UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Funciones Libremente Descomponibles

Tesis

que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

presenta:

Anahí Rojas Carrasco

Directores de tesis:

Dr. Franco Barragán Mendoza (UTM)

Dr. Sergio Macías Álvarez (UNAM)

Huajuapan de León, Oaxaca *Mayo 2015*

Dedicatoria

A mis padres, Rosario Maribel y Naguib Guadalupe y a mis hermanos, Lenin, Janexi y Yesenia.

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial:
A mis padres, que siempre me dieron todo lo que necesité sin esperar nada a cambio.
A mis hermanos, que siempre trataron que nada me faltara mientras recorría este largo camino.
A mi hermana Diana Laura por tener que aguantar las noches de desvelo junto conmigo.
Al resto de mi familia por creer en mí y animarme a no dejar de esforzarme para llegar hasta este punto de mi carrera.
Al Dr. Franco Barragán Mendoza, porque nunca me dejó sola en la elaboración de este trabajo. Porque siempre me motivó a realizar un trabajo de calidad.
Al Dr. Sergio Macías Alvarez, por el apoyo y la confianza que me brindó a lo largo de la elaboración de este trabajo.
A mis sinodales, por el tiempo dedicado a la revisión de la tesis y por sus sabias observaciones para la mejora de la misma.

Índice general

Introducción **VII**

1. Preliminares **1**
- 1.1. Notaciones y Conceptos Básicos 1
- 1.2. Conexidad y Compacidad 10

2. Breve Introducción a los Continuos **15**
- 2.1. Notaciones y Conceptos Básicos en Continuos 15
- 2.2. Algunas Clases de Continuos 19
- 2.3. Clases de Funciones Entre Continuos 30

3. Funciones Libremente Descomponibles **43**
- 3.1. Propiedades Básicas 43
- 3.2. Relaciones con Otras Clases de Funciones Entre Continuos 47

4. Funciones Libremente Descomponibles en o sobre Tipos Especiales de Continuos **53**
- 4.1. Funciones Libremente Descomponibles con Rango Localmente Conexo 53
- 4.2. Funciones Libremente Descomponibles con Dominio Unicoherente 58
- 4.3. Funciones Libremente Descomponibles con Dominio Irreducible 63

5. Algunas Clasificaciones de Continuos **69**
- 5.1. Clasificación de Continuos en Términos de Funciones Libremente Descomponibles 69
- 5.2. Límites Inversos con Funciones de Ligadura Libremente Descomponibles 71
- 5.3. Funciones Hereditariamente Libremente Descomponibles 81

Conclusiones **85**

Referencias **87**

Índice alfabético **89**

Introducción

La temática de la tesis pertenece a la rama de la Topología conocida como Teoría de los Continuos. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Las primeras nociones del concepto de continuo fueron dadas en 1883 por G. Cantor [4]. Para un bosquejo de la historia de la Teoría de los Continuos puede consultar [6]. Tal como sucede en la mayoría de las áreas de la Matemática, es relevante estudiar funciones entre los objetos de estudio; en esta parte de la Topología es de suma importancia considerar y estudiar tipos de funciones entre continuos. Así, desde los inicios de la Teoría de los Continuos, se han estudiado diversos tipos de funciones entre continuos tales como las funciones continuas, abiertas o cerradas. Por la utilidad y la gran variedad de aplicaciones en la investigación de esta teoría, a través del tiempo se han definido varias clases de funciones. En 1979, T. Mackowiak [17] realiza un compendio de varias clases de funciones, estudia la relación entre estas clases y muestra la utilidad de las mismas para obtener clases de continuos. De manera similar, en 1992, Sam B. Nadler, Jr. en su libro [20], hace un estudio de algunas clases de funciones, en tal referencia menciona que: "*uno no puede estudiar continuos sin considerar tipos especiales de funciones*", [20, pág. 277].

En 1979, G. R. Gordh, Jr. y C. B. Hughes [11] definen y estudian un nuevo tipo de funciones, las cuales se denominaron funciones libremente descomponibles. Estas funciones son una generalización de las funciones monótonas y tienen la propiedad de preservar la conexidad local en límites inversos. En [12], se da seguimiento al estudio de esta clase de funciones y, recientemente, en [2] y [3], J. Camargo y S. Macías retoman y continúan el análisis de este tipo de funciones.

El objetivo del presente trabajo de tesis es realizar un estudio detallado de las funciones libremente descomponibles, basándonos en los trabajos realizados en [11], [12], [2] y [3]. Principalmente, veremos qué relación tiene la clase de funciones libremente descomponibles con otras clases de funciones y estudiaremos las funciones libremente descomponibles en algunos tipos especiales de continuos.

El presente trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera.

En el primer capítulo se proporcionan los conceptos básicos para una mejor comprensión de esta tesis.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de continuo y se revisan algunas de sus propiedades más importantes que son de gran ayuda en el trabajo de tesis. Se presentan los conceptos y relaciones entre continuos localmente conexos, semilocalmente conexos y continuos libremente descomponibles, por mencionar algunos. Se dan caracterizaciones importantes de los continuos mencionados, estas caracterizaciones desempeñan un papel importante, pues facilitan las demostraciones de algunos resultados posteriores. Finalmente se definen funciones entre continuos.

En el tercer capítulo se introduce el concepto de función libremente descomponible, así como el de funcioń hereditariamente libremente descomponible. Se analizan sus propiedades básicas, así como las relaciones que existen entre ellas y otras clases de funciones.

En el cuarto capítulo se estudian funciones libremente descomponibles en o sobre tipos especiales de continuos y se obtienen propiedades que en el Capítulo 3 no es posible demostrar.

Finalmente, en el quinto capítulo, se intenta dar una aplicación de los continuos y las funciones estudiadas, clasificando algunos continuos en términos de las funciones libremente descomponibles y se recopilan algunas propiedades de las funciones hereditariamente libremente descomponibles. También se realiza un estudio de los límites inversos con funciones de ligadura libremente descomponibles.

Funciones Libremente Descomponibles

Anahí Rojas Carrasco

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se estudian conceptos básicos que son útiles para la comprensión de este trabajo. También se busca familiarizar al lector con la notación que se estará manejando a lo largo de la tesis. Puesto que nuestro objetivo es estudiar a las funciones libremente descomponibles, empezamos dando definiciones y propiedades importantes de las funciones, poniendo especial atención a las propiedades que serán útiles para el desarrollo de este trabajo. Además, se habla de lo que es un espacio métrico, un conjunto abierto y un conjunto cerrado. Discutimos las relaciones que existen entre estos conjuntos. Los conceptos en los que pondremos nuestra atención son el de conexidad y compacidad ya que son los conceptos que nos ayudan a definir lo que es un *continuo*. Como ya se mencionó, la mayoría de los resultados presentados en este capítulo son muy básicos y conocidos, y es por esto que no nos ocuparemos de dar sus demostraciones.

1.1. Notaciones y Conceptos Básicos

La palabra *función* fue introducida a las matemáticas por Leibniz, quien originalmente utilizó este término para referirse a cierta clase de fórmulas matemáticas. La idea de Leibniz estaba muy limitada, y el significado de la palabra tuvo desde entonces muchas fases de generalización. Hoy en día, el significado de función es esencialmente el siguiente: Dados dos conjuntos A y B, una función de A en B es una correspondencia que asocia con cada elemento de A un único elemento de B. Una función de A en B, la denotamos como $f : A \to B$. En tal caso, al conjunto A se le llama dominio de f y al conjunto B se le conoce como codominio de f.

Definición 1.1.1. Sean $f : X \to Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Definimos y denotamos la *imagen* de A bajo f como:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x), \text{ para algún } x \in A\}.$$

La *imagen inversa* de B bajo f como:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Definición 1.1.2. La *imagen* de una función $f : X \to Y$ se define y se denota como sigue:

$$Im(f) = \{y \in Y : \text{ existe } x \in X \text{ con } f(x) = y\}.$$

Es claro que $Im(f)$ es un subconjunto del codominio de la función.

Definición 1.1.3. Sea X un conjunto. La función $I_X : X \to X$ dada por $I_X(z) = z$ para cada $z \in X$ se llama *función identidad* en X.

Definición 1.1.4. Sean X y Y conjuntos, $C \subseteq X$ y $f : X \to Y$ una función. La función $g : C \to Y$ tal que $g(c) = f(c)$, para todo $c \in C$ se llama la *restricción* de f a C y se denota por $f|_C$.

Definición 1.1.5. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. La *composición* de f con g, denotada por $g \circ f$, es la función $g \circ f : X \to Z$ tal que para cada $x \in X$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

La composición $g \circ f$ se lee f seguida de g. A continuación se dan algunas propiedades importantes de la composición de funciones.

Teorema 1.1.6. Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$ funciones entre conjuntos.

1. Si $A \subseteq X$, entonces $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.
2. Si $C \subseteq Z$, entonces $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
3. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, en otras palabras, la composición de funciones es asociativa.
4. $f \circ I_X = f$.
5. $I_Y \circ f = f$.

En el Teorema 1.1.7, se enumeran algunas propiedades básicas que cumplen las funciones, respecto a imagen e imagen inversa de uniones e intersecciones de familias de conjuntos.

Teorema 1.1.7. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos. Consideremos $\{A_i : i \in I\}$ y $\{B_j : j \in J\}$ familias de conjuntos en X y Y, respectivamente. Luego, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $f\left(\bigcap\{A_i : i \in I\}\right) \subseteq \bigcap\{f(A_i) : i \in I\}$.
2. $f\left(\bigcup\{A_i : i \in I\}\right) = \bigcup\{f(A_i) : i \in I\}$.
3. $f^{-1}\left(\bigcap\{A_i : i \in I\}\right) = \bigcap\{f^{-1}(A_i) : i \in I\}$.
4. $f^{-1}\left(\bigcup\{A_i : i \in I\}\right) = \bigcup\{f^{-1}(A_i) : i \in I\}$.
5. $f(f^{-1}(B_i)) \subseteq B_i$.
6. $A_i \subseteq f^{-1}(f(A_i))$.

A continuación definimos algunas funciones que más adelante manejaremos.

Definición 1.1.8. Una función entre conjuntos $f : X \to Y$ se dice que es:

1. *Inyectiva (o uno a uno)* si para cualesquiera $a_1, a_2 \in X$, se tiene que si $a_1 \neq a_2$, entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$.

2. *Sobreyectiva o suprayectiva* si $f(X) = Y$.

3. *Biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Las funciones definidas anteriormente cumplen propiedades especiales que nos son de gran ayuda en el desarrollo de este trabajo. A continuación repasaremos algunas de ellas.

Teorema 1.1.9. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. f es sobreyectiva.

2. $f^{-1}(C) \neq \emptyset$, para todo subconjunto C no vacío de Y.

3. $f(f^{-1}(C)) = C$, para todo subconjunto C de Y.

Ahora, si $f : X \to Y$ es una función biyectiva, se puede definir la función:

$$f^{-1} : Y \to X$$

por la regla: $f^{-1}(b)$ es el único $a \in X$ tal que $f(a) = b$. Además, con esto último tenemos que f^{-1} cumple las relaciones:

$$f^{-1} \circ f = I_X \text{ y } f \circ f^{-1} = I_Y,$$

las cuales expresan que f^{-1} actúa de manera inversa a como lo hace f sobre todo el conjunto X y que f actúa de manera inversa a como lo hace f^{-1} sobre todo el conjunto Y. Ahora daremos una definición formal.

Definición 1.1.10. Si $f : X \to Y$ es una función biyectiva, a la función $f^{-1} : Y \to X$ se le llama *función inversa de f*.

Teorema 1.1.11. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Se tiene que:

1. La inyectividad de f y g implica la inyectividad de $g \circ f$.

2. La sobreyectividad de f y g implica la sobreyectividad de $g \circ f$.

3. La función inversa de una función es única.

Uno de los conceptos más importantes en este trabajo es el de continuo. Pero no podemos llegar a éste, sin antes revisar el concepto de espacio métrico, es por esto que a continuación se da la definición de espacio métrico y se estudian tan sólo algunas de las muchas propiedades que cumplen estos espacios.

De aquí en adelante, denotaremos con $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ al conjunto de los números naturales, enteros, números racionales y números reales, respectivamente.

Definición 1.1.12. Un *espacio métrico* es un conjunto no vacío X junto con una función $d : X \times X \to [0, \infty)$, la cual satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada x, y en X, $d(x, y) \geq 0$.

2. Para cada x, y en X, $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. Para cada x, y en X, $d(y,x) = d(x,y)$.
4. Para cada x, y, z en X, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. A esta propiedad se le conoce como la *desigualdad del triángulo.*

A la función d se le llama *métrica* en X. A la pareja (X,d) se le llama espacio métrico. Si no hay riesgo de confusión, lo denotaremos simplemente por X.

A continuación se dan algunos ejemplos de espacios métricos; el siguiente muestra que todo conjunto puede ser considerado como espacio métrico.

Ejemplo 1.1.13. Sea X un conjunto no vacío. La función definida como:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x = y, \\ \\ 1, & \text{si} \quad x \neq y, \end{cases}$$

es una métrica en X, se le llama *métrica discreta* en X.

Ejemplo 1.1.14. La función definida por $d(x,x') = |x - x'|$, donde $|\cdot|$ representa a la función valor absoluto, es una métrica en $\mathbb{R}$, a la cual se le conoce como *distancia usual* en $\mathbb{R}$. Así, $(\mathbb{R},d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.15. Sean $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1,\ldots,a_n)$ y $x = (x_1,\ldots,x_n)$ puntos en $\mathbb{R}^n$ y $d_2(a,x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}$. La función d_2 es una métrica en X a la cual se le conoce como *métrica euclidiana* en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1.16. Sean $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1,\ldots,a_n)$ y $x = (x_1,\ldots,x_n)$ puntos en $\mathbb{R}^n$ y $d_\infty(a,x) = \sup\{|x_i - a_i| : i \in \{1,\ldots,n\}\}$. No es dificil verificar que, d_∞ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1.17. Sean $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1,\ldots,a_n)$ y $x = (x_1,\ldots,x_n)$ puntos en $\mathbb{R}^n$, entonces $d_1(x,a) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.18. Sean (X,d) un espacio métrico y C un subconjunto de X. A la función $d_C : C \times C \to [0,\infty)$ dada por $d_C(x,y) = d(x,y)$, para cada $(x,y) \in C \times C$, se llama *métrica inducida* por d sobre el subconjunto C y (C,d_C) se llama *subespacio métrico* de X.

Definición 1.1.19. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Definimos el *diámetro* de A como:

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}.$$

Si se cumple que $\text{diám}(A) < \infty$, decimos que A es acotado.

Definición 1.1.20. Sean (X,d) un espacio métrico y $A,B \subset X$ tales que $A,B \neq \emptyset$. La *distancia entre el conjunto A y el conjunto B* se denota y se define como:

$$d(A,B) = \text{ínf}\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}.$$

Si $x \in X$, $d(x,B) = d(\{x\},B) = \text{ínf}\{d(x,y) : y \in B\}$, se llama *distancia entre el punto x y el conjunto B.*

Los conjuntos que a continuación se definen juegan un papel fundamental en los espacios métricos por su forma.

Definición 1.1.21. Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y ϵ un número real positivo.

1. *La bola abierta* con centro en x y radio ϵ, se denota y define como:
   $B^d(x, \epsilon) = \{y : d(x, y) < \epsilon\}$.

2. *La bola cerrada* con centro en x y radio ϵ, se denota y define como:
   $B^d[x, \epsilon] = \{y : d(x, y) \leq \epsilon\}$.

Hay que resaltar que las bolas en un espacio métrico cualquiera, no tienen, en general, las propiedades geométricas de las bolas euclideanas.

Ejemplo 1.1.22. En la Figura 1.1, *a*) se muestran la bola en $\mathbb{R}^2$ definida por la métrica d_2. En *b*), la bola en $\mathbb{R}^2$ definida por la métrica d_∞. Y en *c*), la bola en $\mathbb{R}^2$ definida por la métrica d_1.

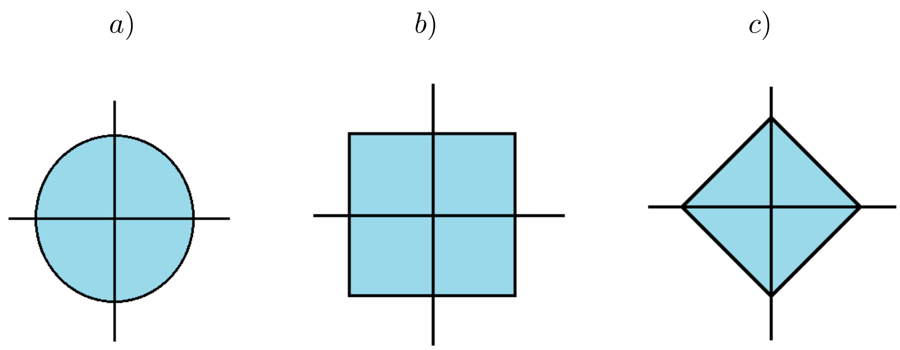

Figura 1.1: Bolas en $\mathbb{R}^2$

Después de definir las bolas en un espacio métrico, nos gustaría saber cómo son estos conjuntos en algún subespacio del espacio total.

Observación 1.1.23. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Las bolas $B_A^{d_A}(a, \epsilon)$ de centro $a \in A$ y de radio $\epsilon > 0$ en el subespacio métrico (A, d_A) son las intersecciones de las bolas con centro en a y radio ϵ en (X, d) con A, esto es:

$$B_A^{d_A}(a, \epsilon) = A \cap B^d(a, \epsilon).$$

Definición 1.1.24. Sean (X, d) un espacio métrico y $U \subseteq X$. Se dice que U es un *subconjunto abierto* en X, si para todo $x \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B^d(x, \epsilon) \subseteq U$.

Veamos ejemplos sencillos de subconjuntos abiertos.

Ejemplo 1.1.25. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Luego, A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual. Ver la Figura 1.2 *a*).

Ejemplo 1.1.26. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Luego, A no es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, puesto que ninguna bola abierta centrada en el origen, o en cualquier punto de la orilla, está contenida en A. Ver Figura la 1.2 *b*).

Ejemplo 1.1.27. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Luego, A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, con la distancia usual. Ver la Figura 1.2 c).

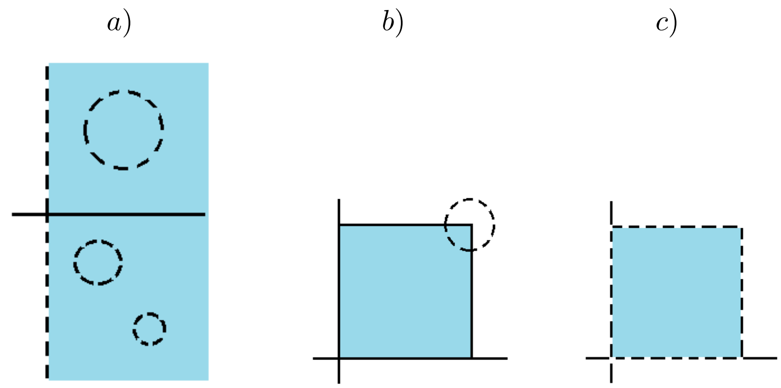

Figura 1.2: Conjunto A

Teorema 1.1.28. Sea X un espacio métrico. Se cumple que:

1. $\emptyset$ y X son subconjuntos abiertos de X.
2. Sea J un conjunto finito. Si $\{A_i : i \in J\}$ es una colección de subconjuntos abiertos en X, entonces $\bigcap\{A_i : i \in J\}$ es un subconjunto abierto en X.
3. Sea I cualquier conjunto. Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup\{A_i : i \in I\}$ es un subconjunto abierto de X.

Definición 1.1.29. Sean X un espacio métrico y $F \subseteq X$. Se dice que F es un *subconjunto cerrado* de X, si $X \backslash F$ es abierto.

Como en el Teorema 1.1.28, se tiene un resultado similar para conjuntos cerrados.

Teorema 1.1.30. Si X es un espacio métrico, entonces:

1. $\emptyset$ y X son subconjuntos cerrados de X.
2. Sea I cualquier conjunto. Si $\{A_i : i \in I\}$ es una colección de subconjuntos cerrados en X, entonces $\bigcap\{A_i : i \in I\}$ es un subconjunto cerrado en X.
3. Sea J es un conjunto finito. Si $\{A_i : i \in J\}$ es una colección de subconjuntos cerrados en X, entonces $\bigcup\{A_i : i \in J\}$ es un subconjunto cerrado en X.

Teorema 1.1.31. Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$ abierto (cerrado) en X y $U \subseteq A$. Luego, U es abierto (cerrado) en A si y sólo si U es abierto (cerrado) en X.

Dado un subconjunto C de un espacio métrico X, existen subconjuntos que están relacionados de manera natural con C. A continuación se da la definición de algunos de estos conjuntos.

Definición 1.1.32. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. A partir de este subconjunto A, definimos los siguientes subconjuntos de X.

1. *El interior de A en X*, es la unión de todos los subconjuntos abiertos en X contenidos en A, y lo denotamos por $\text{int}(A)$.
2. *La clausura de A en X*, es la intersección de todos los conjuntos cerrados en X que contienen a A, y lo denotamos por $Cl(A)$.
3. *La frontera de A en X*, es la intersección de la clausura de A y la clausura de $X\backslash A$, y lo denotamos por $Fr(A)$ esto es, $Fr(A) = Cl(A) \cap Cl(X\backslash A)$.

Teorema 1.1.33. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se sigue que: A es un conjunto abierto en X si y sólo si $A = \text{int}(A)$.

Teorema 1.1.34. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. El subconjunto A es abierto en X si y sólo si A puede representarse como unión de bolas abiertas en X.

En el Teorema 1.1.35, se dan algunas propiedades que cumple la clausura de un conjunto.

Teorema 1.1.35. Sean X un espacio topológico y A, $B \subseteq X$. Se cumplen las siguientes proposiciones:

1. $Cl(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \subseteq Cl(A)$.
3. $Cl(A)$ es un subconjunto cerrado en X.
4. $A = Cl(A)$ si y sólo si A es un subconjunto cerrado en X.
5. Si $A \subseteq B$, entonces $Cl(A) \subseteq Cl(B)$.
6. $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$.

Teorema 1.1.36. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ no vacío. Luego, $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in Cl(A)$.

Definición 1.1.37. Dado un conjunto X, definimos una *sucesión o sucesión infinita* de elementos de X como una función:

$$x : \mathbb{N} \to X.$$

Si x es una sucesión, representamos el valor de x en i por x_i, en lugar de $x(i)$. Además, denotaremos a la función x como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.1.38. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge* a $x \in X$, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x, x_n) < \epsilon, \text{ para } n \geq N.$$

En este caso, x se llama el *límite* de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Y lo denotamos por: $x_n \to x$ o $\text{lím}(x_n) = x$.

Una caracterización importante de la clausura de un conjunto que en muchas ocasiones es conveniente manejar, es la del Teorema 1.1.39.

Teorema 1.1.39. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Luego, $a \in Cl(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $\lim(x_n) = a$.

En capítulos posteriores estudiamos algunas clases de funciones y sus propiedades. Una de las más importantes es la clase de funciones continuas. En este trabajo las funciones continuas nos ayudarán a definir otras clases de funciones.

Definición 1.1.40. Sean (X, d), (Y, d') espacios métricos, $f : X \to Y$ una función y $a \in X$. Se dice que f *es continua en el punto* a, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$:

$$\text{si } d(a, x) < \delta, \text{ entonces } d'(f(a), f(x)) < \epsilon.$$

Se dice que f es *continua* en X, si f es continua en todo punto de X.

En los siguientes dos teoremas se presentan caracterizaciones importantes y convenientes de las funciones continuas.

Teorema 1.1.41. Sean $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos y $a \in X$. Luego, f es continua en a si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X, se tiene que si $\lim(x_n) = a$, entonces $\lim(f(x_n)) = f(a)$.

Teorema 1.1.42. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. f es continua en X.
2. Para cada conjunto abierto U de Y, el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en X.
3. Para cada conjunto cerrado B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

Definición 1.1.43. Dados los espacios métricos X y Y, diremos que X es *homeomorfo* a Y si existe una función $f : X \to Y$ biyectiva tal que tanto f como f^{-1} son continuas. A la función f se le llama *homeomorfismo* entre X y Y.

Teorema 1.1.44. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos. Se sigue que f es un homeomorfismo si y sólo si existe una función continua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = I_X$ y $f \circ g = I_Y$.

Definición 1.1.45. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Decimos que $V \subseteq X$ es una *vecindad* de x, si existe $\delta > 0$ tal que $B^d(x, \delta) \subseteq V$.

Las propiedades que se dan en el Teorema 1.1.46, son parte importante en muchas de las demostraciones que más adelante se presentan.

Teorema 1.1.46. Sea X un espacio métrico. X tiene las siguientes propiedades:

1. Dados x y $y \in X$ con $x \neq y$, existen vecindades abiertas U_x y U_y de x y y, respectivamente, tales que $y \notin U_x$ y $x \notin U_y$. En este caso se dice que X es T_1. Esta propiedad es equivalente a que cada conjunto unitario es cerrado.

2. Para cualesquiera x_1 y x_2 puntos disjuntos de X, existen vecindades disjuntas U_1, y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente. En este caso se dice que X es *Hausdorff o* T_2.

3. Dados $x \in X$ y un subconjunto cerrado $B \subseteq X$ tal que $x \notin B$, existen conjuntos abiertos disjuntos conteniendo a x y a B, respectivamente. En este caso se dice que X es *regular*.

4. Dados dos subconjuntos cerrados disjuntos A y B existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente. En este caso se dice que X es *normal*.

Teorema 1.1.47. Sea X un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El espacio X es regular.

2. Para cualquier punto $x \in X$ y cualquier abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto V en X tal que $x \in V \subseteq Cl(V) \subseteq U$.

Teorema 1.1.48. Sea X un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El espacio X es normal.

2. Para todo subconjunto cerrado F de X y para todo subconjunto abierto U de X tal que $F \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $F \subseteq V \subseteq Cl(V) \subseteq U$.

A partir de un espacio métrico, definimos un espacio importante, que más adelante manejamos.

Definición 1.1.49. Sean X un espacio métrico y $A, B \subseteq X$. Se dice que los subconjuntos A y B están *separados* en X, si:

$$Cl(A) \cap B = \emptyset = A \cap Cl(B).$$

Se dice que A y B *se tocan*, si no están separados.

Definición 1.1.50. Una *partición* de un espacio métrico X, es una colección de subconjuntos no vacíos de X separados entre sí y cuya unión es X.

Una partición que más adelante nos ayuda en la demostración de un resultado importante para nuestro trabajo, es la siguiente:

Definición 1.1.51. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto cerrado y no vacío de X. Definimos la partición $\mathcal{D}_A$ como sigue:

$$\mathcal{D}_A = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{A\}.$$

Definición 1.1.52. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{D}_A$ como en la Definición 1.1.51. La función $q : X \to \mathcal{D}_A$ que está definida como $q(x) = D$, donde D es el único elemento de $\mathcal{D}_A$ tal que $x \in D$, se llama *función cociente*. La topología [10] para $\mathcal{D}_A$, $\tau(\mathcal{D}_A) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_A : q^{-1}(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de X$\}$, se llama *topología cociente*. Al conjunto $\mathcal{D}_A$ con la topología $\tau(\mathcal{D}_A)$ se le llama *espacio cociente* y se denota por $X/\mathcal{D}_A$. Además, esta topología hace que la función q sea continua.

