



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA
“ PROBABILIDAD DE FASE OBTENIDA
MEDIANTE FUNCIONES DE
CUASIPROBABILIDAD ”

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO EN FÍSICA APLICADA

PRESENTA:

VICTOR DE EMANUEL ARMENGOL CRUZ

DIRECTOR:

RAÚL JUÁREZ AMARO

CO-DIRECTOR:

HÉCTOR MANUEL MOYA CESSA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA

MARZO 2015

*Este trabajo es dedicado a
Victor Armengol L. y Evarista Cruz A.,
unas excelentes personas
mis padres*

Agradecimientos

Primero Quiero dar las gracias a mi familia por su apoyo incondicional tanto económico como moral, gracias por todo ese apoyo, en especial en los años más duros de mi carrera. Quiero expresar mi más grande agradecimiento a mi padre, gracias por todos los consejos que me has dado en la vida.

También quiero dar las gracias al Dr. Raúl Juárez Amaro, mi asesor, por la ayuda brindada ya que sin ella no hubiese sido posible la realización de este trabajo, gracias por los conocimientos transmitidos y su paciencia. Sin duda es una persona a la cual puedo llamar amigo.

Así como también, doy las gracias a: Juan Carlos Mendoza S., Juan Ramón Tijerina G. y Ricardo Rosas R., los revisores de este trabajo. Gracias por las sugerencias, ya que con éstas el trabajo pudo mejorarse.

Por último quiero dar las gracias a todos mis amigos que estuvieron a mi lado en la carrera, es cierto no todos los que entramos en el 2009 pudimos egresar el mismo año pero sin duda alguna siempre nos apoyamos. Nunca olvidaré los temas que debatíamos en nuestro tiempo libre y en temporada de exámenes para reducir el estrés.

Índice general

Agradecimientos	III
Índice	1
1. Introducción	5
Referencias	7
2. Fundamentos de la Mecánica Cuántica	9
2.1. Introducción	9
2.2. Vectores de Estado y Operadores	11
2.3. Eigen-Estados y Eigen-Valores	15
2.4. Espacio Fase	16
2.5. Operador de Densidad	17
Referencias	21
3. Cuantización del Campo Electromagnético	23
3.1. Introducción	23
3.2. Cuantización del Campo Electromagnético	23
3.3. Estados de Fock	27
3.4. Estados Coherentes	29
Referencias	35
4. Funciones de Distribución de Cuasiprobabilidad	37
4.1. Introducción	37
4.2. La Función de Distribución de Cuasiprobabilidad W de Wigner	37
4.3. La Función de Distribución de Cuasiprobabilidad P de Glauber- Sudarshan	40
4.4. La Función de Distribución de Cuasiprobabilidad Q de Husimi	42
4.5. La Función Generatriz de Distribución de Cuasiprobabilidad .	44
Referencias	47

5. Probabilidad de Fase Obtenida Mediante Funciones de Distribución de Cuasiprobabilidad	49
5.1. Introducción	49
5.2. Cálculo de la Probabilidad de Fase para un Estado Coherente	49
5.3. Cálculo de la Función Generatriz de Distribución de Cuasiprobabilidad para un Estado Coherente	51
5.4. Cálculo del Parámetro s que permite obtener la Probabilidad de Fase a partir de la Función Generatriz de Distribución de Cuasiprobabilidad	56
6. Conclusiones	69
Referencias Generales	71

Capítulo 1

Introducción

Las funciones que tienen cierta semejanza a las funciones de distribución de probabilidad de una partícula clásica son las funciones de distribución de cuasiprobabilidad [I-III, 1-3], los cuales son de gran utilidad en la óptica cuántica ya que entre otras cosas proporcionan un medio para la reconstrucción de campos cuánticos [II-III,1-3].

En este trabajo se determinará la probabilidad de fase a partir de la función generatriz de distribución de cuasiprobabilidad, para un estado coherente.

Para esto partimos de la función generatriz de distribución de cuasiprobabilidades, que al ser integrada sobre la parte radial se obtiene la probabilidad de fase de un estado coherente, dependiente de un parámetro s el cual tiene valores diferentes en cada estado coherente. El objetivo de esta tesis es obtener una función que permita determinar el parámetro s para cualquier estado coherente, el cual es denotado por γ . Para este fin, el trabajo se divide en los siguientes capítulos:

En el segundo capítulo se describen algunos conceptos fundamentales de la mecánica cuántica que ayudan a la resolución de nuestro problema. Tales como son los vectores de estado y operadores, eigen-estados y eigen-valores, el espacio fase y el operador de densidad. Estos conceptos dan sustento teórico a los capítulos posteriores.

En el tercer capítulo se analiza la cuantización del campo electromagnético introduciendo los estados de Fock o de número y los estados coherentes en función de los operadores de creación y aniquilación.

En el cuarto capítulo se introducen las principales funciones de cuasiprobabilidad, como son la función W de Wigner, la función P de Glauber-Sudarshan, la Función Q de Husimi y por ultimo la función generatriz F de cuasiprobabilidades de la cual se pueden deducir las funciones mencionadas anteriormente con la elección apropiada del parámetro s .

En el quinto capítulo es donde se encuentra la parte principal de la tesis, ya que en este capítulo se calcula la probabilidad de fase para un estado coherente partiendo de los estados coherentes y los estados de fase, escritos mediante estados de número. También se calcula la función generatriz de distribución de cuasiprobabilidad para un estado coherente y el parámetro $s(\gamma)$ que asocia a esta con la probabilidad de fase para un estado coherente γ .

Referencias

- [1] R. Juárez-Amaro and H. Moya-Cessa, *Acta Phys. Hungarica B* **20**, 73-76 (2004).
- [2] R. Juárez-Amaro and H. Moya-Cessa , *Phys. Rev. A* **68**, 023802 (2003).
- [3] R. Juárez-Amaro, H. Moya-Cessa and I. Ricárdez-Vargas, *Phys. Lett. A* **307**, 179 (2003).

Capítulo 2

Fundamentos de la Mecánica Cuántica

2.1. Introducción

En los siglos XVIII y XIX, la mecánica clásica o newtoniana parecía proporcionar una descripción totalmente precisa del movimiento de los cuerpos. Sin embargo, a finales del siglo XIX y principios del XX, ciertos resultados experimentales introdujeron dudas sobre si la teoría newtoniana era completa. Entre las nuevas observaciones figuraban las líneas que aparecen en los espectros luminosos emitidos por gases calientes o sometidos a descargas eléctricas. Según el modelo del átomo desarrollado a comienzos del siglo XX por el físico británico nacido en Nueva Zelanda Ernest Rutherford, en el que los electrones cargados negativamente giran en torno a un núcleo positivo, en órbitas dictadas por las leyes del movimiento de Newton, con esto se esperaba que los electrones emitieran luz en una amplia gama de frecuencias, y no en las estrechas bandas de frecuencia que forman las líneas de un espectro [1].

Otro enigma era la coexistencia de dos teorías de la luz: la teoría corpuscular, que explica la luz como una corriente de partículas, y la teoría ondulatoria, que considera la luz como ondas electromagnéticas. Un tercer problema era la ausencia de una base molecular para la termodinámica. En su libro *Principios elementales en Mecánica Estadística (1902)*, el físico estadounidense J. Willard Gibbs reconocía la imposibilidad de elaborar una teoría de acción molecular que englobara los fenómenos de la termodinámica, la radiación y la electricidad tal como se entendían entonces [1].

La complejidad de los problemas abordados se tradujo en un proceso lar-

go, que se extendió por varias décadas de trabajo intenso y que culminó con el establecimiento de una nueva teoría física, que es la mecánica cuántica, la cual es aplicable a todo sistema físico, independientemente de su estructura o dimensión.

El primer avance que llevó a la solución de aquellas dificultades fue la introducción del cuanto por parte de Max Planck, quien postuló que la materia sólo puede emitir o absorber energía en pequeñas unidades discretas, llamadas cuantos. Este postulado surgió como resultado de los estudios de la radiación del cuerpo negro, realizados en los últimos años del siglo XIX. El término ‘cuerpo negro’ se refiere a un cuerpo o superficie ideal que absorbe toda la energía radiante sin reflejar ninguna y emite en todas las frecuencias [IV,1].

Otra contribución fundamental fue el estudio del efecto fotoeléctrico por Albert Einstein en 1905, en este estudio A. Einstein propone que la energía luminosa está cuantificada en paquetes concentrados, a los que hoy llamamos fotones.

Años más tarde surgió una contribución más, que fue la del físico francés Louis Victor de Broglie quien en 1924 sugirió que no sólo la radiación electromagnética presentaba características corpusculares, sino también la materia podía presentar propiedades ondulatorias.

La teoría continuo su desarrollo, ya que en 1925, el físico austriaco Wolfgang Pauli expuso el principio de exclusión, que afirma que en un átomo no puede haber dos electrones con el mismo estado.

Dos años mas tarde en 1927, Heisenberg postuló el principio de incertidumbre, en el cual afirma que no es posible conocer la posición y el momento de una partícula simultáneamente.

Con estos acontecimientos surge una nueva teoría física, la mecánica cuántica. La mecánica cuántica se diferencia de la mecánica clásica por tratar de manera diferente a los sistemas físicos y a las variables dinámicas. La mecánica cuántica los representa mediante vectores de estados y operadores respectivamente [III-IV,1].

En este capítulo discutimos los conceptos fundamentales de la mecánica cuántica que se ocuparan en el resto de la tesis.

2.2. Vectores de Estado y Operadores

En la mecánica cuántica se utiliza una representación matemática muy peculiar llamada representación de Dirac, propuesta por P. A. M. Dirac, con la cual podemos representar a un estado físico con un vector de estado $|\psi\rangle$ que es una función de onda, conocido también como ket, el cual está definido en un espacio complejo y se postula contiene toda la información del sistema. El conjunto de los estados físicos posibles forman un espacio vectorial, que se conoce como espacio de Hilbert y cuya dimensión está determinada por el número de grados de libertad del sistema [IV].

La función de onda también puede ser escrita mediante el uso de un bra y un ket, con ayuda de la base de coordenadas $|\vec{r}\rangle$, la función de onda podría escribirse como

$$\psi(\vec{r}, t) = \langle \vec{r} | \psi \rangle, \quad (2.1)$$

donde el vector de estado $|\psi\rangle$ es equivalente a la función de onda $\psi(\vec{r}, t)$ [3].

La función de onda se puede escribir de una manera muy similar a la anterior pero en términos de los momentos; es decir

$$\phi(\vec{p}, t) = \langle \vec{p} | \psi \rangle. \quad (2.2)$$

Los vectores de estado tienen algunas propiedades, al sumar dos vectores de estado diferentes, el resultado es un nuevo vector de estado [III-IV,2]

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle. \quad (2.3)$$

Si multiplicamos $|\alpha\rangle$ por un número complejo c el resultado es $c|\alpha\rangle$. El número c puede estar a la derecha o a la izquierda del vector de estado

$$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c. \quad (2.4)$$

En un caso particular donde $c = 0$ el resultado es un vector de estado nulo. Uno de los postulados físicos es que $|\alpha\rangle$ y $c|\alpha\rangle$ con $c \neq 0$ representa el mismo estado físico, es decir solo la dirección del vector de estado es significativa [IV].

