



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS**

**“TEORÍAS DE YANG-MILLS EN TÉRMINOS DE
VARIABLES DE CURVATURA Y SU CUANTIZACIÓN”**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO EN FÍSICA APLICADA**

PRESENTA:

JONATAN ISAÍ SÁNCHEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR:

DR. RICARDO ROSAS RODRÍGUEZ

Huajuapán de León, Oaxaca, Abril de 2015.

*Este trabajo es dedicado a
Carlos Sánchez L. y Columba Sánchez R.,
unas excelentes personas
mis padres*

Agradecimientos

Le agradezco a mi familia quienes me han apoyado en el transcurso de mi carrera, en especial a mi padre Carlos Sánchez y a mi madre Columba Sánchez quienes incondicionalmente me dieron todo su apoyo y amor para que pudiera seguir adelante y me dieran la mejor herencia que alguien pueda tener, una carrera.

A mi director de tesis el Dr. Ricardo Rosas Rodríguez por la confianza, apoyo y dedicación para que saliera adelante en el término de mi carrera. Al Dr. Victor Cruz Barriguete por haberme compartido sus conocimientos y brindado su amistad.

Le agradezco a mis amigos quienes conocí en el transcurso de la carrera por su apoyo, paciencia y motivación para seguir adelante en los momentos de desesperación y porque formaron una familia para mí.

Resumen

Usando una formulación hamiltoniana para campos clásicos más amplia que la canónica, se estudiaron las teorías de norma de Yang-Mills, las cuales describen la fuerza electromagnética y las fuerzas nucleares débil y fuerte.

Se revisó primero el caso ya estudiado de teorías de Yang-Mills abelianas, *i.e.*, la teoría de Maxwell del campo electromagnético. En la formulación hamiltoniana alternativa se emplean los campos eléctrico E_a y magnético B_a como variables de campo (en lugar de los potenciales vectorial y escalar) y la energía como hamiltoniana. La estructura hamiltoniana, que conduce a los paréntesis de Poisson, involucra operadores diferenciales; ésta estructura conduce a la relación esperada entre la hamiltoniana y cualquier funcional del campo electromagnético.

Para el caso de las teorías de Yang-Mills, se propuso una formulación hamiltoniana alternativa empleando como variables el “campo eléctrico” E^a_i y el “campo magnético” B^a_i que surgen de la representación de conexiones canónica. Se obtuvo un paréntesis de Poisson, y se mostró que lleva a relaciones esperadas entre la hamiltoniana y cualquier funcional de campo. La estructura hamiltoniana involucra también operadores diferenciales pero con derivadas covariantes. Se bosquejó la cuantización en términos de las nuevas variables de campo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Formulaciones de Lagrange y Hamilton (canónica) para campos clásicos	7
2.1. Introducción	7
2.2. La transición de un sistema discreto a un sistema continuo	8
2.3. Formulación de Lagrange para sistemas continuos	11
2.4. Formulación de Hamilton y paréntesis de Poisson	13
3. Formulación hamiltoniana canónica del campo electromagnético: variables de conexión	17
3.1. Introducción	17
3.2. Campo electromagnético	18
4. Formulación hamiltoniana extendida para campos clásicos	21
4.1. Introducción	21
4.2. Formulación lagrangiana	22
4.3. Formulación hamiltoniana extendida y paréntesis de Poisson	24
5. Formulación no canónica del campo electromagnético	29
5.1. Introducción	29
5.2. Formulación hamiltoniana en términos de E y B	30
6. Teorías de Yang-Mills	33
6.1. Introducción	33
6.2. Rotaciones en 3 dimensiones	34
6.3. Derivada covariante	35
6.4. Tensor de campo de Yang-Mills	37
6.5. Ecuaciones de campo	37
6.6. Analogía con la relatividad general	38

7. Formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills en términos de variables de conexión	41
7.1. Introducción	41
7.2. Formulación lagrangiana de las teorías de Yang-Mills	42
7.3. Formulación hamiltoniana canónica: variables de conexión	44
7.4. Cuantización en términos de variables de conexión	46
8. Formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills en términos de variables de curvatura	47
8.1. Introducción	47
8.2. Evolución temporal de las nuevas variables	48
8.3. Estructura hamiltoniana y paréntesis de Poisson	49
8.4. Álgebra de las restricciones	50
8.5. Cuantización en términos de variables de curvatura	51
Conclusiones y comentarios finales	53
A. Ecuaciones de onda relativistas	55
A.1. Notación relativista	55
A.2. Ecuación de Klein-Gordon	57
A.3. Ecuación de Dirac	58
A.4. Ecuaciones de Maxwell y de Proca	59
B. Formulación lagrangiana, simetrías y campos de norma	63
B.1. Formulación lagrangiana de la mecánica de partículas	63
B.2. El campo escalar real: principio variacional y teorema de Noether	65
B.3. Campos escalares complejos y el campo electromagnético	73
Bibliografía	80

Capítulo 1

Introducción

A partir de la maravillosa teoría de Maxwell del electromagnetismo, e inspirados por ella, los físicos han realizado grandes progresos en el entendimiento de las fuerzas y partículas fundamentales que constituyen el mundo físico. Maxwell mostró que dos fuerzas que parecían muy diferentes, las fuerzas eléctrica y magnética, eran simplemente dos aspectos del *campo electromagnético*. Al hacerlo, también pudo explicar la *luz* como un fenómeno en el cual las ondas en el campo eléctrico crean ondas en el campo magnético, las cuales a su vez crean nuevas ondas en el campo eléctrico y así sucesivamente [1]. Sorprendentemente la teoría de Maxwell también predijo que la luz emitida por un cuerpo en movimiento no debería viajar más rápido que la luz de un cuerpo estacionario. Eventualmente este hecho llevó a Lorentz, Poincaré y especialmente a Einstein a darse cuenta de que las ideas sobre espacio y tiempo tenían que ser revisadas radicalmente [2]. Que el movimiento de un cuerpo sólo puede medirse relativo a otro cuerpo había sido entendido en cierta medida desde Galileo. Tomado en conjunto con la teoría de Maxwell, este principio obligó al reconocimiento de que en adición a las simetrías rotacionales del espacio debe haber simetrías que mezclan las coordenadas de espacio y tiempo. Estas nuevas simetrías también mezclan los campos eléctrico y magnético, carga y corriente, energía y momento, etc., revelando el mundo en forma más coherente y uniendo fuertemente lo que había sido sospechado previamente.

Hay, desde luego, fuerzas en la naturaleza junto con el electromagnetismo, de las cuales la más evidente es la gravedad. En realidad, fue la simplicidad de la gravedad lo que dio lugar a la primera conquista de la física moderna: las leyes de Kepler del movimiento planetario, y luego las leyes de Newton que unifican la mecánica celeste con la mecánica de los cuerpos en caída [3]. Sin embargo, reconciliar la simplicidad de la gravedad con la teoría de la relatividad no fue tarea fácil. En la búsqueda de las ecuaciones para gravedad, consistentes con su teoría de la relatividad especial, Einstein buscó copiar el modelo de las ecuaciones de Maxwell. Aunque, el resultado no fue meramente una teoría en la cual las ondas de algún campo se propagan a través del espaciotiempo, sino una teoría en la cual la misma geometría del espaciotiempo se ondula y se dobla. Las ecuaciones de Einstein dicen que la energía y el momento afectan la *métrica* del espaciotiempo

(con la cual se mide tiempo y distancia) de la misma forma que las cargas y corrientes afectan al campo electromagnético [4]. Esto sirvió para aumentar las esperanzas de que mucha o quizás aún toda la física es fundamentalmente *geométrica* en carácter.

No obstante, había varios retos para estas esperanzas. Los intentos de Einstein, Weyl, Kaluza y Klein de unificar más la descripción de las fuerzas de la naturaleza usando ideas de la geometría fueron poco exitosos. La razón es que el cuidadoso estudio de los átomos, núcleos y partículas subatómicas reveló una riqueza de fenómenos que no encajaban fácilmente en un simple esquema. Cada vez que la tecnología permitió el estudio de escalas de distancias más pequeñas (o equivalentemente, energías más altas), surgieron nuevos enigmas. En parte la razón es que la física a escalas de distancias pequeñas es completamente dominada por los principios de la *teoría cuántica* [5, 6, 7]. La noción ingenua de que la partícula es un punto que traza una trayectoria en el espaciotiempo, o que un campo asigna un número o vector a cada punto del espaciotiempo, demostró ser totalmente inadecuada, porque uno no puede medir la posición y velocidad de una partícula simultáneamente con precisión arbitraria, ni el valor de un campo y su derivada temporal. En realidad, resultó que la distinción entre una partícula y un campo era algo arbitraria. Mucha de la física del siglo XX se ha centrado alrededor de la tarea de encontrar sentido al micromundo y desarrollar un marco con el cual se pueda entender las partículas subatómicas y las fuerzas entre ellas a la luz de la teoría cuántica.

La imagen actual, llamada el modelo estándar, involucra tres fuerzas: el electromagnetismo y las fuerzas nucleares débil y fuerte. Todas estas son **campos de norma**, lo que significa que se describen por ecuaciones modeladas cercanamente a las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones describen campos *cuánticos*, por lo que las fuerzas pueden considerarse como llevadas por partículas: la fuerza electromagnética es llevada por los *fotones*, la fuerza débil es llevada por las partículas W y Z (*bosones*), y la fuerza fuerte es llevada por *gluones*. Hay también partículas cargadas que interactúan con estas partículas que llevan la fuerza. Aquí por *carga*, quiere decir no sólo la carga eléctrica sino también sus análogos para las otras fuerzas. Hay dos tipos principales de partículas cargadas, *quarks* (los cuales sienten la fuerza fuerte) y *leptones* (los cuales no lo hacen). Todas estas partículas tienen antipartículas correspondientes de la misma masa y carga opuesta [8].

Las teorías de Yang-Mills son teorías de norma no abelianas las cuales son principalmente usadas en la física para describir las interacciones débiles, fuertes y electromagnéticas en partículas. Estas teorías fueron desarrolladas en el año de 1954 por Chen Ning Yang y Robert Mills, donde el resultado de este trabajo fue una generalización de la lagrangiana de la electrodinámica cuántica, donde ahora el grupo de norma es un grupo no conmutativo [10]. Es decir, se generalizaron las ecuaciones de Maxwell al caso donde la lagrangiana tenía una mayor simetría que la de los grupos $SO(2)$ o $U(1)$. La generalización más simple es al grupo $SU(2)$.

Refiriéndose a las ecuaciones de Maxwell, la carga e se conserva, pero en el caso de las teorías de Yang-Mills se conserva también una especie de carga, la cual se escribe usualmente como g , y se denominará *isoespín*, con el fin de que se conserve la simetría del espín en las interacciones mencionadas anteriormente.

Por otro lado, es bien conocido que los formalismos lagrangiano y hamiltoniano tiene su origen en el estudio de sistemas con un número finito de grados de libertad en la mecánica newtoniana. Estos formalismos

se extienden al tratamiento de campos clásicos, con la diferencia que para los sistemas con un número finito de grados de libertad, la lagrangiana puede siempre escogerse como la diferencia entre la energía cinética y potencial, lo cual siempre permite realizar la transformación de Legendre para hallar la hamiltoniana, mientras que en la teoría clásica de campos, no siempre tiene sentido incluso hablar de la energía cinética o potencial del campo y, lo que es más importante, no siempre es posible pasar al formalismo hamiltoniano a través de la transformación de Legendre, lo cual introduce diversas complicaciones en la teoría tal como se emplea comúnmente (uno debe introducir restricciones eventualmente).

En años recientes ha surgido un tratamiento que extiende la estructura de la mecánica hamiltoniana a sistemas de dimensión infinita. Se ha encontrado que varias ecuaciones de evolución (lineales y no lineales) pueden expresarse en una forma análoga a las ecuaciones de Hamilton de la mecánica clásica, con derivadas funcionales reemplazando derivadas parciales y operadores diferenciales en lugar de la matriz antisimétrica que aparece en las ecuaciones de Hamilton [11, 12]. Cabe agregar que los operadores que reemplazan la matriz antisimétrica pueden ser también operadores integrales [13, 14, 15].

En este trabajo de tesis se estudió el campo electromagnético como un preludio y las teorías de Yang-Mills no abelianas¹ empleando el formalismo hamiltoniano señalado en el párrafo anterior y variables alternativas a las tradicionales (canónicas). Como es bien sabido, las variables canónicas empleadas para describir las teorías de Yang-Mills son los potenciales o conexiones; en este trabajo se usará la curvatura como variable de campo. Desde luego que el caso de la teoría de Maxwell ya se ha tratado en [12, 13, 16]. La aportación en esta tesis es el caso de teorías de Yang-Mills no abelianas.

El uso de variables de campo alternativas a las tradicionales está motivado por la búsqueda de una teoría cuántica del campo gravitacional; la teoría de gravitación de Einstein (la relatividad general [4, 17]) es la mejor teoría con la que se cuenta actualmente para iniciar dicho proceso, sin embargo, ésta ha resistido diversos tratamientos. Sólo por mencionar algunos, se tiene la teoría de *cuerdas* [18] (quizás el tratamiento más popular), la teoría de *lazos* (de Ashtekar [19], Rovelli y Smolin [20, 21]), la teoría de *twistores* (de Penrose [22]), entre otros.

La teoría de cuerdas (la cual pretende ser una teoría del todo, *i.e.*, pretende describir las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza como una sola) tiene muchos inconvenientes, ya que debe aumentarse el número de dimensiones espaciales e introducir simetrías adicionales. Una crítica interesante a manera de divulgación de dicha teoría puede verse en los libros de Smolin [23] y de Penrose [24] y el artículo de Rovelli [25].

La teoría de lazos (menos popular que la teoría de cuerdas) es, desde otro punto de vista, la mejor opción para la cuantización del campo gravitacional ya que sólo pretende unir la relatividad general con la teoría cuántica. Desde luego que esta teoría tiene también ciertos inconvenientes, uno de éstos es recobrar el límite clásico. En esta teoría se hace el paso a variables de lazo a partir de las variables de conexión de Ashtekar [19, 26, 27]. Un paso intermedio entre estas dos formulaciones sería el uso de variables de curvatura, el cual

¹La teoría de Maxwell del campo electromagnético es una teoría de Yang-Mills abeliana.

es el caso que deseamos estudiar.

En el presente trabajo no se tratará el caso del campo gravitacional, pues para tal tema es necesario un gran bagaje de *geometría diferencial y relatividad general*, además de que su estudio ya ha sido iniciado en los trabajos [16, 28, 29]. En su lugar se tratará el caso de las teorías de Yang-Mills no abelianas (aunque más complicado que la teoría de Maxwell). Como se verá, el estudio de teorías de Yang-Mills no es tan directo, pues es necesario también un estudio formal de la relatividad especial en términos de cuadvectores y el estudio de grupos de simetría para observar cómo surgen los campos de norma; ésto es generalmente tratado en un curso de introducción a la teoría cuántica de campos y se han resumido los puntos más importantes en los dos apéndices de esta tesis.

Podría preguntarse el por qué tratar el caso de Yang-Mills con variables de curvatura, si éste ya se ha tratado con variables de conexión y todo resulta adecuado en los experimentos, por ejemplo. Sin embargo, hay ciertas partes de la teoría que se entienden mejor con variables de lazo. De manera similar, el estudio con variables de curvatura podría llevar a descubrir nuevas simetrías y cantidades conservadas en la teoría. Otra razón de estudio es que [como en el caso de relatividad general (2+1) desarrollado y probado por Witten [30], en el cual demuestra que puede cuantizarse, y que ha servido como un modelo de juguete [31] para hacer el caso real (3+1)] éste modelo servirá como un modelo para el caso de la relatividad general que tiene más constricciones que una teoría de Yang-Mills.

El desarrollo de la tesis es el siguiente. El capítulo 2 está dedicado a la formulación de Lagrange y Hamilton para sistemas continuos y campos de la forma tradicional, es decir, tal como se expone en los textos usuales como los de Sakurai [32], Goldstein [33], y Peskin [34]. Para ésta formulación se hace el análisis a una varilla infinitamente larga y elástica que es sometida a pequeñas vibraciones longitudinales, ésta puede verse como un sistema de masas y resortes, obteniéndose en el límite y después de un análisis lagrangiano de partículas una ecuación de onda. A continuación se definen las variables de campo, la lagrangiana de un campo en general y mediante el principio de Hamilton se obtienen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. Posteriormente se hace el paso a la formulación hamiltoniana mediante una transformación de Legendre obteniéndose las ecuaciones de Hamilton muy parecidas a las de un sistema de partículas, siempre que se escriban en términos de derivadas funcionales. Al final se define los paréntesis de Poisson canónicos para sistemas continuos y campos.

En el capítulo 3 se hace uso del formalismo hamiltoniano canónico del capítulo 2 para el estudio de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en el vacío. El tratamiento aquí es como en el texto de Wald [17], sobre relatividad general, pues es la única fuente que hace el tratamiento adecuado, los textos sobre teoría cuántica de campo hacen más incapie en el formalismo lagrangiano porque cuantizan por integral de trayectoria (*à la* Feynman [35]), tratando sólo de forma tangente el formalismo hamiltoniano canónico que muchas veces es más amplio y puede verse directamente más información sobre el sistema a estudiar; a la cuantización aquí se le llama canónica (*à la* Dirac [36]). En este capítulo se observará los inconvenientes del formalismo canónico al surgir una restricción (un momento canónico se anula idénticamente), esta restricción conduce a ley de

Gauss. También se observa cómo se evita este problema para llegar al final a las leyes de Maxwell.

En el capítulo 4 se presenta una formulación hamiltoniana extendida para campos clásicos que incluye como caso especial a la formulación canónica. Esto ayudará a tratar el campo de Maxwell con variables alternativas sin tener que introducir constricciones. Aquí se ha seguido el texto de Olver [11] y el artículo de Torres del Castillo [12]. Se trata primero la formulación lagrangiana de un campo de manera más general y definiendo una derivada funcional adecuada se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange a través del principio de Hamilton; después, por medio de la transformación de Legendre, se pasará al formalismo hamiltoniano. Es en este punto donde se introducen estructuras hamiltonianas más generales, que pueden ser operadores diferenciales (o integrales incluso), permitiendo el uso de variables alternativas y hamiltonianas alternativas. Se definen los paréntesis de Poisson en esta formulación extendida y se exponen los requisitos necesarios para que éste sea antisimétrico y satisfaga la identidad de Jacobi (todo esto es necesario para promover los paréntesis a conmutadores cuando se cuantiza la teoría).

En el capítulo 5 se expone la primera aplicación de la formulación hamiltoniana extendida. Se trata el campo de Maxwell, una teoría de Yang-Mills abeliana, empleando la energía del campo electromagnético como hamiltoniana y los campos eléctrico y magnético como variables de campo, en lugar de los potenciales o conexiones. Los primeros en estudiar este caso fueron Olver [11] y Torres del Castillo [12]. La idea aquí es partir de una hamiltoniana sin pasar por una función lagrangiana, escoger adecuadamente las variables de campo y la estructura hamiltoniana que conduzcan a las ecuaciones del campo. En este caso la estructura será una matriz que contiene operadores diferenciales (sólo con derivadas parciales). Se define un paréntesis de Poisson entre cualesquiera par de funcionales de campo y se verá que el paréntesis fundamental entre campos eléctrico y magnético es compatible con la ley de Gauss, sin que ésta se introduzca ad hoc. El formalismo permite también hallar el momento lineal (generador de traslaciones) y el momento angular (generador de rotaciones) del campo. Algo notable aquí es que las variables de campo escogidas son invariantes de norma porque el grupo de norma es abeliano, lo cual no sucederá con las variables de curvatura en una teoría de Yang-Mills no abeliana.

El capítulo 6 es una introducción a las teorías de Yang-Mills; aquí se ha seguido el artículo de Jackiw [37] y el libro de Ryder [38] para su presentación, pero se ha adecuado a la notación de índices, algo mucho más conveniente para el desarrollo principal de este trabajo. En el apéndice B se explica cómo es que surge el campo electromagnético como un campo de norma a partir de la conservación de la carga eléctrica, el campo resulta ser invariante bajo transformaciones de norma locales $U(1)$. La idea de Yang-Mills es generalizar la simetría a grupos no abelianos, el más simple es $SU(2) \approx SO(3)$. Aquí es necesario construir una derivada covariante, para que las variaciones de los campos se transformen de manera covariante, lo cual conduce a la introducción de un potencial vectorial con índices espaciotemporales e internos (matrices). Existe también una “carga” generalizada que se conserva, la cual se introduce como constante de acoplamiento en dicha derivada covariante. Posteriormente se construye el análogo del tensor de Faraday y una lagrangiana de la cual pueden obtenerse las ecuaciones de campo de Yang-Mills a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En este punto puede verse que el campo no abeliano actúa como fuente para sí mismo de una manera análoga a la de relatividad general, donde el campo gravitacional porta energía (masa) y por tanto es fuente de gravitación.

En el capítulo 7 se presenta la formulación hamiltoniana canónica de las teorías de Yang-Mills haciendo uso de las variables tradicionales, *i.e.*, los potenciales o conexiones. Es escaso lo que se expone sobre este tema en los textos y artículos que se conoce y es por esto que el tratamiento aquí será relativamente nuevo, ya que ha adecuado el estudio en la notación de índices, muy necesaria para el capítulo 8. Como ya se ha mencionado anteriormente, es poco lo que se conoce sobre la formulación canónica también porque lo usual es cuantizar a través del formalismo lagrangiano. Así, lo que se hará primero en el capítulo 7 será una derivación de las ecuaciones de campo de Yang-Mills covariantes a partir de una lagrangiana y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange. A continuación se separarán los índices espaciotemporales de la lagrangiana en índices de espacio e índices de tiempo para obtener la hamiltoniana por medio de una transformación de Legendre (calculando antes los momentos canónicos, desde luego). Con lo anterior se obtendrá un paréntesis de Poisson canónico y se podrá ver que las ecuaciones de Hamilton correspondientes son, en efecto, equivalentes a las ecuaciones de campo de Yang-Mills. Al final del capítulo se esboza la cuantización *à la* Dirac en términos de conexiones.

En el capítulo 8 se expone el núcleo principal de esta tesis y también el resultado novedoso. De manera análoga a lo que se hace con el campo de Maxwell en el capítulo 5, se escriben las ecuaciones de campo de las teorías de Yang-Mills en forma hamiltoniana en términos de variables de curvatura, *i.e.*, en términos de las componentes del tensor de Faraday. Se usa como hamiltoniana a la energía del campo y se construye la estructura hamiltoniana necesaria que nos lleve a las ecuaciones de movimiento de los campos. Se observará, que el paso no es tan directo, ya que la estructura involucra operadores diferenciales que incluyen a la conexión en la derivada covariante, por lo cual el caso se limita a las veces que se pueda escribir el potencial en términos de la curvatura; ésto último lo han estudiado ya Freedman y Khuri [39]. Al final del capítulo se esboza la cuantización de la teoría en términos de las nuevas variables empleadas, sin profundizar en detalles, *i.e.*, sin resolver la ecuación de Schrödinger resultante. Sólo se hace el primer paso de la forma de cuantización sugerida por Dirac: se promueven las variables de campo a operadores y los paréntesis de Poisson a conmutadores.

Al final se escriben las conclusiones sobre este trabajo y se comentan algunos problemas que quedan para tratar de resolver en un futuro.

Los dos apéndices de esta tesis se han incluido como un complemento a la investigación del problema planteado y para fijar la notación. En el apéndice A se tratan las ecuaciones de onda de una partícula relativistas (de Klein-Gordon, de Dirac, de Maxwell y Proca). El apéndice B trata la formulación lagrangiana, las simetrías (teorema de Noether) de los campos de norma, usando como ejemplo más simple el campo de Maxwell.

Capítulo 2

Formulaciones de Lagrange y Hamilton (canónica) para campos clásicos

2.1. Introducción

El movimiento de cuerpos materiales constituyó el tema de algunas de las primeras investigaciones realizadas por los pioneros de la física. A partir de sus esfuerzos ha evolucionado un vasto campo conocido por los nombres de mecánica analítica, dinámica o, simplemente, mecánica. En el siglo XX se ha impuesto el término de “mecánica clásica” para distinguir esa rama de la física de las modernas teorías físicas, especialmente de la mecánica cuántica.

Toda presentación de la mecánica se basa en algunos conceptos físicos fundamentales, tales como espacio, tiempo, simultaneidad, masa y fuerza. Para la interacción entre partículas es necesario conocer el concepto de **campo de fuerzas**. Este concepto surge ante la necesidad de explicar la forma de interacción entre cuerpos en ausencia de contacto físico y sin medios de sustentación para las posibles interacciones. La acción a distancia se explica, entonces, mediante efectos provocados por la entidad causante de la interacción, sobre el espacio mismo que la rodea, permitiendo asignar a dicho espacio propiedades medibles. Así, será posible hacer corresponder a cada punto del espacio valores que dependerán de la magnitud del cuerpo que provoca la interacción y de la ubicación del punto que se considera. Los campos más conocidos en física clásica son:

- **Campo electromagnético:** Separable para cada observador en dos campos: campo electrostático y campo magnético. En física newtoniana el campo electromagnético puede ser tratado como dos campos vectoriales, aunque en física relativista el campo electromagnético relativista se trata como un campo tensorial, derivable de un único campo vectorial cuatridimensional [40].