Hemos definido a la partición $\mathcal{D}_A$ y una función continua q que va de un espacio métrico X al espacio cociente $X/\mathcal{D}_A$. Bueno, pero ¿para qué nos sirve a nosotros todo esto?, se preguntará el lector. Pues bien, a continuación, le daremos sentido a algunas de las definiciones en cuanto al espacio cociente se refiere.

Definición 1.1.53. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{D}$ una partición de X. Se dice que $\mathcal{D}$ es *semicontinua superiormente*, si para cada elemento $D \in \mathcal{D}$ y cada subconjunto abierto U de X con $D \subset U$, existe un subconjunto abierto V de X, con $D \subset V$, y tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Teorema 1.1.54. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto cerrado y no vacío de X. Luego, $\mathcal{D}_A$ es una partición semicontinua superiormente.

Demostración. Observemos que si $D \in \mathcal{D}_A$ y U es un subconjunto abierto de X tal que $D \subset U$, por la definición de $\mathcal{D}_A$, $D = \{x\}$ con $x \in X \setminus A$ o bien $D = A$. Supongamos que $D = \{x\}$ con $x \in X \setminus A$. Luego, existe $V = X \setminus A$ subconjunto abierto de X tal que $D \subset V$. Si $C \in \mathcal{D}_A$ y $C \cap V \neq \emptyset$, entonces $C = \{x_1\}$ para algún $x_1 \in X \setminus A$, consecuentemente, $C \subset V$.

Ahora bien, si $D = A$, pongamos $V = U$. Así, $D \subset V$. Si $C \in \mathcal{D}_A$ y $C \cap V \neq \emptyset$, entonces $C = \{x\}$ con $x \in X \setminus A$ o $C = A$. Si $C = A$, por hipótesis, $C \subset V$. Si $C = \{x\}$ con $x \in X \setminus A$, como $C \cap V \neq \emptyset$, entonces $x \in V$. Así, $C \subset V$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_A$ es una partición semicontinua superiormente. ■

1.2. Conexidad y Compacidad

El segundo concepto que hay que tener en cuenta para poder llegar a definir lo que es un continuo, es el de conexidad. En esta sección se dan propiedades importantes que cumplen estos espacios. Cabe mencionar que hay más de un tipo de conexidad, pero hemos reservado una sección especial para el desarrollo de este tema.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio métrico. Diremos que X es *disconexo* si existen dos conjuntos abiertos separados no vacíos U y V de X tales que $X = U \cup V$. Si X no es disconexo, decimos que X es *conexo*. Un subespacio será conexo si visto como espacio es conexo. Si X es disconexo, existen subconjuntos abiertos, separados y no vacíos U y V de X tal que $X = U \cup V$. En tal caso decimos que el par U y V forman una *separación* para X.

Observación 1.2.2. En la Definición 1.2.1 es equivalente el requerir que U y V sean conjuntos cerrados en vez de abiertos. Esto es, un espacio métrico X es disconexo si existen subconjuntos cerrados, separados y no vacíos U y V de X tales que $X = U \cup V$.

Veamos algunos ejemplos de estos espacios.

Ejemplo 1.2.3. En cualquier espacio métrico los conjuntos que consisten de un solo punto son conexos.

Ejemplo 1.2.4. Consideremos $\mathbb{R}$ con la métrica usual y $A = (2, 3] \cup [4, 5)$. El conjunto A no es conexo, pues se tiene la separación:

$$A = U \cup V \text{ con } U = (2, 3] \text{ y } V = [4, 5).$$

Ejemplo 1.2.5. Consideremos $\mathbb{R}$ con la métrica usual. El conjunto $\mathbb{Q}$ no es conexo. Puesto que:

$$\mathbb{Q} = U \cup V \text{ con } U = \big(-\infty, \sqrt{2}\big) \cap \mathbb{Q} \text{ y } V = \big(\sqrt{2}, +\infty\big) \cap \mathbb{Q}.$$

Una prueba de lo que se afirma en el Ejemplo 1.2.6 se puede consultar en [10, pág. 248].

Ejemplo 1.2.6. Un subconjunto C de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si C es un intervalo.

Ahora presentamos las propiedades más convenientes que tienen estos espacios para nuestros objetivos. Quien esté interesado en revisar la demostración de dichos resultados, puede consultar [10].

Teorema 1.2.7. Sea X un espacio métrico. La unión de una colección de espacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

Teorema 1.2.8. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Si A es conexo, entonces el conjunto $Cl(A)$ es conexo.

Teorema 1.2.9. Sea X un espacio métrico. Si los conjuntos C y D forman una separación de X y, además, Y es un subespacio conexo de X, entonces Y está contenido en C o en D.

Teorema 1.2.10. Sean X y Y espacios métricos. Si X es conexo y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es conexo.

Ejemplo 1.2.11. El conjunto $\mathbb{S}^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\big\}$ es conexo (con la métrica usual) pues es la imagen de la función continua f y el conjunto conexo $[0, 1]$, donde $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$, para cada $x \in [0, 1]$.

Definición 1.2.12. Sean X un espacio métrico y C un subconjunto de X. Se dice que C es una *componente* de X si C es conexo y no es subconjunto propio de ningún otro subconjunto conexo de X.

A continuación se dan algunas propiedades que satisfacen las componentes de un espacio métrico que más adelante nos serán de mucha ayuda.

Teorema 1.2.13. Sean X un espacio métrico y A, B y C subconjuntos no vacíos de X. Luego:

1. Toda componente de X es cerrada en X.
2. Dos componentes distintas, están separadas.
3. Si C es una componente de A y $C \subseteq B \subseteq A$, entonces C es una componente de B.

Un tipo de conexidad, que usamos más adelante es la siguiente.

Definición 1.2.14. Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *totalmente disconexo*, si cada componente de X consta de un solo punto.

Claramente, todo conjunto unipuntual o finito es totalmente disconexo.

Un último concepto que hay que revisar antes de empezar a estudiar clases de continuos, es el concepto de compacidad. A continuación, se dan ejemplos de espacios compactos, así como propiedades que nos serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo. Al igual que con los espacios conexos, se revisa el comportamiento de los espacios compactos bajo funciones continuas.

Al lector interesado en revisar las demostraciones de los resultados sobre espacios compactos, sugerimos consultar [19].

Definición 1.2.15. Sea X un espacio métrico. Una familia $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos de X es una *cubierta* para X si $X \subseteq \bigcup\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Si $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ es también una cubierta para X, decimos que $\mathcal{U}'$ es una *subcubierta* de $\mathcal{U}$ para X. Finalmente, si todos los elementos de una cubierta $\mathcal{U}$ de X son abiertos de X, decimos que $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta* de X.

Definición 1.2.16. Un espacio métrico X es *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. Si $A \subseteq X$, entonces A es compacto si como subespacio de X es compacto.

Ejemplo 1.2.17. Todo espacio que tiene sólo un número finito de abiertos es compacto.

Ejemplo 1.2.18. Como un caso particular del Ejemplo 1.2.17. Todo espacio finito es compacto.

Ejemplo 1.2.19. Consideremos $\mathbb{R}$ con la métrica usual. El conjunto $(0, 1)$ no es compacto. Basta tomar la cubierta abierta:

$$\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, 1\right).$$

A pesar de lo bien que se comporta un espacio compacto, no siempre es posible que esta propiedad se herede a sus subespacios. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.2.20. Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

Teorema 1.2.21. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Luego, A es compacto si y sólo si toda sucesión arbitraria $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A, tiene una subsucesión $\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ convergente a un elemento x en A.

Teorema 1.2.22. Sean X un conjunto compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que $X_{n+1} \subseteq X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si U es un subconjunto abierto de X tal que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq U$, para cada $n \geq N$.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq U$. Se tiene que, $X \backslash U$ es un subconjunto cerrado en X tal que $X \backslash U \subset X \backslash \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \backslash X_n)$. De aquí que $\{X \backslash X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de $X \backslash U$. Como X es compacto, por el Teorema 1.2.20, se tiene que $X \backslash U$ es compacto. Luego, existen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $X \backslash U \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k}(X \backslash X_{n_j})$. Así, $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} X_{n_j} \subset U$. Sea $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Luego, $X_N = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} X_{n_j}$, y así $X_N \subseteq U$. Por lo tanto, $X_n \subset U$, para cada $n \geq N$. ■

El siguiente teorema caracteriza los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.23. (Heine-Borel) En $\mathbb{R}^n$ (con la métrica euclidiana) un subconjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Ejemplo 1.2.24. El conjunto $\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$ es compacto en $\mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica euclidiana. En efecto, notemos que $\mathbb{S}^n$ es acotado. Además, podemos probar que el conjunto es cerrado verificando que $\mathbb{S}^n = f^{-1}(\{1\})$, donde $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es la función continua $f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Luego, por el Teorema 1.2.23 se tiene que $\mathbb{S}^n$ es compacto.

Lema 1.2.25. El intervalo $[0, 1]$ es compacto (con la métrica usual).

Teorema 1.2.26. Sean X, Y espacios métricos y $K \subseteq X$. Si $f : X \to Y$ es una función continua y K es compacto, entonces $f(K)$ también es compacto.

Lema 1.2.27. Sea X un espacio métrico. Si Y es un subespacio compacto de X y $x_0 \notin Y$, entonces existen conjuntos abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y respectivamente.

Para la demostración del siguiente resultado, se puede consultar [16, pág. 15].

Teorema 1.2.28. Sean X un espacio métrico y compacto y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Si $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio métrico.

Capítulo 2

Breve Introducción a los Continuos

Después de haber estudiado los conjuntos conexos y compactos, estamos listos para introducir un nuevo concepto, el cual estaremos manejando de aquí en adelante. Este concepto es el de *continuo*. A pesar de que existen muchas clases de continuos y mucho por estudiar sobre estos mismos, en este trabajo ponemos nuestra atención en los continuos semilocalmente conexos, localmente conexos, conexos en pequeño, aposindéticos y libremente descomponibles, por mencionar algunos, y se estudian las relaciones más importantes que hay entre estos continuos para el desarrollo del trabajo.

2.1. Notaciones y Conceptos Básicos en Continuos

Definición 2.1.1. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido como subespacio en otro continuo.

Definición 2.1.2. Un *continuo no degenerado* es un continuo con más de un punto.

A continuación, se dan algunos ejemplos de continuos. Algunos de ellos, nos servirán como ejemplos de las clases de continuos que se revisarán más adelante. Empezaremos con ejemplos sencillos.

Ejemplo 2.1.3. En el capítulo anterior se dijo que el intervalo cerrado $[0, 1]$ es un conjunto conexo y compacto. Así, se tiene que $[0, 1]$ es un continuo. Un *arco* es cualquier espacio topológico que sea homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Dado un arco A, sea $h : [0, 1] \to A$ un homeomorfismo. Si $h(0) = p$ y $h(1) = q$, decimos que los *puntos extremos* de A son los puntos p y q, o bien, decimos que A es un arco que une a los puntos p y q. Un arco es un continuo. Ver la Figura 2.1.

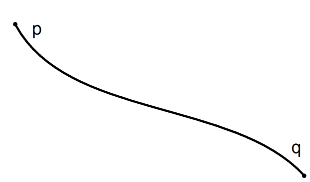

Figura 2.1: Arco

Ejemplo 2.1.4. Sea $\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$. Luego, cualquier espacio homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ es llamado una *n-esfera*. Toda n-esfera es un continuo. En la Figura 2.2 se muestra la 1-esfera y la 2-esfera. Cualquier espacio homeomorfo a S^1 es llamado *curva cerrada simple*.

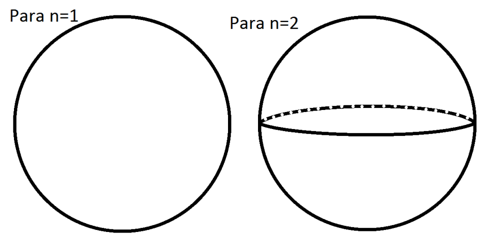

Figura 2.2: 1-esfera y 2-esfera

Ejemplo 2.1.5. Sean $I_1, I_2 \,\mathrm{e}\, I_3$ arcos que coinciden exactamente en un punto p y que, por pares, los conjuntos $I_1 \backslash \{p\}$, $I_2 \backslash \{p\}$ e $I_3 \backslash \{p\}$ son disjuntos. A la unión de estos tres arcos, que denotaremos con T, se le llama *triodo simple*. Se cumple que T es un continuo. Ver la Figura 2.3.

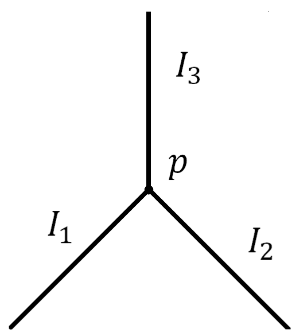

Figura 2.3: Triodo simple

Ejemplo 2.1.6. La *curva sinoidal del topólogo* definida como:

$$X = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

es un continuo. En efecto, puesto que X es la clausura del conjunto conexo:

$$\left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Se tiene que, por el Teorema 1.2.23, X es compacto y por el Teorema 1.2.8, X es conexo. Así, X es un continuo. Ver la Figura2.4

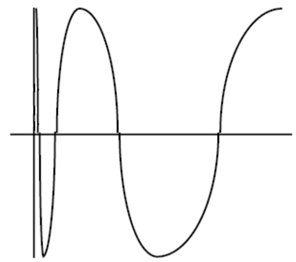

Figura 2.4: Curva Sinoidal del Topólogo

Ejemplo 2.1.7. Tomemos el continuo de la Figura 2.4 y consideremos el arco que va del punto $(0,-1)$ al punto $(1, \mathrm{sen}(1))$, de tal forma que la intersección de estos dos continuos sea el conjunto $\{(0,-1),(1,\mathrm{sen}(1))\}$. La unión de estos dos continuos es también un continuo el cual es llamado *el Círculo de Varsovia.* Ver la Figura 2.5.

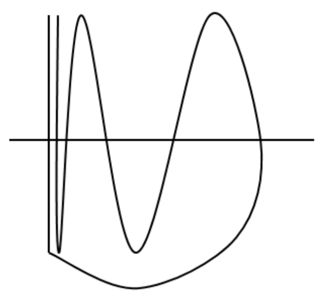

Figura 2.5: Círculo de Varsovia

Después de haber revisado ejemplos de continuos, ahora repasaremos algunas propiedades importantes que cumplen estos espacios.

Teorema 2.1.8. Sean X un continuo y A un subcontinuo de X tal que $X\backslash A$ es disconexo. Si U y V son subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de X tales que $X\backslash A = U \cup V$, entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X.

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X tales que $X\backslash A = U \cup V$. Puesto que $X\backslash(A \cup U) = V$, obtenemos que $A \cup U$ es cerrado. Así, por el Teorema 1.2.20 $A \cup U$ es compacto. De manera similar se prueba que $A \cup V$ es compacto. Supongamos que $A \cup U$ no es conexo. Entonces $A \cup U = E \cup F$ con E y F subconjuntos cerrados no vacíos, disjuntos de X. Como A es un subcontinuo, por el Teorema 1.2.9, $A \subseteq E$ o $A \subseteq F$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $A \subseteq E$. En este caso $F \subseteq U$. En efecto, pues de no ser así, existe un $x \in F \cap A$. Así, $x \in E \cap F$, lo cual es una contradicción pues E y F son disjuntos. De aquí, $F \cap X\backslash(U \cup A) = \emptyset$ y $X = F \cup (E \cup Cl(V))$ lo cual contradice la conexidad de X. La contradicción surge de suponer que $A \cup U$ es disconexo. Por lo tanto, $A \cup U$ debe ser conexo. De igual forma se prueba que $A \cup V$ es conexo. ■

Teorema 2.1.9. Sean Z un conjunto compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subcontinuos de Z tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces X es un subcontinuo de Z.

Demostración. Primero veamos que X es no vacío. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$, entonces $Z = Z \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, consecuentemente, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(Z \backslash X_n) = Z$. Puesto que X_n es cerrado, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(Z \backslash X_n)$ es una cubierta abierta para Z. Así, como Z es compacto, existe una colección finita $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ tal que $\bigcup_{j=1}^{k}(Z \backslash X_j) = Z$. Sea $m = \text{máx}\{1, \ldots, k\}$. Luego, $Z = Z \backslash X_m$. De aquí que X_m es vacío. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. Ahora, por el Teorema 1.1.30, X es un conjunto cerrado y así, por el Teorema 1.2.20, X es compacto.

Para poder terminar la prueba, veamos que X es conexo. Para esto, supongamos que X es disconexo. Luego, existen dos subconjuntos cerrados disjuntos A y B de X tales que $X = A \cup B$. Como X es un espacio métrico, por el Teorema 1.1.46, parte 4, existen dos subconjuntos abiertos disjuntos U y V de X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. De aquí que $X \subseteq U \cup V$. Así, por el Teorema 1.2.22, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subseteq U \cup V$. Luego, por el Teorema 1.2.9, $X_N \subseteq U$ o $X_N \subseteq V$. Supongamos que $X_N \subseteq U$. Como $X \subseteq X_N \subseteq U$ y $X = A \cup B$, se sigue que $B \subseteq U$, lo cual es una contradicción. Así, X es conexo y, por lo tanto, X es un subcontinuo de Z. ■

Teorema 2.1.10. Sean (X, d) un continuo y A un subconjunto cerrado de X con un número finito de componentes. Si $p \in \text{int}(A)$, entonces p está en el interior de la componente de A que lo contiene.

Demostración. Sea $p \in \text{int}(A)$. Existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B^d(p, \epsilon_1) \subseteq A$. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ las componentes de A. Supongamos que $p \in C_1$. Queremos verificar que existe una bola con centro en p y radio $\epsilon > 0$ que está contenida en C_1. Sean $\delta = \text{mín}\{d(C_1, C_j) : j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Notemos que $\delta > 0$. Ahora consideremos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \text{mín}\{\epsilon_1, \delta\}$. Sea $x \in B^d(p, \epsilon)$. Si $x \in C_j$ para $j \neq 1$, entonces $\epsilon > d(p, x) \geq d(C_1, C_j) \geq \delta > \epsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in C_1$, y así $B^d(p, \epsilon) \subset C_1$. Esto esto, p está en el interior de la componente que lo contiene. ■

Teorema 2.1.11. Sea X un continuo no degenerado. Luego, X contiene un subcontinuo propio no degenerado. Más aún, si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subseteq U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subseteq B \neq A$ y $B \subseteq U$.

Demostración. Primero se demostrará la segunda parte del Teorema 2.1.11. Como X es normal, por el Teorema 1.1.48, sea V un subconjunto abierto de X tal que $A \subset V \subset Cl(V) \subset U$, y $V \neq X$. Sea B la componente de $Cl(V)$ que contiene a A. Es claro que $A \subset B$ y, como $Cl(V) \subset U$, se sigue que $B \subset U$. Luego, por [20, Teorema 5.4, pág. 73], $B \cap (X \backslash V) \neq \emptyset$. Así, puesto que $A \subset V$, $B \neq A$. Ahora, para verificar que X tiene un subcontinuo propio no degenerado, usaremos la segunda parte de este teorema. Sea $p \in X$. Pongamos $A = \{p\}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$ y $U \neq X$. ■

La prueba del siguiente resultado, se puede consultar en [16, pág. 46]

Teorema 2.1.12. Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Si $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un continuo.

2.2. Algunas Clases de Continuos

Existen espacios métricos, que además de poseer la propiedad de la conexidad y la compacidad, cumplen alguna o algunas propiedades adicionales. Es así como surgen las diferentes clases de continuos. En esta sección, se introducen algunas de estas clases. También se revisan equivalencias que se cumplen entre estas clases, puesto que desempeñan un papel importante en el desarrollo de esta tesis, ya que en capítulos posteriores estos resultados facilitan el trabajo en algunas de las demostraciones. Cabe mencionar que parte de los resultados en relación a clases de continuos que estudiaremos a continuación y algunos ejemplos también, están basados en el libro *Topics on Continua* del Dr. Sergio Macías, [16].
Vamos a empezar con los continuos localmente conexos.

Definición 2.2.1. Sean X un continuo y x un punto en X. Se dice que X es *localmente conexo* en x si para cualquier abierto U de X que contiene a x, existe un abierto y conexo V de X que contiene a x y que está contenido en U. Se dice que X es localmente conexo si X es *localmente conexo* en cada uno de sus puntos.

Ahora damos algunos ejemplos sencillos de esta nueva clase de continuos.

Ejemplo 2.2.2. El arco es un continuo localmente conexo. Ver la Figura 2.1

Ejemplo 2.2.3. S^1 es un continuo localmente conexo. Ver la Figura 2.2.

Veamos ahora el ejemplo de un continuo localmente conexo únicamente en uno de sus puntos.

Ejemplo 2.2.4. Consideremos el conjunto de Cantor, denotado por ζ, cuya construcción puede realizarse como sigue. Comenzamos con $C_1 = [0,1]$ y definimos el conjunto $C_2 \subseteq [0,1]$ al dividir el intervalo en tres partes iguales y sustrayendo el tercio medio, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; el conjunto $C_3 \subseteq C_2$ se obtiene repitiendo la división en tercios de los dos intervalos cerrados de C_2 y sustrayendo el tercio medio de cada uno de ellos. Inductivamente, definimos C_n como en el conjunto que se obtiene de remover los tercios abiertos medios de cada subintervalo cerrado de C_{n-1}. Finalmente, $\zeta = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, es el *conjunto de Cantor*, ver la Figura 2.6, a). Consideremos ahora el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$, $(c, 0)$ con $c \in \zeta$ y unamos a cada punto de éstos con el punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, usando los segmentos $(1-t)(c,0) + t\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, para $t \in [0,1]$. Este continuo conocido como el *abanico sobre el conjunto de Cantor*, es localmente conexo sólo en el punto x, ver la Figura 2.6, b).

a) Conjunto de Cantor *b*) Abanico sobre el conjunto de Cantor

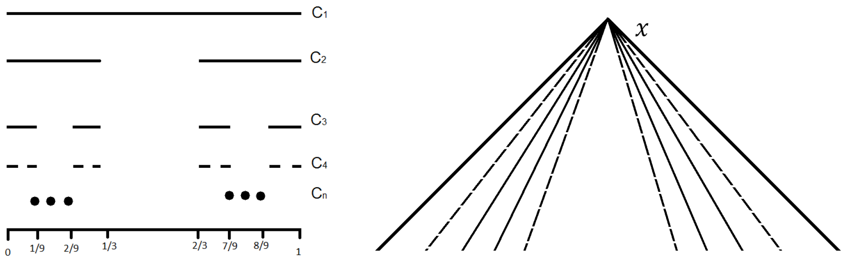

Figura 2.6:

Ejemplo 2.2.5. La curva sinoidal es un continuo que no es localmente conexo, ya que para cualquier punto del segmento $\{0\} \times [0, 1]$ y cualquier abierto que contenga a dicho punto, cumple que tiene más de una componente y la que contiene al punto p tiene interior vacío. Como se muestra en la Figura 2.7.

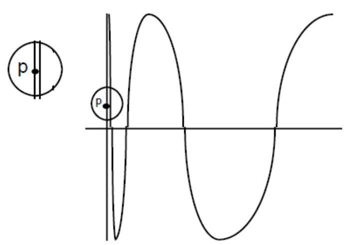

Figura 2.7: Curva Sinoidal del Topólogo

En ocasiones será difícil verificar con base a la definición original de conexidad local, si efectivamente un continuo es localmente conexo o no. Sin embargo, se tienen caracterizaciones de la conexidad local que en muchas ocasiones es conveniente usar. En el Teorema 2.2.6, se da una caracterización de los continuos localmente conexos con base a las componentes de sus subconjuntos abiertos.

Teorema 2.2.6. Un continuo X es localmente conexo si y sólo si cada una de las componentes de los conjuntos abiertos en X es abierta en X.

Demostración. Sea X un continuo. Supongamos primero que X es localmente conexo, y tomemos un conjunto abierto U de X y U_1 una componente de U. Para cada $x \in U_1$, por hipótesis, existe un abierto y conexo V_x de X tal que $x \in V_x \subseteq U$. Por otro lado, como U_1 es una componente de U y V_x es un conexo, por el Teorema 1.2.9, $V_x \subseteq U_1$ y así:

$$\bigcup \{V_x : x \in U_1\} = U_1.$$

Por lo tanto, U_1 es una unión de abiertos y, consecuentemente por el Teorema 1.1.28 parte 3, U_1 es un conjunto abierto en X. Como U_1 fue arbitrario, hemos probado que cada una de las componentes del abierto U es abierta en X.

Recíprocamente, tomemos un punto $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Sea C la componente de U que tiene a x, por hipótesis, C es abierta en X. Podemos utilizar a C como el abierto y conexo de la definición de localmente conexo. ■

Una condición un poco más débil que la conexidad local, pero igual de importante y conveniente, es la de semi-conexidad local. Veamos la definición de este otro tipo de conexidad.

Definición 2.2.7. Sean X un continuo y x un punto en X. Se dice que X es *semilocalmente conexo* en el punto x si para todo abierto U de X con x en U, existe un abierto V de X que contiene a x y que está contenido en U tal que $X \backslash V$ tiene un número finito de componentes.

A continuación damos un ejemplo de un continuo semilocalmente conexo en un punto.

Ejemplo 2.2.8. El continuo de la Figura 2.8 es semilocalmente conexo en el punto p [16].

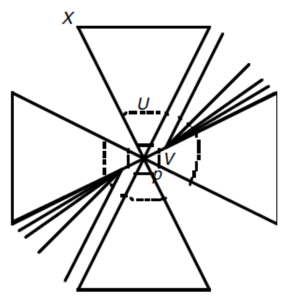

Figura 2.8: Continuo semilocalmente conexo en el punto p

Después de haber revisado la conexidad local y la conexidad semilocal, vamos a establecer la relación entre estas dos propiedades. Como se dijo anteriormente, la conexidad local es más fuerte que la conexidad semilocal, verifiquemos esto matemáticamente.

Teorema 2.2.9. Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces X es semilocalmente conexo.

Demostración. Sean $x \in X$ y U un abierto de X con $x \in U$. Veamos que existe un subconjunto abierto V de X tal $x \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes.
Sea $y \in X \backslash U$. Luego, $y \in X \backslash \{x\}$. Puesto que $X \backslash \{x\}$ es un subconjunto abierto, por el Teorema 1.1.47, parte 2, existe un subconjunto abierto V_y' de X tal que $y \in V_y' \subseteq Cl\left(V_y'\right) \subseteq X \backslash \{x\}$. Por otro lado, por la hipótesis de conexidad local existe un subconjunto abierto y conexo W_y de X tal que:

$$y \in W_y \subseteq V_y'.$$

Más aún, por el Teorema 1.1.35, parte 5, $y \in W_y \subseteq Cl\,(W_y) \subseteq Cl\left(V_y'\right) \subseteq X \backslash \{x\}$. Así, el conjunto $\bigcup\{W_y : y \in X \backslash U\}$ forma una cubierta abierta para $X \backslash U$.

