo la necesidad de generalizar la noción de cercanía entre los elementos de un conjunto no vacío arbitrario. En el Capítulo 2 hemos visto que para hablar de proximidad en un espacio métrico X es suficiente trabajar con la familia de subconjuntos abiertos de X, cuyas principales propiedades son:

(1) El conjunto X y el conjunto vacío son subconjuntos abiertos.

(2) La unión arbitraria de subconjuntos abiertos es un subconjunto abierto.

(3) La intersección finita de subconjuntos abiertos es un subconjunto abierto.

De esta manera, dado un conjunto no vacío arbitrario, los subconjuntos que ameritan ser llamados *subconjuntos abiertos* son aquellos que verifican las propiedades (1),(2) y (3). La intención de generalizar la noción de subconjunto abierto a un conjunto no vacío arbitrario da origen a la siguiente definición.

Definición 3.1. Sea X un conjunto no vacío. Una familia de subconjuntos $\mathcal{T}_X$ de X es una ***topología sobre*** X si cumple:

(1) Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}_X$.

(2) Si $U_\alpha \in \mathcal{T}$, para cada $\alpha \in I$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}_X$.

(3) Si para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que $U_i \in \mathcal{T}_X$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T}_X$.

A los elementos de $\mathcal{T}_X$ se les llama ***subconjuntos abiertos de*** X y se dice que el par $(X, \mathcal{T}_X)$ es un ***espacio topológico***. Como en espacios métricos, si la topología está implícita o no hay peligro de confusión nos referimos a $(X, \mathcal{T}_X)$ simplemente como el espacio topológico X.

Así como en espacios métricos, en espacios topológicos, la idea de subconjunto abierto motiva el concepto de *subconjunto cerrado*. De este modo, la siguiente definición nos debe resultar bastante familiar.

Definición 3.2. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Se dice que $F \subseteq X$ es un ***subconjunto cerrado*** de X, si $X \setminus F \in \mathcal{T}_X$.

De la Definición 3.1 se deduce que la intersección arbitraria de subconjuntos cerrados y la unión finita de subconjuntos cerrados de un espacio topológico X son a la vez subconjuntos cerrados de X. Presentamos a continuación, algunos ejemplos de espacios topológicos. De los primeros ejemplos, podemos observar, que sobre cualquier conjunto no vacío siempre es posible definir al menos dos topologías diferentes.

Ejemplo 3.3. Dado un conjunto no vacío X. La colección de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X, a la que se le llama ***topología discreta sobre*** X y se denota por $\mathcal{T}_D$. Observemos que en un espacio topológico discreto $(X, \mathcal{T}_D)$ todos los subconjuntos de X son simultáneamente subconjuntos abiertos y cerrados de X.

Ejemplo 3.4. Sea X un conjunto arbitrario. Se llama ***topología trivial sobre*** X a la familia $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$. Notemos que, en X únicamente hay dos subconjuntos abiertos, los cuales a la vez son subconjuntos cerrados de X.

La topología discreta definida sobre un conjunto no vacío X, contiene a cualquier otra topología definida sobre X. En cambio, la topología trivial, está contenida en toda topología definida sobre X.

La topología presentada en el siguiente ejemplo no debe sorprendernos. Recordemos, que uno de nuestros propósitos es generalizar la noción de cercanía con la que se cuenta en un espacio métrico a un conjunto arbitrario, y una manera de hacerlo es mediante subconjuntos abiertos. Por esta razón, la Definición 3.1 resulta imprescindible ya que en ésta, se presentan las propiedades que deben caracterizar a los subconjuntos abiertos de un conjunto en general. Sin ser ninguna casualidad estas propiedades son las mismas propiedades que satisfacen los subconjuntos abiertos de un espacio métrico. En este sentido, el siguiente ejemplo muestra, que en un espacio métrico es posible definir una topología que coincida con la colección de subconjuntos abiertos.

Ejemplo 3.5. Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{T}_d$ la colección de todos los subconjuntos abiertos de X. Es decir,

$$\mathcal{T}_d = \big\{E \subseteq X \colon E \text{ es un subconjunto abierto en } X\big\}. \tag{3.1}$$

Del Teorema 2.14 se deduce que $\mathcal{T}_d$ es una topología sobre X y se le llama ***topología sobre** X **inducida por la métrica*** d. No es difícil ver que la topología $\mathcal{T}_d$ satisface la siguiente igualdad,

$$\mathcal{T}_d = \big\{E \subseteq X \colon E \text{ es unión de bolas abiertas en } X \text{ ó } E = \emptyset\big\}. \tag{3.2}$$

En efecto, sea $E \in \mathcal{T}_d$. Si $E = \emptyset$ no hay más que hacer. Supongamos, que $E \in \mathcal{T}_d$ y $E \neq \emptyset$. Luego, de acuerdo con la Definición 2.12, todos los puntos de E son puntos interiores. Esto es, para cada $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq E$. Luego, $\displaystyle\bigcup_{x \in E} B(x, r_x) \subseteq E$. Por otro lado, es claro que $E \subseteq \displaystyle\bigcup_{x \in E} B(x, r_x)$. Por lo tanto, $E = \displaystyle\bigcup_{x \in E} B(x, r_x)$. Ahora, supongamos que $E \in \big\{E \subseteq X \colon E \text{ es unión de bolas abiertas en } X \text{ ó } E = \emptyset\big\}$. Del caso $E = \emptyset$, no hay mucho que decir. Supongamos que $E = \displaystyle\bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$. Para cada $i \in I$, por la Proposición 2.13, sabemos que la bola abierta, $B(x_i, r_i)$ es un subconjunto abierto en X. Luego, por el Teorema 2.14, se tiene que E es un subconjunto abierto en X.

Ejemplo 3.6. Dado un conjunto no vacío X, no es difícil verificar que la métrica discreta sobre X induce la topología trivial sobre X.

En el Ejemplo 3.5 hemos visto que toda métrica d definida sobre un conjunto X induce una topología sobre X. Sin embargo, el recíproco no es en general cierto, existen topologías $\mathcal{T}_X$ definidas sobre un conjunto X tales que para toda métrica d definida sobre X se tiene que $\mathcal{T}_d \neq \mathcal{T}_X$. Como dicen por ahí, "para muestra basta un botón". Sin embargo, antes de proceder con un ejemplo formalicemos la idea de que dos topologías coincidan.

Definición 3.7. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologías definidas sobre X. Se dice que ***las topologías*** $\mathcal{T}_1$ ***y*** $\mathcal{T}_2$ ***coinciden***, si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Donde $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ si y sólo si para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{T}_1$ con $x \in U$ existe $V \in \mathcal{T}_2$ tal que $x \in V$ y $V \subseteq U$ y de manera similar se define $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Denotamos que las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ coinciden como, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Aquellas topologías que son inducidas por alguna métrica ameritan un nombre especial y se presentan formalmente en la siguiente definición.

Definición 3.8. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Si existe una métrica d definida sobre X de tal manera que, la topología inducida por la métrica $\mathcal{T}_d$ coincide con la topología $\mathcal{T}_X$, es decir $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_X$ entonces, se dice que $(X, \mathcal{T}_X)$ es un ***espacio topológico metrizable***.

Ejemplo 3.9. Si X es un conjunto no vacío ni unitario, el espacio topológico trivial $(X, \mathcal{T}_0)$ no es metrizable. Ya que si existiera una métrica d definida sobre X tal que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_0$, como el único subconjunto abierto de X distinto del vacío en la topología $\mathcal{T}_0$ es el mismo conjunto X, de la ecuación (3.1) se sigue que para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$, se cumple que, $B(x, \epsilon) = X$. Luego, dado un punto $x_0 \in X$ fijo y $y \in X$ tal que $x_0 \neq y$ se tiene que $y \notin B(x_0, \frac{d(x_0,y)}{2}) = X$, lo cual es una contradicción.

En el Capítulo 2, vimos que es posible definir métricas diferentes sobre un mismo conjunto, lo que da lugar a espacios métricos que al menos en principio, han de considerarse distintos. Sin embargo, no siempre las topologías inducidas por tales métricas son diferentes; esto es, los subconjuntos abiertos en una son subconjuntos abiertos en la otra y viceversa. En este sentido, es factible considerar desde un punto de visto topológico, a ambos espacios como *idénticos*. Enseguida estudiamos las condiciones bajo las cuales se satisface esta identidad.

Definición 3.10. Sean X un conjunto no vacío, d y ρ dos métricas definidas sobre el conjunto X. Se dice que d y ρ son ***métricas topológicamente equivalentes*** si las topologías inducidas por cada una de las métricas d y ρ coinciden.

La definición anterior significa que si el subconjunto E es un subconjunto abierto en el espacio métrico (X, d) también lo es en el espacio métrico (X, ρ). Ahora bien, usualmente no es fácil determinar mediante la Definición 3.10 si dos métricas son topologicamente equivalentes. Por ello, enseguida presentamos algunos criterios más operativos.

Teorema 3.11. Sea X un conjunto no vacío. Dos métricas d y ρ definidas sobre un mismo conjunto X son topológicamente equivalentes si y sólo si, cumplen:

(1) Para cada bola abierta $B(x, r)$ con la métrica d en el espacio métrico (X, d) existe una bola abierta $B(x, s)$ con la métrica ρ en el espacio métrico (X, ρ) tal que $B(x, r) \subseteq B(x, s)$

y

(2) Para cada bola abierta $B(x, s)$ con la métrica ρ en el espacio métrico (X, ρ) existe una bola abierta $B(x, r)$ con la métrica d en el espacio métrico (X, d) tal que $B(x, s) \subseteq B(x, r)$.

El hecho de que dos métricas d y ρ definidas sobre un mismo conjunto X sean topológicamente equivalentes significa, que las topologías $\mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_\rho$ inducidas por las metricas d y ρ, respectivamente coinciden y así también, todas las propiedades topológicas. Sin embargo, no tiene por qué ocurrir así con las propiedades estrictamente métricas. Así pues, para que tales propiedades métricas coincidan en un espacio y en otro, necesitamos imponer condiciones más fuertes sobre las métricas. La siguiente definición muestra las condiciones que deben satisfacer dos métricas para poder considerarlas como *métricamente equivalentes*.

Definición 3.12. Sea X un conjunto no vacío. Dos métricas d y ρ definidas en el conjunto X son ***métricas equivalentes*** si existen dos constantes reales positivas α y β tales que para cualesquiera $x, y \in X$ se verifica:

$$\alpha d(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \beta d(x,y).$$

En ocasiones, dadas dos topologías sobre un mismo conjunto X únicamente se cumple, que todos los subconjuntos abiertos de una topología son subconjuntos abiertos de la otra. En este caso, la topología con más abiertos distinguirá mejor los puntos del conjunto X. Esto se puede apreciar en el Ejemplo 3.4 donde se cuenta únicamente con un subconjunto abierto diferente del conjunto vacío, aquí intuitivamente todos los puntos "se comportan igual". La formalización de esta intuición se presenta en la siguiente definición.

Definición 3.13. Sea X un conjunto no vacío. Dadas dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ definidas sobre X, se dice que $\mathcal{T}_1$ ***es menos fina que*** $\mathcal{T}_2$ (o $\mathcal{T}_2$ más fina que $\mathcal{T}_1$) si se cumple, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$

Así, dado un conjunto no vacío X, la topología discreta será siempre la más fina de todas las topologías posibles sobre X, y la topología trivial la menos fina.

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$. Todo elemento de la topología $\mathcal{T}_X$ siempre puede ser escrito como unión de elementos de una colección $\mathcal{B}_X$ de subconjuntos abiertos en X. Es decir, siempre es posible hallar una colección $\mathcal{B}_X$ de $\mathcal{T}_X$ tal que $\mathcal{B}_X$ es capaz de "generar" a todos los subconjuntos abiertos en X. En efecto, basta tomar $\mathcal{B}_X = \mathcal{T}_X$. Sin embargo, estas colecciones "generadoras" donde $\mathcal{B}_X = \mathcal{T}_X$ no son muy interesantes, al lado de aquellas, donde $\mathcal{B}_X \subsetneq \mathcal{T}_X$. Como en el Ejemplo 3.5 donde, por la igualdad (3.2) se tiene que no es necesario conocer a todos los subconjuntos abiertos, basta identificar a todas las bolas abiertas, ya que los subconjuntos abiertos serán simplemente uniones de bolas abiertas.

Definición 3.14. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{T}_X$. Si todo elemento no vacío de $\mathcal{T}_X$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}_X$, se dice que $\mathcal{B}_X$ es una ***base para*** $\mathcal{T}_X$. A los elementos de $\mathcal{B}_X$ se les llama abiertos ***básicos***.

Como cualquier subconjunto abierto se puede expresar como unión de básicos, en muchas ocasiones convenientemente trabajamos únicamente con estos últimos, ya que simplifican los cálculos.

La ecuación (3.2) justifica el siguiente ejemplo, en el cual presentamos una base para la topología inducida por una métrica.

Ejemplo 3.15. Sea (X, d) un espacio métrico. La colección de todas las bolas abiertas forma una base para $\mathcal{T}_d$.

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ y $\mathcal{B}_X$ una base para $\mathcal{T}_X$, observemos, que todo elemento básico es un subconjunto abierto. Sin embargo, el recíproco no es en general cierto. Consideremos el Ejemplo 3.15 y sean B_1, B_2 dos elementos básicos diferentes más no disjuntos en $\mathcal{B}_X$. Esto es, B_1, B_2 son dos bolas abiertas en X tales que $B_1 \neq B_2$ y $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Luego, para B_1, B_2 como antes se tiene que $B_1 \cap B_2$ no necesariamente es una bola abierta en X.

A diferencia de un espacio métrico, un espacio topológico no cuenta con una noción de distancia entre sus elementos, por esta razón, *la continuidad de una función entre dos espacios topológicos* ya no puede ser definida en términos de ϵ y δ como en nuestro curso de Cálculo. Sin embargo, es posible dar una definición alterna en términos de subconjuntos abiertos que permite generalizar el concepto a espacios topológicos.

Definición 3.16. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función de X con valores en Y. Se dice que f ***es continua*** si para cada $U \in \mathcal{T}_Y$, se tiene que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$. Esto es, si la imagen inversa de un conjunto abierto en Y, es un conjunto abierto en X.

Cabe mencionar que la continuidad de una función $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ depende no sólo de la regla de correspondencia que define a la función f si no también de las topologías sobre X e Y. Por esta razón, el producto cartesiano de espacios topológicos será considerado con una topología especial, la *topología de Tychonoff* ya que ésta, es la topología menos fina que hace, que las funciones proyección sobre cada factor sean continuas.

3.2 Topología de Tychonoff

En esta sección presentamos, la *topología de Tychonoff* sobre el producto cartesiano de espacios topológicos. Esta topología es de interés para nosotros pues, resulta que el producto cartesiano arbitrario de *espacios topológicos compactos* considerado bajo esta topología es un espacio topológico compacto.

Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ si deseamos definir una topología para el conjunto $X \times Y$, podemos pensar que lo más natural es considerar a los subconjuntos abiertos en $X \times Y$, como el producto cartesiano de subconjuntos abiertos en X e Y, respectivamente. Sin embargo, la familia que hemos elegido no necesariamente es una topología para $X \times Y$, pues la unión de dos de sus elementos no tiene por que pertenecer de nuevo a la familia como se observa en la Figura 3.1, donde se ilustran gráficamente en $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos $(1,2) \times (1,2)$ y $(3,4) \times (2,3)$ donde $\mathbb{R}$ ha sido considerado con la topología inducida por la métrica Euclideana, $\mathcal{T}_{d_2}$. Notemos que el subconjunto $(1,2) \times (1,2) \cup (3,4) \times (2,3)$ no se puede escribir como el producto cartesiano de abiertos en $\mathcal{T}_{d_2}$.

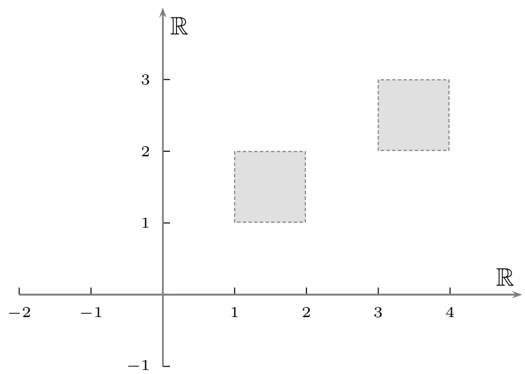


Figura 3.1: Topología de las cajas.

Aunque la familia $\{U \times V : U \in \mathcal{T}_X \text{ y } V \in \mathcal{T}_Y\}$ de subconjuntos del producto cartesiano $X \times Y$ no defina una topología sobre $X \times Y$, la familia formada por uniones arbitrarias de sus elementos sí que lo hace. Esta nueva topología será definida formalmente enseguida bajo el nombre de *topología de las cajas* y es generalizada a cualquier producto cartesiano finito de espacios topológicos. En este caso, existe una estrecha relación con la *topología de Tychonoff*, que será presentada más adelante y es junto con la topología inducida por la métrica las topologías más importantes para nuestro trabajo.

Definición 3.17. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. La topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$ que tiene como base a la colección: $\mathcal{B}_{X\times Y} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X \text{ y } V \in \mathcal{T}_Y\}$ se llama ***topología de las cajas sobre*** $X \times Y$ y se denota por, $\mathcal{T}_{X\times Y}$.

La Definición 3.17 puede ser generalizada sin ningún problema para cualquier producto finito de espacios topológicos.

Definición 3.18. Sean $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_k, \mathcal{T}_k)$ espacios topológicos. La topología sobre el producto cartesiano $\prod_{n=1}^{k} X_n$ que tiene como base a la colección,

$$\mathcal{B}_{\pi_k} = \{U_1 \times \cdots \times U_k : U_i \in \mathcal{T}_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}\} \tag{3.3}$$

se llama ***topología de las cajas sobre*** $\prod_{n=1}^{k} X_n$ y se denota por, $\mathcal{T}_{\pi_k}$.

Para el caso en el que se tengan tres espacios topológicos X, Y y Z, denotamos la topología de las cajas sobre el producto cartesiano $X \times Y \times Z$ como, $\mathcal{T}_{X\times Y\times Z}$ y a la base para dicha topología como $\mathcal{B}_{X\times Y\times Z}$.

Sin problemas, se extiende la definición de topología de las cajas al caso del producto arbitrario de espacios topológicos.

Definición 3.19. Sea I un conjunto no vacío y $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\colon \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. La topología sobre el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ que tiene como base a la colección:

$$B_c = \left\{\prod_{\alpha\in I} U_\alpha\colon U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \text{ para cada } \alpha \in I\right\},$$

se le llama ***topología de las cajas sobre*** $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Además de la topología de las cajas, sobre el producto arbitrario de espacios topológicos, es posible definir una topología que presume de importante ya que bajo ésta, el producto cartesiano de una colección arbitraria de espacios topológicos compactos es compacto. Este resultado es mejor conocido como el *Teorema de Tychonoff* y será el objeto de estudio en el capítulo siguiente.

Definición 3.20. Sean I un conjunto no vacío y $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\colon \alpha \in I\}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. La topología sobre el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ que tiene como base la colección:

$$\mathcal{B}_\pi = \left\{\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)\colon F \subseteq I \text{ finito y } U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \text{ para cada } \alpha \in F\right\}$$

se llama ***topología de Tychonoff sobre*** $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y se denota por $\mathcal{T}_\pi$.

Enseguida, se destacan algunas de las principales características que satisfacen los elementos de la base $\mathcal{B}_\pi$.

Observación 3.21. De la Definición 3.20 sabemos que una ***base para la topología de Tychonoff***, es la colección $\mathcal{B}_\pi$ definida por:

$$\mathcal{B}_\pi = \left\{\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)\colon F \subseteq I \text{ finito y } U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \text{ para cada } \alpha \in F\right\}.$$

Sea $B \in \mathcal{B}_\pi$. Entonces, existe $F \subseteq I$ finito con $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ para cada $\alpha \in F$, de tal manera que:

$$B = \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \tag{3.4}$$

Sin embargo, notemos que el lado derecho de la ecuación (3.4) satisface, $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ con $U_\alpha = X_\alpha$ para cada $\alpha \notin F$. Por lo tanto, B se puede escribir como:

$$B = \prod_{\alpha\in I} U_\alpha, \tag{3.5}$$

donde $U_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in I \setminus F$. De esta manera, un elemento $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in B$ si y sólo si $x_\alpha \in U_\alpha$, para cada $\alpha \in F$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego, de la igualdad (3.5), se sigue que B se puede definir como sigue:

$$B = \prod_{n=1}^{k} U_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \in I \setminus F} X_\alpha. \tag{3.6}$$

Supongamos que el conjunto de índices I es finito, digamos $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Así, la familia de espacios topológicos está dada por, $\{(X_{\alpha_n}, \mathcal{T}_{\alpha_n}) : n = 1, \dots, k\}$. Luego, dado que para cada $n \in \{1, \dots, k\}$ se cumple que $X_{\alpha_n} \in \mathcal{T}_{\alpha_n}$, por la ecuación (3.5), se tiene que la base $\mathcal{B}_\pi$ para la topología de Tychonoff sobre el producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_k$ queda determinada por la colección:

$$B_\pi = \left\{ \prod_{\alpha_i=1}^{k} U_{\alpha_i} \colon U_i \in \mathcal{T}_{\alpha_i}, \text{ para cada } i = 1, \dots, k \right\}. \tag{3.7}$$

Por lo tanto, la base para la topología de Tychonoff sobre el producto cartesiano de una colección finita de espacios topológicos, coincide con la base para la topología de las cajas como fue presentada en la Definición 3.18. Así, en el producto cartesiano de una colección finita de espacios topológicos, la topología de Tychonoff no es más que la topología de las cajas. Este hecho, hace aún más importante la topología de Tychonoff, pues de alguna manera, es una extensión de la topología de las cajas.

Enseguida presentamos un par de resultados acerca de espacios topológicos metrizables. Ambos de suma importancia para nuestro trabajo. Para una demostración del Teorema 3.22 vea el libro *Topología de J. Munkres* [19, pág. 139].

Teorema 3.22. Sea $\mathbb{R}^n$ como en el Ejemplo 1.25. La topología $\mathcal{T}_{d_2}$ sobre $\mathbb{R}^n$ inducida por la métrica Euclideana d_2 coincide con la topología de Tychonoff $\mathcal{T}_\pi$ sobre $\mathbb{R}^n$. Es decir, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\pi)$ es un espacio topologico metrizable.

Un resultado similar al Teorema 3.22 puede ser formulado para $\mathbb{R}^\omega$. La demostración se puede consultar en [19, pág. 142]

Teorema 3.23. Si x, y son dos puntos de $\mathbb{R}^\omega$, la función $\overline{D} \colon \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ determinada por la regla:

$$\overline{D}(x,y) = \sup \left\{ \frac{\text{mín}\{|x_n - y_n|, 1\}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{3.8}$$

es una métrica sobre $\mathbb{R}^\omega$ que induce la topología de Tychonoff sobre $\mathbb{R}^\omega$.

El siguiente resultado involucra el producto cartesiano de espacios topológicos, en el dominio de la función proyección sobre alguna de sus coordenadas. Resulta, que de acuerdo con la Definición 3.16, la función proyección es una función continua sobre el producto cartesiano de espacios topológicos.