- **Campo gravitacional:** En mecánica newtoniana el campo gravitacional puede ser tratado como un campo vectorial irrotacional, y por tanto derivable de un campo escalar. En cambio la descripción de la gravedad en la teoría general de la relatividad es más compleja y requiere definir un tensor de segundo rango, llamado **tensor métrico** sobre un espaciotiempo curvo [41].

En teoría cuántica los campos se tratan como distribuciones que permiten asignar operadores que describen el campo. La existencia de un campo medible en una región del espacio se trata como un estado del espaciotiempo consistente en que la medición de los operadores de campo sobre determinada región del espacio toma cierta distribución [34].

En teoría cuántica de campos, las partículas son tratadas como estados posibles de un campo cuántico, por lo que en ésta teoría todas las entidades son campos distribuidos en el espaciotiempo que interactúan mutuamente. En esta tesis se hace un enfoque al campo electromagnético y su generalización, *i.e.*, los campos de Yang-Mills, los cuales describen las interacciones nucleares débil y fuerte.

La teoría para campos clásicos se introduce generalmente en la forma lagrangiana en relación con la electrodinámica clásica (véase e.g. [33, 40, 42]) o como una primera etapa para la teoría cuántica de campos [38]. La formulación lagrangiana resulta conveniente porque permite exhibir explícitamente la covariancia de la teoría bajo transformaciones de Lorentz.

Ahora, la teoría para campos clásicos también se puede expresar en una formulación hamiltoniana como se puede consultar en [33]. Sin embargo, es escaso lo que se conoce sobre esta formulación a pesar de tener una estructura más amplia que la de la formulación lagrangiana.

En este capítulo se va a tratar las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana para sistemas continuos y campos de la forma tradicional, es decir, como se emplean comúnmente en textos canónicos, tales como el de Goldstein [33] y Peskin [34]. En el capítulo 4 se describe una formulación hamiltoniana más amplia que incluye a la canónica como un caso muy particular y la cual permitirá desarrollar el tema principal de esta tesis: escribir las teorías de Yang-Mills en términos de variables no canónicas (variables de curvatura).

2.2. La transición de un sistema discreto a un sistema continuo

Todas las formulaciones de la mecánica tratan de sistemas con un número finito de grados de libertad o a lo más un número infinito numerable de grados de libertad. Hay, sin embargo, algunos problemas mecánicos que involucran sistemas continuos, como por ejemplo, el problema de un sólido elástico vibrante [33]. Aquí cada punto del sólido continuo en las oscilaciones, y el movimiento completo sólo puede describirse especificando las coordenadas de posición de *todos* los puntos. No es complicado modificar las formulaciones de la mecánica de tal forma que se puedan manejar dichos problemas. El método más directo es aproximar el sistema continuo por uno que contiene partículas discretas y luego examinar el cambio en las ecuaciones que describen el movimiento conforme se aproxima al límite continuo.

Aplicando el procedimiento de la transición de un sistema discreto a un sistema continuo a una varilla

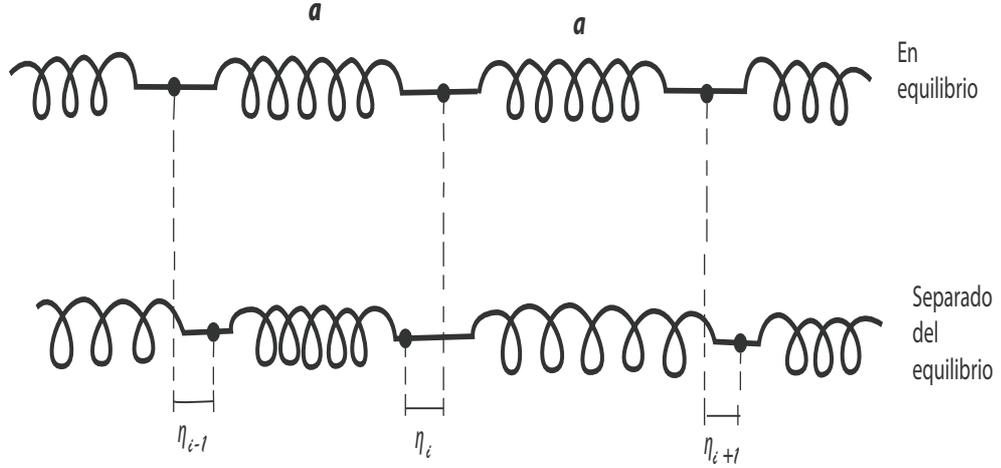


Figura 2.1: Un sistema discreto de masas puntuales iguales conectadas por resortes como una aproximación a una varilla elástica continua.

infinitamente larga y elástica que puede ser sometida a pequeñas vibraciones longitudinales; *i.e.*, desplazamientos oscilatorios de las partículas de la varilla paralelos al eje de ésta. Un sistema compuesto de partículas discretas que se aproxima a la varilla continua es una cadena infinita de masas iguales espaciadas por un distancia a y conectadas por resortes sin masa con constante de fuerza k (véase la Fig. 2.1). Se supone que las masas puntuales pueden moverse únicamente a lo largo de la longitud de la cadena. Por lo tanto se pueden obtener las ecuaciones que describen el movimiento como de costumbre para pequeñas oscilaciones. Denotando el desplazamiento de la i -ésima partícula apartir de su posición de equilibrio por η_i la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2, \quad (2.1)$$

donde m es la masa de cada partícula. La energía potencial correspondiente es la suma de las energías potenciales de cada resorte como resultado de la compresión o estiramiento a partir de su longitud de equilibrio

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (2.2)$$

Combinando las ecuaciones (2.1) y (2.2), la lagrangiana para el sistema es

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i [m \dot{\eta}_i^2 - k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2], \quad (2.3)$$

la cual también puede escribirse como

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - k a \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a L_i, \quad (2.4)$$

donde a es la separación de equilibrio entre los puntos (véase la Fig. 2.1). Las ecuaciones de Lagrange de movimiento resultantes para las coordenadas η_i son

$$\frac{m}{a}\ddot{\eta}_i - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0. \quad (2.5)$$

La forma particular de L en la ecuación (2.4), y de las ecuaciones de movimiento correspondientes, se han escogido por conveniencia a partir del límite de una varilla continua conforme a se aproxima a cero. Es claro que m/a se reduce a μ , la cual es la masa por unidad de longitud del sistema continuo, pero el valor límite de ka puede no ser tan evidente. Para una varilla elástica que obedece la ley de Hooke debe recordarse que el alargamiento de la varilla *por unidad de longitud* es directamente proporcional a la fuerza o tensión ejercida sobre la varilla, una relación que puede ser escrita como

$$F = Y\xi, \quad (2.6)$$

donde ξ es la elongación por unidad de longitud y Y es el módulo de Young. Ahora el alargamiento en una longitud a de un sistema discreto, por unidad de longitud, será $\xi = (\eta_{i+1} - \eta_i)/a$. La fuerza necesaria para comprimir el resorte para esta cantidad es

$$F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right), \quad (2.7)$$

así que ka debe corresponder al módulo de Young de la varilla continua. Para ir del caso discreto al continuo, el índice entero i , el cual identifica la masa particular puntual, se convierte en la coordenada de posición continua x ; en lugar de la variable η_i se tendrá $\eta(x)$. Además, la cantidad

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} \quad (2.8)$$

en L_i se aproxima al límite

$$\frac{d\eta}{dx}, \quad (2.9)$$

conforme a , que juega el rol de dx , se aproxima a cero. Finalmente, la suma sobre un número discreto de partículas se convierte en una integral sobre x , la longitud de la varilla, y la lagrangiana (2.4) toma la forma

$$L = \frac{1}{2} \int \left(\mu \dot{\eta}^2 - Y \left[\frac{d\eta}{dx} \right]^2 \right) dx. \quad (2.10)$$

En el límite cuando a tiende a cero, los dos últimos términos de la ecuación de movimiento (2.5) se convierte en

$$\lim_{a \rightarrow 0} -\frac{Y}{a} \left[\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x-a} \right], \quad (2.11)$$

el cual claramente define una segunda derivada de η . De aquí, la ecuación de movimiento para una varilla elástica continua es

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0, \quad (2.12)$$

la ecuación de onda familiar en una dimensión con velocidad de propagación

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) es la fórmula bien conocida para la velocidad de ondas longitudinales elásticas [32].

Este simple ejemplo es suficiente para ilustrar las características sobresalientes de la transición de un sistema discreto a un sistema continuo. El hecho más importante es comprender el papel que juega la coordenada de posición x . No se trata de una coordenada generalizada; sirve meramente para reemplazar un índice discreto i por uno continuo. A cada valor de i , le corresponde una diferente coordenada generalizada, η_i , del sistema, aquí también, para cada valor de x hay una coordenada generalizada $\eta(x)$. Ya que η depende también de la variable continua t , se debe escribir más precisamente $\eta(x, t)$, indicando que tanto x , como t , pueden considerarse como parámetros en la lagrangiana. Si se tiene un sistema continuo de tres dimensiones, más que una sola dimensión, las coordenadas generalizadas deben distinguirse por tres índices continuos x, y, z , y se deben escribir como $\eta(x, y, z, t)$. Nótese que las cantidades x, y, z y t son completamente independientes una de otra y aparecen sólo como variables explícitas en η . Derivando a η con respecto a cada una de ellas se pueden siempre escribir como una derivada total sin ambigüedad alguna. La ecuación (2.10) también muestra que la lagrangiana aparece como una integral sobre el índice continuo x ; en el correspondiente caso tridimensional la lagrangiana deberá tener la forma

$$L = \int \int \int \mathcal{L} dx dy dz, \quad (2.14)$$

donde \mathcal{L} se conoce como la *densidad lagrangiana*. Para las vibraciones longitudinales de la varilla continua, la densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right], \quad (2.15)$$

la cual corresponde al límite continuo de la cantidad L_i , que aparece en la ecuación (2.4). Es la densidad lagrangiana, más que la lagrangiana misma, la que se usará para describir el movimiento del sistema.

2.3. Formulación de Lagrange para sistemas continuos

Haciendo notar que en la ecuación (2.14), la densidad lagrangiana \mathcal{L} para la varilla elástica, además de ser función de $\dot{\eta} = \partial\eta/\partial t$, contiene también una derivada espacial de η , la cual es $\partial\eta/\partial x$; así x y t juegan un papel similar como parámetros de la densidad lagrangiana. Si además de las interacciones entre vecinos más próximos hubiesen fuerzas locales entonces \mathcal{L} sería función de la propia η y también del gradiente espacial de η . Aunque, en el caso general \mathcal{L} podría muy bien ser también función explícita de x y de t . Así, la densidad lagrangiana para cualquier sistema continuo unidimensional aparecería como función de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t \right). \quad (2.16)$$

La lagrangiana total, siguiendo la ecuación (2.15), es entonces la integral de \mathcal{L} sobre el rango de x que define al sistema y el principio de Hamilton en el límite del sistema continuo adopta la forma

$$\delta S = \delta \int_1^2 \int \mathcal{L} dx dt = 0. \quad (2.17)$$

Si ha de tener alguna utilidad el principio de Hamilton para el sistema continuo, deberá ser posible deducir el límite continuo de la ecuación de movimiento, por ejemplo, la ecuación (2.12), directamente por variación de la integral doble de \mathcal{L} dada la ecuación (2.17). La variación sólo tiene lugar sobre η y sus derivadas; los parámetros x y t no se ven afectados por la variación ni directamente ni en los dominios de integración.

Al igual que la variación de η se toma cero en los extremos t_1 y t_2 , también debe tomarse nula la variación de η en los límites x_1 y x_2 de la integración en x . Se puede obtener en el espacio η un camino variado de integración conveniente, eligiendo η entre una familia de funciones de η dependiente de un parámetro:

$$\eta(x, t; \alpha) = \eta(x, t; 0) + \alpha \zeta(x, t). \quad (2.18)$$

Aquí $\eta(x, t; 0)$ es la función correcta que satisfecerá al principio de Hamilton, y ζ es una función cualquiera bien comportada que se anula en los puntos extremos en t y x . Si se considera S como función de α , para que sea un extremo para $\eta(x, t; 0)$ la derivada de S respecto de α se anulará en $\alpha = 0$. Por derivación directa

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) \right] dx dt. \quad (2.19)$$

Ya que la variación de η , es decir, $\alpha \zeta$, se anula en los puntos extremos, integrando por partes respecto a x y a t se obtienen las relaciones

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dt,$$

y

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dx.$$

Por tanto, el principio de Hamilton puede establecerse como

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \right] \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)_0 dx dt = 0, \quad (2.20)$$

y la naturaleza arbitraria de la trayectoria variada implica la anulación de la expresión entre paréntesis cuadrados. Debido a las consideraciones tomadas acerca de la anulación entonces se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) constituye la forma apropiada de la ecuación de movimiento deducida del principio de Hamilton (Ec. 2.17) [33].

Un sistema de n grados discretos de libertad tendrá n ecuaciones de movimiento de Lagrange; para el caso del sistema continuo con un número infinito de grados de libertad parece que sólo se tiene una ecuación

de Lagrange! Sin embargo, recordando que la ecuación de movimiento para η es una ecuación diferencial que sólo involucra el tiempo y en ese sentido la ecuación (2.20) proporciona una ecuación de movimiento separada para cada valor de x . La naturaleza continua de los índices x aparece en el hecho de que la ecuación (2.20) es una ecuación en derivadas parciales en las dos variables x y t , que da η en la forma $\eta(x, t)$.

Para el caso concreto de las vibraciones longitudinales en una varilla elástica, la forma de la densidad lagrangiana (ecuación 2.15) indica que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} = \mu \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} = -Y \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0.$$

Así como se requería, la ecuación de Euler- Lagrange (2.21), se reduce propiamente a la ecuación de movimiento (2.12) [32].

2.4. Formulación de Hamilton y paréntesis de Poisson

Es posible obtenerse una formulación hamiltoniana para sistemas con un conjunto continuo de coordenadas muy parecido al caso de sistemas discretos. Para indicar el método a seguir, regresando brevemente a la cadena lineal de masas puntuales discutida en la sección 2.2. Hay un momento canónico conjugado para cada η_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}. \quad (2.22)$$

La hamiltoniana para el sistema es por tanto

$$H = p_i \dot{\eta}_i - L = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L, \quad (2.23)$$

o bien

$$H = a \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L_i \right). \quad (2.24)$$

Recordando que en el límite representado por la varilla continua, cuando a tiende a cero, $L_i \rightarrow \mathcal{L}$ y la suma en la ecuación (2.24) se convierte en una integral:

$$H = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathcal{L} \right) dx. \quad (2.25)$$

Los momentos canónicos individuales p_i , dados por la ecuación(2.22), se anulan en el límite continuo, pero se puede definir una **densidad de momento**, π , que permanece finita:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{p_i}{a} \equiv \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}. \quad (2.26)$$

La ecuación (2.25) está en la forma de una integral espacial sobre una **densidad hamiltoniana**, \mathcal{H} , definida por

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}. \quad (2.27)$$

Aún cuando se pueda introducir una formulación hamiltoniana de una manera directa para campos clásicos, deberá notarse que el procedimiento singulariza la variable tiempo a la que habrá que darle un

tratamiento especial. Esto contrasta, por tanto, con el desarrollo que se ha dado a la formulación lagrangiana en la cual se trataban simétricamente las variables independientes tiempo y espacio. Por esta razón, el enfoque hamiltoniano, al menos tal como se ha introducido aquí, se presenta menos frecuente a ser incorporado a una descripción relativísticamente covariante de los campos. Esto no significa, desde luego, que las teorías de campos (que se traten en lo que sigue) no sean covariantes. Existe también una formulación canónica covariante introducida por Witten y Crackovic [43], la cual no se tratará en este trabajo.

La forma más viable para generalizar a un campo tridimensional descrito por las cantidades de campo η_a es definir, análogamente a como se hace en la ecuación (2.26), las densidades de momento canónico

$$\pi_a(x_i) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a}. \quad (2.28)$$

Las cantidades $\eta_a(x_i, t)$ y $\pi_a(x_i, t)$ juntas, definen el **espacio fase** de dimensión infinita que describe el campo clásico y su desarrollo temporal. Se puede hallar para π_a un teorema de conservación que sea similar al correspondiente a la cantidad de movimiento canónica en sistemas discretos. Si una cantidad de campo dado η_a es cíclica en el sentido de que \mathcal{L} no contenga explícitamente a η_a (como en el caso de la ecuación (2.15)) entonces, la ecuación de campo de Lagrange luce como un enunciado de existencia para una corriente conservada:

$$\frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_a)} = 0,$$

o

$$\frac{d\pi_a}{dt} + \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \eta_a)} = 0. \quad (2.29)$$

Sigue que si η_a es cíclica, existe una cantidad integral conservada

$$\Pi_a = \int \pi_a(x_i, t) dv.$$

La generalización evidente de la ecuación (2.27) para una densidad hamiltoniana es

$$\mathcal{H}(\eta_a, \partial_i \eta_a, \pi_a, x_\mu) = \pi_a \dot{\eta}_a - \mathcal{L}, \quad (2.30)$$

donde se supone que puede eliminarse la dependencia funcional de $\dot{\eta}_a$ por inversión de las ecuaciones de definición (2.28). De esta definición sigue que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} = \dot{\eta}_a + \pi_b \frac{\partial \dot{\eta}_b}{\partial \pi_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_b} \frac{\partial \dot{\eta}_b}{\partial \pi_a} = \dot{\eta}_a \quad (2.31)$$

en virtud de la ecuación (2.28). La otra mitad de la ecuación de campo canónica es más complicada. Cuando se expresa en términos de las variables canónicas, \mathcal{H} es una función de η_a a través de la dependencia explícita de \mathcal{L} , y a través de $\dot{\eta}_a$. De aquí

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} = \pi_b \frac{\partial \dot{\eta}_b}{\partial \eta_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_b} \frac{\partial \dot{\eta}_b}{\partial \eta_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a}. \quad (2.32)$$

Usando las ecuaciones de Lagrange esto puede escribirse como

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} = -\frac{d}{dx_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_a)} \right) = -\dot{\pi}_a - \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \eta_a)} \right). \quad (2.33)$$

Debido a la aparición de \mathcal{L} no se tiene aún una fórmula útil. Sin embargo, con una deducción exactamente similar se halla que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \eta_a)} = \pi_b \frac{\partial \dot{\eta}_b}{\partial(\partial_i \eta_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_b} \frac{\partial \dot{\eta}_b}{\partial(\partial_i \eta_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \eta_a)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \eta_a)}. \quad (2.34)$$

De aquí, como segunda parte de las ecuaciones canónicas se establecen como

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} - \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \eta_a)} \right) = -\dot{\pi}_a. \quad (2.35)$$

Las ecuaciones (2.31) y (2.35) se pueden expresar en una notación más cercana a las ecuaciones de Hamilton para un sistema discreto introduciendo la noción de una **derivada funcional** definida como

$$\frac{\delta}{\delta \phi} \equiv \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial}{\partial(\partial_i \phi)}. \quad (2.36)$$

Ya que \mathcal{H} no es una función de $\partial_i \pi_a$, las ecuaciones (2.31) y (2.35) pueden establecerse como

$$\dot{\eta}_a = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_a}. \quad (2.37)$$

Notando que con el mismo simbolismo las ecuaciones de Lagrange, (2.21), toman la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta_a} = 0. \quad (2.38)$$

Sin embargo, la ventaja casi única de la derivada funcional es que resulta de la semejanza con un sistema discreto. Por otra parte, sorprende el tratamiento paralelo de las variables temporal y espacial.

Pueden obtenerse otras propiedades de \mathcal{H} desarrollando la derivada total temporal de la ecuación (2.30), recordando que hay que considerar que $\dot{\eta}_a$ es función de η_a , $\partial_i \eta_a$, π_a y x^μ . Se tiene por tanto que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_a \dot{\eta}_a + \pi_a \frac{d\dot{\eta}_a}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} \dot{\eta}_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} \frac{d\dot{\eta}_a}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \eta_a)} \frac{d(\partial_i \eta_a)}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.39)$$

Los términos segundo y cuarto del lado derecho se cancelan en virtud de las ecuaciones (2.28), por lo que la derivada se simplifica a

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_a \dot{\eta}_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} \dot{\eta}_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \eta_a)} \frac{d\partial_i \eta_a}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.40)$$

Por otra lado, considerando \mathcal{H} como una función de η_a , $\partial_i \eta_a$, π_a y x^μ , la derivada temporal total es

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} \dot{\eta}_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \eta_a)} \frac{d(\partial_i \eta_a)}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (2.41)$$

La expresión del lado derecho se ha escrito de manera que facilite la comparación con el segundo miembro de la ecuación (2.39). Así, los primeros términos de ambas expresiones son iguales en virtud de la ecuación (2.31). Los segundos términos también son iguales en virtud de la ecuación (2.32) y la ecuación (2.34) muestran la equivalencia de los terceros. Por tanto, deberán ser iguales los últimos términos.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (2.42)$$

la cual es similar a las ecuaciones para sistemas discretos.

La hamiltoniana total H no es más que un ejemplo de funciones que son integrales de volumen de densidades. Se puede formular directamente un formalismo general para la derivada respecto al tiempo de dichas cantidades integrales. Considerando una cierta densidad \mathcal{U} que sea una función de las coordenadas del espacio fase (η_a, π_a) , de sus gradientes espaciales, y posiblemente de x_μ :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\eta_a, \pi_a, \partial_i \eta_a, \partial_i \pi_a, x_\mu). \quad (2.43)$$

La cantidad integral correspondiente es

$$U(t) = \int \mathcal{U} dv, \quad (2.44)$$

donde la integral de volumen se extiende sobre todo el espacio limitado por la superficie de contorno sobre la cual se anulan η_a y π_a . Derivando U respecto al tiempo se tiene, en general,

$$\frac{dU}{dt} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_a} \dot{\eta}_a + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\partial_i \eta_a)} \partial_i \dot{\eta}_a + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \pi_a} \dot{\pi}_a + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\partial_i \pi_a)} \partial_i \dot{\pi}_a + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right) dv. \quad (2.45)$$

Considerando un término tal como

$$\int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\partial_i \eta_a)} \partial_i \dot{\eta}_a dv = \int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\partial_i \eta_a)} \frac{d\dot{\eta}_a}{dx_i} dv \quad (2.46)$$

Integrando por partes, recordando que η_a y las derivadas se anulan en las superficies de contorno, se obtiene

$$\int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\partial_i \eta_a)} \partial_i \dot{\eta}_a dv = - \int \dot{\eta}_a \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\partial_i \eta_a)} \right) dv. \quad (2.47)$$

Para el término en $\partial_i \dot{\pi}_a$ se cumple una reducción similar. Agrupando coeficientes de $\dot{\eta}_a$ y de $\dot{\pi}_a$ respectivamente, se observa que en términos de la notación de δ [Ec. (2.36)], la ecuación (2.45) se reduce a

$$\frac{dU}{dt} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_a} \dot{\eta}_a + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_a} \dot{\pi}_a + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right) dv. \quad (2.48)$$

Finalmente, introduciendo las ecuaciones de movimiento canónicas (2.37) para $\dot{\eta}_a$ y $\dot{\pi}_a$ se tiene

$$\frac{dU}{dt} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_a} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_a} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_a} \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_a} \right) dv + \int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} dv. \quad (2.49)$$

La primera integral del lado derecho corresponde claramente a la forma de paréntesis de Poisson. Si \mathcal{U} y \mathcal{W} son dos funciones densidad, entonces estas consideraciones sugieren definir el paréntesis de Poisson de las cantidades integrales por

$$\{U, W\} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_a} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \pi_a} - \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \eta_a} \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_a} \right) dv. \quad (2.50)$$

Vamos a definir qué significa la derivada parcial de U respecto a t , mediante la siguiente expresión

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} dv \quad (2.51)$$

La ecuación (2.49) puede escribirse como

$$\frac{dU}{dt} = \{U, H\} + \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (2.52)$$

la cual es similar al caso de sistemas discretos. Así pues, el formalismo de paréntesis de Poisson aparece como consecuencia de la formulación de Hamilton [33].

Capítulo 3

Formulación hamiltoniana canónica del campo electromagnético: variables de conexión

3.1. Introducción

El trabajo de J. Clerk Maxwell y los desarrollos posteriores desde finales del siglo XIX pusieron de manifiesto que la luz tiene, con toda seguridad, naturaleza electromagnética. La electrodinámica clásica, conduce invariablemente a la idea de una transferencia continua de energía por medio de ondas electromagnéticas. En cambio, el punto de vista más moderno de la electrodinámica cuántica describe las interacciones electromagnéticas y el transporte de energía en términos de “partículas” elementales sin masa, denominadas **fotones**. Maxwell demostró que dos fuerzas que parecían diferentes, la eléctrica y la magnética, son simplemente dos aspectos del campo electromagnético.

Como es bien conocido, las ecuaciones para el campo electromagnético en el vacío, en unidades Gaussianas, están dadas por¹

$$\frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3.1)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (3.2)$$

Para mayores detalles, se sugiere consultar [42, 45].