Como $X \backslash U$ es un subconjunto cerrado dentro del compacto X, por el Teorema 1.2.20, el conjunto $X \backslash U$ es compacto, de aquí que existen $y_1, y_2, ..., y_n \in X \backslash U$ tales que

$$X \backslash U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Cl\,(W_{y_i}).$$

Sea $V = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Cl\left(W_{y_i}\right)$. Por el Teorema 1.1.28 parte 3, se sigue que V es un conjunto abierto de X. Notemos que $x \in V$, pues de lo contrario, si $x \notin V$, entonces $x \in \bigcup_{i=1}^{n} Cl\left(W_{y_i}\right)$, esto es, existe $y_0 \in X$ tal que $x \in Cl\left(W_{y_0}\right) \subseteq V'_y$. De donde, $x \in X \setminus \{x\}$, lo cual no puede ocurrir.

Ahora, sea $x_0 \in V$. Se sigue que $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} Cl\left(W_{y_i}\right)$, esto es, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple que $x_0 \notin Cl\left(W_{y_i}\right)$, de donde $x_0 \notin X \setminus U$ y así $x_0 \in U$. Por lo tanto, $V \subseteq U$. Notemos también que $X \setminus V = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Cl\left(W_{y_i}\right) \right) = \bigcup_{i=1}^{n} Cl\left(W_{y_i}\right)$. Así, $X \setminus V$ sólo tiene un número finito de componentes. Por lo tanto, V es el subconjunto abierto que buscamos y X es semilocalmente conexo. ■

En virtud del Teorema 2.2.9, los ejemplos vistos de continuos localmente conexos, nos sirven como ejemplos de continuos semilocalmente conexos. Sin embargo, el recíproco del Teorema 2.2.9 no se cumple. Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 2.2.10. Sean $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $p = (0, 1)$. La unión de los segmentos rectilíneos que van del punto p a cada uno de los elementos de X forman un continuo. Este continuo se conoce como *el abanico armónico* y tiene la propiedad de ser semilocalmente conexo en el punto x pero no localmente conexo en dicho punto. Ver la Figura 2.9.

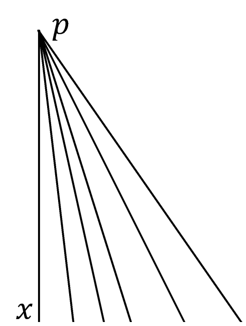

Figura 2.9: Abanico Armónico

La siguiente clase de continuos a estudiar, es la clase de los continuos conexos en pequeño. Al igual que se hizo con las dos clases de continuos revisadas hasta el momento, se establece una relación entre esta nueva clase de continuos y las dos anteriores.

Definición 2.2.11. Sean X un continuo y $x \in X$. Se dice que X es *conexo en pequeño* en x si para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$, existe un subcontinuo $W \subseteq X$ tal que $x \in \text{int}(W) \subseteq W \subseteq U$. El continuo X es *conexo en pequeño* si lo es en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 2.2.12. Sea F_ω el continuo que consta de los segmentos de recta en el plano que empiezan en el origen x, tienen pendiente $n-1$ y longitud $\frac{1}{n}$, ver la Figura 2.10. Se sigue que F_ω es conexo en pequeño.

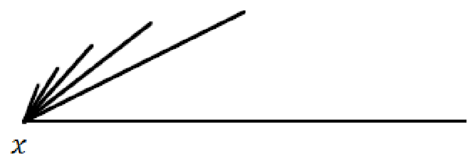

Figura 2.10: Continuo conexo en pequeño

Teorema 2.2.13. Sean X un continuo y $x \in X$. Si X es localmente conexo en x, entonces X es conexo en pequeño en x.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$. Por los Teorema 1.1.46 parte 3 y 1.1.47 parte 2, existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq Cl(V) \subseteq U$. Por otro lado, puesto que X es localmente conexo en x, existe un conjunto abierto y conexo W de X tal que $x \in W \subseteq V \subseteq Cl(V) \subseteq U$. Por el Teorema 1.1.35 parte 5, $Cl(W) \subseteq Cl(V)$, de aquí que $Cl(W) \subseteq U$. Así, por los Teoremas 1.2.8 y 1.2.20, el conjunto $K = Cl(W)$ es un continuo. Además $x \in \text{int}(K) \subseteq K \subseteq U$. Por lo tanto, X es conexo en pequeño en x. ■

A continuación se da un ejemplo en el que se muestra que el recíproco del Teorema 2.2.13 no es verdadero.

Ejemplo 2.2.14. Sea X una sucesión de abanicos armónicos, convergente al punto p. Ver la Figura 2.11. Luego, X es conexo en pequeño en p y no es localmente conexo en tal punto. [16]

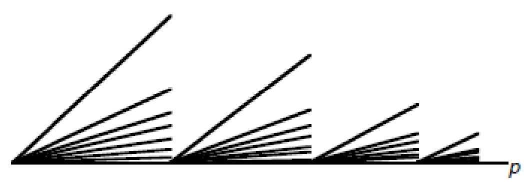

Figura 2.11: Conexo en pequeño en p

Sin embargo, se tiene que la conexidad en pequeño de un continuo, implica la conexidad local de este mismo.

Teorema 2.2.15. Sea X un continuo. Se sigue que X es conexo en pequeño si y sólo si X es localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Por el Teorema 2.2.13, X es conexo en pequeño.

Supongamos ahora que X es conexo en pequeño. Sean U un subconjunto abierto de X y C una componente de U. Sea $x \in C$. Como X es conexo en pequeño en x, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in \text{int}(W) \subseteq W \subseteq U$. En particular, W es un subconjunto conexo en U y así $W \subseteq C$. Luego $x \in \text{int}(W) \subseteq W \subseteq C$ y, consecuentemente, $x \in \text{int}(C)$. Por lo tanto, cada punto de C es un punto interior de C y, así, C es un subconjunto abierto. Por el Teorema 2.2.6, se tiene que X es localmente conexo. ■

Definición 2.2.16. Sea X un continuo. Se dice que X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$.

Observación 2.2.17. Si un continuo X es descomponible y A y B son dos subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.2.18. Un arco es un continuo descomponible. Ver la Figura 2.1.

Ejemplo 2.2.19. La 1-esfera es un continuo descomponible. Ver la Figura 2.2.

Ejemplo 2.2.20. El círculo de Varsovia es un continuo descomponible. Ver la Figura 2.5.

Ejemplo 2.2.21. Tomemos:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \cup ([1,2] \times \{0\}),$$

este continuo es conocido como *la paleta* y es un continuo descomponible.

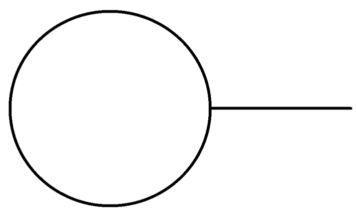

Figura 2.12: Paleta

Definición 2.2.22. Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible.

El concepto de continuo indescomponible aunque fácil de enunciar, no es fácil de ver que estos conjuntos realmente existen. En [14] se describen varios de los ejemplos originales de continuos indescomponibles.

Definición 2.2.23. Sea X un continuo. Se dice que X es *libremente descomponible* si para cualesquiera dos puntos a y b de X con a distinto de b, existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$.

Ejemplo 2.2.24. Consideremos el continuo del Ejemplo 2.2.12. No es difícil verificar que F_ω es un continuo libremente descomponible. Ver la Figura 2.10.

La Definición 2.2.23 es un caso particular de la definición que a continuación presentamos.

Definición 2.2.25. Sea X un continuo. Se dice que X es *libremente descomponible con respecto a puntos y subcontinuos* si para cada subcontinuo C de X y cada punto $x \in X \setminus C$, existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $x \in A \setminus B$ y $C \subseteq B \setminus A$.

Ejemplo 2.2.26. Sean, para cada $i \in \mathbb{N}$:

$$H_i = \left\{ \left(\frac{k}{2^{i+1}}, r \right) : 0 \leq k \leq 2^{i+1},\, k \in \mathbb{N},\, k\,\text{impar},\, r \in \left[0, \frac{1}{i}\right] \right\}$$

y:

$$H_0 = \{0,1\} \times [0,1].$$

El siguiente conjunto es un continuo libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos:

$$\mathcal{H} = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \right) \cup ([0,1] \times \{0\})$$

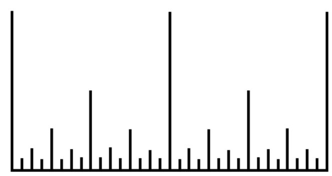

Figura 2.13: Continuo $\mathcal{H}$

Definición 2.2.27. Sean X un continuo, K un subconjunto de X y $p \in X \backslash K$. Se dice que X es *aposindético en* p con respecto al subconjunto K si existe un subcontinuo H de X tal que $p \in \operatorname{int}(H) \subseteq H \subseteq X \backslash K$.

Ejemplo 2.2.28. El continuo $X = [0,1]$ es aposindético en el punto $p = \frac{1}{4}$ respecto al subconjunto K de X. En la Figura 2.14 al conjunto K lo representamos con una doble línea. Existe el subcontinuo H de X, el cual está representado con la línea delgada y se cumple que $p \in \operatorname{int}(H) \subseteq H \subseteq X \backslash K$. Así, X es aposindético en p con respecto al subconjunto K.

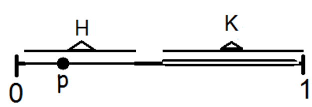

Figura 2.14: Continuo aposindético en el punto p respecto al subconjunto K

Definición 2.2.29. Sean X un continuo y x y y puntos distintos en X. Se dice que X es *aposindético en* x *con respecto a* y si existe un subcontinuo K de X tal que $x \in \operatorname{int}(K)$ y $y \in X \backslash K$. El continuo X es *aposindético en* x si X es aposindético en x con respecto a cualquier otro punto de $X \backslash \{x\}$. Se dice que X es *aposindético* si es aposindético en todo punto de X.

Ejemplo 2.2.30. Sean X la curva senoidal del topólogo, J el conjunto $\{0\} \times [-1,1]$, p y r puntos de J y q un punto en X que no está en J. Luego, X es aposindético en q y no es aposindético en p con respecto de r. Ver la Figura 2.15.

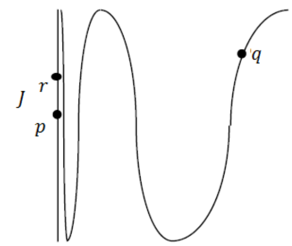

Figura 2.15: Continuo aposindético en q

Es momento de ver la relación que hay entre las clases de continuos definidas anteriormente.

Teorema 2.2.31. Sea (X, d) un continuo. X es libremente descomponible si y sólo si X es aposindético.

Demostración. Supongamos que X es libremente descomponible. Sean $x \in X$ y $y \in X\setminus\{x\}$. Como X es libremente descomponible, existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $x \in A\setminus B$ y $y \in B\setminus A$. Notemos que $A\setminus B = X\setminus B$. De aquí que $A\setminus B$ es abierto, más aún, como $A\setminus B \subseteq A$, entonces $A\setminus B \subseteq \text{int}(A)$. Así $x \in \text{int}(A)$ y $y \in B\setminus A = X\setminus A$. Por lo tanto, X es aposindético en x con respecto a y. Ya que x y y fueron arbitrarios, X es aposindético.

Ahora supongamos que X es aposindético. Sean a y b puntos distintos de X. Puesto que X es aposindético en a, existe un subcontinuo H de X tal que

$$a \in \text{int}(H) \subseteq H \subseteq X\setminus\{b\}. \tag{2.2.1}$$

Como X es aposindético en b, existe un subcontinuo K de X tal que

$$b \in \text{int}(K) \subseteq K \subseteq X\setminus\{a\}. \tag{2.2.2}$$

De (2.2.1), se tiene que existe un conjunto abierto U_1 en X tal que $a \in U_1 \subseteq H$ y de (2.2.2) se tiene que existe un conjunto abierto V_1 en X tal que $b \in V_1 \subseteq K$. Por otro lado, puesto que $a \notin K$, por el Teorema 1.1.36, $d(a, K) = \epsilon > 0$. Así, $B^d\left(a, \frac{\epsilon}{2}\right) \subseteq H\setminus K$. De manera similar, como $b \notin H$, por el Teorema 1.1.36, $d(b, H) = \alpha > 0$. Así, $B^d\left(b, \frac{\alpha}{2}\right) \subseteq K\setminus H$.

Definamos $U = U_1 \cap B^d\left(a, \frac{\epsilon}{2}\right)$ y $V = V_1 \cap B^d\left(b, \frac{\alpha}{2}\right)$. Luego, $H \cap V = K \cap U = \emptyset$. Sean H_1 la componente de $X\setminus V$ que contiene a H y K_1 la componente de $X\setminus U$ que contiene a K. Supongamos que $H_1 \cup K_1 \neq X$, es decir, $L = X\setminus(H_1 \cup K_1) \neq \emptyset$. Como V es un subconjunto de K, $H_1 \cup Cl(L)$ es un subconjunto cerrado de $X\setminus V$ que contiene a H_1 como subconjunto propio. Por lo tanto, $H_1 \cup Cl(L)$ es la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos, H_2 y L_1, donde H_2 contiene al continuo H_1. Luego, $K_1 \cup L_1$ es un subconjunto cerrado de $X\setminus U$ que contiene a K_1 como subconjunto propio. Consecuentemente, $K_1 \cup L_1$ es la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos K_2 y L_2, donde K_2 contiene a K_1. Así, X es la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos $(H_2 \cup K_2)$ y L_2, lo cual contradice la conexidad de X. Por lo tanto, $X = H_1 \cup K_1$, tal que $a \in H_1\setminus K_1$ y $b \in K_1\setminus H_1$. Así, X es libremente descomponible. ■

Teorema 2.2.32. Sea X un continuo. X es aposindético si y sólo si X es semilocalmente conexo.

Demostración. Supongamos que X es aposindético. Sean $p \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Luego, para cada punto $x \in X\backslash U$, existe un subcontinuo H_x de X tal que $x \in \text{int}(H_x)$ y $p \in X\backslash H_x$. Notemos que:

$$X\backslash U \subseteq \bigcup \{\text{int}(H_x) : x \in X\backslash U\}.$$

Como X es compacto y $X\backslash U$ es cerrado, del Teorema 1.2.20, $X\backslash U$ es compacto. Así, existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X\backslash U$ tales que:

$$X\backslash U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \text{int}(H_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{xi}$$

Sea $V = X\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}\right)$. Notemos que V es un subconjunto abierto de X tal que $p \in V \subseteq U$ y que, además, $X\backslash V$ tiene un número finito de componentes. Por lo tanto, X es semilocalmente conexo en p. Como $p \in X$ fue arbitrario, se tiene que X es semilocalmente conexo.

Ahora supongamos que X es semilocalmente conexo. Sean x y $y \in X$. Buscamos verificar que X es aposindético en x con respecto a y. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $y \in U \subset X\backslash\{x\}$. Por el Teorema 1.1.47 partes 1 y 2, existe un subconjunto abierto U' de X tal que $y \in U' \subseteq Cl(U') \subset U$. Puesto que X es semilocalmente conexo, existe un subconjunto abierto V de X tal que $y \in V \subset U'$ y tal que $X\backslash V$ tiene un número finito de componentes. Luego, por el Teorema 2.1.10, x está en el interior de la componente de $X\backslash V$ que lo contiene. Por lo tanto, X es aposindético en X con respecto a y. Como x y y fueron arbitrarios, se sigue que X es aposindético. ■

De los Teoremas 2.2.32 y 2.2.31, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.33. Sea X un continuo. Luego, X es semilocalmente conexo si y sólo si X es libremente descomponible.

Demostración. Por el Teorema 2.2.32, X es semilocalmente conexo si y sólo si X es aposindético y, por el Teorema 2.2.31, X es aposindético si y sólo si X es libremente descomponible. ■

Como una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.2.9 y 2.2.32, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.34. Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces X es aposindético.

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Por el Teorema 2.2.9, X es semilocalmente conexo. Luego, por el Teorema 2.2.32, X es aposindético. ■

Sin embargo, el recíproco del Teorema 2.2.34 no es verdadero. Veamos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.35. Consideremos el continuo de la Figura 2.11. Este continuo es aposindético en p, pero no es localmente conexo en tal punto.

Definición 2.2.36. Sean X un continuo y $p \in X$. Se dice que X es *aposindético por continuos en* p si X es aposindético en p con respecto a cada subcontinuo de X que no contiene a p. Si X es aposindético por continuos en cada punto de X, se dice que X es *aposindético por continuos*.

Ejemplo 2.2.37. El continuo de la Figura 2.13 es aposindético por continuos.

Aunque para la mayoría de los lectores, el siguiente resultado no necesita de prueba, en este trabajo, hemos decidido incluirla.

Teorema 2.2.38. Todo continuo aposindético por continuos es aposindético.

Demostración. Sean X un continuo aposindético por continuos y x y $y \in X$ tales que $x \neq y$. Puesto que $\{y\}$ es un subcontinuo de X y X es aposindético por continuos en x, se sigue que X es aposindético en x respecto a y. Como y y x se tomaron arbitrarios, se tiene que X es aposindético. ■

La siguiente definición es importante para la demostración de los Teoremas 2.2.40 y 2.2.41.

Definición 2.2.39. Sean X un espacio métrico y compacto y A un subconjunto de X. Definimos a $T(A)$ como el conjunto que satisface:
$X \backslash T(A) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo W de X tal que}\, x \in \text{int}(W)\, \text{y}\, W \cap A = \emptyset\}$.

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [9].

Teorema 2.2.40. Sean X un continuo y $p \in X$. Si $T(\{p\}) = \{p\}$ y si para cada subcontinuo W de X que no contiene a p, $p \notin T(W)$, entonces X es conexo en pequeño en el punto p.

Teorema 2.2.41. Sea X un continuo. X es localmente conexo si y sólo si X es aposindético por continuos.

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean $x \in X$ y K un subcontinuo en X tal que $x \in X \backslash K$. Luego, existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $U \subseteq X \backslash K$. Por el Teorema 1.1.47 parte 2, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subseteq Cl(V) \subseteq U$. Así, por hipótesis, existe subconjunto abierto y conexo W de X tal que $x \in W \subseteq V \subseteq Cl(V) \subseteq U$. Sea $H = Cl(W)$. Notemos que H es un subcontinuo de X tal que $x \in \text{int}(H) \subseteq H \subseteq U \subseteq X \backslash K$. Por lo tanto, X es aposindético por continuos en x. Como x se tomó arbitrario, se tiene que X es aposindético por continuos en cada uno de sus puntos. Por lo tanto, X es aposindético por continuos.

Ahora supongamos que X es aposindético por continuos, veamos que X es localmente conexo. Para esta parte de la demostración se utilizarán los Teoremas 2.2.15 y 2.2.40. Sea $p \in X$. Notemos que para cada $y \in X \backslash \{p\}$ el subcontinuo $\{p\}$ cumple que $y \notin \{p\}$. Luego, por hipótesis, existe un subcontinuo H de X tal que $y \in \text{int}(H) \subseteq H \subseteq X \backslash \{p\}$. Así, $X \backslash T(\{p\}) = X \backslash \{p\}$, por lo tanto $T(\{p\}) = \{p\}$.

Por otro lado, sea W un subcontinuo de X tal que $p \notin W$. Luego, existe un subcontinuo H de X tal que $p \in \text{int}(H) \subseteq H \subseteq X \backslash W$. Así, $p \in X \backslash W$. De aquí que $p \notin T(W)$. Luego, por el Teorema 2.2.40, X es conexo en pequeño en el punto p. Como p fue arbitrario, tenemos que X es conexo en pequeño. Del Teorema 2.2.15, se sigue que X es localmente conexo. ■

La gran mayoría de las funciones que en esta tesis estaremos trabajando, se definen en la siguiente sección, pero puesto que en la demostración del Teorema 2.2.44 las funciones mónotonas juegan un papel importante, nos hemos visto obligados a adelantarnos con la presentación de esta clase de funciones.

Definición 2.2.42. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Se dice que f es *monótona*, si para cada y en Y, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.

Una caracterización importante de las funciones monótonas que nos servirá para verificar algunos de los resultados que se verán en la siguiente sección es el que se muestra a continuació.

Teorema 2.2.43. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. La función f es monótona si y sólo si para cada subcontinuo B de Y, se tiene que $f^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X.

Demostración. Supongamos que f es una función monótona. Sea B un subcontinuo de Y. Veamos que $f^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X. Por el Teorema 1.1.42, parte 3. Se tiene que $f^{-1}(B)$ es cerrado. Luego, por el Teorema 1.2.20, $f^{-1}(B)$ es compacto. Ahora, por el Teorema 1.1.9, $f^{-1}(B)$ es no vacío. Resta probar que $f^{-1}(B)$ es conexo. Supongamos que no lo es. Así, existen conjuntos H y K separados y no vacíos en X tales que $f^{-1}(B) = H \cup K$. Como f es monótona, para cada $b \in B$, $f^{-1}(b)$ es conexo. Puesto que $f^{-1}(b) \subset f^{-1}(B)$, por Teorema 1.2.9, se sigue que $f^{-1}(b) \subset H$ o bien $f^{-1}(b) \subset K$. Sean $M = \{b \in B : f^{-1}(b) \subset H\}$ y $N = \{b \in B : f^{-1}(b) \subset K\}$. Notemos que:

$$B = M \cup N.$$

Ahora, como $H \neq \emptyset$, podemos fijarnos en $x \in H$. De aquí que $x \in f^{-1}(B)$, así, $f(x) \in B$. Luego, $f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(B) = H \cup K$. Puesto que f es monótona, $f^{-1}(f(x))$ es conexo, así, por el Teorema 1.2.9, $f^{-1}(f(x)) \subset H$. Luego, por la definición de M, se tiene que $f(x) \in M$. Por lo tanto, $M \neq \emptyset$. De manera similar se prueba que $N \neq \emptyset$. Ahora vamos a probar que M y N son conjuntos separados. Probaremos que $Cl(M) \cap N = \emptyset$ y de manera similar se prueba que $M \cap Cl(N) = \emptyset$.

Supongamos que $Cl(M) \cap N \neq \emptyset$. Sea $y \in Cl(M) \cap N$. Por Teorema 1.1.39, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M tal que $\lim y_n = y$. Además, por la definición de N, $f^{-1}(y) \subset K$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(y_n) \subset H$, $\lim y_n = y$ y $f^{-1}(y) \subset K$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in f^{-1}(y_n) \subset H \subset X$. Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como X es compacto, por el Teorema 1.2.21, existen $x \in X$ y una subsucesión $\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim x_{n_l} = x$. Puesto que $\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty} \subset H$, se tiene que $x \in Cl(H)$. Por otro lado, como f es continua y $\lim x_{n_l} = x$, por el Teorema 1.1.41, se sigue que $\lim f(x_{n_l}) = f(x)$. Dado que $f(x_{n_l}) = y_{n_l}$, se tiene que $\{y_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim y_{n_l} = f(x)$. Además, $\lim y_n = y$, de manera que $f(x) = y$. Así, $x \in f^{-1}(y)$. Puesto que $f^{-1}(y) \subset K$, se tiene que $x \in K$. Así que $x \in Cl(H) \cap K$. Lo cual es una contradicción, pues H y K son separados en X. Esta contradicción surge de suponer que $Cl(M) \cap N \neq \emptyset$, por lo tanto $Cl(M) \cap N = \emptyset$. Hemos visto que $B = M \cup N$ y que M y N están separados en Y, esto es, B no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f^{-1}(B)$ es conexo. Así, $f^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X.

Para la otra parte de la demostración, es suficiente con notar que para cada $y \in Y$, $\{y\}$ es un continuo. ■

Teorema 2.2.44. Sea X un continuo. X es localmente conexo si y sólo si X es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos.

Demostración. Supongamos que X es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos. Sean C un subcontinuo de X y $p \in X$ tal que $p \notin C$. Como X es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos, existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $p \in A \setminus B$ y $C \subseteq B \setminus A$. Así, X es aposindético por continuos. Por el Teorema 2.2.41, X es localmente conexo.

Ahora supongamos que X es localmente conexo. Sean C un subcontinuo de X y $a \in X \backslash C$. Consideremos $X/\mathcal{D}_C = \{\{x\} : x \in X \backslash C\} \cup \{C\}$. Luego, por el Teorema 2.1.12, el espacio cociente $X/\mathcal{D}_C$ es un continuo. Por el Lema 1.2.7 de [16, pág. 9], la función $q : X \to X/\mathcal{D}_C$ es continua. Notemos que q es una función monótona. En efecto, dado $A \in X/\mathcal{D}_C$, se tiene que $A = \{x\}$ con $x \in X \backslash C$ o $A = C$. Si $A = \{x\}$, entonces $q^{-1}(A) = \{x\}$, así, $q^{-1}(A)$ es conexo. Si $A = C$, entonces $q^{-1}(A) = C$, por hipótesis, C es conexo. Por lo tanto, q es una función monótona.

Por la Proposición 8.16 de [20, pág.127], como X es localmente conexo, $X/\mathcal{D}_C$ es localmente conexo. Así, por el Teorema 2.2.9 y el Teorema 2.2.33, el espacio $X/\mathcal{D}_C$ es libremente descomponible. De aquí, existen subcontinuos propios $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $X/\mathcal{D}_C$ tales que $X/\mathcal{D}_C = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\{a\} \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$.

Así, por el Teorema 2.2.43, $q^{-1}(\mathcal{A})$ y $q^{-1}(\mathcal{B})$ son subcontinuos propios de X tales que $X = q^{-1}(X \backslash C) = q^{-1}(\mathcal{A}) \cup q^{-1}(\mathcal{B})$, $a \in q^{-1}(\mathcal{A}) \backslash q^{-1}(\mathcal{B})$ y $C \subseteq q^{-1}(\mathcal{B}) \backslash q^{-1}(\mathcal{A})$. Así, X es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos. ■

Para finalizar esta sección, en el diagrama de la Figura 2.16 resumimos las relaciones obtenidas entre las clases de continuos revisadas.

Por cuestiones prácticas, en el siguiente diagrama, denotaremos a los continuos libremente descomponibles con CLD y a los continuos libremente descomponibles respecto a puntos y subcontinuos con LDRPS.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{Conexo en pequeño} \arrow[d, leftrightarrow] & \\
 & \text{Semilocalmente conexo} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] & \text{Localmente conexo} \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{LDRPS} \\
\text{CLD} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Aposindético} & \text{Aposindético por continuos} \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.16: Relaciones entre clases de continuos

2.3. Clases de Funciones Entre Continuos

Una herramienta importante en el estudio de los continuos, son ciertas clases de funciones continuas entre ellos, las cuales muchas veces nos ayudan a obtener información sobre estos espacios. En [1], se estudian las relaciones entre las funciones monótonas, abiertas, casi interiores, MO, OM, confluentes, casi monótonas, débilmente monótonas y débilmente confluentes. En este trabajo, además de tratar con las clases de funciones ya mencionadas, se introducen nuevas clases de funciones entre continuos: funciones simples, ligeras, homeomorfismos, semiabiertas, casi monótonas, semiconfluentes, empalmantes y funciones atriódicas. Estudiamos, si no todas, por lo menos las relaciones más importantes que hay entre algunas de ellas. Sin más introducción, pasemos a revisar la definición de cada una de las funciones mencionadas.

Definición 2.3.1. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Se dice que f es:

1. *abierta*, si para cada abierto U de X, se tiene que $f(U)$ es abierto en Y.