Proposición 3.24. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \colon \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Luego, para cada $\beta \in I$, la función proyección sobre la β-ésima coordenada $\pi_\beta \colon \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ es continua.

Demostración. Sean $\beta \in I$ fijo y $U_\beta \in \mathcal{T}_\beta$. Haciendo $F = \{\beta\}$ y por (3.4), se tiene que $U_\beta \in \mathcal{B}_\pi$. Así $U_\beta \in \mathcal{T}_\pi$ y por lo tanto π_β es continua. ✧

3.3 Espacio topológico compacto

Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. De manera similar a la Definición 2.50 a una colección $\mathcal{O}$ de subconjuntos de X se le llama *cubierta de* K si $K \subseteq \bigcup \mathcal{O}$. Si además, cada uno de los elementos de $\mathcal{O}$ es un elemento de $\mathcal{T}_X$, entonces a $\mathcal{O}$ se le llama *cubierta abierta para* K. Por otro lado, si $\mathcal{O}$ es una cubierta de K y $\mathcal{O}_1$ es una subcolección de $\mathcal{O}$ tal que $K \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$ diremos que $\mathcal{O}_1$ es una *subcubierta de* $\mathcal{O}$ *para* K. Una vez aclarados estos conceptos, enseguida extendemos la noción de subconjunto compacto presentada en la Definición 2.51 a espacios topológicos.

Definición 3.25. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Se dice que $(X, \mathcal{T}_X)$ es un ***espacio topológico compacto***, si toda cubierta abierta de X admite por lo menos una subcubierta finita para X.
Dado un espacio topológico compacto, para ser más escuetos, diremos simplemente que X es compacto.

Probar que un espacio topológico es compacto usando la Definición 3.25 usualmente se torna bastante complicado. Sin embargo, cabe mencionar que existen diversas caracterizaciones que facilitan la prueba. Particularmente, nosotros presentamos un caracterización que a simple vista parece, que no existe diferencia alguna con la Definición 3.25, no obstante si la hay. Esta diferencia, será mucho más notable en la siguiente sección ya que esta caracterización nos permitirá simplificar la demostración del resultado más importante de este capítulo, el *Teorema de Tychonoff.*

Proposición 3.26. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Se sigue que X es compacto si y sólo si toda familia $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_X$ de subconjuntos abiertos de X que no admite subcubiertas finitas para X, no cubre a X.

Demostración. Las afirmaciones son equivalentes, procedamos a mostrarlo explícitamente. Recordemos, que de acuerdo con la Definición 3.25 un espacio topologico $(X, \mathcal{T}_X)$ es compacto si y sólo si toda colección $\mathcal{O}$ de subconjuntos abiertos que cubre a X, admite subcubiertas finitas para X. Definamos las siguientes proposiciones:

(1) $\mathbf{P}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ cubre a X.

(2) $\mathbf{Q}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ admite subcubiertas finitas para X.

(3) $\mathbf{C}(X) = X$ es un espacio topológico compacto.

En términos de las proposiciones anteriores la Definición 3.25 se puede expresar como:

$$\mathbf{C}(X) \Leftrightarrow \forall \mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_X \big\{ \mathbf{P}(\mathcal{O}) \Rightarrow \mathbf{Q}(\mathcal{O}) \big\} \equiv \forall \mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_X \big\{ \neg \mathbf{Q}(\mathcal{O}) \Rightarrow \neg \mathbf{P}(\mathcal{O}) \big\}.$$

Lo que se traduce de la siguiente manera: El espacio topológico X es compacto si y sólo si toda colección de conjuntos abiertos que no admite subcubiertas finitas para X no cubre a X. De esta manera la prueba está completa. ✧

Los siguientes resultados resaltan el buen comportamiento de los conjuntos compactos bajo funciones continuas.

Teorema 3.27. La imagen de un espacio topológico compacto bajo una función continua es compacto.

Demostración. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios tolopológicos con X compacto y $f\colon X \to Y$ una función continua. Consideremos una cubierta abierta $\mathcal{O} = \{O_\alpha\colon \alpha \in I \text{ y } O_\alpha \in \mathcal{T}_Y\}$ para $f(X)$. Mostremos que $\mathcal{O}$ admite subcubiertas finitas para $f(X)$. Notemos que la colección $\{f^{-1}(O_\alpha)\colon \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta para X. En efecto, para cada $x \in X$ existe $O_\alpha \in \mathcal{O}$ tal que $f(x) \in O_\alpha$ y por lo tanto $x \in f^{-1}(O_\alpha)$. Entonces, como X es un espacio topológico compacto, existen $O_1, \ldots, O_k$ en $\mathcal{O}$ tales que, $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(O_i)$. Luego, por las propiedades de la imagen inversa de una función se tiene que, $f(X) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_i$. Por lo tanto, $f(X)$ es compacto. ✧

Otro resultado que habla muy bien del comportamiento de los conjuntos compactos bajo funciones continuas es muy conocido por nuestros cursos de Cálculo y es como sigue. Una demostración se puede ver en [19, pág. 198].

Teorema 3.28. Sea X un espacio topológico compacto. Toda función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en X. Es decir, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que para todo $x \in X$ se satisface $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

La siguiente sección puede ser considerada sin dudarlo como la más importante de este capítulo, ya que en ella se presenta el resultado al cual se le debe la compacidad del ω-cubo, estamos hablando del *Teorema de Tychonoff*.

3.4 Los teoremas de Tychonoff

En esta sección se presenta *el Teorema de Tychonoff* así como una demostración de éste, utilizando el principio de inducción transfinita 1.22. Este teorema es sumamente importante para nosotros pues recordemos que nuestro objetivo, es estudiar la compacidad del ω-cubo y resulta que una consecuencia importante del *Teorema de Tychonoff* es la compacidad del ω-cubo. Por otro lado, la Proposición 3.26 junto con dos lemas que serán presentados según se necesiten nos permitirán no sólo simplificar la demostración del *Teorema de Tychonoff* si no también presentar pruebas para dos casos particulares del Teorema de Tychonoff: el producto cartesiano finito e infinito numerable de espacios topológicos compactos a los que denominamos *el pequeño teorema de Tychonoff* y *el joven Teorema de Tychonoff*, respectivamente. Lo realmente interesante, es que para estas pruebas se utilizan argumentos muy similares y todas están basadas en los principios de inducción presentados en la Sección 1.3. Cabe mencionar que nuestro objetivo quedaría completamente realizado con sólo probar el *joven Teorema de Tychonoff*, sin embargo, nosotros vamos por el "pez gordo".

3.4.1 El pequeño Teorema de Tychonoff

Comenzamos presentando un primer lema que además de facilitar la escritura, nos permitirá utilizar la Proposición 3.26 para probar *el pequeño Teorema de Tychonoff* que es un caso particular del *Teorema de Tychonoff* donde la colección de espacios topológicos en cuestión es finita.

Lema 3.29. Sean $(Y,\mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico y $(X,\mathcal{T}_X)$ un espacio topológico compacto. Si $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{T}_{X\times Y}$, es una colección de conjuntos abiertos que no admite subcubiertas finitas para $X\times Y$, entonces existe $x_0\in X$ tal que para cada $U\in\mathcal{T}_X$ con $x_0\in U$ y para cada subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$, se tiene que $U\times Y\nsubseteq\bigcup\mathcal{O}_1$.

Demostración. Supongamos para cada $x\in X$, existe $U_x\in\mathcal{T}_X$ con $x\in U_x$ tal que $U_x\times Y\subseteq\bigcup\mathcal{O}_x$, para alguna subcolección finita $\mathcal{O}_x$ de $\mathcal{O}$. Luego, la colección $\{U_x\colon x\in X\}$ es una cubierta abierta para X. Como X es compacto, existen $x_1,\ldots,x_n\in X$ tales que $X=\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i}$. De esta manera, de la propiedad del producto cartesiano, se sigue que:

$$X\times Y=\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\right)\times Y=\bigcup_{i=1}^{n}\big(U_i\times Y\big).$$

Luego, como consecuencia de suponer que la conclusión es falsa y por las propiedades de la unión de conjuntos, se deduce lo siguiente:

$$X\times Y\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\Big(\bigcup\mathcal{O}_{x_i}\Big)\subseteq\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{x_i}\right).$$

Dado que para cada $i=1,\ldots,n$ se cumple que $\mathcal{O}_{x_i}$ es una subcolección finita de $\mathcal{O}$, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{x_i}$ es una subcolección finita de $\mathcal{O}$. De esta manera, la cubierta abierta $\mathcal{O}$ admite una subcubierta finita para $X\times Y$. ✧

Si a las hipótesis del Lema 3.29 agregamos que el espacio topológico Y sea compacto, entonces una consecuencia inmediata es el siguiente resultado.

Corolario 3.30. Sean $(X,\mathcal{T}_X)$ y $(Y,\mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos compactos. Si $\mathcal{O}$ es una colección de subconjuntos abiertos que no admite subcubiertas finitas para $X\times Y$, entonces existe $(x_0,y_0)\in X\times Y$ tal que para cualesquiera $U\in\mathcal{T}_X$ y $V\in\mathcal{T}_Y$ con $(x_0,y_0)\in U\times V$ se tiene que $U\times V\nsubseteq\bigcup\mathcal{O}_1$, para cualquier subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$.

Demostración. Como X, Y son espacios topológicos compactos y $\mathcal{O}$ una colección de abiertos que no admite subcubiertas finitas para $X \times Y$, del Lema 3.29 existe $x_0 \in X$ tal que para cada $U \in \mathcal{T}_X$ con $x_0 \in U$ se tiene que $U \times Y \nsubseteq \mathcal{O}_1$, para toda subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. Supongamos que no existe $y_0 \in Y$ tal que para cualesquiera $U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$ con $x_0 \in U$ y $y_0 \in V$ se cumple que $U \times V \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1$, para cualquier subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. Así, para cada $y \in Y$ existen $U_y \in \mathcal{T}_X$ y $V_y \in \mathcal{T}_Y$ con $(x_0, y) \in U_y \times V_y$ tales que $U_y \times V_y \subseteq \bigcup \mathcal{O}_y$ para alguna subcolección finita $\mathcal{O}_y$ de $\mathcal{O}$. Dado que Y es compacto existen $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ tales que $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Para cada y_i consideremos el respectivo U_{y_i} y definamos $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Luego, U es elemento de $\mathcal{T}_X$ con $x_0 \in U$. De las propiedades del producto cartesiano y definición de U, se tiene que:

$$U \times Y = U \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (U \times V_{y_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{y_i} \times V_{y_i}) .$$

Luego, de haber supuesto la falsedad de la conclusión y propiedades de la unión de conjuntos,

$$U \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup \mathcal{O}_{y_i} \right) \subseteq \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{y_i} \right) .$$

Entonces, dado que $\mathcal{O}_{y_i}$ es una subcolección finita de $\mathcal{O}$, se tiene que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{y_i}$ es una subcolección finita de $\mathcal{O}$ lo que contradice al Lema 3.29. Por lo tanto, existe $y_0 \in Y$ de tal manera que para $(x_0, y_0) \in X \times Y$ y cada $U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$ con $(x_0, y_0) \in U \times V$, se tiene que $U \times V \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1$ para cualquier subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. ✧

Dado que, para demostrar el *pequeño Teorema de Tychonoff* serán de gran utilidad el Principio de Inducción Matemática 1.21 y el Corolario 3.30, enseguida presentamos un resultado que será fundamental a la hora de utilizar el Principio de Inducción Matemática 1.21 para probar el *pequeño Teorema de Tychonoff*.

Teorema 3.31. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Entonces, $X \times Y$ es compacto si y sólo si X y Y son compactos.

Demostración. Supongamos que $X \times Y$ es compacto, veamos que X y Y son compactos. Por Proposición 3.24 sabemos que la función proyección sobre cada coordenada es continua. Luego, del Teorema 3.27 se sigue que X y Y son compactos. Para el recíproco, utilicemos la Proposición 3.26. Sea $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_{X \times Y}$ tal que ninguna subcolección finita de $\mathcal{O}$ cubre a $X \times Y$. Por Corolario 3.30, existe (x_0, y_0) tal que para cada $U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$ con $(x_0, y_0) \in U \times V$ se tiene que $U \times V \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1$ para cualquier subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. Ahora veamos que $\mathcal{O}$ no cubre a $X \times Y$. Supongamos lo contrario, $X \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{O}$. Entonces existe $O \in \mathcal{O}$ tal que $(x_0, y_0) \in O$. Luego, de la Definición 3.14, existe $B_0 \in \mathcal{B}_{X \times Y}$ tal que $(x_0, y_0) \in B_0 \subseteq O$. Así, para $\mathcal{O}_1 = \{O\}$ se tiene que $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$ es una subcolección finita y $B_0 \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$. Esto contradice al Corolario 3.30. Por lo tanto, $X \times Y \nsubseteq \mathcal{O}$. Aplicando la Proposición 3.26, se deduce que $X \times Y$ es compacto. ✧

Ahora, sin más preámbulos procedamos a la demostración del ya muchas veces citado *pequeño Teorema de Tychonoff*.

El pequeño Teorema de Tychonoff 3.32. Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, sean $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_k, \mathcal{T}_k)$ espacios topológicos. Se sigue que el producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{k} X_n$ es compacto si y sólo si $X_1, \ldots, X_k$ son compactos.

Demostración. Supongamos que $\displaystyle\prod_{n=1}^{k} X_n$ es compacto, veamos que X_n es compacto para cada $n = 1, \ldots, k$. Por la Proposición 3.24 sabemos que la función proyección sobre cada coordenada es continua, luego del Teorema 3.27 se sigue que X_n es compacto, para cada $n = 1, \ldots, k$. Veamos la suficiencia del teorema. Así, apliquemos el Principio de Inducción Matemática para probar que la siguiente proposición matemática es verdadera,

$\boldsymbol{P}(k) =$ Si $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_k, \mathcal{T}_k)$ son espacios topológicos compactos, entonces el producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{k} X_n$ es un espacio topológico compacto.

Base inductiva. De la suficiencia del Teorema 3.31 se tiene que $\boldsymbol{P}(2)$ es cierto.

Hipótesis inductiva. Supongamos que $\boldsymbol{P}(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ menor que k. Esto es, dado $n \in \mathbb{N}$ más pequeño que k fijo, si $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ son espacios topológicos compactos entonces el producto cartesiano $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$ es compacto.

Paso inductivo. Veamos que $\boldsymbol{P}(k)$ es verdadero. Sean $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X, \mathcal{T}_k)$ espacios topológicos compactos. Probemos que $\displaystyle\prod_{n=1}^{k} X_n$ es compacto. Dado que $\displaystyle\prod_{n=1}^{k} X_n$ se puede escribir como,

$$\prod_{n=1}^{k} X_n = \prod_{n=1}^{k-1} X_n \times X_k.$$

Y por hipótesis X_k es un espacio topológico compacto y se sigue de la hipótesis inductiva que el producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{k-1} X_n$ es también un espacio topológico compacto. Entonces de la base inductiva se tiene que $\displaystyle\prod_{n=1}^{k} X_n$ es compacto. De esta manera, por el Principio de Inducción Matemática 1.21 podemos concluir que: para cada $k \in \mathbb{N}$, si $X_1, \ldots, X_k$ son espacios topológicos compactos, entonces el producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{k} X_n$ es compacto. ✧

En particular, si $X_i = X$ para cada $i = 1, \ldots, n$, donde X es un espacio topológico compacto, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.33. Sean X espacio topólogico y $k \in \mathbb{N}$. Si X es un espacio topológico compacto entonces $X^k = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{k\text{-veces}}$ es compacto.

El siguiente ejemplo, exhibe parte de la inmensa capacidad del pequeño Teorema de Tychonoff.

Ejemplo 3.34. Sean $n \in \mathbb{N}$ y r un número real positivo fijos. Por la Proposición 2.67 sabemos que el n-cubo de lado $2r$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que la demostración presentada en esos momentos no fue realmente sencilla, debido a las pocas herramientas con las que contábamos. Sin embargo, ahora que nos hemos hecho de nuevos resultados mucho más complejos, se observa que la Proposición 2.67 se obtiene como consecuencia inmediata del Corolario 3.33.

3.4.2 El joven Teorema de Tychonoff

En esta sección generalizamos el pequeño Teorema de Tychonoff para el producto infinito numerable de espacios topológicos compactos. Llamamos a esta generalización *el joven Teorema de Tychonoff*. Primero veamos un lema que será de gran utilidad para probar dicha generalización.

Lema 3.35. Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ y $(Z, \mathcal{T}_Z)$ espacios topológicos con Y compacto, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_{X\times Y\times Z}$ y $x_0 \in X$. Si para cada $U \in \mathcal{T}_X$ con $x_0 \in U$, se tiene que $U \times Y \times Z \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1$ para cada subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$, entonces existe $y_0 \in Y$ tal que para cualesquiera $U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$ con $(x_0, y_0) \in U \times V$ y cada subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$ se tiene que $U \times V \times Z \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1$.

Demostración. Supongamos que para cada $y \in Y$, existen $U_y \in \mathcal{T}_X$ y $V_y \in \mathcal{T}_Y$ con $(x_0, y) \in U_y \times V_y$ tales que $\big(U_y \times V_y\big) \times Z \subseteq \bigcup \mathcal{O}_y$, para alguna subcolección finita $\mathcal{O}_y$ de $\mathcal{O}$. Luego, la colección $\big\{V_y : y \in Y\big\}$ es una cubierta abierta para Y. Dado que Y es compacto, existen $y_1, \ldots, y_n$ en Y tales que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Definiendo $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, se tiene que $U \in \mathcal{T}_X$ y $x_0 \in U$. Luego, de las propiedades del producto cartesiano:

$$U \times Y \times Z = U \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) \times Z \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{y_i} \times V_{y_i} \times Z) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{y_i} \times V_{y_i}) \times Z. \tag{3.9}$$

De (3.9) y de haber supuesto que la conclusión del Corolario 3.30 es falsa se tiene que,

$$U \times Y \times Z \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Big(\bigcup \mathcal{O}_{y_i}\Big) \subseteq \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{y_i}\right).$$

Como cada $\mathcal{O}_{y_i}$ es una subcolección finita de $\mathcal{O}$, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{y_i}$ es una subcolección finita de $\mathcal{O}$. De esta manera, la prueba está completa. ✧

El joven Teorema de Tychonoff 3.36. Sea $\big\{(X_n, \mathcal{T}_n) \colon n \in \mathbb{N}\big\}$ una familia de espacios topológicos. Luego, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto si y sólo si X_n es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Mostremos la necesidad. Supongamos que $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es compacto. Veamos que X_α es compacto, para cada $\alpha \in I$. Por Proposición 3.24 sabemos que la función proyección sobre cada coordenada es continua. Luego del Teorema 3.27, se sigue que X_α es compacto, para cada $\alpha \in I$. Ahora probemos la suficiencia. Sea $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_\pi$ tal que $X \not\subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$, para cada subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. Probemos que existe al menos un punto $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ tal que x no pertenece a $\bigcup \mathcal{O}$. Construyamos dicho punto coordenada a coordenada. Para ello utilicemos inducción matemática sobre $k \in \mathbb{N}$, y veamos que la siguiente proposición es verdadera,

$\boldsymbol{P}(k)$ = Existe $x_k \in X_k$ tal que para cada $U \in \mathcal{T}_{\pi_k}$ con $(x_1, \ldots, x_k) \in U$, se tiene que, para toda subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$, $U \times \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n \not\subseteq \mathcal{O}_1$.

Caso base. Veamos que $\boldsymbol{P}(1)$ es verdadera. Basta escribir $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ como $X_1 \times \prod_{n=2}^{\infty} X_n$. Haciendo, $X = X_1$, $Y = \prod_{n=2}^{\infty} X_n$ y dado que X_1 es compacto, por Lema 3.29, existe $x_1 \in X_1$ tal que para cualquier $U_1 \in \mathcal{T}_1$ con $x_1 \in X_1$ se tiene que: $U_1 \times \prod_{n=1}^{\infty} X_n \not\subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$ para cualquier subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. Por lo tanto, $\boldsymbol{P}(1)$ es verdadera.

Hipótesis Inductiva. Supongamos que la proposición $\boldsymbol{P}$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n < k$, esto es, para cada $n \in \mathbb{N}$ más pequeño que k fijo, existe x_n en X_n tal que para cada $U \in \mathcal{T}_{\pi_n}$ con $(x_1, \ldots, x_n) \in U$, se tiene que: $U \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \not\subseteq \mathcal{O}_1$, para toda subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$.

Paso inductivo. Veamos que $\boldsymbol{P}(k)$ es cierta. Como $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ se puede escribir como:

$$\left(\prod_{n=1}^{k-1} X_n\right) \times X_k \times \left(\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n\right),$$

haciendo $X = \prod_{n=1}^{k-1} X_n, Y = X_k, Z = \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$ y tomando en cuenta que por la hipótesis inductiva, es posible construir un punto $x = (x_1, \ldots, x_{k-1}) \in X$ tal que para todo $U \in \mathcal{T}_{\pi_{k-1}}$ con $x \in U$ se tiene que $U \times Y \times Z \not\subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$, para cualquier subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. Por el Lema 3.35, existe $x_k \in X_k$ tal que para cualesquiera $U_{k-1} \in \mathcal{T}_{k-1}$ y $U_k \in \mathcal{T}_{\pi_k}$ con $(x, x_k) \in U_{k-1} \times U_k$, se tiene que:

$$U_{k-1} \times U_k \times \left(\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n\right) \not\subseteq \bigcup \mathcal{O}_1,$$

para cada subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$.

Sin embargo, dado que (x, x_k) se puede ver como $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ y el producto de abiertos

$U_{k-1} \times U_k$ como un elemento de $\mathcal{T}_{\pi_k}$, la conclusión, por el Lema 3.35, se expresa como sigue: Existe $x_k \in X_k$ tal que para cualquier $U \in \mathcal{T}_{\pi_k}$ con $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \in U$ se tiene que,

$$U \times \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1,$$

para cada $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$ finita. Por lo tanto, la proposición $\boldsymbol{P}$ es verdadera para k. Luego el Principio de Inducción Matemática implica, que la proposición $\boldsymbol{P}$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, es posible construir un punto $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde cada coordenada x_n es consecuencia de que $\boldsymbol{P}(n)$ es verdadera para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $x \notin \bigcup \mathcal{O}$. Supongamos lo contrario, esto es, que $x \in \bigcup \mathcal{O}$. Luego, existe $O \in \mathcal{O}$ tal que $x \in O$. Más aún, por definición de la topología de Tychonoff, existe $B_0 = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k \times \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$, para algún $k \in \mathbb{N}$, tal que $x \in B_0 \subseteq O$. Tomando $U = U_1 \times \cdots \times U_k$, se satisface que $U \in \mathcal{T}_{\pi_k}$ y $(x_1, \ldots, x_k) \in U$, pero lo más importante se cumple que $U \times \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$ para $\mathcal{O}_1 = \{O\}$, lo cual contradice la construcción de la coordenada x_k ya que $\mathcal{O}_1$ es una subcolección finita de $\mathcal{O}$. Así, $X \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}$. Por lo tanto, de la Proposición 3.26 se concluye que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto. ✧

Si X es un espacio topológico compacto y $X_n = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el siguiente resultado se tiene como consecuencia inmediata del pequeño Teorema de Tychonoff 3.36.