En lo que sigue sólo se considera el caso sin fuentes (*i.e.*, $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$). En este capítulo se desarrolla la formulación hamiltoniana canónica a partir del cual se pueden obtener las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

¹Fue Oliver Heaviside (1850-1925), un telegrafista desempleado, autodidacta, quien notó la simetría entre \mathbf{E} y \mathbf{B} en las ecuaciones y las expresó en la forma en que se conocen hoy en día (véase la Ref. [44]).

Como es usual, se necesita partir de una lagrangiana, en donde las variables de campo son los potenciales electromagnéticos $A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$ o conexiones². Ahora, ya que el momento conjugado a ϕ es idénticamente cero, es necesario introducir la ley de Gauss como constricción³ única.

El desarrollo aquí sigue de los textos usuados comúnmente, como el de Jackson [42], aunque también puede verse el texto de Wald [17], en el cual se hace el tratamiento canónico de la teoría de Maxwell como un prelude para hacer el paso a la formulación hamiltoniana de la teoría de Einstein de la gravitación.

3.2. Campo electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes pueden obtenerse de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.10) con la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

(véase las Ref. [33, 42]) en el espaciotiempo de Minkowski con métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de campo electromagnético (o tensor de Faraday), y A_μ es el potencial vectorial que se toma como la variable de configuración (es decir, las q 's de un sistema mecánico o las η 's de un campo).

En este caso, el espaciotiempo es una variedad⁴ M sin curvatura y es posible escoger una foliación plana. Es decir, se divide M en el espacio Σ y tiempo t , donde Σ es \mathcal{R}^3 . De esta manera se puede escribir $A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$, *i.e.*, ϕ es la componente temporal de A_μ (normal a Σ) y \mathbf{A} es la componente espacial (tangente a Σ).

En la notación vectorial tridimensional ordinaria, la densidad lagrangiana (3.3) está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} + \nabla\phi \right) \cdot \left(\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} + \nabla\phi \right) - (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (3.4)$$

El momento conjugado a \mathbf{A} es por definición

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} + \nabla\phi \right) \equiv -\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

donde se ha definido también a \mathbf{E} . Sin embargo, $\dot{\phi}$ no aparece en \mathcal{L} , así, el momento conjugado a ϕ , p_ϕ , se anula idénticamente

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad (3.6)$$

entonces, no se tiene una relación invertible entre p_ϕ y $\dot{\phi}$, por lo que el formalismo hamiltoniano usual no es aplicable (se dice que se tiene una constricción). Esta dificultad está relacionada al hecho de que hay arbitrariedad de norma en A_μ , por lo que no se puede obtener una dinámica determinista para A_μ .

²En el lenguaje de la geometría diferencial, para comparar vectores y tensores en diferentes espacios se necesita hacer uso de un mecanismo, el cual se llama una conexión. Esta conexión es también un campo (véase e.g. [48, 49, 50]).

³La palabra en inglés es *constraint*, algunos autores la traducen como *ligadura* o *restricción*.

⁴Una variedad de dimensión n es un espacio topológico que localmente luce como \mathcal{R}^n aunque globalmente no.

Esta dificultad puede resolverse bajo las siguientes consideraciones. El hecho de que p_ϕ se anule idénticamente sugiere que ϕ no debe verse como una variable dinámica, *i.e.*, se debe tomar como variable de configuración q simplemente a \mathbf{A} . Por lo tanto, se define la densidad hamiltoniana \mathcal{H} , como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \mathcal{L} \\ &= 2\pi c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{8\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - c\mathbf{p} \cdot \nabla\phi \\ &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \frac{\phi}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \left(\frac{\phi}{4\pi} \mathbf{E} \right),\end{aligned}\quad (3.7)$$

donde $\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$ ⁵. El último término en la ecuación (3.7) es una divergencia total, por lo tanto, sólo contribuye con un término de frontera a la hamiltoniana $H = \int \mathcal{H} d^3x$, este término se anula cuando la frontera tiende a infinito (siempre que ϕ y \mathbf{E} se anulen en el infinito). Así, la divergencia total en (3.7) será descartada.

Denotamos por $\Gamma_{\text{EM}} = \{\mathbf{A}, \mathbf{p}\}$ al espacio fase electromagnético, el cual tiene 6 dimensiones por punto espacial. El paréntesis de Poisson fundamental puede leerse en la primera línea de (3.7), y está dado por $\{A_i(\mathbf{r}, t), p_j(\mathbf{r}', t)\} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, el cual puede reescribirse en términos de \mathbf{E} y \mathbf{A} como

$$\{E_i(\mathbf{r}, t), A_j(\mathbf{r}', t)\} = 4\pi c \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.8)$$

[*cf.* ecuación (3.5)]. Para dos funcionales cualesquiera del espacio fase $F(A, E)$ y $G(A, E)$ se tiene

$$\{F, G\} = 4\pi c \int \left(\frac{\delta F}{\delta E_i} \frac{\delta G}{\delta A_i} - \frac{\delta F}{\delta A_i} \frac{\delta G}{\delta E_i} \right) d^3x. \quad (3.9)$$

Ahora se ve a H como una funcional de \mathbf{A} y \mathbf{p} , donde ϕ juega el rol de multiplicador de Lagrange, *i.e.*, se anexa la ecuación

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = 0 \quad (3.10)$$

a las ecuaciones de Hamilton para $\dot{\mathbf{A}}$ y $\dot{\mathbf{p}}$. La ecuación (3.10) lleva a la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.11)$$

Mientras que las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{\mathbf{A}} = \{\mathbf{A}, H\} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{p}} = 4\pi c^2 \mathbf{p} - c\nabla\phi = -c\mathbf{E} - c\nabla\phi \quad (3.12)$$

y

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}} = \{\mathbf{p}, H\} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (3.13)$$

Las ecuaciones (3.11)-(3.13) equivalen a las ecuaciones de Maxwell (3.1) con $\mathbf{J} = 0$ y $\rho = 0$. La identidad $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ sigue directamente de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

⁵Note que con esta definición y la definición de \mathbf{E} , la densidad (3.4) está dada por $\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$.

Capítulo 4

Formulación hamiltoniana extendida para campos clásicos

4.1. Introducción

Las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad en la mecánica clásica son usualmente las ecuaciones de Euler-Lagrange para la lagrangiana $L = T - U$, donde T es la energía cinética y U es la energía potencial (asumiendo que las fuerzas son derivables de un potencial). Las ecuaciones de movimiento también puede ser expresadas en la forma de las ecuaciones de Hamilton, las cuales son equivalentes a $df/dt = \{f, H\}$, para cualquier función f que no dependa explícitamente del tiempo, definida en el espacio fase, donde H es el hamiltoniano y $\{, \}$ es el paréntesis de Poisson. La hamiltoniana es usualmente obtenida del lagrangiano por medio de una transformación de Legendre y, frecuentemente, pero no siempre, H corresponde a la energía total [12].

Por otro lado, es bien conocido que los formalismos lagrangiano y hamiltoniano tienen su origen en el estudio de sistemas con un número finito de grados de libertad en la mecánica newtoniana. Estos formalismos se extienden al tratamiento de campos clásicos, con la diferencia de que para los sistemas con un número finito de grados de libertad, la lagrangiana puede siempre escogerse como la diferencia entre la energía cinética y la potencial, lo cual siempre permite realizar la transformación de Legendre para hallar la hamiltoniana [33], mientras que en la teoría clásica de campos, no siempre tiene sentido incluso hablar de la energía cinética o potencial del campo y, lo que es más importante, no siempre es posible pasar al formalismo hamiltoniano a través de la transformación de Legendre, lo cual introduce diversas complicaciones en la teoría tal como se emplea comúnmente (uno debe introducir restricciones muy a menudo en las teorías de interés, como las de Maxwell y Einstein).

En este capítulo se presenta una formulación lagrangiana para obtener la forma hamiltoniana de las ecuaciones de campo más amplia que la que se deriva usualmente (capítulo 2), tratando ambas formulaciones en

coordenadas curvilíneas arbitrarias. Se define también el paréntesis de Poisson más general entre cualesquiera par de funcionales de campo. El tratamiento aquí sigue directamente del artículo de Torres del Castillo [12] y el libro de Olver [11] (puede verse también [16].)

En el siguiente capítulo se usará esta formulación hamiltoniana extendida para la teoría de Maxwell, donde han utilizado a los campos eléctrico y magnético como variables de campo. Este ejemplo ayudará a escribir la teoría de Yang-Mills en términos de variables de curvatura, *i.e.*, en términos de campos eléctricos y magnéticos con valores en algún álgebra de Lie no abeliana (en general).

En este capítulo y en el siguiente los índices i, j, k, \dots , corren de 1 a 3; los índices a, b, \dots , corren de 1 a m y los índices α, β, \dots , corren de 1 a n . En cada índice repetido se aplica la convención de suma.

4.2. Formulación lagrangiana

La configuración de un campo se describe mediante una o más variables definidas en alguna región del espacio, cuyos valores dependen del tiempo. En el caso de un campo vectorial, tensorial o espinorial, las variables que representan al campo pueden ser las componentes de éste respecto a alguna base específica. Las componentes del campo serán denotadas por $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, donde m es el número de variables independientes escogidas para caracterizar al campo, con cada componente η_a siendo una función (de valores reales o complejos) de la posición y del tiempo: $\eta_a = \eta_a(\mathbf{r}, t)$. La forma explícita de estas funciones está determinada por las ecuaciones de campo las cuales, en la mayoría de los casos de interés, son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de orden no superior al segundo que pueden establecerse de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} - \frac{d}{dx^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \eta_a)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} = 0, \quad (a = 1, 2, \dots, m) \quad (4.1)$$

donde \mathcal{L} , llamada **densidad lagrangiana**, es una función de las componentes de η_a , de sus primeras derivadas $\partial_i \eta_a \equiv \partial \eta_a / \partial x^i$, $\dot{\eta}_a \equiv \partial \eta_a / \partial t$ y posiblemente de las coordenadas x^i y del tiempo t , los símbolos d/dx^i y d/dt representan, al igual que en el resto de esta tesis, derivadas con respecto a x^i y t tomando en cuenta tanto la dependencia explícita como la implícita en esas variables.

Las ecuaciones (4.1) son de **Euler-Lagrange** correspondientes a la funcional

$$S[\eta_a(x^i, t)] = \int \mathcal{L}(\eta_a, \partial_i \eta_a, \dot{\eta}_a, x^i, t) dv dt, \quad (4.2)$$

siempre y cuando las coordenadas x^i sean **cartesianas**, donde dv es el elemento de volumen usual (en coordenadas cartesianas, $dv = dx^1 dx^2 dx^3$). Esto significa que de entre todos los conjuntos de funciones $\eta_1(x^i, t), \dots, \eta_m(x^i, t)$ que tienen un mismo valor preasignado en la frontera de la región de integración en (4.2), aquellos que hacen que S tenga un valor extremo, o un valor estacionario, satisfacen las ecuaciones (4.1) [33]. Si las x^i son coordenadas curvilíneas arbitrarias entonces, de la misma forma en que se deducen

las ecuaciones (4.1) a partir de la variación de (4.2), se halla

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} + \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \eta_a)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} = 0, \quad (a = 1, 2, \dots, m) \quad (4.3)$$

donde $(d/dx^i)^\dagger$ es el operador adjunto de (d/dx^i) definido en la forma usual que se emplea en la mecánica cuántica; esto es, si $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$ son dos funciones que tienden a cero en el infinito entonces $(d/dx^i)^\dagger$ es aquel operador lineal tal que

$$\int \overline{f(\mathbf{r})} \left(\frac{d}{dx^i} \right) g(\mathbf{r}) dv = \int \left[\overline{\left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger f(\mathbf{r})} \right] g(\mathbf{r}) dv \quad (4.4)$$

donde, como en lo sucesivo, la integral se extiende sobre todo el espacio. Expresando a dv en la forma $dv = J dx^2 dx^3$, donde J es el jacobiano de la transformación de las coordenadas x^i con respecto a las cartesianas, e integrando por partes el lado izquierdo de (4.4) resulta que

$$\left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger = -\frac{1}{J} \frac{d}{dx^i} J, \quad (4.5)$$

lo que significa que:

$$\left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger f = -\frac{1}{J} \frac{d}{dx^i} (Jf), \quad (4.6)$$

para cualquier función f . En el caso en que las x^i son coordenadas cartesianas, $J = 1$ y $(d/dx^i)^\dagger = -d/dx^i$, con lo que las ecuaciones (4.3) se reducen a (4.1). [La función J equivale también a la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico (g_{ij}) .]

Un concepto muy útil en lo siguiente es el de derivada funcional. Si F es una funcional de las componentes del campo que tenga la forma

$$F = \int \mathcal{F}(\eta_a, \partial_i \eta_a, \partial_i \partial_j \eta_a, \dots) dv \quad (4.7)$$

siendo \mathcal{F} una función que depende de las componentes del campo η_a y de sus derivadas parciales $\partial_i \eta_a$, $\partial_i \partial_j \eta_a \equiv \partial^2 \eta_a / \partial x^i \partial x^j, \dots$, hasta algún orden finito, entonces la **derivada funcional** de F con respecto a η_a , denotada por $\delta F / \delta \eta_a$ está dada por

$$\frac{\delta F}{\delta \eta_a} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta_a} + \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \eta_a)} + \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \left(\frac{d}{dx^j} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \partial_j \eta_a)} + \dots \quad (4.8)$$

por lo que si las coordenadas x^i son cartesianas

$$\frac{\delta F}{\delta \eta_a} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta_a} - \frac{d}{dx^i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \eta_a)} + \frac{d^2}{dx^i dx^j} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \partial_j \eta_a)} - \dots \quad (4.9)$$

Debido a que F es la integral de \mathcal{F} , la función \mathcal{F} es una **densidad** de F . Usando la derivada funcional y definiendo $L \equiv \int \mathcal{L} dv$, las ecuaciones (4.1) y (4.3) equivalen a

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_a} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_a} = 0, \quad (a = 1, 2, \dots, m) \quad (4.10)$$

con $\delta L / \delta \dot{\eta}_a$ definida en forma análoga a (4.8) y (4.9), reemplazando η_a por $\dot{\eta}_a$ y tomando en cuenta que \mathcal{L} no depende de las derivadas de $\dot{\eta}_a$.

4.3. Formulación hamiltoniana extendida y paréntesis de Poisson

Procediendo ahora en forma análoga a la seguida en la mecánica clásica para pasar de las ecuaciones de Lagrange a las de Hamilton [33] se define el momento conjugado a la componente η_a como

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a}, \quad (a = 1, 2, \dots, m). \quad (4.11)$$

Puesto que \mathcal{L} es una función de η_a , $\partial_i \eta_a$, $\dot{\eta}_a$, x^i y t , las ecuaciones (4.11) expresa a π_a como función de η_a , $\partial_i \eta_a$, $\dot{\eta}_a$ y posiblemente de x^i y t explícitamente. Si dichas expresiones pueden invertirse para escribir a $\dot{\eta}_a$ en función de η_a , $\partial_i \eta_a$, π_a , x^i y t entonces la densidad hamiltoniana \mathcal{H} está definida por

$$\mathcal{H} = \pi_a \dot{\eta}_a - \mathcal{L} \quad (4.12)$$

donde las $\dot{\eta}_a$ se eliminan en favor de los momentos π_a , de tal manera que \mathcal{H} sea función de η_a , $\partial_i \eta_a$, π_a , x^i y t . Por consiguiente, la diferencial de \mathcal{H} está dada por

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} d\eta_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \eta_a)} d(\partial_i \eta_a) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} d\pi_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt. \quad (4.13)$$

Por otra parte, de las definiciones (4.11) y (4.12) se tiene que

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \pi_a d\dot{\eta}_a + \dot{\eta}_a d\pi_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} d\eta_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \eta_a)} d(\partial_i \eta_a) \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} d\dot{\eta}_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} dx^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \dot{\eta}_a d\pi_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} d\eta_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \eta_a)} d(\partial_i \eta_a) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} dx^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (4.14)$$

lo cual, comparado con (4.13), lleva a las **identidades**

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \eta_a)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \eta_a)} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} = \dot{\eta}_a, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Empleando las ecuaciones de campo en la forma (4.3), de las ecuaciones (4.11) y (4.15) se llega a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} = \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \eta_a)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_a} = - \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \eta_a)} - \dot{\pi}_a \quad (4.18)$$

es decir,

$$\dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_a} - \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \eta_a)} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_a}, \quad (4.19)$$

donde H es la **hamiltoniana**, definida por

$$H \equiv \int \mathcal{H} dv. \quad (4.20)$$

Similarmente, de (4.8) y (4.16), $\dot{\eta}_a = \delta H / \delta \pi_a$. Así, las ecuaciones de campo pueden establecerse en la forma

$$\dot{\eta}_a = \frac{\delta H}{\delta \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\delta H}{\delta \eta_a}, \quad (a = 1, 2, \dots, m). \quad (4.21)$$

Estas ecuaciones, que tienen una forma muy similar a las ecuaciones de Hamilton de la mecánica clásica, equivalen a las ecuaciones (4.1) o (4.3) si la relación entre π_a y $\dot{\eta}_a$ dada por (4.11) es invertible (lo cual, por ejemplo, no ocurre en el caso de las ecuaciones de Maxwell).

Puesto que para algunas aplicaciones la forma (4.21) no es adecuada, conviene considerar **estructuras hamiltonianas más generales** que la asociada con estas ecuaciones, debido a que en campos no se puede hablar de un nivel potencial para obtener la lagrangiana y pasar a la formulación hamiltoniana por medio de una transformación de Legendre. Con este propósito se puede comenzar por establecer las ecuaciones (4.21) de tal forma que las variables aparezcan en una forma más simétrica [11]. Introduciendo las variables $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2m}$, definidas por $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2m}) \equiv (\eta_1, \dots, \eta_m, \pi_1, \dots, \pi_m)$, las Ecs. (4.21) equivalen a

$$\dot{\phi}_\alpha = D_{\alpha\beta} \frac{\delta H}{\delta \phi_\beta}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 2m) \quad (4.22)$$

con

$$(D_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

donde I es la matriz identidad $m \times m$. La generalización de las ecuaciones (4.22) que se considera en el resto de este trabajo se refiere a sistemas de ecuaciones de la forma

$$\dot{\phi}_\alpha = D_{\alpha\beta} \frac{\delta H}{\delta \phi_\beta}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (4.24)$$

donde n , el número de variables que determinan el estado del campo, puede ser par o impar y donde las $D_{\alpha\beta}$ son constantes o funciones de las coordenadas u operadores diferenciales o integrales con coeficientes constantes o dependientes de las coordenadas sobre las cuales se impone cierta restricción que se deriva más adelante [ecuación (4.30)]. La densidad hamiltoniana \mathcal{H} puede depender de ϕ_α , $\partial_i \phi_\alpha$, x^i y t , mientras que las variables ϕ_α no necesariamente son componentes del campo o momentos conjugados a ellas. Como se muestra en los casos que se tratarán en los siguientes capítulos, dadas las ecuaciones para un campo específico se escogen las variables ϕ_α y las ecuaciones del campo se llevan a la forma (4.24) identificándose entonces la hamiltoniana y las $D_{\alpha\beta}$.

Si F es una funcional de la forma

$$F = \int \mathcal{F}(\phi_\alpha, \partial_i \phi_\alpha, \partial_i \partial_j \phi_\alpha, \dots, x^i, t) dv \quad (4.25)$$

entonces la derivada de F con respecto al tiempo es

$$\frac{dF}{dt} = \int \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_\alpha} \dot{\phi}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \phi_\alpha)} \partial_i \dot{\phi}_\alpha + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right] dv. \quad (4.26)$$

Integrando por partes, suponiendo solamente las derivadas de \mathcal{F} que tienden a cero en el infinito, se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dt} &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi_\alpha} + \left(\frac{d}{dx^i} \right)^\dagger \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \phi_\alpha)} + \dots \right] \dot{\phi}_\alpha dv + \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} dv \\
 &= \int \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} \dot{\phi}_\alpha dv + \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} dv = \int \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\delta G}{\delta \phi_\beta} dv + \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} dv \\
 &= \{F, G\} + \frac{\partial F}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde se han usado las ecuaciones (4.8) y (4.24) así como la definición del **paréntesis de Poisson**

$$\{F, G\} \equiv \int \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\delta G}{\delta \phi_\beta} dv, \tag{4.28}$$

con $\partial F/\partial t \equiv \int (\partial \mathcal{F}/\partial t) dv$.

Para que el paréntesis de Poisson sea **antisimétrico** (*i.e.*, $\{F, G\} = -\{G, F\}$) es necesario que la expresión (4.28) sea igual a

$$\begin{aligned}
 -\{G, F\} &= - \int \frac{\delta G}{\delta \phi_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\delta F}{\delta \phi_\beta} dv = - \int \left(\overline{D_{\alpha\beta}^\dagger} \frac{\delta G}{\delta \phi_\alpha} \right) \frac{\delta F}{\delta \phi_\beta} dv \\
 &= - \int \left(\overline{D_{\beta\alpha}^\dagger} \frac{\delta G}{\delta \phi_\beta} \right) \frac{\delta F}{\delta \phi_\alpha} dv
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

donde $D_{\alpha\beta}^\dagger$ es el adjunto de $D_{\alpha\beta}$ [*cf.* Ec. (4.4)], lo que significa que $D_{\alpha\beta} = -\overline{D_{\beta\alpha}^\dagger}$ o, equivalentemente,

$$D_{\alpha\beta}^\dagger = -\overline{D_{\beta\alpha}}. \tag{4.30}$$

En el caso en que las $D_{\alpha\beta}$ sean constantes o funciones (*i.e.*, no sean operadores diferenciales) las restricciones (4.30) equivalen a que la matriz ($D_{\alpha\beta}$) sea antisimétrica [como ocurre con las ecuaciones canónicas (4.22) y (4.23)]. Si se supone que las $D_{\alpha\beta}$ no dependen de las ϕ_α , el paréntesis de Poisson (4.28) satisface la **identidad de Jacobi**:

$$\{F, \{G, K\}\} + \{G, \{K, F\}\} + \{K, \{F, G\}\} = 0. \tag{4.31}$$

La validez de (4.31) puede demostrarse por un largo cálculo directo o más brevemente con el formalismo de multivectores funcionales [11].

En el caso de que las $D_{\alpha\beta}$ dependan de las ϕ_α (lo cual pasará con la relatividad general si se usan variables de curvatura [29]), el uso de los multivectores puede ser indispensable para probar esta identidad [29, 46].

Expresando el valor de ϕ_α en un punto específico \mathbf{r}' como una funcional de las variables de campo en la forma

$$\phi_\alpha(\mathbf{r}', t) = \int \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_\beta(\mathbf{r}, t) dv \tag{4.32}$$

de la ecuación (4.8) se ve que

$$\frac{\delta \phi_\alpha(\mathbf{r}', t)}{\delta \phi_\beta(\mathbf{r}, t)} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{4.33}$$

por consiguiente, de la definición (4.28),

$$\{\phi_\alpha(\mathbf{r}', t), \phi_\beta(\mathbf{r}'', t)\} = \int \delta_{\alpha\gamma} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') D_{\gamma\epsilon}(\mathbf{r}) \delta_{\beta\epsilon} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') dv = D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''). \tag{4.34}$$

En el caso en que las ϕ_α sean variables canónicas con

$$(\phi_1, \dots, \phi_{2m}) = (\eta_1, \dots, \eta_m, \pi_1, \dots, \pi_m), \quad (4.35)$$

las $D_{\alpha\beta}$ están dadas por la ecuación (4.23) así que las relaciones (4.34) equivalen a

$$\begin{aligned} \{\eta_a(\mathbf{r}', t), \eta_b(\mathbf{r}'', t)\} &= 0 = \{\pi_a(\mathbf{r}', t), \pi_b(\mathbf{r}'', t)\} \\ \{\eta_a(\mathbf{r}', t), \pi_b(\mathbf{r}'', t)\} &= \delta_{ab} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \end{aligned} \quad (4.36)$$

mientras que de acuerdo a la definición (4.28),

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \eta_a} \frac{\delta G}{\delta \pi_a} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a} \frac{\delta G}{\delta \eta_a} \right) dv. \quad (4.37)$$

(*cf.* Ref. [33]) que tiene una forma muy similar a la del paréntesis de Poisson de la mecánica clásica cuando éste se expresa en coordenadas canónicas.

Capítulo 5

Formulación hamiltoniana no canónica del campo electromagnético: variables de curvatura

5.1. Introducción

Todo fenómeno electromagnético clásico es descrito a partir de las ecuaciones de Maxwell, en estas ecuaciones se relacionan a los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} y las densidades de carga ρ y de corriente \mathbf{j} ; las ecuaciones de Maxwell junto con la fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton dan una completa descripción de la dinámica clásica de la interacción de partículas cargadas y campos electromagnéticos.

Se llaman transformaciones de norma a las transformaciones que pueden experimentar los potenciales vectorial \mathbf{A} y escalar ϕ , pero que dejan invariante a los campos físicos E y B , y en consecuencia a las ecuaciones de Maxwell, se dice por este motivo que las ecuaciones de Maxwell son invariantes de norma.

Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo las **transformaciones de norma**¹

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad (5.1)$$

donde χ es una función escalar. Estas ecuaciones expresan el hecho de que un cambio local en el potencial electrostático ϕ se compensa por un cambio local en el potencial vectorial magnético \mathbf{A} , de tal manera que quedan invariantes las ecuaciones de Maxwell. Esta invarianza se manifiesta si definimos el **tensor de**

¹Gauge transformations, en inglés. El principio de norma está de acuerdo con el principio de relatividad especial (y general): “*las leyes de la física deben ser las mismas en cualquier sistema de referencia inercial (y no inercial)*”.

campo electromagnético (o tensor de Faraday) $F_{\mu\nu}$ como

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

La transformación (5.1) es un miembro del grupo $U(1)$ (el grupo unitario, que consiste de todas las matrices 1×1 con entradas complejas con determinante 1). Desde luego, el grupo $U(1)$ es **abeliano** o **conmutativo**. (Para una revisión de grupos y grupos de Lie véase las Refs. [47-50], por ejemplo.)

En la ecuación (5.1) se escoge a χ tal que A_μ satisfaga la condición invariante,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.3)$$

conocida como la condición de Lorentz.

En electromagnetismo, se dice que una condición como la dada por la ecuación (5.3), es una condición que fija la norma. Una consecuencia de la invariancia de norma es que diferentes elecciones de la condición que fija la norma llevan a formas diferentes para el propagador del fotón.

En la siguiente sección se usará \mathbf{E} y \mathbf{B} como invariantes de norma como un prelude para la teoría de Yang-Mills.

5.2. Formulación hamiltoniana en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B}

Si sólo consideramos el caso del vacío y sin fuentes, las ecuaciones de Maxwell son

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (5.5)$$

En términos de las coordenadas cartesianas y de las componentes cartesianas de \mathbf{E} y \mathbf{B} , las ecuaciones (5.4) equivalen a

$$\dot{E}_i = c\epsilon_{ijk}\partial_j B_k, \quad \dot{B}_i = -c\epsilon_{ijk}\partial_j E_k. \quad (5.6)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita.²

Si se toman las componentes de los campos eléctrico y magnético como variables de campo $(\phi_1, \dots, \phi_6) \equiv (E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3)$, las ecuaciones (5.6) pueden establecerse en la forma hamiltoniana [12]

$$\dot{E}_i = D_{ij} \frac{\delta H}{\delta B_j}, \quad \dot{B}_i = -D_{ij} \frac{\delta H}{\delta E_j} \quad (5.7)$$

donde

$$D_{ij} = 4\pi c\epsilon_{ijk}\partial_k \quad (5.8)$$

² $\epsilon_{ijk} = 0$ si algún índice es igual a otro, $\epsilon_{ijk} = 1$ si i, j, k forman una permutación *par* de 1, 2, 3, $\epsilon_{ijk} = -1$ si i, j, k forman una permutación *impar* de 1, 2, 3.

y

$$H \equiv \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) dv. \quad (5.9)$$

La matriz $(D_{\alpha\beta})$ [véase la ecuación (4.24)] está dada por

$$(D_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & D_{ij} \\ -D_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Haciendo uso de D_{ij} dado por la ecuación (5.8), se puede definir un paréntesis de Poisson entre cualquier par de funcionales de campo $F(E, B)$ y $G(E, B)$ como

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \int \left(\frac{\delta F}{\delta E_i} D_{ij} \frac{\delta G}{\delta B_j} - \frac{\delta F}{\delta B_i} D_{ij} \frac{\delta G}{\delta E_j} \right) dv \\ &= 4\pi c \int \epsilon_{ijk} \left(\frac{\delta F}{\delta E_i} \partial_k \frac{\delta G}{\delta B_j} - \frac{\delta F}{\delta B_i} \partial_k \frac{\delta G}{\delta E_j} \right) dv. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Integrando por partes, se logra observar que el paréntesis (5.11) es antisimétrico hasta una divergencia total, pero se descartará este término. Equivalentemente, el operador diferencial matricial $(D_{\alpha\beta})$, dado por (5.10), satisface las condiciones (4.30), puesto que $\partial_k^\dagger = -\partial_k$. El paréntesis (5.11) satisface la identidad de Jacobi debido a que los operadores D_{ij} tienen coeficientes constantes [11]. Así que las D_{ij} definen una estructura hamiltoniana. De la Ec. (5.11) se encuentra que los paréntesis fundamentales son

$$\{E_i(\mathbf{r}', t), E_j(\mathbf{r}'', t)\} = 0 = \{B_i(\mathbf{r}', t), B_j(\mathbf{r}'', t)\} \quad (5.12)$$

y

$$\{E_i(\mathbf{r}', t), B_j(\mathbf{r}'', t)\} = 4\pi c \epsilon_{ijk} \partial_k^\dagger \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''). \quad (5.13)$$

El paréntesis (5.13) es consistente con las ecuaciones (5.5) ya que, por ejemplo,

$$\{\partial_i^\dagger E_i(\mathbf{r}', t), B_j(\mathbf{r}'', t)\} = 4\pi c \epsilon_{ijk} \partial_i^\dagger \partial_k^\dagger \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') = 0. \quad (5.14)$$

De esta manera, las ecuaciones (5.5) pueden introducirse como condiciones iniciales sobre los campos admisibles.

Usando el paréntesis de Poisson (5.11), se puede observar que H es en efecto el generador de traslaciones temporales, ya que para cualquier funcional de los campos F se tiene que $\{F, H\} = \dot{F}$.

Aún cuando en las ecuaciones (5.4)-(5.14) no aparecen los potenciales del campo electromagnético (lo cual es una ventaja), éstos pueden introducirse en la presente formulación. Si se escoge una norma en la que $\phi = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, el potencial \mathbf{A} está dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \quad (5.15)$$

(se puede añadir en el lado derecho de esta ecuación el gradiente de una función armónica independiente del tiempo, sin alterar las condiciones de norma impuestas); por lo tanto, se tiene que

$$\frac{\delta A_k(\mathbf{r}')}{\delta B_i(\mathbf{r})} = -\frac{1}{4\pi} \partial_l \frac{\epsilon_{kli}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5.16)$$

y de (5.11) resulta que

$$\begin{aligned}
\{E_m(\mathbf{r}'', t), A_k(\mathbf{r}', t)\} &= \int \delta_{mi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') D_{ij} \left(-\frac{1}{4\pi} \epsilon_{klj} \partial_l |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \right) dv \\
&= -c \epsilon_{mij} \epsilon_{klj} \partial_i' \partial_l'' |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}|^{-1} \\
&= 4\pi c \delta_{mk} \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}) + c \partial_k'' \partial_m'' |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}|^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

(Este paréntesis es isomorfo al conmutador entre los operadores correspondientes que se obtienen cuando se cuantiza el campo electromagnético en la norma de Coulomb, vea por ejemplo la Ref. [38].)

Si $H = \int \mathcal{H} dv$ está dada por la ecuación (5.9), la cual es la energía del campo, se tiene la ley de conservación

$$\dot{\mathcal{H}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \tag{5.18}$$

donde

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{5.19}$$

es el vector de Poynting. Así, integrando sobre todo el espacio la ecuación (5.18), puede verse que $dH/dt = 0$ si los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se anulan en el infinito.³

Como es bien conocido, las componentes del momento lineal del campo están dadas prácticamente por las componentes del vector de Poynting (vea [42], por ejemplo), sin embargo éstas pueden obtenerse también a partir de la invarianza de H bajo traslaciones espaciales. Obteniendo

$$P_k = \int \mathcal{P}_k dv \equiv \int \frac{1}{4\pi c} \epsilon_{kij} E_i B_j dv, \tag{5.20}$$

como las componentes del **momento lineal** del campo electromagnético. Como en el caso de H , usando el paréntesis (5.11) puede verse que P_k es el generador de traslaciones espaciales, pues para $F(E, B)$ se tiene $\{F, P_k\} = -\partial_k F$.

Las componentes del momento angular pueden calcularse notando que H es invariante bajo rotaciones, obteniendo

$$L_k \equiv \int \frac{1}{4\pi c} \epsilon_{klm} x^l \epsilon_{mij} E_i B_j dv = \int \frac{1}{4\pi c} (x^i B_i E_k - x^i E_i B_k) dv, \tag{5.21}$$

como las componentes del **momento angular** del campo electromagnético. También puede verse que, efectivamente, L_k es el generador de rotaciones alrededor del eje x^k [12].

³Cabe señalar que una funcional del campo F es una cantidad conservada si y sólo si $dF/dt = 0$. Por lo tanto, para comprobar que dicha funcional se conserva es suficiente usar las ecuaciones de evolución del campo solamente, sin hacer uso de una hamiltoniana H particular y su correspondiente estructura hamiltoniana $D_{\alpha\beta}$. Desde luego, si uno hace una elección particular de $(H, D_{\alpha\beta})$, uno puede usarlas para verificar que F se conserva.

Capítulo 6

Teorías de Yang-Mills

6.1. Introducción

Las teorías de norma no abelianas, desarrolladas por Yang y Mills (1954), se han convertido en un foco de gran interés, debido a su papel central en dos modelos actualmente populares para un proceso fundamental físico: la cromodinámica “fuerte” y la dinámica cuántica de sabor “electrodébil”.

El lagrangiano de un campo que tiene alguna simetría interna dada por un grupo de transformaciones de norma, debería ser posible escoger en cada punto del espacio una transformación de norma diferente, sin que eso hiciese que las ecuaciones de la teoría fueran alteradas. Así Yang y Mills buscaron la teoría más general del lagrangiano para un campo con invariancia de norma local. De hecho la electrodinámica cuántica era ya una teoría con invariancia de norma local, donde el grupo de norma era precisamente el grupo de Lie $U(1)$ ¹.

En el apéndice B puede verse que el campo de Maxwell surge como un campo de norma que debe introducirse para garantizar la invarianza bajo transformaciones de norma locales $U(1)$. Todo esto a partir de la conservación de la carga eléctrica que nos conduce al uso de un campo escalar complejo.

Ahora se desea generalizar los resultados de la sección 3 del apéndice B al caso donde la lagrangiana tiene una simetría superior a $SO(2)$ o $U(1)$. La generalización más simple es $SU(2)$. Este grupo es no abeliano, así que se estudia el tema de **campos de norma no abelianos**. Además, en esta sección se considera al campo escalar con dos componentes que están relacionadas por rotaciones en el plano. Una manera de generalizar ésto es considerar el caso donde ϕ tiene tres componentes, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, en un espacio “interno” y las transformaciones de norma (de primer tipo) son rotaciones en este espacio. Esto dará una cantidad “vectorial” que se conserva, en lugar de la carga e (caso de Maxwell). Ésta será el isoespín² [38].

La hipótesis de que la simetría de isoespín es una simetría local fue anticipada por vez primera por Yang y Mills (1954). Por muchos años su trabajo se consideró como un callejón sin salida –aunque interesante–

¹Un grupo de Lie es un grupo que es también una variedad (véase, e.g. [48, 49, 50]).

²El isoespín es un número cuántico relacionado a la interacción fuerte y aplicado a las interacciones entre el neutrón y el protón.

ya que, como se discutirá más adelante, no hay evidencia de que el isospín esté asociado con una simetría de norma. En años más recientes, la idea de Yang y Mills ha sido retomada para aplicarla a las interacciones fuertes entre quarks (simetría de norma de color) y las interacciones unificadas débil y electromagnética (simetría de norma de isospín débil e hipercarga). En lo que sigue se va a referir a la cantidad vectorial conservada como isospín, y al espacio de simetría interno como espacio de isospín o isoespacio. Debe recordarse que se intenta que estas palabras se entiendan genéricamente.

A partir de este capítulo los índices de medio alfabeto i, j, k, \dots , corren de 1 a 3 y son índices internos. Para referirse al espaciotiempo se usará, como es usual, índices griegos. Se usan índices del inicio del alfabeto a, b, c, \dots como índices de espacio.

6.2. Rotaciones en 3 dimensiones

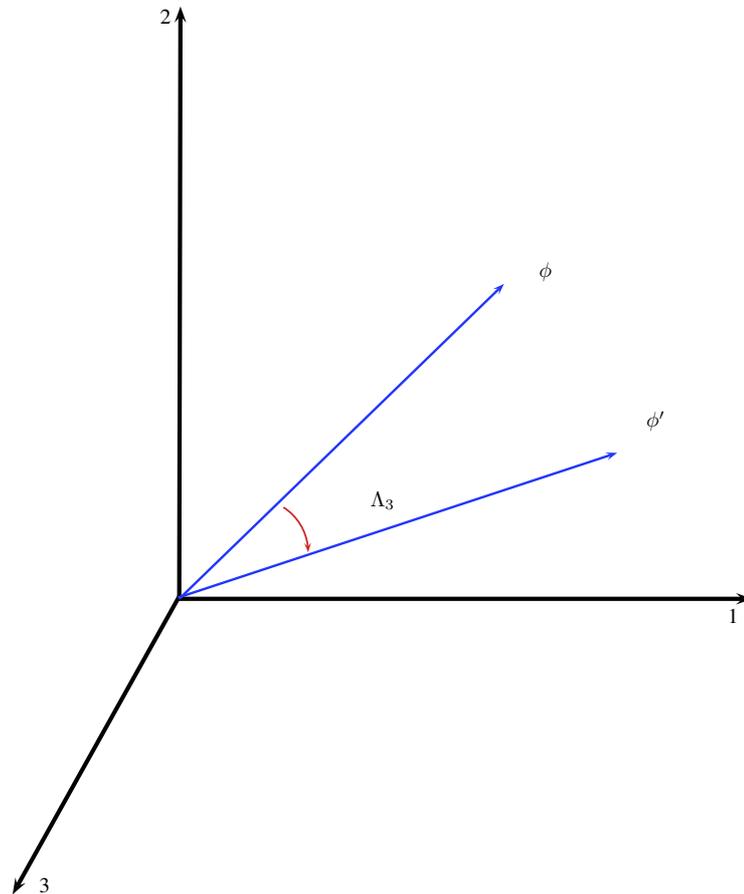


Figura 6.1: Rotación alrededor del eje 3 en el espacio con simetría interna.

Refiriéndose por un momento a la Fig. 6.1, se van a considerar las rotaciones en el plano (1-2) como rotaciones alrededor del eje 3, en otras palabras, rotaciones por un ángulo Λ_3 , como se muestra en la figura.

Se tiene,

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= (\cos \Lambda_3)\phi_1 + (\sin \Lambda_3)\phi_2, \\ \phi'_2 &= -(\sin \Lambda_3)\phi_1 + (\cos \Lambda_3)\phi_2, \\ \phi'_3 &= \phi_3.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Si Λ_3 es infinitesimal, se obtiene

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= \phi_1 + \Lambda_3\phi_2, \\ \phi'_2 &= -\Lambda_3\phi_1 + \phi_2, \\ \phi'_3 &= \phi_3.\end{aligned}\tag{6.2}$$

los cuales son las 3 componentes de la ecuación³

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \mathbf{\Lambda} \times \phi,\tag{6.3}$$

cuyas componentes en notación de índices son

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = \phi_i - \epsilon_{ijk}\Lambda_j\phi_k,\tag{6.4}$$

la cual corresponde por tanto a una rotación general a través de un ángulo $\mathbf{\Lambda}$. El significado de esto es que $|\mathbf{\Lambda}|$ es el ángulo de rotación, y $\mathbf{\Lambda}/|\mathbf{\Lambda}|$ es el eje de rotación. Se tiene, entonces,

$$\delta\phi_i = -\epsilon_{ijk}\Lambda_j\phi_k.\tag{6.5}$$

Esta es una transformación de primer tipo y debe compararse con las ecuaciones (B.75) y (B.77). La ecuación (6.5) son desde luego tres ecuaciones efectivas [38].

6.3. Derivada covariante

La estrategia es ahora proceder tanto como sea posible de una manera análoga al caso del electromagnetismo. Se encontrará que este caso es más complicado, sin embargo, es directamente viable debido al hecho de que las rotaciones forman el grupo $SO(3)$ el cual es no abeliano. Su naturaleza no abeliana es responsable de que el producto vectorial es no conmutativo. En lo que sigue se observará cómo se complica el álgebra. Estas complicaciones tienen consecuencias físicas directas.

Note primero que la ecuación (6.5) es una instrucción para llevar a cabo una rotación de ϕ en el espacio interno a través del **mismo** ángulo $\mathbf{\Lambda}$ en todos los puntos del espaciotiempo. Modificando esto por un requerimiento más razonable en la que Λ_i dependa de x^μ . Se tiene entonces

$$\partial_\mu\phi_i \rightarrow \partial_\mu\phi'_i = \partial_\mu\phi_i - \epsilon_{ijk}(\partial_\mu\Lambda_j)\phi_k - \epsilon_{ijk}\Lambda_j(\partial_\mu\phi_k)$$

³La calidad de vector en la notación en letras negritas aquí se refiere al espacio interno.

o

$$\delta(\partial_\mu \phi_i) = -\epsilon_{ijk}(\partial_\mu \Lambda_j)\phi_k - \epsilon_{ijk}\Lambda_j(\partial_\mu \phi_k). \quad (6.6)$$

Expresado en palabras, $\partial_\mu \phi_i$ no se transforma covariantemente, como lo hace ϕ_i en la ecuación (6.5). Se debe construir una **derivada covariante**, análoga a la del electromagnetismo (véase el apéndice B). Esto involucrará la introducción de un potencial de norma análogo a A_μ . Entonces se establece la derivada covariante como

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + g\epsilon_{ijk}A_\mu^j \phi_k. \quad (6.7)$$

A_μ^i es el potencial de norma análogo a A_μ [37]; note que es un vector en el espacio interno, mientras que A_μ sólo tiene una componente; g es una constante de acoplamiento, análoga a la carga eléctrica e . Comparando con (6.5) se requiere entonces que

$$\delta(D_\mu \phi_i) = -\epsilon_{ijk}\Lambda_j(D_\mu \phi_k). \quad (6.8)$$

¿Cómo deberá transformarse A_μ^i para satisfacer la condición de una transformación de primer tipo? Se debe hacer una suposición: primero, A_μ^i es un vector (interno), así, como en (6.5) habrá un término $\epsilon_{ijk}\Lambda_j A_\mu^k$; segundo, ya que A_μ cambia por el término $(1/e)\partial_\mu \Lambda$ [véase la Ec. (B.81)], se puede esperar que A_μ^i cambie por un término $(1/g)\partial_\mu \Lambda_i$. Así, se tiene

$$A_\mu^i \rightarrow A_\mu^i - \epsilon_{ijk}\Lambda_j A_\mu^k + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda_i$$

o

$$\delta A_\mu^i = -\epsilon_{ijk}\Lambda_j A_\mu^k + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda_i. \quad (6.9)$$

Esto daría, usando las ecuaciones (6.5), (6.6) y (6.7),

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \phi_i) &= \delta(\partial_\mu \phi_i) + g\epsilon_{ijk}(\delta A_\mu^j)\phi_k + g\epsilon_{ijk}A_\mu^j(\delta \phi_k) \\ &= -\epsilon_{ijk}\Lambda_j(\partial_\mu \phi_k) - \epsilon_{ijk}(\partial_\mu \Lambda_j)\phi_k - g\epsilon_{ljk}\epsilon_{ilm}(\Lambda_j A_\mu^k)(\phi_m) \\ &\quad + \epsilon_{ijk}\partial_\mu \Lambda_j \phi_k - g\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}A_\mu^j(\Lambda_l \phi_m) \\ \delta(D_\mu \phi_i) &= -\epsilon_{ijk}\Lambda_j(\partial_\mu \phi_k) - g[\epsilon_{ljk}\epsilon_{ilm}(\Lambda_j A_\mu^k)(\phi_m) \\ &\quad + \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}A_\mu^j(\Lambda_l \phi_m)]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ahora, usando la propiedad del tensor de Levi-Civita,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \quad (6.11)$$

donde las δ_{ij} son deltas de Kronecker, se pueden reescribir los términos en el paréntesis cuadrado de (6.10), obteniendo

$$\delta(D_\mu \phi_i) = -\epsilon_{ijk}\Lambda_j(\partial_\mu \phi_j + g\epsilon_{klm}A_\mu^l \phi_m) = -\epsilon_{ijk}\Lambda_j(D_\mu \phi_k), \quad (6.12)$$

como se requería, ésta es la regla para una transformación covariante. La suposición fue correcta: introduciendo un potencial de norma A_μ^i , el cual se transforma como en (6.9), la derivada covariante del vector ϕ_i está dado por (6.7).

6.4. Tensor de campo de Yang-Mills

Si A_μ^i es el análogo de A_μ , ¿cuál es el análogo del campo de fuerzas $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$? Éste se llamará $F_{\mu\nu}^i$. A diferencia de $F_{\mu\nu}$ el cual es un escalar bajo $SO(2)$, $F_{\mu\nu}^i$ será un vector bajo $SO(3)$, y así, se transformará como el mismo ϕ_i :

$$\delta(F_{\mu\nu}^i) = -\epsilon_{ijk}\Lambda_j F_{\mu\nu}^k. \quad (6.13)$$

$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$, no cumple con esto último, porque

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i) &= \partial_\mu \left(-\epsilon_{ijk}\Lambda_j A_\nu^k + \frac{1}{g}\partial_\nu \Lambda_i \right) - \partial_\nu \left(-\epsilon_{ijk}\Lambda_j A_\mu^k + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda_i \right) \\ &= -\epsilon_{ijk}\Lambda_j (\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k) - \epsilon_{ijk} [(\partial_\mu \Lambda_j) A_\nu^k - (\partial_\nu \Lambda_j) A_\mu^k]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

El último término es no deseado, y por tanto debe cancelarse. Observando ahora que

$$\begin{aligned} \delta(g\epsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k) &= g\epsilon_{ijk} \left(-\epsilon_{jlm}\Lambda_l A_\mu^m + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda_j \right) A_\nu^k \\ &\quad + g\epsilon_{ijk} A_\mu^j \left(-\epsilon_{klm}\Lambda_l A_\nu^m + \frac{1}{g}\partial_\nu \Lambda_k \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

El primer y tercer término pueden combinarse de acuerdo a (6.11), dando

$$\begin{aligned} \delta(g\epsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k) &= -g\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\Lambda_j (A_\mu^l A_\nu^m) \\ &\quad + \epsilon_{ijk} [(\partial_\mu \Lambda_j) A_\nu^k - (\partial_\nu \Lambda_j) A_\mu^k] \end{aligned} \quad (6.16)$$

El último término de la ecuación anterior es el mismo término que el de la ecuación (6.14), así, si se define

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k, \quad (6.17)$$

entonces $F_{\mu\nu}^i$ se transforma de la manera requerida por (6.13) [37].

6.5. Ecuaciones de campo

El campo de fuerzas $F_{\mu\nu}^i$ es un vector, así que $F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu}_i$ es un escalar y aparecerá en la lagrangiana, la cual es, por tanto

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D_\mu \phi^i D^\mu \phi_i - \frac{m^2}{2}\phi^i \phi_i - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu}_i. \quad (6.18)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen por la variación funcional de esta lagrangiana de la manera usual, de tal forma que la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(A_\mu^i)} = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^i)} \right],$$

donde i es un índice interno, da, después de un poco de álgebra,

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^i + g\epsilon^{ijk}A_j^\nu F_{\mu\nu k} = g[\epsilon_{ijk}(\partial_\mu \phi^j)\phi^k + g\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}(A_\mu^l \phi^m)\phi^j] \quad (6.19)$$

o, por virtud de (6.7),

$$D^\nu F_{\mu\nu}{}^i = g\epsilon^{ijk}(D_\mu\phi_j)\phi_k \equiv gJ_\mu{}^i. \quad (6.20)$$

Ésta ecuación es análoga a la ecuación de Maxwell (B.96), así que $F_{\mu\nu}{}^i$ es el campo de norma de “isoespín”, $J_\mu{}^i$ es la fuente o el término de “materia”, y en lugar de la derivada ordinaria se tienen las derivadas covariantes. La afirmación de que $D^\nu F_{\mu\nu}{}^i$ es la derivada covariante de $F_{\mu\nu}{}^i$ significa, repitiendo lo que se dijo anteriormente, que $D^\nu F_{\mu\nu}{}^i$ se comporta como un vector bajo rotaciones en el espacio de “isoespín”, justo como $F_{\mu\nu}{}^i$ lo hace (y por supuesto también $A_\nu{}^i$). La ecuación (6.20) relaciona, así, a la divergencia covariante del campo de norma con la corriente de “materia”. Mientras que las ecuaciones de Maxwell son lineales en A_μ , sin embargo, esta ecuación no es lineal en $A_\mu{}^i$. La consecuencia de esto es que, mientras que en ausencia de materia ($\phi \rightarrow 0$) la ecuación de Maxwell se convierte en

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (6.21)$$

indicando que no hay un término fuente para el campo electromagnético, la ecuación del campo de norma no abeliano (6.19), en ausencia de materia, se convierte en

$$D^\nu F_{\mu\nu}{}^i = 0 \rightarrow \partial^\nu F_{\mu\nu}{}^i = -g\epsilon^{ijk}A_\nu{}^j F_{\mu\nu}{}^k, \quad (6.22)$$

indicando que el campo $F_{\mu\nu}{}^i$ actúa como *fuentes* para sí mismo. Esto corresponde al hecho de que el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ no porta carga, y por lo tanto no es su propia fuente, pero el campo de “isoespín” $F_{\mu\nu}{}^i$ porta “isoespín” de tal forma que actúa como fuente para sí mismo, ya que es el campo que es generado por la existencia de cualquier partícula con “isoespín”. Se recordará que esto es una consecuencia directa del hecho de que el grupo de simetría $SO(3)$ es no abeliano [38].