Un observable, cualquier cantidad física medible puede ser representada por un operador \hat{A} . Un operador actúa sobre un vector de estado por el lado izquierdo [IV,2-3]

$$\hat{A}(|\alpha\rangle) = \hat{A}|\alpha\rangle. \quad (2.5)$$

Para cada vector de estado $|\alpha\rangle$, existe un vector de estado dual conjugado denotado como $\langle\alpha|$.

Hay una correspondencia uno a uno en el espacio ket y el espacio bra

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{DC} \langle\alpha|, \quad (2.6a)$$

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\alpha| + \langle\beta|, \quad (2.6b)$$

donde el símbolo \xleftrightarrow{DC} quiere decir correspondencia dual.

La correspondencia dual para $c|\alpha\rangle$ es $c^*\langle\alpha|$, de forma más general

$$c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \xleftrightarrow{DC} c_\alpha^*\langle\alpha| + c_\beta^*\langle\beta|. \quad (2.7)$$

Se define el producto interno de un bra $\langle\alpha|$ y un ket $|\beta\rangle$ como

$$(\langle\alpha|) \bullet (|\beta\rangle) = \langle\alpha|\beta\rangle, \quad (2.8)$$

este producto da como resultado un número complejo [IV].

Existen dos postulados fundamentales de los productos internos, el primero es

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*. \quad (2.9)$$

En otras palabras $\langle\alpha|\beta\rangle$ y $\langle\beta|\alpha\rangle$ son complejos conjugados uno del otro, de esta propiedad podemos deducir que $\langle\alpha|\alpha\rangle$ es real.

El segundo postulado del producto interno es

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0, \quad (2.10)$$

donde la igualdad se logra solo cuando $|\alpha\rangle$ es un ket nulo. Lo cual es conocido también como el postulado de la métrica definida positiva [4].

Dos vectores $|\alpha\rangle$ y $\langle\beta|$ son ortogonales solo si cumplen

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* = 0. \quad (2.11)$$

Como se mencionó anteriormente, los observables como el momento o el spin son representados por operadores que actúan sobre un ket.

Podemos considerar de una manera más general a los operadores que actúan del lado izquierdo del vector de estado o ket como \hat{X} y \hat{Y} , es decir

$$\hat{X} \cdot (|\alpha\rangle) = \hat{X}|\alpha\rangle, \quad (2.12a)$$

$$\hat{Y} \cdot (|\alpha\rangle) = \hat{Y}|\alpha\rangle. \quad (2.12b)$$

Se dice que los operadores \hat{X} y \hat{Y} son iguales solo si

$$\hat{X}|\alpha\rangle = \hat{Y}|\alpha\rangle. \quad (2.13)$$

El operador \hat{X} es conocido como operador nulo si para algún vector de estado arbitrario cumple

$$\hat{X}|\alpha\rangle = 0. \quad (2.14)$$

Los operadores pueden sumarse y obedecen la ley conmutativa y asociativa de la suma

$$\hat{X} + \hat{Y} = \hat{Y} + \hat{X}, \quad (2.15a)$$

$$\hat{X} + (\hat{Y} + \hat{Z}) = (\hat{X} + \hat{Y}) + \hat{Z}. \quad (2.15b)$$

Un operador \hat{X} siempre actúa sobre un bra por la derecha

$$(\langle\alpha|) \cdot \hat{X} = \langle\alpha|\hat{X}. \quad (2.16)$$

El producto del operador \hat{X} y el vector de estado $|\alpha\rangle$ no es dual del producto $\langle\alpha|\hat{X}$, para lo cual definimos a

$$\hat{X}|\alpha\rangle \xrightarrow{DC} \langle\alpha|\hat{X}^\dagger, \quad (2.17)$$

el operador \hat{X}^\dagger es llamado operador adjunto [IV, 4].

Un operador es hermitiano si su adjunto es igual a sí mismo, es decir, cumple con la siguiente propiedad

$$\hat{X} = \hat{X}^\dagger. \quad (2.18)$$

La multiplicación de dos operadores es en general no conmutativa, es decir [III-IV,2]

$$\hat{X}\hat{Y} \neq \hat{Y}\hat{X}, \quad (2.19)$$

sin embargo, la multiplicación entre los operadores es asociativa [III-IV,2]

$$(\hat{X}\hat{Y})\hat{Z} = \hat{X}(\hat{Y}\hat{Z}). \quad (2.20)$$

Es importante recordar que

$$(\hat{X}\hat{Y})^\dagger = \hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger, \quad (2.21)$$

por lo cual, el dual de una multiplicación se puede escribir de la siguiente manera

$$\hat{X}\hat{Y}|\alpha\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\alpha|\hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger. \quad (2.22)$$

Cuando hacemos la multiplicación de un ket $|\beta\rangle$ y un bra $\langle\alpha|$ en este orden tenemos

$$(|\beta\rangle) \cdot (\langle\alpha|) = |\beta\rangle\langle\alpha|, \quad (2.23)$$

lo cual se conoce como el producto externo y puede representarse como un operador \hat{X} , es decir

$$\hat{X} = |\beta\rangle\langle\alpha|, \quad (2.24a)$$

de esta manera su adjunto se puede escribir como

$$\hat{X}^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta|. \quad (2.24b)$$

P. A. M. Dirac propuso el axioma asociativo, en el cual está implícita la propiedad asociativa de los operadores [4]

$$(\langle\beta|) \cdot (\hat{X}|\alpha\rangle) = (\langle\beta|\hat{X}) \cdot (|\alpha\rangle). \quad (2.25)$$

Para el operador \hat{X} se define el elemento de una matriz $X_{\alpha\beta}$ como

$$X_{\alpha\beta} = \langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{X}^\dagger|\beta\rangle^*. \quad (2.26)$$

2.3. Eigen-Estados y Eigen-Valores

Supongamos que \hat{A} es un operador hermitiano, el cual representa a un observable en física, este operador cumple con la propiedad de que sus eigen-valores son reales, es decir [IV, 2]

$$\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle, \quad (2.27a)$$

$$\langle a''|\hat{A} = a''\langle a''|, \quad (2.27b)$$

y los eigen-estados correspondientes a sus diferentes eigen-valores son ortogonales [IV, 2]

$$\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''}, \quad (2.27c)$$

donde $\delta_{a'a''}$ es la delta de Dirac, introducida por P. A. M. Dirac [4].

Los eigen-estados forman un conjunto ortonormal completo, de esta manera cualquier vector de estado puede ser escrito como una combinación lineal de estos [IV], es decir

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'}|a'\rangle, \quad (2.28)$$

donde el coeficiente $c_{a'}$ puede encontrarse multiplicando por $\langle a'|$ a ambos lados de la igualdad anterior

$$c_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle. \quad (2.29)$$

Escrito de otra forma, tenemos que

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle. \quad (2.30)$$

De esta manera podemos deducir que

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = I, \quad (2.31)$$

donde I es el operador identidad.

Podemos escribir a un operador \hat{X} como una matriz cuadrada utilizando el operador identidad

$$\hat{X} = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a''|\hat{X}|a'\rangle \langle a'|, \quad (2.32)$$

donde N es el tamaño del espacio ket y $N \times N$ es el tamaño de la matriz.

Escrita de una manera más explícita, la matriz se puede representar mediante

$$A = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\hat{X}|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|\hat{X}|a^{(2)}\rangle & \cdots & \langle a^{(1)}|\hat{X}|a^{(N)}\rangle \\ \langle a^{(2)}|\hat{X}|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|\hat{X}|a^{(2)}\rangle & \cdots & \langle a^{(2)}|\hat{X}|a^{(N)}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a^{(N)}|\hat{X}|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(N)}|\hat{X}|a^{(2)}\rangle & \cdots & \langle a^{(N)}|\hat{X}|a^{(N)}\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

2.4. Espacio Fase

En física el espacio fase es un concepto, que relaciona la mecánica cuántica con la mecánica clásica. Este se desarrolló en el siglo XIX por Ludwig Boltzmann, Henri Poincaré, y Willard Gibbs.

En la mecánica clásica, el espacio fase es el espacio en el que están representados todos los estados posibles del sistema y a cada estado le corresponde

un único punto en el espacio fase [II].

El espacio fase está determinado por las coordenadas generalizadas de posición q y momento p . Se necesita tanto la posición como el momento para determinar el comportamiento del sistema.

Las ecuaciones de movimiento de Hamilton describen el movimiento de un partícula de un sistema en el espacio fase como una función que depende del tiempo $H(q(t), p(t))$ [5].

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)), \quad (2.34a)$$

$$\frac{d}{dt}p(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)). \quad (2.34b)$$

En la mecánica cuántica, si un estado tiene definido su posición entonces no podemos conocer con exactitud el momento, o si dicho estado tiene definido el momento entonces no podemos conocer con exactitud la posición, esto debido al principio de incertidumbre de Heisenberg [2]

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.35)$$

Los operadores de posición \hat{q} y de momento \hat{p} , los cuales son hermitianos, forman un espacio complejo que se conoce como espacio de Hilbert, el cual es el espacio fase para la mecánica cuántica [II].

2.5. Operador de Densidad

Un estado puro es una colección de sistemas físicos donde cada uno de ellos es caracterizado por el mismo vector de estados $|\alpha\rangle$, mientras que para un estado mezclado cierta parte de la población pertenece al vector de estados $|\alpha\rangle^{(1)}$ mientras que otra fracción del sistema pertenece a $|\alpha\rangle^{(2)}$ y así sucesivamente hasta el estado $|\alpha\rangle^{(m)}$, por lo cual el sistema queda descrito por una combinación de muchos estados. Sin embargo es posible conocer las probabilidades p_1, p_2, \dots, p_m de obtener a una partícula en algún estado mencionado anteriormente. En otras palabras, las partículas se encuentran en un mezcla

estadística de estados puros $|\alpha^{(1)}\rangle, \dots, |\alpha^{(m)}\rangle$ con peso p_1, p_2, \dots, p_m . Esta información estadística se representa matemáticamente mediante un operador llamado operador de densidad, el cual está definido como [II-IV,1-4]

$$\hat{\rho} = \sum_k \omega_k |\alpha^{(k)}\rangle \langle \alpha^{(k)}|. \quad (2.36)$$

Un operador de densidad contiene la información física disponible sobre un sistema, del mismo modo que una función de onda contiene la información disponible sobre un estado, un estado mezclado puede representarse mediante un operador de densidad pero no podemos asignarle una función de onda [III-IV, 2].

Las probabilidades p_1, p_2, \dots, p_m de cada estado cumplen con la condición de normalización

$$\sum_m p_m = 1. \quad (2.37)$$

Al hacer la medición de un observable \hat{A} en un sistema mezclado, el valor esperado de dicho observable está dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n \omega_n A_n = \sum_n \omega_n \langle \alpha^{(n)} | \hat{A} | \alpha^{(n)} \rangle, \quad (2.38)$$

en donde se realiza una suma de los valores esperados \hat{A} para cada estado $|\alpha^{(n)}\rangle$ con probabilidad p_n .