Corolario 3.37. Sea X espacio topólogico compacto. Si $X_n = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces el producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X^n$ es compacto.

Del Corolario 3.37 se tiene cubierto el objetivo principal de este capítulo, el cual consistía en estudiar la compacidad del ω-cubo como subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$. Como consecuencia inmediata de dicho corolario el dictamen resulta ser favorable, el ω-cubo es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\omega$ donde los subconjuntos abiertos son los determinados por la topología de Tychonoff sobre $\mathbb{R}^\omega$.

Sin embargo, aunque nuestro objetivo este cumplido, como ya se dijo anteriormente abordamos también el Teorema de Tychonoff pues resulta realmente interesante que los argumentos utilizados en las demostraciones de estos tres teoremas: el pequeño Teorema de Tychonoff, el joven Teorema de Tychonoff y el Teorema de Tychonoff son iguales salvo generalizaciones.

3.4.3 El Teorema de Tychonoff

Ahora, probemos el "hecho y derecho" Teorema de Tychonoff. Cabe mencionar que existen muchas demostraciones de dicho teorema que utilizan diversas técnicas para su propósito. Algunas de las demostraciones más importantes del Teorema de Tychonoff se pueden consultar en el artículo

Demostraciones del Teorema de Tychonoff de F. Barragan, A. Romero y J.F. Tenorio [2, págs.103–125]. La demostración presentada a continuación forma parte de dicho artículo y su herramienta principal es el Principio de Inducción Transfinita 1.22. Recordemos que:

Principio de Inducción Transfinita. Consideremos $(I, \preceq)$ un conjunto bien ordenado y sea $P(\alpha)$ una proposición matemática formulada para cada $\alpha \in I$. Si se cumplen:

(1) Si β es el primer elemento de I, entonces $P(\beta)$ es cierta,

(2) La validez de $P(\beta)$ para cada $\beta \prec \alpha$ implica la validez de $P(\alpha)$,

entonces $P(\alpha)$ es verdadera, para cada $\alpha \in I$.

Antes de continuar con la demostración del Teorema de Tychonoff, presentamos notación sumamente útil a lo largo de la demostración. Dado un conjunto de índices I, por el Principio del buen orden 1.19 se tiene que I también puede ser considerado como un conjunto bien ordenado, $(I, \preceq)$. Luego, para $\beta \in I$ fijo y para cada $\alpha \preceq \beta$, tomemos $x_\alpha \in X_\alpha$. Se definen y denotan las subcolecciones $\mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}}$ y $\mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}}$ de los productos cartesianos $\prod_{\alpha \prec \beta} X_\alpha$ y $\prod_{\alpha \preceq \beta} X_\alpha$, respectivamente, como sigue:

$$\mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} = \left\{ \prod_{\alpha \preceq \beta} U_\alpha \colon U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \text{ con } x_\alpha \in U_\alpha \text{ para cada } \alpha \preceq \beta \right\}, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}} = \left\{ \prod_{\alpha \prec \beta} U_\alpha \colon U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \text{ con } x_\alpha \in U_\alpha \text{ para cada } \alpha \prec \beta \right\}. \tag{3.11}$$

Teorema de Tychonoff 3.38. Sean I un conjunto no vacío y $\big\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \colon \alpha \in I\big\}$ una familia de espacios topológicos. Se sigue que $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es compacto si y sólo si X_α es compacto, para cada $\alpha \in I$.

Demostración. Utilicemos la Proposición 3.26 para demostrar la suficiencia. Sea $\mathcal{O}$ una subcolección de $\mathcal{B}_\pi$ tal que $\mathcal{O}$ no admite subcubiertas finitas para $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, veamos que $\mathcal{O}$ no cubre a $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$; es decir, probemos que existe al menos un punto $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que x no pertenece a $\bigcup \mathcal{O}$. Construyamos dicho punto coordenada a coordenada. Para ello, utilicemos el Principio de inducción transfinita 1.22. Veamos que para cada $\beta \in I$, la siguiente proposición matemática es verdadera,

P(β) = Existe $x_\beta \in X_\beta$ tal que para cada $U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}}$ se tiene que: $U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha \right) \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1$ para cada subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$.

Sea $\beta \in I$ fijo, consideremos los casos siguientes:

Si $\beta = \min I$, basta escribir $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ como $X_\beta \times \left(\prod\limits_{\alpha \succ \beta} X_\alpha\right)$ ya que para este caso, se tiene que $U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} = U_{x_\beta} \in \mathcal{T}_\beta$ y de hacer $X = X_\beta$ y $Y = \prod\limits_{\alpha \succ \beta} X_\alpha$. Dado que X_β es compacto, por Lema 3.29, existe $x_\beta \in X_\beta$ tal que para cualquier $U_\beta \in \mathcal{T}_\beta$ con $x_\beta \in X_\beta$ se tiene que:

$$U_\beta \times \prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha \not\subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$$

para cualquier subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. Así, $P(\beta)$ es verdadero.

Supongamos que $\beta \succ \min I$. Por el Principio de Inducción Transfinita 1.22, supongamos que $\boldsymbol{P}(\gamma)$ es verdadera para cada $\gamma \in I$ con $\gamma \prec \beta$ y probemos que $\boldsymbol{P}(\beta)$ es verdadero, es decir, veamos que existe $x_\beta \in X_\beta$ tal que para cualquier $U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}}$ y toda subcolección finita $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$, se tiene que:

$$U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha\right) \not\subseteq \bigcup \mathcal{O}_1.$$

Apliquemos el Lema 3.35 para probar la existencia de dicho punto $x_\beta \in X_\beta$. Pero primero, comprobemos que realmente se cuentan con todas las hipótesis del Lema 3.35. Para nuestro caso, hagamos: $X = \prod\limits_{\alpha \prec \beta} X_\alpha$, $Y = X_\beta$ y $Z = \prod\limits_{\alpha \succ \beta} X_\alpha$. Como X_β es compacto, resta hallar un punto $(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta} \in \prod_{\alpha \prec \beta} X_\alpha$ tal que para cada $U_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}}$ se cumpla lo siguiente:

$$U_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}} \times X_\beta \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha\right) \not\subseteq \bigcup \mathcal{O}_1, \text{ para cada subcolección finita } \mathcal{O}_1 \text{ de } \mathcal{O}.$$

Consideremos el punto $(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta} \in \prod_{\alpha \prec \beta} X_\alpha$ donde para cada $\alpha \prec \beta$, la respectiva coordenada x_α es obtenida de suponer que $\boldsymbol{P}(\alpha)$ es verdadera. Veamos que dicho punto satisface la hipótesis faltante del Lema 3.35. Supongamos lo contrario; esto es, que existe $U_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}}$ tal que

$$U_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}} \times X_\times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha\right) \subseteq \mathcal{O}_1, \text{ para alguna subcolección finita } \mathcal{O}_1 \text{ de } \mathcal{O}. \tag{3.12}$$

Digamos que $\mathcal{O}_1 = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\} \subseteq \mathcal{O}$. Como $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}_\pi$, para cada $i = 1, \ldots, n$, el elemento O_i pertenece a $\mathcal{B}_\pi$. Por Observación 3.21, existe un subconjunto finito F_i de I tal que,

$$O_i = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha, \tag{3.13}$$

donde para cada $\alpha \in F_i$ se tiene que $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ y $U_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \in I \setminus F_i$. De esta última igualdad se tiene que, $\pi_\alpha(O_i) = X_\alpha$, para cada $\alpha \in I \setminus F_i$. Notemos además, que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $\alpha \in F_i$ para el cual $\pi_\alpha(O_i) \neq X_\alpha$, de lo contrario de la ecuación (3.13) se tiene que $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$

estaría cubierto por $\mathcal{O}_1$, lo cual no puede ser, pues $\mathcal{O}$ no admite subcubiertas finitas para $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.
En consecuencia, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$. Además, por la parte a) de la Observación 1.29, podemos suponer que, para $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ se tiene que $\pi_\alpha(O_i) \neq X_\alpha$ y para $\alpha \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ocurre que $\pi_\alpha(O_i) = X_\alpha$.
Ahora veamos que existe al menos un índice $\alpha \in I$ tal que $\alpha \prec \beta$ y $\pi_\alpha(O_i) \neq X_\alpha$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto es, veamos que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \cap \{\alpha \in I \colon \alpha \prec \beta\} \neq \emptyset$.

Supongamos lo contrario, a saber, que para cada $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ se cumple que $\alpha \succeq \beta$. Luego, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\alpha \in I$ con $\alpha \prec \beta$, se tiene que $\pi_\alpha(O_i) = X_\alpha$. Sea $y = (y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y definamos,

$$z = \begin{cases} z_\alpha = x_\alpha, & \text{si} \quad \alpha \prec \beta; \\ z_\alpha = y_\alpha, & \text{si} \quad \beta \succeq \alpha. \end{cases}$$

Notemos que para cada $\alpha \prec \beta$ se tiene que $\pi_\alpha(O_k) = X_\alpha$. Como la α-ésima proyección sobre O_k es el α-ésimo factor, X_α, sin lugar a dudas se tiene que $x_\alpha \in \pi_\alpha(O_k)$. Además, de la ecuación (3.13) se observa que O_k es un subproducto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, luego de aplicar la parte c) de la Observación 1.29, a $F = \big\{\alpha \in I : \alpha \succeq \beta\big\}$, $y \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y z definida como arriba, se concluye que $y \in O_k$. De esta manera para un elemento y arbitrario de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in O_k$. Así, para $y \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ se cumple que $y \in \bigcup \mathcal{O}_1$. Por lo tanto, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$, lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{O}$ no admite subcubiertas finitas para $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Por lo tanto, $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \cap \{\alpha \in I \colon \alpha \prec \beta\} \neq \emptyset$.
Ahora, sea γ el elemento maximal de $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \cap \{\alpha \in I \colon \alpha \prec \beta\}$. De esta manera para cada $\alpha \in I$ con $\gamma \prec \alpha \prec \beta$ se tiene que $\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ por lo tanto, $\pi_\alpha(\mathcal{O}_i) = X_\alpha$. Notemos que la existencia del elemento maximal $\gamma \in I$ ha sido consecuencia de suponer que existe $U_{(x_\alpha)_{\alpha\prec\beta}}$ que satisface la ecuación (3.12), y hasta el momento, no hemos encontrado contradicción alguna respecto a dicha suposición. Sin embargo, para este $\gamma \in I$ se cumple que $U_{(x_\alpha)_{\alpha\preceq\gamma}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha\ \preceq\gamma}}$ y se satisface,

$$U_{(x_\alpha)_{\alpha\preceq\gamma}} \times \left(\prod_{\alpha\succ\gamma} X_\alpha\right) \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1,$$

lo cual es una contradicción con la hipótesis de inducción. En efecto, sea $y \in U_{(x_\alpha)_{\alpha\preceq\gamma}} \times \left(\prod_{\alpha\succ\gamma} X_\alpha\right)$

y definimos $z \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ como sigue:

$$z = \begin{cases} z_\alpha = y_\alpha, & \text{si} \quad \alpha \prec \beta; \\ z_\alpha = x_\alpha, & \text{si} \quad \gamma \prec \alpha \prec \beta; \\ z_\alpha = y_\alpha, & \text{si} \quad \beta \preceq \alpha. \end{cases}$$

En consecuencia, se tiene que $z \in U_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}} \times X_\beta \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha \right) \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$, donde esto último se debe a que se satisface la ecuación (3.12). Luego, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $z \in \mathcal{O}_j$. Sin embargo, notemos que para $\alpha \in I$ tal que $\gamma \prec \alpha \prec \beta$ se tiene que $\pi_\alpha^{-1}(O_j) = X_\alpha$, por lo tanto $z_\alpha \in \pi_\alpha^{-1}(O_j)$ y para $\alpha \in F = \{\alpha \in I : \alpha \prec \beta \text{ o } \beta \preceq \alpha\}$ se cumple que $z_\alpha = y_\alpha$. Entonces al aplicar la parte c) de la Observación 1.29 podemos concluir que $y \in O_j$. Por lo tanto, como y es arbitrario, se tiene que $U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \gamma}} \times \left(\prod_{\alpha \succ \gamma} X_\alpha \right) \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$.

Lo cual, contradice la hipótesis de inducción.

Por lo tanto, hemos mostrado que, para cada $U_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}}$, se tiene que:

$$U_{(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta}} \times X_\beta \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha \right) \nsubseteq \mathcal{O}_1, \text{ para cada subcolección finita } \mathcal{O}_1 \text{ de } \mathcal{O}.$$

De esta manera, también podemos afirmar que el punto $(x_\alpha)_{\alpha \prec \beta} \in \prod_{\alpha \prec \beta} X_\alpha$ satisface la hipótesis restante del Lema 3.35. Entonces, con todas las hipótesis completas, el Lema 3.35 garantiza la existencia del punto $x_\beta \in X_\beta$ tal que, para cada $U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}}$ se tiene que

$$U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha \right) \nsubseteq \mathcal{O}_1, \text{ para cada subcolección finita } \mathcal{O}_1 \text{ de } \mathcal{O}.$$

Entonces, por el Principio de inducción transfinita, para cada $\beta \in I$, existe $x_\beta \in X_\beta$ tal que para cada $U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}}$ se tiene que

$$U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha \right) \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1, \text{ para cada subcolección finita } \mathcal{O}_1 \text{ de } \mathcal{O}.$$

De esta manera, es posible construir un punto $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$, donde cada x_α es obtenido como consecuencia de que $P(\alpha)$ es cierto, para cada $\alpha \in I$.

Con la finalidad de aplicar la Proposición 3.26, veamos que $x \notin \bigcup \mathcal{O}$. Supongamos lo contrario, que $x \in \bigcup \mathcal{O}$. Luego, existe $O \in \mathcal{O}$ tal que $x \in O$. Sin embargo, como $O \in \mathcal{B}_\pi$, por Observación 3.21, existe un subconjunto finito F de I tal que, $O = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha$, donde $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ para cada α en F y $U_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \in I \setminus F$. De aquí, notemos que $F \neq \emptyset$, ya que de no ser así, $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1$ para

$\mathcal{O}_1 = \{O\}$, lo cual es una contradicción. Luego, como F es un subconjunto finito, sea $\beta = \max F$ y definimos,

$$B_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} = \begin{cases} B_\alpha = U_\alpha, & \text{si} \quad \alpha \in F; \\ B_\alpha = X_\alpha, & \text{si} \quad \alpha \prec \beta \text{ y } \alpha \notin F. \end{cases}$$

Así, $B_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}}$. Entonces de la definición de $B_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}}$ y O se sigue que,

$$B_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha \right) \subseteq \bigcup \mathcal{O}_1, \text{ donde } \mathcal{O}_1 = \{O\} \subseteq \mathcal{O}.$$

Lo cual es una contradicción, ya que por ser $\boldsymbol{P}(\beta)$ verdadero, para cada $U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \in \mathcal{B}_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}}$ se cumple que:

$$U_{(x_\alpha)_{\alpha \preceq \beta}} \times \left(\prod_{\alpha \succ \beta} X_\alpha \right) \nsubseteq \bigcup \mathcal{O}_1 \text{ para cada subcolección finita } \mathcal{O}_1 \text{ de } \mathcal{O}.$$

Por lo tanto $x \notin \bigcup \mathcal{O}$. Y por la Proposición 3.26, se concluye que $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es compacto. ✧

Llegó el momento de responder algunas de las preguntas planteadas al final del Capítulo 2.

Primero que nada, sabemos por el Ejemplo 3.5, que todo espacio métrico es también un espacio topológico con la topología inducida por la métrica. Particularmente, el conjunto $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico con la topología inducida por la métrica Euclideana $\mathcal{T}_{d_2}$, como se describió en el Ejemplo 3.5. Por otro lado, recordemos que el producto cartesiano infinito numerable de espacios topológicos se ha de considerar con la topología de Tychonoff como en la Definición 3.20. Se observa que los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^\omega$ ya no son los mismos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, sí cambiaron.

Un motivo más, por el que la topología de Tychonoff es importante para nuestro trabajo, se encuentra implícito en el Teorema de Tychonoff 3.38, el cual da respuesta a una de las preguntas planteadas en el capítulo anterior. El Teorema de Tychonoff 3.38 asegura que el producto cartesiano de una colección arbitraria de espacios topológicos compactos es un espacio topológico compacto. Especialmente, si todos los elementos de la colección son el mismo conjunto, el intervalo cerrado I_r para algún $r > 0$, y tomando en cuenta que todo subconjunto no vacío de un espacio topológico es también un espacio topológico se tiene como consecuencia del Teorema de Tychonoff 3.38 que el ω-cubo de lado $2r$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\omega$.

Consideremos ahora, el conjunto $\mathbb{R}^\omega$. Sea r un número real positivo. Sabemos, por la Definición 2.66 que el ω-cubo de lado $2r$ esta determinado por el conjunto:

$$I_r^\omega = \big\{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega : |x_n| < r\big\}. \tag{3.14}$$

Por otro lado, por el Teorema 3.23 sabemos que el espacio topológico $(\mathbb{R}^\omega, \mathcal{T}_\pi)$ es un espacio topológico metrizable donde la métrica $\overline{D}$ definida sobre $\mathbb{R}^\omega$ tal que $\mathcal{T}_{\overline{D}} = \mathcal{T}_\pi$, se define para $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ en $\mathbb{R}^\omega$ mediante la regla,

$$\overline{D}(x, y) = \sup\left\{\frac{\text{mín}\left\{|x_n - y_n|, 1\right\}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{3.15}$$

Luego, la bola cerrada unitaria $B[\vec{0}, 1]$ en el espacio métrico $\left(\mathbb{R}^\omega, \overline{D}\right)$ queda determinado por el conjunto:

$$B[\vec{0}, 1] = \left\{x \in \mathbb{R}^\omega \colon \overline{D}(x, \vec{0}) \leq 1\right\},$$

de la ecuación (3.15), se sigue que:

$$B[\vec{0}, 1] = \left\{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \colon x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \sup\left\{\frac{\text{mín}\left\{|x_n|, 1\right\}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \leq 1\right\}. \tag{3.16}$$

Para r como antes, por la propiedad Arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < n_0$. Consideremos el punto $x_0 = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}, \ldots, \frac{1}{n_0}}_{n_0 - 1 \text{ - veces}}, n_0, n_0, \ldots\Bigg) \in \mathbb{R}^\omega$. Se verifica que $\overline{D}(x_0, \vec{0}) \leq 1$, por lo tanto $x_0 \in B[\vec{0}, 1]$. Sin embargo, como la n_0-ésima coordena de x_0 es $n_0 > r$, de acuerdo con la ecuación (3.14) se tiene que $x_0 \notin I_r^\omega$. Lo que significa que $B[\vec{0}, 1] \not\subseteq I_r^\omega$. Dada la arbitrariedad de r. Se concluye que, la bola cerrada unitaria en $\mathbb{R}^\omega$ no puede ser colocada dentro de algún ω-cubo, respondiendo así a una pregunta más planteada al final Capítulo 2.

Capítulo 4

Compacidad en espacios normados

Y así, del mucho leer y del poco dormir...

Don Quijote de la Mancha, Miguel de Cervantes S.

El objetivo de este capítulo es estudiar la compacidad de *la bola cerrada* en espacios dotados de una estructura algebraica, más concretamente en $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Para ello, es necesario considerar métricas en $\mathbb{R}$-espacios vectoriales que son inducidas por una *norma* en el espacio vectorial. Dicho concepto de norma es el resultado de la unificación de dos estructuras matemáticas de naturaleza un tanto distinta; una algebraica y la otra topológica como lo es la de espacio métrico.

4.1 Espacios normados

Recordemos que un $\mathbb{R}$-***espacio vectorial*** consiste de un conjunto X cuyos elementos se llaman ***vectores*** y satisfacen las siguientes propiedades:

(1) Para cada par de vectores $x, y \in X$, existe un vector $x + y \in X$ que se llama la ***suma de los vectores*** x y y, tal que:

   a) Para todo $x, y \in X$, $x + y = y + x$.

   b) Existe un vector $\theta \in X$ tal que para cualquier $x \in X$ se cumple que, $\theta + x = x + \theta = x$.

   c) Para cada vector $x \in X$, existe un vector $-x \in X$ tal que $x + (-x) = \theta$.

   d) Para cualesquiera $x, y, z \in X$ se satisface, $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(2) Para cada $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un vector $\alpha x \in X$ al que se le llama ***multiplicación de*** x ***por el escalar*** α y satisface:

   a) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x \in X$, se cumple que $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

   b) Para todo $x \in X$, $1x = x$.

c) Para cada $x \in X$, se satisface $0x = \theta$.

(3) Ambos operaciones, la suma de vectores y la multiplicación por escalar están relacionadas como sigue:

a) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x \in X$ que se cumple, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$, se tiene que $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Cabe destacar que los vectores θ y $-x$ descritos en la propiedad 1-*b*) y 1-*c*) respectivamente, son únicos. Muchos de los conjuntos con los que ya hemos trabajado en capítulos anteriores pueden ser considerados espacios vectoriales bajo operaciones específicas. A continuación, presentamos los espacios vectoriales más destacables a lo largo de nuestro trabajo.

Ejemplo 4.1. El conjunto de los números reales es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y multiplicación por escalar usuales.

Enseguida se generaliza el Ejemplo 4.1.

Ejemplo 4.2. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n$ definido como en el Ejemplo 1.25. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ la suma de los vectores x y y se define por:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n). \tag{4.1}$$

La multiplicación de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y el elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se define por,

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n). \tag{4.2}$$

No es difícil ver, que la suma de elementos en $\mathbb{R}^n$ y la multiplicación por escalar definidas como en (4.1) y (4.2) satisfacen las propiedades (1), (2) y (3) que caracterizan a un espacio vectorial. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y multiplicación por escalar expuestas anteriormente.

Presentamos enseguida un $\mathbb{R}$-espacio vectorial cuya participación será más activa en el siguiente capítulo.

Ejemplo 4.3. Sean K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de todas las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ se denota por $\mathcal{C}(K)$, esto es:

$$\mathcal{C}(K) = \big\{ f \mid f \colon K \to \mathbb{R} \text{ y } f \text{ es continua} \big\}$$

La suma de dos funciones f y g en $\mathcal{C}(K)$ es la función $f + g$ de K en $\mathbb{R}$ definida de manera puntual para cada $x \in K$ por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x). \tag{4.3}$$

Así también, la multiplicación del escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y la función $f \in \mathcal{C}(K)$ queda determinado puntualmente por:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x). \tag{4.4}$$

Con esta suma de funciones y multiplicación por escalar no es difícil verificar que el conjunto $\mathcal{C}(K)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

En un $\mathbb{R}$-espacio vectorial X son de particular importancia las métricas que verifican:

(1) Para cualesquiera x, y y z en X, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$,

(2) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$,

pues basta conocer $d(x, \theta)$ para todo $x \in X$ para determinar por completo la distancia entre dos elementos cualesquiera de X, ya que $d(x, y) = d(x - y, \theta)$. Al valor $d(x, \theta)$ se le llama la *norma del vector* $x \in X$. Dada la relevancia que presenta este nuevo concepto en nuestro trabajo se presenta enseguida una definición formal.

Definición 4.4. Sea X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una ***norma*** en X es una función $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(1) $\|x\| \geq 0$, para cada $x \in X$.