6.6. Analogía con la relatividad general

Vale la pena notar aquí que se cumple una situación similar en la relatividad general. Ahí el mismo campo gravitacional porta energía, la cual es equivalente a la masa, y por tanto es una fuente de gravitación. En términos de la ecuación de campo (B.43)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu},$$

ambos lados de esta ecuación son tensores cuya divergencia *covariante* se anula. La derivada covariante en cuestión es análoga a la que aquí se consideró, pero tiene un origen estrictamente geométrico, relacionado con el hecho de que el espaciotiempo en sí ya no es euclideo en la presencia de objetos gravitando. Por tanto, incluso en ausencia de materia ($T_{\mu\nu} = 0$), la divergencia “real” del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ no es cero, y ésta es la expresión matemática para el hecho de que el campo gravitacional se acople a sí mismo. Es claro que la naturaleza no abeliana del grupo de norma es responsable de una estructura mucho más rica que

la que existe en electrodinámica, y para ilustrar esto una vez más, considere las ecuaciones análogas a las ecuaciones **homogéneas** de Maxwell (A.44)

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (6.23)$$

Estas ecuaciones implican que,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

la primera dice que no hay cargas magnéticas como fuentes de campo magnético. La generalización no abeliana de (6.23) es,

$$D_\lambda F_{\mu\nu}{}^i + D_\mu F_{\nu\lambda}{}^i + D_\nu F_{\lambda\mu}{}^i = 0 \quad (6.24)$$

y, ya que es la derivada covariante y no la derivada ordinaria la que aparece, sigue que

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} \neq 0 \quad (6.25)$$

donde $\vec{\mathbf{B}}$ es el “isovector de inducción magnética” (es un vector en el “isoespacio” así como también en el espacio ordinario). Aquí \rightarrow indica un vector en la espacio de configuración, y la letra en negrita significa un vector en el espacio de isoespín. Este campo magnético isovectorial tiene divergencia diferente de cero, existen monopolos magnéticos de isoespín 1. Para ponerlo de otra forma, si se introduce un campo escalar isovectorial ϕ , y se define

$$\vec{B}_{HP} = \phi \cdot \vec{\mathbf{B}} \quad (6.26)$$

como el campo magnético “ordinario”, entonces

$$\nabla \cdot \vec{B}_{HP} \neq 0 \quad (6.27)$$

y esta teoría tiene monopolos magnéticos ordinarios (isoescalares). El subíndice HP es por Hooft y Polyakov [51, 52], quienes fueron los primeros en darse cuenta de que los campos de norma no abelianos ofrecen la posibilidad de monopolos magnéticos.

Sin embargo, no todo es diferente cuando se va al caso no abeliano. Algo que es lo mismo es que el campo de “isoespín” $F_{\mu\nu}{}^i$ no debe tener masa, justo como el campo electromagnético. La razón es la misma: para tener en cuenta un campo con masa m , debe agregarse un término extra

$$\mathcal{L}_m = m^2 A_\mu{}^i A^\mu{}_i \quad (6.28)$$

a la lagrangiana [ésto es el análogo a la ecuación (B.99)]. La ecuación de movimiento (6.20) se cambia entonces a

$$D^\nu F_{\mu\nu}{}^i = g J_\mu{}^i + m^2 A_\mu{}^i. \quad (6.29)$$

El término (6.28), no es claramente invariante de norma, así que, como antes, se observa que la invarianza de norma implica una masa igual a cero para el campo de norma.

Capítulo 7

Formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills en términos de variables de conexión

7.1. Introducción

En el capítulo anterior se observó cómo se obtienen los campos de Yang-Mills a partir del principio de norma. Se obtuvo también una lagrangiana con la cual pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento de éstos campos a través de un principio variacional.

En este capítulo se va a desarrollar el formalismo hamiltoniano canónico de las teorías de norma de Yang-Mills. Es poco lo que se trata en los libros de texto sobre este tema. En realidad en los textos de teoría cuántica de campo como los de Peskin [34], Ryder [38] y Bjorken [53] evitan este formalismo debido a que lo usual es cuantizar los campos a partir de la formulación lagrangiana y a través de la cuantización por integral de trayectoria (conocida como cuantización de Feynman).

Ahora, es conocido que la cuantización del campo gravitacional a través de la formulación lagrangiana fracasó, en el sentido que se desconoce una formulación completa y consistente análoga a la electrodinámica cuántica.

En la década de los 80's del siglo pasado Ashtekar, Rovellin, Smolin [20, 26, 27, 54], entre otros, introdujeron un nuevo conjunto de variables con las cuales el campo gravitacional podría cuantizarse a través de una formulación hamiltoniana canónica. Con estas variables, conocidas como *variables de lazo*, se han hecho progresos relevantes en la cuantización del espaciotiempo a través de la cuantización de Dirac [21].

Es por esto que se cree que una formulación hamiltoniana de los campos es más prometedora para el proceso de cuantización. El tratamiento en este capítulo sigue muy de cerca el libro de Gambini y Pullin

[31], aunque ya se ha adecuado la notación en términos de índices internos y espaciales por conveniencia y como algo necesario para el núcleo principal de esta tesis, el cual se trata en el siguiente capítulo. Puede verse también el artículo de Jackiw [37] en el cual también se trabaja la formulación canónica de las teorías de Yang-Mills.

7.2. Formulación lagrangiana de las teorías de Yang-Mills

Aunque ya se ha esbozado en la sección 5 del capítulo anterior cómo se derivan las ecuaciones de movimiento de los campos de Yang-Mills a partir de una lagrangiana, en esta sección se mostrarán más detalles de dicha derivación. Haciendo algunos cambios para simplificar los cálculos: En primer lugar, se tomará la constante de acoplamiento g igual a uno; esto es algo similar a lo que se hace cuando se toma $\hbar = c = 1$ (unidades de Dios¹). En segundo lugar, sólo se tratará el caso sin fuentes de materia, *i.e.*, $J_\mu^i = 0$, tal como se hizo para el caso de Maxwell. [Note que en este caso $\phi_i = 0$, por lo que la lagrangiana será simplemente (7.4)]

Como ya se ha mencionado, las variables dinámicas básicas de las teorías de Yang-Mills son los potenciales vectoriales A^μ_i , con índice espaciotemporal μ e índice interno i [métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$]. Los grupos más comunes son:

- $SU(2) \times U(1)$ para interacciones electrodébiles.
- $SU(3)$ para interacciones fuertes.

Los campos de Yang-Mills $F^{\mu\nu}_i$ están relacionados a los potenciales (o conexiones) A^μ_i por:

$$F^{\mu\nu}_i = \partial^\mu A^\nu_i - \partial^\nu A^\mu_i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A^\mu_j A^\nu_k. \quad (7.1)$$

Los campos de Yang-Mills satisfacen la ecuación de movimiento [véase la Ec. (6.20)]:

$$D_\alpha F^{\alpha\beta}_i = 0, \quad (7.2)$$

la cual es también la ecuación de Euler-Lagrange para la acción

$$S = \int \mathcal{L} dx^4, \quad (7.3)$$

donde [cf. Ec. (6.18)]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_i F_{\mu\nu}^i \quad (7.4)$$

o, en forma explícita,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu^i)(\partial^\mu A_\nu^i) - (\partial_\mu A_\nu^i)(\partial_\nu A^{\mu i}) + (\partial_\mu A_\nu^i)\epsilon^{ilm} A^\mu_l A^\nu_m] \\ & - \frac{1}{16} [A_{\mu j} A_{\nu m} A^{\mu j} A^{\nu m} - A_{\mu m} A_{\nu l} A^{\mu l} A^{\nu m}] \end{aligned} \quad (7.5)$$

¹Es Peskin quien les da este nombre [34].

Para ver que se cumple lo anterior, se desarrolla la ecuación (7.2), y se obtiene

$$D_\alpha F^{\alpha\beta}_i = \partial_\alpha F^{\alpha\beta}_i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A_{\alpha j} F^{\alpha\beta}_k \quad (7.6)$$

donde D_α es la derivada covariante, definida sobre un vector interno como

$$D_\alpha v^i \equiv \partial_\alpha v^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A_{\alpha j} v_k. \quad (7.7)$$

Sustituyendo (7.1) en (7.6) resulta

$$\begin{aligned} D_\alpha F^{\alpha\beta}_i &= \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta_i - \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha_i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A^\beta_k \partial_\alpha A^\alpha_j \\ &+ \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A^\alpha_j \partial_\alpha A^\beta_k + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A_{\alpha j} \partial^\alpha A^\beta_k - \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} A_{\alpha j} \partial^\beta A^\alpha_k \\ &+ \frac{1}{4}A_{\alpha j} A^\alpha_i A^\beta_j - \frac{1}{4}A_{\alpha j} A^\alpha_j A^\beta_i = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Por otro lado, las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de las conexiones son

$$\partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A^\alpha_n)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha_n} = 0. \quad (7.9)$$

Calculando el término entre paréntesis cuadrados de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A^\alpha_n)} = \frac{1}{2} [2\partial_\beta A^\alpha_n - 2\partial_\alpha A^\beta_n + \epsilon^{nlm} A^\beta_l A^\alpha_m], \quad (7.10)$$

con lo cual

$$\partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A^\alpha_n)} \right] = \partial_\beta \partial_\beta A^\alpha_n - \partial_\beta \partial_\alpha A^\beta_n + \frac{1}{2}\epsilon^{nlm} A^\beta_l \partial_\beta A^\alpha_m + \frac{1}{2}\epsilon^{nlm} A^\alpha_m \partial_\beta A^\beta_l. \quad (7.11)$$

El segundo término de la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha_n} = \frac{1}{2}\epsilon^{inm} A^\mu_m [\partial_\alpha A_\mu^i - \partial_\mu A_\alpha^i] + \frac{1}{4}A_{\nu k} A^\alpha_n A^{\nu k} - \frac{1}{4}A_{\nu j} A_\alpha^j A^{\nu n}. \quad (7.12)$$

Sustituyendo (7.11) y (7.12) en (7.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A^\alpha_n)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha_n} &= \partial_\beta \partial_\beta A^\alpha_n - \partial_\beta \partial_\alpha A^\beta_n + \frac{1}{2}\epsilon^{nlm} A^\alpha_m \partial_\beta A^\beta_l \\ &+ \frac{1}{2}\epsilon^{nlm} A^\beta_l \partial_\beta A^\alpha_m - \frac{1}{2}\epsilon^{imn} A^\mu_m [\partial_\alpha A_\mu^i - \partial_\mu A_\alpha^i] \\ &+ \frac{1}{4}A_{\nu j} A_\alpha^j A^{\nu n} - \frac{1}{4}A_{\nu k} A^\alpha_n A^{\nu k} = 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Comparando (7.13) con (7.8) se observa que, efectivamente, las ecuaciones de campo de Yang-Mills, $D_\alpha F^{\alpha\beta}_i = 0$, siguen directamente de la variación de la lagrangiana dada por la ecuación (7.4) [37].

Las ecuaciones (7.2), con el tensor de campo dado por (7.1), son las ecuaciones de Yang-Mills, las cuales son más generales que las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético.

7.3. Formulación hamiltoniana canónica: variables de conexión

Ahora se continuará a la derivación de la teoría canónica. El desarrollo será exitoso si se pueden identificar las variables canónicas, *i.e.*, coordenadas y momentos, definir una hamiltoniana, y obtener las ecuaciones de campo (7.2) como ecuaciones de Hamilton. Ya que se está tratando con una teoría invariante de norma se suponen que se obtendrán complicaciones como en la electrodinámica.

Separando los índices espaciotemporales de la lagrangiana del campo de Yang-Mills en espaciales y temporales, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[(\partial_0 A_b^i)(\partial^0 A_b^i) + (\partial_a A_0^i)(\partial^a A_0^i) + (\partial_a A_b^i)(\partial^a A_b^i) - (\partial_0 A_b^i)(\partial_b A^{0i}) \\ & - (\partial_a A_0^i)(\partial_0 A^{ai}) - (\partial_a A_b^i)(\partial_b A^{ai}) + (\partial_0 A_0^i)\epsilon^{ilm} A_l^0 A_m^0 + (\partial_0 A_b^i)\epsilon^{ilm} A_l^0 A_m^b \\ & + (\partial_a A_0^i)\epsilon^{ilm} A_l^a A_m^0 + (\partial_a A_b^i)\epsilon^{ilm} A_l^a A_m^b] - \frac{1}{16}[A_{\mu j} A_{\nu m} A^{\mu j} A^{\nu m} - A_{\mu m} A_{\nu l} A^{\mu l} A^{\nu m}], \end{aligned} \quad (7.14)$$

esto será de utilidad para calcular los momentos canónicos más adelante. Note que no se han separado los índices en el último término de la ecuación anterior, ya que dicho término no contribuirá a los momentos.

En forma análoga con la electrodinámica *definiendo* los campos eléctrico y magnético de teorías de Yang-Mills como

$$\begin{aligned} E^a{}_i & \equiv F^{0a}{}_i = \partial^0 A^a{}_i - \partial^a A^0{}_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} A^0{}_j A^a{}_k, \\ B^a{}_i & \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{abc} F_{bc}{}_i = -\frac{1}{2}\epsilon^{abc} \left(\partial_b A_{ci} - \partial_c A_{bi} - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} A_b^j A_c^k \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

El momento canónico conjugado de $A^b{}_i$ es por definición

$$\pi^b{}_i = \frac{\delta S}{\delta \dot{A}^b{}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^b{}_i)} = \frac{1}{2}[2(\partial_0 A^{bi}) - 2(\partial^b A^{0i}) + \epsilon^{ilm} A_l^0 A_m^b] = E^b{}_i, \quad (7.16)$$

el cual coincide con la definición de $E^a{}_i$. Sin embargo, $\dot{A}^0{}_i$ no aparece en \mathcal{L} , así el momento conjugado de $A^0{}_i$, $\pi^0{}_i$, se anula idénticamente

$$\pi^0{}_i = \frac{\delta S}{\delta \dot{A}^0{}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^0{}_i)} = 0, \quad (7.17)$$

entonces, no se tiene una relación invertible entre $\pi^0{}_i$ y $\dot{A}^0{}_i$, por lo que el formalismo hamiltoniano usual no es aplicable. Esta dificultad está relacionada al hecho de que hay arbitrariedad de norma en $A^\mu{}_i$, por lo que no se puede obtener dinámica determinista para $A^\mu{}_i$ [31].

Esta dificultad puede resolverse (al igual que en el caso de Maxwell) bajo las siguientes consideraciones. El hecho de que $\pi^0{}_i$ se anule idénticamente sugiere que $A^0{}_i$ no debe ser una variable dinámica, *i.e.*, se debe tomar como variable de configuración q simplemente a $A^a{}_i$.

Note primero que la densidad lagrangiana (7.4) puede escribirse en términos de los campos eléctrico y magnético usando las definiciones (7.15) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (E^a{}_i E_a^i - B^a{}_i B_a^i). \quad (7.18)$$

Ahora, definiendo a la densidad hamiltoniana \mathcal{H} como:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= E^b{}_i \partial_0 A_b{}^i - \mathcal{L} \\ &= E^b{}_i \left(E_b{}^i + \partial^b A^{0i} - \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} A^0{}_l A^b{}_m \right) - \frac{1}{2} (E^a{}_i E_a{}^i - B^a{}_i B_a{}^i) \\ &= \frac{1}{2} (E^a{}_i E_a{}^i + B^a{}_i B_a{}^i) - A^{0i} D_a E^a{}_i.\end{aligned}\quad (7.19)$$

En la segunda línea de la ecuación anterior se ha usado la definición de E y en la tercera línea se ha integrado por partes y se supone que los campos tienden a cero en infinito (por lo cual se descartará una divergencia total que surge en este proceso al tomar $H = \int \mathcal{H} dv$).

El paréntesis de Poisson fundamental en términos de las variables canónicas $E^a{}_i(\mathbf{r}, t)$ y $A_a{}^i(\mathbf{r}', t)$ está dado por

$$\{E^a{}_i(\mathbf{r}, t), A_b{}^j(\mathbf{r}', t)\} = \delta_b^a \delta_i^j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (7.20)$$

Para dos funcionales cualesquiera del espacio fase $F(A, E)$ y $G(A, E)$ se tiene que

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta E^a{}_i} \frac{\delta G}{\delta A_a{}^i} - \frac{\delta F}{\delta A_a{}^i} \frac{\delta G}{\delta E^a{}_i} \right) d^3x \quad (7.21)$$

Ahora, H se ve como una funcional de $E^a{}_i$ y de $A^b{}_i$ donde $A^0{}_i$ juega el rol de multiplicador de Lagrange, *i.e.*, se anexa la ecuación

$$\frac{\delta H}{\delta A^0{}_i} = 0 \quad (7.22)$$

a las ecuaciones de Hamilton para $\dot{A}^b{}_i$ y $\dot{E}^a{}_i$. La ecuación (7.22) lleva a la ley de Gauss para teorías de Yang-Mills

$$D_a E^a{}_i = 0. \quad (7.23)$$

Mientras que las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{E}^a{}_i = \{E^a{}_i, H\} = \int \left(\frac{\delta E^a{}_i}{\delta E^b{}_j} \frac{\delta H}{\delta A_b{}^j} - \frac{\delta E^a{}_i}{\delta A_b{}^j} \frac{\delta H}{\delta E^b{}_j} \right) d^3x = \frac{\delta H}{\delta A_a{}^i} = \epsilon^{abc} D_b B_{ci} \quad (7.24)$$

y

$$\dot{A}^a{}_i = \{A^a{}_i, H\} = \int \left(\frac{\delta A^a{}_i}{\delta E^b{}_j} \frac{\delta H}{\delta A_b{}^j} - \frac{\delta A^a{}_i}{\delta A_b{}^j} \frac{\delta H}{\delta E^b{}_j} \right) d^3x = -\frac{\delta H}{\delta E^a{}_i} = -E^a{}_i. \quad (7.25)$$

Las ecuaciones (7.23)-(7.25) son equivalentes a la ecuaciones de Yang-Mills, $D_\alpha F^{\alpha\beta}{}_i = 0$ (para el caso sin fuentes, desde luego, *i.e.*, $J_\alpha{}^i = 0$).

Es claro que también podemos calcular $\dot{B}^a{}_i$ con el paréntesis de Poisson canónico:

$$\dot{B}^a{}_i = \{B^a{}_i, H\} = \int \left(\frac{\delta B^a{}_i}{\delta E^b{}_j} \frac{\delta H}{\delta A_b{}^j} - \frac{\delta B^a{}_i}{\delta A_b{}^j} \frac{\delta H}{\delta E^b{}_j} \right) d^3x = -\epsilon^{abc} D_b E_{ci}, \quad (7.26)$$

donde $B^a{}_i$ está dado en términos de $A_b{}^j$ por (7.15). Esta fórmula será clave para escribir las ecuaciones de Yang-Mills en términos de la curvatura en el capítulo siguiente. Las ecuaciones

$$D_\lambda F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (7.27)$$

equivalen a

$$D_a \tilde{F}^{ab}{}_i = 0. \quad (7.28)$$

Y siguen directamente de la definición de $F_{\mu\nu}{}^i$. Así como también se puede definir en términos del potencial A_{ci}

$$B^a{}_i = \epsilon^{abc} D_b A_{ci}, \quad (7.29)$$

derivando covariantemente la ecuación (7.29) de ambos lados se obtiene que son exactamente igual a cero por que da como resultado:

$$D_a B^a{}_i = 0, \quad (7.30)$$

la cual es análoga a la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y (7.29) es análoga a $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

7.4. Cuantización en términos de variables de conexión

Lo que se hace aquí es un esbozo de la cuantización canónica en términos de variables de conexión, sin profundizar en los detalles.

En la teoría cuántica se esperaría que los estados sean vectores en el espacio $L^2(\mathcal{A})$, *i.e.*, las funcionales de cuadrado integrable que dependen de las variables de conexión. Este espacio es puramente formal y se piensa en los estados como funcionales arbitrarias $\Psi[A]$. Entonces, reemplazando las variables de “momento” y “posición” clásicas $A_a{}^i$ y $E^a{}_i$ por los operadores [36]

$$\hat{A}_a{}^i(\mathbf{x})\Psi[A] = A_a{}^i(\mathbf{x})\Psi[A], \quad (7.31)$$

y

$$\hat{E}^a{}_i(\mathbf{x})\Psi[A] = \frac{\delta}{\delta A_a{}^i(\mathbf{x})}\Psi[A], \quad (7.32)$$

las cuales tienen las relaciones de conmutación

$$[\hat{E}^a{}_i(\mathbf{x}), \hat{E}^b{}_j(\mathbf{y})] = 0, \quad [\hat{A}_a{}^i(\mathbf{x}), \hat{A}_b{}^j(\mathbf{y})] = 0, \quad (7.33)$$

$$[\hat{E}^a{}_i(\mathbf{x}), \hat{A}_b{}^j(\mathbf{y})] = \delta_b^a \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.34)$$

análogas a los paréntesis de Poisson clásicos. Con estos operadores en mano se puede formalmente promover la hamiltoniana del sistema clásico (junto con la constricción de Gauss) a un operador y resolver la ecuación de Schrödinger resultante [31].

Capítulo 8

Formulación hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills en términos de variables de curvatura

8.1. Introducción

En este capítulo se describe el resultado principal de esta tesis, estudiar las teorías de Yang-Mills usando el formalismo hamiltoniano extendido descrito en el capítulo 4.

De forma análoga al caso de las ecuaciones de Maxwell, se usará como variables del espacio fase al campo “eléctrico” E^a_i y el campo “magnético” que surge de la conexión A_a^i definido por $B^a_i \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{abc}F_{bci}$ en lugar del par canónico (E, A) . Es decir, en vez de una representación en términos de la conexión se obtendrá una descripción en términos de la curvatura.

A diferencia del campo electromagnético, en este caso la ley de Gauss no se sigue directamente si se emplean las nuevas variables (de curvatura), la razón de esto es que en las teorías de Yang-Mills (como en la relatividad general) E y B no son invariantes de norma (la ley de Gauss genera rotaciones internas sobre estas variables). Esto no significa que la representación alternativa no sea útil. Como se verá, la estructura hamiltoniana que se obtiene al usar las nuevas variables es prácticamente la estructura canónica y lleva a las relaciones esperadas entre las variables de campo y la única restricción (de Gauss) en la teoría. Otro punto importante es que el álgebra de Poisson es cerrada en términos de variables E y B , dejando así la teoría lista para su cuantización.

Se debe señalar que, a pesar de que las nuevas variables no son invariantes de norma éstas se transforman de la misma forma (lo cual no pasa con las variables de conexión). Además la evolución temporal de E y B es más simétrica que la de A y E .

8.2. Evolución temporal de las nuevas variables

Se considerará primero la posibilidad de describir el espacio fase de teorías de Yang-Mills usando B en lugar de A . Para los casos de Maxwell y de Yang-Mills (a diferencia del de Einstein) uno tiene de entrada la evolución temporal del campo magnético. Aunque es relativamente directo hallar dicha expresión, el que \dot{B} sea la derivada covariante de norma de \dot{A} es un hecho técnico que permitirá desarrollar la representación alternativa.

Como ya se ha señalado, el campo magnético de $A_a{}^i$ se define como

$$B^a{}_i \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{abc}F_{bci} = -\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\left(\partial_b A_{ci} - \partial_c A_{bi} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}A_{bj}A_{ck}\right). \quad (8.1)$$

Ahora, la identidad de Bianchi (la cual sigue directamente de la definición de B),

$$D_a B^{ai} = \partial_a B^{ai} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}A_{aj}B^a{}_k = 0, \quad (8.2)$$

puede verse *genéricamente* como una relación lineal entre A y B , la cual se puede resolver para A . Por tanto, en lo que sigue se supone que es posible obtener $A = A(B)$.¹

De la definición del campo magnético B se encuentra que

$$\dot{B}^a{}_i = \{B^a{}_i, H\} = \epsilon^{abc}D_b \dot{A}_{ci}. \quad (8.3)$$

Por otro lado, notese que se puede expresar la evolución de las variables canónicas [véase las ecuaciones (7.24) y (7.25)] sólo en términos de las variables $E^a{}_i$ y $B^a{}_i$. La ecuación (7.24) queda en su forma original y la ecuación (7.25) puede reescribirse como

$$\dot{A}_{ai}(E, B) = -E_{ai}. \quad (8.4)$$

Así, se obtiene que

$$\epsilon^{abc}D_b \dot{A}_{ci} = -\epsilon^{abc}D_b E_{ci}. \quad (8.5)$$

Con esto se puede escribir la evolución de las nuevas variables de campo como

$$\dot{E}^a{}_i = \epsilon^{abc}D_b B_{ci}, \quad (8.6)$$

$$\dot{B}^a{}_i = -\epsilon^{abc}D_b E_{ci}. \quad (8.7)$$

Notese que estas ecuaciones son más simétricas que las ecuaciones (7.24) y (7.25), y en algún sentido análogas a las ecuaciones de Maxwell. Así, en términos de las variables $E^a{}_i$ y $B^a{}_i$, las ecuaciones de evolución para las teorías de Yang-Mills en el vacío tienen una forma más simétrica; sin embargo, esto no es suficiente, se

¹En la práctica se tienen ciertas complicaciones para esto, aunque existen ejemplos para lo cual es posible obtener $A = A(B)$ explícitamente (vea la Ref. [39]).

necesita también una estructura hamiltoniana que defina un paréntesis de Poisson y una hamiltoniana que genere dichas ecuaciones de evolución.