2. *atriódica*, si para cada subcontinuo Q de Y, existen dos componentes C y D de $f^{-1}(Q)$ tales que $f(C) \cup f(D) = Q$ y para cada componente E de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(E) = Q$ o $f(E) \subseteq f(C)$ o $f(E) \subseteq f(D)$.

3. *casi interior* en el punto $y \in Y$, si para cada conjunto abierto U de X, que contenga alguna componente de $f^{-1}(y)$, se tiene que $y \in \text{int}(f(U))$. Decimos que f es *casi interior*, si es casi interior en cada punto de Y.

4. *casi monótona*, si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, el conjunto $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y si D es una componente de $f^{-1}(Q)$, entonces $f(D) = Q$.

5. *confluente*, si para cada subcontinuo B de Y y para cada componente C de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) = B$.

6. *débilmente confluente*, si para cada subcontinuo B de Y, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$.

7. *débilmente monótona*, si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío y para cada componente D de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(D) = Q$.

8. *empalmante*, si para cada subcontinuo B de Y y para cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$.

9. *función MO*, si existe un continuo Z y funciones, $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$, tales que $f = g \circ h$, donde g es monótona y h es abierta.

10. *función OM*, si existe un continuo Z y funciones, $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$, tales que $f = g \circ h$, donde g es abierta y h es monótona.

11. *homeomorfismo*, si f es inyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.

12. *ligera*, si para cada $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo.

13. *monótona*, si para cada y en Y, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.

14. *semiabierta*, si para cada abierto no vacío U de X, $\text{int}(f(U)) \neq \emptyset$.

15. *semiconfluente*, si para cada subcontinuo B de Y y para cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \subseteq f(D)$ o $f(D) \subseteq f(C)$.

16. *simple*, si para cada $y \in Y$, se tiene que $|f^{-1}(y)| \leq 2$.

Ahora estamos listos para empezar a establecer relaciones entre las funciones definidas anteriormente. Comenzamos con las funciones monótonas.

Teorema 2.3.2. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función monótona, entonces f es casi monótona.

Demostración. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Por hipótesis y por el Teorema 2.2.43, $f^{-1}(Q)$ es conexo, es decir, $f^{-1}(Q)$ tiene una única componente $D = f^{-1}(Q)$. Así, $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes. En virtud del Teorema 1.1.9, parte 3, $f(D) = Q$. ■

En el siguiente ejemplo, se presenta una función casi monótona, pero no monótona, lo cual demuestra que el recíproco del Teorema 2.3.2 no es verdadero.

Ejemplo 2.3.3. Definamos la función $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ por $f(t) = |t|$, para $t \in [-1, 1]$. Luego, f es casi monótona pero no es monótona. En efecto, pues cada subcontinuo de $[0, 1]$ tiene a lo más dos componentes, en particular los subcontinuos con interior no vacío. Y si C es una componente de $f^{-1}(B)$, entonces $f(C) = B$. No es monótona, pues para el continuo $\{1\}$ de $[0, 1]$, se tiene que $f^{-1}(\{1\})$ tiene dos componentes $C_1 = \{-1\}$ y $C_2 = \{1\}$. A continuación, se muestra la gráfica de la función.

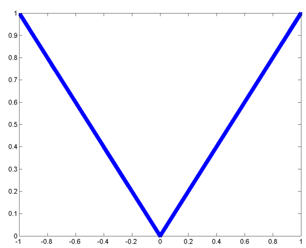

Figura 2.17: Gráfica de f

Teorema 2.3.4. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función casi monótona, entonces f es débilmente monótona.

Demostración. Sean Q un subcontinuo de Y con interior no vacío y D_1 una componente de $f^{-1}(Q)$. Por hipótesis, el conjunto $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y si D es una componente de $f^{-1}(Q)$, entonces $f(D) = Q$. Por lo tanto, $f(D_1) = Q$ y así, la función f es débilmente monótona. ■

En el Ejemplo 2.3.5, se define una función, la cual es débilmente monótona, pero que no es casi monótona, ni monótona. Así, se verifica que el recíproco del Teorema 2.3.4 no se cumple.

Ejemplo 2.3.5. Sea el punto $c = (1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $c_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n c$ denota el segmento de recta que une los puntos c_n y c. Pongamos $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} c_n c \right)$ y $Y = [0, 1]$. Sea $l : X \to Y$ tal que $l((x, y)) = x$, para cada $(x, y) \in X$. Ver la Figura 2.18 *a*). Es claro que l es una función débilmente monótona. Veamos que la función l no es casi monótona.
Tomemos al subcontinuo $B = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ de Y. Notemos que $\mathrm{int}(B) \neq \emptyset$. Además, $l^{-1}(B)$ tiene una cantidad infinita de componentes. Consecuentemente, l no es casi monótona. Así, por el Teorema 2.3.2, l no es monótona. Ver la Figura 2.18 *b*).

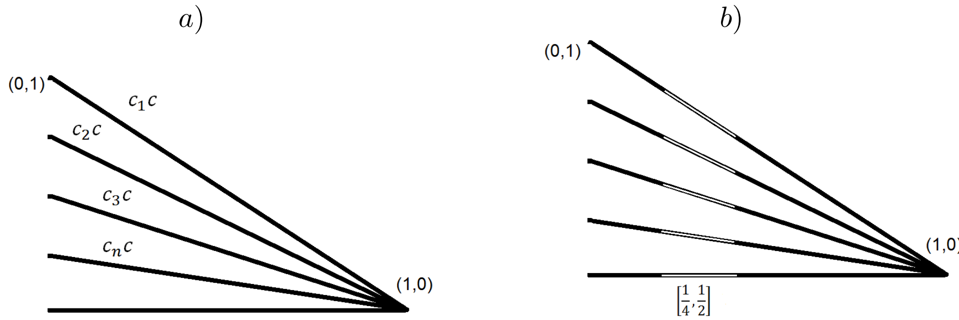

Figura 2.18: Continuo X

En virtud de los Teorema 2.3.2 y 2.3.4 y por transitividad, se tiene que, toda función monótona es débilmente monótona.

Veamos ahora, cómo se comportan las funciones MO con respecto a las funciones monótonas y las funciones abiertas.

Teorema 2.3.6. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es monótona, entonces f es una función MO.

Demostración. Sea $h : X \to X$ tal que $h(x) = x$, para cada $x \in X$. Pongamos $g = f$, se tiene que $f = g \circ h$, donde g es monótona y h es abierta. Así, f es una función MO. ■

Teorema 2.3.7. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es abierta, entonces f es una función MO.

Demostración. Sea $g : Y \to Y$ tal que $g(y) = y$, para cada $y \in Y$. Es claro que g es monótona. Pongamos $h = f$, se tiene que $f = g \circ h$, donde g es monótona y h es abierta. Así, f es una función MO. ■

A continuación, definimos una función, la cual prueba que el recíproco de los Teoremas 2.3.6 y 2.3.7 no son verdaderos.

Ejemplo 2.3.8. Definamos la función $f : [-2, 2] \to [0, 1]$ como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} |t| - 1, & \text{para} \quad 1 \leq |t| \leq 2, \\ 0, & \text{para} \quad |t| \leq 1. \end{cases}$$

En la Figura 2.19 se muestra la gráfica de f.

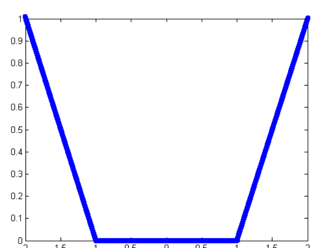

Figura 2.19: Gráfica de f

Esta función es una función MO, pero no es ni abierta ni monótona. En efecto, si definimos la función $h : [-2, 2] \to [0, 2]$ como:

$$h(t) = |t|,$$

y la función $g : [0, 2] \to [0, 1]$ como:

$$g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{para} \quad 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La gráfica de la función g se muestra en la Figura 2.20.

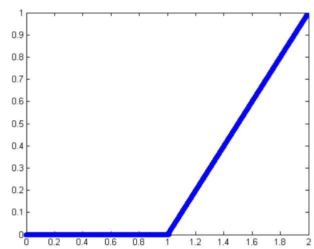

Figura 2.20: Gráfica de g

Es fácil verificar que $f = g \circ h$, donde g es una función monótona y h una función abierta, de aquí que f es una función MO. Ahora, que la función f no sea monótona, es claro y, para ver que no es abierta, basta con notar que para el abierto $(-1, 1) \subset [-2, 2]$, tenemos que $f((-1, 1)) = \{0\}$, el cual conjunto no es un conjunto abierto en el continuo $[0, 1]$.

Si recordamos la definición de función abierta y semiabierta, es natural pensar que la primera implica la segunda, ahora veremos que en efecto, se tiene esa relación y aunque para la mayoría de los lectores este hecho no requiera de demostración, en este trabajo la hemos incluido.

Teorema 2.3.9. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función abierta, entonces f es semiabierta.

Demostración. Supongamos que f es abierta. Sea U un conjunto abierto no vacío de X. Luego, $f(U)$ es un conjunto abierto no vacío. De aquí, por el Teorema 1.1.33, $f(U) = \mathrm{int}(f(U)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es una función semiabierta. ∎

A continuación, se da el ejemplo de una función semiabierta pero que no es abierta.

Ejemplo 2.3.10. Sean $C = \{(0, 1)\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $p = (0, 0)$. Tomemos X como la unión de los segmentos rectilíneos que van del punto p a cada uno de los elementos de C y $Y = [0, 1]$. Definamos a la función $f : X \to Y$ como sigue, $f((x, y)) = x$, para cada $(x, y) \in X$. Luego, f es una función semiabierta pero que no es abierta. En efecto, si consideramos el abierto $U = \left(\left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right) \times \left(\frac{11}{12}, \frac{13}{12}\right)\right) \cap X$ de X, se tiene que $f(U) = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right]$ el cual no es un conjunto abierto en Y. Ver la Figura 2.21.

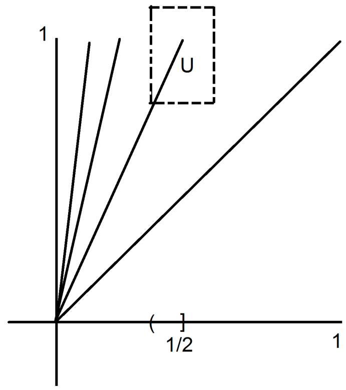

Figura 2.21: Gráfica de f

Para los Teoremas 2.3.11, 2.3.12, 2.3.14, 2.3.15 y 2.3.16, sólo se da un bosquejo de sus demostraciones, ya que a diferencia de los teoremas anteriores y los que le siguen en esta sección, se necesita profundizar más en el estudio de dichas funciones para poder dar una demostración detallada. El lector interesado puede consultar los detalles en [1].

Teorema 2.3.11. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Se sigue que f es casi interior si y sólo si f es OM.

Demostración. Supongamos que f es una función OM. Luego, existen un continuo Z y funciones $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ tales que $f = g \circ h$, donde g es abierta y h es monótona. Así, por [1, Teorema 3.5, pág. 83], se tiene que h y g son casi interiores. Luego, por [1, Teorema 5.5, pág. 88], f es una función casi interior.

Ahora, supongamos que f es casi interior. Por [1, Teorema 4.8, pág. 87], existen un continuo Z y funciones $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ tales que $f = g \circ h$, donde h es monótona y g es ligera. Así, por [1, Teorema 4.6, pág. 86], g es abierta. Por lo tanto, f es una función OM. ■

Teorema 2.3.12. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es MO, entonces f es OM.

Demostración. Si f es una función MO, entonces existen un continuo Z y funciones $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ tales que $f = g \circ h$, donde g es monótona y h es abierta. Luego, por [1, Teorema 3.5, pág. 83], se tiene que las funciones h y g son casi interiores. Ahora, por [1, Teorema 5.5, pág. 88], $g \circ h$ es una función casi interior. Finalmente, por el Teorema 2.3.11, f es una función OM. ■

Ejemplo 2.3.13. Definamos la función $f : [0,1] \to [0,1]$ como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} 3t, & \text{para} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ 2-3t, & \text{para} \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \text{para} \quad \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La gráfica de f se muestra en la Figura 2.22.

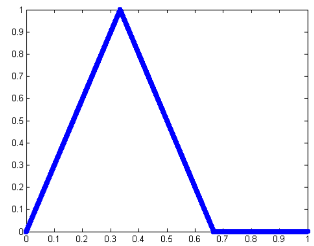

Figura 2.22: Gráfica de f

Luego, f es una función OM, pero no es MO. En efecto, si definimos la función $h:[0,1]\to[0,3]$ como:

$$h(t)=3t,$$

y la función $g:[0,3]\to[0,1]$ como:

$$g(x)=\begin{cases} x, & \text{para} \quad 0\le x\le 1,\\ 2-x, & \text{para} \quad 1\le x\le 2,\\ 0, & \text{para} \quad 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Es claro que $f=g\circ h$, donde g es una función abierta y h es monótona, así, f es una función OM.

Corolario 2.3.14. Sea $f:X\to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es MO, entonces f es casi interior.

Demostración. Supongamos que f es una función MO, por el Teorema 2.3.12, f es OM, luego por Teorema 2.3.11, f es casi interior. ∎

Teorema 2.3.15. Sea $f:X\to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es OM, entonces f es confluente.

Demostración. Supongamos que f es una función OM. Por el Teorema 2.3.11, f es casi interior. Luego, por [1, Teorema 4.9, pág. 87], f es confluente. ∎

En [1, Ejemplo 7.6, pág. 93], se define una función confluente, la cual no es OM.

Teorema 2.3.16. Sea $f:X\to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es MO, entonces f es una función confluente.

Demostración. Supongamos que f es una función MO. Por el Teorema 2.3.12, f es OM. Así, por Teorema 2.3.15, f es confluente. ∎

En [1, pág. 92], se da un ejemplo de que el recíproco del Teorema 2.3.16 no es verdadero.

Teorema 2.3.17. Sea $f:X\to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es confluente, entonces f es semiconfluente.

Demostración. Supongamos que f es confluente. Sean B un subcontinuo de Y y D_1 y D_2 componentes de $f^{-1}(B)$. Por hipótesis, $f(D_1) = B$ y $f(D_2) = B$. De aquí, $f(D_1) \subseteq f(D_2)$ y $f(D_2) \subseteq f(D_1)$. Por lo tanto, la función f es semiconfluente. ■

Con el siguiente ejemplo, se verifica que el recíproco del Teorema 2.3.17 no es verdadero.

Ejemplo 2.3.18. Definamos la función $f : [-1, 2] \to [0, 2]$ por $f(t) = |t|$, para $t \in [-1, 2]$. Se tiene que f es semiconfluente, pero no es confluente. Primero veamos que f es semiconfluente. Sea $B = [a, b]$ un subcontinuo de $[0, 2]$, se tienen tres casos:

1. Si $a \geq 1$ y $b \leq 2$, entonces $f^{-1}(B)$ tiene únicamente una componente, $C = [a, b]$ y $f(C) = B$.

2. Si $a \geq 0$ y $b \leq 1$, entonces $f^{-1}(B)$ tiene dos componente, $C_1 = [a, b]$ y $C_2 = [-b, -a]$, para este caso, se cumple que $f(C_1) = f(C_2)$.

3. Si $a < 1$ y $b > 1$, entonces $f^{-1}(B)$ tiene dos componentes, $C_1 = [a, 1]$ y $C_2 = [a, b]$ y se cumple que $f(C_1) \subseteq f(C_2)$.

Por lo tanto, f es semicunfluente. Para ver que f no es confluente, es suficiente con considerar el tercer caso, pues $f(C_1) \neq B$. La gráfica de f se muestra en la Figura 2.23.

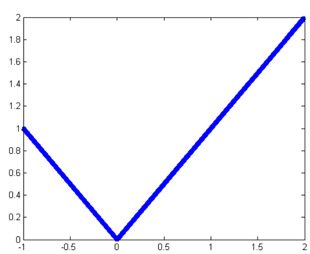

Figura 2.23: Gráfica de f

Teorema 2.3.19. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es semiconfluente, entonces f es débilmente confluente.

Demostración. Supongamos que f no es débilmente confluente. Así, existe un subcontinuo B de Y tal que para cada componente C de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \neq B$. Sean C y D componentes de $f^{-1}(B)$. Así $B \nsubseteq f(C)$ y $B \nsubseteq f(D)$. Ya que $f(C) \subseteq B$ y $f(D) \subseteq B$, se sigue que $f(D) \nsubseteq f(C)$ y $f(C) \nsubseteq f(D)$. Por lo tanto, f no es semiconfluente. ■

Ahora se da un ejemplo de una función débilmente confluente que no es semiconfluente, con lo cual se verifica que el recíproco del Teorema 2.3.19 no es verdadero.

Ejemplo 2.3.20. Definamos la función $f : [-2, 2] \to [-1, 1]$ por:

$$f(t) = \begin{cases} -||t+1| - 1|, & \text{para} \quad t \in [-2, 0], \\ || - t + 1| - 1|, & \text{para} \quad t \in [0, 2], \end{cases}$$

Es claro que f es débilmente confluente. Sin embargo, si consideramos el subcontinuo $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y las componentes $C_1 = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ y $C_2 = \left[t-2, -\frac{3}{2}\right]$ de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C_1) \nsubseteq f(C_2)$ y $f(C_2) \nsubseteq f(C_1)$, por lo tanto, f no es semiconfluente. En la Figura 2.24, se muestra la gráfica de f.

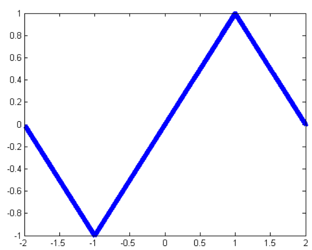

Figura 2.24: Gráfica de f

Notemos que por los Teorema 2.3.6 y 2.3.16, toda función monótona es confluente. Pero en el Ejemplo 2.3.3, f es una función confluente pero no monótona. Sin embargo, se tiene la siguiente relación.

Teorema 2.3.21. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función confluente, entonces f es débilmente monótona.

Demostración. Sean Q un subcontinuo de Y con interior no vacío y D una componente de $f^{-1}(Q)$. Como f es confluente, se tiene que $f(D) = Q$. Por lo tanto, la función f es una función débilmente monótona. ■

El recíproco del Teorema 2.3.21 no es verdadero. Esto se puede verificar en [1, Ejemplo 7.3, pág. 91].

Teorema 2.3.22. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es semiconfluente, entonces f es empalmante.

Demostración. Supongamos que f es semiconfluente. Sean B un subcontinuo de Y y C_1 y C_2 dos componentes de $f^{-1}(B)$. Si $f(C_1) \subset f(C_2)$, entonces $f(C_1) \cap f(C_2) \neq \emptyset$. Si $f(C_2) \subseteq f(C_1)$, entonces $f(C_2) \cap f(C_1) = f(C_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto, la función f es empalmante. ■

Ahora, presentamos un ejemplo de una función que es empalmante, pero no semiconfluente.

Ejemplo 2.3.23. Sean X un triángulo equilátero, Y un triodo simple inscrito en X cuyos puntos finales son los vértices de X y $f : X \to Y$ una función que colapsa X sobre Y. En la Figura 2.25 a), mostramos el dominio y codominio de la función f. El dominio de la función es la parte más obscura. Luego, f es una función empalmante la cual no es semiconfluente. En efecto, si consideramos el subcontinuo B como en la Figura 2.25 b), se tiene que $f(C_1) \nsubseteq f(C_2)$ y $f(C_2) \nsubseteq f(C_1)$, donde C_1 y C_2 son componentes de $f^{-1}(B)$.

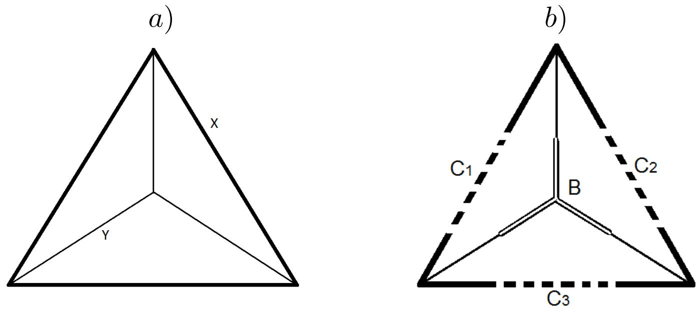

Figura 2.25: Dominio y codominio de f

Teorema 2.3.24. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es débilmente confluente, entonces f es atriódica.

Demostración. Supongamos que f es débilmente confluente. Sea Q un subcontinuo de Y. Por hipótesis, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$. Sea D cualquier otra componente de $f^{-1}(Q)$. Entonces $f(D) \subseteq Q = f(C)$. De aquí que $f(D) \cup f(C) = Q$. Sea E cualquier componente de $f^{-1}(Q)$. Consecuentemente, $E \subseteq f^{-1}(Q)$. Luego, $f(E) \subseteq Q = f(C)$. Por lo tanto, f es atriódica. ■

Como se ha venido haciendo, en el Ejemplo 2.3.25, se da una función con la cual se verifica que el recíproco del Teorema 2.3.24 no se cumple.

Ejemplo 2.3.25. Definamos la función $f : \left[0, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ por $f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$, para $t \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Luego, la función f es atriódica, pero no es débilmente confluente. La gráfica de la función se muestra en la Figura 2.26.

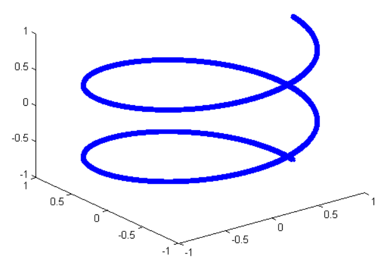

Figura 2.26: Gráfica de f

Teorema 2.3.26. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es homeomorfismo, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos que f no es monótona, luego existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es conexo. Sean D y C componentes distintas de $f^{-1}(y)$. Para $a \in D$ y $b \in C$, se tiene que $a \neq b$ y $f(a) = y = f(b)$. Luego, f no es inyectiva. Por lo tanto, f no es homeomorfismo. Así, se tiene el resultado. ■

El siguiente ejemplo muestra que una función monótona en general no es un homeomorfismo.

Ejemplo 2.3.27. Sean $X = \left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \cup \left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{1\}\right)$ y $Y = [0, 1]$. Consideremos la función $f : X \to Y$ tal que $f((x, y)) = x$, para cada (x, y) en X. Veamos que f es monótona. Sea $x \in Y$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, entonces $f^{-1}(\{x\}) = \left\{\left(x, \frac{1}{2}\right)\right\}$. Luego $f^{-1}(\{x\})$ es conexo.
2. Si $x = \frac{1}{2}$, entonces $f^{-1}(\{x\}) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, el cual es conexo.
3. Si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces $f^{-1}(\{x\}) = \{(x, 1)\}$. Así, $f^{-1}(\{x\})$ es conexo. Por lo tanto, f es monótona.

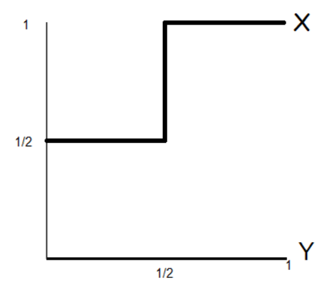

Figura 2.27: Gráfica de f

Ahora, sean $a = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $b = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in X$. Notemos que $f(a) = \frac{1}{2} = f(b)$, por lo tanto, f no es un homeomorfismo.

Teorema 2.3.28. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es homeomorfismo, entonces f es simple.

Demostración. Supongamos que f no es simple. Existe $y \in Y$ tal que $|f^{-1}(y)| > 2$. Sean $a, b \in f^{-1}(y)$ tal que $a \neq b$, luego, $f(a) = y = f(b)$. Por lo tanto, f no es inyectiva y consecuentemente f no es homeomorfismo. ■

El recíproco del Teorema 2.3.28 no es cierto.

Ejemplo 2.3.29. La función definida en el Ejemplo 2.3.3, es simple, pero no es homeomorfismo. En efecto, es simple pues para cada $y \in (0, 1]$, se cumple que $|f^{-1}(y)| = 2$ y para $y = 0$, $|f^{-1}(0)| = 1$. No es homeomorfismo, pues $f(1) = f(-1)$.

Teorema 2.3.30. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es homeomorfismo, entonces f es abierta.

Demostración. Supongamos que f es homeomorfismo. Esto es, tanto f como f^{-1} son continuas. Sea U un subconjunto abierto en X. Como f^{-1} es continua, por el Teorema 1.1.42, parte 2, $f(U)$ es un conjunto abierto en Y. Por lo tanto, f es abierta. ■

Existe una función abierta que no es un homeomorfismo.

Ejemplo 2.3.31. La función definida en el Ejemplo 2.3.5, es abierta, pero no es homeomorfismo. En efecto, para cada abierto U de X, se tiene que $f(U) = (a, b)$ o $f(U) = [0, b)$ o $f(U) = (a, 1]$, en cualquier caso se cumple que $f(U)$ es un abierto de $[0, 1]$.

Teorema 2.3.32. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es simple, entonces f es ligera.

Demostración. Supongamos que f es simple. Sea $y \in Y$, por hipótesis, $|f^{-1}(y)| \leq 2$. Así $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo. Por lo tanto, f es ligera. ■

Finalmente, una función ligera no necesariamente es simple. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.33. La función definida en el Ejemplo 2.3.5, es ligera, pero no es simple.

Como se hizo con las clases de continuos revisadas en la sección anterior, resumimos los resultados en cuanto a las relaciones entre clases de funciones en el diagrama de la Figura 2.28. Como podemos ver, la clase de homeomorfismos es la clase de funciones que implica todas las otras clases, estando después de estas las funciones monótonas.

$$\begin{tikzcd}
\text{Ligera} & \text{Simple} \arrow[l] & \text{Homeomorfismo} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \text{Monótona} \arrow[ddl] \arrow[dd] \\
& \text{Semiabierta} & \text{Abierta} \arrow[l] \arrow[d] & \\
& \text{Casi Interior} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{MO} \arrow[l] \arrow[d] & \text{Casi Monótona} \arrow[d] \\
& \text{OM} \arrow[r] & \text{Confluente} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Débilmente Monótona} \\
& & \text{Semiconfluente} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Empalmante} \\
& & \text{Débilmente Confluente} \arrow[r] & \text{Atriódica}
\end{tikzcd}$$

Figura 2.28: Relaciones entre clases de funciones

Después de los resultados revisados anteriormente, nos surgen las siguientes preguntas, ¿bajo qué condiciones una función casi monótona es monótona?, ¿existirán condiciones bajo las cuales una función confluente sea monótona?, preguntas como estas se responden más adelante.

Capítulo 3

Funciones Libremente Descomponibles

En 1979, G.R. Gordh, Jr. y C.B. Hughes [11] definen y estudian un tipo de funciones, las cuales denominaron funciones libremente descomponibles. Estas funciones son una generalización de las funciones monótonas y tienen la propiedad de preservar la conexidad local en límites inversos. A pesar de las importantes propiedades que cumplen estas funciones, a lo largo de la historia de las matemáticas, poco es el estudio que se tiene de ellas. En este capítulo presentamos a las funciones libremente descomponibles así como sus propiedades básicas y también se verán las relaciones con algunas de las funciones definidas en el capítulo anterior.

3.1. Propiedades Básicas

Comenzamos dando propiedades básicas de esta clase de funciones, para después poder establecer alguna relación con las funciones revisadas en el capítulo anterior.

Definición 3.1.1. Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Se dice que f es *libremente descomponible*, si para cada par de subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$.