(2) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = \theta$, donde θ es el elemento neutro de X.

(3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para cada $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para cada $x, y \in X$.

A las propiedades (3) y (4) se les conoce como propiedad ***homogenea*** y ***desigualdad del tríangulo***, respectivamente. Y el par $(X, \|\cdot\|)$ se llama ***espacio normado***.

Así como en espacios métricos, en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se le llama ***subespacio normado*** a todo subconjunto $Y \subseteq X$ ya que sin dificultad se observa que la función $\|\cdot\|$ restringida a Y está bien definida.

Presentamos ahora un serie de ejemplos donde se exponen algunas de las normas más relevantes para nuestro trabajo.

Ejemplo 4.5. En $\mathbb{R}^n$ la función $\|\cdot\|_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como,

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

es una norma sobre $\mathbb{R}^n$ y se le llama ***la norma euclideana en*** $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4.6. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Consideremos la función $\|\cdot\|_\infty \colon \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ determinada por la regla,

$$\|f\|_\infty = \sup\big\{|f(x)| \colon x \in K\big\}. \tag{4.5}$$

Como toda función continua sobre un conjunto compacto alcanza sus valores máximo y mínimo, ocurre que $|f|$ alcanza su valor máximo en algún punto $x_0 \in K$, esto es, $\|f\|_\infty = |f(x_0)| < \infty$, lo que significa que la función $\|\cdot\|_\infty$ está bien definida.
Probemos enseguida que la función $\|\cdot\|_\infty$ define una norma sobre $\mathcal{C}(K)$. Para ello, comprobemos que la función $\|\cdot\|_\infty$ satisface las cuatro propiedades que definen a una norma.

(1) Es claro que la función $\|\cdot\|_\infty$ es no negativa.

(2) Observemos que, $\|f\|_\infty = 0$ si y sólo si $|f(x)| = 0$ para cada $x \in K$ y esto equivale a que $f(x) = 0$ para todo $x \in K$, equivalentemente se tiene que $f = 0$.

(3) Para la homogeneidad,

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_\infty &= \sup\big\{|\alpha f(x)| \colon x \in K\big\} \\
&= |\alpha| \sup\big\{|f(x)| \colon x \in K\big\} \\
&= |\alpha|\, \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

(4) Finalmente, la desigualdad del triángulo es probada como sigue:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\infty &= \sup\big\{|(f+g)(x)| \colon x \in K\big\} \\
&= \sup\big\{|f(x)+g(x)| \colon x \in K\big\} \\
&\le \sup\big\{|f(x)|+|g(x)| \colon x \in K\big\} \\
&\le \sup\big\{|f(x)| \colon x \in K\big\} + \sup\big\{|g(x)| \colon x \in K\big\} \\
&= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (1),(2),(3) y (4) se tiene que, la función $\|\cdot\|_\infty$ es efectivamente una norma en $\mathcal{C}(K)$ y nos referimos a ella como ***la norma uniforme en*** $\mathcal{C}(K)$.

En el siguiente ejemplo se presenta un caso particular del espacio de las funciones continuas sobre un subconjunto compacto K, que se obtiene considerando $K = [a, b]$ con $a < b$ números reales.

Ejemplo 4.7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $[a, b]$ el intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Sabemos por el pequeño Teorema de Heine-Borel 2.63, que el intervalo cerrado $[a, b]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Luego, como caso particular del Ejemplo 4.6, se denota el espacio normado de las funciones continuas de valores reales sobre $[a, b]$ por $\mathcal{C}[a, b]$. En este caso, la norma uniforme en $\mathcal{C}[a, b]$ queda como:

$$\|f\|_\infty = \sup\big\{|f(x)| \colon x \in [a, b]\big\}.$$

En el Capítulo 2 vimos que es posible definir dos métricas diferentes en un mismo conjunto, en espacios normados podemos hacer algo similar. En el siguiente ejemplo se define una norma diferente en $\mathcal{C}[a,b]$ a la norma uniforme definida en el Ejemplo 4.7.

Ejemplo 4.8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $[a,b]$ el intervalo cerrado en $\mathbb{R}$. Consideremos la colección de todas las funciones continuas sobre $[a,b]$ y la función $\|\cdot\|\colon \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

se tiene que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{C}[a,b]$.

El siguiente resultado exhibe la relación entre los conceptos de norma y métrica. Explícitamente, decreta que todo espacio normado es también un espacio métrico donde la métrica en cuestión está íntimamente ligada a la norma.

Proposición 4.9. Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico (X, d) donde d es ***la métrica inducida por la norma en*** X y se define de la siguiente manera,

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{4.6}$$

Demostración. De las propiedades que caracterizan a un espacio vectorial y a una norma, no es difícil ver que la función d descrita en la ecuación (4.6), satisface las tres propiedades que definen a una métrica. ✧

Notemos que en el Ejemplo 4.5 la norma $\|\cdot\|_2$ induce la métrica Euclidiana d_2. Por otro lado, para no hacer compleja y aburrida la lectura cuando estemos considerando un espacio normado y hagamos referencia a él como un espacio métrico acordaremos que la métrica considerada es la métrica inducida por la norma. Cuando esto no sea así, será especificado.

El recíproco de la Proposición 4.9 no es en general cierto. Basta considerar un espacio métrico (X, d) donde el conjunto X no sea espacio vectorial. Por ejemplo, consideremos el conjunto $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la métrica discreta, pero X no es un espacio vectorial ya que no existe un elemento θ en X que cumple la propiedad 1-b) que define a un espacio vectorial. También, de la Proposición 4.9, se observa que todos los conceptos y resultados para espacios métricos presentados en el Capítulo 2 son válidos y aplicables a un espacio normado, visto como un espacio métrico. Asimismo, es importante observar que es posible traducir muchos de estos conceptos y resultados propios de los espacios métricos en términos unicamente de la norma, como se revela a continuación.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Recordemos que uno de los conceptos más importantes en este trabajo, es el de bola cerrada. Además, la Proposición 4.9 ha revelado la entrañable relación que existe entre los conceptos de norma y espacio métrico. Por estas razones, resulta imprescindible describir la bola cerrada en términos de la norma.

Sea $x_0 \in X$ y r un número real positivo. La ***bola cerrada con centro en*** x_0 ***y radio*** r es el conjunto,

$$B[x_0, r] = \{x \in X \colon \|x - x_0\| \leq r\}. \tag{4.7}$$

De la ecuación (4.6) se observa que la bola cerrada descrita en (4.7) en términos de la norma y la bola cerrada dada en la Definición 2.16 en términos de la métrica son realmente el mismo conjunto.

En un espacio normado X, llamamos ***bola cerrada unitaria en*** X a la bola cerrada con centro en θ y radio 1. También, es importante observar que dado $A \subseteq X$ la caracterización para subconjuntos acotados proporcionada en la Proposición 2.46 se puede transcribir en términos de la norma sin dificultad alguna. De esta manera, diremos que A es un ***subconjunto acotado de*** X si existe un número real positivo M tal que, para cada $x \in A$, se satisface $\|x\| \leq M$.

En un espacio normado la redacción de algunos conceptos y resultados básicos acerca de sucesiones en espacios métricos, es mucho más sencilla si se hacen en términos de la norma.
Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X. La sucesión $\{x_n\}$ ***converge a un elemento*** $x \in X$ si se satisface:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Esto es, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - y\| < \epsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

Consideremos ahora una sucesión $\{x_n\}$ en el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. El criterio presentado en la Definición 2.38 para determinar si la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, puede ser expresado en términos de la norma sin dificultad alguna. Diremos que $\{x_n\}$ es una ***sucesión de Cauchy en*** X si y sólo si

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0.$$

Equivalentemente, si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon, \text{ siempre que } n, m \geq N.$$

La trascripción de sucesión de Cauchy de un espacio métrico a un espacio normado, motiva la idea de completez de un espacio normado. Con la diferencia de que un espacio normado con la propiedad que, toda sucesión de Cauchy converge a un punto del espacio, recibe un nombre exclusivo:

Definición 4.10. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un ***espacio de Banach*** si es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma en X.

Siempre que nos encontremos en un espacio normado y se haga referencia a un concepto definido propiamente para espacios métricos, acordaremos que se está considerando al espacio normado como un espacio métrico.

4.2 Bola cerrada unitaria en espacios normados

Todo espacio vectorial X puede ser *generado*[V] por un subconjunto de vectores L de X, basta considerar $L = X$. Sin embargo, existen espacios vectoriales con la propiedad de ser generados por un subconjunto finito de vectores, estos espacios vectoriales dotados de una norma, poseen una basta variedad de propiedades interesantes, de las cuales presentamos en esta sección las más relevantes para nuestro trabajo.

Definición 4.11. Diremos que X es un ***espacio normado de dimensión finita*** si como espacio vectorial lo es. Es decir, si existe un número finito de vectores linealmente independientes [VI] en X que generan a X. De no ser así, diremos que el espacio normado es de ***dimensión infinita***.

Es posible probar que cualesquiera dos colecciones distintas de vectores linealmente independientes que generen a un espacio normado de dimensión finita tiene el mismo número de elementos, esta afirmación motiva la siguiente definición.

Definición 4.12. Sean X un espacio normado de dimensión finita y $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ una colección de vectores linealmente independientes que genera a X. Al número n se le llama ***la dimensión del espacio normado*** X y se denota por $\dim X = n$. Así, que el espacio normado sea de dimensión finita se denota como, $\dim X < \infty$ y que no lo sea como $\dim X = \infty$.

Ejemplo 4.13. En el espacio normado $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ consideremos el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ definido por $L = \big\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1,0),(0,0,\ldots,0,1)\big\}$. No es difícil ver que todo elemento de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de L, lo que implica que L genera a $\mathbb{R}^n$. Luego, dado que L tiene exactamente n elementos se tiene $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado de dimensión finita.

Antes de mostrar el primer resultado que involucra a los espacios normados de dimensión finita, veamos un resultado previo.

[V]**Definición.** Sea L un subconjunto no vacío de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial X. Se dice que L ***genera a*** X si todo vector en X se puede escribir como una combinación lineal de elementos en L. Es decir, si para todo $x \in X$, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, \ldots, x_n \in L$ tales que $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. Se denota este hecho como $X = \text{gen}(L)$.

[VI]**Definición.** Un subconjunto S de un espacio vectorial X, se dice que S ***es linealmente independiente*** si las únicas combinaciones lineales de elementos de S iguales a cero son las combinaciones lineales donde todos los escalares son cero.

Lema 4.14. Sea X un espacio normado. Si $x_1, \ldots, x_k$ son vectores linealmente independientes en X, entonces existe un número real positivo c tal que para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ se satisface la siguiente desigualdad,

$$c \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \right\|. \tag{4.8}$$

La demostración escapa a nuestros propósitos, por tanto la omitiremos, para ver una prueba se sugiere consultar [17, pág. 72].

El siguiente resultado, evidencía la relación entre los espacios normados de dimensión finita y las espacios de Banach.

Teorema 4.15. Todo subespacio de dimesión finita Y de un espacio normado X es completo.

Demostración. Sea $\{y_n\}$ una sucesión de Cauchy en Y. Veamos que $\{y_n\}$ converge a un elemento de Y. Supongamos que, $\dim Y = k$. Se sigue que existe un subconjunto linealmente independiente $L = \{e_1, ..., e_k\}$ de Y tal que cualquier elemento de Y, puede ser representado de forma única como una combinación lineal de elementos de L. De esta manera, cada término y_n de la sucesión tiene una representación única de la forma:

$$y_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \cdots + \alpha_k^{(n)} e_k.$$

Como $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy, para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, siempre que $n, m \geq N$ se tiene que $\|y_n - y_m\| < \epsilon$. Luego, como L genera a Y el elemento $y_n - y_m$ en Y se puede escribir como:

$$y_n - y_m = \left(\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{(m)}\right) e_1 + \cdots + \left(\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}\right) e_k = \sum_{j=1}^{k} \left(\alpha_j^{n} - \alpha_j^{m}\right) e_j \tag{4.9}$$

luego, del Lema 4.14, existe $c > 0$ tal que para $n, k \geq N$, se satisface:

$$c \sum_{j=1}^{k} \left|\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}\right| \leq \left\| \sum_{j=1}^{k} \left(\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}\right) e_j \right\| = \|y_n - y_m\| < \epsilon. \tag{4.10}$$

De (4.10), para cada $j = 1, \ldots, k$, se sigue que:

$$\left|\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}\right| \leq \sum_{j=1}^{k} \left|\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}\right| < \frac{\epsilon}{c},$$

lo que implica que cada una de las sucesiones $\left\{\alpha_j^{(n)}\right\}$, es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo con la métrica Euclideana, para cada $j = 1, \ldots, k$, la sucesión $\left\{\alpha_j^{(n)}\right\}$ converge a algún elemento de $\mathbb{R}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, sea $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_j^{(n)} \to \alpha_j$. Luego, tomando $y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k$ se tiene que y es combinación lineal de elementos de L

lo que significa que $y \in Y$. Veamos ahora que la sucesión de Cauchy $\{y_n\}$ converge a y. De las propiedades (3) y (4) que definen a una norma, se sigue que:

$$\|y_n - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \left(\alpha_j^{(n)} - \alpha_j \right) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{k} \left| \alpha_j^{(n)} - \alpha_j \right| \; \|e_j\|.$$

Como para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, se cumple que $\alpha_j^{(n)} \to \alpha_j$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$. Por lo tanto $y_n \to y$. Así, la sucesión $\{y_n\}$ converge en Y, lo que implica que Y es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma. Lo que completa la prueba. ✧

El siguiente resultado se obtiene como consecuencia del Teorema 4.15 y de la Proposición 2.44.

Teorema 4.16. Todo subespacio de dimensión finita Y de un espacio normado X es un subconjunto cerrado de X.

Particularmente, si en el Teorema 4.15, el espacio normado X es de dimensión finita, entonces X es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma. Del Ejemplo 2.42, sabemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo, pero no está de más corroborar esto utilizando el Teorema 4.15, sirve que vemos cómo utilizar este teorema para determinar cuándo un espacio normado es un espacio métrico completo.

Ejemplo 4.17. Por el Ejemplo 4.13, sabemos que $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ es un espacio normado de dimensión finita. Luego, del Teorema 4.15, se deduce que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la norma que no es más que la métrica Euclideana definida en el Ejemplo 2.5. Por lo tanto, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es un espacio métrico completo.

El siguiente resultado será sumamente importante en la siguiente sección, cuando estudiemos la compacidad de la bola cerrada en un espacio normado de dimensión infinita.

Lema de Riesz 4.18. Si Y y Z son subespacios de un espacio normado X tales que Y es un subconjunto propio de Z y cerrado de X, entonces para cada número real $t \in (0, 1)$, existe $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$ y $\|z - y\| \geq t$, para todo $y \in Y$.

Demostración. Como Y es un subconjunto propio de Z, existe z_0 en Z tal que $z_0 \notin Y$. Denotemos con a la distancia de z_0 a Y. Así,

$$a = \text{ínf} \left\{ \|z_0 - y\| \colon y \in Y \right\}.$$

Como Y es un subconjunto cerrado, $Y = \overline{Y}$. Luego, de la Proposición 2.29 se sigue que $a > 0$. Ahora consideremos un número $t \in (0, 1)$ y definamos $\epsilon = \dfrac{a}{t} - a$. No es difícil ver que $\epsilon > 0$. Luego por definición de ínfimo, existe $y_0 \in Y$ tal que,

$$a \leq \|z_0 - y_0\| \leq a + \epsilon.$$

Por definición de ϵ, se deduce que,

$$a \leq \|z_0 - y_0\| \leq \frac{a}{t}. \tag{4.11}$$

Definamos $z = c(z_0 - y_0)$, donde $c = \dfrac{1}{\|z_0 - y_0\|}$. Notar que $z \in Z$. Veamos que z es el elemento en Z que se ha estado buscando. No es complicado verificar que $\|z\| = 1$. De esa manera resta mostrar que $\|z - y\| \geq t$, para cada $y \in Y$. Sea $y \in Y$,

$$\|z - y\| = \|c(z_0 - y_0) - y\| = c\|z_0 - (y_0 + c^{-1}y)\|,$$

haciendo $y_1 = y_0 + c^{-1}y$, se tiene que:

$$\|z - y\| = c\|z_0 - y_1\|.$$

Como Y es un espacio vectorial, se tiene que $y_1 \in Y$. Por definición de a, $\|z_0 - y_1\| \geq a$. Por lo tanto,

$$\|z - y\| \geq a\,c, \quad \text{para todo } y \in Y. \tag{4.12}$$

Luego, de las ecuaciones (4.11) y (4.12) podemos concluir que,

$$\|z - y\| \geq ca = \frac{a}{\|z_0 - y_0\|} \geq t.$$

Con esta desigualdad la prueba está completa. ✧

El propósito de la siguiente sección es estudiar la compacidad de la bola cerrada unitaria en un espacio normado.

4.3 La bola cerrada unitaria

Sea X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas definidas en X, se dice que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son ***normas equivalentes*** si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que:

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \tag{4.13}$$

para todo $x \in X$.

El siguiente resultado, presenta las condiciones bajo las cuales dado un espacio vectorial, cualesquiera dos normas son equivalentes. Para una demostración consulte el libro *Introductory functional analysis with applications de E. Kreyszig* [17, pág. 75].

Teorema 4.19. En un espacio vectorial de dimensión finita cualesquiera dos normas son equivalentes.

Esta propiedad que poseen los espacios vectoriales de dimensión finita es bastante interesante ya que todas las normas en X inducen la misma topología. Esto es, los subconjuntos abiertos de X son los mismos sin importan la elección de la norma. Además, dado que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión finita, se tiene como consecuencia inmediata del Teorema 4.19 que cualesquiera dos métricas definidas sobre $\mathbb{R}^n$ y que sean inducidas por alguna norma son equivalentes.

De esta manera, para un espacio vectorial de dimensión finita X se tiene la oportunidad de elegir una norma que mejor se adapte a nuestras necesidades, y que facilite cumplir nuestros objetivos con la certeza de que las afirmaciones obtenidas para dicha norma seguirán siendo válidas para cualquier otra norma definida en X, por más compleja que ésta sea.

Por otra lado, de acuerdo con la Definición 4.11, un espacio normado X puede ser clasificado respecto a su dimensión como un espacio normado de dimensión finita o infinita. Por esta razón, para estudiar la compacidad de la bola cerrada unitaria en espacios normados se hace tomando en cuenta esta clasificación.

Independientemente de si el espacio normado es o no de dimensión finita, la siguiente observación exhibe una útil opción para probar si un subconjunto de un espacio normado es compacto.

Observación 4.20. Por la Proposición 4.9, sabemos que todo espacio normado es un espacio métrico. Por lo tanto, las diferentes formas para caracterizar a un subconjunto compacto en un espacio métrico presentadas en el Teorema 2.62, pueden ser usadas para probar que un subconjunto es compacto en un espacio normado.

De la Sección 2.6 sabemos que en un espacio métrico euclideano, el Teorema de Heine-Borel 2.68 proporciona un criterio bastante sencillo para determinar cuando un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto. El Teorema de Heine-Borel 2.68 asegura que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si éste es cerrado y acotado. En un espacio normado de dimensión finita, el Teorema de Heine-Borel 2.68 sigue siendo válido como se muestra enseguida.

Teorema 4.21. Sean X un espacio normado de dimensión finita y $K \subseteq X$. Se tiene que, K es un subconjunto compacto de X si y sólo si K es un subconjunto cerrado y acotado de X.

Demostración. Probemos la necesidad del teorema. Supongamos que K es un subconjunto compacto de X. De las Proposiciones 2.54 y 2.55 se tiene que K es un subconjunto cerrado y acotado de X. Verifiquemos ahora la necesidad del teorema. Supongamos que K es un subconjunto cerrado y acotado de X. Sean $k = \dim(X)$ y $\{z_1, \ldots, z_k\} \subseteq X$ tal que $\text{gen}\{z_1, \ldots, z_k\} = X$. Demostremos que K es secuencialmente compacto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en K, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ por hipótesis existen $\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_k^{(n)}$ tales que,

$$x_n = \alpha_1^{(n)} z_1 + \ldots + \alpha_k^{(n)} z_k. \tag{4.14}$$

Luego, dado que K es un subconjunto acotado de X, existe $M > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que,

$$\|x_n\| \leq M. \tag{4.15}$$

Por otro lado, puesto que el conjunto de vectores $\{z_1, \ldots, z_k\}$ es linealmente independiente, por el Lema 4.14 existe $c > 0$ tal que para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ en $\mathbb{R}$ se cumple que,

$$c \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \right\|. \tag{4.16}$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ de las desigualdades (4.15) y (4.16) se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$c \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i^{(n)}| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(n)} z_i \right\| \leq \|x_n\| \leq M. \tag{4.17}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ fijo, de la ecuación (4.17) la sucesión de escalares $\left\{\alpha_j^{(n)}\right\}$ es acotada y por el Teorema de Bolzano-Weirstrass 2.48, la imagen de cada una de estas sucesiones $\left\{\alpha_j^{(n)}\right\}$ tiene un punto de acumulación α_j. Luego, por el Lema 2.36, es posible extraer para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ una subsucesión $\left\{\alpha_j^{(n)_m}\right\}$ de $\left\{\alpha_j^{(n)}\right\}$ tal que $\alpha_j^{(n)_m} \to \alpha_j$. Definamos, $x^{(n)_m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(n)_m} z_j$. No es difícil ver que $\left\{x^{(n)_m}\right\}$ es una sucesión Cauchy en K. Como K es un subconjunto cerrado de un espacio normado de dimensión finita, por el Teorema 4.15 se tiene que K es un subconjunto completo de X. Por lo tanto, la sucesión $\left\{x^{(n)_m}\right\}$ es convergente en K. Lo que completa la prueba. ✧

Ahora, consideremos la bola cerrada unitaria en un espacio normado X de dimensión finita. De la Proposición 2.20, se sigue que la bola cerrada unitaria es un subconjunto cerrado de X y por la Proposición 2.46, se tiene que la bola cerrada unitaria es un subconjunto acotado en X. Por lo tanto, el Teorema 4.21 implica que la bola cerrada unitaria en un espacio normado de dimensión finita es un subconjunto compacto.

El siguiente resultado exhibe el comportamiento de la bola cerrada unitaria en un espacio normado de dimesión infinita. Resulta que aquí, la bola cerrada unitaria no se comporta como en $\mathbb{R}^n$ o como en un espacio normado de dimensión finita.

Teorema 4.22. Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces la bola cerrrada unitaria no es un subconjunto compacto de X.