Si el conjunto de vectores $|\beta^{(k)}\rangle$ forman una base para el estado mezclado, entonces estos deben cumplir con la propiedad dada por la ecuación (2.31) del operador identidad, es decir

$$I = \sum_k |\beta^{(k)}\rangle \langle \beta^{(k)}|. \quad (2.39)$$

Introduciendo la ecuación (2.39) en la ecuación (2.38) tenemos

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n \omega_n \langle \alpha^{(n)} | \left(\sum_k |\beta^{(k)}\rangle \langle \beta^{(k)}| \right) \hat{A} \left(\sum_i |\beta^{(i)}\rangle \langle \beta^{(i)}| \right) | \alpha^{(n)} \rangle, \quad (2.40)$$

reagrupando los productos internos, obtenemos

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_k \sum_i \left\langle \beta^{(i)} \left| \sum_n \omega_n |\alpha^{(n)}\rangle \langle \alpha^{(n)}| \right| \beta^{(k)} \right\rangle \langle \beta^{(k)} | \hat{A} | \beta^{(i)} \rangle, \quad (2.41)$$

utilizando la definición del operador de densidad de la ecuación (2.39), donde

$$\hat{\rho}_{ik} = \left\langle \beta^{(i)} \left| \sum_n \omega_n |\alpha^{(n)}\rangle \langle \alpha^{(n)}| \right| \beta^{(k)} \right\rangle, \quad (2.42a)$$

$$\hat{A}_{ki} = \langle \beta^{(k)} | \hat{A} | \beta^{(i)} \rangle, \quad (2.42b)$$

por lo cual la ecuación (2.41) se puede escribir de la forma

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_k \sum_i \hat{\rho}_{ik} \hat{A}_{ki} = \sum_n (\hat{\rho} \hat{A})_{nn}. \quad (2.43)$$

La ecuación anterior, es una suma sobre la diagonal de la matriz, para lo cual definimos a la traza como la suma de los elementos de la diagonal de una matriz [IV]. Así la ecuación (2.43) se puede escribir como

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr\{\hat{\rho} \hat{A}\}. \quad (2.44)$$

Esto nos indica que si \hat{A} es un observable entonces su valor esperado calculado sobre un estado mezclado está determinado por la traza del producto del operador de densidad por el observable, es decir toda la información del estado mezclado se encuentra en el operador de densidad [III-IV,2-4].

El operador de densidad cumple con las siguientes propiedades [IV],

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger, \quad (2.45a)$$

$$Tr\{\hat{\rho}\} = 1, \quad (2.45b)$$

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad (2.45c)$$

$$Tr\{\hat{A} \hat{\rho}\} = Tr\{\hat{\rho} \hat{A}\}. \quad (2.45d)$$

Referencias

- [1] Julio Gratton, *Introducción a la mecánica cuántica*, (2003).
- [2] A. C. Phillips, *Introduction to Quantum Mechanics*, Wiley, (2003).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Wiley (1977).
- [4] P. A. M. Dirac, *Principios de la Mecánica Cuántica*, Ariel, (1958).
- [5] S. T. Thornton and J. B. Marion, *Clasical Dynamics of particles and systems*, Thomson, (2004).

Capítulo 3

Cuantización del Campo Electromagnético

3.1. Introducción

Cuando tratamos de analizar fenómenos como el efecto fotoeléctrico, la emisión espontánea y la radiación de cuerpo negro con la teoría de la electrodinámica clásica obtenemos resultados erróneos mientras que, cuando analizamos estos fenómenos desde un enfoque cuántico [1], analizándolos como un sistema cuántico, obtenemos resultados con mayor aproximación.

El método que se utiliza usualmente para cuantizar el campo electromagnético se basa en descomponer a éste en osciladores armónicos, de lo cual resulta inmediata la cuantización [II].

3.2. Cuantización del Campo Electromagnético

El punto de partida para la cuantización del campo electromagnético son las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre [II,V,2].

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

En las ecuaciones anteriores existe una relación entre \vec{D} y \vec{E} que es $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, así también entre \vec{B} y \vec{H} que es $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, donde μ_0 y ε_0 son las constantes de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica del espacio libre respectivamente y cumplen con la condición de $\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío [II,2].

Las ecuaciones de Maxwell se pueden tratar mediante el potencial escalar y el potencial vectorial que son: $\phi(\vec{r}, t)$ y $\vec{A}(\vec{r}, t)$, respectivamente [2].

En los problemas donde no hay fuentes de carga o corriente es conveniente elegir la norma de Coulomb, en el cual la divergencia del potencial vectorial es nula [II,2].

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.5)$$

En esta norma, tanto el campo eléctrico como el magnético se pueden expresar mediante una función potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ [II,2], es decir:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.6)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Sustituyendo los valores de \vec{B} y \vec{E} en función del potencial vectorial en la última ecuación de Maxwell (3.4) y teniendo en cuenta (3.5) se tiene que

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \frac{\nabla \times \vec{A}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})}{\partial t}. \quad (3.9)$$

Donde podemos ocupar la relación $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, de esta manera, se encuentra que el potencial vector debe cumplir la siguiente ecuación de onda [II]

$$\nabla^2 \vec{A}(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (3.10)$$

Por sencillez, podemos considerar la solución de esta ecuación en un volumen finito del espacio V , desarrollando $\vec{A}(\vec{r}, t)$ en serie de Fourier, se tiene lo siguiente [II,2]

$$\vec{A}(r, t) = \sum_k c_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + \sum_k c_k^* \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t}. \quad (3.11)$$

Donde las funciones c_k , son las amplitudes de la parte temporal del desarrollo en series de Fourier.

Sustituyendo la ecuación (3.11) en (3.10) se llega a la ecuación de Helmholtz, que obedecen el conjunto de funciones vectoriales $\vec{u}_k(\vec{r})$

$$(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2}) \vec{u}_k(r) = 0. \quad (3.12)$$

Las funciones $\vec{u}_k(\vec{r})$, deben cumplir con la condición de transversalidad impuesta por (3.5)

$$\nabla \cdot \vec{u}_k(\vec{r}) = 0. \quad (3.13a)$$

Dichas funciones, forman un conjunto completo,

$$\int_V \vec{u}_k^*(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{k'}(\vec{r}) dV = \delta_{kk'}. \quad (3.13b)$$

La solución de la ecuación (3.12) está sujeta a las condiciones de contorno impuestas sobre el volumen considerado. Supondremos condiciones periódicas para considerar ondas viajeras en lugar de ondas estacionarias. Para una onda plana en dicho volumen, los modos se expresan de la siguiente forma [II]:

$$\vec{u}_k(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \hat{e}^\lambda e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (3.14)$$

Donde \hat{e}^λ es un vector de polarización, el cual es unitario. El índice λ puede tomar los valores 1 ó 2, es decir, hay dos polarizaciones posibles. Las

condiciones periódicas de contorno imponen a las componentes del vector de onda las siguientes restricciones [II,V]

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, \quad (3.15a)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y, \quad (3.15b)$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z, \quad (3.15c)$$

siendo $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La condición de transversalidad impone que el vector de polarización sea perpendicular al vector de onda. De esta manera podemos expresar al potencial vectorial como:

$$\vec{A}(r, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} (\hat{a}_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t}). \quad (3.16)$$

para cuantizar el campo electromagnético, se asocia las amplitudes del campo electromagnético con los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger , es decir, los coeficientes c_k y \hat{a}_k cumplen con $c_k = \hat{a}_k$, donde

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{m_k \omega_k}{2\hbar}} \hat{q} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m_k \omega_k}} \hat{p}, \quad (3.17a)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = \sqrt{\frac{m_k \omega_k}{2\hbar}} \hat{q} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m_k \omega_k}} \hat{p}. \quad (3.17b)$$

El campo eléctrico que proporciona este potencial vectorial se calcula de forma inmediata usando la ecuación (3.7) y está dado por:

$$\vec{E}(r, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0}} (\hat{a}_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t}). \quad (3.18)$$

En la teoría electromagnética clásica estas amplitudes de Fourier son números complejos [II].

La cuantización del campo electromagnético es acompañado por la selección de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger , estos operadores cumplen con las reglas Bosónicas [II,IV-V]:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad (3.19a)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (3.19b)$$

El comportamiento dinámico de las amplitudes del campo eléctrico pueden ser descritas por un conjunto de osciladores armónicos independientes obedeciendo las reglas de conmutación. Los estados en cada modo pueden ser descritos por un vector de estado $|\Psi_k\rangle$ en un espacio de Hilbert apropiado para cada modo [II].

El Hamiltoniano para el campo electromagnético en el vacío es [II,IV-V,2]:

$$H = \frac{1}{2} \int dr (\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2). \quad (3.20)$$

Sustituyendo el valor del campo eléctrico \vec{E} y del campo magnético \vec{H} en la ecuación (3.20) y tomando en cuenta las expresiones (3.13a) y (3.13b) el Hamiltoniano puede ser reducido a la siguiente forma [II,IV]:

$$H = \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}). \quad (3.21)$$

Esto representa el número de fotones en cada modo, multiplicado por la energía de un fotón en ese modo, $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$ representa la energía en el vacío para cada modo [II].

3.3. Estados de Fock

El Hamiltoniano de la ecuación (3.21) tiene los eigen-valores $\hbar\omega_k(n_k + \frac{1}{2})$ donde n_k es un entero no negativo y sus eigen-estados $|n_k\rangle$ son conocidos como estados de Fock o estados de número, los cuales también son eigen-estados del operador de número de partículas $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ [II,IV-V,2]

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle. \quad (3.22)$$

El estado base de un oscilador armónico está definido por [II,IV]:

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0. \quad (3.23)$$

De la ecuación (3.21) y (3.23) podemos obtener la energía del estado base, la cual es:

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k. \quad (3.24)$$

Los operadores \hat{a}_k^\dagger y \hat{a}_k son operadores de creación y aniquilación para los eigen-estados del oscilador armónico. En términos de fotones, estos representan la creación y aniquilación de un fotón con un vector de onda \vec{K} y polarización \hat{e}_k [II,IV-V,2].

Si aplicamos los operadores de creación y aniquilación a los estados de Fock tenemos [II,IV]

$$\hat{a}_k|n\rangle = (n_k)^{\frac{1}{2}}|n_k - 1\rangle, \quad (3.25a)$$

$$\hat{a}_k^\dagger|n_k\rangle = (n_k + 1)^{\frac{1}{2}}|n_k + 1\rangle. \quad (3.25b)$$

Los vectores de estado para estados altamente excitados pueden obtenerse mediante el estado base por la sucesiva aplicación del operador de creación [II,IV]

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k!)^{\frac{1}{2}}}|0\rangle. \quad (3.26)$$

Los estados de número son ortogonales y forman un conjunto completo, es decir [II,IV]

$$\langle n_k|m_k\rangle = \delta_{nm}, \quad (3.27)$$

$$\sum_{n_k}^{\infty} |n_k\rangle\langle n_k| = \hat{I}. \quad (3.28)$$

Dado que la norma de estos eigen-vectores es finita, tiene definido el producto punto y es un espacio complejo, estos forman un conjunto completo de vectores base para un espacio de Hilbert [II-III].

Mientras que los estados de número forman una representación útil para los fotones altamente energéticos, por ejemplo los rayos γ , donde el número de fotones es muy pequeño, esta no es la representación más adecuada para el campo de la óptica donde el número total de fotones es muy grande.