Definición 3.1.2. Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Se dice que f es *fuertemente libremente descomponible*, si para cada par de subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos.

Notemos que en la Definición 3.1.2, está implícito el hecho de que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ además de ser conjuntos conexos, son cerrados, y consecuentemente compactos. Así, es natural pensar que estos dos conjuntos podrían jugar el papel de A' y B', respectivamente, en la Definición 3.1.1. Es así como surge nuestro primer resultado.

Teorema 3.1.3. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función fuertemente libremente descomponible, entonces f es libremente descomponible.

Demostración. Supongamos que f es una función fuertemente libremente descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Por ser f una función fuertemente libremente descomponible, se tiene que los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos. Además, como los conjuntos A y B son cerrados y f es continua, por Teorema 1.1.42, parte 3, los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son cerrados dentro del compacto X. Así por el Teorema 1.2.20, $f^{-1}(A)$ y

$f^{-1}(B)$ son conjuntos compactos. De aquí, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos de X. Por otro lado, notemos que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ y que $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ y $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ por Teorema 1.1.7. Sean $A' = f^{-1}(A)$ y $B' = f^{-1}(B)$. Así, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. Luego, f es una función libremente descomponible. ■

Sin embargo, el recíproco del Teorema 3.1.3 no es verdadero como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.4. Consideremos la función del Ejemplo 2.3.23. Primero veamos que la función es libremente descomponible. Esencialmente, tenemos tres tipos de subcontinuos en Y. Vamos a considerar estos tres casos.

1. Para el primer caso, veamos la Figura 3.1, a). Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Donde A está representado por la línea delgada y B es todo lo que está con una doble línea. Para este par de subcontinuos, existen los subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$. Donde A' es la línea gruesa y B' toda la línea punteada. Se tiene que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$.

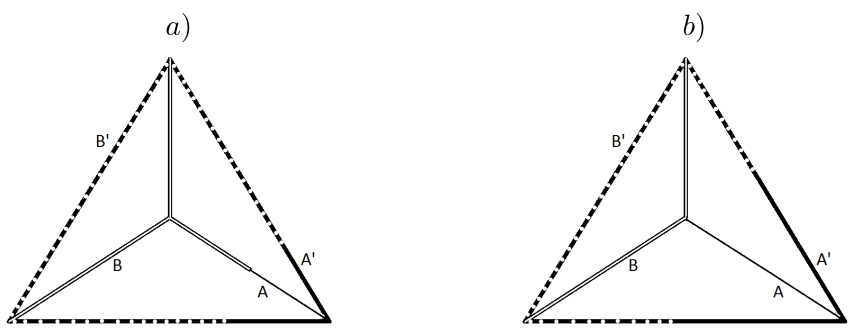

Figura 3.1: Casos 1 y 2

2. Si ahora a los subcontinuos propios A y B los consideramos como en la Figura 3.1, b). Donde A es la línea más delgada, B es la parte delimitada por la doble línea, A' es la línea más gruesa y B' es toda la línea punteada. En este caso tenemos que $Y = A \cup B$, $X = A' \cup B'$ y se cumple que $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$.

3. El último caso se muestra en la Figura 3.2. El conjunto A está representado por toda la línea punteada.

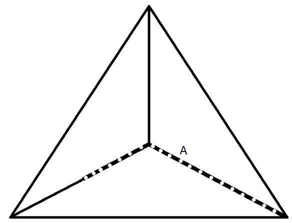

Figura 3.2: Caso 3

Para este último caso, los subcontinuos propios A y B tienen alguna de las formas de la Figura 3.3.

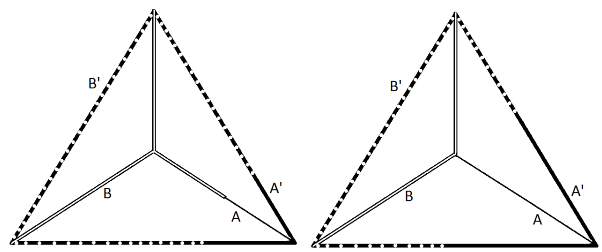

Figura 3.3: Caso 3

En cualquiera de los casos se cumple que $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. Así, la función f es libremente descomponible.

Para ver que la función no es fuertemente libremente descomponible, basta considerar los subcontinuos propios Q y P tales que $Y = Q \cup P$. Notar que $f^{-1}(Q) = D_1 \cup D_2$ no es conexo. Ver la Figura 3.4.

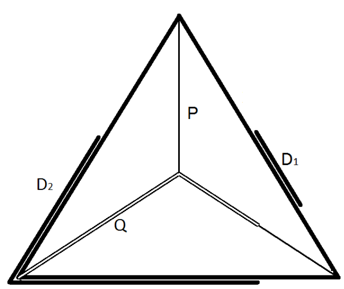

Figura 3.4: $f^{-1}(Q)$ no es un conjunto conexo

El Teorema 3.1.5, se da con la finalidad de justificar el Ejemplo 3.1.6.

Teorema 3.1.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función monótona, entonces f es fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Como f es una función monótona, por el Teorema 2.2.43, se cumple que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subconjuntos conexos de X. Así, se tiene que f es una función fuertemente libremente descomponible. ■

Ejemplo 3.1.6. Sabemos que la función del Ejemplo 2.3.27, es monótona, así, por el Teorema 3.1.5, f es una función fuertemente libremente descomponible. Por lo tanto, por el Teorema 3.1.3, f es libremente descomponible.

Seguramente ya se han planteado la siguiente pregunta, ¿la composición de funciones libremente descomponibles (fuertemente libremente descomponibles) es una función libremente descomponible (fuertemente libremente descomponible)? A continuación se da respuesta a esto.

Teorema 3.1.7. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre continuos. Si f y g son funciones libremente descomponibles, entonces $g \circ f$ es una función libremente descomponible.

Demostración. Supongamos que f y g son funciones libremente descomponibles. Notemos que $g \circ f : X \to Z$. Sean A y B subcontinuos propios de Z tales que $Z = A \cup B$. Por hipótesis, g es una función libremente descomponible, así, existen subcontinuos propios A_1 y B_1 de Y tales que $Y = A_1 \cup B_1$, $g(A_1) \subseteq A$ y $g(B_1) \subseteq B$. Como f es una función libremente descomponible, existen subcontinuos propios A_2 y B_2 de X tales que $X = A_2 \cup B_2$, $f(A_2) \subseteq A_1$ y $f(B_2) \subseteq B_1$. Así, para cada par de subcontinuos propios A y B de Z tales que $Z = A \cup B$, existen subcontinuos propios A_2 y B_2 de X tales que $X = A_2 \cup B_2$, $(g \circ f)(A_2) = g(f(A_2)) \subseteq g(A_1) \subseteq A$ y $(g \circ f)(B_2) = g(f(B_2)) \subseteq g(B_1) \subseteq B$. Por lo tanto, la función $g \circ f$ es una función libremente descomponible. ■

Teorema 3.1.8. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre continuos. Si f y g son funciones fuertemente libremente descomponibles, entonces $g \circ f$ es una función fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Supongamos que f y g son funciones fuertemente libremente descomponibles. Sean A y B subcontinuos propios de Z tales que $Z = A \cup B$. Por hipótesis, g es una función fuertemente libremente descomponible. De donde los conjuntos $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conexos. Notemos además que $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de Y tales que $Y = g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B)$. Como f es una función fuertemente libremente descomponible, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(A))$ y $f^{-1}(g^{-1}(B))$ son conjuntos conexos. Esto es, $(g \circ f)^{-1}(A)$ y $(g \circ f)^{-1}(B)$ son conjuntos conexos. Así, la función $g \circ f$ es fuertemente libremente descomponible. ■

Teorema 3.1.9. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre continuos. Si $g \circ f$ es una función libremente descomponible, entonces g es una función libremente descomponible.

Demostración. Supongamos que $g \circ f : X \to Z$ es libremente descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de Z tales que $Z = A \cup B$. Por hipótesis, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $(g \circ f)(A') \subseteq A$ y $(g \circ f)(B') \subseteq B$. Notemos que $Y = f(A') \cup f(B')$, así $g(f(A')) \subseteq A$ y $g(f(B')) \subseteq B$. De donde, para cada par de subcontinuos propios A y B de Z tales que $Z = A \cup B$, existen subcontinuos propios A' y B' de Y tales que $Y = f(A') \cup f(B')$, $g(f(A')) \subseteq A$ y $g(f(B')) \subseteq B$. De aquí, la función g es libremente descomponible. ■

Teorema 3.1.10. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre continuos. Si $g \circ f$ es una función fuertemente libremente descomponible, entonces g es una función fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Supongamos que la función $g \circ f : X \to Z$ es fuertemente libremente descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de Z tales que $Z = A \cup B$. Como $g \circ f$ es fuertemente libremente descomponible, los conjuntos $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ y $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ son conexos. Puesto que f es continua, por el Teorema 1.2.10, $f(f^{-1}(g^{-1}(A)))$ y $f(f^{-1}(g^{-1}(B)))$ son conexos. Por otro lado, como f es suprayectiva, por el Teorema 1.1.9, parte 3, $f(f^{-1}(g^{-1}(A))) = g^{-1}(A)$ y $f(f^{-1}(g^{-1}(B))) = g^{-1}(B)$. Consecuentemente, los conjuntos $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conexos. Por lo tanto, la función g es fuertemente libremente descomponible. ■

3.2. Relaciones con Otras Clases de Funciones Entre Continuos

En esta sección estudiamos las relaciones que hay entre las funciones definidas en la Sección 2.3, las funciones libremente descomponibles y las funciones fuertemente libremente descomponibles.

Comenzamos introduciendo las funciones a lo más mónotonas, con la finalidad de establecer una relación entre éstas y las funciones monótonas. También vemos la relación de estas nuevas funciones con las funciones casi monótonas. Todo esto con el propósito de completar nuestro diagrama de la Figura 2.28, con las funciones fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles puesto que son el motivo de este trabajo.

Definición 3.2.1. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Se dice que f es *a lo más monótona* si el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo, para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío.

Teorema 3.2.2. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función monótona, entonces f es a lo más monótona.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es una función monótona. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Como f es una función monótona, por el Teorema 2.2.43, se tiene que el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo. Así, f es una función a lo más monótona. ■

En [2, pág. 892], se define una función que es a lo más monótona, pero no monótona.

Teorema 3.2.3. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función a lo más monótona, entonces f es casi monótona.

Demostración. Supongamos que f es a lo más monótona. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Por lo supuesto, el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo. Así, para la única componente D de $f^{-1}(Q)$ se cumple que $D = f^{-1}(Q)$. Por lo tanto, $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y $f(f^{-1}(Q)) = Q$. De aquí, la función f es casi monótona. ■

Sin embargo, el recíproco del Teorema 3.2.3 no es verdadero, basta considerar la función definida en el Ejemplo 2.3.3. Esta función es casi monótona, pero no es a lo más monótona.

Teorema 3.2.4. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función a lo más monótona, entonces f es fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Supongamos que f es una función a lo más monótona. Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Como A y B son subconjuntos cerrados en X, los subconjuntos $X \backslash A$ y $X \backslash B$ son subconjuntos abiertos en X. Además, $X \backslash A \subseteq B$ y $X \backslash B \subseteq A$. De aquí, los conjuntos A y B tienen interior no vacío. Luego, por hipótesis, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conjuntos conexos. Así, f es una función fuertemente libremente descomponible. ■

Ahora podemos completar el diagrama presentado en la Figura 2.28 y, así, obtener el diagrama de la Figura 3.5.
Por cuestiones prácticas, en nuestro siguiente diagrama, hemos denotado a las funciones libremente descomponibles con LD y a las funciones fuertemente libremente descomponibles con FLD.

$$\begin{tikzcd}
\text{Ligera} & \text{Simple} \arrow[l] & \text{Homeomorfismo} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \text{Monótona} \arrow[d] \arrow[ddl] & \\
& \text{Semiabierta} & \text{Abierta} \arrow[l] \arrow[d] & \text{A lo más Monótona} \arrow[r] \arrow[d] & \text{FLD} \arrow[d] \\
& \text{Casi Interior} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{MO} \arrow[l] \arrow[d] & \text{Casi Monótona} \arrow[d] & \text{LD} \\
& \text{OM} \arrow[r] & \text{Confluente} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Débilmente Monótona} & \\
& & \text{Semiconfluente} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Empalmante} & \\
& & \text{Débilmente Confluente} \arrow[r] & \text{Atriódica} &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.5: Relación entre clases de funciones y las funciones LD y FLD

A continuación se define una nueva clase de continuos que nos ayuda a establecer nuevas relaciones entre las funciones libremente descomponibles y algunas de las funciones del Capítulo 2.

Definición 3.2.5. Un continuo X es un θ_1-*continuo* si para cada subcontinuo A de X, el conjunto $X \backslash A$ es conexo.

Definición 3.2.6. Un continuo X es un θ_1°-*continuo* si para cada subcontinuo con interior no vacío A de X, $X \backslash A$ es un conjunto conexo.

Antes de empezar a dar ejemplos de estos continuos, veamos que relación hay entre ellos.

Teorema 3.2.7. Sea X un continuo. Si X es un θ_1-continuo, entonces X es un θ_1°-continuo.

Demostración. Sea A un subcontinuo con interior no vacío. Por hipótesis, el conjunto $X \backslash A$ es conexo. Por lo tanto, X es un θ_1°-continuo. ■

Ejemplo 3.2.8. S^1 es un θ_1-continuo y consecuentemente un θ_1°-continuo. Ver la Figura 2.2

Sin embargo, el recíproco del Teorema 3.2.7 no es verdadero. Verifiquemos esto con un ejemplo.

Ejemplo 3.2.9. Construyamos un nuevo continuo. Este continuo, consiste de:

1. todos los semicírculos en $\mathbb{R}^2$ con ordenadas no negativas, con centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y que pasan por todos los puntos del conjunto de Cantor.

2. todos los semicírculos en $\mathbb{R}^2$ con ordenadas no positivas, que tienen, para cada $n \in \mathbb{N}$, su centro en el punto $\left(\frac{5}{2\cdot 3^n}, 0\right)$ y que pasan por cada punto del conjunto de Cantor sobre el intervalo $\left[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right]$.

Este continuo se conoce como *continuo de Knaster* y lo denotamos con $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{K}'$ la reflexión de $\mathcal{K}$ en $\mathbb{R}^2$ con respecto al origen $(0,0)$. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$. Luego, $\mathcal{M}$ es un θ_1°-continuo. Para ver que $\mathcal{M}$ no es θ_1-continuo, consideremos el subcontinuo $\{(0,0)\}$. Luego, $\mathcal{M}\backslash\{(0,0)\}$ no es conexo. Ver la Figura 3.6

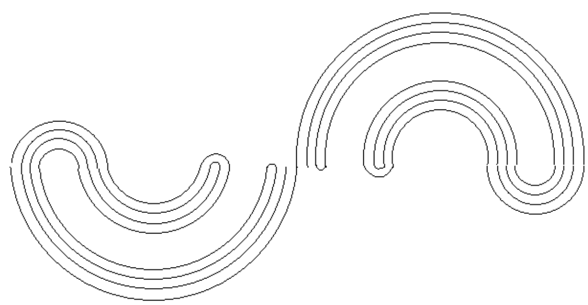

Figura 3.6: Continuo de Knaster

En el Teorema 3.2.4, se estableció que una función a lo más monótona, es una función fuertemente libremente descomponible. Sin embargo, el recíproco de este teorema no es verdadero. Pero el Teorema 3.2.10, muestra cómo al pedirle un poco más al rango de la función, en este caso que sea un θ_1°-continuo, podemos obtener nuevos resultados.

Teorema 3.2.10. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es fuertemente libremente descomponible y Y es θ_1°-continuo, entonces f es a lo más monótona.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es fuertemente libremente descomponible y Y es θ_1°-continuo. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Como Y es θ_1°-continuo, $Y\backslash Q$ es conexo y consecuentemente por los Teoremas 1.2.8 y 1.2.20, $Cl(Y\backslash Q)$ es conexo y compacto. Luego, $Cl(Y\backslash Q)$ y Q son subcontinuos propios de Y tales que $Y = Q \cup Cl(Y\backslash Q)$. Por hipótesis, el subconjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo y, por lo tanto, f es una función a lo más monótona. ■

En el Teorema 3.2.11 añadimos la hipótesis de confluencia a una función libremente descomponible para obtener una función fuertemente libremente descomponible. Recordemos que en el Ejemplo 3.1.4 vimos que en general una función libremente descomponible no necesariamente es fuertemente libremente descomponible.

Teorema 3.2.11. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es confluente y libremente descomponible, entonces f es fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es confluente y libremente descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Como f es libremente descomponible, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. De aquí, $A' \subseteq f^{-1}(f(A')) \subseteq f^{-1}(A)$ y $B' \subseteq f^{-1}(f(B')) \subseteq f^{-1}(B)$. Sea C la componente de $f^{-1}(A)$ que contiene a A'. Veamos que $C = f^{-1}(A)$. Supongamos que sucede lo contrario, es decir, que existe otra componente C' de $f^{-1}(A)$ distinta de C. Si $C' \subset A'$, entonces $C = C'$ lo cual es una contradicción. Así, $C' \subseteq B'$. De donde $f(C') \subseteq f(B') \subseteq B$. Como f es confluente, $f(C') = A$. Esto implica que $A \subseteq B$. De donde $Y = A \cup B = B$, lo cual es una contradicción pues $B \subsetneq Y$. Por lo tanto, $C = f^{-1}(A)$ y, así, el conjunto $f^{-1}(A)$ es conexo. De manera similar se prueba que el conjunto $f^{-1}(B)$ es conexo. Así, hemos probado que la función f es fuertemente libremente descomponible. ■

En el Ejemplo 3.2.12, se muestra una función que es libremente descomponible, pero no confluente y, además, no es fuertemente libremente descomponible.

Ejemplo 3.2.12. Consideremos la función definida en el Ejemplo 2.3.23. En el Ejemplo 3.1.4 se mostró que esta función es libremente descomponible, pero no es fuertemente libremente descomponible. Notemos, además, que no es una función confluente. En efecto, consideremos el subcontinuo Q de Y representado por la doble línea delgada. Las componentes de $f^{-1}(Q)$ son D_1 y D_2 las cuales están representadas por la doble línea gruesa, ver la Figura 3.7. Notemos que $f(D_2) = Q$. Sin embargo $f(D_1) \neq Q$. Por lo tanto, f no es confluente.

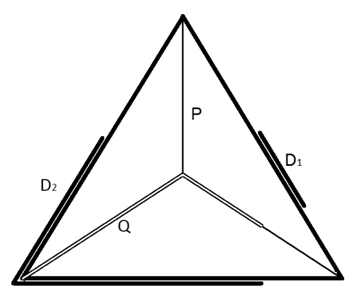

Figura 3.7: $f(D_1) \neq Q$

Teorema 3.2.13. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si $Y = [0,1]$ y f es libremente descomponible, entonces f es confluente.

Demostración. Supongamos que f no es confluente. Así, existe un subintervalo $[a,b]$ de $[0,1]$ y una componente Q de $f^{-1}([a,b])$ tal que $f(Q) \neq [a,b]$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $0 \neq a$ y $b \notin f(Q)$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente en $Y \setminus \{0,a\}$ convergente a a. Para cada n, sean A_n y B_n subcontinuos propios de X tales que $X = A_n \cup B_n$, $f(A_n) \subseteq [0, x_n]$ y $f(B_n) \subseteq [x_n, 1]$. Como $B_{n+1} \subseteq B_n$ y $Q \subseteq B_n$, por el Teorema 2.1.9, se sigue que $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ es un continuo que contiene a Q y $f(B) = [a,1]$. $f^{-1}([b,1]) \subseteq B \setminus Q$. Por el Teorema 2.1.11, existe un subcontinuo Q' de X tal que $Q \subseteq Q' \subseteq B \backslash f^{-1}([b,1])$ y $Q \neq Q'$. Así, $f(Q') \subseteq [a,b]$, esto contradice el hecho de que Q es una componente de $f^{-1}([a,b])$. Ya que como Q es una componente de $f^{-1}([a,b])$, $Q' \subseteq f^{-1}([a,b])$ y $Q \subseteq Q'$, entonces $Q = Q'$. ■

En los últimos resultados vistos en este capítulo, observamos que al pedirle alguna otra condición al dominio o codominio de una función, fue posible obtener resultados a los cuales no era posible llegar sin estas hipótesis adicionales. Hemos visto también que combinando las funciones adecuadas, se obtienen interesantes resultados entre las clases de funciones anteriormente revisadas. Algunas otras propiedades como las anteriores se van a presentar con más detalle en el Capítulo 4.

Capítulo 4

Funciones Libremente Descomponibles en o sobre Tipos Especiales de Continuos

En este capítulo se estudian a las funciones libremente descomponibles cuyo rango o dominio es un tipo especial de continuo. Esto con el propósito de obtener algunos otros resultados que en el Capítulo 3 no fue posible obtener.

4.1. Funciones Libremente Descomponibles con Rango Localmente Conexo

En el Capítulo 2, se introdujo el concepto de continuo localmente conexo, sin embargo, hasta ahora no se ha estudiado el comportamiento de las funciones libremente descomponibles con rango este tipo especial de continuo. La razón de esto es que, como se irá dando cuenta el lector, la hipótesis de conexidad local, trae consigo algunos otros resultados los cuales deben ser tratados con más cuidado.
Antes de empezar con el estudio de las funciones, se da un resultado importante para la demostración del Teorema 4.1.2. Este resultado es una modificación de [15, Teorema 2, pág. 262]. Aquí, lo hemos adaptado a nuestras necesidades.

Teorema 4.1.1. Sean X un continuo localmente conexo y L un subcontinuo propio de X. Luego, existe una sucesión $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tal que:

1. $L = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_n$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \subseteq L_n$.
3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{int}(L_n) \neq \emptyset$.
4. El número de componentes de $X \setminus L_n$ no excede al número de componentes de $X \setminus L$.

Demostración. De [15, Teorema 2, pág. 262], existe una sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados y localmente conexos de X tal que:

a) $X \setminus L = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n \subseteq \text{int}(H_{n+1})$.

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \backslash H_n$ es conexo y abierto en X.

d) El número de componentes de H_n no excede el número de componentes de $X \backslash L$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $L_n = Cl(X \backslash H_n)$. De a), $L = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash H_n)$. Puesto que L es un subcontinuo, se tiene que $L \neq \emptyset$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_n \neq \emptyset$. Luego, por c) y los Teoremas 1.2.8 y 1.2.20, se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, L_n es un subcontinuo de X. Puesto que $L = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash H_n)$, se tiene que $L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} Cl(X \backslash H_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Por b), se tiene que, $X \backslash \text{int}(H_{n+1}) \subseteq X \backslash H_n$. Como $X \backslash \text{int}(H_{n+1}) = Cl(X \backslash H_{n+1})$, se sigue que $Cl(X \backslash H_{n+1}) \subseteq X \backslash H_n$, esto es, $L_{n+1} \subseteq X \backslash H_n$. Consecuentemente, $\bigcap_{n=2}^{\infty} L_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash H_n) = L$. Puesto que $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n = L_1 \cap \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} L_n\right) \subset \bigcap_{n=2}^{\infty} L_n$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \subset L$. Por lo tanto:

$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n. \tag{4.1.1}$$

Ahora, por b), para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n \subseteq H_{n+1}$. Así, $X \backslash H_{n+1} \subseteq X \backslash H_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por Teorema 1.1.35, parte 5, $Cl(X \backslash H_{n+1}) \subseteq Cl(X \backslash H_n)$, por lo tanto:

$$L_{n+1} \subseteq L_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.2}$$

Por otra parte, por a), $L = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash H_n)$, de donde, $X \backslash H_{n+1} \neq \emptyset$. Luego, por b), $H_n \subseteq H_{n+1}$, así, $X \backslash H_{n+1} \subset X \backslash H_n$, consecuentemente, $X \backslash H_{n+1} \subseteq Cl(X \backslash H_n) = L_n$. Así, por c), $\text{int}(L_n) \neq \emptyset$. Por lo tanto:

$$\text{int}(L_n) \neq \emptyset, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.3}$$

Puesto que $X \backslash L_n \subseteq H_n$, se tiene que el número de componentes de $X \backslash L_n$ no excede el número de componentes de H_n. Luego, por d), se tiene que $X \backslash L_n$ no excede el número de componentes de $X \backslash L$. De (4.1.1), (4.1.2) y (4.1.3), se tiene el resultado. ■

Con el siguiente teorema, el lector empezará a comprender el por qué darle a los continuos localmente conexos un trato especial. Recordemos que en el Teorema 3.2.2, se verificó que toda función monótona es a lo más monótona. Pero también sabemos que el recíproco no es verdadero. Sin embargo, si al espacio de llegada le pedimos que sea localmente conexo, se tiene que toda función a lo más monótona es monótona. A continuación se da una demostración formal.

Teorema 4.1.2. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si Y es localmente conexo y f es a lo más monótona, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos que Y es localmente conexo y que f es a lo más monótona. Sea Q un subcontinuo de Y. Puesto que $Q \neq \emptyset$, por el Teorema 1.1.9, parte 2, $f^{-1}(Q) \neq \emptyset$ y, puesto que Q es cerrado, por el Teoremas 1.1.42, parte 3 y Teorema 1.2.20, $f^{-1}(Q)$ es compacto. Resta ver que $f^{-1}(Q)$ es conexo.
Por el Teorema 4.1.1, existe una sucesión $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de Y tal que:

1. $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \subset L_n$.
3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{int}(L_n) \neq \emptyset$.

Por 3 y, puesto que f es a lo más monótona, $f^{-1}(L_n)$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $f^{-1}(L_n)$ es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por 2, $f^{-1}(L_{n+1}) \subseteq f^{-1}(L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De manera que, por el Teorema 2.1.9, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(L_n)$ es un subcontinuo de X. Además, por 1, $f^{-1}(Q) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(L_n)$. En consecuencia, $f^{-1}(Q)$ es conexo. Por lo tanto, f es monótona. Así, se tiene el resultado. ■

Recordemos en este momento la definición de lo que es una función fuertemente libremente descomponible y una función confluente. Basándonos únicamente en esto, no somos capaces de establecer una relación entre estas clases de funciones. Pero una vez más nuestros continuos localmente conexos vienen en nuestra ayuda y, entonces, podemos establecer una relación entre estas dos clases de funciones. Veamos de qué se trata.

Teorema 4.1.3. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si Y es localmente conexo y f es una función fuertemente libremente descomponible, entonces f es confluente.