Demostración. Sea $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| \leq 1$. Consideremos $Y_1 = \text{gen}\{x_1\}$, como $\dim Y_1 < \infty$, por el Teorema 4.16, se tiene que Y_1 es un subconjunto cerrado de X y dado que $\dim X = \infty$ se sigue que $Y_1 \subsetneq X$. Luego, para $t = \frac{1}{2}$ por el Lema de Riesz 4.18, existe $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| = 1$ y $\|x_2 - y\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $y \in Y_1$, particularmente se tiene que $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Ahora, consideremos $Y_2 = \text{gen}\{x_1, x_2\}$. De manera análoga que Y_1 se cumple que $Y_2 \subsetneq X$ y es un subconjunto cerrado de X. Luego, por el Lema de Riesz 4.18 existe $x_3 \in X$ con $\|x_3\| = 1$ tal que $\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in Y_3$, en particular, $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ y $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Continuando de manera inductiva con este procedimiento, podemos definir una sucesión $\{x_n\}$ tal que, $\|x_n\| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se satisface que, $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$. De esta manera, por la elección de cada elemento x_n se sigue que $\{x_n\}$ es una sucesión en la bola cerrada unitaria que no admite alguna subsucesión convergente. Por lo tanto, el Teorema 2.62 implica que la bola cerrada unitaria no es un subconjunto compacto en X. ✧

Por el Teorema 4.22, podemos notar que la compacidad, en espacios normados de dimensión infinita, no se puede caracterizar mediante las nociones de subconjunto cerrrado y acotado. Así, surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿Qué condición o condiciones debemos de agregar a un subconjunto de un espacio normado de dimensión infinita, para que se tenga la compacidad?

Capítulo 5

Compacidad en espacios de funciones

Es claro que se debe iniciar partiendo $[f(a), f(b)]$ en lugar de $[a, b], \ldots$

Henri Lebesgue.

El objetivo principal de este capítulo es estudiar criterios para caracterizar a los subconjuntos compactos en algunos espacios de funciones, tales como el espacio de las funciones continuas y los espacios L^p, para $1 < p < \infty$. En tales espacios es posible definir respectivamente una norma lo que los hace sumamente interesantes ya que entonces estos espacios de funciones pueden ser considerados simultáneamente como espacios normados, espacios métricos y consecuentemente espacios topológicos, donde cada uno de estos guardan una estrecha relación.

5.1 El espacio de las funciones continuas

En la Sección 2.5 fueron presentadas cuatro maneras diferentes de caracterizar a los subconjuntos compactos de un espacio métrico. Sin embargo, en la Sección 2.6 vimos que para algunos espacios métricos específicos como el espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^n$ es posible dar una caracterización más, denominada el Teorema de Heine-Borel 2.68. Posteriormente, en la Sección 4.3 observamos que este último resultado seguía siendo válido para espacios normados de dimensión finita. Ahora, en esta sección daremos un resultado más, uno que caracterice a los subconjuntos compactos en el *espacio de las funciones continuas sobre un espacio métrico compacto*. Dicho resultado es conocido como el *Teorema de Arzelà-Ascoli* basado en la noción de *equicontinuidad* introducida por Ascoli en 1884.

En el Capítulo 2, frecuentemente se han presentado sucesiones de números reales. En este capítulo consideramos sucesiones cuyos términos son funciones en lugar de números reales. A diferencia de una sucesión de números reales, para una sucesión de funciones es posible definir al menos dos nociones diferentes de convergencia: la *convergencia puntual* y la *convergencia uniforme*.

Sea (X, d) un espacio métrico. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ diremos que $\{f_n\}$ es una ***sucesión de funciones de*** X ***en*** $\mathbb{R}$. Se observa, que para cada $x \in X$ dicha sucesión da lugar a la sucesión de números reales $\big\{f_n(x)\big\}$, donde cada término de la sucesión se obtiene al evaluar cada una de las funciones f_n en el punto x.

Ejemplo 5.1. Consideremos el espacio métrico $\big([a, b], d_2\big)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos la función $f_n(x) = x^n$. Las funciones f_n forman una sucesión de funciones definidas en $[a, b]$ con valores en $\mathbb{R}$.

Usualmente, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$, la sucesión $\big\{f_n(x)\big\}$ converge sólo para algunos puntos de $x \in X$, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 5.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de X en $\mathbb{R}$ ***converge puntualmente a la función*** $f \colon X \to \mathbb{R}$ ***en*** X si para cada $x \in X$, se satisface $f_n(x) \to f(x)$. En otras palabras, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en X, si para cada $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. A la función f se le llama el ***límite puntual de*** $\{f_n\}$.

En el siguiente ejemplo además de ilustrar una sucesión de funciones puntualmente convergente, muestra que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas no necesariamente es una función continua.

Ejemplo 5.3. Consideremos el espacio métrico $\big([0, 1], |\cdot|\big)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos la función $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ como $f_n(x) = x^n$. La sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge a la función $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x \in [0, 1); \\ 1, & \text{si } \ x = 1. \end{cases}$$

Intuitivamente, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ que converge puntualmente a una función f, la convergencia de las sucesiones $\{f_n(x)\}$ es significativamente más rápida en unos puntos que en otros. Sin embargo, algunas veces, para todo $\epsilon > 0$ al tomar $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, se cumple que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo los posibles valores de $x \in X$. Esta sutil característica es la que distingue la noción de convergencia puntual de una sucesión de funciones de la *noción de convergencia uniforme*. Esta segunda noción de convergencia es muy importante, ya que ciertas propiedades se "preservan" bajo esta convergencia, en el sentido de que si cada término de una sucesión de funciones uniformemente convergente posee estas propiedades, entonces el límite de la sucesión también posee dichas propiedades. En particular, si las funciones de la sucesión son continuas o integrables.

Definición 5.4. Sean (X,d) un espacio métrico. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de X en $\mathbb{R}$ ***converge uniformemente a la función*** $f\colon X \to \mathbb{R}$ ***en*** X si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in X$ y todo $n \geq N$ se cumple que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. A la función f se le llama el ***límite uniforme de*** $\{f_n\}$.

De la Definición 5.4 no es difícil ver que la noción de convergencia uniforme es mucho más fuerte que la convergencia puntual, en el sentido de que si una sucesión de funciones $\{f_n\}$ convergencia uniformemente a una función f sobre un espacio métrico X, entonces también lo hace puntualmente.

Sea (X,d) un espacio métrico y $x_0 \in X$. Recordemos que una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ ***es continua en*** x_0 si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x,x_0) < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Si f si es continua en todo punto $x \in X$, diremos que f ***es continua en*** X. En general, la elección de tal δ en la definición de continuidad en un punto x_0 depende de ϵ y también de x_0 mismo. Dado $\epsilon > 0$, cuando existe un sólo $\delta > 0$ que funciona para todos los puntos $x \in X$, se dice que la función es *uniformente continua en* X. Formalmente, se expresa como sigue. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ ***es uniformente continua en*** X si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x,y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. No es difícil ver, que toda función uniformemente continua en X es continua en X.

En el Capítulo 3 hemos visto algunos resultados sumamente interesantes que cumplen las funciones continuas sobre un conjunto compacto. Enseguida, presentamos uno más.

Proposición 5.5. Sea (K,d) un espacio métrico compacto. Si $f\colon K \to \mathbb{R}$ es una función continua en K, entonces f es uniformemente continua en K.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Supongamos que la función $f\colon K \to \mathbb{R}$ es continua en todo punto $x \in K$. Entonces, para cada $x \in K$ y $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta_x$ se satisface la desigualdad:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Observemos que la colección $\left\{B\left(x, \dfrac{\delta_x}{2}\right) : x \in K\right\}$ es una cubierta abierta para K. Dado que K es un espacio métrico compacto, existen $x_1, \ldots, x_k \in K$ tales que,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right). \tag{5.1}$$

Sean $x, y \in K$ arbitrarios. Sin pérdida de generalidad, trabajaremos con x. Como consecuencia de (5.1), para algún $x_0 \in \{x_1, \ldots, x_k\}$ se tiene que $x \in B\left(x_0, \dfrac{\delta_{x_0}}{2}\right)$. Esto es, $d(x,x_0) < \dfrac{\delta_{x_0}}{2}$. Luego, por la continuidad de f en x_0 se sigue que,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.2}$$

Tomemos $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_k}}{2}\right\}$. Si $d(x,y) < \delta$, se sigue que $d(x,y) < \frac{\delta_{x_0}}{2}$ y puesto que $d(x,x_0) < \frac{\delta_{x_0}}{2}$, se tiene que $d(x_0,y) \leq d(x_0,x) + d(x,y) < \frac{\delta_{x_0}}{2} + \frac{\delta_{x_0}}{2} = \delta_{x_0}$. Así, por la continuidad de f en x_0 se cumple la desigualdad,

$$|f(x_0) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.3}$$

De esta manera, si $d(x,y) < \delta$, de las ecuaciones (5.2) y (5.3), se obtiene que:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto, $f\colon K \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua en K. ✧

El siguiente resultado justifica que una sucesión funciones continuas que convergen uniformemente hereda la continuidad a su función límite.

Teorema 5.6. Sean (K,d) un espacio métrico y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$. Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f : K \to \mathbb{R}$, entonces f es una función continua en K.

Demostración. Veamos que la función f es continua en todo punto $x \in K$. Sea $x_0 \in K$ fijo y $\epsilon > 0$. Como f_n converge uniformemente a f, para $\frac{\epsilon}{3}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $x \in K$. Además, por la continuidad de las funciones f_n en x_0, para $\frac{\epsilon}{3}$, existe $\delta_n > 0$ tal que si $d(x_0,x) < \delta_n$, entonces $|f_n(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Luego, si $n \geq N$ y $d(x,x_0) < \delta_n$ se tiene que,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es continua en x_0. Puesto que x_0 fue tomado de forma arbitraria, se tiene que f es continua en K. ✧

En el siguiente resultado se hace uso de la norma uniforme para obtener una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(K)$.

Proposición 5.7. Sean (K,d) un espacio métrico compacto y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(K)$. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformente a $f\colon K \to \mathbb{R}$ en X si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Demostración. Probemos la necesidad de la proposición. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de K con valores en $\mathbb{R}$ que converge uniformente en K a la función f. Por el Teorema 5.6, se tiene que f es una función continua en K. Luego, de acuerdo con la Definición 5.4, para $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in K$ y $n \geq N$ se tiene que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.4}$$

De la desigualdad (5.4), se sigue que $\sup\big\{|f_n(x) - f(x)| \colon x \in K\big\} < \epsilon$, siempre que $n \geq N$. Esto es, si $n \geq N$, entonces $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$. Puesto que $\epsilon > 0$ fue un valor tomado arbitrariamente, lo que significa que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Ahora, probemos la suficiencia de la proposición. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Así, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$. Se sigue que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, siempre que $n \geq N$ y $x \in K$. Por lo tanto, de acuerdo con la Definición 5.4, la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformente a la función f. ✧

Dado un espacio métrico compacto (K, d), como consecuencia del Teorema 5.6 y la Proposición 5.7 resulta que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ en $\mathcal{C}(K)$ converge a una función $f \in \mathcal{C}(K)$ si y sólo si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformente a la función f.

Ahora que hemos definido formalmente la idea de una sucesión en el espacio de las funciones y una noción de convergencia natural en el espacio $\mathcal{C}(K)$, es importante mencionar que el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}(K)$ es un espacio normado de Banach.

Teorema 5.8. Si (K, d) es un espacio métrico compacto, entonces el espacio $\mathcal{C}(K)$ es un espacio completo.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(K)$. Entonces para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq N_1$ entonces,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\big\{|(f_n - f_m)(x)| \colon x \in K\big\} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.5}$$

De esta manera, para cada $x \in K$ se satisface:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.6}$$

Luego, de la desigualdad (5.6) se tiene que para cada $x \in K$, la sucesión $\big\{f_n(x)\big\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Sin embargo, como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo dicha sucesión converge, digamos a $f(x) \in \mathbb{R}$. Esto es, para cada $x \in K$, dado $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.7}$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ para cada $x \in K$, si $n \geq N$ de las ecuaciones (5.6) y (5.7) se sigue que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{5.8}$$

Así, $\{f_n\}$ converge uniformemente a f y por el Teorema 5.6 se tiene que $f \in \mathcal{C}(K)$. Por lo tanto, $\mathcal{C}(K)$ es un espacio normado completo. ✧

Dado que el espacio de las funciones continuas sobre un espacio métrico compacto es un espacio normado no es para sorprendernos que la idea de subconjunto acotado aún esta presente.

Definición 5.9. Sea (K,d) un espacio métrico compacto. Una familia de funciónes $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K)$ es ***equiacotada en*** K si para cada $x \in K$ se tiene que $\{f(x) \colon f \in \mathcal{F}\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. En otras palabras, $\mathcal{F}$ es equiacotada en K si para cada $x \in K$, existe $r(x) > 0$ tal que $|f(x)| \leq r(x)$, para toda $f \in \mathcal{F}$.

Por otro lado, dado un espacio métrico (X,d), cuando deseamos probar la continuidad uniforme de una función $f \colon X \to \mathbb{R}$, tomamos un número $\epsilon > 0$ y buscamos un número $\delta > 0$ tal que, si $d(x,y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Se requiere que dicho $\delta > 0$ dependa solamente de ϵ y no del punto x. Sin embargo, es de importancia observar, que el número δ también depende de la función f. Esta observación, motiva los siguientes conceptos.

Definición 5.10. Sean (X,d) un espacio métrico y $x_0 \in X$. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en $\mathbb{R}$ es ***equicontinua en*** X, si para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, para cada $f \in \mathcal{F}$.

Como consecuencia casi inmediata de la Definición 5.10, se tiene que si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones definidas en X con valores en $\mathbb{R}$ equicontinua en un punto x_0 de X, entonces cada una de las funciones $f \in \mathcal{F}$ es continua en x_0.

5.1.1 El Teorema de Arzelà-Ascoli

La importancia del concepto de equicontinuidad en el espacio de las funciones continuas es perfectamente ilustrado por el *Teorema de Arzelà-Ascoli*, el cual proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto del espacio de las funciones continuas sobre un espacio métrico compacto sea compacto. Cabe mencionar que un espacio topológico existe un equivalente a las sucesiones en espacios métricos, se trata de *las redes*. Enseguida presentamos algunos conceptos y resultados básicos de redes en un espacio topológico.

Definición 5.11. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y D un conjunto dirigido. Una **red en** X es una función $f \colon D \to X$. El punto $f(\lambda)$ se denota por x_λ y usualmente se denota a la red f por $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$.

Así, como en las sucesiones para las redes también podemos hablar de convergencia.

Definición 5.12. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ una red en X. Se dice que $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ **converge a** $x \in X$ si para cada $U \in \mathcal{T}_X$ con $x \in U$ existe $\lambda_0 \in D$ tal que para cada $\lambda \geq \lambda_0$, se cumple $x_\lambda \in U$. Si la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ converge a x se denota por $x_\lambda \to x$.

El siguiente resultado, exhibe una manera bastante útil de determinar cuándo una función entre dos espacios topológicos es continua. Para una demostración veáse el libro *Introducción a la topología de G. Salicrup* [21, pág. 120].

Proposición 5.13. Sean $f \colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función entre dos espacios topológicos y $x \in X$. Se sigue que, f es continua en X si y sólo si para toda red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ en X que converge a un punto $x \in X$ se cumple que la red $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda \in D}$ en Y converge a $f(x)$ en Y.

En un espacio topológico, las redes son utilizadas para determinar cuando un subconjunto es cerrado. Para una demostración consulte el libro *General topology de Kelley* [14, pág. 66]

Teorema 5.14. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Una subconjunto F de X es cerrado si y sólo si para toda red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in D}$ en F que converge a un punto x de X se tiene que $x \in F$.

El siguiente resultado presenta una forma para determinar la convergencia de redes en el producto cartesiano de espacios topológicos. Para una demostración consulte el libro *General topology de Willard* [24, pág. 76].

Teorema 5.15. Sea $\big\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\colon \alpha \in I\big\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Una red $\big(f^\lambda\big)_{\lambda \in D}$ en $\displaystyle\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ converge a $f \in \displaystyle\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ si y sólo si para cada $\beta \in I$ se satisface que $\big(\pi_\beta(f^\lambda)\big)_{\lambda \in D}$ converge a $\pi_\beta(f)$.

Teorema de Arzelà-Ascoli 5.16. Sean (K, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F}$ un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}(K)$. Entonces, $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}(K)$ si y sólo si $\mathcal{F}$ es una familia equiacotada y equicontinua en K.

Demostración. Justifiquemos la condición necesaria del teorema. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}(K)$, probemos que $\mathcal{F}$ es un subconjunto equiacotado y equicontinuo en K.
Veamos primeramente que $\mathcal{F}$ es equiacotado en K. Como $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}(K)$, por la Proposición 2.55, se tiene que $\mathcal{F}$ es un subconjunto acotado de $\mathcal{C}(K)$. Por lo tanto, existe un número real $M > 0$ tal que, para toda $f \in \mathcal{F}$, se satisface $\|f\|_\infty \leq M$. Sin embargo, puesto que para cada $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $\|f\|_\infty = \sup\big\{|f(x)|\colon x \in K\big\}$, se sigue que $\mathcal{F}$ es un subconjunto equiacotado en K.
Probemos ahora que $\mathcal{F}$ es un subconjunto equicontinuo en K. Sean $x \in K$ y $\epsilon > 0$. Dado que $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto en $\mathcal{C}(K)$, por el Teorema 2.62, se tiene que $\mathcal{F}$ es un subconjunto totalmente acotado de $\mathcal{C}(K)$. Por lo tanto, para $\dfrac{\epsilon}{3} > 0$, existen $f_1, \ldots, f_k$ en $\mathcal{F}$ tales que:

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B\left(f_j, \frac{\epsilon}{3}\right). \tag{5.9}$$

Por otro lado, de la Proposición 5.5, se tiene que cada una de las funciones f_j es uniformente continua en K. Luego, para cada $j = 1, \ldots, k$ y $\dfrac{\epsilon}{3} > 0$ existe $\delta_j > 0$ tal que, si $d(x, y) < \delta_j$ entonces,

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea $f \in \mathcal{F}$. Como consecuencia de (5.9) existe $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \dfrac{\epsilon}{3}$. Puesto que $\|f - f_{j_0}\|_\infty = \sup\big\{|(f - f_{j_0})(x)|\colon x \in K\big\}$ para toda $x \in K$ se deduce que,

$$|f(x) - f_{j_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.10}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$. Si $d(x,y) < \delta$, entonces se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{j_0}(x) + f_{j_0}(x) - f_{j_0}(y) + f_{j_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{j_0}(x)| + |f_{j_0}(x) - f_{j_0}(y)| + |f_{j_0}(y) - f(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad con la que fueron elegidos $x \in K$, $\epsilon > 0$ y $f \in \mathcal{F}$ se concluye que $\mathcal{F}$ es un subconjunto equicontinuo en K. Lo que prueba la necesidad del teorema.

Ahora, probemos la suficiencia del teorema. Supongamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K)$ es una familia de funciones equiacotada y equicontinua en K. Es decir, $\mathcal{F}$ satisface las siguientes propiedades:

(1) Para cada $x \in K$, existe $r(x) > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ se satisface $|f(x)| \leq r(x)$.

(2) Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, para toda $f \in \mathcal{F}$.

Para cada $x \in K$, sea $B\big[0, r(x)\big]$ la bola cerrada con centro en $0 \in \mathbb{R}$ y radio $r(x)$, donde $r(x)$ es como en la propiedad (1). Consideremos el producto cartesiano $\prod\limits_{x \in K} B\big[0, r(x)\big]$, que por la Definición 1.23, sabemos que se define como:

$$\prod_{x \in K} B\big[0, r(x)\big] = \left\{ f \colon K \to \bigcup_{x \in K} B\big[0, r(x)\big] : f(x) \in B[0, r(x)], \forall x \in K \right\}.$$

En otras palabras, el producto cartesiano $\prod\limits_{x \in K} B\big[0, r(x)\big]$ es el conjunto de todas las funciones f definidas K con valores en $\bigcup\limits_{x \in K} B\big[0, r(x)\big]$ tales que para cada $x \in K$ se satisface $|f(x)| \leq r(x)$. Como todas las funciones en $\mathcal{F}$ satisfacen la propiedad (1), se tiene que:

$$\mathcal{F} \subseteq \prod_{x \in K} B[0, r(x)]. \tag{5.11}$$

Luego, de la ecuación (5.11) se tiene que $\mathcal{F}$ puede ser considerado como un espacio topológico con la topología que hereda como subespacio del producto cartesiano $\prod\limits_{x \in K} B\big[0, r(x)\big]$. Denotemos por $\mathcal{F}_1$ al espacio topológico $\big(\mathcal{F}, \mathcal{T}_\pi\big)$. Por otro lado, como $\mathcal{C}(K)$ es un espacio normado y por lo tanto un espacio métrico con la métrica d_∞ inducida por la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$, se sigue que $\mathcal{C}(K)$ es también un espacio topológico con la topología $\mathcal{T}_\infty$ inducida por la métrica d_∞. Luego, puesto que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K)$ se sigue que $\mathcal{F}$ también puede ser considerado como un espacio topológico con la topología que hereda como subespacio del espacio topológico $\big(\mathcal{C}(K), \mathcal{T}_\infty\big)$. Denotemos por $\mathcal{F}_2$ al espacio topológico $\big(\mathcal{F}, \mathcal{T}_\infty\big)$.

Afirmación 5.17. La función identidad $i \colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ es continua.

Utilicemos redes para probar este hecho. Sean $\{f^\lambda\}_{\lambda \in D}$ una red en $\mathcal{F}_1$ y $f \in \mathcal{F}_1$ tal que $f^\lambda \to f$. Probemos que la red $\{i(f^\lambda)\}_{\lambda \in D}$ converge a $i(f)$ en $\mathcal{F}_2$, como para cada $f \in \mathcal{F}_1$ se tiene que $i(f) = f$, equivalentemente probemos que la red $\{f^\lambda\}$ converge a f en $\mathcal{F}_2$. Sea $U \in \mathcal{T}_\infty$ tal que $f \in U$. Veamos que existe $\lambda_0 \in D$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, entonces $f^\lambda \in U$. Sin embargo, como $\mathcal{T}_\infty$ es un espacio topológico metrizable existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f, \epsilon) \subseteq U$. Por lo tanto, basta verificar que existe $\lambda_0 \in D$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, se cumple que:

$$\|f^\lambda - f\|_\infty < \epsilon. \tag{5.12}$$

Dado que $\{f^\lambda\}_{\lambda \in D}$ es una red en $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_1 \subseteq \prod_{x \in K} B\big[0, r(x)\big]$, para cada $x \in K$, se tiene que:

$$\pi_x\big(f^\lambda\big) \to \pi_x(f). \tag{5.13}$$

Como para cada $\lambda \in D$, las funciones f^λ y f son elementos del producto cartesiano $\prod_{x \in K} B\big[0, r(x)\big]$, de acuerdo con la Notación 1.24, se pueden escribir $f^\lambda = \big(f_x^\lambda\big)_{x \in K}$ y $f = \big(f_x\big)_{x \in K}$. Para cada $x \in K$, las respectivas coordenadas se pueden expresar como $f_x^\lambda = f^\lambda(x)$ y $f_x = f(x)$ respectivamente. De esta manera para cada $x \in K$, fijo de (5.13) se tiene que la red $\{f_x^\lambda\}_{\lambda \in D}$ en $\mathbb{R}$ converge a $f_x \in \mathbb{R}$ denotamos esto por $f^\lambda(x) \to f(x)$. Como $\{f_x^\lambda\}_{\lambda \in D}$ es una red en $\mathbb{R}$ que converge a un elemento $f_x \in \mathbb{R}$, se tiene que para todo $x \in K$ y $\frac{\epsilon}{6} > 0$ existe $\lambda_x \in D$ tal que si $\lambda \geq \lambda_x$, entonces:

$$\big|f_x^\lambda - f_x\big| < \frac{\epsilon}{6}. \tag{5.14}$$

De la propiedad (2), existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, para todo $f \in \mathcal{F}$ se cumple que:

$$|f_x - f_y| < \frac{\epsilon}{6}. \tag{5.15}$$

Por otro lado, como K es un espacio métrico compacto, del Teorema 2.62, se sigue que K es un subconjunto totalmente acotado, así existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta). \tag{5.16}$$

Luego, de (5.14) para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe $\lambda_j \in D$ tal que si $\lambda \geq \lambda_j$, entonces

$$\big|f_{x_j}^\lambda - f_{x_j}\big| < \frac{\epsilon}{6}. \tag{5.17}$$

Tomemos $\lambda_0 \geq \text{máx}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Veamos que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, se satisface $\|f_x^\lambda - f_x\|$. Sea $\lambda \geq \lambda_0$ y $x \in K$. Se sigue que, existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $d(x, x_{j_0}) < \delta$. Notemos que: por (5.15) y (5.17).

$$\begin{aligned}
|f_x^\lambda - f_x| &= |f_x^\lambda - f_{x_{j_0}}^\lambda + f_{x_{j_0}}^\lambda - f_{x_{j_0}} + f_{x_{j_0}} - f_x| \\
&\leq |f_x^\lambda - f_{x_{j_0}}^\lambda| + |f_{x_{j_0}}^\lambda - f_{x_{j_0}}| + |f_{x_{j_0}} - f_x| \\
&< \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} \\
&= \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De donde $\|f_x^\lambda - f_x\|_\infty < \epsilon$. Así, la red $\{f^\lambda\}_{\lambda\in D}$ converge a f en $\mathcal{C}(K)$ con la topología $\mathcal{T}_\infty$. Por lo tanto, la función identidad de $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ es continua.