La mayoría de campos ópticos son una superposición de estados de número (estados puros) o una mezcla de estados de número (estados mixtos) [II].

3.4. Estados Coherentes

El producto en la incertidumbre de la amplitud y la fase para un estado coherente es el mínimo permitido por el principio de incertidumbre [II]. En este sentido los estados coherentes están cerca de una descripción clásica del campo. Las propiedades básicas de estos estados se muestran en las siguientes secciones.

Los estados coherentes se pueden generar aplicando el operador de desplazamiento de Glauber $\hat{D}(\alpha)$ al estado vacío, este es un operador unitario y está definido como [I-III,V]

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}, \quad (3.29)$$

donde α es un número complejo arbitrario.

Usando la propiedad conocida como la fórmula de Baker-Hausdorff [I,III]

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{2}}, \quad (3.30)$$

podemos separar el argumento del operador de desplazamiento de Glauber, esta relación es válida cuando los operadores cumplen

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]. \quad (3.31)$$

El operador $\hat{D}(\alpha)$ se puede escribir como [I-II]

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}. \quad (3.32)$$

El operador de desplazamiento tiene las siguientes propiedades [I-II],

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{D}(-\alpha), \quad (3.33a)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad (3.33b)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (3.33c)$$

Los estados coherentes pueden ser generados al aplicar el operador $\hat{D}(\alpha)$ al estado base

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (3.34)$$

Si partimos de la ecuación anterior utilizando la fórmula de Baker-Hausdorff y la ecuación (3.32) para el operador de Glauber, tenemos que

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle, \quad (3.35)$$

donde podemos hacer una expansión en series para el término $e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$ y de esta manera tenemos

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle. \quad (3.36)$$

Utilizando la ecuación (3.25a) en (3.36) podemos expresar a un estado coherente en términos de un estado de número, es decir [I-III,V]

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} |n\rangle. \quad (3.37)$$

Los estados coherentes son eigen-estados del operador de aniquilación \hat{a} , lo cual se puede probar de la siguiente manera [I-III]

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)|0\rangle = (\hat{a} + \alpha)|0\rangle = \alpha|0\rangle. \quad (3.38)$$

Multiplicando ambos lados por $\hat{D}(\alpha)$ llegamos a la ecuación de eigen-estados [I-III],

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.39)$$

Como \hat{a} es un operador no hermitiano sus eigen-valores α son complejos [II,2].

Otra propiedad útil del operador $\hat{D}(\alpha)$ es,

$$\hat{D}(\alpha + \beta) = \hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)\exp(-i\text{Im}(\alpha\beta^*)). \quad (3.40)$$

Tomando el producto escalar en ambos lados de la ecuación (3.39) por $\langle n|$ podemos encontrar la siguiente relación [II],

$$(n+1)^{\frac{1}{2}}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle. \quad (3.41)$$

Utilizando la ecuación (3.26) en (3.41) se obtiene

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}\langle 0|\alpha\rangle. \quad (3.42)$$

Podemos expandir a $|\alpha\rangle$ en términos de estados de número $|n\rangle$ con coeficientes de expansión $\langle n|\alpha\rangle$, de la siguiente manera [I,III]

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}|n\rangle. \quad (3.43)$$

La longitud cuadrada del vector $|\alpha\rangle$ es [II,III]

$$|\langle \alpha|\alpha\rangle|^2 = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2}, \quad (3.44)$$

con

$$\langle 0|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \quad (3.45)$$

Sustituyendo (3.45) en (3.44) se obtiene que $|\langle \alpha|\alpha\rangle|^2 = 1$ y por lo tanto los estados coherentes están normalizados [I-III].

Otra forma de llegar a la ecuación (3.37) es sustituyendo la ecuación (3.45) en (3.43).

Podemos observar que la distribución de probabilidad de un fotón en un estado coherente es una distribución de Poisson

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}, \quad (3.46)$$

donde $|\alpha|^2$ es el número promedio de fotones ($\bar{n} = \langle \alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle$) [I-III,V].

El producto de dos estados coherentes es [I-II]

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{D}(\beta)^\dagger\hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (3.47)$$

Usando la ecuación (3.32), la ecuación anterior se convierte

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha\beta^*\right). \quad (3.48)$$

La norma del producto escalar en este caso es [I]

$$|\langle \beta|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}. \quad (3.49)$$

Así los estados coherentes no son ortogonales. Aunque dos estados coherentes $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ se convierten en ortogonales en el límite cuando $|\alpha - \beta| \gg 1$ [II].

Los estados coherentes forman un espacio complejo continuo de dos dimensiones, llamado espacio de Hilbert. La relación de completéz es la siguiente [II],

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{I}. \quad (3.50)$$

La cual se puede demostrar de la siguiente manera. Utilizando la expansión (3.37) obtenemos

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^{*m} \alpha^n. \quad (3.51)$$

Haciendo un cambio de variables a coordenadas polares, la ecuación anterior queda escrita de la siguiente manera

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} r^{n+m} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}. \quad (3.52)$$

Usando la siguiente ecuación

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi \delta_{nm}, \quad (3.53)$$

obtenemos,

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi} \xi^n. \quad (3.54)$$

Donde $\xi = r^2$ y utilizando la relación de recurrencia de la función gamma, es decir, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, donde la función gamma se define por [3]

$$\Gamma(n) = (n-1)! = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{n-1}. \quad (3.55)$$

Podemos ahora deducir que la integral dada por la ecuación (3.51) se puede escribir de la siguiente manera

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I}. \quad (3.56)$$

Una prueba alternativa para la integral de los estados coherentes se puede dar utilizando la relación siguiente

$$e^{\zeta\hat{B}} \hat{A} e^{-\zeta\hat{B}} = \hat{A} + \zeta[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{\zeta^2}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] \cdots, \quad (3.57)$$

de esta manera se puede ver que el operador \hat{A} cumple con [I-II]

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{A} \hat{D}(\alpha) = \hat{A}. \quad (3.58)$$

Podemos considerar a \hat{A} como

$$\hat{A} = \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (3.59)$$

Usando el operador de desplazamiento de Glauber en función de β y aplicándolo a \hat{A} se tiene

$$\hat{D}^\dagger(\beta) \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{D}(\beta) = \int d^2\alpha \hat{D}^\dagger(\beta) \hat{D}(\alpha) |0\rangle\langle 0| \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\beta). \quad (3.60)$$

Recordando las propiedades (3.34) y (3.40), se tiene

$$\begin{aligned} & \int d^2\alpha \hat{D}^\dagger(\beta) \hat{D}(\alpha) |0\rangle\langle 0| \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\beta) = \\ & \int d^2\alpha \hat{D}(\alpha - \beta) e^{i\text{Im}(-\beta(\alpha)^*)} |0\rangle\langle 0| \hat{D}^\dagger(\alpha - \beta) e^{-i\text{Im}(-\beta(\alpha)^*)}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

De la ecuación (3.61) podemos deducir que

$$\hat{D}^\dagger(\beta) \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{D}(\beta) = \int d^2\alpha' |\alpha'\rangle\langle\alpha'|. \quad (3.62)$$

De esta manera podemos comparar las ecuaciones (3.56) y (3.62), de las cuales se puede deducir que

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{I}, \quad (3.63)$$

donde $\frac{1}{\pi}$ es una constante de proporcionalidad.

Los estados coherentes tienen un significado físico en un campo generado por un láser estabilizado operando muy por encima de su límite [I-II].

Referencias

- [1] Luis de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, Editorial Continental, (1980).
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, (1962).
- [3] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, Thomson, (1997).

Capítulo 4

Funciones de Distribución de Cuasiprobabilidad

4.1. Introducción

Las funciones que tienen cierta semejanza a las funciones de distribución de probabilidad de una partícula clásica son las funciones de distribución de cuasiprobabilidad, las cuales son de gran utilidad en la óptica cuántica ya que entre otras cosas proporcionan un medio para la reconstrucción de campos cuánticos.

Las funciones de cuasiprobabilidad son usadas no solo como herramientas de cálculo sino que también pueden proporcionar una comprensión en la conexión entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica [1].

En este capítulo se deducen las tres principales funciones de distribución de cuasiprobabilidad, las cuales son la función de Wigner W , la función de Husimi Q y la función de Glauber-Sudarshan P . También se hace mención de la función generatriz de cuasiprobabilidades F , de la cual se pueden deducir todas las funciones anteriores.

4.2. La Función de Distribución de Cuasiprobabilidad W de Wigner

La primera distribución de cuasiprobabilidad introducida en la óptica cuántica fue la distribución de Wigner $W(\alpha)$ [1].

Históricamente la distribución $W(\alpha)$ fue introducida en términos de la posición q y el momento p , de la siguiente forma [I,V,1]

$$W(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int du e^{iup} \left\langle q + \frac{u}{2} \mid \hat{\rho} \mid q - \frac{u}{2} \right\rangle. \quad (4.1)$$

La función de Wigner se obtiene a partir de una densidad de probabilidad clásica $\mathcal{P}(q, p)$ la cual se puede escribir mediante las deltas de Dirac $\delta(Q - q)$ y $\delta(P - p)$ [I], como

$$\mathcal{P}(q, p) = \int \int dQ dP \delta(Q - q) \delta(P - p) \mathcal{P}(Q, P), \quad (4.2)$$

donde

$$\delta(Q - q) = \frac{1}{2\pi} \int dv e^{iv(Q-q)}, \quad (4.3a)$$

$$\delta(P - p) = \frac{1}{2\pi} \int du e^{iu(P-p)}. \quad (4.3b)$$

Sabemos que la función delta cumple con la propiedad: [2]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iwt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-iwt}. \quad (4.4)$$

Así, podemos cambiar el signo de u en la delta $\delta(P - p)$ para reescribir la ecuación (4.2) como

$$\mathcal{P}(q, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int dv du e^{-ivq} e^{iup} \left(\int \int dQ dP e^{-iuP+ivQ} \mathcal{P}(Q, P) \right). \quad (4.5)$$

Podemos observar que las dos integrales que están dentro del paréntesis son el valor esperado de una función $e^{-iuP+ivQ}$, por lo cual si hacemos el cálculo del valor esperado de un operador de la misma forma serian equivalentes, es decir

$$\langle e^{-iu\hat{p}+iv\hat{q}} \rangle = Tr(\hat{\rho} e^{-iu\hat{p}+iv\hat{q}}) = \int dq \langle q \mid \hat{\rho} e^{-iu\hat{p}+iv\hat{q}} \mid q \rangle. \quad (4.6)$$

En la ecuación anterior, se calculó la traza en términos de los eigen-estados de posición y utilizando la fórmula de Baker-Hausdorff, dada por la ecuación (3.30), obtenemos

$$\langle e^{-iu\hat{p}+iv\hat{q}} \rangle = e^{-\frac{ivu}{2}} \int dq e^{ivq} \langle q | \hat{\rho} e^{-iu\hat{p}} | q \rangle. \quad (4.7)$$

ya que el vector de estado $|q\rangle$ es un eigen-estado de \hat{q} , el operador $e^{iv\hat{q}}$ al ser aplicado al eigen-estado de posición $|q\rangle$, cumple con

$$e^{iv\hat{q}} |q\rangle = e^{ivq} |q\rangle. \quad (4.8)$$

El operador $e^{iu\hat{p}}$ al ser aplicado al estado de posición $|q\rangle$ lo desplaza, de tal forma que [I,III]

$$e^{iu\hat{p}} |q\rangle = |q + u\rangle, \quad (4.9a)$$

y a su vez

$$e^{-iu\hat{p}} |q\rangle = |q - u\rangle. \quad (4.9b)$$

De esta manera podemos escribir la ecuación (4.7), como

$$\begin{aligned} \langle e^{-iu\hat{p}+iv\hat{q}} \rangle &= e^{iv(q-\frac{u}{2})} \int dq \langle q | \hat{\rho} | q - u \rangle, \\ &= \int dx e^{ivx} \left\langle x + \frac{u}{2} \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{u}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde se realizó un cambio de variable $q = x + \frac{u}{2}$.