Demostración. Supongamos que Y es localmente conexo, que f es una función fuertemente libremente descomponible y que la función f no es confluente. Luego, existen un subcontinuo Q de Y y una componente C de $f^{-1}(Q)$ tales que $f(C) \subsetneq Q$, es decir, $Q \backslash f(C) \neq \emptyset$. Notemos que $f(C)$ es un continuo, por los Teoremas 1.2.10 y 1.2.26. Sea $a \in Q \backslash f(C)$. Como Y es localmente conexo, por el Teorema 2.2.44, Y es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos. De aquí, existen subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, $a \in A \backslash B$ y $f(C) \subseteq B \backslash A$. Definimos $A' = A \cup Q$. Notemos que los conjuntos A y Q son conexos tales que $a \in A \cap Q$. De aquí que el conjunto $A' = A \cup Q$ es conexo. Más aún, como los conjuntos A y Q son cerrados, por el Teorema 1.2.20, A' es compacto. Por lo tanto, A' y B son subcontinuos propios de Y tales que $Y = A' \cup B$. Puesto que f es una función fuertemente libremente descomponible, se tiene que el conjunto $f^{-1}(A')$ es conexo y, como es la imagen inversa de un cerrado dentro de un compacto, por el Teorema 1.2.20, $f^{-1}(A')$ es un subconjunto compacto. De todo lo anterior, se tiene que el conjunto $f^{-1}(A')$ es un subcontinuo tal que $C \subseteq f^{-1}(A')$ y $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A')$. Supongamos que existe $x \in C \cap f^{-1}(A)$. Luego, $x \in C$ y $x \in f^{-1}(A)$, pero recordemos que $C \subseteq f^{-1}(B \backslash A) = f^{-1}(B) \backslash f^{-1}(A)$. Entonces $x \notin f^{-1}(A)$ y $x \in f^{-1}(A)$, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto, $C \cap f^{-1}(A) = \emptyset$. Así, por el Teorema 2.1.11, se tiene que existe un subcontinuo C' tal que $C \subseteq C' \subseteq f^{-1}(A') \backslash f^{-1}(A)$ y $C \neq C'$, pero esto contradice el hecho de que C sea una componente de $f^{-1}(Q)$. La contradicción surge de suponer que la función f no es confluente, por lo tanto, f es confluente. ■

Antes de continuar, es necesario introducir un nuevo concepto.

Definición 4.1.4. Sean X un espacio métrico conexo y $p \in X$. Decimos que p es un *punto de separación o de corte* de X si el conjunto $X\backslash\{p\}$ no es conexo.

El siguiente lema es un caso particular de [15, Teorema 1, pág. 260].

Lema 4.1.5. Sean X un continuo localmente conexo y F un subcontinuo de X. Existe una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tales que:

1. $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.
2. $F_{n+1} \subseteq F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
3. Ninguna componente de $X\backslash F$ contiene dos componentes distintas de $X\backslash F_n$.
4. $X\backslash F_n$ tiene un número finito de componentes.
5. El número de componentes de $X\backslash F_n$ no excede el número de componentes de $X\backslash F$.

En el Ejemplo 2.3.23, se define una función la cual se verificó que es libremente descomponible. Además, es fácil ver que esta función no es monótona. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.1.6. Sean X y Y continuos, donde Y es localmente conexo y $f : X \to Y$ una función libremente descomponible. Si $y \in Y$ y y no es un punto de separación de Y, entonces $f^{-1}(y)$ es conexo.

Demostración. Sea $y \in Y$ tal que y no es un punto de separación de Y. Notemos que $\{y\}$ es un subcontinuo en Y. Luego, por el Lema 4.1.5, existe una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de Y tal que:

1. $\{y\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.
2. $F_{n+1} \subseteq F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{int}(F_n) \neq \emptyset$.
4. El número de componentes de $Y\backslash F_n$ no excede el número de componentes de $Y\backslash\{y\}$.

Como y no es un punto de separación de Y, $Y\backslash\{y\}$ es conexo. Así, por 4, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Y\backslash F_n$ es conexo. Luego, por el Teorema 1.2.8, el conjunto $B_n = Cl(Y\backslash F_n)$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, B_n es un subcontinuo de Y, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, puesto que Y es conexo, $Cl(F_n) \cap Cl(Y\backslash F_n) = F_n \cap Cl(Y\backslash F_n) = F_n \cap B_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, existe una sucesión de subcontinuos propios F_n y B_n de Y tales que $Y = F_n \cup B_n$, $y \in F_{n+1} \subseteq F_n \backslash B_n$ y $\{y\} = \bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como f es una función libremente descomponible, existe una sucesión de subcontinuos propios F'_n y B'_n de X tales que $X = F'_n \cup B'_n$, $f(F'_n) \subseteq F_n$ y

$f(B'_n) \subseteq B_n$. Veamos qué relación existe entre estos nuevos subcontinuos. Supongamos que existe $z \in F'_{n+1}$ tal que $z \notin F'_n$. Por un lado, se tiene que $f(z) \in F_n \backslash B_n$ y, por otro, tenemos que $z \in B'_n$, lo cual implica que $f(z) \in B_n$. Pero esto es absurdo, pues llegamos a que $f(z) \in B_n$ y $f(z) \notin B_n$. Por lo tanto $F'_{n+1} \subseteq F'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que$f^{-1}(y) = \bigcap\{F'_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $z \in f^{-1}(y)$. Entonces $f(z) = y$. Supongamos que $z \notin F'_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, luego $z \in B'_n$. De aquí que $f(z) = y \in f(B'_n) \subseteq B_n$; pero $y = f(z) \in F_n \backslash B_n$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $z \in F'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que, $f^{-1}(y) \subseteq \bigcap\{F'_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $z \in \bigcap\{F'_n : n \in \mathbb{N}\}$. De aquí que, $z \in F'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $f(z) \in F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que $\{y\} = \bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, se sigue que $f(z) = y$. Entonces, $z \in f^{-1}(y)$. Así $\bigcap\{F'_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq f^{-1}(y)$. Hemos probado que $f^{-1}(y) = \bigcap\{F'_n : n \in \mathbb{N}\}$, esto es, $f^{-1}(y)$ es la intersección de una sucesión decreciente de subcontinuos. Por el Teorema 2.1.9, $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo y, consecuentemente, $f^{-1}(y)$ es conexo. ■

Teorema 4.1.7. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos tal que Y es localmente conexo y no contiene puntos de separación. Si f es libremente descomponible, entonces f es monótona.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema 4.1.6. ■

Retomando la Definición 2.2.29, vamos a definir dos conjuntos importantes que son necesarios para posteriormente mostrar un par de resultados.

Definición 4.1.8. Sea X un continuo. Se definen los siguientes conjuntos:

$$K(x) = \{y \in X : X \text{ no es aposindético en } x \text{ respecto a } y\},$$
$$L(x) = \{y \in X : X \text{ no es aposindético en } y \text{ respecto a } x\}.$$

Teorema 4.1.9. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si Y es semilocalmente conexo y f es libremente descomponible, entonces $f(K(x)) = \{f(x)\}$ y $f(L(x)) = \{f(x)\}$, para cada $x \in X$.

Demostración. Supongamos que f es libremente descomponible y Y semilocalmente conexo. Sea $x \in X$. Supongamos que existe $y \in K(x)$ tal que $f(y) \neq f(x)$. Como Y es semilocalmente conexo, por el Teorema 2.2.33, se sigue que Y es libremente descomponible, de donde existen subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, $f(x) \in A \backslash B$ y $f(y) \in B \backslash A$. Como f es libremente descomponible, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. Es claro que $x \in A'$ o $x \in B'$. Supongamos que $x \in B'$. Entonces $f(x) \in B$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto, $x \in A' \backslash B'$. Notemos que el subconjunto $A' \backslash B' \subseteq A'$ es abierto en X, consecuentemente, $x \in A' \backslash B' \subseteq \text{int}(A') \subseteq A' \subseteq X \backslash \{y\}$ y, de acuerdo a la definición de aposindésis en un punto respecto a otro, hemos llegado a la conclusión de que X es aposindético en x con respecto a y. De donde $y \notin K(x)$. Esto nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $f(K(x)) = \{f(x)\}$. Si ahora tomamos un punto $y \in L(x)$ y suponemos que $f(y) \neq f(x)$, obtenemos que $y \in B' \backslash A' \subseteq \text{int}(A') \subseteq A' \subseteq X \backslash \{x\}$. Así, X es aposindético en y con respecto a x. Como en el caso anterior, se llega una contradicción. Por lo tanto, $f(L(x)) = \{f(x)\}$. ■

Corolario 4.1.10. Sean X un continuo con la propiedad de que para cada par de puntos x y y en X, se cumple $K(x) \cap K(y) \neq \emptyset$ o $L(x) \cap L(y) \neq \emptyset$ y Y un continuo semilocalmente conexo. Entonces cada función $f : X \to Y$ libremente descomponible es constante.

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una función libremente descomponible y x_1 y $x_2 \in X$. Por el Teorema 4.1.9, se cumple para cada uno de estos puntos que $f(K(x_1)) = \{f(x_1)\}$, $f(L(x_1)) = \{f(x_1)\}$, $f(K(x_2)) = \{f(x_2)\}$ y $f(L(x_2)) = \{f(x_2)\}$. Si $K(x_1) \cap K(x_2) \neq \emptyset$, entonces existe $z \in K(x_1)$ y $z \in K(x_2)$. De aquí, $f(z) \in f(K(x_1)) = \{f(x_1)\}$ y $f(z) \in f(K(x_2)) = \{f(x_2)\}$. Por lo tanto, $f(x_1) = f(z) = f(x_2)$. Si $L(x_1) \cap L(x_2) \neq \emptyset$, entonces existe $z \in L(x_1) \cap L(x_2)$. Así $f(z) \in f(L(x_1)) = \{f(x_1)\}$ y $f(z) \in f(L(x_2)) = \{f(x_2)\}$. Por lo tanto $f(x_1) = f(z) = f(x_2)$. Como x_1 y x_2 fueron elegidos arbitrariamente, se tiene que f es una función constante. ■

4.2. Funciones Libremente Descomponibles con Dominio Unicoherente

En el Capítulo 2, se dieron a conocer algunas clases de continuos, sin embargo la clase de los continuos unicoherentes no se introdujo antes pues como pasa con los continuos localmente conexos, los resultados que se obtienen al tener como dominio de una función libremente descomponible un continuo unicoherente, merecen ser tratados con mucho más detenimiento.

Definición 4.2.1. Sea X un continuo. Se dice que X es *unicoherente* si para cada par de subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, el conjunto $A \cap B$ es conexo.

Ejemplo 4.2.2. En $\mathbb{R}$, con la métrica usual, cualquier intervalo es unicoherent. Ver la Figura 4.1.

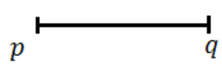

Figura 4.1: Intervalo

Ejemplo 4.2.3. El círculo es un continuo que no es unicoherente. En efecto, en la Figura 4.2, la doble línea representa al continuo A y B es el complemento de A, unión el conjunto $\{p, q\}$. Es claro que A y B son subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \{p, q\}$ no es un conjunto conexo.

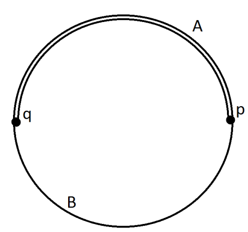

Figura 4.2: Círculo

Ejemplo 4.2.4. Cualquier continuo que tenga la forma de la Figura 4.3 no es unicoherente.

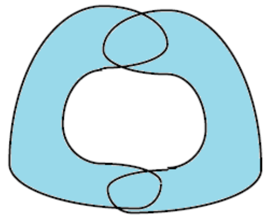

Figura 4.3: Continuo no unicoherente

Definición 4.2.5. Sea X un continuo. Se dice que X es *hereditariamente unicoherente* si cada subcontinuo de X es unicoherente.

Ejemplo 4.2.6. Cualquier intervalo es hereditariamente unicoherente.

Ejemplo 4.2.7. El abanico armónico es hereditariamente unicoherente. Ver la Figura 2.9.

Una propiedad importante de la unicoherencia es que se preserva bajo funciones fuertemente libremente descomponible.

Teorema 4.2.8. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es fuertemente libremente descomponible y X es unicoherente, entonces Y es unicoherente.

Demostración. Supongamos que X es unicoherente y f es fuertemente libremente descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Como f es fuertemente libremente descomponible, los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos y, por el Teorema 1.2.20, son conjuntos compactos. De aquí, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X tales que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Por lo tanto, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$ es un subconjunto conexo. Además, por el Teorema 1.2.10, la imagen continua de un conexo es un subconjunto conexo, más aún, como f es suprayectiva $f(f^{-1}(A \cap B)) = A \cap B$ es un subconjunto conexo. ∎

Sin embargo, la unicoherencia no se preserva bajo funciones libremente descomponible. Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 4.2.9. Sean X el cono [16] sobre el conjunto compacto

$$\left\{x \in [-1,1] : x = 1, x = -1 \,\text{o}\, x = \pm\frac{n}{n+1} \text{ para algún número natural}\, n\right\},$$

$Y = X/\{-1,1\}$ y $f : X \to Y$ la función cociente. Se cumple que f es una función libremente descomponibles, X un continuo unicoherente, sin embargo, Y no es unicoherente [11].

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la Definición 4.2.5.

Teorema 4.2.10. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si X es hereditariamente unicoherente y f es una función monótona, entonces Y es hereditariamente unicoherente.

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente unicoherente y que f es monótona. Sean Q un subcontinuo de Y y A y B subcontinuos propios de Q tales que $Q = A \cup B$. Puesto que f es una función monótona, por el Teorema 2.2.43, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es un conjunto conexo. Además, como $f^{-1}(Q)$ es cerrado, en virtud del Teorema 1.2.20, es un conjunto compacto. De aquí, $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo en X. Del mismo modo se tiene que los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos de $f^{-1}(Q)$. Así, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de $f^{-1}(Q)$ tales que $f^{-1}(Q) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Como X es hereditariamente unicoherente, el conjunto $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ es conexo, consecuentemente, $f^{-1}(A \cap B)$ es conexo. Por el Teorema 1.2.10 y puesto que f es sobreyectiva, el conjunto $A \cap B$ es conexo. Por lo tanto, Y es hereditariamente unicoherente. ■

Definición 4.2.11. Sea X un continuo. Se dice que X es una *dendrita* si es localmente conexo y hereditariamente unicoherente.

Ejemplo 4.2.12. Los continuos definidos en el Ejemplo 2.2.12 y el Ejemplo 2.2.26 son dendritas.

A continuación introducimos un resultado, que nos será de mucha ayuda para la demostración del Teorema 4.2.14. Su prueba se puede consultar en [15, Teorema 11, pág. 233].

Teorema 4.2.13. Sean X un continuo localmente conexo, F un subconjunto cerrado y localmente conexo de X y C una componente de $X \backslash F$. Se sigue que, los conjuntos $X \backslash C$ y $C \cup F$ son localmente conexos.

Recordemos que en el Teorema 4.1.7, además de que se le pedía conexidad local al rango de la función, se le pedía también que éste no tuviera puntos de separación. Bueno, pues seguramente les resultará interesante saber que podemos reemplazar esta segunda propiedad del rango por la propiedad de unicoherencia del dominio de la función.

Teorema 4.2.14. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si X es unicoherente, Y es localmente conexo y f es libremente descomponible, entonces f es monótona.

Demostración. Sea $y \in Y$. Puesto que queremos verificar que f es una función monótona, hay que probar que $f^{-1}(y)$ es conexo.
Se tienen dos casos:

1. Supongamos que y no es un punto de separación. En este caso, por el Lema 4.1.6, $f^{-1}(y)$ es conexo.

2. Supongamos que y es un punto de separación, esto es, $Y \backslash \{y\}$ es disconexo.

Notemos que $\{y\}$ es un subcontinuo de Y. Así, por el Lema 4.1.5, existe una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de Y tal que:

a) $\{y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

b) $F_{n+1} \subseteq F_n$.

c) $Y \backslash F_n$ tiene un número finito de componentes.

Luego,

$$Y \backslash \{y\} = Y \backslash \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y \backslash F_n).$$

Por c), $\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y\backslash F_n)$ tiene una cantidad a lo más numerable de componentes, digamos que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y\backslash F_n)=\bigcup_{i=1}^{\infty}Q_i=Q_n\cup\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}\backslash\{n\}}Q_i\right)$$

Ahora, por el Teorema 2.1.8, se tiene que los conjuntos $Q_n\cup\{y\}$ y $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}\backslash\{n\}}Q_i\right)\cup\{y\}$ son continuos, para cada $n\in\mathbb{N}$. Más aún, por el Teorema 4.2.13, estos continuos son localmente conexos. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $g_n:Y\to Q_n\cup\{y\}$ la función definida por:

$$g_n(x)=\begin{cases} x, & \text{si} \quad x\in Q_n,\\ \\ y, & \text{si} \quad x\in Y\backslash Q_n.\end{cases}$$

Veamos que g_n es una función monótona, para cada $n\in\mathbb{N}$. Sean $n\in\mathbb{N}$ y $w\in Q_n\cup\{y\}$.

i) Para el caso en el que $w\in Q_n$, se tiene que $g_n^{-1}(w)=\{w\}$. Así, $g_n^{-1}(w)$ es conexo.

ii) Supongamos que $w=y$. Para este caso, hay que observar que:

$$Y=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}Q_i\right)\cup\{y\}. \tag{4.2.1}$$

Así,

$$\begin{aligned} g_n^{-1}(y)=Y\backslash Q_n &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1}Q_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}Q_i\right)\cup\{y\}\\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1}Q_i\cup\{y\}\right)\cup\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}Q_i\cup\{y\}\right)\\ &= \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}\backslash\{n\}}Q_i\right)\cup\{y\}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

De aquí que $g_n^{-1}(y)$ es conexo. De i) y ii), se tiene que g_n es monótona.

Notemos ahora que y no es un punto de separación de $Q_n\cup\{y\}$ y, puesto que g_n es monótona, por los Teorema 3.1.3 y 3.1.5, la función g_n es libremente descomponible. Luego, por el Teorema 3.1.7, $g_n\circ f$ es una función libremente descomponible. Se sigue del Teorema 4.1.6 que $f^{-1}(g_n^{-1}(y))$ es conexo, para cada $n\in\mathbb{N}$. Veamos que $f^{-1}(y)=\bigcap\{f^{-1}(g_n^{-1}(y))\}$. En efecto, sea $x\in f^{-1}(y)$. Luego, $f(x)=y$. Sea $n\in\mathbb{N}$. Consideremos la respectiva g_n, así, $g_n(f(x))=g_n(y)=y$, de aquí que $g_n(f(x))=y$, es decir, $f(x)\in g_n^{-1}(y)$. Finalmente, $x\in f^{-1}(g_n^{-1}(y))$. Por lo tanto, $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}(g_n^{-1}(y))$. Por lo tanto:

$$f^{-1}(y)\subseteq\bigcap\{f^{-1}(g_n^{-1}(y))\}. \tag{4.2.3}$$

Inversamente, sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(g_n^{-1}(y))$. Luego, $x \in f^{-1}(g_n^{-1}(y))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí $f(x) \in g_n^{-1}(y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por (4.2.2), existe $m \in \mathbb{N}\backslash\{n\}$ tal que $f(x) \in Q_m$ o $f(x) = y$. Si $f(x) = y$, entonces $x \in f^{-1}(y)$, y terminamos. Si $f(x) \in Q_m$, entonces $g_m(f(x)) = f(x)$ así, $g_m(f(x)) = f(x)$ y $g_m(f(x)) = y$. De aquí que $y = f(x)$. Esto es, $x \in f^{-1}(y)$. Por lo tanto:

$$\bigcap\{f^{-1}(g_n^{-1}(y))\} \subseteq f^{-1}(y). \tag{4.2.4}$$

De (4.2.3) y (4.2.4), se tiene que:

$$f^{-1}(y) = \bigcap\{f^{-1}(g_n^{-1}(y))\}. \tag{4.2.5}$$

Definamos los siguientes conjuntos, $H_1 = f^{-1}(g_1^{-1}(y))$, $H_2 = f^{-1}(g_2)^{-1}(y) \cap H_1$ e, inductivamente, definamos $H_n = f^{-1}(g_n^{-1}(y)) \cap H_{n-1}$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} \subseteq H_n$ y $f^{-1}(y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$.

Por otra parte, es claro que $H_n \cup H_{n+1} \subseteq X$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $x \in X$, si $f(x) = y$, entonces $x \in f^{-1}(y)$. Así, por (4.2.5), $x \in H_n \cup H_{n+1}$. Si $f(x) \in Y\backslash\{y\}$, entonces, por (4.2.1), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \in Q_{n_0} \subseteq \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}\backslash\{n\}} Q_i\right)$, para $n \neq n_0$. Luego, $f(x) \in g_n^{-1}(y)$. De aquí que $x \in H_n \subseteq H_n \cup H_{n+1}$. Por lo tanto, $X = H_n \cup H_{n+1}$. Como X es unicoherente, $H_n \cap H_{n+1} = H_n$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, por el Teorema 2.1.9, $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = f^{-1}(y)$ es un subcontinuo de X, consecuentemente $f^{-1}(y)$ es conexo. ■

Corolario 4.2.15. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si X es unicoherente, f es libremente descomponible y Y es una dendrita, entonces f es monótona.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 4.2.14. ■

Finalmente y para terminar con esta sección, recordemos que en el Teorema 3.2.10, vimos que una función fuertemente libremente descomponible con rango un θ_1°-continuo es a lo más monótona. Resulta interesante comparar ese resultado con el Teorema 4.2.16, pues ahora podemos tomar como rango de la función cualquier continuo y como dominio un continuo unicoherente y entonces obtener resultados semejantes.

Teorema 4.2.16. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es fuertemente libremente descomponible y X es unicoherente, entonces f es a lo más monótona.

Demostración. Supongamos que f es fuertemente libremente descomponible y que X es unicoherente. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Veremos que el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo. Si $Y\backslash Q$ es un subconjunto conexo, entonces por el Teorema 1.2.8, el conjunto $Cl(Y\backslash Q)$ es también conexo. Además, como $Cl(Y\backslash Q)$ es un subconjunto cerrado dentro de un compacto, por el Teorema 1.2.20, $Cl(Y\backslash Q)$ es un conjunto compacto. Ya que $\text{int}(Q) \neq \emptyset$, se sigue que $Cl(Y\backslash Q)$ es un subcontinuo propio de Y tal que $Y = Q \cup Cl(Y\backslash Q)$. Por hipótesis, la función f es fuertemente libremente descomponible, así, el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo. Si $Y\backslash Q$ no es conexo, entonces existen dos subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos E y F tales que $Y \setminus Q = E \cup F$. Por el Teorema 2.1.8, los conjuntos $Q \cup E$ y $Q \cup F$ son subcontinuos de Y tales que $Y = (Q \cup E) \cup (Q \cup F)$. Notemos también que $(Q \cup E) \cap (Q \cup F) = Q \neq \emptyset$. Además, $Q \cup E$ y $Q \cup F$ son subcontinuos propios de Y tales que $Y = (Q \cup E) \cup (Q \cup F)$. Por hipótesis los conjuntos $f^{-1}(Q \cup E)$ y $f^{-1}(Q \cup F)$ son conexos. Como $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(Q \cup E) \cup f^{-1}(Q \cup F)$ y $f^{-1}(Q \cup E) \cap f^{-1}(Q \cup F) = f^{-1}(Q)$ y la hipótesis de unicoherencia de X, se tiene que el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo. Por lo tanto, f es a lo más monótona. ■

4.3. Funciones Libremente Descomponibles con Dominio Irreducible

Nuestro último tipo especial de continuos, son los continuos irreducibles. Como se hizo en las dos secciones anteriores, damos su definición, algunos ejemplos y estudiamos las propiedades de las funciones libremente descomponibles con dominio irreducible. Desafortunadamente, con los continuos irreducibles, no fue posible obtener muchos resultados, o al menos no como sucedió en las dos secciones anteriores de este capítulo.

Definición 4.3.1. Sean X un continuo y a y $b \in X$. Se dice que X es *irreducible entre a y b* si ningún subcontinuo propio de X contiene a $\{a, b\}$.

Definición 4.3.2. Sea X un continuo. Se dice que X es *irreducible* si existen dos puntos a y b de X tales que X es irreducible entre a y b.

Ejemplo 4.3.3. El continuo $[0, 1]$ es irreducible entre los puntos 0 y 1.

Ejemplo 4.3.4. La curva sinoidal del topólogo es irreducible, basta considerar un punto en $\{0\} \times [-1, 1]$ y el punto $(2\pi, 1)$ [18]. Ver la Figura 4.4.

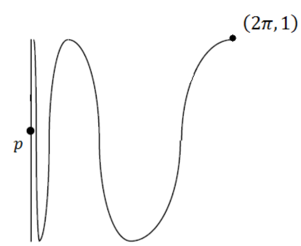

Figura 4.4: Continuo irreducible entre los puntos p y $(2\pi, 1)$

Lo primero que haremos con este tipo especial de continuo, es ampliar un poco más nuestro diagrama de la Figura 2.28. Para con esto empezar a justificar el por qué de tratar a esta clase de continuos como una clase especial.

Definición 4.3.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Se dice que f es *pseudoconfluente* si para cada subcontinuo irreducible B de Y, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$.

Teorema 4.3.6. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función débilmente confluente, entonces f es pseudoconfluente.

Demostración. Sea B un subcontinuo irreducible de Y. Por hipótesis, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$. Por lo tanto, f es pseudoconfluente. ∎

Tal como se hizo con las clases de funciones revisadas en el Capítulo 2, a continuación, se verifica con un ejemplo, que el recíproco del Teorema 4.3.6 no es verdadero.

Ejemplo 4.3.7. Sean (x, y) un punto en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ y:

$$T = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Definamos a la función $f : [0, 1] \to T$ como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} \left(-3t - \frac{1}{2}, 0\right), & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{6}, \\ (6t - 2, 0), & \text{para } \frac{1}{6} \leq t \leq \frac{2}{6}, \\ (0, 6t - 2), & \text{para } \frac{2}{6} \leq t \leq \frac{3}{6}, \\ (0, -6t + 4), & \text{para } \frac{3}{6} \leq t \leq \frac{4}{6}, \\ (6t - 4, 0), & \text{para } \frac{4}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}, \\ (-12t + 11, 0), & \text{para } \frac{5}{6} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

La función f es pseudoconfluente, pero no es débilmente confluente [17]. En la Figura 4.5, se muestra la gráfica de la función.

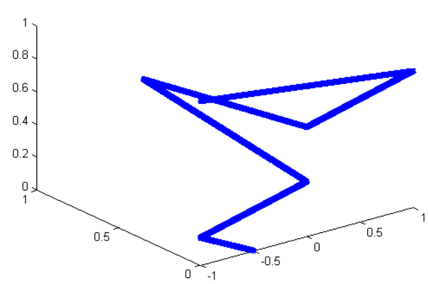

Figura 4.5: Gráfica de f

Sin necesidad de enunciar un teorema, podemos establecer que una función confluente, es débilmente confluente y pseudoconfluente, y que una función semiconfluente es pseudoconfluente.