Afirmación 5.18. $\mathcal{F}_1$ es un subconjunto cerrado de $\prod\limits_{x\in K} B[0,r(x)]$ con la topología de Tychonoff $\mathcal{T}_\pi$.

Utilicemos una caracterización por redes. Sea $\{f^\lambda\}_{\lambda\in D}$ una red en $\mathcal{F}_1$ que converge en $\prod\limits_{x\in K} B[0,r(x)]$ con la topología de Tychonoff a f. Probemos que $f\in\mathcal{F}_1$. Para esto, verifiquemos que f satisface las propiedades (1) y (2). Sin embargo, como $f\in\prod\limits_{x\in K} B[0,r(x)]$, para cada $x\in K$ se satisface $|f(x)|\le r(x)$, lo que significa que f cumple la propiedad (1). Por lo tanto, sólo resta comprobar que f satisface la propiedad (2). Esto es, veamos que para todo $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $d(x,y)<\delta$, entonces $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. Notemos que para cada $\lambda\in D$, f^λ y f son elementos del producto cartesiano $\prod\limits_{x\in K} B\big[0,r(x)\big]$, de acuerdo con la Notación 1.24, se pueden escribir como $f^\lambda=\big(f_x^\lambda\big)_{x\in K}$ y $f=\big(f_x\big)_{x\in K}$. Para cada $x\in K$, las respectivas coordenadas se pueden expresar como: $f_x^\lambda=f^\lambda(x)$ y $f_x=f(x)$, respectivamente. De esta manera como $f^\lambda\to f$, para cada $x\in K$ fijo se tiene que la red $\{f_x^\lambda\}_{\lambda\in D}$ en $\mathbb{R}$ converge a $f_x\in\mathbb{R}$. Denotamos esto por $f^\lambda(x)\to f(x)$. Como $\{f_x^\lambda\}_{\lambda\in D}$ es una red en $\mathbb{R}$ que converge a un elemento $f_x\in\mathbb{R}$, se tiene que para todo $x\in K$ y cada $\epsilon>0$ existe $\lambda_x\in D$ tal que si $\lambda\ge\lambda_x$, entonces:

$$\big|f_x^\lambda - f_x\big| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.18}$$

Sea $\epsilon>0$. Por la equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$, para $\dfrac{\epsilon}{3}>0$ existe $\delta>0$ tal que si $d(x,y)<\delta$ entonces, para toda $\lambda\in D$ se satisface que:

$$|f_x^\lambda - f_y^\lambda| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Considerando δ como antes. Sean $x,y\in K$ tales que $d(x,y)<\delta$. Se sigue que, existen $\lambda_x,\lambda_y\in D$ tales que si $\lambda\ge\text{máx}\{\lambda_x,\lambda_y\}$, entonces se satisfacen:

$$|f_x^\lambda - f_y^\lambda| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad |f_x^\lambda - f^\lambda| < \frac{\epsilon}{3}.$$

De esta manera, para cualesquiera $x,y\in K$ tales que $d(x,y)<\delta$ tomando $\lambda_0=\text{máx}\{\lambda_x,\lambda_y\}$, si $\lambda\ge\lambda_0$, se satisface la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
|f_x - f_y| &= |f_x - f_x^\lambda + f_x^\lambda - f_y^\lambda + f_y^\lambda - f_y|\\
&\le |f_x - f_x^\lambda| + |f_x^\lambda - f_y^\lambda| + |f_y^\lambda - f_y|\\
&< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad con la que fueron elegidos $x,y\in X$ se satisface que $f\in\mathcal{F}_1$. Por lo tanto $\mathcal{F}_1$ es un subconjunto cerrado del producto cartesiano $\prod\limits_{x\in K} B[0,r(x)]$.

Por la Afirmación 5.18 sabemos que $\mathcal{F}_1$ es un subconjunto cerrado del producto cartesiano $\prod_{x\in K} B[0, r(x)]$. Sin embargo, para cada $x \in K$, la bola cerrada $B\big[0, r(x)\big]$ es un espacio topológico con la topología que hereda como subespacio del espacio topológico $\big(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{d_2}\big)$. Luego, por el Teorema de Heine-Borel 2.68, cada una de las bolas cerradas $B[0, r(x)]$ es un espacio topológico compacto. Por el Teorema de Tychonoff 3.38 sabemos que el producto cartesiano $\prod_{x\in K} B\big[0, r(x)\big]$ es un espacio topológico compacto con la topología de Tychonoff $\mathcal{T}_\pi$. Así, $\mathcal{F}_1$ es un subconjunto cerrado en un compacto, luego por el Teorema 2.53 se sigue que $\mathcal{F}_1$ es un subconjunto compacto del producto cartesiano $\prod_{x\in K} B[0, r(x)]$. Por otro lado, de la Afirmación 5.17 se tiene que la función identidad $i\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ es continua. Luego, por la Proposición 3.27 se deduce que $\mathcal{F}_2$ es un subconjunto compacto. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}(K)$, lo que completa la prueba. ✧

Ahora, presentamos un segundo espacio de funciones, donde estudiamos algunos criterios para caracterizar a los subconjuntos compactos de estos espacios.

5.2 Espacio de las funciones medibles

Para cada número real $1 < p < \infty$, se denota con $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ al ***espacio de las funciones*** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***Lebesgue medibles*** tales que $\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu < \infty$. En estos nuevos espacios se define la función $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ determinada por la regla:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.19}$$

De esta manera, según la igualdad (5.19) el espacio de las funciones medibles se puede expresar como sigue,

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \big\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es Lebesgue medible y } \|f\|_p < \infty\big\}. \tag{5.20}$$

Luego, como consecuencia inmediata de la igualdad (5.20), se tiene la siguiente observación.

Observación 5.19. Dada una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible, se tiene que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ si y sólo si $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

En el siguiente resultado se presentan dos propiedades sumamente importantes que se satisfacen en los espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, ya que a partir de éstas resulta sencillo verificar que los espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

Teorema 5.20. Sea $1 < p < \infty$. Si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf y $f + g$ pertenecen a $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Más general, el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Probemos primeramente que $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. De acuerdo con (5.20), basta probar que $\|\alpha f\|_p^p < \infty$, lo que se consigue como enseguida:

$$\|\alpha f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |\alpha f|^p d\mu = |\alpha|^p \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu < \infty.$$

Y así, $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Por otro lado, de la siguiente cadena de desigualdades:

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^p\big(\max\{|f|^p, |g|^p\}\big) \leq 2^p\big(|f|^p + |g|^p\big),$$

se tiene que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f+g|^p d\mu \leq 2^p \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu + \int_{\mathbb{R}} |g|^p d\mu\right)$. Sin embargo, dado que $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ se sigue que $\|f+g\|_p^p < \infty$. Por lo tanto, $f+g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. ✧

Ahora que sabemos que los espacios de funciones Lebesgue medibles $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales en los que es posible definir una función $\|\cdot\|_p \colon \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, surge una pregunta muy natural e inquietante al respecto: ¿es el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ junto con la función $\|\cdot\|_p$ un espacio normado? La respuesta es, un rotundo no. La función $\|\cdot\|_p$ es a lo más una *semi-norma sobre* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$[VII]. Para conseguir un nuevo espacio normado es necesario definir una relación $\sim$ en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ como sigue: Dadas dos funciones f, g en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, diremos que $f \sim g$ si y sólo si $\|f-g\|_p = 0$. Los siguientes resultados, permiten obtener una manera equivalente de expresar la relación $\sim$.

Lema 5.21. Sea $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Si $\|f\|_p = 0$ entonces $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Veamos que el conjunto $\big\{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| > 0\big\}$ tiene medida cero. Notemos que, $\big\{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| > 0\big\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ donde $E_n = \big\{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| > \frac{1}{n}\big\}$. Luego, por la σ-aditividad de la medida de Lebesgue μ es suficiente probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mu(E_n) = 0$. Por la definición de los subconjuntos E_n, se tiene que $|f|^p \chi_{E_n} \geq \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \chi_{E_n} \geq 0$. Como consecuencia de la monotonía de la integral de Lebesgue se cumple la siguiente cadena de desigualdades:

$$0 \leq \left(\frac{\chi_{E_n}}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{E_n} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p = 0 \tag{5.21}$$

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu(E_n) = 0$, lo que completa la prueba del lema. ✧

Proposición 5.22. Sean $1 < p < \infty$ y f, g en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Luego, $f = g$ c.t.p. si y sólo si $\|f-g\|_p = 0$.

Demostración. Probemos la necesidad del teorema. Sean f, g dos funciones en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ tales que $f = g$ c.t.p. Definiendo $A = \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) \neq g(x)\}$ se tiene que $\mu(A) = 0$ y para todo $x \in \mathbb{R} \setminus A$ se

[VII]**Definición:** Sea X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una ***seminorma sobre*** X es una función $\rho \colon X \to \mathbb{R}$ que cumple:

(1) Para todo $x, y \in X$ se tiene que, $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

(2) Para cada $x \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple, $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$.

cumple que $f(x) = g(x)$. Esto es, $f(x) - g(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R} \setminus A$, por lo que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus A} |f-g|^p d\mu = 0$. Luego, la siguiente cadena de igualdades es válida,

$$\|f-g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f-g|^p d\mu = \int_A |f-g|^p d\mu = 0. \tag{5.22}$$

Por lo tanto, $\|f-g\|_p = 0$. La suficiencia del teorema se tiene como consecuencia del Lema 5.21. ✧

De esta manera, contamos con una forma alternativa para decidir si dos funciones en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ están relacionadas según la relación $\sim$. Posteriormente, en la Sección 5.3 veremos que dicha relación es de equivalencia y la colección de todas clases de funciones resultante da origen a un nuevo espacio normado. Sin embargo, veamos primeramente un par de desigualdades que se satisfacen en los espacios de funciones $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y que son fundamentales para el desarrollo de esta sección.

Definición 5.23. Sean p, q números reales tales que $1 < p, q < \infty$. Se dice que p y q son ***números conjugados*** si cumplen:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

La siguiente desigualdad involucra este nuevo concepto y resulta fundamental para la desigualdad posterior.

Desigualdad de Young 5.24. Sean p y q números conjugados. Si x, y son números reales positivos, entonces

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demostración. Sea $y > 0$ fijo. Para cada $x > 0$ definamos la función,

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

De aplicar a la función f el criterio de la primera derivada se tiene que un punto critico de la función f es $x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$. Luego, utilizando el criterio de la segunda derivada se deduce que en el punto x_0 la función f alcanza su mínimo. Por lo tanto, para todo $x > 0$ se satisface que $f(x_0) \le f(x)$. No es difícil ver que $f(x_0) = 0$. Lo que significa que,

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \ge 0.$$

Por lo tanto, para cualesquiera x, y. números reales positivos se satisface $xy \le \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$. ✧

La desigualdad que probamos a continuación, además de ser una generalización de la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, famosa por nuestros primeros cursos de la licenciatura, es central en el desarrollo de las espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Desigualdad de Hölder 5.25. Sean $1 < p, q < \infty$ números conjugados. Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, entonces $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Demostración. Si $\|f\|_p = 0$ o $\|g\|_q = 0$ la prueba resulta sencilla. Sin pérdida de generalidad supongamos que, $\|f\|_p = 0$. Entonces, se tiene que $f = 0$ c.t.p. lo que implica que $fg = 0$ c.t.p. Luego, $\|fg\|_1 = 0$. Por lo tanto, $fg \in L^1$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. En cambio, si $\|f\|_p \neq 0$ y $\|g\|_q \neq 0$, aplicando la Desigualdad de Young 5.24 a $a = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ y $b = \dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}, \tag{5.23}$$

luego, de integrar ambos lados de la desigualdad (5.23) se tiene que:

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|d\mu}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \tag{5.24}$$

de ser p y q son conjugados se obtiene,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q. \tag{5.25}$$

Dado que, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ se tiene que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|d\mu < \infty$. Por lo tanto, $fg \in L^1(\mathbb{R})$. Luego, como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|d\mu = \|fg\|_1$, la desigualdad $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$ se satisface. ✧

La siguiente desigualdad está íntimamente relacionada con la desigualdad del triángulo.

Desigualdad de Minkowski 5.26. Si $1 < p < \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, entonces $f + g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $\|f + g\|_p \leq ||f||_p + ||g||_p$.

Demostración. Por el Teorema 5.20 se tiene que $f + g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Luego, si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f + g|^p d\mu = 0$, entonces de la definición de $\|\cdot\|_p$ se tiene la prueba. Por tanto, supongamos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f+g|^p d\mu \neq 0$. Pero antes, mostremos una observación bastante útil para probar la desigualdad de Minkowski. Sea q el conjugado de p, dado que $pq - q = p$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} (|f + g|^{p-1})^q d\mu = \int_{\mathbb{R}} |f + g|^{pq-q} d\mu = \int_{\mathbb{R}} |f + g|^p d\mu$$

se sigue la observación antes mencionada; $|f + g|^{p-1} \in L^q$ y $\|(f + g)^{p-1}\|_q = \|f + g\|_p^{p/q}$.
Ahora sí, la desigualdad de Minkowski

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f + g|^p d\mu &\leq \int_{\mathbb{R}} (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int_{\mathbb{R}} |g||f + g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \|f\|_p\|f + g\|_q^{p-1} + \|g\|_p\|f + g\|_q^{p-1} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p/q}
\end{aligned}$$

dividiendo entre $\|f+g\|_p^{p/q}$, se tiene $\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Pero, como $p - \dfrac{p}{q} = 1$, se tiene la demostración. ✧

5.3 El espacio normado $L^p(\mathbb{R})$.

Proposición 5.27. Dado $1 < p < \infty$, sean $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ el espacio de funciones medibles correspondiente y $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. La relación $\sim$ en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ definida por, $f \sim g$ si y sólo si $\|f-g\|_p = 0$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Demostración. Verifiquemos que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Indudablemente, para cada $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ se cumple que $f \sim f$, puesto que claramente $\|f - f\|_p = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f - f|^p d\mu = 0$. De esta manera, la relación $\sim$ es reflexiva. De la misma forma, sin dificultad alguna se observa que $\|f-g\|_p = \|g-f\|_p$, lo que significa que la relación $\sim$ es simétrica. Por último de la Desigualdad de Minkowski 5.26, se sigue que la relación $\sim$ es transitiva. Por lo tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. ✧

Recordemos, que toda relación de equivalencia induce una partición natural sobre el espacio en el cual está definida. Por la Proposición 5.27, sabemos que la relación $\sim$ definida en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ es de equivalencia por lo que el conjunto $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ queda naturalmente dividido en clases de equivalencia, esta partición motiva el siguiente concepto.

Definición 5.28. Para $1 < p < \infty$, sea $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones medibles correspondiente. A la colección de todas las clases de equivalencia determinas por la relación $\sim$ de equivalencia definida para $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ como: $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ c.t.p. se le llama ***espacio*** $L^p(\mathbb{R})$. En general, usamos f para denotar tanto a la función f como a su clase de equivalencia.

Teorema 5.29. Sea $1 < p < \infty$. La función, $\|\cdot\|_p \colon L^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, determinada por la regla,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.26}$$

es una norma sobre $L^p(\mathbb{R})$. A la que se llama ***la norma*** p ***sobre*** $L^p(\mathbb{R})$. Es decir, la función $\|\cdot\|_p$ satisface las siguientes condiciones:

(1) $\|f\|_p \geq 0$, para cada $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(2) $\|f\|_p = 0$ si y sólo $f = 0$ c.t.p.

(3) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(4) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, para cualesquiera $f, g \in L^p(\mathbb{R})$.

Observemos que la norma p sobre $L^p(\mathbb{R})$ está bien definida pues para cada $f \in L^p(\mathbb{R})$ se tiene que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ lo que significa por (5.20) que $\|f\|_p < \infty$.

Demostración. Las condiciones (1) y (3) se tienen inmediatamente de la definición de la función $\|\cdot\|_p$. La condición (2) ya ha sido probada en el Lema 5.21 y la Proposición 5.22, finalmente la propiedad (4) no es más que la Desigualdad Minkowski 5.26. ✧

Por lo tanto, de la Proposición 4.9, se sigue que la norma $\|\cdot\|_p$ induce en forma natural una métrica sobre el espacio $L^p(\mathbb{R})$ que se denota por d_p y está determinada por la regla:

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p. \tag{5.27}$$

Por lo tanto, de ahora en adelante el espacio $L^p(\mathbb{R})$ puede ser tratado sin alguna dificultad como un espacio métrico. Puesto que dos funciones $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ que son iguales casi en todas partes satisfacen que $\|f-g\|_p = 0$ de acuerdo con la ecuación (5.27) se tiene que la distancia entre dichas funciones es igual a cero, por lo que de alguna manera representan el mismo punto en el espacio $L^p(\mathbb{R})$. De este modo, para cada $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ tiene aún más sentido tratar por igual a la función f como a su clase de equivalencia.

Dado $1 < p < \infty$, resulta que el espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ como en la Definición 5.28 tiene propiedades que lo hacen todavía más interesante de estudiar, el siguiente resultado exhibe una de tales propiedades.

Teorema de Riesz-Fisher 5.30. Si $1 < p < \infty$, entonces el espacio $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

Para una demostración consulte el libro *The elements of Integration and Lebesgue measure de R. Bartle* [3, pág. 59]

5.3.1 El Teorema de Fréchet-Kolmogorov

En el Capítulo 2 vimos que un subconjunto compacto en un espacio métrico (X, d) es cerrado y acotado de X. Sin embargo, el recíproco no es en general cierto. Las condiciones son también suficientes sólo cuando se trata de un subconjunto de un espacio métrico euclideano $(\mathbb{R}, d_2)$ o de un subconjunto de un espacio normado de dimensión finita como se vio en el Capítulo 4. Por lo tanto, la bola cerrada unitaria en un espacio métrico euclideano o en algún espacio normado de dimensión finita es un subconjunto compacto. En cambio, cuando el espacio normado es de dimensión infinita, el Teorema 4.22 muestra que esto no sigue siendo válido. Aquí, la bola cerrada unitaria no es un subconjunto compacto. En la Sección 5.1, dado un espacio métrico compacto K se definió el espacio $\mathcal{C}(K)$ de todas las funciones continuas definidas en K con valores en $\mathbb{R}$ y se probó que $\mathcal{C}(K)$ es un espacio normado. También, presentamos un criterio para caracterizar a los subconjuntos compactos del espacio $\mathcal{C}(K)$ conocido como el Teorema de Arzelà-Ascoli. Para $1 < p < \infty$ en el espacio L^p, el *Teorema de Frèchet-Kolmogorov* proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto $\mathcal{F}$ de $L^p(\mathbb{R})$ sea compacto. A continuación exponemos algunos resultados preliminares que facilitarán la comprensión y el desarrollo de la demostración del Teorema de Frèchet-Kolmogorov.

Definición 5.31. Sea f una función continua definida en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$. Se define y denota el ***soporte de la función*** f como:

$$\mathrm{Sop}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \colon f(x) \neq 0\}}. \tag{5.28}$$

Si $\mathrm{Sop}(f)$ es un subconjunto compacto, se dice que f ***es una función continua con soporte compacto***. Se denota por $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ a la colección de todas las funciones $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas con soporte compacto.

El siguiente resultado exhibe la estrecha relación presente entre las funciones continuas con soporte compacto y las funciones en $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$.

Lema 5.32. Sea $1 < p < \infty$. El conjunto $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ es denso en $L^p(\mathbb{R})$. Es decir, dadas $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tal que,

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

Para una demostración vea por ejemplo el libro *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones de H. Brezis* [5, pág. 61].

Teorema de Frèchet-Kolmogorov 5.33. Sea $1 < p < \infty$. Un subconjunto cerrado $\mathcal{F}$ de $L^p(\mathbb{R})$ es compacto si y sólo si cumple con las tres condiciones:

(1) $\mathcal{F}$ es un subconjunto acotado de $L^p(\mathbb{R})$;

(2) Para cada $f \in \mathcal{F}$, se cumple que $\displaystyle\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx = 0$;

(3) Para toda $f \in \mathcal{F}$, se tiene que $\displaystyle\lim_{\alpha \to \infty} \int_{|x| > \alpha} |f(x)|^p dx = 0$.

Demostración. Probemos la necesidad del teorema. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $L^p(\mathbb{R})$. Veamos, que $\mathcal{F}$ satisface las propiedades (2) y (3) ya que la propiedad (1) se sigue inmediatamente de la Proposición 2.55. Puesto que $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $L^p(\mathbb{R})$, dado $\epsilon > 0$ existe un número finito de funciones $f_1, \ldots, f_k$ en $\mathcal{F}$ tales que, $\mathcal{F} \subseteq \displaystyle\bigcup_{n=1}^{k} B(f_n, \epsilon)$. Es decir, para cada $f \in \mathcal{F}$, existe $f_i \in \{f_1, \ldots, f_k\}$ tal que:

$$\|f - f_i\|_p < \epsilon. \tag{5.29}$$

Por otro lado, para cada $i = 1, \ldots, k$, del Lema 5.32, existe $g_i \in \mathcal{C}_c(R)$ tal que:

$$\|f_i - g_i\|_p < \epsilon. \tag{5.30}$$

Verifiquemos ahora que $\mathcal{F}$ satisface la propiedad (2). Sea $f \in \mathcal{F}$. Tomemos $f_i \in \{f_1, \ldots, f_k\}$ de tal manera que $\|f - f_i\|_p < \epsilon$.