La ecuación (4.5) puede ser escrita en termino del valor esperado obtenido mediante los operadores de posición y de momento [I], es decir

$$\mathcal{P}(q, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int dv du e^{-ivq} e^{iup} \left(\int dx e^{ivx} \left\langle x + \frac{u}{2} \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{u}{2} \right\rangle \right). \quad (4.11)$$

Agrupando las funciones de v en la ecuación (4.11) se obtiene

$$\mathcal{P}(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \int dx du \left(\frac{1}{2\pi} \int dv e^{-iv(q-x)} \right) e^{iup} \left\langle x + \frac{u}{2} \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{u}{2} \right\rangle, \quad (4.12)$$

donde la función dentro de los paréntesis es una delta de Dirac [2], entonces

$$\mathcal{P}(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \int dx du \delta(q - x) e^{iup} \left\langle x + \frac{u}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{u}{2} \right\rangle, \quad (4.13)$$

Para llegar a la ecuación (4.1) utilizamos una propiedad de la función delta, que es la siguiente [2]

$$f(x_0) = \int dx \delta(x - x_0) f(x), \quad (4.14)$$

de esta manera encontramos la función de distribución de cuasiprobabilidad de Wigner dada por la ecuación (4.1) [I]

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int du e^{iup} \left\langle q + \frac{u}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{u}{2} \right\rangle. \quad (4.15)$$

La función de Wigner puede escribirse en forma alternativa como la transformada de Fourier de la función característica $C(\beta, \beta^*)$ [I,III,V,1]

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} C(\beta), \quad (4.16)$$

donde la función característica está dada por [1-5]

$$C(\beta) = Tr\{e^{\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}} \hat{\rho}\}. \quad (4.17)$$

La distribución de Wigner, siempre existe o se puede definir pero no siempre es positiva [I,V].

4.3. La Función de Distribución de Cuasiprobabilidad P de Glauber-Sudarshan

La función $P(\alpha)$ se conoce como la representación P o representación de estados coherentes, este nombre se debe a la representación del operador de

densidad $\hat{\rho}$ por medio de una representación diagonal de estados coherentes [V]. Esta representación fue introducida de manera independiente por Glauber y Sudarshan [II,3-4] y se escribe como:

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (4.18)$$

Para obtener la ecuación anterior escribimos al operador de densidad en términos de estados coherentes, multiplicando al operador de densidad $\hat{\rho}$ por izquierda y derecha por el operador unidad dado por la ecuación (3.56), para obtener la siguiente ecuación:

$$\hat{\rho} = \left(\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \right) \hat{\rho} \left(\frac{1}{\pi} \int |\beta\rangle \langle \beta| d^2\beta \right), \quad (4.19)$$

Esta ecuación se puede escribir como:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi^2} \int \int \langle \alpha | \hat{\rho} | \beta \rangle |\alpha\rangle \langle \beta| d^2\beta d^2\alpha. \quad (4.20)$$

El objetivo es escribir el operador de densidad usando una función que sólo dependa de los elementos de la diagonal principal [V], para esto es necesario determinar dicha función $P(\alpha)$ que permita escribir la ecuación anterior como [I,V]

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (4.21)$$

Recordemos que la función característica dada por la ecuación (4.17), puede ser escrita como [I]

$$C(\beta) = Tr\{\hat{\rho} e^{\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}}\}, \quad (4.22a)$$

$$C(\alpha) = Tr\{\hat{\rho} e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}\}, \quad (4.22b)$$

e introduciendo la ecuación (4.21) en términos de β en la ecuación (4.22b) tenemos que la función característica está en función de $P(\beta)$ [I]

$$C(\alpha) = \int P(\beta) Tr\{|\beta\rangle \langle \beta| e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}\} d^2\beta. \quad (4.23)$$

Dado que la traza es la suma de los elementos de la diagonal principal y es cíclica [IV], la ecuación anterior se puede escribir como

$$C(\alpha) = \int P(\beta) \langle \beta | e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} | \beta \rangle d^2 \beta. \quad (4.24)$$

De esta manera podemos ocupar la fórmula de Baker-Hausdorff dada por la ecuación (3.30), recordando también que los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ [II], la ecuación (4.24) se puede escribir como:

$$C(\alpha) e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} = \int P(\beta) e^{\alpha \beta^*} e^{-\alpha^* \beta} d^2 \beta. \quad (4.25)$$

Por último, si escribimos a α y a β como números complejos $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ y $\beta = \beta_r + i\beta_i$ se puede observar que la ecuación (4.25) es una transformada de Fourier con respecto a β_r y β_i , de esta manera podemos obtener la transformada inversa de Fourier con el objetivo de conocer $P(\beta)$ [I]

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int C(\alpha) e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\alpha \beta^*} e^{\alpha^* \beta} d^2 \alpha. \quad (4.26)$$

Utilizando la expresión de la función característica (4.22b) con la fórmula de Baker-Hausdorff (3.30) para poder escribir a (4.26) de la siguiente manera

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\alpha^* \beta - \alpha \beta^*} Tr\{\hat{\rho} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}\} d^2 \alpha. \quad (4.27)$$

Esta función es llamada función de distribución de cuasiprobabilidad de Glauber-Sudarshan [I,3-4].

4.4. La Función de Distribución de Cuasiprobabilidad Q de Husimi

La función Q de Husimi es una función alternativa para obtener los elementos de la diagonal de la matriz del operador de densidad para un estado coherente puro [II,V], esta función se expresa por la ecuación:

$$Q(\alpha) = \frac{\langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle}{\pi} \geq 0. \quad (4.28)$$

Se puede observar que la función es no negativa dado que el operador de densidad $\hat{\rho}$ es positivo [II]. También la función esta acotada por

$$Q(\alpha) \leq \frac{1}{\pi}. \quad (4.29)$$

Esta función puede escribirse alternativamente de la forma siguiente

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} Tr\{\hat{\rho} e^{-\beta^*\hat{a}} e^{\beta\hat{a}^\dagger}\}. \quad (4.30)$$

Para demostrar que la función de distribución de cuasiprobabilidad de Husimi se puede escribir de la manera anterior, partimos de la función característica (4.22b) utilizando la fórmula de Baker-Hausdorff, dada por la ecuación (3.30).

$$C(\alpha) = Tr\{\hat{\rho} e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}\} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \int d^2\gamma \langle \gamma | \hat{\rho} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} | \gamma \rangle. \quad (4.31)$$

Pero debido a que la traza es cíclica [IV], entonces podemos escribir la ecuación anterior como

$$C(\alpha) = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \int d^2\gamma \langle \gamma | e^{\alpha\hat{a}^\dagger} \hat{\rho} e^{-\alpha^*\hat{a}} | \gamma \rangle. \quad (4.32)$$

La ecuación (4.32) depende de estados coherentes, así, cumple con la propiedad descrita por la ecuación (3.39) y retomando (4.28) tenemos

$$\frac{1}{\pi} C(\alpha) e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} = \int d^2\gamma e^{-\alpha^*\gamma} e^{\alpha\gamma^*} Q(\gamma). \quad (4.33)$$

Esta ultima ecuación es una transformada de Fourier [I], por lo tanto para obtener a $Q(\alpha)$ calculamos la transformada inversa de Fourier del termino que se encuentra a la izquierda de esta igualdad

$$Q(\gamma) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha C(\alpha) e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{-\alpha^*\gamma} e^{\alpha\gamma^*}. \quad (4.34)$$

Y finalmente sustituyendo el valor de $C(\alpha)$ dado por la ecuación (4.22b) se obtiene la función de Husimi [I-II,V]

$$Q(\gamma) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha e^{\alpha^*\gamma - \alpha\gamma^*} Tr\{\hat{\rho} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\}. \quad (4.35)$$

4.5. La Función Generatriz de Distribución de Cuasiprobabilidad

Se puede usar una representación paramétrica más general, para agrupar la función W de Wigner, la función P de Glauber-Sudarshan y la función Q de Husimi. A esta función se le llama Función Generatriz de cuasiprobabilidades [I] y se define como

$$F(\alpha, s) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} C(\beta, s), \quad (4.36)$$

donde $C(\alpha, s)$ es la función característica de orden s y está dada por [I]

$$C(\beta, s) = Tr\{\hat{D}(\beta)\hat{\rho}\} e^{\left(\frac{s|\beta|^2}{2}\right)}, \quad (4.37)$$

y $\hat{D}(\beta)$ es el operador de desplazamiento de Glauber [I,II,V], $\hat{\rho}$ es el operador de densidad y s es el parametro que define la función de cuasiprobabilidad. Note que si $s = 0$ se obtiene la función de Wigner, si $s = 1$ se obtiene la función de Glauber-Sudarshan y para $s = -1$ se obtiene la función de Husimi [I].

Las funciones de cuasiprobabilidad tienen una característica muy peculiar, la cual consiste que al hacer la integración sobre una de su variables el resultado obtenido mediante esta integración es la probabilidad respecto a la otra variable [I].

Como ejemplo utilizaremos la función de Wigner, escrita en la ecuación (4.15) y la integraremos respecto a p , de esta manera el resultado será la probabilidad respecto a q [I]

$$\int dp W(q, p) = \int \left(\frac{1}{2\pi} \int dp e^{iup} \right) du \left\langle q + \frac{u}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{u}{2} \right\rangle. \quad (4.38)$$

De la ecuación (4.38) se puede observar que la integral entre paréntesis es una delta de Dirac, es decir

$$\int dpW(q, p) = \int du\delta(-u) \left\langle q + \frac{u}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{u}{2} \right\rangle. \quad (4.39)$$

Para realizar la integración solo se evalúa en cero a la función que multiplica a la delta, es decir ocupamos la ecuación (4.14), a partir de lo cual obtenemos

$$\int dpW(q, p) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle. \quad (4.40)$$

Como $\hat{\rho}$ es el operador de densidad de un estado arbitrario $|\psi\rangle$, el cual se puede escribir como

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (4.41)$$

Sustituyendo la ecuación (4.41) en (4.40), tenemos

$$\int dpW(q, p) = |\langle q | \psi \rangle|^2 = P(q). \quad (4.42)$$

Podemos observar que al integrar la función de Wigner con respecto a la variable p obtenemos una función de probabilidad con respecto a la variable q [I].

Referencias

- [1] Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [2] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley, (1968).
- [3] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [4] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).