Ahora podemos ampliar el diagrama de la Figura 3.5, agregando a éste, las funciones pseudoconfluentes que acabamos de revisar. Aunque seguramente ya se imaginaron la estructura que tiene nuestro nuevo diagrama, en la Figura 4.6 hemos decidido presentarlo.

$$\begin{tikzcd}
\text{Ligera} & \text{Simple} \arrow[l] & \text{Homeomorfismo} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \text{Monótona} \arrow[d] \arrow[ddl] & \\
& \text{Semiabierta} & \text{Abierta} \arrow[l] \arrow[d] & \text{A lo más Monótona} \arrow[r] \arrow[d] & \text{FLD} \arrow[d] \\
& \text{Casi Interior} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{MO} \arrow[l] \arrow[d] & \text{Casi Monótona} \arrow[d] & \text{LD} \\
& \text{OM} \arrow[r] & \text{Confluente} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Débilmente Monótona} & \\
& & \text{Semiconfluente} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Empalmante} & \\
& & \text{Débilmente Confluente} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Atriódica} & \\
& & \text{Pseudoconfluente} & &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.6: Funciones pseudoconfluentes y su relación con otras funciones

Función	Ejemplo
Abierta	2.3.5
A lo más monótona	2.3.27
Atriódica	2.3.25
Casi interior	2.3.8
Casi monótona (Confluente)	2.3.3
Débilmente confluente	2.3.20
Débilmente monótona	2.3.5
Empalmante	2.3.23
Fuertemente libremente descomponible	2.3.27
Homeomorfismo	2.3.25
Libremente descomponible	2.3.27
Ligera	2.3.5
Monótona	2.3.27
MO	2.3.8
OM	2.3.13
Pseudoconfluente	4.3.7
Semiabierta	2.3.10
Semiconfluente	2.3.18
Simple	2.3.3

Figura 4.7: Ejemplos de funciones

En la tabla de la Figura 4.7, se enlistan todas las clases de funciones entre continuos que hemos revisado y para cada una de ellas hacemos referencia a un ejemplo de dicha función. Esto con el propósito de reforzar la información en cuanto a funciones entre continuos se refiere.

Ahora empezaremos a estudiar las funciones libremente descomponibles con dominio irreducible. Vamos a comenzar dando un resultado importante sobre la relación de los continuos indescomponibles y los continuos irreducibles. La prueba de este resultado no la hemos incluido en esta tesis, pues queda fuera de nuestros objetivos. Una demostración se encuentra en [20, Corolario 11.15.1].

Teorema 4.3.8. Todo continuo indescomponible es irreducible.

Sin mucha dificultad, se verifica que la indescomponibilidad es invariante bajo funciones libremente descomponibles.

Teorema 4.3.9. Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función libremente descomponible. Si X es indescomponible, entonces Y es indescomponible.

Demostración. Supongamos que Y es descomponible. Luego, existen dos subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$. Como f es libremente descomponible, existen dos subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. Esto implica que X es descomponible. ■

Teorema 4.3.10. Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si Y es indescomponible, entonces f es fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Supongamos que f no es fuertemente libremente descomponible. Luego, existen dos subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ y $f^{-1}(A)$ o $f^{-1}(B)$ no es un conjunto conexo. Por lo tanto, Y es descomponible. ■

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [20, pág. 206].

Teorema 4.3.11 (El teorema de Kuratowski)**.** Sean X un continuo. Luego, X es irreducible si y sólo si existe $p \in X$ tal que X no es la unión de dos subcontinuos propios que contienen a p.

Ahora veremos que la irreducibilidad se preserva bajo funciones fuertemente libremente descomponible.

Teorema 4.3.12. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si X es irreducible y f es fuertemente libremente descomponible, entonces Y es irreducible.

Demostración. Supongamos que X es irreducible y f es fuertemente libremente descomponible. Sean a y b puntos de X tales que ningún subcontinuo propio de X contiene a estos puntos. También supongamos que Y no es irreducible entre $f(a)$ y cualquier otro punto. Por el Teorema 4.3.11, existen subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ y $f(a) \in A \cap B$. De aquí, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X tales que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ y $a \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Supongamos que $b \in f^{-1}(B)$. Por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X tal que contiene a a y b, lo cual contradice la irreducibilidad de X. Así, Y es irreducible. ■

En [3, Ejemplo 3.1] se presenta una función fuertemente libremente descomponible entre continuos irreducibles tal que el codominio no es irreducible entre las imágenes de los puntos de irreducibilidad del dominio. Con esto se muestra que, a pesar de que la irreducibilidad se preserva bajo funciones fuertemente libremente descomponibles, los puntos de irreducibilidad no son preservados por dichas funciones.

A continuación, se da una definición y un teorema, que nos servirán más adelante. Puesto que tienen que ver con los continuos irreducibles, hemos decidido introducirlos en esta sección.

Definición 4.3.13. Sean X un continuo y A y B dos subconjuntos compactos no vacíos de X. Se dice que un subcontinuo C de X es *irreducible entre A y B* si $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap B \neq \emptyset$ y ningún subcontinuo propio de C intersecta tanto a A como a B.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [20, pág. 212].

Teorema 4.3.14. Sea X un continuo. Si A y B son subconjuntos compactos no vacíos de X, entonces existe un subcontinuo C de X tal que C es irreducible entre A y B.

Capítulo 5

Algunas Clasificaciones de Continuos

5.1. Clasificación de Continuos en Términos de Funciones Libremente Descomponibles

El propósito de este capítulo, es caracterizar algunos continuos en términos de las funciones libremente descomponibles. Comenzamos con un teorema que caracteriza los continuos localmente conexos y semilocalmente conexos en términos de las funciones libremente descomponibles.

Definición 5.1.1. Sea $\Im$ una familia de funciones de un continuo X en una clase arbitraria de continuos. Se dice que la familia $\Im$ *separa puntos* si para cada par de puntos distintos a y b en X, existe $f \in \Im$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Se dice que la familia $\Im$ *separa puntos de subcontinuos* si para cada subcontinuo C de X y cada punto $a \in X \backslash C$ existe $f \in \Im$ tal que $f(a) \notin f(C)$.

Teorema 5.1.2. Sea $\Im$ una familia de funciones libremente descomponibles definidas en un continuo X.

1. Si $\Im$ separa puntos e $Im(f)$ es semilocalmente conexo para cada $f \in \Im$, entonces X es semilocalmente conexo.

2. Si $\Im$ separa puntos de subcontinuos e $Im(f)$ es localmente conexo para cada $f \in \Im$, entonces X es localmente conexo.

Demostración. 1. Sean a y b puntos de X tales que $a \neq b$. Ya que $\Im$ separa puntos, existe $f \in \Im$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Dado que $Im(f)$ es un conjunto semilocalmente conexo, por el Teorema 2.2.33, se sigue que $Im(f)$ es libremente descomponible. De aquí que existen subcontinuos propios A y B de $Im(f)$ tales que $Im(f) = A \cup B$, $f(a) \in A \backslash B$ y $f(b) \in B \backslash A$. Como f es una función libremente descomponible, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. Así, $a \in A' \backslash B'$ y $b \in B' \backslash A'$. Por lo tanto X, es libremente descomponible y, por el Teorema 2.2.33, X es semilocalmente conexo.

2. En virtud del Teorema 2.2.44, basta ver que X es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos.
Sean C un subcontinuo de X y $a \in X \backslash C$. Ya que $\Im$ separa puntos de subcontinuos, existe $f \in \Im$ tal que $f(a) \notin f(C)$. Notemos que $f(C)$ es un subcontinuo de $Im(f)$ tal que $f(a) \in Im(f) \backslash f(C)$. Como $Im(f)$ es localmente conexo, por el Teorema 2.2.44, $Im(f)$ es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos. De aquí, existen subcontinuos propios A y B de $Im(f)$ tales

que $Im(f) = A \cup B$, $f(a) \in A\backslash B$ y $f(C) \subseteq B\backslash A$. Como f es libremente descomponible, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. Por lo tanto, $a \in A'\backslash B'$ y $C \subseteq B'\backslash A'$. Luego, X es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos. ■

Teorema 5.1.3. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si X es irreducible, Y es localmente conexo y no degenerado y f es una función libremente descomponible, entonces Y es un arco y f es monótona.

Demostración. Supongamos que X es irreducible de a a b. Comenzaremos demostrando que Y es un arco con puntos finales $f(a)$ y $f(b)$. Supongamos que Y no es irreducible entre $f(a)$ y $f(b)$. Luego, por el Teorema 4.3.14, existe C subcontinuo propio de Y que contiene a $f(a)$ y $f(b)$. Sea $p \in Y\backslash C$, por el Teorema 2.2.44 existen subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, $p \in A\backslash B$ y $C \subseteq B\backslash A$. Ya que f es libremente descomponible, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. Así, a y b están en B' esto es, X no es irreducible entre a y b, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Y es irreducible entre $f(a)$ y $f(b)$. Puesto que Y es localmente conexo, por [20, 8.23], existe un arco A en Y con puntos finales $f(a)$ y $f(b)$, pero acabamos de probar que Y es irreducible entre $f(a)$ y $f(b)$. Así, $A = Y$. Por lo tanto, Y es un arco.

Supongamos que el arco Y tiene puntos finales $f(a)$ y $f(b)$. Por el Teorema 3.2.13, f es confluente. Así, por el Teorema 3.2.11, se sigue que f es una función fuertemente libremente descomponible. Más aún, $f^{-1}(f(a))$ y $f^{-1}(f(b))$ son conexos por el Lema 4.1.6. Si f no es monótona, existe $t \in Y$ tal que $t \neq f(a)$, $t \neq f(b)$ y $f^{-1}(t)$ no es conexo. Sean Q una componente de $f^{-1}(t)$, Q_1 un subcontinuo de $f^{-1}([f(a), t])$ que contiene propiamente a Q pero no contiene a $f^{-1}(t)$ y Q_2 un subcontinuo de $f^{-1}([t, f(b)])$ el cual contiene propiamente a Q pero no contiene a $f^{-1}(t)$. Entonces $f(Q_1 \cup Q_2) = [t_1, t_2]$ donde $t_1 < t < t_2$. Así, $f^{-1}([f(a), t_1]) \cup Q_1 \cup Q \cup f^{-1}([t_2, f(b)])$ es un subcontinuo de X el cual contiene a a y b, pero no contiene a $f^{-1}(t)$. Esto contradice el hecho de que X es irreducible entre a y b. Consecuentemente, f es monótona. Así, se tiene el resultado. ■

En [8] se hace una recopilación de todas las caracterizaciones de dendritas conocidas en ese tiempo. En el Teorema 5.1.4, se da una caracterización más de las dendritas con ayuda de las funciones libremente descomponibles.

Teorema 5.1.4. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si X es hereditariamente unicoherente, Y localmente conexo y f una función libremente descomponible, entonces f es monótona. Consecuentemente, Y es una dendrita.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es libremente descomponible, X es hereditariamente unicoherente y Y localmente conexo. Vamos a verificar que f es monótona. Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es conexo. Sean Q_1 y Q_2 distintas componentes de $f^{-1}(y)$. Por el Teorema 4.3.14, existe un subcontinuo C de X tal que C es irreducible entre Q_1 y Q_2. Notemos que $C \nsubseteq f^{-1}(y)$. Sea $x_1 \in C\backslash f^{-1}(y)$. Luego $f(x_1) \neq y$. Por el Teorema 2.2.9, Y es semilocalmente conexo y por el Teorema 2.2.33, Y es libremente descomponible. Luego, existen subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, $y \in A\backslash B$ y $f(x_1) \in B\backslash A$. Como f es una función libremente descomponible, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$.

Notemos que $Q_1 \cup Q_2 \subseteq A'$. En efecto, de lo contrario existiría $z \in (Q_1 \cup Q_2) \backslash A'$. De aquí que $z \in B'$. Luego, $f(z) \in f(B') \subseteq B$ y $f(z) = y \in A \backslash B$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(Q_1 \cup Q_2) \subseteq A'$. Además, como C es irreducible entre Q_1 y Q_2, se tiene que $M = C \cup A'$ es un continuo. Ahora, puesto que X es hereditariamente unicoherente, M es unicoherente. Por lo tanto, $K = C \cap A'$ es un subcontinuo. Por otra parte, veamos que $x_1 \notin A'$. Supongamos que $x_1 \in A'$. Así $f(x_1) \in f(A')$. Llegamos a que $f(x_1) \in A$ y $f(x_1) \notin A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x_1 \notin A'$. Así, $x_1 \notin C \cap A'$, esto es, $K = C \cap A'$ es un subcontinuo propio de C tal que $K \cap Q_1 \neq \emptyset$ y $K \cap Q_2 \neq \emptyset$, pues $Q_1 \cup Q_2 \subseteq A'$. Esto contradice el hecho de que C es irreducible entre Q_1 y Q_2. Esta contradicción surge de suponer que f no es monótona. Por lo tanto, f debe ser una función monótona. Por otro lado, por el Teorema 4.2.10 se tiene que Y es una dendrita. ■

5.2. Límites Inversos con Funciones de Ligadura Libremente Descomponibles

Antes de empezar a hablar de límites inversos, damos la definición de producto cartesiano, así como propiedades importantes que cumple este espacio.

Definición 5.2.1. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos no vacíos. Definimos y denotamos su *producto cartesiano* como el conjunto:

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in X_n \,, \text{para cada}\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos la función:

$$\Pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_m$$

definida por, $\Pi_m((x_n)_{n=1}^{\infty}) = x_m$. Esta función es llamada la $m-$*ésima función proyección.*

Lo que a continuación se hace, es definir una función que induzca una métrica para el producto cartesiano, verificar que en efecto esta función es una métrica, para que finalmente podamos hablar de este nuevo espacio como un espacio métrico.

Observación 5.2.2. Sea (X, d') un espacio métrico. Luego, existe una métrica d, la cual genera el mismo espacio métrico que d', con la propiedad de que $d(x, x') \leq 1$, para cada par de puntos x y x' de X. Esta métrica es llamada *métrica acotada.* [16]

Definición 5.2.3. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos, con métricas acotadas. Definimos una métrica ρ, para su producto cartesiano como sigue:

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (x'_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, x'_n).$$

Observación 5.2.4. Puesto que las métricas, d_n, en la definición 5.2.3 son acotadas, ρ está bien definida.

Ya se ha definido una función la cual se asegura es una métrica para el espacio producto, sin embargo, en el siguiente teorema, se da una desmostración formal de esta afirmación.

Lema 5.2.5. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos con métricas acotadas. Luego, ρ es una métrica y, para cada $m \in \mathbb{N}$, Π_m es una función continua.

Demostración. Primero vamos a verificar que ρ es una métrica. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ puntos en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

1. $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$. Puesto que d_n es una métrica, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_n(x_n, y_n) \geq 0$. Así, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) \geq 0$, es decir, $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) \geq 0$.
   Ahora,
   si $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $x_n = y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $d_n(x_n, y_n) = 0$. Consecuentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) = \rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = 0$.
   Inversamente, si $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) = 0$, entonces $d_n(x_n, y_n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como d_n es una métrica, $x_n = y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$.

2. $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(y_n, x_n) = \rho((y_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n=1}^{\infty})$.

3. Como d_n es una métrica, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_n(x_n, z_n) \leq d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)$. Más aún, puesto que $d_n(x_n, z_n), d_n(x_n, y_n), d_n(y_n, z_n) \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{2^n} d_n(x_n, z_n) \leq \frac{1}{2^n}(d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)) = \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) + \frac{1}{2^n} d_n(y_n, z_n).$$
   Así:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, z_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(y_n, z_n).$$

De 1, 2 y 3, se tiene que ρ es una métrica.

Ahora, vamos a verificar que Π_m es una función continua, para cada $m \in \mathbb{N}$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ y $\epsilon > 0$.

Si $\delta = \frac{1}{2^m}\epsilon$ y $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) < \delta$, como $\frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$, se sigue que $\frac{1}{2^m} d_m(x_m, y_m) < \delta$. Por lo tanto, $d_m(x_m, y_m) < 2^m \delta = \epsilon$. Así, Π_m es una función continua. ■

Los dos lemas que enunciamos a continuación, nos ayudan a caracterizar los conjuntos abiertos en el espacio $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

Lema 5.2.6. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos con métricas acotadas. Dado $\epsilon > 0$ y un punto $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, existen $N \in \mathbb{N}$ y N números reales positivos $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$, tales que $\bigcap_{j=1}^{N} \Pi_j^{-1}(B^{d_j}(x_j, \epsilon_j)) \subset B^{\rho}((x_n)_{n=1}^{\infty}, \epsilon)$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Puesto que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$ y pongamos $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{j=1}^{N} \Pi_j^{-1}(B^{d_j}(x_j, \epsilon_j))$. Lo que se quiere verificar es que $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) < \epsilon$.
Notemos que:

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

1. Puesto que $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{j=1}^{N} \Pi_j^{-1}(B^{d_j}(x_j, \epsilon_j))$, se tiene que $\Pi_j((y_n)_{n=1}^{\infty}) \in B^{d_j}(x_j, \epsilon_j)$, para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$. Luego:

   $$y_j \in B^{d_j}(x_j, \epsilon_j), \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, N\},$$

   así:

   $$d_j(x_j, y_j) < \epsilon_j, \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, N\}.$$

   Finalmente, como $\epsilon_j = \frac{\epsilon}{2^N}$, $d_j(x_j, y_j) < \frac{\epsilon}{2^N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$. Por lo tanto,

   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^N} \epsilon.$$

2. Ahora, como $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$ y puesto que d_n es una métrica acotada, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

   $$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así, de 1 y 2, se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^N}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\left(1-\frac{1}{2^N}\right)\frac{1}{2^N}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon\leq\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon.$$

Esto es,

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})<\epsilon.$$

De donde $(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B^{\rho}((x_n)_{n=1}^{\infty},\epsilon)$. ■

Lema 5.2.7. Sea $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos con métricas acotadas. Dada una cantidad finita de números reales positivos $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k$ y un punto $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$, existe $\epsilon>0$ tal que $B^{\rho}((x_n)_{n=1}^{\infty},\epsilon)\subseteq\bigcap_{j=1}^{k}\Pi_j^{-1}(B^{d_j}(x_j,\epsilon_j))$.

Demostración. Sean $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k$ números reales positivos y $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$. Tomemos $U=\bigcap_{j=1}^{k}\Pi_j^{-1}(B^{d_j}(x_j,\epsilon_j))$. Pongamos:

$$\epsilon=\text{mín}\left\{\frac{1}{2}\epsilon_1,\ldots,\frac{1}{2^k}\epsilon_k\right\}.$$

Queremos verificar que $B^{\rho}((x_n)_{n=1}^{\infty},\epsilon)\subset U$. Para esto, sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B^{\rho}((x_n)_{n=1}^{\infty},\epsilon)$. Luego:

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})<\epsilon,\ \text{esto es}\,,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)<\epsilon.$$

De aquí:

$$\frac{1}{2^j}d_j(x_j,y_j)<\epsilon\leq\frac{1}{2^j}\epsilon_j,\ \text{para cada}\,j\in\{1,\ldots,k\}.$$

Así:

$$\text{si}\,j\in\{1,\ldots,k\},\ \text{entonces},\ d_j(x_j,y_j)<\epsilon_j.$$

Por lo tanto, $B^{\rho}((x_n)_{n=1}^{\infty},\epsilon)\subset U$. ■

El Lema 5.2.6, el Lema 5.2.7 y el Teorema 1.1.34, justifican la siguiente observación.

Observación 5.2.8. Los conjuntos abiertos básicos de $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ son de la forma $B=\bigcap_{j=1}^{k}\Pi_j^{-1}(U_j)$, donde U_j es abierto en X_j, para cada $j\in\{1,\ldots,k\}$. Estos conjuntos, no son más que productos $\prod_{n=1}^{\infty}U_n$, donde U_n es abierto en (X_n,d_n) y $U_n=X_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, excepto una cantidad finita de índices. Así, al conjunto $B = \bigcap_{j=1}^{k} \Pi_j^{-1}(U_j)$ lo podemos interpretar como:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \Pi_i^{-1}(U_i) = \left(\prod_{j=1}^{k} U_j\right) \times \left(\prod_{j=k+1}^{\infty} X_j\right).$$

Una de las propiedades que cumplen las sucesiones inversas de continuos, es que su límite inverso, es un continuo. Por supuesto, esto se demostrará más adelante. Pero antes de eso, hay que verificar que el producto cartesiano de continuos es en efecto un continuo. A continuación se da sólo un bosquejo de la demostración de este hecho, ya que el dar una desmostración detallada, merece por lo menos un capítulo completo.

Teorema 5.2.9. El producto cartesiano finito o numerable de continuos, o de espacios métricos compactos no vacíos, es un continuo o un espacio métrico compacto no vacío, respectivamente.

Demostración. El producto de espacios compactos es compacto, por [15, Teorema 4, pág. 17], conexo por [15, Teorema 11, pág. 137], y metrizable por los Lemas 5.2.6 y 5.2.7. En el caso finito, es no vacío y en el caso numerable, es no vacío por el Axioma de Elección [13, pág. 20]. En el caso de que el producto a lo más numerable de espacios métricos y compactos es métrico y compacto, no se requiere el Axioma de Elección [16, Teorema 1.1.11, pág. 6]. ■

Ahora tenemos las herramientas necesarias, para poder introducirnos en el tema de los límites inversos.

Definición 5.2.10. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función continua. A la sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ de espacios métricos y funciones se le llama *sucesión inversa*. A las funciones f_n^{n+1} se les llama *funciones de ligadura* .

Por lo general, una sucesión inversa la representamos de la siguiente forma:

$$X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \xleftarrow{f_2^3} X_3 \xleftarrow{f_3^4} X_4 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_{n-1} \xleftarrow{f_{n-1}^n} X_n \xleftarrow{f_n^{n+1}} X_{n+1} \xleftarrow{f_{n+1}^{n+2}} \cdots$$

Observación 5.2.11. Si $n > m$, entonces $f_m^n : X_n \to X_m$ es la función tal que:

$$f_m^n = f_m^{m+1} \circ f_{m+1}^{m+2} \circ \cdots \circ f_{n-1}^n.$$

Ejemplo 5.2.12. Para $n = 3$ y $m = 1$, se tiene que:

$$f_1^3 = f_1^2 \circ f_2^3.$$

Si ahora $n = 4$ y $m = 1$, entonces:

$$f_1^4 = f_1^2 \circ f_2^3 \circ f_3^4.$$

Definición 5.2.13. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos con funciones de ligadura f_n^{n+1} continuas. El *límite inverso* de la sucesión inversa $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un subespacio de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ que se denota y define como:

$$\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para cada}\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

El límite inverso $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ también se denota con X_∞.

Observación 5.2.14. Si $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es una sucesión inversa de espacios métricos, entonces, el límite inverso X_∞, es un espacio métrico.

Cabe mencionar que el límite inverso de una sucesión puede ser un conjunto vacío. Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 5.2.15. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $X_n = \mathbb{N}$ y $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ la función definida por $f_n^{n+1}(x) = x + 1$. Supongamos que existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X_n$. Además:
$x_1 = f_1^2(x_2) = x_2 + 1$. Así $x_2 = x_1 - 1$.
$x_2 = f_2^3(x_3) = x_3 + 1$. Así $x_3 = x_2 - 1 = x_1 - 2$.
$x_3 = f_3^4(x_4) = x_4 + 1$. Así $x_4 = x_3 - 1 = x_1 - 3$.
$\vdots$
$x_{n-1} = f_{n-1}^n(x_n) = x_n + 1$. Así $x_n = x_{n-1} - 1 = x_1 - (n-1)$.

Sea $n = x_1 + 2$. De donde, $x_n = x_1 - (n-1) = x_1 - (x_1 + 1) = -1$, lo cual contradice el hecho de que $x_n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \notin \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$. De aquí, $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} = \emptyset$.

Definición 5.2.16. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos con funciones de ligadura f_n^{n+1} continuas y límite inverso X_∞. Denotamos por f_m la función Π_m restringida a $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$, es decir,

$$f_m = \Pi_m|_{\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}}.$$

Esto es,

$$f_m : \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} \longrightarrow X_m.$$

Definición 5.2.17. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos y funciones de ligadura f_n^{n+1} continuas. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea:

$$S_m = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k, 1 \leqslant k \leqslant m \right\}.$$

Teorema 5.2.18. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos con funciones de ligadura f_n^{n+1} continuas y límite inverso X_∞. Entonces se cumple que:

1. Para cada $m \in \mathbb{N}$, S_m es homeomorfo a $\displaystyle\prod_{n=m}^{\infty} X_n$.
2. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $S_{m+1} \subseteq S_m$.
3. $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} = \displaystyle\bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$.
4. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es un continuo, entonces X_∞ es un continuo.

Demostración. 1. Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Sea $h : S_m \to \prod_{n=m}^{\infty} X_n$ definida por $h((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=m}^{\infty}$, para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_m$. Notemos lo siguiente:

$$S_m \xrightarrow{h} \prod_{n=m}^{\infty} X_n \xrightarrow{\Pi_k} X_k.$$

Así:

$$\Pi_k \circ h : S_m \longrightarrow X_k.$$

Para ver que la función h es continua, por el Teorema 5.2.15 de [10], es suficiente probar que la función $\Pi_k \circ h$ es continua, para cada $k \geq m$. Sean $k \geq m$ y U un abierto de X_k. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\Pi_k \circ h)^{-1}(U) &= h^{-1}(\Pi_k^{-1}(U)) \\
&= h^{-1}\left(\left(\prod_{n=m}^{k-1} X_n\right) \times U_k \times \left(\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n\right)\right) \\
&= \left(\prod_{n=1}^{k-1} X_n\right) \times U_k \times \left(\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n\right).
\end{aligned}$$

Así, por la Observación 5.2.8, $(\Pi_k \circ h)^{-1}(U)$ es un abierto en S_m. Por lo tanto, la función $\Pi_k \circ h$ es continua para cada $k \geq m$. Así, h es una función continua.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Se define la función $g : \prod_{n=m}^{\infty} X_n \longrightarrow S_m$ como sigue:

$$g((x_n)_{n=m}^{\infty}) = \begin{cases} x_n, & \text{si} \quad n \geq m, \\ \\ f_n^m(x_m), & \text{si} \quad n < m. \end{cases}$$

Veamos que g es continua. Para eso hay que probar que $\Pi_p \circ g$ es continua, para cada $p \in \mathbb{N}$. Notemos lo siguiente:

$$\prod_{n=m}^{\infty} X_n \xrightarrow{g} S_m \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} X_n \xrightarrow{\Pi_p} X_p.$$

$$\Pi_p \circ g : \prod_{n=m}^{\infty} X_n \longrightarrow X_p.$$

Sean $p \in \mathbb{N}$ y U_p un abierto en X_p. Veamos que el conjunto $(\Pi_p \circ g)^{-1}(U_p)$ es un abierto en $\prod_{n=m}^{\infty} X_n$. Tomamos en cuenta dos casos:

a) Si $p < m$, consideremos la función $f_p^m \circ \Pi_m : \prod_{n=m}^{\infty} X_n \to X_p$. Luego, se tiene que para

$(a_n)_{n=m}^{\infty} \in \prod_{n=m}^{\infty} X_n$:

$$\begin{aligned}(\Pi_p \circ g)((a_n)_{n=m}^{\infty}) &= \Pi_p((f_1^m(a_m), f_2^m(a_m), \ldots, f_{m-1}^m(a_m), a_m, a_{m+1}, \ldots)) \\ &= f_p^m(a_m) \\ &= f_p^m(\Pi_m(a)),\end{aligned}$$

donde $a = (f_1^m(a_m), f_2^m(a_m), \ldots, f_{m-1}^m(a_m), a_m, a_{m+1}, \ldots)$. Así, $\Pi_p \circ g = f_p^m \circ \Pi_m$. Puesto que las funciones Π_m y f_p^m son continuas, se sigue que $f_p^m \circ \Pi_m$ es una función continua y, consecuentemente, $\Pi_p \circ g$ es continua.

b) Si $p \geq m$, se tiene que:

$$(\Pi_p \circ g)^{-1}(U_p) = U_m \times U_{m+1} \times \ldots \times U_p \times \left(\prod_{n=p+1}^{\infty} X_n\right),$$

donde $U_m = X_m, \ldots, U_{p-1} = X_{p-1}$. Así, por la Observación 5.2.8, el conjunto $(\Pi_p \circ g)^{-1}(U_p)$ es abierto en $\prod_{n=m}^{\infty} X_n$. Consecuentemente, la función $\Pi_p \circ g$ es continua. Como $p \in \mathbb{N}$ se tomó arbitrario, $\Pi_p \circ g$ es continua, para cada $p \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la función g es continua.