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_p \\
&= \|f(\cdot+t)-f_i(\cdot+t)+f_i(\cdot+t)-g_i(\cdot+t)+g_i(\cdot+t)-g_i(\cdot) \\
&\quad + g_i(\cdot)-f_i(\cdot)+f_i(\cdot)-f(\cdot)\|_p \\
&\leq \|f(\cdot+t)-f_i(\cdot+t)\|_p + \|f_i(\cdot+t)-g_i(\cdot+t)\|_p + \|g_i(\cdot+t)-g_i(\cdot)\|_p \\
&\quad + \|g_i(\cdot)-f_i(\cdot)\|_p + \|f_i(\cdot)-f(\cdot)\|_p \\
&< \epsilon+\epsilon+\|g_i(\cdot+t)-g_i(\cdot)\|_p+\epsilon+\epsilon.
\end{aligned}
$$

Sin embargo, como el valor de ϵ no depende de t y dado que $\lim_{t\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}} |g_i(x+t)-g_i(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, se tiene que,

$$
\lim_{t\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 4\epsilon.
$$

Luego, puesto que el valor de ϵ puede ser tomado arbitrariamente pequeño, se sigue,

$$
\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|^p\,dx = 0. \tag{5.31}
$$

Por lo tanto, la propiedad (2) es cierta.

Ahora probemos que la propiedad (3) es válida. Sea $f \in \mathcal{F}$. Existen funciones f_i y g_i que satisfacen las ecuaciones (5.29) y (5.30). Como g_i es una función continua con soporte compacto, el conjunto $\overline{\{x \in \mathbb{R} \colon g_i(x) \neq 0\}}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y por la Proposición 2.55, es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Luego, por la Proposición 2.46, existe $M > 0$ tal que $\overline{\{x \in \mathbb{R} \colon g_i(x) \neq 0\}} \subseteq B(0, M)$. Observemos que, si $x \notin B(0, M)$ entonces $g_i(x) = 0$. Ahora, tomando α lo suficientemente grande de tal manera que $\alpha > M$, para $|x| > \alpha$ se cumple que $g_i(x) = 0$ y como consecuencia, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{|x|>\alpha)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{|x|>\alpha} |f-g_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>\alpha} (|g_i(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f-g_i\|_p + \left(\int_{|x|>\alpha} (|g_i(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

Sin embargo, como $\lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_{|x|>\alpha} (|g_i(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ de la desigualdad anterior se sigue que:

$$
\lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_{|x|>\alpha} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f-g_i\|_p = \|f-g_i\|_p.
$$

Luego, por la desigualdad de Minkowski 5.26 se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\|f-g_i\|_p &= \|f-f_i+f_i-g_i\|_p \\
&\leq \|f-f_i\|_p + \|f_i-g_i\|_p \\
&< \epsilon+\epsilon = 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

Esto prueba la propiedad (3), ya que el número ϵ puede ser tomado arbitrariamente pequeño.

A continuación probemos la suficiencia del teorema. Supongamos que $\mathcal{F}$ satisface las propiedades (1), (2) y (3). Veamos que $\mathcal{F}$ es un subconjunto compacto de $L^p(\mathbb{R})$, para esto de acuerdo con el Teorema 2.62, es suficiente probar que $\mathcal{F}$ es un subconjunto completo y totalmente acotado de $L^p(\mathbb{R})$. Sin embargo, por el Teorema de Riesz-Fisher 5.30, sabemos que $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio métrico completo. Luego, como $\mathcal{F}$ es un subconjunto cerrado de $L^p(\mathbb{R})$, por la Proposición 2.44 se tiene que $\mathcal{F}$ es un subconjunto completo de $L^p(\mathbb{R})$. Por lo tanto, únicamente resta probar que $\mathcal{F}$ es un subconjunto totalmente acotado de $L^p(\mathbb{R})$.

Sea $\epsilon > 0$. Veamos que existen $f_1, \ldots, f_k$ en $\mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(f_i, \epsilon)$. Tomemos $f \in \mathcal{F}$ arbitrariamente. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definamos la función $T_t f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinada por la regla:

$$T_t f(x) = f(t + x).$$

Luego, de la condición (2), para cada $f \in \mathcal{F}$ se satisface que:

$$\lim_{t \to 0} \|T_t f - f\|_p = 0. \tag{5.32}$$

Ahora, para a un número real positivo definamos la función valor medio, como:

$$M_a f(x) = \frac{\displaystyle\int_{B(0,a)} T_t f(x) dt}{2a}. \tag{5.33}$$

La función valor medio como se definió en la ecuación (5.33), satisface la siguiente serie de igualdades y desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|M_a f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |M_a f(x) - f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\displaystyle\int_{B(0,a)} T_t f(x) dt}{2a} - \frac{\displaystyle\int_{B(0,a)} f(x) dt}{2a} \right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|2a|^p} \left| \int_{B(0,a)} \big(T_t f(x) - f(x)\big) dt \right|^p dx \\
&\leq \frac{1}{|2a|^p} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{B(0,a)} |T_t f(x) - f(x)|\, dt \right)^p dx
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder 5.25, se cumple que:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(0,a)} |T_t f(x) - f(x)|\, dt \right)^p &= \left(\int_{\mathbb{R}} \big|[T_t f(x) - f(x)]\, \chi_{B(0,a)}(x) \chi_{B(0,a)}(x)\big| dt \right)^p \\
&= \left(\big\| [(T_t f - f) \chi_{B(0,a)}]\, \chi_{B(0,a)} \big\|_1 \right)^p \\
&\leq \big\| (T_t f - f) \chi_{B(0,a)} \big\|_p^p \big\| \chi_{B(0,a)} \big\|_q^p,
\end{aligned}$$

donde p, q son números conjugados. Luego, dado que $\|\chi_{B(0,a)}\|_q^p = |2a|^{\frac{p}{q}}$. De todo lo anterior podemos concluir que,

$$\|M_a f - f\|_p^p \leq \frac{|2a|^{\frac{p}{q}}}{|2a|^p} \int_{\mathbb{R}} \int_{B(0,a)} |T_t f(x) - f(x)|^p \, dt dx \tag{5.34}$$

Aplicando el Teorema de Fubini-Tonelli A.24 al lado derecho de la desigualdad (5.34) se tiene la siguiente cadena de desigualdades e igualdades:

$$\begin{aligned}
\|M_a f - f\|_p^p &\leq |2a|^{\frac{p}{q}-p} \int_{B(0,a)} \int_{\mathbb{R}} |T_t f(x) - f(x)|^p \, dx \, dt \\
&= \frac{1}{|2a|} \int_{B(0,a)} \int_{\mathbb{R}} |T_t f(x) - f(x)|^p dx \, dt \\
&= \frac{1}{|2a|} \int_{B(0,a)} \|T_t f - f\|_p^p \, dt
\end{aligned}$$

De la ecuación (5.32), dado $\epsilon > 0$ y tomando t suficiente pequeño se tiene que:

$$\frac{1}{|2a|} \int_{B(0,a)} \|T_t f - f\|_p^p \, dt < \frac{\epsilon}{|2a|} \left(\int_{B(0,a)} dt \right) = \epsilon.$$

De esta manera, tomando t suficientemente pequeño de tal manera que $|t| < a$ se sigue que:

$$\|M_a f - f\| \leq \epsilon.$$

Luego, $\lim\limits_{a \to 0} M_a(f) = f$ uniformemente en $f \in K$ y en consecuencia $\sup \Big\{ \|M_t f - f\|_p \colon f \in K \Big\} = 0$. Ahora para a un número real positivo fijo probemos que el conjunto $\mathcal{M} = \{M_a f \colon f \in \mathcal{F}\}$ es un subconjunto compacto. Sin embargo, equivalentemente probaremos que $\Big\{ M_a f \colon f \in \mathcal{F} \Big\}$ es una familia de funciones equiacotada y equicontinua.

$$\begin{aligned}
|M_a f(x_1) - M_a f(x_2)| &= \left| \frac{\displaystyle\int_{B(0,a)} T_t f(x_1) dt}{|2a|} - \frac{\displaystyle\int_{B(0,a)} T_t f(x_2) dt}{|2a|} \right| \\
&\leq \frac{1}{|2a|} \int_{B(0,a)} \Big| T_t f(x_1) - T_t f(x_2) \Big| dt \\
&= \frac{1}{|2a|} \int_{\mathbb{R}} \Big| \big[T_t f(x_1) - T_t f(x_2) \big] \, \chi_{B(0,a)} \Big| dt
\end{aligned}$$

Puesto que $\|\chi_{B(0,a)}\|_q = \dfrac{1}{|2a|^{\frac{1}{q}}}$. De la Desigualdad de Hölder 5.25 se sigue la siguiente desigualdad,

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \big[T_t f(x_1) - T_t f(x_2) \big] \, \chi_{B(0,a)} \Big| dt \leq |2a|^{\frac{1}{q}} \Big\| T_t f(x_1) - T_t f(x_2) \Big\|_p \tag{5.35}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|M_af(x_1) - M_af(x_2)| &\le \frac{|2a|^{\frac{1}{q}}}{|2a|}\|T_tf(x_1) - T_tf(x_2)\|_p \\
&= \frac{1}{|2a|^{\frac{1}{p}}}\|f(x_1+t) - f(x_2-t)\|_p \\
&= \frac{1}{|2a|^{\frac{1}{p}}}\|f(x_1+t) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + f(t) - f(x_2+t)\|_p \\
&= \frac{1}{|2a|^{\frac{1}{p}}}\Big(\|f(x_1+t) - f(x_1)\|_p + \|f(x_1) - f(x_2)\|_p + \|f(x_2) - f(x_2+t)\|_p\Big).
\end{aligned}$$

Ahora, verifiquemos que $\mathcal{M}$ es un subconjunto acotado.

$$\begin{aligned}
|M_af(x)| &= \left|\frac{\displaystyle\int_{B(0,a)} T_tf(x)dt}{|2a|}\right| \\
&\le \frac{1}{|2a|}\int_{B(0,a)} |T_tf(x)|\,dt \\
&\le \frac{1}{|2a|}\|T_tf(x)\|_p\|\chi_{B(0,a)}\|_q \\
&= \frac{|2a|^{\frac{1}{q}}}{|2a|}\|T_tf(x) - f(x) + f(x)\|_p \\
&\le \frac{1}{|2a|^{\frac{1}{p}}}\Big(\|T_tf(x) - f(x)\|_p + \|f(x)\|_p\Big)
\end{aligned}$$

Sin embargo, como $\mathcal{F}$ es un subconjunto acotado, existe $M > 0$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$, se tiene que $\|f\|_p \le M$. Por lo tanto, de las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$|M_af(x)| \le \frac{1}{|2a|^{\frac{1}{p}}}\big(\|T_tf - f\|_p + M\big). \tag{5.36}$$

De esta manera, por el Teorema de Arzelà-Ascoli 5.16, el conjunto $\mathcal{M}$ es un subconjunto compacto y por lo tanto totalmente acotado. Así, para $\epsilon > 0$ y a un número real positivo existen $f_1, \ldots, f_k$ en $\mathcal{F}$ tales que

$$\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} B(M_af_n, \epsilon). \tag{5.37}$$

Sea $f \in \mathcal{F}$. En virtud de la ecuación (5.37) existe $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $M_af \in B(M_af_{i_0}, \epsilon)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\|f - f_{i_0}\|_p &\le \|f - M_af + M_af - M_af_{i_0} + M_af_{i_0} - f_{i_0}\|_p \\
&\le \|f - M_af\|_p + \|M_af - M_af_{i_0}\|_p + \|M_af_{i_0} - f_{i_0}\|_p \\
&< \epsilon + \epsilon + \epsilon
\end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad con la que fue tomado $f \in \mathcal{F}$, se tiene que el conjunto de funciones $\{f_1, \ldots, f_k\} \subseteq \mathcal{F}$ forma una ϵ-cubierta para $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un subconjunto totalmente acotado de $L^p(\mathbb{R})$. ✧

Así, para $1 < p < \infty$ el Teorema de Frèchet-Kolmogorov 5.33 permite determinar cuando una familia de funciones en el espacio $L^p(\mathbb{R})$ es un subconjunto compacto.

Conclusiones

Si he podido ver más allá, es porque he andado sobre los hombros de gigantes...

Isacc Newton

La importancia de la compacidad en la Topología y el Análisis se ha remarcado durante todo el desarrollo de la Tesis. Es de recalcar los resultados: Teorema 2.53, la Proposición 2.54 y Proposición 2.55, el Teorema 3.27 y 3.28 por mencionar algunas. En el Capítulo 2, se probó el Teorema 2.62 por el cual sabemos que en un espacio métrico (X, d) arbitrario dado $K \subseteq X$, son equivalentes:

- K es un subconjunto compacto de X.
- K cumple la propiedad de Bolzano-Weirstrass.
- K es secuencialmente compacto.
- K es completo y totalmente acotado.

En este mismo capítulo, se verificó que en todo espacio métrico un subconjunto compacto siempre es cerrado y acotado (Proposición 2.54 y Proposición 2.55). Cuando el espacio métrico es euclideano el recíproco es cierto, y este resultado es mejor conocido como el Teorema de Heine-Borel. Lo realmente interesante, es la idea utilizada para demostrar que todo subconjunto K cerrado y acotado de un espacio métrico euclideano $\mathbb{R}^n$, es compacto. La demostración utiliza el hecho de que el n-cubo es compacto. Primero, como K es acotado, existe $a > 0$ tal que K se encuentra dentro del n-cubo de lado $2a$. De la Proposición 2.67 sabemos que el n-cubo de lado $2a$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Luego, como K es un subconjunto cerrado dentro de un compacto, el Teorema 2.53 implica que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Hasta aquí, todo resulta agradable pues todo es muy geométrico. Esta prueba nos motivó a pensar que la demostración es generalizable a $\mathbb{R}^\omega$. Sin embargo, no todo resultó ser tan sencillo, fue necesario extender la idea de subconjuntos abiertos, lo que nos llevó a estudiar en el Capítulo 3 a los espacios topológicos. Luego, en el Ejemplo 3.5 vimos que todo espacio métrico es también un espacio topológico, lo que hacía aún más factible la idea de extender la demostración del Teorema de Heine-Borel. Sin embargo, empezaron a surgir los obstáculos. En primer lugar, resulto que los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^\omega$ ya no son

como los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^\omega$ están determinados por la Topología de Tychonoff para el producto cartesiano de espacios topológicos, como en la Definición 3.20. Una propiedad interesante de la topología de Tychonoff es la coincidencia con la Topología de las Cajas en el caso del producto cartesiano de un número finito de espacios topológicos. Uno de los aportes más importantes de este trabajo se encuentra en el Capítulo 3, cuando se utilizó el Principio de Inducción Matemática 1.21, la Proposición 3.26 y los Lemas 3.29 y 3.35 para probar bajo una misma idea el Pequeño Teorema de Tychonoff y el Joven Teorema de Tychonoff. Luego, con la ayuda del Principio de Inducción Transfinita extendiendo la idea de la demostración usada para los casos anteriores se demostró el Teorema de Tychonoff 3.38. Lo interesante radica en que la idea de la demostración utilizada para demostrar el pequeño Teorema de Tychonoff puede ser extendida para demostrar el Joven Teorema de Tychonoff y más aún para probar el Teorema de Tychonoff, cosa que no es posible hacer con otras demostraciones.
Continuando con la idea de extender la demostración del Teorema de Heine-Borel, del Teorema de Tychonoff se deduce que el ω-cubo es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, al final de este mismo capítulo se probó que no es posible colocar a la bola cerrada unitaria en $\mathbb{R}^\omega$ dentro de algún ω-cubo, lo que significaba que la idea de la demostración del Teorema de Heine-Borel no es generalizable. En el Capítulo 5 se verificó que el Teorema de Heine-Borel sigue siendo valido en espacios normados de dimensión finita, lo que implica que la bola cerrada unitaria en un espacio normado de dimensión finita es un subconjunto compacto. Por otra parte se demostró con ayuda del Lema de Riesz que la bola cerrada unitaria ya no es un subconjunto compacto, lo que significó que la compacidad en espacios normados de dimensión infinita no puede ser caracterizada mediante las nociones de subconjunto cerrado y acotado. Para mostrar que en el caso de un espacio normado de dimensión infinita es más delicado, estudiamos el espacios de las funciones continuas $\mathcal{C}(K)$ sobre un conjunto compacto K y los espacios $L^p(\mathbb{R})$. En el espacio $\mathcal{C}(K)$ se demostró un criterio para caracterizar a los subconjuntos compactos de $\mathcal{C}(K)$ llamado el Teorema de Arzelà-Ascoli, y presentamos una demostración donde el Teorema de Tychonoff funge como herramienta principal. Finalmente, se emprendió el estudio de los espacios $L^p(\mathbb{R})$ donde el Teorema de Frèchet-Kolmogorov permite determinar cuándo un subconjunto de $L^p(\mathbb{R})$ es compacto. Aunque, durante este trabajó únicamete se trabajo con los espacios $L^p(\mathbb{R})$ hay que reconocer que el Teorema de Fréchet-Kolmogorov es generalizable a los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Apéndice

Apéndice A

Teoría de la medida

En este apartado se presenta teoría adicional para una mejor comprensión del Capítulo 5. En su mayoría los resultados expuestos aquí no presentan una justificación. Sin embargo, si el lector esta interesado en profundizar más en el tema, puede consultar los siguientes libros: *Lebesgue measure and integration. An introducction de F. Burk* [6] y *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$ *de F. Galaz* [10].

Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Llegó un momento en la historia de las Matemáticas en que se presentó la necesidad de contar con un procedimiento matemáticamente correcto que permitiera generalizar la idea geométrica de longitud en $\mathbb{R}$, área en $\mathbb{R}^2$ y volumen en $\mathbb{R}^3$ en un conjunto arbitrario. Para un conjunto X arbitrario, se buscó definir una función μ tal que a cada subconjunto E de X le asocie su "tamaño" o "medida" $\mu(E)$, esta función se llama ***medida en*** X. Para nuestros fines, estamos interesados en aquella medida que nos permita "medir" el mayor número de subconjuntos de $\mathbb{R}$, esta medida es nada más y nada menos, que la *medida de Lebesgue*. A continuación se motiva y estudia la *medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$.

De la idea geométrica que se tiene en los casos $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se espera que una buena medida μ en $\mathbb{R}$ cumpla con las siguientes características:

(1) La medida de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ debe ser no negativa.

(2) La medida de $\mathbb{R}$ no es finita. Esto es, $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.

(3) La medida de un conjunto de números reales no debe ser menor que la medida de cualquiera de sus subconjuntos. En otras palabras, se espera que μ, sea una función monótona sobre la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ con el orden parcial definido por la contención de conjuntos.

(4) La medida de "nada" es cero. Esto es, se requiere que $\mu(\emptyset) = 0$.

(5) Recordemos de nuestros cursos de geometría que un punto es una unidad geométrica que carece de longitud, anchura y altura. Es por ello que resulta natural pensar que μ debe satisfacer, $\mu(\{a\}) = 0$, para cualquier punto $a \in \mathbb{R}$.

(6) Medir la estatura de una persona en su casa o fuera de ella, no marca diferencia alguna entre las medidas obtenidas. Matemáticamente, se espera que μ sea invariante bajo traslaciones, es decir, para cualquier subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ fijo se espera que $\mu(A + x) = \mu(A)$.

(7) Si un subconjunto de números reales puede ser descompuesto en una colección numerable de subconjuntos disjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ se espera que, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Esto es, "el todo es la suma de sus partes", al menos siempre que la colección de estas partes sea un conjunto numerable y disjuntos a pares.

Veamos enseguida, algunas posibles candidatas a ser la medida μ en $\mathbb{R}$ que hemos estado buscando.

Ejemplo A.1. La cardinalidad de un subconjunto de números reales es una función $\text{Card}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$, definida para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, como:

$$\text{Card}(A) = \text{Número de elementos de } A.$$

Una posible manera de asignar una medida a un subconjunto de $\mathbb{R}$ es mediante su cardinalidad. Sin embargo, no satisface la característica (5) mencionada anteriormente. Además $\text{Card}\big((a,b)\big) = \text{Card}(\mathbb{R})$ para cualesquiera $b > a$ en $\mathbb{R}$, es por ello que esta forma de medir subconjuntos de $\mathbb{R}$ no resulta interesante, pues un intervalo no degenerado acotado mide lo mismo que todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo A.2. Para facilitar la notación, nos referimos a un intervalo únicamente por sus puntos extremos, no dando importancia (por el momento) si se tratase de: un intervalo abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado etc; por ejemplo si el intervalo en cuestión es: (a, b), hace referencia a él únicamente como un intervalo I con extremos a, b y $b > a$. Sabemos, que podemos asignar una medida a un intervalo usando la longitud de los mismos, de esta manera, definimos la función longitud $l\colon \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ es un intervalo}\} \to \mathbb{R}^*$, mediante la regla de correspondencia:

$$l(I) = b - a. \tag{A.1}$$

Donde I es un intervalo con extremos a, b y $a \leq b$. Si I es un intervalo no acotado, definimos $l(I) = \infty$. No es complicado verificar que la función longitud satisface las siguientes propiedades:

(1) De la ecuación (A.1) se sigue que $l(I) \geq 0$, para todo intervalo I.

(2) Por la definición de la función longitud se tiene que $l(\mathbb{R}) = \infty$.

(3) La función l es una función monótona.

(4) Si I es un intervalo con extremos a, b e $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de subintervalos de I disjuntos a pares, se satisface que $l\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n)$.

(5) Por vacuidad podemos asumir que, $l(\emptyset) = 0$.

(6) Si en un intervalo cerrado, $a = b$, se tiene el intervalo degenerado a un punto $\{a\}$, para el cual se cumple que $l\big(\{a\}\big) = a - a = 0$.

(7) Si x es un número real fijo e I un intervalo en $\mathbb{R}$, entonces $l(I + x) = l(I)$.

Como se puede observar l satisface todas las características que se esperaba cumpliera una medida en $\mathbb{R}$, aunque sea para una clase de subconjuntos de $\mathbb{R}$ muy particulares como son los intervalos. Sin embargo, para nuestro propósito no basta con poder medir únicamente intervalos, necesitamos medir subconjuntos más complicados y de ser posible arbitrarios de $\mathbb{R}$.

El siguiente ejemplo muestra que es imposible establecer una medida μ en $\mathbb{R}$, de tal manera que μ esté definida para todo subconjunto de números reales y que coincida con la longitud de los intervalos cuando se trate de estos.

Ejemplo A.3. Consideremos el intervalo cerrado $I = [0, 1]$ con la suma módulo 1, esto es, cuando sumamos dos números en I extraemos el entero más grande para obtener nuevamente un elemento en I. Para $x, y \in I$ definamos la relación $\backsim$ como sigue: $x \backsim y$ si y sólo si $x - y$ es un número racional. La relación $\backsim$ es de equivalencia. En efecto,

(1) Para todo $x \in I$, se tiene que $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$. Así, la relación $\backsim$ es reflexiva.

(2) Si $x \backsim y$, entonces $x - y \in \mathbb{Q}$. Dado que $\mathbb{Q}$ es un campo se sigue que $y - x$ también es un elemento de $\mathbb{Q}$, luego $\backsim$ es simétrica.

(3) Resta probar que $\backsim$ es transitiva. Supongamos que $x \backsim y$ y $y \backsim z$. Luego, $x - y, y - z \in \mathbb{Q}$, de las propiedades de campo que posee $\mathbb{Q}$ se cumple que $x - y + y - z = x - z \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto $\backsim$ es transitiva.