Capítulo 5

Probabilidad de Fase Obtenida Mediante Funciones de Distribución de Cuasiprobabilidad

5.1. Introducción

En esta parte del trabajo se calcula la probabilidad de fase para un estado coherente y posteriormente se encuentra la función generatriz de distribución de cuasiprobabilidad para el mismo estado coherente, esta última se obtiene al integrar sobre r a la función generatriz de distribución de cuasiprobabilidad y así solo considerar la parte angular.

El resultado de esta integración depende del parámetro s . Posteriormente el parámetro s fue encontrado para cada γ , propuesta usando el error cuadrático medio entre la probabilidad de fase de un estado coherente y la integración antes mencionada, estos valores son calculados y graficados para finalmente encontrar una función $s(\gamma)$ que permite conocer el parámetro s para cada estado coherente.

5.2. Cálculo de la Probabilidad de Fase para un Estado Coherente

Un estado coherente puede ser expresado en términos de estados de número, como se mostró en la ecuación (3.37) [II]

$$|\gamma\rangle = e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}} \sum_n \frac{\gamma^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} |n\rangle. \quad (5.1)$$

Por otro lado, los eigen-estados $|\theta\rangle$ del operador de fase se pueden expresar como una suma de estados de número [II,V]

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\theta} |m\rangle. \quad (5.2)$$

Con esto, podemos calcular la probabilidad de fase de un estado coherente y se obtiene integrando en el rango $-\pi < \theta < \pi$ para un estado coherente $|\gamma\rangle$ y esta probabilidad está dada por [II]

$$P_0(\theta) = |\langle\theta|\gamma\rangle|^2 = \langle\theta|\gamma\rangle\langle\theta|\gamma\rangle^*. \quad (5.3)$$

Para calcular esta probabilidad, primero calcularemos $\langle\theta|\gamma\rangle$, usando las ecuaciones (5.1) y (5.2) obtenemos

$$\langle\theta|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}} \sum_n \frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}} e^{in\theta}. \quad (5.4)$$

De esta manera la probabilidad de fase para un estado coherente es

$$P_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma^2} \sum_{nm} \frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}} \frac{\gamma^m}{\sqrt{m!}} e^{i(n-m)\theta}. \quad (5.5)$$

En la figura (5.1) mostramos una imagen donde se gráfica la probabilidad de fase obtenida mediante la ecuación (5.5) para tres diferentes valores de γ que son 1, 2 y 3 representadas por la gráfica roja, azul y negra respectivamente. Las gráficas están normalizadas y se realizaron con ayuda de MATLAB 2011.

Se puede observar que la probabilidad de fase de un estado coherente es muy parecida a una distribución normal o de Gauss la cual está centrada en el origen y cuanto mayor sea el valor de γ la distribución se asemeja a una delta de Dirac.

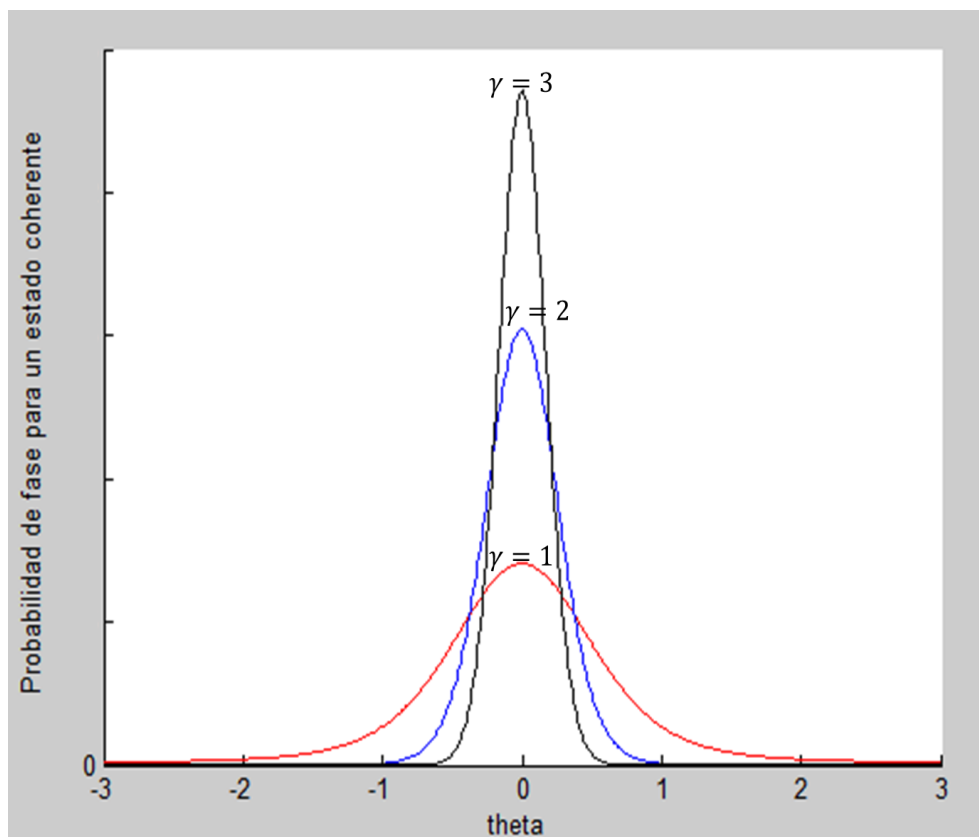


Figura 5.1: Probabilidad de fase para un estado coherente considerando tres diferentes valores de γ que son 1, 2 y 3.

5.3. Cálculo de la Función Generatriz de Distribución de Cuasiprobabilidad para un Estado Coherente

En esta sección, partimos de la función generatriz de distribución de cuasiprobabilidades dada por la ecuación (4.36), que está dada por: [I]

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta \text{tr}\{\hat{D}(\beta)\hat{\rho}\} e^{\frac{s|\beta|^2}{2}} e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}. \quad (5.6)$$

Como se observa, esta ecuación depende de un parámetro s , el cual se determinará en la siguiente sección.

En esta parte del trabajo, nos interesa obtener el resultado de la integral

dada por la ecuación (5.2), para el caso en que el operador de densidad se expresa en términos de estados coherente

$$\hat{\rho} = |\gamma\rangle\langle\gamma|. \quad (5.7)$$

Para calcular la función de distribución de cuasiprobabilidad, empezaremos por determinar la función característica donde, el operador de densidad está dado por la ecuación (5.7)

$$\text{tr}\{\hat{D}(\beta)\hat{\rho}\} = \sum_n \langle n|\hat{D}(\beta)|\gamma\rangle\langle\gamma|n\rangle = \langle\gamma|\hat{D}(\beta)\hat{D}(\gamma)|0\rangle. \quad (5.8)$$

Utilizando las propiedades del operador de desplazamiento, dadas por la ecuación (3.40) y la ecuación (3.48), se sigue que la ecuación anterior se puede escribir como

$$\text{tr}\{\hat{D}(\beta)\hat{\rho}\} = e^{i\text{Im}\{\beta\gamma^*\} - \frac{1}{2}(|\beta+\gamma|^2 + |\gamma|^2) + (\beta+\gamma)\gamma^*}. \quad (5.9)$$

De esta manera la integral de la función generatriz de cuasiprobabilidades para un estado coherente está dada por

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta e^{i\text{Im}\{\beta\gamma^*\} - \frac{1}{2}(|\beta+\gamma|^2 + |\gamma|^2) + (\beta+\gamma)\gamma^* + \frac{s|\beta|^2}{2} + \alpha\beta^* - \alpha^*\beta}. \quad (5.10)$$

Simplificando el exponente de la ecuación anterior, obtenemos

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta e^{-|\beta|^2(\frac{1-s}{2}) + \beta(\gamma^* - \alpha^*) + \beta^*(-\gamma + \alpha)}. \quad (5.11)$$

Esta ecuación se puede resolver de por dos métodos diferentes y en ambas utilizando un cambio de variable para β . Con el primer método se hace la consideración que $\beta = u + iv$ donde $d^2\beta$ es la multiplicación del diferencial de la parte real por el diferencial de la parte imaginaria, es decir $d^2\beta = dudv$, de esta manera se obtiene la siguiente integral

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dudve^{-c_0(u - \frac{c_1}{2c_0})^2 - c_0(v - \frac{c_2}{2c_0})^2 + \frac{c_1^2}{4c_0} + \frac{c_2^2}{4c_0}}, \quad (5.12a)$$

donde

$$c_0 = \left(\frac{1-s}{2}\right), \quad (5.12b)$$

$$c_1 = \gamma^* - \alpha^* - \gamma + \alpha, \quad (5.12c)$$

$$c_2 = i(\gamma^* - \alpha^* + \gamma - \alpha). \quad (5.12d)$$

Para que la integral dada por la ecuación (5.12a) converja se tiene que hacer la consideración $c_0 > 0$ o expresado de otra forma $s < 1$. Esta integral es de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$; utilizando esta propiedad, la función generatriz de cuasiprobabilidades para un estado coherente está dada de la siguiente manera

$$F(s, \alpha) = \frac{2}{1-s} e^{\frac{-2}{(1-s)}|\gamma-\alpha|^2}. \quad (5.13)$$

Otro método de resolver la integral, dada por la ecuación (5.11), es utilizando coordenadas polares. Para este caso, $\beta = re^{i\theta}$ y su diferencial es $d^2\beta = r dr d\theta$. Integrando en términos de r y θ , la ecuación (5.11) se escribe como:

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int \int r dr d\theta e^{-r^2 c_1 + r e^{i\theta} c_2 + r e^{-i\theta} c_3}, \quad (5.14a)$$

donde

$$c_1 = \frac{1-s}{2}, \quad (5.14b)$$

$$c_2 = \gamma^* - \alpha^*, \quad (5.14c)$$

$$c_3 = -\gamma + \alpha. \quad (5.14d)$$

Para resolver la ecuación (5.14a), se tiene que hacer una expansión en serie de $e^{r e^{i\theta} c_2}$ y de $e^{r e^{-i\theta} c_3}$ para llegar a la siguiente integral

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int r dr e^{-r^2 c_1} \sum_{n,m} \frac{(c_2 r)^n}{n!} \frac{(c_3 r)^m}{m!} \int d\theta e^{i(n-m)\theta}. \quad (5.15)$$

Donde se utilizó la propiedad

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{n,m}. \quad (5.16)$$

De esta manera, podemos reducir la integral dada por la ecuación (5.14a), es decir ahora la integración sólo se hace con respecto de r

$$F(s, \alpha) = 2 \sum_n^{\infty} \frac{(c_2 c_3)^n}{(n!)^2} \int dr e^{-r^2 c_1} r^{2n+1}. \quad (5.17)$$

En la integración anterior se hace la restricción, $c_1 > 0$. Es decir $s < 1$, de esta manera la integral converge. Si integramos por partes y hacemos un cambio de variable en la ecuación (5.17), se obtiene

$$F(s, \alpha) = 2 \sum_n^{\infty} \frac{(c_2 c_3)^n}{(n!)^2} \frac{n}{2(c_1)^2} \left(\frac{1}{c_1}\right)^{(n-1)} \int du e^{-u} (u)^{(n-1)}, \quad (5.18)$$

donde se utilizó la definición de la función gamma, dada por la ecuación (3.55). De esta manera la integral se reduce a

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{c_1} \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{c_2 c_3}{c_1}\right)^{(n)}. \quad (5.19)$$

Se observa que la sumatoria de la derecha es una exponencial. Reescribiendo así la ecuación (5.19) y sustituyendo los valores de c_1 , c_2 y c_3 , dados por la ecuación (5.14b, c y d) se tiene

$$F(s, \alpha) = \frac{2}{1-s} e^{\frac{-2}{(1-s)} |\gamma-\alpha|^2}, \quad (5.20)$$

esta ecuación es exactamente la misma que la ecuación (5.13).