8.3. Estructura hamiltoniana y paréntesis de Poisson

Las ecuaciones de evolución (8.6) y (8.7) pueden escribirse en la forma hamiltoniana [28, 29]

$$\dot{E}^a{}_i = \mathcal{D}^{ab}{}_{ij} \frac{\delta H}{\delta B^b{}_j}, \quad \dot{B}^a{}_i = -\mathcal{D}^{ab}{}_{ij} \frac{\delta H}{\delta E^b{}_j}, \quad (8.8)$$

donde

$$\mathcal{D}^{ab}{}_{ij} \equiv \epsilon^{abc} D_c \delta_{ij} \equiv \epsilon^{abc} \left(\partial_c \delta_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} A_c{}^k \delta_j^l \right). \quad (8.9)$$

La matriz $(D_{\alpha\beta})$ [véase la ecuación (4.23)] está definida por

$$(D_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^{ab}{}_{ij} \\ -\mathcal{D}^{ab}{}_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

y la hamiltoniana está dada por

$$H = \frac{1}{2} \int (E^a{}_i E_a{}^i + B^a{}_i B_a{}^i) dv + \int N^i \mathcal{G}_i dv \quad (8.11)$$

en la cual, en términos de las nuevas variables, la restricción es

$$\mathcal{G}_i(E, B) \equiv D_a E^a{}_i. \quad (8.12)$$

Esta hamiltoniana es prácticamente la usada en el formalismo de conexiones, pero ahora se considera $A = A(B)$ en la ley de Gauss.

Con estas $\mathcal{D}^{ab}{}_{ij}$ en mano se puede definir el paréntesis de Poisson entre cualquier par de funcionales de campo $F(E, B)$ y $G(E, B)$ como

$$\{F, G\}_n \equiv \int \left(\frac{\delta F}{\delta E^a{}_i} \mathcal{D}^{ab}{}_{ij} \frac{\delta G}{\delta B^b{}_j} - \frac{\delta F}{\delta B^a{}_i} \mathcal{D}^{ab}{}_{ij} \frac{\delta G}{\delta E^b{}_j} \right) d^3x, \quad (8.13)$$

el subíndice n (variables *no* canónicas) se ha introducido para distinguirlo del canónico, por el momento.

La antisimetría de este paréntesis puede probarse directamente, haciendo una integración por partes y se obtiene un término de superficie el cual se desprecia, pues se sigue considerado un espacio compacto. Ya que en este caso las $\mathcal{D}^{ab}{}_{ij}$ dependen de B a través de A , para probar la identidad de Jacobi podrían usarse los métodos de multivectores funcionales. Un bosquejo de esta prueba puede verse en la Ref. [29] (vea también la Ref. [11]).

Alternativamente, puede observarse que el paréntesis (8.13) es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi notando que éste es prácticamente el paréntesis canónico de la representación de conexiones (7.21). Primero se observa que, usando la regla de la cadena, se obtienen

$$\frac{\delta}{\delta A_a{}^i} = \epsilon^{abc} D_b \frac{\delta}{\delta B^c{}_i}, \quad (8.14)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \{F, G\} &= \int \left\{ \frac{\delta F}{\delta E^a_i(x)} \frac{\delta G}{\delta A^i_a(x)} - \frac{\delta G}{\delta E^a_i(x)} \frac{\delta F}{\delta A^i_a(x)} \right\} d^3x \\
 &= \int \left(\frac{\delta F}{\delta E^a_i} \mathcal{D}^{ab}_{ij} \frac{\delta G}{\delta B^b_j} - \frac{\delta F}{\delta B^a_i} \mathcal{D}^{ab}_{ij} \frac{\delta G}{\delta E^b_j} \right) d^3x \\
 &= \{F, G\}_n.
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

Las nuevas variables satisfacen las relaciones de paréntesis de Poisson

$$\{E^a_i(\mathbf{x}), E^b_j(\mathbf{y})\}_n = 0, \quad \{B^a_i(\mathbf{x}), B^b_j(\mathbf{y})\}_n = 0 \tag{8.16}$$

y

$$\begin{aligned}
 \{E^a_i(\mathbf{x}), B^b_j(\mathbf{y})\}_n &= \epsilon^{abc} D_c \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \epsilon^{abc} \left(\partial_c \delta_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} A_c^k \delta_j^l \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Si $F(E, B)$ es cualquier funcional de campo que no depende explícitamente del tiempo entonces las Ecs. (8.8) y (8.13) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \{F, H\}_n &= \int \left(\frac{\delta F}{\delta E^a_i} \mathcal{D}^{ab}_{ij} \frac{\delta H}{\delta B^b_j} - \frac{\delta F}{\delta B^a_i} \mathcal{D}^{ab}_{ij} \frac{\delta H}{\delta E^b_j} \right) d^3x \\
 &= \int \left(\frac{\delta F}{\delta E^a_i} \dot{E}^a_i + \frac{\delta F}{\delta B^a_i} \dot{B}^a_i \right) d^3x = \dot{F},
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

i.e., H genera translaciones temporales.

Note que, a partir del paréntesis fundamental (8.17) uno tiene

$$D_a \{E^a_i(\mathbf{r}), B^b_j(\mathbf{r}')\}_n = \epsilon^{abc} D_a D_c \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \neq 0, \tag{8.19}$$

ya que las derivadas covariantes no conmutan. De aquí, la ley de Gauss no se satisface automáticamente, como en el caso de Maxwell (cuando se usa la energía del campo como hamiltoniana y a E y B como variables). Por esto es necesario incluir dicha restricción en la hamiltoniana.

8.4. Álgebra de las restricciones

Observando ahora qué sucede con el álgebra de las restricciones en términos de las nuevas variables. La interpretación geométrica de las restricciones es más sencilla si se integran sobre todo el espacio, *i.e.*, definiendo

$$C_{N^i} \equiv \int N^i \mathcal{G}_i(E, B) d^3x. \tag{8.20}$$

Viendo qué efecto tiene esta constricción sobre las variables. Usando el paréntesis de Poisson (8.13) y la ecuación (8.14) se obtiene

$$\{E^a_i, C_{N^i}\}_n = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} E^a_j N^k, \quad \{B^a_i, C_{N^i}\}_n = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B^a_j N^k \tag{8.21}$$

i.e., la constricción de Gauss genera rotaciones internas sobre las variables, como debe ser.

Ahora es directo calcular el álgebra de Poisson de las restricciones. Se obtiene

$$\{C_{N^i}, C_{M^i}\}_n = -\frac{1}{2}C_{\epsilon_{ijk}N^jM^k} \quad (8.22)$$

$$(8.23)$$

De aquí, se ve claramente que el álgebra es de primera clase, es decir, es cerrada. De hecho es idéntica a la canónica, lo diferente es que las transformaciones que genera la restricción a las variables E y B son más simétricas.

8.5. Cuantización en términos de variables de curvatura

De manera similar al caso de las variables de conexión, para cuantizar la teoría se puede pensar en los estados físicos como funcionales arbitrarias $\Psi[B]$ y promoviendo las variables clásicas E^a_i y B^a_i por los operadores

$$\hat{E}^a_i(\mathbf{x})\Psi[B] = \epsilon^{abc}D_b \frac{\delta}{\delta B^c_i(\mathbf{x})}\Psi[B], \quad (8.24)$$

y

$$\hat{B}^a_i(\mathbf{x})\Psi[B] = B^a_i(\mathbf{x})\Psi[B], \quad (8.25)$$

los cuales tiene las relaciones de conmutación

$$[\hat{E}^a_i(\mathbf{x}), \hat{E}^b_j(\mathbf{y})] = 0, \quad [\hat{B}^a_i(\mathbf{x}), \hat{B}^b_j(\mathbf{y})] = 0, \quad (8.26)$$

$$[\hat{E}^a_i(\mathbf{x}), \hat{B}^b_j(\mathbf{y})] = \epsilon^{abc}D_c \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (8.27)$$

análogas a los paréntesis de Poisson clásicos (8.16) y (8.17).

Lo que sigue es resolver la ecuación de Schrödinger resultante para estas $\Psi[B]$.

Conclusiones

Para terminar, en este trabajo se ha logrado probar que es posible escribir en forma hamiltoniana las ecuaciones de movimiento de los campos de Yang-Mills en términos de variables alternativas.

Las nuevas variables son los campos eléctrico E^a_i y magnético B^a_i . Se afirma que las nuevas variables son de curvatura porque $B^a_i = -\frac{1}{2}\epsilon^{abc}F_{bci}$, y en el contexto de la geometría diferencial este tensor (de Faraday) es la curvatura de una variedad. Se ha mostrado también que la estructura hamiltoniana necesaria (las $D_{\alpha\beta}$'s) involucra operadores diferenciales con derivadas covariantes, siempre que se use la energía del campo como hamiltoniana. También se ha probado que la hamiltoniana usada es el generador de traslaciones en el tiempo si se usa la estructura obtenida. Al final del último capítulo se ha descrito la forma de promover las variables fundamentales a operadores y los paréntesis de Poisson a conmutadores, sin embargo, es necesario un análisis más detallado para ver si se puede obtener más información de la teoría cuántica de Yang-Mills.

Comentarios finales

Desde luego que el caso del campo electromagnético ha servido como una guía para el caso de teorías de Yang-Mills no abelianas. Por otro lado el caso del campo gravitacional, el cual involucra más constricciones que el caso de teorías de Yang-Mills, ya se ha estudiado con cierto detalle en las Refs. [28, 29].

El uso de variables y hamiltonianas alternativas para el estudio de campos clásico y cuánticos ha sido tratado por pocos investigadores [12, 13, 55]. Es poco usual lo que se conoce sobre el tema, debido a que los investigadores tratan de seguir, en la mayoría de los casos, con el enfoque tradicional (canónico). Sin embargo, el uso de otras variables no canónicas llamadas *lazos* ha llevado a resolver problemas que no hubieran sido resueltos con las variables tradicionales tanto en teorías de Yang-Mills como en la relatividad general (como el rompimiento de simetría de norma y el hecho de que se trabaja directamente en el espacio de estados físicos [31]).

Es posible que el uso de variables de curvatura complique el tratamiento, en el sentido de que la estructura hamiltoniana involucra operadores diferenciales, pero también es posible que lleve al descubrimiento de nuevas simetrías (lo cual implica nuevas cantidades físicas conservadas véase, e.g., [15]) o logre resolver algún problema que no se resuelva con variables de conexión (como el problema de cuantización). Cabe señalar que el uso de estructuras hamiltonianas alternativas puede conducir a teorías cuánticas distintas para un mismo

sistema, como es el caso del oscilador armónico que se trata en la Ref. [56], pero las cuales llevan a mismo límite clásico.

En palabras de Lee Smolin [23], la física actual está en problemas, y los problemas que se deben enfrentar son difíciles, no sólo porque involucran matemáticas bastante sofisticadas sino porque implican riesgos. Así que se deben enfrentar grandes riesgos en la física actual si no se quiere seguir con lo tradicional (lo cual a hecho que no se tengan progresos reales). Así que el uso de variables de curvatura puede ser arriesgado, pero podría también llevar simplemente a una teoría cuántica que explique en mejores términos la realidad del mundo físico.

Apéndice A

Ecuaciones de onda relativistas

A.1. Notación relativista

Cualquier teoría fundamental de la naturaleza debe, por supuesto, ser consistente con la relatividad, así como también con la teoría cuántica. Se debe empezar estableciendo una notación para las teorías relativistas.

Considérese dos eventos en el espaciotiempo (x, y, z, t) y $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$. Se puede generalizar la noción de la distancia entre dos puntos en el espacio, al “intervalo” entre dos puntos en el espaciotiempo; el cual se denotará como ds . Para que ds sea el mismo para todos los observadores inerciales, debe de ser invariante bajo transformaciones de Lorentz y rotaciones, y por tanto está dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{A.1})$$

Desde luego, se podría haber definido $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$, se elige (A.1) por conveniencia posterior. Con esta definición, los eventos que están separados por un intervalo *temporaloide* tienen $ds^2 > 0$; aquellos separados por un intervalo *espacialoide* tienen $ds^2 < 0$; y aquellos separados por un intervalo nulo o *luxoide* tienen $ds^2 = 0$.

En el espacio tridimensional (x, y, z) se consideran como las componentes de un trivector, y $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ es invariante bajo rotaciones. Esta forma cuadrática es la suma de cuadrados, y por tanto positiva definida. Para generalizar al espaciotiempo cuatridimensional, se tiene el problema de que el intervalo invariante ya no es positivo definido. Por lo tanto se define

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \\ x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

y se hace la regla que el invariante se obtiene sumando sobre *un índice superior y un índice inferior*:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (\text{A.3})$$

Un cuadrivector como x^μ , con un superíndice, se llama **vector contravariante** y un vector como x_μ con un subíndice, se llama **vector covariante**. El producto interno de un vector contravariante y un vector covariante es un invariante (escalar). Para simplificar la notación, adoptamos la *convención de suma*: un índice que aparece una vez en la posición arriba y una vez abajo automáticamente se suma de 0 a 3:

$$\sum_{\mu=0}^3 V^\mu V_\mu \rightarrow V^\mu V_\mu. \quad (\text{A.4})$$

La relación entre x^μ y x_μ (o entre cualquier vector contravariante y su contraparte covariante) puede darse introduciendo un **tensor métrico** $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu \\ &= g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde la convención de suma ha sido usada. Por inspección de (A.2), tenemos $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, etc., así de (A.5) es claro que $g_{\mu\nu}$ puede establecerse como una matriz diagonal

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

donde las filas y las columnas corresponde a las componentes 0, 1, 2 y 3. Ya que $g_{\mu\nu}$ tiene un determinante diferente de cero, su inversa existe, y se escribe como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

de hecho, tiene el mismo valor que $g_{\mu\nu}$ en el espacio de Minkowski (en coordenadas cartesianas), pero esta igualdad no se cumple en general.

Es claro que $g_{\mu\nu}$ contiene toda la información acerca de la geometría del espacio, en este caso, el espaciotiempo de Minkowski. En relatividad especial, sin embargo, el tensor métrico juega un papel pasivo, y de hecho nunca necesita introducirse. Pero en relatividad general, juega un papel activo ya que la geometría del espacio no está fija en principio, sino que depende de la materia que hay en él. Las ecuaciones de campo de Einstein, por ejemplo, son ecuaciones diferenciales para $g_{\mu\nu}$.

Es común en física de partículas trabajar con unidades donde $c = 1$, así (A.3) se convierte en

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{A.8})$$

Se definen los operadores diferenciales como

$$\begin{aligned}\partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \\ \partial^\mu &= g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),\end{aligned}\tag{A.9}$$

dando el operador diferencial de segundo orden invariante de Lorentz

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2,\tag{A.10}$$

llamado el *operador d'Alembertiano*.

El cuadrivector de energía momento de una partícula es

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right)\tag{A.11}$$

dando el invariante

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2\tag{A.12}$$

o, cuando $c = 1$,

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2.\tag{A.13}$$

También se usará la notación $p \cdot x$ para $p_\mu x^\mu$

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}.\tag{A.14}$$

A.2. Ecuación de Klein-Gordon

Ahora se está listo para escribir una ecuación de onda para una partícula sin espín, una partícula escalar. Dado que sólo tiene una componente, la cual se denotará como ϕ . La ecuación de onda se obtiene de la ecuación (A.12) sustituyendo los operadores diferenciales para E y \mathbf{p} , de la manera estándar en la teoría cuántica

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla.\tag{A.15}$$

La ecuación (A.12) es entonces

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0,$$

la cual se convierte, en unidades $\hbar = c = 1$ y usando (A.10),

$$(\square + m^2)\phi = 0.\tag{A.16}$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Klein-Gordon. Note que sustituyendo (A.15) en la aproximación no relativista de (A.12), $E = p^2/2m$ (aquí E es la energía cinética únicamente) conduce a la ecuación de Schrödinger de una partícula libre

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi = -i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}.\tag{A.17}$$

La ecuación de Schrödinger es una aproximación no relativista para la ecuación de Klein-Gordon. La densidad de probabilidad para la ecuación de Schrödinger es

$$\rho = \phi^* \phi \quad (\text{A.18})$$

y la corriente de probabilidad es

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*). \quad (\text{A.19})$$

Éstas obedecen una ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= \frac{\partial}{\partial t}(\phi^* \phi) - \frac{i\hbar}{2m}(\phi^* \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi^*) \\ &= \phi^* \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \phi \right) + \phi \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \phi^* \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0, \end{aligned}$$

donde la ecuación de Schrödinger y su compleja conjugada han sido usadas. ¿Cuál es la expresión correspondiente para la ecuación de Klein-Gordon? Para ser propiamente relativista, ρ no debe transformarse como un escalar [véase (A.18)], sino como la componente temporal de un cuadrivector, cuya componente espacial es \mathbf{j} , dada por (A.19). Entonces ρ está dado por

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad (\text{A.20})$$

y con

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \frac{i\hbar}{m} \phi^* (\overleftrightarrow{\partial}_0, \overleftrightarrow{\nabla}) \phi = \frac{i\hbar}{m} \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (\text{A.21})$$

donde

$$A \overleftrightarrow{\partial}^\mu B \equiv \frac{1}{2} [A \partial^\mu B - (\partial^\mu A) B], \quad (\text{A.22})$$

y se ha usado (A.9), se tiene que la ecuación de continuidad es

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^*) = 0, \quad (\text{A.23})$$

ya que ϕ^* también obedece la ecuación de Klein-Gordon. Entonces ρ y \mathbf{j} son la densidad de probabilidad y la corriente deseadas.

A.3. Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac, a diferencia de la ecuación de Klein-Gordon, es de primer orden, y se cumple solamente para partículas de espín $\frac{1}{2}$; ya que la ecuación de Klein-Gordon no expresa otra cosa que la relación relativista entre energía, momento y masa, debe cumplirse para partículas de cualquier espín. Sin embargo, la ecuación de Dirac (y las ecuaciones de Maxwell y Proca, que se derivan más adelante), tienen un origen completamente diferente, y pueden derivarse a partir de las propiedades de transformación de espinores bajo el grupo de Lorentz.

En este trabajo no se tratan campos fermiónicos, solamente campos de Yang-Mills (que incluyen al de Maxwell, desde luego), los cuales tienen espín entero. Es por eso que no se hará una revisión de cómo se deduce la ecuación de Dirac, pero se escribe simplemente para hacerle mención; resulta que es la siguiente

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (\text{A.24})$$

donde las γ^μ son las matrices (4×4) de Dirac, las cuales satisfacen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.25})$$

donde $\{, \}$ es el anticonmutador. También se satisfacen las propiedades

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad (\nu \neq \mu). \quad (\text{A.26})$$

La forma en que se obtiene la ecuación de Dirac puede verse en las referencias [34] y [38].

A.4. Ecuaciones de Maxwell y de Proca

Regresando a las partículas con espín 1. Los fotones no tienen masa y son descritos por las ecuaciones de Maxwell, y las partículas masivas con espín 1 (por ejemplo, los bosones W^\pm que son intermediarios de las interacciones débiles) son descritas por la ecuación de Proca.

Las ecuaciones de Maxwell son, por supuesto, bien conocidas. Lo único que concierne aquí es mostrar cómo se manifiestan en la forma covariante de Lorentz. Es claro que de hecho son covariantes de Lorentz: fueron las observaciones de Einstein que las ecuaciones de Maxwell fueran covariantes de Lorentz, las que dieron el origen a la teoría de la relatividad.

Las ecuaciones de Maxwell (en unidades racionalizadas de Heaviside-Lorentz, $\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \alpha = 1/137$) son

$$\begin{aligned} (a) \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & (b) \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ (c) \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, & (d) \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

(a) Ésta ecuación dice que no hay cargas magnéticas. (b) Es la ley de Faraday; un cambio en el campo magnético produce un campo eléctrico. (c) Es la ley de Gauss; la carga total dentro de una superficie cerrada se obtiene por integración de la componente normal de \mathbf{E} sobre la superficie. (d) Es la ley de Ampère, $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}$, con el término adicional $\partial \mathbf{E} / \partial t$, estableciendo que el cambio de campos eléctricos produce campos magnéticos. Las ecuaciones (a) y (b) son conocidas como las ecuaciones homogéneas, (c) y (d) son las no homogéneas.

Introduciendo el cuadvivector potencial

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad (\text{A.28})$$

con

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (\text{A.29})$$

las ecuaciones (a) y (b) se *satisfacen automáticamente*, ya que $\nabla \cdot (\nabla \times) \equiv 0$ y $\nabla \times (\nabla) \equiv 0$. Ahora observe que del lado derecho de las ecuaciones (A.29) son las componentes del rotacional en 4-dimensiones, definido por

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (\text{A.30})$$

Éste tiene componentes (recordando que $\partial^i = -\partial_i$)

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right)_i \\ F^{0i} &= -E^i \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

y

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k, \quad (\text{A.32})$$

donde $\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk}$ es el símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Las ecuaciones (A.30) y (A.31) pueden visualizarse en forma matricial, con los renglones y las columnas correspondientes a los números 0, 1, 2, 3:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

$F^{\mu\nu}$ se llama el *tensor de campo electromagnético*. Y bajo transformaciones de Lorentz se obtiene un tensor de segundo rango antisimétrico.

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}.$$

Para resumir hasta ahora: si se escriben los campos eléctrico y magnético en términos del tensor $F^{\mu\nu}$, el establecimiento de que $F^{\mu\nu}$ es un rotacional en 4-dimensiones, significa que las dos primeras ecuaciones de Maxwell (homogéneas) se satisfacen automáticamente.

Ahora se consideran las ecuaciones no homogéneas. Es claro verificar que ambas están contenidas en la ecuación covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (\text{A.34})$$

con

$$j^\nu = (\rho, \mathbf{j}). \quad (\text{A.35})$$

Porque poniendo $\nu = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \end{aligned}$$

la cual es (c), y poniendo $\nu = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= j^1, \\ -\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} B^3 - \frac{\partial}{\partial x_3} B^2 &= j^1, \end{aligned}$$

la cual es la componente “1” de (d).

Es quizás útil aquí insertar una observación acerca de las transformaciones de norma. Aunque (A.28) especifica los campos eléctrico y magnético en términos de \mathbf{A} y de ϕ , no lo hace de *manera única*, porque bajo una **transformación de norma**

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla\chi, \quad \phi \rightarrow \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (\text{A.36})$$

la cual tiene la forma covariante

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu\chi, \quad (\text{A.37})$$

donde χ es una función escalar arbitraria, \mathbf{E} y \mathbf{B} no cambian; equivalentemente $F^{\mu\nu}$ no cambia

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\chi = F^{\mu\nu}. \quad (\text{A.38})$$

Sustituyendo (A.30) en (A.34) se observa que A^μ satisface

$$\square A^\mu - \partial^\nu(\partial_\nu A^\mu) = j^\nu. \quad (\text{A.39})$$

Ahora se puede hacer uso de la libertad (A.37), eligiendo un χ tal que la A^μ transformada satisface la **condición de norma de Lorentz**:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.40})$$

En esta “elección de norma” (A.39) se convierte en

$$\square A^\mu = j^\mu, \quad (\text{A.41})$$

la cual establece las ecuaciones bien conocidas

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = \rho, \quad \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad (\text{A.42})$$

cuyas soluciones dan los potenciales de Liénard-Wiechert. En el vacío, la ecuación (A.41) se convierte en

$$\square A^\mu = 0, \quad (\text{A.43})$$

la cual significa que el campo electromagnético, cuando su naturaleza cuántica es totalmente aprovechada, corresponderá a partículas sin masa (las cuales por tanto viajan a la velocidad de la luz; de aquí la relatividad, la cual fue donde se empezó).

Ahora se tienen las ecuaciones de Maxwell modeladas en una forma manifiestamente covariante. Las ecuaciones homogéneas (a) y (b) son resumidas en la ecuación (A.30). Las ecuaciones no homogéneas (c)

y (d) son resumidas en la ecuación (A.34). Se mostrará que hay una manera ordenada de combinar las ecuaciones (A.29) y (A.30), por lo que no se necesita hacer referencia explícita al potencial vectorial A^μ . De (A.30) sigue que

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (\text{A.44})$$

que puede verificarse sin ningún problema. Ahora se define el *tensor dual* $\tilde{F}^{\mu\nu}$ por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (\text{A.45})$$

donde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita en cuatro dimensiones (con $\epsilon^{0123} = 1$). Es claro ver que sus elementos son

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.46})$$

Debido a la antisimetría de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, sigue que la ecuación

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.47})$$

conduce a (A.44); alternativamente observando (A.46) puede verse que (A.47) da las ecuaciones de Maxwell (a) y (b). En conclusión, las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en la forma compacta

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Las partículas masivas de espín 1 obedecen ecuaciones que generalizan las de Maxwell. Las cuales se conocen como las **ecuaciones de Proca**:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu; \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (\text{A.49})$$

Tomando la divergencia de $F^{\mu\nu}$ se tiene que

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0, \quad (\text{A.50})$$

y ya que $m^2 \neq 0$, se encuentra que $\partial_\nu A^\nu = 0$; la condición de Lorentz, siempre se cumple, y se pierde la libertad de transformaciones de norma que las ecuaciones de Maxwell tienen. De hecho, ya que $F^{\mu\nu}$ es invariante de norma, sigue directamente de (A.49) que **las ecuaciones para partículas masivas de espín 1 no son invariantes de norma**. Sustituyendo (A.50) en (A.49) se obtiene

$$(\square + m^2)A^\mu = 0 \quad (\text{A.51})$$

así como también

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (\text{A.52})$$

La ecuación (A.51) muestra, como se esperaba, que se tienen partículas de masa m . La ecuación (A.52) es una condición impuesta sobre las cuatro componentes de A^μ , así que hay únicamente tres componentes independientes. Este hecho es apropiado para partículas masivas de espín 1.