De esta manera, es posible particionar a I en subconjuntos disjuntos a pares usando las clases de equivalencia determinadas por $\backsim$. Luego, por el Axioma de Elección 1.16, existe $A \subseteq I$ con un único elemento de cada clase de equivalencia. Definiendo para cada número racional $q \in I$ el subconjunto $A_q = \big\{a+q\colon a \in A\big\}$ y respetando la suma modulo uno, se tiene que los conjuntos A_q son disjuntos a pares. En efecto, ya que de no ser así, existen $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $A_{q_1} \cap A_{q_2} \neq \emptyset$. Por lo tanto, para algunos $a_1, a_2 \in A$ se tiene que $a_1 + q_1 = a_2 + q_2$, de aquí $a_1 \backsim a_2$ lo que contradice la definición de A. Por lo tanto, los conjuntos A_q, para cada $q \in \mathbb{Q} \cap I$ son disjuntos a pares. Y se satisface la igualdad $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap I} A_q = I$. Como consecuencia de la definición de cada subconjunto A_q y de tomar en cuenta la suma modulo 1 se tiene que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap I} A_q \subseteq I$. Ahora, veamos que $I \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap I} A_q$.

Sea $x \in I$. Luego, x esta en la clase de equivalencia de algun $y_0 \in I$. De este modo existe $q_0 \in \mathbb{Q} \cap I$ tal que $x - y_0 = q_0$. Esto implica que $x \in A_{q_0}$, ya que $x_0 = y_0 + q_0$. Luego, para cada $q \in \mathbb{Q}$, A_q tiene la misma medida pues cada uno de estos es sólo una traslación de I. Notemos además, que la colección $\{A_q \colon q \in \mathbb{Q}\}$ es numerable pues $\mathbb{Q}$ lo es. Así, para cada subconjunto A_q ¿cuál es el valor apropiado que debe tener $\mu(A_q)$? Si este fuera un número positivo, digamos $\mu(A_q) = \lambda > 0$, entonces de la característica (7) que se espera cumpla esta medida, se tiene que:

$$\mu(I) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap I} \mu(A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap I} \lambda = \infty.$$

Lo que significa que, I tiene longitud infinita, lo cual claramente no es verdadero, pues $l(I) = 1$. De manera similar, si $\mu(A_q) = 0$ para cada A_q, entonces se tiene que la medida de $\mu(I) = 0$, lo que también contradice la longitud de I. En conclusión, no hay una longitud razonable que se le pueda asignar a el conjunto A_q para cada $q \in \mathbb{Q}$.

Luego, por el Ejemplo A.3 no es posible definir una medida sobre todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, de tal manera que esta medida coincida con la longitud de los intervalos cuando se trate de los mismos. De esta manera, una medida sobre $\mathbb{R}$, es una generalización de la función longitud l. Sin embargo, la siguiente proposición permite extender la medida inducida por la longitud de los intervalos a subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

Proposición A.4. Todo subconjunto abierto de números reales es la unión de una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos a pares.

Para una demostración, consulte el libro *Lebesgue measure and integration. An introducction de F. Burk* [6, pág. 78].

Por lo tanto, de la Proposición A.4, se tiene que cualquier subconjunto abierto E de $\mathbb{R}$ se puede escribir como $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, donde cada I_k es un intervalo en $\mathbb{R}$ e $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Luego, utilizando la longitud de cada uno de los intervalos I_k se define la longitud del subconjunto abierto E como:

$$l(E) = \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k). \tag{A.2}$$

Así, hemos extendido la medida de los intervalos en $\mathbb{R}$ a subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Sin embargo, aún hay más pues es demostrable que todo subconjunto no vacío de números reales puede ser cubierto por una colección numerable de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, lo que motiva la siguiente definición.

Definición A.5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. La ***medida exterior de Lebesgue*** de E, denotada por $\mu^*(E)$, se define como:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \colon E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ es un intervalo abierto de } \mathbb{R} \text{ y son disjuntos a pares} \right\}.$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las cubiertas numerables de E formadas por intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ disjuntos a pares. Para hacer más ágil la notación, nos referimos a la medida exterior de Lebesgue de $\mathbb{R}$ simplemente como la medida exterior de $\mathbb{R}$.

Como $l(I_n) \geq 0$, para toda colección de intervalos abiertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq 0$, por lo tanto $\mu^*(A)$ esta bien definido, pues es el ínfimo de un subconjunto no vacío y acotado inferiormente.

Resulta que la medida exterior satisface las propiedades discutidas en el principio del capítulo. La medida exterior μ^* es muy bien portada ya que de entre las ocho características que hemos discutido que debe cumplir una medida en $\mathbb{R}$ satisface las primeras siete. No es la función que insistentemente hemos buscado pues no es numerablemente aditiva. Únicamente se cumple que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos a pares, entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Cuando nosotros hemos pedido la igualdad. La anterior propiedad se conoce como ***subaditividad numerable***. Sin embargo, no todo esta perdido. En la siguiente sección veremos un criterio que hace uso de la medida exterior para determinar a todos aquellos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que la medida exterior restringida a estos subconjuntos, es numerablemente aditiva. Esto es, la medida exterior satisface la propiedad (7) discutida en el inicio.

Conjuntos Lebesgue medibles

En 1914, Carathéodory formuló un criterio para determinar cuando un subconjunto de números reales es medible.

Criterio de medibilidad de Carathéodory A.6. Sea E un subconjunto de números reales. Se dice que E es un ***subconjunto Lebesgue medible*** de $\mathbb{R}$, si se cumple:

$$\mu^*(A) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A),$$

para todo subconjunto A de números reales. En este caso ***la medida de Lebesgue del subconjunto*** E es $\mu(E) = \mu^*(E)$. Usualmente, para ser más prácticos, diremos únicamente que E es un subconjunto medible y que $\mu(E)$ es la medida de E. Denotamos la colección de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ por $\mathcal{M}$.

Se puede observar que la colección de conjuntos Lebesgue medibles en $\mathbb{R}$ es no vacía ya que de la definición se tiene que al menos $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos medibles. A continuación, se indican algunas propiedades básicas de los subconjuntos medibles.

Proposición A.7. Sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

(1) El conjunto $\mathbb{R}$ y el conjunto $\emptyset$ estan en $\mathcal{M}$.

(2) Si E es un subconjunto medible entonces $\mathbb{R} \setminus E$ es un subconjunto medible.

(3) Si $\{E_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos medibles, entonces $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$.

(4) Si $\{E_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos medibles disjuntos, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(5) Si E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ entonces $E \in \mathcal{M}$.

Los conjuntos cuya medida es cero se consideran como “insignificantes”, por lo cual resulta útil contar con una terminología especial para tales conjuntos.

Definición A.8. Un conjunto $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) = 0$, se llama ***conjunto de medida cero***.

A continuación se presentan algunas propiedades de los subconjuntos de medida cero.

(1) Si para cada $n \in \mathbb{N}$, el subconjunto E_n tiene medida cero, entonces $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ tiene medida de Lebesgue cero.

(2) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mu(x) = 0$.

(3) Si E es un subconjunto numerable, entonces $\mu(E) = 0$. En particular, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ tiene medida cero.

El siguiente concepto, involucra la Definición A.8 y juega un papel sumamente importante en la segunda mitad del Capítulo 5.

Definición A.9. Sean E un un subconjunto de números reales Lebesgue medible y $\boldsymbol{P}$ una proposición matemática definida sobre los puntos $x \in E$. La proposición $\boldsymbol{P}$ se satisface ***casi en todas partes*** (c.t.p.) si el subconjunto $\big\{x \in E \colon \boldsymbol{P}(x) \text{ es falso}\big\}$ de E tiene medida cero.

Integral de Lebesgue

La noción de integrabilidad de Lebesgue es más general que la de Riemann en el sentido de que abarca más funciones. Pero su principal virtud es que permite intercambiar el límite por la integral bajo condiciones menos restrictivas que las que requiere la integral de Riemann. Además, con el método de Riemann se procede, como lo haría un comerciante desorganizado que debe contar su ganancia al final del día, contará billetes y monedas según vaya sacándolos de su baúl (donde gurda su dinero mientras realiza vende sus productos); en cambio la integral de Lebesgue procede como el comerciante metódico, el cual dice:

- Tengo $m(E_1)$ monedas de un peso, lo que hace $1\ m(E_1)$ pesos,
- Tengo $m(E_2)$ monedas de dos pesos, lo que hace $2\ m(E_2)$ pesos,
- Tengo $m(E_3)$ billetes de veinte pesos, lo que hace $3\ m(E_3)$ pesos,
- Etcétera.

Así, en total tengo: $1\ m(E_1) + 2\ m(E_2) + 3\ m(E_3) + \ldots$ pesos. Ambos procedimientos conducirán al comerciante, sin duda alguna al mismo resultado, ya que, por mucho que haya vendido ese día, no hay más que una número finito de monedas y billetes que contar. Sin embargo, cuando tenemos que sumar una cantidad infinita de monedas y billetes la diferencia entre los dos métodos es capital.

Definición A.10. Sean E un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}$ y $f\colon E \to \mathbb{R}^*$ una función. Se dice que f es una ***función Lebesgue medible*** si para todo $t \in \mathbb{R}$, el subconjunto $f^{-1}\big((-\infty, t)\big) = \big\{x \in E\colon f(x) < t\big\}$ es medible.

Ocasionalmente, nos referimos a las funciones Lebesgue medibles únicamente como funciones medibles. En el siguiente resultado se resumen algunas de las propiedades más importantes que satisfacen las funciones medibles.

Teorema A.11. Sean E un subconjunto medible, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g, f_n\colon E \to \mathbb{R}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se cumplen:

(1) Si f, g son funciones medibles, entonces $f + g$ y αf también lo son.

(2) Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que f_n es una función medible y $f_n \to f$, entonces f es una función medible.

(3) Si f es una función medible y $f = g$ c.t.p., entonces g es una función medible.

Definición A.12. Sea E un subconjunto Lebesgue medible.

a) Se define y denota la ***función característica de*** $A \subseteq E$ como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

b) Una función $S\colon E \to \mathbb{R}$ se dice que es ***simple***, si se puede escribir como:

$$S(x) = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_n\chi_{E_n},$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $E_1, \ldots, E_n \subseteq E$ son subconjuntos medibles. Y se define la ***integral de Lebesgue de la función simple*** S como:

$$\int_E S(x)d\mu = a_1\mu(E_1) + \cdots + a_n\mu(E_n). \tag{A.3}$$

c) La ***integral de Lebesgue de una función medible y no negativa*** $f\colon E \to \mathbb{R}^*$, se define y denota por:

$$\int_E f(x)d\mu = \sup\left\{\int_E S(x)d\mu\colon S \text{ es una función simple, y } 0 \leq S(x) \leq f(x) \;\; \forall x \in E\right\}.$$

Dada una función $g\colon E \to \mathbb{R}^*$ como en b) o c). Se dice que g es una ***función Lebesgue integrable***, si $\displaystyle\int_E g(x)d\mu < \infty$.

Definición A.13. Dado un subconjunto medible E y $f\colon E \to \mathbb{R}$. Se definen las funciones f_+ y f_- por:

$$f_+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \qquad\qquad f_-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}.$$

A la función f_+ se le llama la ***parte positiva de*** f y f_- la ***parte negativa de*** f

No es difícil comprobar que los siguientes resultados son validos.

Proposición A.14. Sea E subconjunto medible de $\mathbb{R}$.

(1) $f = f_+ + f_-$

(2) f es una función medible si y sólo si f_+ y f_- lo son.

Definición A.15. Sean E un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}$ y $f\colon E \to \mathbb{R}^*$ una función medible. Se dice que f es una **función Lebesgue integrable**, si f_+ y f_- lo son. Y en este caso, **la integral de Lebesgue de** f está determinado por:

$$\int_E f(x)d\mu = \int_E f_+(x)d\mu + \int_E f_-(x)d\mu \tag{A.4}$$

El conjunto de todas las funciones Lebesgue integrables $f\colon E \to \mathbb{R}^*$ se denota por $\mathcal{L}^1(E)$.

Las siguientes son propiedades básicas de la Integral de Lebesgue.

Teorema A.16. Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}$.

a) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $f+g, \alpha f \in \mathcal{L}^1(E)$ y

$$\int_E (f+g)(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu + \int_E g(x)d\mu \qquad \int_E (\alpha f)(x)d\mu = \alpha \int_E f(x)d\mu.$$

b) Sea $f\colon E \to \mathbb{R}^*$ una función medible. Se cumple que, $f \in \mathcal{L}(E)$ si y sólo si $|f| \in \mathcal{L}(E)$.

c) Si $\{E_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos Lebesgue medibles disjuntos, y f es Lebesgue integrable en $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces:

$$\int_G f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)d\mu.$$

d) Si $f = g$ c.t.p. y $f \in \mathcal{L}^1(E)$, entonces $g \in \mathcal{L}^1(E)$ y $\displaystyle\int_E g(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu$.

e) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in E$, entonces $\displaystyle\int_E f(x)d\mu \leq \int_E g(x)d\mu$.

Medida e Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Realizando un procedimiento similar al caso $\mathbb{R}$, se extiende sin dificultad idea de medida e integral de Lebesgue al caso $\mathbb{R}^n$. Cabe mencionar, que de manera similar al caso anterior a los elementos de $\mathbb{R}^n$ que se definen en esta sección usualmente se les omitirá el “adjetivo” Lebesgue. Por ejemplo, frecuentemente hacemos referencia a los subconjuntos Lebesgue medibles y funciones Lebesgue integrales únicamente como subconjuntos medibles y funciones medibles respectivamente.

Primeramente, se determina la ***medida de un rectángulo acotado*** R ***de*** $\mathbb{R}^n$. Sea pues $R = I_1 \times \cdots \times I_m$, donde para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que I_n es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Se define la medida en $\mathbb{R}^n$ del rectángulo R como:

$$\mu(R) = l(I_1) \cdots l(I_n). \tag{A.5}$$

Posteriormente, la medida de los rectángulos acotados en $\mathbb{R}^n$ motiva la medida exterior de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Definición A.17. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define ***la medida exterior de*** E como:

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} R_k\colon E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \text{ y } R_k \text{ es un rectángulo acotado en } \mathbb{R}^n\right\}. \tag{A.6}$$

Como en el caso $\mathbb{R}$, se verifica en siguiente resultado.

Teorema A.18. La medida exterior en $\mathbb{R}^n$ satisface las siguientes propiedades:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

b) Si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

c) Si $\{E_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k). \tag{A.7}$$

Luego, a partir de la medida exterior se definen los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$.

Definición A.19. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que ***E es un subconjunto Lebesgue medible de*** $\mathbb{R}^n$, si para cada $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se satisface:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E). \tag{A.8}$$

En este caso, ***la medida de Lebesgue del subconjunto*** E es $\mu(E) = \mu^*(E)$.

Como era de esperarse, la medida exterior de cualquier rectángulo acotado en $\mathbb{R}^n$ coincide con le medida de Lebesgue del mismo, esto expresa el siguiente resultado.

Teorema A.20. Si R un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces R es un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}^n$ y $\mu^*(R) = \mu(R)$.

Consideremos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. La construcción de la medida de Lebesgue presentada anteriormente fue directamente mediante rectangulos $A \times B$, donde $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son intervalos acotados. Sin embargo, es posible empezar de manera un poco más general y suponer únicamente que A y B son subconjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$ y obtener el mismo resultado.

A partir de los subconjuntos medibles, las funciones medibles se definen en la misma forma que en el caso de $\mathbb{R}$.

Definición A.21. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f \colon E \to \mathbb{R}^*$. Diremos que f ***es Lebesgue medible*** si para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E \colon f(x) < t\}$ es medible.

De manera análoga al caso $\mathbb{R}$. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, se denota la colección de todas las funciones $f \colon E \to \mathbb{R}^*$ medibles como $\mathcal{M}(E)$.

Definición A.22. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible.

a) Si $S \colon E \to \mathbb{R}$ es una función simple como en el apartado b) de la Definición A.12. Se define, ***la integral de Lebesgue de la función simple no negativa*** S como:

$$\int_E \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) \tag{A.9}$$

b) Si $f\colon E \to \mathbb{R}$ es una función medible no negativa, definimos ***la integral de Lebesgue de*** f como:

$$\int_E f(x)d\mu = \sup\left\{\int_E S(x)d\mu\colon S\colon E \to \mathbb{R} \text{ es simple y } 0 \leq S(x) \leq f(x), \forall x \in E\right\}. \quad \text{(A.10)}$$

Dada una función $g\colon E \to \mathbb{R}^*$ como en b) o c). Diremos que g es una ***función Lebesgue integrable***, si $\displaystyle\int_E g(x)d\mu < \infty$.

Consideremos ahora el caso general. Dada una función $f\colon E \to \mathbb{R}^*$ Lebesgue medible, sea f_+ su parte positiva y f_- su parte negativa, como en la Definición A.13.

Definición A.23. Sean E un subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}^n$ y $f\colon E \to \mathbb{R}^*$ una función medible. Se dice que f es una **función Lebesgue integrable**, si f_+ y f_- lo son. Y en este caso, **la integral de Lebesgue de** f está determinado por:

$$\int_E f(x)d\mu = \int_E f_+(x)d\mu + \int_E f_-(x)d\mu \quad \text{(A.11)}$$

El Teorema de Fubini-Tonelli

Si $n \geq 2$. La definición de la medida de Lebesgue de los rectángulos acotados en $\mathbb{R}^n$ se basa directamente en la longitud de los intervalos en $\mathbb{R}$. Esto sugiere la posibilidad de que una integral en $\mathbb{R}^n$ puede calcularse mediante integrales en $\mathbb{R}$. La respuesta a esta cuestión la proporciona *el Teorema de Fubini-Tonelli* que presentamos enseguida.

Teorema de Fubini-Tonelli A.24. Si $f\colon R_1 \times R_2 \to \mathbb{R}$ es una función Lebesgue integrable, entonces

$$\int_{R_1\times R_2} f\big((x,y)\big)dxdy = \int_{R_1}\left\{\int_{R_2} f\big((x,y)\big)dy\right\}dx = \int_{R_2}\left\{\int_{R_1} f\big((x,y)\big)dx\right\}dy \quad \text{(A.12)}$$

Bibliografía

[1] J. A. Amor Montaño. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias.* Las prensas de ciencias, segunda edición, 2011.

[2] F. Barragan, A. Romero y J. F. Tenorio. Demostraciones del Teorema de Tychonoff. *Topología y sus Aplicaciones, BUAP*, 2:103–125, 2013.

[3] R. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue mesasure.* Wiley publisher, 1995.

[4] R. Bartle y D. Sherbert. *Introducción al análisis básico de una variable.* Limusa Wiley, tercera edición, 2010.

[5] H. Brezis. *Análisis funcional. Teoria y sus Aplicaciones.* Alianza Editorial, 1983.

[6] F. Burk. *Lebesgue measure and integration. An introducction.* Wiley, 1998.

[7] F. Casarrubias S. y A. Mascarúa T. *Elementos de la topología general.* Sociedad Mátematica Mexicana, 2012.

[8] R. Courant y F. John. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, volumen 1. Limusa, 2011.

[9] J. Dugundji. *Topology.* Allin and Bacon Inc., decimo segunda edición, 1978.

[10] F. G. Fontes. *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$. Oxford, 2002.

[11] E. Hewitt. The role of compacteness in Analysis. *The American Mathematical Montlhy*, 67:499–516, 1960.

[12] H. Holden y H. Hanche-Olsen. The Kolmogorov-Riesz compacteness theorem. *Expositiones Mathematicae*, 28:385–394, 2010.

[13] I. Iribarren. *Topología de espacios métricos.* Limusa-Noriega, 2008.

[14] J. Kelley. *General topology.* American Book Company, 1969.

[15] A. Kolmogorov y S. Fomin. *Introductory real analysis.* Dover, 1975.

[16] S. G. Krantz. *Real analysis and foundations.* Chapman and Hall, 2005.

[17] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with aplications.* Limusa Wiley, 1978.

[18] B. Mendelson. *Introduction to topology.* Allin and Bacon Inc., 1968.

[19] J. R. Munkres. *Topología.* Prentice-Hall, 2 edición, 2002.

[20] A. Pérez P., E. Najera R. y otros. *Introducción básica al estudio del análisis matemático.* Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, 2011.

[21] G. Salicrup. *Introducción a la topología.* SMM, 1997.

[22] G. F. Simmons. *Introducction to topology and modern analysis.* Mc Graw-Hill, 1963.

[23] D. C. Ullrich. The Ascoli-Arzelà Theorem via Tychonoff Theorem. *The American Mathematical Montlhy*, 110:939–940, 2003.

[24] S. Willard. *General topology.* Dover Publications, INC., 1970.

[25] D. G. Wright. Tychonoff's Theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120:985–987, 1994.

[26] K. Yosida. *Functional analysis.* Springer, segunda edición.

Glosario de símbolos

Símbolo		**Significado**
$\mathcal{B}_X$	–	Base para alguna topología sobre X
$B(x_0, r)$	–	Bola abierta con centro en x_0 y radio r
$B[x_0, r]$	–	Bola cerrada con centro en x_0 y radio r
I_r	–	Intervalo cerrado $[-r, r]$
c.t.p.	–	Casi en todas partes
$\overline{A}$	–	Cerradura del conjunto A
$X \setminus A$	–	Complemento del subconjunto A de X
$\mathbb{N}$	–	Conjunto de los números naturales, $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	–	Conjunto de los números enteros no negativos, $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	–	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^*$	–	Conjunto de los números reales extendidos
$F^{'}$	–	Conjunto derivado de F
$(X, \preceq)$	–	Conjunto parcialmente ordenado
diám(A)	–	Diámetro del conjunto A
$\dim X$	–	Dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial X
$d(x, y)$	–	Distancia entre el elemento x y el elemento y
(X, d)	–	Espacio métrico
$(\mathbb{R}^n, d_2)$	–	Espacio métrico euclideano
$(X, \mathcal{T}_X)$	–	Espacio topológico
$(X, \\|\cdot\\|)$	–	Espacio normado
l	–	Función longitud
π_β	–	Función proyección sobre la β-ésima cordenada
int(A)	–	Interior del conjunto A
$\\|\cdot\\|$	–	Norma
$\\|\cdot\\|_2$	–	Norma Euclidiana
$\\|\cdot\\|_p$	–	Norma p
$\\|\cdot\\|_\infty$	–	Norma uniforme
máx A	–	Máximo del conjunto A

μ	–	Medida de Lebesgue
μ^*	–	Medida exterior
d	–	Métrica
$\overline{d}$	–	Métrica discreta
d_2	–	Métrica euclideana
I_r^n	–	$\underbrace{I \times \cdots \times I}_{n\text{-veces}}$, n-cubo de longitud $2r$
$\text{mín}\, A$	–	Mínimo del conjunto A
$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$	–	Producto Cartesiano
$\{x_n\}$	–	Sucesión
$\{x_{n_k}\}$	–	Subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$
$\sup A$	–	Supremo del conjunto A
$\mathcal{T}_\pi$	–	Topología de Tychonoff
$\mathcal{T}_D$	–	Topología discreta
$\mathcal{T}_d$	–	Topología inducida por la métrica d

Índice de figuras

Índice alfabético