Para encontrar la probabilidad de fase para un estado coherente es necesario integrar la función generatriz de distribución de cuasiprobabilidad dada por la ecuación (5.20), para un estado coherente sobre r . Para esto primero es necesario escribir esta función en coordenadas polares, donde $\alpha = r e^{i\theta}$, de esta manera dependerá explícitamente de r y θ . Posteriormente se realizará una integración sobre r para obtener una función que dependa de θ y del

parámetro s , la cual será una función que se asocia con la probabilidad de fase de un estado coherente, mediante el parámetro s .

De esta manera escribimos la función generatriz de cuasiprobabilidades de un estado coherente en su forma polar, donde $\alpha = re^{i\theta}$ y hacemos una integración sobre el espacio radial, es decir

$$P(\theta, s) = \int_r r dr F(s, r, \theta) = \frac{2}{1-s} \int_r r dr e^{\frac{-2}{(1-s)}|\gamma - re^{i\theta}|^2}. \quad (5.21)$$

Para calcular la integral dada por la ecuación (5.21), la escribimos como $\int e^{(x-c)^2} x dx$. Luego se sigue que

$$P(\theta, s) = A \int_0^\infty r dr e^{-\frac{2}{(1-s)}(r - \frac{c_0}{2})^2}, \quad (5.22a)$$

donde

$$A = \frac{2e^{\frac{-2}{(1-s)}(c_1^2 - \frac{c_0^2}{4})}}{1-s}, \quad (5.22b)$$

$$c_0 = \gamma e^{-i\theta} + \gamma^* e^{i\theta}, \quad (5.22c)$$

$$c_1^2 = |\gamma|^2. \quad (5.22d)$$

Al integrar la ecuación (5.22a) se llega a la siguiente expresión

$$P(\theta, s) = \frac{(1-s)}{4} A e^{-\frac{2}{(1-s)}\frac{c_0^2}{4}} + A \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{\pi(1-s)}{4}} + A \frac{c_0}{2} \int_{-\frac{c_0}{2}}^0 du e^{-\frac{2}{(1-s)}u^2}. \quad (5.23)$$

Para poder realizar la última integral del lado derecho de esta ecuación de forma analítica, se propuso como una serie de potencias $e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}$, de lo cual se obtuvo

$$P(\theta, s) = A(g_0(s) + \frac{c_0}{2}g_1(s) + (\frac{c_0}{2})^2g_2(s)), \quad (5.24a)$$

donde

$$g_0(s) = \frac{(1-s)}{4} e^{-\frac{2}{(1-s)}\frac{c_0^2}{4}}, \quad (5.24b)$$

$$g_1(s) = \sqrt{\frac{\pi(1-s)}{4}}, \quad (5.24c)$$

$$g_2(s) = \sum_n \frac{\left(\frac{-2}{(1-s)}\right)^n \left(\frac{c_0}{2}\right)^{2n}}{n!(2n+1)}. \quad (5.24d)$$

Sustituyendo los valores de A , c_0 y c_1 , dados por la ecuación (5.22b, c y d), se obtiene lo siguiente

$$P(\theta, s) = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{(1-s)}\gamma^2} + \gamma \cos(\theta) e^{\frac{-2\gamma^2}{(1-s)}(\sin(\theta))^2} (h(\theta, s)), \quad (5.25a)$$

donde

$$h(\theta, s) = \sqrt{\frac{2\pi}{(1-s)}} - \sum_n \frac{\left(\frac{-2}{(1-s)}\right)^{n+1} \gamma^{2n+1} (\cos(\theta))^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (5.25b)$$

Se observa que la función $P(\theta, s)$ depende del parámetro s , el cual se encontrará en la sección siguiente, para hacer la relación entre las ecuaciones (5.5) y (5.25) y así hallar una función $s(\gamma)$ que nos permita obtener el valor de s para cualquier γ .

5.4. Cálculo del Parámetro s que permite obtener la Probabilidad de Fase a partir de la Función Generatriz de Distribución de Cuasiprobabilidad

En esta sección se describe el método para obtener la función $s(\gamma)$ que permite igualar la ecuación (5.25) con la ecuación (5.5), aquí lo notable es que la función $s(\gamma)$ depende del parámetro γ y se encontró calculando el error cuadrático medio entre $P(\theta, s)$ y $P_0(\theta)$, la aproximación de s fue alcanzada con un error de 10^{-3} .

Las funciones se graficaron con ayuda del paquete Mathcad 12.0 y el cálculo del parámetro s con Matlab 2011, con el primer paquete mencionado se obtuvo el error cuadrático medio, mediante un algoritmo diseñado para el

desarrollo de este trabajo.

Los valores de s obtenidos para algunas γ que consideramos son los siguientes

γ	s
0.001	-0.56
0.2	-0.557
0.5	-0.488
1	-0.323
1.5	-0.184
2	-0.099
2.5	-0.055
3	-0.034
3.5	-0.023
4	-0.017
4.5	-0.013
5	-0.011
5.5	-0.009
6	-0.007
7	-0.005

Tabla 5.1: Valores de γ y su correspondiente s .

Se hicieron seis gráficas de las funciones $P(\theta, s)$ y $P_0(\theta)$ descritas por las ecuaciones (5.5) y (5.25), donde θ está en el rango $-\pi < \theta < \pi$. Estas gráficas corresponden a las funciones de cuasiprobabilidad para estados coherentes las cuales están normalizadas, donde los valores de γ son $\gamma = 0,001$, $\gamma = 0,5$, $\gamma = 1$, $\gamma = 2$, $\gamma = 4$ y $\gamma = 7$, de estas se muestra el mejor ajuste obtenido y es importante mencionar que se tomo la siguiente convención.

La gráfica de color azul $P_0(\theta)$, describe la ecuación (5.5), la cual está dada por

$$P_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma^2} \sum_{nm} \frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}} \frac{\gamma^m}{\sqrt{m!}} e^{i(n-m)\theta}, \quad (5.26)$$

Mientras que para la gráfica de color rojo $P(\theta)$, describe la siguiente ecuación

$$P(\theta, s) = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{(1-s)}\gamma^2} + \gamma \cos(\theta) e^{\frac{-2\gamma^2}{(1-s)}(\sin(\theta))^2} h(\theta, s), \quad (5.27a)$$

donde

$$h(\theta, s) = \sqrt{\frac{2\pi}{(1-s)}} - \sum_n \frac{\left(\frac{-2}{(1-s)}\right)^{n+1} \gamma^{2n+1} (\cos(\theta))^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (5.27b)$$

En la figura 5.2 cuando $\gamma = 0,001$ se obtuvo que $s = -0,568$, en esta gráfica en especial se puede observar que el ajuste coincide, debido a que en las gráficas se logra apreciar sólo una gráfica de color azul, esto se debe a que son muy parecidas y por lo cual tienden a traslaparse. Cabe aclarar que en esta gráfica y en lo que resta del trabajo, las gráficas están normalizadas.

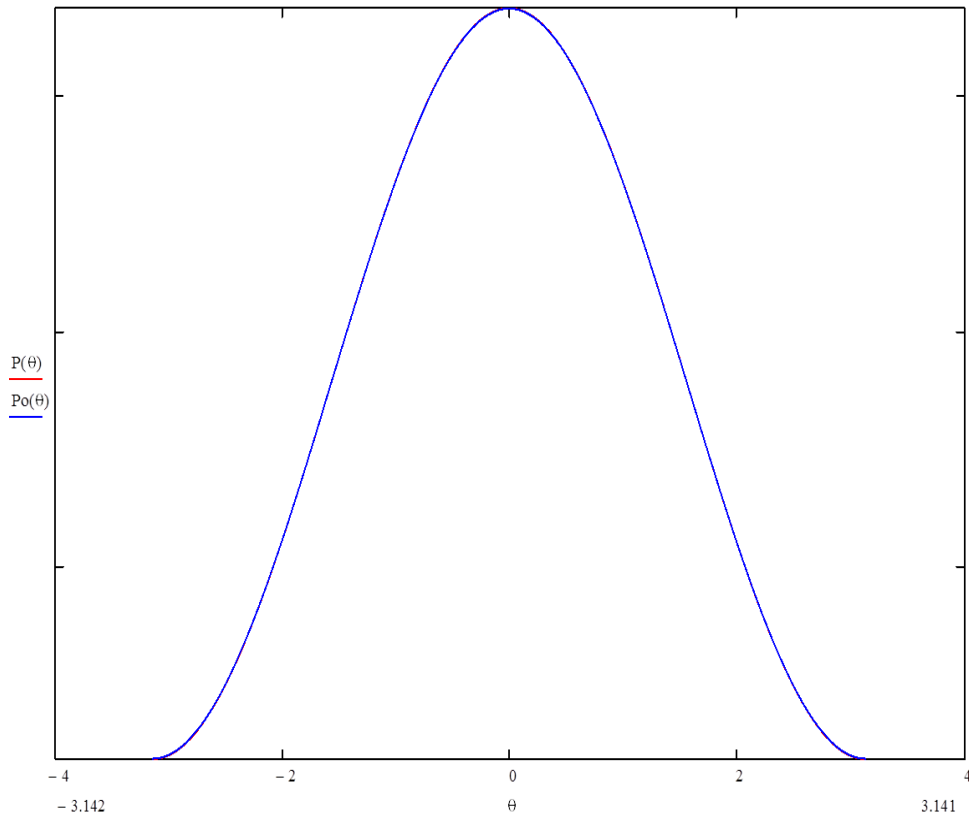


Figura 5.2: Distribuciones de probabilidad de fase para el estado coherente donde $\gamma = 0,001$ y $s = -0,568$.

El segundo caso calculado para $\gamma = 0,5$ se obtuvo que el valor más adecuado para s es $s = -0,488$, la gráfica obtenida mediante $P(\theta)$ es casi idéntica a $P_0(\theta)$, es decir la ecuación (5.25) es muy aproximada a la ecuación (5.5) con los valores de γ y s mencionados, estas distribuciones difieren muy poco en el centro y en los extremos, con este valor de γ y s se obtuvo lo siguiente.