Apéndice B

Formulación lagrangiana, simetrías y campos de norma

B.1. Formulación lagrangiana de la mecánica de partículas

En mecánica clásica, una partícula se idealiza como un punto de masa m , por así decirlo. Sea $x(t)$ su posición en el tiempo t . Si se mueve en una región donde la energía potencial es $V(x)$, entonces la segunda ley de Newton dice que

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -\frac{dV}{dx} \quad (\text{B.1})$$

donde F es la fuerza que actúa sobre la partícula. El principio de mínima acción es una manera de derivar esto. La lagrangiana L está definida por

$$L = T - V = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \quad (\text{B.2})$$

donde T y V son la energía cinética y potencial; y la acción S está dada por

$$S = \int L dt. \quad (\text{B.3})$$

donde la integral se toma sobre una trayectoria completa; de t_1 a t_2 , como en la Fig. B.1;

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt. \quad (\text{B.4})$$

De aquí en adelante, se escribirá $dx/dt = \dot{x}$, $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$. Cuando la partícula se mueve de $x(t_1)$ a $x(t_2)$, hay un número infinito de posibles trayectorias que puede tomar, alguna de las cuales se muestran en la Fig. B.2. ¿Cuál trayectoria toma la partícula en realidad? La respuesta sigue del principio de mínima acción, el cual establece que aquel movimiento real es por el cual S es un mínimo. Ahora se mostrará que ésto lleva a la ley de Newton.

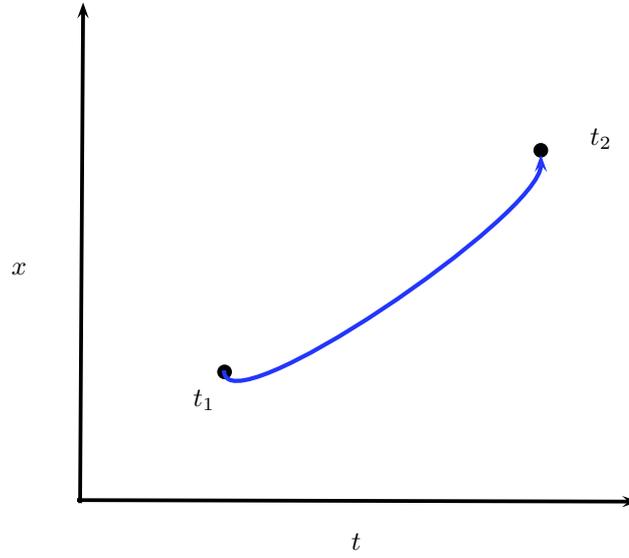


Figura B.1: Una trayectoria en el espaciotiempo.

Considérese una variación en la trayectoria

$$x(t) \rightarrow x'(t) = x(t) + a(t), \quad a \ll x.$$

La partícula está restringida a estar en $x(t_1)$ en el tiempo t_1 y en $x(t_2)$ en el tiempo t_2 , de tal forma que en los puntos extremos el movimiento está fijo, y en consecuencia

$$a(t_1) = a(t_2) = 0. \quad (\text{B.5})$$

En la sustitución $x \rightarrow x'$, la acción S se convierte en

$$\begin{aligned} S \rightarrow S' &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} (\dot{x} + \dot{a})^2 - V(x + a) \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{a} - [V(x) + aV'(x)] \right) dt + O(a^2) \\ &= S + \int_{t_1}^{t_2} [m \dot{x} \dot{a} - aV'(x)] dt \\ &= S + \delta S, \end{aligned}$$

donde

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m \dot{x} \dot{a} - aV'(x)] dt \quad (\text{B.6})$$

y $V'(x) = dV/dx$. Si S es un mínimo bajo la variación en x , $\delta S = 0$. El primer término en δS puede integrarse por partes, dando

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x} \dot{a} dt = \dot{x} a \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} a \ddot{x} dt = - \int_{t_1}^{t_2} a \ddot{x} dt$$

donde el último paso sigue de (B.5). Se tiene entonces

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [-ma\ddot{x} - aV'(x)] dt = 0;$$

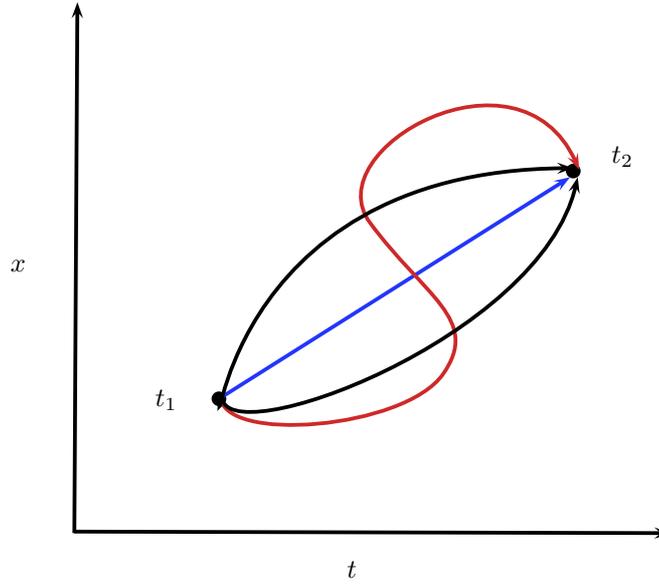


Figura B.2: Algunas (de una infinidad de) trayectorias entre dos puntos.

y esto se cumple sí

$$m\ddot{x} = -V'(x) \quad (\text{B.7})$$

la cual es la ley de Newton (B.1).

B.2. El campo escalar real: principio variacional y teorema de Noether

El paso de una partícula puntual en la posición $x(t)$ al campo $\phi(x^\mu) = \phi(x, y, z, t)$ puede visualizarse como el “reemplazo” de x por ϕ , y de t por x^μ . El campo escalar obedece la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (\text{B.8})$$

pero debería ser claro que en este tratamiento ϕ se interpreta meramente como un *campo escalar*, no como la función de onda de una simple partícula, como en el apéndice A. En este caso, puede preguntarse ¿qué es m ? La respuesta a esto se obtiene cuando se cuantiza el campo escalar clásico, ahí se llega a una interpretación de partícula, y la partícula tiene masa m .

Se muestra cómo (B.8) se deriva a partir de un principio variacional aplicado a una acción

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x, \quad (\text{B.9})$$

donde $\partial_\mu \phi \equiv \partial\phi/\partial x^\mu$. La ecuación (B.9) debe compararse con las ecuaciones (B.3) y (B.4). La función \mathcal{L} es propiamente llamada densidad lagrangiana de la teoría, ya que $L = \int \mathcal{L} d^3x$ es evidentemente la lagrangiana.

Se referirá simplemente a \mathcal{L} como la lagrangiana. Es usual que se asuma que \mathcal{L} dependa únicamente de ϕ y sus primeras derivadas; esto no es necesario, en el sentido de que las deducciones que se harán más adelante, también se cumplen si \mathcal{L} depende de segundas derivadas y derivadas de orden superior de ϕ ; pero se asumirá esto por simplicidad. Nótese que la ecuación de Klein-Gordon puede derivarse de la lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2].\end{aligned}\tag{B.10}$$

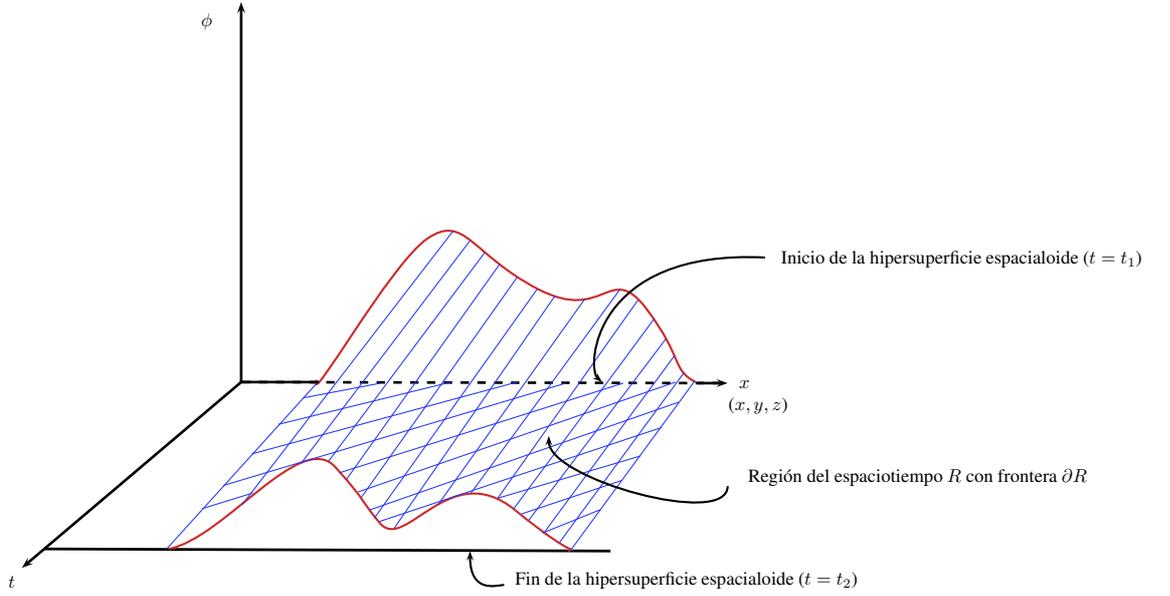


Figura B.3: Un campo ϕ traza una región R en el espaciotiempo.

El campo ϕ traza una región R de 4-dimensiones dentro de un espacio de 5-dimensiones el cual contiene su gráfica en el espaciotiempo, como se muestra en la Fig. B.3. El inicio y el final de la hipersuperficie espacialoide pueden tomarse como la porción del tiempo $t = t_1$, y $t = t_2$, los cuales forman parte de la frontera ∂R de la región R . Ahora se fija tanto el campo variable ϕ y las coordenadas x a una variación, las cuales se anulan sobre la frontera ∂R :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,\tag{B.11}$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x).\tag{B.12}$$

Es conveniente considerar el caso donde \mathcal{L} depende explícitamente de x^μ

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu);\tag{B.13}$$

esto sucede si ϕ interactúa con una fuente externa, y por tanto no describe un sistema cerrado.

Es importante notar que $\delta\phi$ como se define en (B.11), es meramente la *variación funcional* en ϕ ; ϕ' es comparada con ϕ en el *mismo punto* en el espaciotiempo x^μ . Podemos definir tradicionalmente una **variación**

total en ϕ , $\Delta\phi$, como

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x) \quad (\text{B.14})$$

y sigue entonces que, a primer orden en $\delta\phi$

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x) \\ &= \delta\phi + (\partial_\mu\phi)\delta x^\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

La variación en la acción es

$$\delta S = \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi', x'^\mu) d^4x - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu) d^4x, \quad (\text{B.16})$$

donde $d^4x' = J(x'/x)d^4x$, siendo $J(x'/x)$ el Jacobiano de la transformación $x \rightarrow x'$. De (B.11),

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta_\lambda^\mu + \partial_\lambda\delta x^\mu,$$

así que

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu);$$

y por lo tanto

$$\delta S = \int (\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu\delta x^\mu) d^4x, \quad (\text{B.17})$$

donde

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \quad (\text{B.18})$$

De (B.11) se ve que $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\delta\phi$, así (B.17) y (B.18) dan

$$\delta S = \int_R \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu) \right] d^4x \quad (\text{B.19})$$

donde, como se indica, la integral se toma sobre toda la región R del espaciotiempo. El tercer término en ésta ecuación es una divergencia total. El segundo término puede reescribirse y de tal forma que se introduce una divergencia total:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \delta\phi,$$

y las integrales resultantes de divergencias totales sobre R pueden reescribirse como integrales de superficie sobre ∂R , usando una generalización del teorema de Gauss en 4-dimensiones. Esto da

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \right) \delta\phi d^4x + \int_{\partial R} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \delta x^\mu \right] d\sigma_\mu. \quad (\text{B.20})$$

Ahora ya se ha acordado que la variación de ϕ y de x^μ sobre la frontera de R se anulan:

$$\delta\phi = 0, \quad \delta x^\mu = 0 \quad \text{en } \partial R,$$

de tal forma que el segundo término en la ecuación (B.20) se anula, y la condición para una acción estacionaria es que el primer término también se anula sobre todo R , independientemente de R

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] = 0. \quad (\text{B.21})$$

Ésta se conoce como **la ecuación de Euler-Lagrange** para ϕ . Es la ecuación de movimiento para el campo ϕ , análogo a la ecuación de movimiento de Newton para una masa puntual. La ecuación requerida de movimiento es la ecuación de Klein-Gordon, y ahora se puede confirmar que la lagrangiana dada por (B.10), cuando se sustituye en la ecuación de Euler-Lagrange (B.21), da como resultado la ecuación de Klein-Gordon. De hecho, escribiendo (B.10) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\kappa\phi)(\partial_\lambda\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (\text{B.22})$$

(recuerde que κ y λ son índices mudos) se tiene

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = g^{\mu\nu}(\partial_\nu\phi) = \partial^\mu\phi, \quad (\text{B.23})$$

así que la ecuación de Euler-Lagrange da

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = \square\phi + m^2\phi = 0, \quad (\text{B.24})$$

la cual es la ecuación de Klein-Gordon. En caso de que se sospeche de que hay un milagro aquí, en realidad no es así, la lagrangiana se escribe como en (B.10) deliberadamente de tal forma que se obtenga la ecuación de Klein-Gordon.

Ahora se explorará otra consecuencia del uso de un principio variacional. Ésta es que si la acción no cambia por una reparametrización de x^μ y ϕ , *i.e.*, es invariante bajo algún grupo de transformaciones sobre x^μ y ϕ , entonces existen una o más cantidades conservadas, *i.e.*, combinaciones de campos y sus derivadas las cuales son invariantes bajo las transformaciones. Este hecho crucial se conoce como **teorema de Noether** y juega un papel muy importante en la teoría de campos y en la física de partículas. Éste teorema toma en cuenta la conservación de energía, momento, momento angular y cualquier otro número cuántico¹ cuyas partículas portan carga, isoespín, color, etc. (Existe, sin embargo, otro tipo de cantidad conservada la cual es “topológica” en naturaleza y cuya conservación no tiene nada que ver con el teorema de Noether.) Se dará primero una explicación bastante general del teorema de Noether y luego se aplicará a la conservación de la energía, momento y momento angular.

Primero se regresará a la ecuación (B.20) para la variación en la acción. Ahora tomando a R como una región arbitraria y ya no se requiere que $\delta\phi = 0$, $\delta x^\mu = 0$ fuera de R . Reescribiendo el término de superficie como

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_R \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \right) \delta\phi d^4x \\ & + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} [\delta\phi + (\partial_\nu)\delta x^\nu] - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu \right) d\sigma_\mu; \end{aligned}$$

simplemente se ha agregado y restado un término. El primer paréntesis cuadrado en la integral de superficie es la variación total de $\Delta\phi$ definida en (B.15). El segundo paréntesis cuadrado define el **tensor de energía-momento** θ_ν^μ :

$$\theta_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}; \quad (\text{B.25})$$

¹Es un hábito atrevido pero común de referirse al isoespín, extrañesa, etc., como números cuánticos

este nombre se justifica más adelante. Se tiene entonces

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} [\delta \phi + (\partial_\nu) \delta x^\nu] - \theta_\nu^\mu \delta \omega^\nu \right) d\sigma_\mu. \quad (\text{B.26})$$

Ahora se supone que la acción S es invariante bajo un grupo de transformaciones sobre x^μ y ϕ , las cuales, para transformaciones infinitesimales, toman la forma

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta \omega^\nu, \quad \Delta \phi = \Phi_\mu \delta \omega^\mu, \quad (\text{B.27})$$

caracterizados por el parámetro infinitesimal $\delta \omega^\nu$. Aquí X_ν^μ es una matriz y Φ_μ es un conjunto de números. Si ν es un simple índice, entonces este es un grupo de transformaciones de 4 parámetros, pero no se está restringiendo a este caso; ν podría ser un doble índice, como es necesario para generar transformaciones de Lorentz, así que el número de parámetros no es necesariamente cuatro, a pesar de la forma (B.27), además se puede desear considerar el caso más general en el cual se tiene un multiplete de campos escalares ϕ_i . En ese caso la transformación deberá cambiar ϕ_i por

$$\Delta \phi_i = \Phi_{ij} \delta \omega_j \quad (\text{B.28})$$

donde Φ es una matriz. Tomando la forma de (B.27) con su valor aparente, entonces si se supone que la transformada de ϕ obedece (B.21), el requisito de que $\delta S = 0$ da a partir de (B.26) y (B.27),

$$\int_{\partial R} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Phi_\nu - \theta_\kappa^\mu X_\nu^\kappa \right] \delta \omega^\nu d\sigma_\mu = 0$$

o, ya que $\delta \omega^\nu$ es arbitrario,

$$\int_{\partial R} J_\nu^\mu d\sigma_\mu = 0 \quad (\text{B.29})$$

donde

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Phi_\nu - \theta_\kappa^\mu X_\nu^\kappa \quad (\text{B.30})$$

Sigue del teorema de Gauss que $\int_R \partial_\mu J_\nu^\mu d^4 x = 0$, y de aquí ya que R es arbitrario, sigue que

$$\partial_\mu J_\nu^\mu = 0. \quad (\text{B.31})$$

Se tiene por tanto una **corriente conservada** (sin divergencia) J_ν^μ cuya existencia sigue de la invarianza de la acción bajo las transformaciones (B.27). Esto da lugar a una *carga conservada* (independiente del tiempo) Q_ν , definida por

$$Q_\nu = \int_\sigma J_\nu^\mu d\sigma_\mu$$

donde la integral se toma sobre una hipersuperficie espacialoide σ_μ . Si ésta se elige como $t = \text{const.}$, entonces

$$Q_\nu = \int_\sigma J_\nu^0 d^3 x \quad (\text{B.32})$$

donde la integral se tomada sobre el 3-volumen V . La conservación de la carga Q_ν sigue por integración de (B.31) sobre V :

$$\int_V \partial_0 J_\nu^0 d^3 x + \int_V \partial_i J_\nu^i d^3 x = 0.$$

El segundo término se transforma en una integral de superficie por el teorema de Gauss (3-dimensional), y se anula, como puede verse tomando la superficie lo suficientemente lejana, dejando

$$\frac{d}{dt} \int J_\nu^0 d^3x = \frac{dQ_\nu}{dt} = 0. \quad (\text{B.33})$$

Este es el **teorema de Noether**. Aplicándolo al caso donde la transformación (B.27) es simplemente una translación del origen del espacio-tiempo. Entonces se tiene que

$$\Delta x^\mu = \epsilon^\mu, \quad \Delta \phi = 0 \quad (\text{B.34})$$

o

$$X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu, \quad \Phi_\mu = 0. \quad (\text{B.35})$$

Este requisito es muy fundamental: es la condición (para un sistema cerrado) para que las leyes de la física sean translacionalmente invariantes, y también invariantes bajo un desplazamiento temporal, *i.e.* las mismas para ayer, hoy y mañana. Si no fuera por estas condiciones, es claro que la ciencia misma sería imposible. A partir de las ecuaciones (B.35) y (B.30) se ve que la corriente conservada en este caso es

$$J_\nu^\mu = -\theta_\nu^\mu \quad (\text{B.36})$$

y la ley de conservación correspondiente es

$$\frac{d}{dt} \int \theta_\nu^0 d^3x = 0. \quad (\text{B.37})$$

Ahora se mostrará que $P_\nu = \int \theta_\nu^0 d^3x$ es el 4-momento, o energía-momento, del campo ϕ ; esto justifica llamar a θ_ν^μ se le llama el tensor de energía-momento.

Haciendo referencia a (B.25), se tiene

$$\begin{aligned} \int \theta_0^0 d^3x &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L} \right] d^3x \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right] d^3x \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

donde $\dot{\phi} = \partial \phi / \partial t$. Recordando que en mecánica de partículas puntuales, la relación entre las funciones hamiltoniana y la lagrangiana es [33]

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

donde el momento p_i se define como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Al transcribir estas relaciones para el caso de campos se ve que del lado derecho de (B.38) es la energía del campo. La prueba de que $\int \theta_i^0 d^3x$ es el momento sigue inmediatamente de la observación de que $\partial \phi / \partial x^\mu$ es un cuadrivector bajo transformaciones de Lorentz, así como lo es la energía-momento.

La conservación de la energía y el momento, entonces, se mantiene para cualquier sistema cuyo lagrangiano (y por lo tanto la acción) no depende de x^μ . Esto está de acuerdo con la observación anterior, siguiendo (B.37),

que dicho sistema no puede intercambiar energía o momento con el exterior. Sustituyendo la lagrangiana (B.10) en el tensor de energía-momento $\theta^{\mu\nu}$ (B.25) se obtiene

$$\theta^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{B.39})$$

Éste es claramente simétrico en μ y ν . De aquí, para un campo escalar, el tensor de energía-momento es simétrico. Esto no es siempre cierto, sin embargo, esto es claro de la definición (B.25), que $\theta^{\mu\nu}$ no es, en general, simétrico. Por otro lado, tampoco es único, porque se puede añadir un término $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$ donde $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, así que

$$\partial_\mu \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \equiv 0. \quad (\text{B.40})$$

De aquí, si definimos la cantidad

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \quad (\text{B.41})$$

al cual se llamará el tensor de energía-momento canónico, se tiene

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0; \quad (\text{B.42})$$

y $f^{\lambda\mu\nu}$ puede escogerse de tal forma que a $T^{\mu\nu}$ sea simétrico. El 4-momento total del sistema es el mismo, ya que ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \int \partial_\lambda f^{\lambda 0\nu} d^3x &= \int \partial_i f^{i 0\nu} d^3x \\ &= \int_\sigma f^{i 0\nu} d\sigma_i \\ \int \partial_\lambda f^{\lambda 0\nu} d^3x &= 0 \end{aligned}$$

donde se ha usado el teorema de Gauss. La última igualdad sigue porque la superficie σ está en infinito, donde no hay campos presentes. De aquí, aunque el tensor de energía-momento no es único, la energía y el momento del campo lo son.

Hay dos razones para desear que el tensor canónico de energía-momento sea simétrico. Una es que, de acuerdo a la teoría general de la relatividad, es éste tensor el que determina la curvatura del espacio, de acuerdo a las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.43})$$

El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el tensor métrico son simétricos, así que $T_{\mu\nu}$ también debe serlo.

La segunda razón para desear que $T_{\mu\nu}$ sea simétrico se vuelve aparente cuando se considera el momento angular. Se requiere que la acción sea invariante bajo rotaciones espaciales

$$\delta x^i = \epsilon^{ij} x^j, \quad \epsilon^{ij} = -\epsilon^{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{B.44})$$

$$\Delta \phi = 0. \quad (\text{B.45})$$

Ya que el grupo de rotación es un subgrupo del grupo de Lorentz, se puede generalizar (B.44) a

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu_\nu x^\nu, \quad \epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}. \quad (\text{B.46})$$

Esto puede escribirse como

$$\delta x^\mu = X^\mu_{\rho\sigma} \epsilon^{\rho\sigma}, \quad X^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho) \quad (\text{B.47})$$

para llevarlo a la misma forma que (B.27); el índice ν en dicha ecuación tiene ahora el valor de un doble índice. La corriente conservada de Noether es, de (B.30) (con $\Phi = 0$, y sustituyendo $T^{\mu\nu}$ por $\theta^{\mu\nu}$),

$$J^{\mu\rho\sigma} = -T^\mu_\kappa X^{\kappa\rho\sigma} = -\frac{1}{2}(T^{\mu\rho} x^\sigma - T^{\mu\sigma} x^\rho). \quad (\text{B.48})$$

Es simple verificar que esta corriente se conserva, en virtud del hecho de que $T^{\mu\nu}$ se conserva simétrico y es

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^{\mu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu T^{\mu\rho})x^\sigma + T^{\mu\rho}\delta_\mu^\sigma - (\partial_\mu T^{\mu\sigma})x^\rho - T^{\mu\sigma}\delta_\mu^\rho] \\ &= -\frac{1}{2}[T^{\sigma\rho} - T^{\rho\sigma}] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

La componente $\mu = 0$ de $J^{\mu\rho\sigma}$ es (a parte de un factor numérico) la densidad de momento angular del campo. El momento angular está dado por

$$M^{\mu\nu} = \int (T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu) d^3x \quad (\text{B.50})$$

o

$$M^{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x \quad (\text{B.51})$$

donde

$$\mathcal{M}^{0\mu\nu} = T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu. \quad (\text{B.52})$$

$\mathcal{M}^{\mu\nu}$ es una cantidad conservada:

$$\frac{d}{dt} M^{\mu\nu} = 0,$$

y el tensor $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$ tiene divergencia cero:

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.53})$$

Sustituyendo $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = T^{\rho\mu} x^\nu - T^{\rho\nu} x^\mu$ en esta ecuación, y notando que $\partial_\rho T^{\rho\alpha} = 0$ [ecuación (B.42)] y que $\partial_\rho x^\alpha = \delta_\rho^\alpha$ nos da

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}; \quad (\text{B.54})$$

así que la conservación del momento angular requiere que el tensor energía momento sea simétrico. Esta es nuestra segunda razón para requerir una $T^{\mu\nu}$ simétrica.