Ahora vamos a ver que $g \circ h = I_{S_m}$ y que $h \circ g = I_{\prod_{n=m}^{\infty} X_n}$. Primero vamos a dar una idea de lo que queremos probar con el siguiente diagrama:

$$S_m \xrightarrow{h} \prod_{n=m}^{\infty} X_n \xrightarrow{g} S_m.$$

$$g \circ h : S_m \longrightarrow S_m.$$

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_m$. Luego, $h((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=m}^{\infty}$. Así, $g(h((x_n)_{n=1}^{\infty})) = g((x_n)_{n=m}^{\infty}) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por lo tanto, $g \circ h = I_{S_m}$. Ahora vamos a probar que $g \circ h = I_{\prod_{n=m}^{\infty} X_n}$. Con el diagrama siguiente, nos damos una idea de lo que queremos probar:

$$\prod_{n=m}^{\infty} X_n \xrightarrow{g} S_m \xrightarrow{h} \prod_{n=m}^{\infty} X_n.$$

$$h \circ g : \prod_{n=m}^{\infty} X_n \longrightarrow \prod_{n=m}^{\infty} X_n.$$

Sea $(x_n)_{n=m}^{\infty} \in \prod_{n=m}^{\infty} X_n$. Luego, $h(g((x_n)_{n=m}^{\infty})) = h((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=m}^{\infty}$. Por lo tanto, $h \circ g = I_{\prod_{n=m}^{\infty} X_n}$. Hemos probado que las funciones h, g son continuas y que, además, $g \circ h = I_{S_m}$, $h \circ g = I_{\prod_{n=m}^{\infty} X_n}$. Por lo tanto, por el Teorema 1.1.44, h es un homomorfismo. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$, S_m es homeomorfo a $\prod_{n=m}^{\infty} X_n$.

2. Veamos ahora que para cada $m \in \mathbb{N}$, $S_{m+1} \subseteq S_m$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_{m+1}$. Se sigue que $f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq m+1$, de donde $f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq m$. Esto es, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_m$. Como $m \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, tenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $S_{m+1} \subseteq S_m$.

3. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$. Se sigue que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$, así, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_k$. De aquí, $f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k$. Por lo tanto, $f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$. De donde, $\bigcap_{m=1}^{\infty} S_m \subseteq \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$. Ahora, sean $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ y $m \in \mathbb{N}$. Se sigue que, para cada $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq m$, $f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k$. Así, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S_m$. Dado que $m \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, se tiene que $(x_m)_{m=1}^{\infty} \in S_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$. Con lo cual $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$.

Por lo tanto, $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$.

4. Sea $m \in \mathbb{N}$. Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es un continuo, por el Teorema 5.2.9, $\prod_{n=m}^{\infty} X_n$ es un continuo. Por la parte 1, del presente teorema, se sigue que S_m es un continuo. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$, S_m es un continuo. Por la parte 2 tenemos que $S_{m+1} \subseteq S_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema 2.1.9, se tiene que $\bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$ es un continuo. Por lo tanto, por la parte 3 previa, $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un continuo. ■

A continuación, se da el ejemplo de una sucesión inversa de continuos que por el Teorema 5.2.18, el límite inverso de dicha sucesión es un continuo.

Ejemplo 5.2.19. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $X_n = [0,1]$ y $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ definida por

$$f_n^{n+1}(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ -2t+2, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, X_∞ es un continuo.

No es fácil determinar explícitamente quién es el continuo X_∞, sin embargo, se sabe que X_∞ es homeomorfo al continuo de Knaster [16, pág. 22].

Observación 5.2.20. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos con funciones de ligadura f_n^{n+1} continuas. Se sigue que $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ si y sólo si, para cada $k \in \mathbb{N}$, $X^{(k)} = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=k}^{\infty}$, donde

$$X^{(k)} = \left\{ (x_n)_{n=k}^{\infty} \in \prod_{n=k}^{\infty} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para cada } n \geq k \right\}.$$

Uno de los propósitos de esta sección es revisar el comportamiento de los límites inversos, con funciones de ligadura libremente descomponibles. En los siguientes dos teoremas, nos encargamos de eso. Por supuesto, hay mucho más por estudiar sobre este tema, pero para nuestros propósitos es suficiente con esto.

Teorema 5.2.21. Sean $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de continuos con $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ y la función proyección $f_n : X \to X_n$. Las funciones de ligadura f_n^{n+1} son funciones libremente descomponibles si y sólo si las funciones proyección f_n son funciones libremente descomponibles.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $f_n = f_n^{n+1} \circ f_{n+1}$. Supongamos que la proyección f_n es una función libremente descomponible. Se sigue que la función f_n^{n+1} es una función libremente descomponible, por Teorema 3.1.9. Como $n \in \mathbb{N}$, fue arbitrario, se tiene que cada una de las funciones ligadura f_n^{n+1} es libremente descomponible.

Ahora supongamos que cada una de las funciones de ligadura f_n^{n+1} es una función libremente descomponible. Dado $m \in \mathbb{N}$, debemos probar que la función f_m es libremente descomponible. Sean A_m y B_m subcontinuos propios de X_m tales que $X = A_m \cup B_m$. Como f_m es una función libremente descomponible, podemos tomar subcontinuos propios A_{m+1} y B_{m+1} de X_{m+1} tales que $X_{m+1} = A_{m+1} \cup B_{m+1}$, $f_m^{m+1}(A_{m+1}) \subseteq A_m$ y $f_m^{m+1}(B_{m+1}) \subseteq B_m$. Continuando con este proceso, obtenemos dos sucesiones $\{A_{m+k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{B_{m+k}\}_{k=1}^{\infty}$ de continuos tales que para cada $k \in \mathbb{N}$, $X_{m+k} = A_{m+k} \cup B_{m+k}$, $f_{m+k-1}^{m+k}(A_{m+k}) \subseteq A_{m+k-1}$ y $f_{m+k-1}^{m+k}(B_{m+k}) \subseteq B_{m+k-1}$. Sea $X = \varprojlim\left\{A_{m+k}, f_{m+k}^{m+k+1}\Big|_{A_{m+k+1}}\right\}$ y $B = \varprojlim\left\{B_{m+k}, f_{m+k}^{m+k+1}\Big|_{B_{m+k+1}}\right\}$. Por la Observación 5.2.20 y el Teorema 5.2.18 parte 4, se tiene que A y B son subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$, $f_m(A) \subseteq A_m$ y $f_m(B) \subseteq B_m$. Por lo tanto, f_m es una función libremente descomponible. ∎

Una primera conjetura que se hace [5], es que las funciones monótonas preservan la conexidad local en límites inversos. Al no poderse demostrar éste hecho, G. R. Gordh, Jr. y C.B. Hughes, retoman este problema [11], y trabajan en determinar cuándo el límite inverso de una sucesión inversa de continuos localmente conexos es un continuo localmente conexo. Es así como introducen y estudian una generalización de las funciones monótonas las cuales son, precisamente, las funciones libremente descomponibles.

Teorema 5.2.22. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de continuos con límite inverso X_∞, donde cada f_n^{n+1} es una función libremente descomponible.

1. Si cada X_n es semilocalmente conexo, entonces X_∞ es semilocalmente conexo.

2. Si cada X_n es localmente conexo, entonces X_∞ es localmente conexo.

Demostración. 1. Supongamos que X_n es semilocalmente conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean a y b puntos distintos de X_∞. Pongamos $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots)$. Como $a \neq b$, existen a_i y b_i tales que $a_i \neq b_i$. Para la proyección f_i, se tiene que $f_i(a) = a_i \neq b_i = f_i(b)$. Por lo tanto, $\Im = \{f_n\}$ es una familia de funciones libremente descomponibles que separa puntos e $Im(f_n) = X_n$ es semilocalmente conexo. Por el Teorema 5.1.2 parte 1, se tiene que X_∞ es semilocalmente conexo.
2. Supongamos que X_n es localmente conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea C un subcontinuo de X_∞ y $a \in X_\infty \backslash C$ y supongamos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_k(a) \in f_k(C)$. Así, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe

$c_0 \in C$ tal que $f_k(c_0) = a_k$. Por otro lado, como $a \in X_\infty \setminus C$, $a \neq c_0$. Entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}(a) = a_{i_0} \neq f_{i_0}(c_0)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(a) \notin f_k(C)$. Así, $\Im = \{f_n\}$ es una familia de funciones libremente descomponibles que separa puntos de subcontinuos e $Im(f_n) = X_n$ es localmente conexo. Por el Teorema 5.1.2 parte 2, se tiene que X_∞ es localmente conexo. ■

Antes de concluir esta sección, es importante mencionar que el estudio de los límites inversos en la teoría de los continuos, en general, tiene fuertes consecuencias que en este trabajo no hemos incluido, ya que quedan fuera de nuestros objetivos. Sin embargo, hemos decidido mencionar quizá el resultado más fuerte que se tiene: *Cada continuo es homeomorfo a un límite inverso de poliedros* [16, Teorema 2.1.51, pág. 91].

5.3. Funciones Hereditariamente Libremente Descomponibles

Hay funciones con cierta propiedad, que al restringirlas a un subconjunto del dominio de dicha función, resulta que la función restricción, cumple también esta propiedad, es decir, la propiedad es heredada a cualquier subconjunto del espacio total. En este capítulo, damos un pequeño repaso de estas funciones, en particular, estudiamos las funciones hereditariamente libremente descomponibles.

Definición 5.3.1. Sea $\mathcal{A}$ una clase arbitraria de funciones, la cual contiene a la clase de homeomorfismos. Diremos que la función $f : X \to Y$ es hereditariamente $\mathcal{A}$, si para cualquier continuo $K \subset X$, la función $f|_K$ está en $\mathcal{A}$.

Ejemplo 5.3.2. La función definida en el Ejemplo 2.3.27, es una función hereditariamente libremente descomponible. Puesto que para cada subcontinuo K de X, se tienen tres casos:

1. $K \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
2. $K \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{1\}$.
3. $K = \left(\left[a, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \cup \left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, b\right] \times \{1\}\right)$ con $0 < a \leq \frac{1}{2} \leq b < 1$.

En cualquiera de los tres casos, se tiene que $f|_K$ es una función monótona. Así, por los Teoremas 3.1.5 y 3.1.3, $f|_K$ es libremente descomponible.

Naturalmente el heredar propiedades también lo cumplen algunos continuos, sin embargo, nosotros sólo estaremos trabajando con los continuos hereditariamente descomponibles. En seguida se da la definición formal.

Definición 5.3.3. Sea X un continuo. Se dice que X es *hereditariamente descomponible* si cada subcontinuo de X es descomponible.

Ejemplo 5.3.4. El arco es un continuo hereditariamente descomponible.

Teorema 5.3.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si Y es localmente conexo y f es hereditariamente libremente descomponible, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos que Y es localmente conexo, f es hereditariamente libremente descomponible y que f no es monótona. Luego, existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es conexo. Como Y es localmente conexo, por [2, Corolario 3.4], existe un subconjunto abierto y conexo W de Y tal que $y \in W$, $Y \backslash W$ tiene un número finito de componentes $Y_1, \ldots, Y_k$ y con la propiedad de que si K es un subcontinuo de X y $f^{-1}(W) \subset K$, entonces $Cl(W) \subsetneq f(K)$. Por [15, Teorema 4, pág. 133], como $Y \backslash W = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$, $W \cup Y_i$ es conexo, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Así, por el Teorema 1.2.8, $Cl(W \cup Y_i) = Cl(W) \cup Y_i$ es conexo, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Más aún, como $\bigcap_{i=1}^{k}(Cl(W) \cup Y_i) = Cl(W) \neq \emptyset$, por el Teorema 1.2.7, $Y_1^{'} = Cl(W) \cup \bigcup_{j=2}^{k} Y_j$ es un continuo. Notemos también que Y_1 y $Y_1^{'}$ son subcontinuos propios de Y tales que $Y = Y_1 \cup Y_1^{'}$. Puesto que f es libremente descomponible, existen subcontinuos propios X_1 y $X_1^{'}$ de X tales que $X = X_1 \cup X_1^{'}$, $f(X_1) \subset Y_1$ y $f(X_1^{'}) \subset Y_1^{'}$. Por otro lado, como $\left(W \cup \bigcup_{j=2}^{k} Y_j\right) \cap Y_1 = \emptyset$, $f^{-1}\left(W \cup \bigcup_{j=2}^{k} Y_j\right) \subset X_1^{'}$. Consecuentemente, $\left(W \cup \bigcup_{j=2}^{k} Y_j\right) \subset f(X_1^{'})$. Por lo tanto, $f(X_1^{'}) = Y_1^{'}$. Definamos $f_1 = f|_{X_1^{'}}$. Puesto que f es hereditariamente libremente descomponible, f_1 es libremente descomponible.

Ahora, sea $Y_2^{'} = Cl(W) \cup \bigcup_{j=3}^{k} Y_j$, nuevamente, por [15, Teorema 4, pág. 133], $Y_2^{'}$ es un subcontinuo de Y. Notemos, además que $Y_1^{'} = Y_2 \cup Y_2^{'}$. De aquí, puesto que f_1 es libremente descomponible, existen subcontinuos propios X_2 y $X_2^{'}$ de $X_1^{'}$ tales que $X_1^{'} = X_2 \cup X_2^{'}$, $f_1(X_2) \subset Y_2$ y $f_1(X_2^{'}) \subset Y_2^{'}$. Como $\left(W \cup \bigcup_{j=3}^{k} Y_j\right) \cap Y_2 = \emptyset$, $f_1^{-1}\left(W \cup \bigcup_{j=3}^{k} Y_j\right) \subset X_2^{'}$ y, consecuentemente, $W \cup \bigcup_{j=3}^{k} Y_j \subset f_1(X_2^{'})$. Por lo tanto, $f_1(X_2^{'}) = Y_2^{'}$. Sea $f_2 = f_1|_{X_2^{'}} = f|_{X_2^{'}}$. Por hipótesis, f_2 es una función libremente descomponible. Al repetir este proceso $k-1$ veces, obtenemos un subcontinuo $X_{k-1}^{'}$ de X y una función $f_{k-1} : X_{k-1}^{'} \to Y_{k-1}^{'}$, donde $Y_{k-1}^{'} = Cl(W) \cup Y_k$. Por hipótesis, f_{k-1} es libremente descomponible. Así, existen subcontinuos propios X_k y $X_k^{'}$ de $X_{k-1}^{'}$ tales que $X_{k-1}^{'} = X_k \cup X_k^{'}$, $f_{k-1}(X_k) \subset Cl(W)$ y $f_{k-1}(X_k^{'}) \subset Y_k$. Como $W \cap Y_k = \emptyset$, $f_{k-1}^{-1}(W) \subset X_k^{'}$. Por lo tanto, $Cl(W) = f_{k-1}(X_k^{'})$ pero, por la construcción que se hizo, $f_{k-1}^{'}(W) = f_{k-2}^{'}(W) = \ldots = f_1^{'}(W) = f^{'}(W)$, de aquí que $Cl(W) = f(X_k^{'})$. Pero, por la elección de W, $Cl(W) \subsetneq f(X_k^{'})$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción surge de suponer que f no es monótona. Por lo tanto, f es monótona. ■

La descomponibilidad hereditaria se preserva bajo funciones hereditariamente libremente descomponibles.

Teorema 5.3.6. Sea $f : X \to Y$ una función hereditariamente libremente descomponible entre continuos. Si Y es hereditariamente descomponible, entonces X es hereditariamente descomponible.

Demostración. Supongamos que X no es hereditariamente descomponible. Así, existe un subcontinuo indescomponible Z de X. Ya que f es hereditariamente libremente descomponible, la restricción $f|_Z : Z \to f(Z)$ es libremente descomponible. Por el Teorema 4.3.9, se tiene que $f(Z)$ es indescomponible. Pero esto contradice el hecho de que el continuo Y es hereditariamente descomponible. Por lo tanto, X es un continuo hereditariamente descomponible. ■

Teorema 5.3.7. Sea $f : X \to Y$ una función hereditariamente libremente descomponible entre continuos. Si Y es hereditariamente descomponible, entonces f es monótona.

La prueba del Teorema 5.3.7 queda fuera de los objetivos de esta tesis, es por eso que no la hemos incluido aquí. Sin embargo, alguien interesado en revisar su demostración, puede consultar [2].

Teorema 5.3.8. Sea $f : X \to Y$ una función hereditariamente libremente descomponible. Si Y es hereditariamente descomponible, entonces se cumplen las siguientes proposiciones:

1. f es monótona.
2. f es fuertemente libremente descomponible.
3. f es hereditariamente monótona.
4. f es hereditariamente fuertemente libremente descomponible.
5. $f(L)$ es irreducible para cada subcontinuo irreducible L de X.

Demostración. Supongamos que Y es hereditariamente descomponible.
1. Por el Teorema 5.3.7, f es monótona.
2. En virtud del Teorema 3.1.5 y la parte 1 del presente teorema, f es una función fuertemente libremente descomponible.
3. Sea A un subcontinuo de X. Ya que f es hereditariamente libremente descomponible, la función $f|_A : A \to f(A)$ es libremente descomponible. Notemos que $f(A)$ es un subcontinuo de Y. Como Y es hereditariamente descomponible, $f(A)$ es hereditariamente descomponible. Así por el Teorema 5.3.7, $f|_A$ es una función monótona. Por lo tanto, f es hereditariamente monótona.
4. Sea A un subcontinuo de X, por la parte 3, de este teorema, la función $f|_A : A \to f(A)$ es monótona. Nuevamente por el Teorema 3.1.5, se tiene que f es fuertemente libremente descomponible. De aquí, f es hereditariamente fuertemente libremente descomponible.
5. Sea L un subcontinuo irreducible de X. Por la parte 4, de este teorema, la función $f|_L : L \to f(L)$ es fuertemente libremente descomponible. Por el Teorema 4.3.12, el subcontinuo $f(L)$ es irreducible. ■

Conclusiones

Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es libremente descomponible, si para cada par de subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, existen dos subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A) \subset A'$ y $f(B) \subset B'$. Una función es fuertemente libremente descomponible, si para cada descomposición $Y = A \cup B$, los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos. El objetivo de este trabajo fue estudiar propiedades de estas clases de funciones entre continuos, su relación con los homeomorfismos, funciones monótonas, o confluentes, por mencionar algunas, y una aplicación en la clasificación de continuos, siguiendo principalmente tres líneas de investigación:

1. Estudiar diferentes clases de continuos y las relaciones convenientes que existen entre estas clases para el desarrollo de nuestro trabajo.
2. Definir clases de funciones entre continuos, entre ellas consideramos las clases de funciones libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles, para posteriormente establecer relaciones entre éstas.
3. Clasificar continuos en términos de las funciones libremente descomponibles.

- Respecto a la primera línea de investigación, obtuvimos como resultado principal, que todo continuo localmente conexo es aposindético por continuos, semilocalmente conexo, conexo en pequeño, aposindético, libremente descomponible con respecto a puntos y subcontinuos y libremente descomponibles. Tres clases de continuos que se consideraron especiales son, la clase de los continuos localmente conexos, los unicoherentes y los irreducibles.
- En cuanto a la segunda línea de investigación, dada una función continua y suprayectiva entre continuos, algunos de los resultados obtenidos fueron los siguientes:
  - La composición de funciones libremente descomponibles (fuertemente libremente descomponibles) es una función libremente descomponible (fuertemente libremente descomponible), respectivamente.
  - La unicoherencia y la irreducibilidad se preservan bajo funciones fuertemente libremente descomponibles mas no los puntos de irreducibilidad.
  - Toda función monótona es a lo más monótona.
  - Toda función a lo más monótona es fuertemente libremente descomponible.
  - Toda función fuertemente libremente descomponible, es libremente descomponible.

Siguiendo con la segunda línea de investigación, en relación con los resultados mencionados anteriormente, no fue posible obtener el recíproco de los tres últimos resultados. Sin embargo, para el primer caso, obtuvimos que si f es una función a lo más monótona con rango localmente conexo, entonces f es monótona. Para el segundo caso, si f es una función fuertemente libremente descomponible con dominio unicoherente, entonces f es a lo más monótona. Finalmente, si f es una función libremente descomponible y confluente, entonces f es fuertemente libremente descomponible.

Resumiendo, después de establecer relaciones entre las funciones definidas en este trabajo y ver que en la mayoría de los casos, los recíprocos no eran verdaderos, fue necesario variar ya sea el dominio o el rango de la función por continuos localmente conexos, unicoherentes o irreducibles y así fue posible garantizar algunos otros resultados interesantes, con base a esto, es que estos tres continuos fueron llamados tipos especiales de continuos.

- Finalmente, atendiendo a nuestra última rama de investigación, hemos obtenido que si se tiene una familia de funciones libremente descomponibles $\Im$, que separa puntos e $Im(f)$ es semilocalmente conexo para cada $f \in \Im$, entonces el dominio de f es semilocalmente conexo. Si la familia $\Im$ separa puntos de subcontinuos e $Im(f)$ es localmente conexo, entonces el dominio la función es localmente conexo. Se obtuvo también una caracterización para un arco y una dendrita en términos de las funciones libremente descomponibles. A saber, si $f : X \to Y$ es una función libremente descomponible, con X irreducible y Y localmente conexo, entonces Y es un arco y si X es hereditariamente unicoherente y Y localmente conexo, entonces Y es una dendrita.

  En esta línea de investigación, también se obtuvieron resultados en límites inversos. Al no poderse demostrar que las funciones monótonas preservan la conexidad local en límites inversos, se introduce a las funciones libremente descomponibles como una generalización de las funciones monótonas y los resultados obtenidos son los siguientes: el límite inverso de una sucesión inversa de continuos semilocalmente conexos X_∞, con funciones ligadura libremente descomponibles, es semilocalmente conexo. Si en la sucesión inversa reemplazamos a los continuos semilocalmente conexos con continuos localmente conexos, entonces el límite inverso X_∞, es localmente conexo.

Bibliografía

[1] F. Barragán y M. de J. López, *Funciones especiales entre continuos*, Capítulo 5 en Topología y Sistemas Dinámicos III (Editores: J. J. Angoa, J. Arrazola, R. Escobedo, A. Illanes, M. Osorio, J. Poisot, G. Sierra, A. Tamariz). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2010.

[2] J. Camargo y S. Macías, *On freely decomposable maps*, Topology Proc., 159 (2012), 891-899.

[3] J. Camargo y S. Macías, *On strongly freely decomposable maps and induced maps*, Glasnik Mat., 48(68) (2013), 429-442.

[4] G. Cantor, *Uber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 5. Fortsetzung, Math. Ann., 21 (1883), 545-591.

[5] C.E. Capel, Inverse limit spaces, Duke Math. J. 21 (1954), 233-246.

[6] J. J. Charatonik, *History of continuum theory*, Handbook of the History of General Topology. Editores: C. E. Aull y R. Lowen, Vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston and London, 1998, 703-786.

[7] J. J. Charatonik, *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math. 56 (1964), 213-220.

[8] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas, Soc. Mat. Mex., Vol 22, (1998), 227-253

[9] H. S. Davis, *A note on connectedness im kleinen*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 1237-1241.

[10] H. Diederich, F. M. José L., C. F. Andrés y A. P. Ángel, *Topología General*, Serie Textos No. 22, Soc. Mat. Mex., 2003.

[11] G. R. Gordh, Jr. y C. B. Hughes, *On freely decomposable mappings of continua*, Glasnik Math. 85 (1974), 155-164.

[12] C. B. Hughes, *Some remarks on freely decomposable mappings*, Topology Proc. 2 (1977), 213-217.

[13] Thomas J. Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, Hollanda, 1973.

[14] F. L. Jones, *Historia y Desarrollo de la Teoría de los Continuos Indescomponibles*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 27, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[15] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, 1968.

[16] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.

[17] T. Maćkowiak, *Continuous Mappings on Continua*, Dissertaciones Math. (Rozprawy Mat.), 158 (1979), 1-91.

[18] M. A. Moliona Garza Galindo, *Algunos Aspectos sobre la Función T de Jones*, Tesis de Licenciatura, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, 1998.

[19] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[20] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

Índice alfabético

$Im(f)$, 2
S_m, 76
θ_1 continuo, 48
θ_1°-continuo, 48
$m - \acute{e}sima$ función proyección, 71
n-esfera, 16

Arco, 15

Bola abierta, 5
Bola cerrada, 5

Círculo de Varsovia, 17
Clausura, 7
Componente, 11
Composición de funciones, 2
Conjunto $K(x)$, 57
Conjunto $L(x)$, 57
Conjunto $T(A)$, 28
Conjunto cerrado, 6
Conjunto de Cantor, 19
Conjuntos separados, 9
Continuo, 15
Continuo aposindético, 25
Continuo aposindético por continuos, 27
Continuo aposindético respecto a subconjuntos, 25
Continuo conexo en pequeño, 22
Continuo de Knaster, 49
Continuo descomponible, 24
Continuo hereditariamente descomponible, 81
Continuo hereditariamente unicoherente, 59
Continuo indescomponible, 24
Continuo irreducible, 63
Continuo irreducible entre a y b, 63
Continuo libremente descomponible, 24
Continuo libremente descomponible con respecto a puntos y subcontinuos, 24
Continuo localmente conexo, 19
Continuo no degenerado, 15
Continuo semilocalmente conexo, 21
Continuo unicoherente, 58
Cubierta abierta, 12
Curva cerrada simple, 16
Curva sinoidal del topólogo, 16

Dendrita, 60
Diámetro de un conjunto, 4
Distancia entre el punto x y el conjunto B, 4
Distancia usual, 4

Espacio T_1, 8
Espacio cociente, 9
Espacio compacto, 12
Espacio conexo, 10
Espacio de Hausdorff, 9
Espacio métrico, 4
Espacio regular, 9

Familia de funciones que separa puntos, 69
Familia de funciones que separa puntos de subcontinuos, 69
Frontera, 7
Función a lo más monótona, 47
Función abierta, 31
Función atriódica, 31
Función biyectiva, 3
Función casi interior, 31
Función casi monótona, 31
Función cociente, 9
Función confluente, 31
Función débilmente confluente, 31

Función débilmente monótona, 31
Función empalmante, 32
Función fuertemente libremente descomponible, 43
Función identidad, 2
Función inversa, 3
Función inyectiva, 3
Función libremente descomponible, 43
Función ligera, 32
Función MO, 32
Función monótona, 32
Función OM, 32
Función pseudoconfluente, 63
Función restricción, 2
Función semi confluente, 32
Función semiabierta, 32
Función simple, 32
Función sobreyectiva, 3
Funciones de ligadura, 75

Homeomorfismo, 8

Imagen inversa, 1
Interior, 7

Límite, 7
Límite inverso, 75

Métrica acotada, 71
Métrica euclidiana, 4

Partición, 9
Punto de separación o de corte, 56

Semicontinua superiormente, 10
Separación, 10
Sucesión, 7
Sucesión convergente, 7
Sucesión inversa, 75

Topología cociente, 9
Totalmente disconexo, 11
Triodo simple, 16

Vecindad, 8