Para ser precisos se debe notar que las tres componentes del momento angular del sistema son tres componentes espacioespacio de $M^{\mu\nu}$ en (B.50); M^{12} , M^{23} , M^{31} . Las tres componentes espaciotiempo M^{01} , M^{02} , y M^{03} están relacionadas al centro de masa del sistema y se conservan en virtud de la invarianza de transformaciones de Lorentz puras [véase la ecuación (B.46)].

Esto completa el estudio del origen de las leyes de conservación para la energía, el momento y el momento angular; todas éstas siguen de las simetrías del espaciotiempo vía el teorema de Noether, e involucran por tanto un X_{ν}^{κ} diferente de cero en (B.30).

Ahora regresando la atención a la carga eléctrica, la cual se sabe que se conserva. Si esto también se debe a la simetría de la acción ¿cuál es la simetría? Esto claramente no involucra un X_{ν}^{μ} en (B.30), ya que estas simetrías están tomadas en cuenta completamente. La máxima simetría que se tiene en el espacio de Minkowski es la simetría bajo traslaciones, desplazamientos temporales, rotaciones y transformaciones de Lorentz; y se han considerado ya todas éstas. Cualquier simetría adicional debe por tanto involucrar un Φ_{μ} ; en otras palabras, el campo escalar debe tener *más de una componente*. La posibilidad más simple es que ϕ tenga 2 componentes; y un campo con dos componentes reales es matemáticamente equivalente a un campo complejo. Ahora se considerará esto.

B.3. Campos escalares complejos y el campo electromagnético

Si el campo escalar ahora tiene dos componentes reales ϕ_1 y ϕ_2 , se puede establecer

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}, \quad (\text{B.55})$$

$$\phi^* = (\phi_1 - i\phi_2)/\sqrt{2}, \quad (\text{B.56})$$

y ya que la acción es real, se tiene

$$\mathcal{L} = (\partial_{\mu}\phi)(\partial^{\mu}\phi^*) - m^2\phi^*\phi. \quad (\text{B.57})$$

Si se considera ϕ y ϕ^* como campos independientes, las ecuaciones de Euler-Lagrange (B.21) da las dos ecuaciones de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (\text{B.58})$$

$$(\square + m^2)\phi^* = 0. \quad (\text{B.59})$$

Claramente la lagrangiana es invariante bajo la transformación

$$\phi \rightarrow e^{-i\Lambda}\phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{i\Lambda}\phi^* \quad (\text{B.60})$$

donde Λ es una constante real. Ésta se conoce como una **transformación de norma (gauge) de primer tipo**. Su forma infinitesimal es

$$\delta\phi = -i\Lambda\phi, \quad \delta\phi^* = i\Lambda\phi^* \quad (\text{B.61})$$

y así

$$\delta(\partial_{\mu}\phi) = -i\Lambda(\partial_{\mu}\phi), \quad \delta(\partial_{\mu}\phi^*) = i\Lambda(\partial_{\mu}\phi^*). \quad (\text{B.62})$$

Ya que la transformación (B.60) no involucra el espaciotiempo (es puramente “interna”), en la notación de (B.27) se tiene

$$\Phi = -i\phi, \quad \Phi^* = i\phi^*, \quad X = 0. \quad (\text{B.63})$$

El teorema de Noether da entonces una corriente conservada, la cual es, de la ecuación (B.30),

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(-i\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}(i\phi^*). \quad (\text{B.64})$$

(Aquí, los “índices internos” de ϕ se han sumado efectivamente, dando contribuciones separadas de ϕ y ϕ^* .)

La sustitución de (B.57) en (B.64) da entonces

$$J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*). \quad (\text{B.65})$$

Sigue inmediatamente de (B.58) y (B.59) que esta corriente tiene una 4-divergencia nula, como debe ser, desde luego:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (\text{B.66})$$

y la cantidad conservada correspondiente es, de (B.32),

$$Q = \int J^0 dv = i \int \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) dv \quad (\text{B.67})$$

Se desea indentificar ésta cantidad (real) con la carga eléctrica. Se debe por lo tanto notar lo siguiente:

1. Es una cantidad conservada: $dQ/dt = 0$.
2. No contiene relación con e , la carga del protón.
3. Es una cantidad *clásica*, no cuántica, no contiene h .
4. No es un “entero”, o no está “cuantizada”. En otras palabras, no toma en cuenta el hecho de que todas las cargas eléctricas deben ser el múltiplo de una cantidad básica.
5. Cuando ϕ es real, $\phi = \phi^*$, $Q = 0$, no hay cantidad conservada. Esta es la situación que se ha tratado anteriormente.

Se puede expresar la transformación de norma (B.60) en una forma geométrica. Para hacer esto, primero se sustituye las ecuaciones (B.55) y (B.56) en (B.57), así, de esto se obtiene

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + (\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad (\text{B.68})$$

y luego se escribe

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{i}\phi_1 + \mathbf{j}\phi_2 \quad (\text{B.69})$$

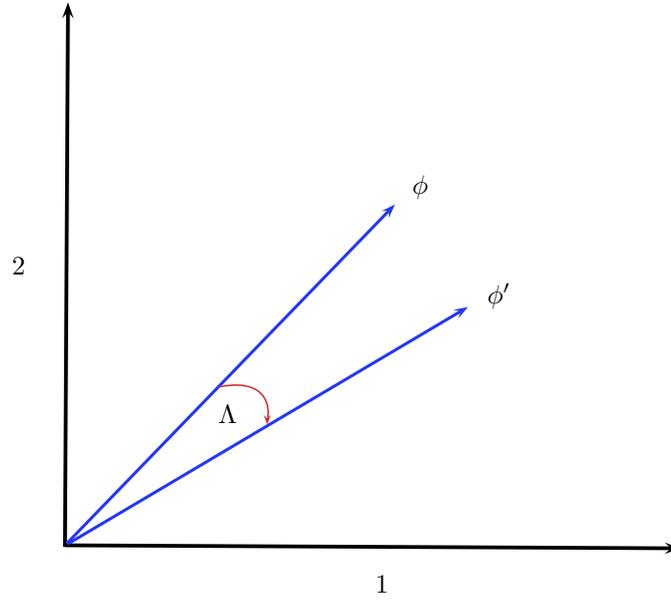
como un vector en un espacio 2-dimensional con vectores base ortonormales \mathbf{i} y \mathbf{j} . En notación de componentes se usa ϕ_i , donde los índices de medio alfabeto i, j, k, \dots corren de 1 a 2. La lagrangiana es ahora

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^i)(\partial_\mu \phi_i) - m^2 \phi^i \phi_i \quad (\text{B.70})$$

La transformación de norma (B.60) puede escribirse de la siguiente manera

$$\phi'_1 + i\phi'_2 = e^{-i\Lambda}(\phi_1 + i\phi_2),$$

$$\phi'_1 - i\phi'_2 = e^{i\Lambda}(\phi_1 - i\phi_2),$$


 Figura B.4: Una rotación del campo ϕ en el espacio interno.

la cual es equivalente a

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= \phi_1 \cos(\Lambda) + \phi_2 \sin(\Lambda), \\ \phi'_2 &= -\phi_1 \sin(\Lambda) + \phi_2 \cos(\Lambda).\end{aligned}\tag{B.71}$$

Esto es claramente una rotación en el plano (1,2) del vector ϕ por un ángulo Λ , como se muestra en la Fig. B.4. Las rotaciones en dos dimensiones forman el grupo $SO(2)$. Por otro lado, ya que la transformación fue representada equivalentemente como $e^{i\Lambda}$, la cual es una “matriz” unitaria en una dimensión

$$e^{i\Lambda}(e^{i\Lambda})^* = 1\tag{B.72}$$

El grupo que concierne es también $U(1)$. Así, dado que se está interesado en las transformaciones de norma que generan el grupo $SO(2) \approx U(1)$. (De manera sencilla se puede ver que estos grupos son los mismos: cada elemento de $SO(2)$ está dado de manera única por un ángulo φ , el ángulo de rotación en el plano. El espacio de grupo es entonces el espacio de los valores de φ . Se debe identificar a φ con $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$, etc., porque éstos corresponden a la misma rotación. El espacio de grupo es entonces un *círculo* (véase la Fig. B.5). El grupo $U(1)$, por otro lado, es el grupo de todos los números de la forma $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, y ya que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, el espacio de éstos es también un círculo.)

Regresando al tema principal, hemos identificado una cantidad conservada Q , como resultado de la invariancia de la acción bajo la transformación (B.60), o (B.71). Ya que Λ es una constante, sin embargo, esta transformación de norma debe de ser la misma para todos los puntos en el espaciotiempo; esto es una transformación de norma “global”. Así que cuando se realiza una rotación de ϕ^i en el espacio interno en un punto, a través de un ángulo Λ , se debe realizar la misma rotación en *todos los puntos al mismo tiempo*. Si

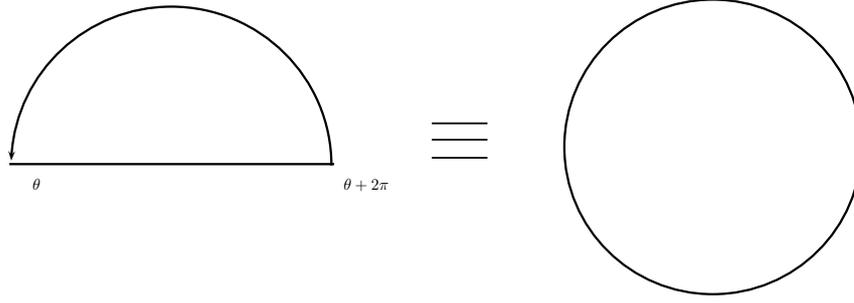


Figura B.5: El espacio de grupo de $SO(2)$ es un círculo.

tomamos esta interpretación física seriamente, se observa que es imposible de cumplir, debido a que contradice el espíritu de la relatividad, según la cual debe haber un retardo mínimo de tiempo igual al tiempo de viaje de la luz. Para solucionar este problema se debe abandonar el hecho de que Λ es una constante, y escribirla como una función arbitraria del espaciotiempo, $\Lambda(x^\mu)$. Ésta se llama una transformación de norma “local”, ya que difiere claramente de un punto a otro. También se llama una **transformación de norma de segundo tipo**.

Vemos ahora que, para $\Lambda \ll 1$,

$$\phi \rightarrow \phi - i\Lambda\phi \quad (\text{B.73})$$

por tanto

$$\delta\phi = -i\Lambda\phi, \quad (\text{B.74})$$

$$\partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi - i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i\Lambda(\partial_\mu\phi),$$

además de que

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i\Lambda(\partial_\mu\phi) - i(\partial_\mu\Lambda)\phi, \quad (\text{B.75})$$

y, similarmente,

$$\delta\phi^* = i\Lambda\phi^*, \quad (\text{B.76})$$

$$\delta(\partial_\mu\phi^*) = i\Lambda(\partial_\mu\phi^*) + i(\partial_\mu\Lambda)\phi^*. \quad (\text{B.77})$$

Comparando estas ecuaciones con (B.61) y (B.62), se nota que hay un término extra en $(\partial_\mu\Lambda)$ que se encuentre en la transformación de las derivadas de los campos. Debido a este término extra, por ejemplo comparando (B.75) y (B.77), se dice que $\partial_\mu\phi$ no se transforma *covariantemente*, *i.e.*, no se transforma de la misma manera que ϕ . Además, ahora se ve que estos términos extra causan que la misma acción *ya no sea*

invariante. De hecho, el cambio en la lagrangiana es

$$\delta\mathcal{L} = \delta[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2(\phi\phi^*)] \quad (\text{B.78})$$

$$\begin{aligned} &= [\delta(\partial_\mu)]\partial^\mu\phi^* + (\partial_\mu\phi)[\delta(\partial^\mu\phi^*) - m^2 \cdot 0] \\ &= [-i\Lambda(\partial_\mu\phi) - i(\partial_\mu\Lambda)\phi]\partial^\mu\phi^* + (\partial_\mu\phi)[i\Lambda(\partial^\mu\phi^*) + i(\partial^\mu\phi^*)] \\ &= (\partial_\mu\Lambda)[-i\phi\partial^\mu\phi^* + i\phi^*\partial^\mu\phi] \end{aligned}$$

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\Lambda)J^\mu \quad (\text{B.79})$$

donde J^μ está dada por la ecuación (B.65). Para restaurar la invariancia bajo la transformación de norma de segundo tipo, se introduce un nuevo cuadrivector A_μ el cual se acopla directamente a la corriente J^μ dando un *término extra* en \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu = -ie(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)A_\mu. \quad (\text{B.80})$$

La constante de acoplamiento e es un número tal que eA_μ tiene las mismas unidades que $\partial/\partial x^\mu$. También se pide que, bajo transformaciones de norma de segundo tipo,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda, \quad (\text{B.81})$$

tal que

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu(\delta A_\mu) = -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu\partial_\mu\Lambda. \quad (\text{B.82})$$

El último término de la ecuación anterior cancela $\delta\mathcal{L}$ en la ecuación (B.79), ¡pero ahora se necesita cancelar el primer término! Se tiene

$$\delta J^\mu = i\delta(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) = 2\phi^*\phi\partial^\mu\Lambda \quad (\text{B.83})$$

tal que

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi^*\phi. \quad (\text{B.84})$$

Por lo tanto se suma otro término a \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi. \quad (\text{B.85})$$

En virtud de (B.81), se tiene

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e^2 A_\mu \delta A^\mu \phi^* \phi = 2e A_\mu (\partial^\mu \Lambda) \phi^* \phi \quad (\text{B.86})$$

y por consiguiente

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0. \quad (\text{B.87})$$

La lagrangiana total $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ es ahora invariante, en virtud de haber introducido un campo A_μ el cual se acopla a la corriente J^μ del campo complejo ϕ . El campo A_μ presumiblemente debe contribuir por sí mismo

a la lagrangiana. Ya que $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ es invariante, se necesita un \mathcal{L}_3 que sea también invariante de norma, y para construirlo se define el rotacional cuadrimensional de A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{B.88})$$

Es claro que, bajo la transformación de norma (B.81), el mismo $F_{\mu\nu}$ es invariante. La lagrangiana escalar \mathcal{L}_3 es entonces

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (\text{B.89})$$

Juntando todas las fórmulas, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{tot}} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \\ &= (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)A_\mu \\ &\quad + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{\text{tot}} &= (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

Se reconocerá que $F_{\mu\nu}$ definido en (B.88) es el tensor de **campo electromagnético** (A.33), cuyas seis componentes son tres componentes del campo eléctrico y tres componentes del campo magnético. Lo que se ha hecho, por tanto, es mostrar cómo surge el campo electromagnético *naturalmente* demandando invariancia de la acción bajo una transformación de norma de segundo tipo, *i.e.*, bajo rotaciones *locales* (dependientes de x) en el espacio interno del campo complejo ϕ . El potencial de norma A_μ se acopla a la corriente J^μ con fuerza de acoplamiento e , la cual es la carga del campo ϕ . Para escribir estas conclusiones con algo más de detalle, es conveniente dividir las observaciones en cuatro puntos:

1. Comparando la lagrangiana (B.90) con (B.57), se nota que $\partial_\mu \phi$ se reemplaza por $(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$. Ésta se conoce como la **derivada covariante** $D_\mu \phi$:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi, \quad (\text{B.91})$$

ya que, a diferencia de $\partial_\mu \phi$, se transforma covariantemente bajo una transformación de norma, *i.e.*, como la misma ϕ . En efecto, de las ecuaciones (B.75), (B.75) y (B.81) sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \phi) &= \delta(\partial_\mu \phi) + ie(\delta A_\mu)\phi + ieA_\mu \delta \phi \\ &= -i\Lambda(\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi) \\ \delta(D_\mu \phi) &= -i\Lambda(D_\mu \phi), \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

la cual es la regla para la transformación covariante. La regla en la que ∂_μ se reemplaza por $\partial_\mu + ieA_\mu$ en un campo electromagnético es equivalente a un resultado ya familiar de la física clásica. Ya que, con $c = 1$,

$$\partial_\mu = (\partial_0, \nabla), \quad A_\mu = (\phi, -\mathbf{A}),$$

entonces la parte *espacial* de la regla de sustitución es

$$\nabla \rightarrow \nabla - ie\mathbf{A}.$$

Entonces, colocando $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, da, con $\hbar = 1$

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \quad (\text{B.93})$$

En presencia del electromagnetismo, si el momento generalizado \mathbf{P} se define como $\partial L/\partial\mathbf{v}$, donde L es la lagrangiana, entonces para una partícula con carga e , éste está dado por

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + e\mathbf{A} = \gamma m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad (\text{B.94})$$

y puede mostrarse que la hamiltoniana para una partícula con carga e interactuando con un campo electromagnético es

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + e\phi.$$

Esto corresponde a la sustitución (B.93)

Ahora es claro que ϕ describe un campo con carga e , y que ϕ^* , cuya derivada covariante es

$$D_\mu\phi^* = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*, \quad (\text{B.95})$$

describe un campo con carga $-e$. Los campos ϕ_1 y ϕ_2 en (B.55) y (B.56) no son por tanto eigenestados de la carga. $D_\mu\phi^*$ es una **derivada covariante de ϕ^*** , no porque hemos conjugado a $D_\mu\phi$, sino *porque se transforma de la misma manera en que ϕ^* lo hace bajo transformaciones de norma*, como puede verificarse, siguiendo los pasos análogos que llevaron a (B.92).

2. Debido a la igualdad de las ecuaciones (B.88) y (A.30), se afirma que el potencial vectorial que compensa y que fue introducido en (B.80) es realmente el potencial vectorial electromagnético, y por tanto que las ecuaciones de Maxwell homogéneas se cumplen para $F_{\mu\nu}$. Además, la transformación de norma (B.81), donde $\Lambda = e\chi$, es idéntica a (A.37). Así, se ha llegado a una nueva interpretación del campo electromagnético: **es el campo de norma que ha de introducirse para garantizar la invariancia bajo transformaciones de norma locales $U(1)$.**

Vale la pena señalar que las ecuaciones no homogéneas de Maxwell se obtienen de (B.90) por variación de A_μ . La ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] = 0$$

da

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) + 2e^2 A^\mu |\phi|^2 \\ &= -ie(\phi^*D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*) \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} &\equiv e\mathcal{J}^\mu \end{aligned} \quad (\text{B.96})$$

donde

$$\mathcal{J}^\mu = i(\phi^*D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*) \quad (\text{B.97})$$

es la versión covariante de J^μ en (B.65). Debido a la antisimetría de $F^{\mu\nu}$, (B.96) implica inmediatamente que

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0; \quad (\text{B.98})$$

es \mathcal{J}^μ la corriente *covariante* que se conserva cuando el campo electromagnético está presente, no la corriente J^μ .

3. Se sabe que el campo electromagnético **no tiene masa**, pero vale la pena enfatizar este punto. Un término de masa en la lagrangiana sería de la forma

$$\mathcal{L}_M = M^2 A_\mu A^\mu \quad (\text{B.99})$$

y es claro que este término no es invariante bajo la transformación de norma (B.81). De aquí **la invariancia de norma requiere que el campo de norma no tenga masa**. En el enfoque usual del campo electromagnético, es la relatividad la que requiere que el campo no tenga masa, y por tanto viaje a la velocidad de la luz.

4. La carga e aparece como una constante de acoplamiento, vía las derivadas covariantes (B.91) y (B.95). En realidad, a partir de la lagrangiana (B.90), vemos que el campo ϕ se acopla al campo electromagnético con intensidad e . Esto lleva a la luz, el *rol dual de la carga eléctrica*: es tanto una cantidad conservada, como se estableció originalmente, y también mide la intensidad con la cual una partícula interactúa con los campos eléctrico y magnético. Este aspecto dinámico de la carga es una consecuencia del *principio de norma*, y es esto lo que ha venido a jugar un rol importante en la física de partículas contemporánea.

Bibliografía

- [1] J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 Vols., (1873), reprint, Dover, New York (1954).
- [2] A. Einstein, *Ann. Phys.*, (Germany) **17**, 891 (1905).
- [3] I. Newton, *Principia Mathematica Philosophia Naturalis*, (1687), English translation, *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, University of California Press, California (1999).
- [4] A. Einstein, *Ann. Phys.*, (Germany) **49**, 769 (1916).
- [5] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th Edition, Oxford University Press, New York (1982).
- [6] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition, Addison-Wesley, Reading MA (1994).
- [7] N. Zettili, *Quantum Mechanics, Concepts and Applications*, 2nd Edition, Wiley, UK (2009).
- [8] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, Wiley, New York (1984).
- [9] L. H. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific, Singapore (1991).
- [10] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [11] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York (1993).
- [12] G. F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **37**, 165 (1991).
- [13] G. F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* **37**, 443 (1991).
- [14] G. F. Torres del Castillo and E. Galindo-Linares, *Rev. Mex. Fís.* **49**, 344 (2003).
- [15] G. F. Torres del Castillo and R. Rosas-Rodríguez, “An alternative Hamiltonian structure for the electromagnetic field”, enviado a *J. Math. Phys.* (2015).
- [16] R. Rosas-Rodríguez, *Estructuras Hamiltonianas para Campos Clásicos*, Tesis de Doctorado BUAP, Puebla (2007).

- [17] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [18] E. Witten, M. B. Green and J. H. Schwarz, *Superstring Theory: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology*, Vol. 2, Cambridge University Press, UK (2012).
- [19] A. Ashtekar, *Lectures on Non Perturbative Canonical Gravity*, World Scientific, Singapore (1991).
- [20] C. Rovelli and L. Smolin, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1155 (1988).
- [21] C. Rovelli and L. Smolin, *Nucl. Phys. B* **331**, 80 (1990).
- [22] R. Penrose, *Spinors and Spacetime*, Vol. 2, Cambridge University Press, UK (1984).
- [23] L. Smolin, *The Trouble with Physics*, Houghton Mifflin Company, Boston (2006).
- [24] R. Pensore, *The Road to Reality*, Jonathan Cape, London (2004).
- [25] C. Rovelli, *Int. J. Mod. Phys. D* **12**, 1509 (2003).
- [26] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 (1986).
- [27] A. Ashtekar, *Phys. Rev. D* **36**, 1587 (1987).
- [28] R. Rosas-Rodríguez, *J. Phys.: Conf. Series* **91**, 012013 (2007).
- [29] R. Rosas-Rodríguez, *Int. J. Mod. Phys. A* **23**, 895 (2008).
- [30] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **311**, 46 (1988).
- [31] R. Gambini and J. Pullin, *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [32] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading MA (1967).
- [33] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading MA (1980).
- [34] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Prees (1995).
- [35] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [36] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, Blefer Graduate School of Science Monograph Series, No. 2, New York (1964).
- [37] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 661 (1980).
- [38] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd Edition, Cambridge University Press, UK (1996).
- [39] D. Z. Freedman and R. R. Khuri, *Phys. Lett. B* **329**, 263 (1994).

- [40] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, New York (1975).
- [41] S.S. Gershtein, A. A. Logunov, M.A. Mestvirishvili and N.P. Tkachenko, *Phys. Atom. Nucl.* **67**, 1618 (2004).
- [42] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd Edition, Wiley, New York (1975).
- [43] C. Crnkovic and E. Witten, in *Three Houndred Years of Gravitation*, Cambridge University Press, UK (1987).
- [44] R. Resnick, D. Halliday and K. S. Krane, *Physics*, Vol. 2, 4th Edition, Wiley, New York (1992).
- [45] J. R. Reitz, F. J. Milford and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4th Edition. Adisson-Wesley, Reading MA (1993).
- [46] G. F. Torres del Castillo and N. Bagatella-Flores, *Rev. Mex. Fís.* **40**, 209 (1994).
- [47] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th Edition, Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).
- [48] J. Baez and J. P. Muniainn, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, Singapore (1994).
- [49] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2nd Edition, Institute of Physics Publishing, Bristol (2003).
- [50] G. F. Torres del Castillo, *Notas sobre variedades diferenciales*, Monografía del Cinvestav del IPN, México, D.F. (1998).
- [51] G. Hooft, *Nucl. Phys. B* **79**, 276 (1974).
- [52] A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974).
- [53] J. D. Bjorken and S. D. Dell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [54] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, UK (2004).
- [55] M. Montesinos, *J. Phys.: Conf. Series* **24**, 44 (2005).
- [56] M. Montesinos and G. F. Torres del Castillo, *Phys. Rev. A* **70**, 032104 (2004).