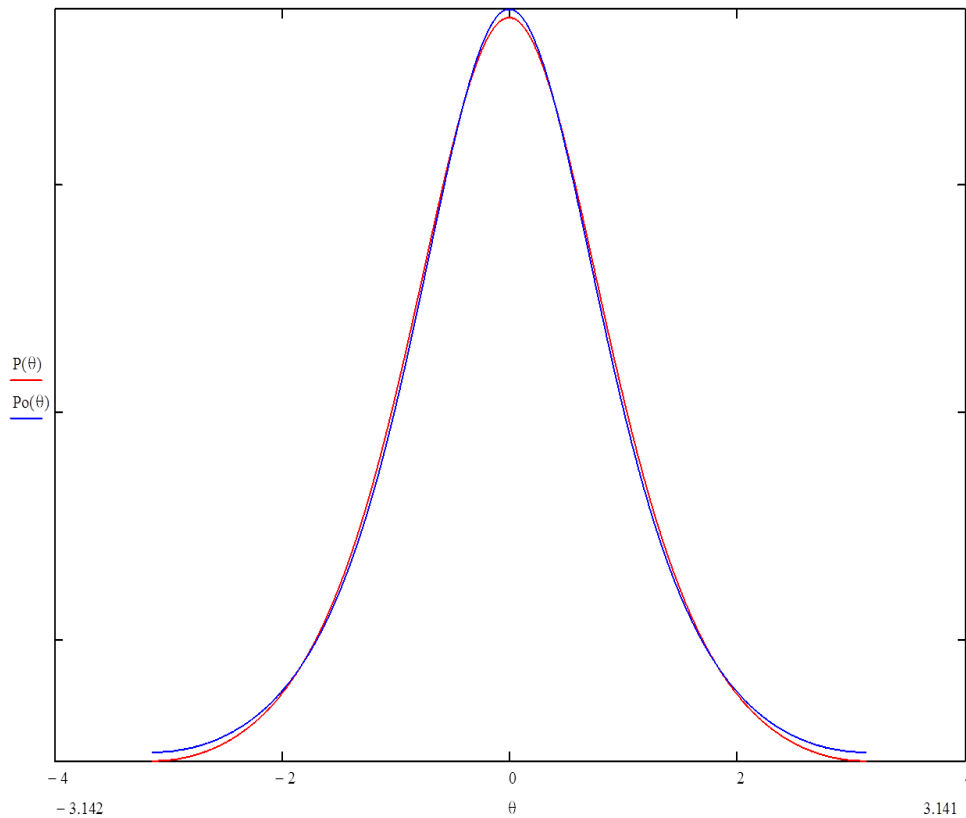


Figura 5.3: Distribuciones de probabilidad de fase para el estado coherente donde $\gamma = 0,5$ y $s = -0,488$.

En el tercer caso cuando $\gamma = 1$, se encontró que $s = -0,323$, con este valor se obtuvo una buena aproximación, muy parecida al caso anterior con un pequeño desfase entre las gráficas en el centro y en los extremos, con este valor de γ y s se obtuvo lo siguiente.

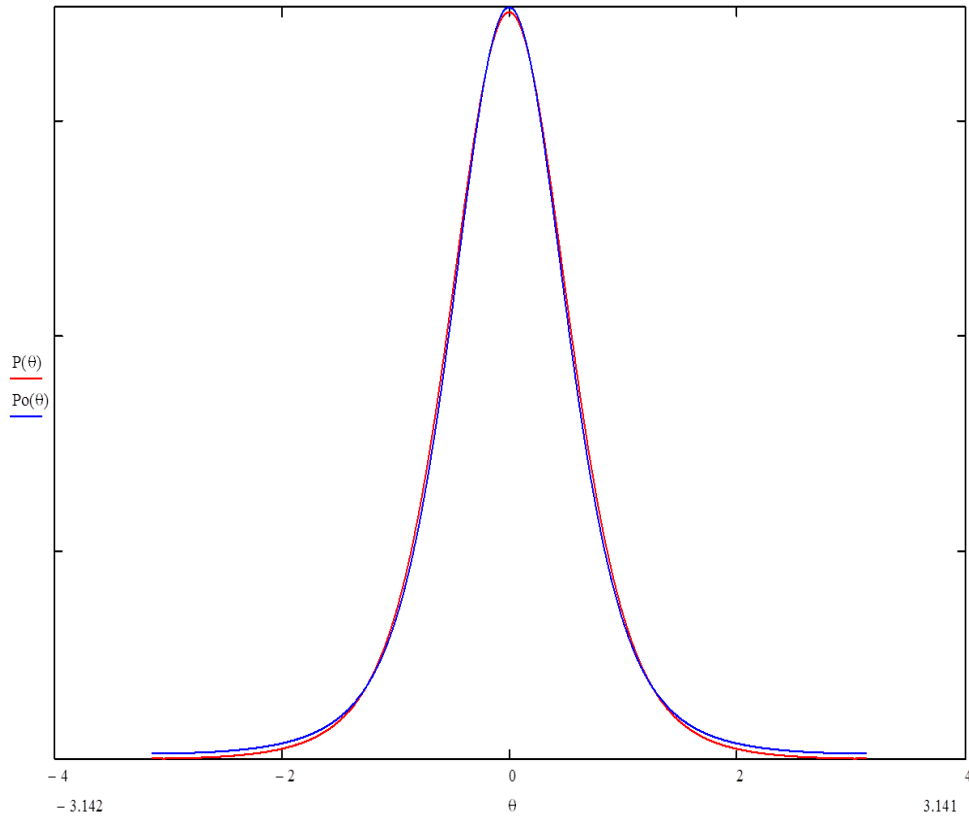


Figura 5.4: Distribuciones de probabilidad de fase para el estado coherente donde $\gamma = 1$ y $s = -0,323$.

En el cuarto caso donde $\gamma = 2$, se encontró que $s = -0,099$, con este valor se obtuvo una muy buena aproximación de $P_0(\theta)$ y $P(\theta)$ y con este valor de γ y s se obtuvo lo siguiente.

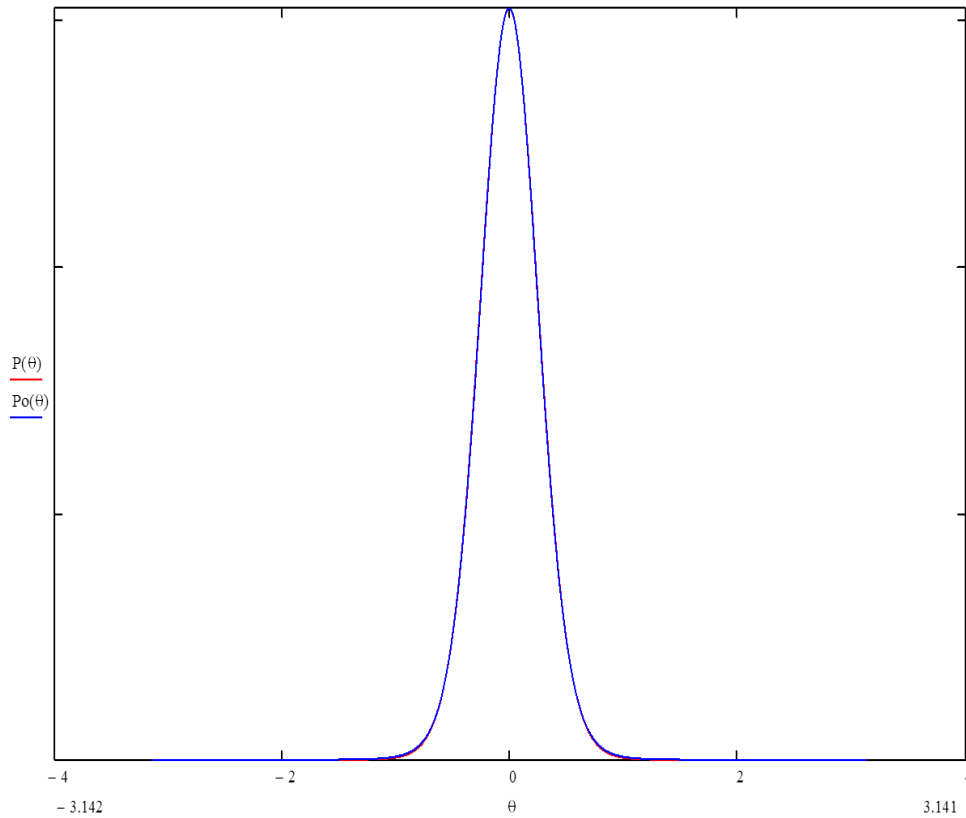


Figura 5.5: Distribuciones de probabilidad de fase para el estado coherente $\gamma = 2$ y $s = -0,099$.

Para el quinto caso donde $\gamma = 4$, se encontró que $s = -0,017$, con este valor se obtuvo una muy buena aproximación mientras que el ancho se redujo para ambas gráficas ($P_0(\theta)$ y $P(\theta)$) y con este valor de γ y s se obtuvo lo siguiente.

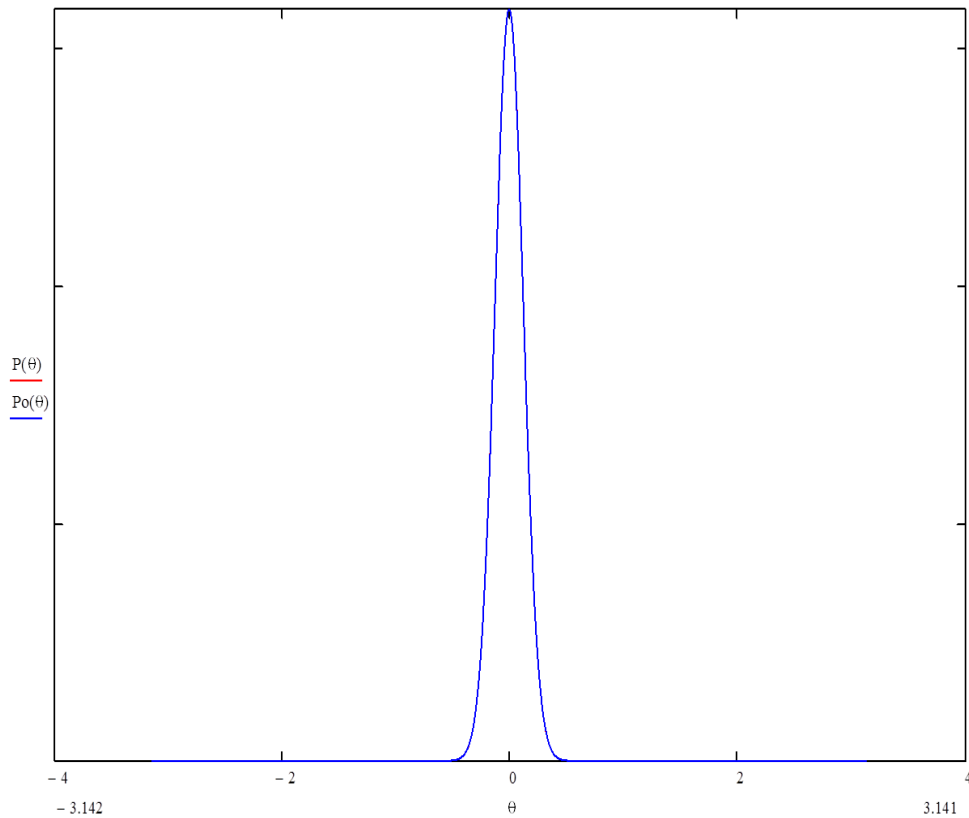


Figura 5.6: Distribuciones de probabilidad de fase para el estado coherente $\gamma = 4$ y $s = -0,017$.

Por último, para el sexto caso donde $\gamma = 7$, se encontró que $s = -0,005$ para el cual el error cuadrático medio fue muy cercano a cero. En la imagen mostrada abajo se logra apreciar que el ancho de la gráfica se redujo y con este valor de γ y s se obtuvo la siguiente gráfica.

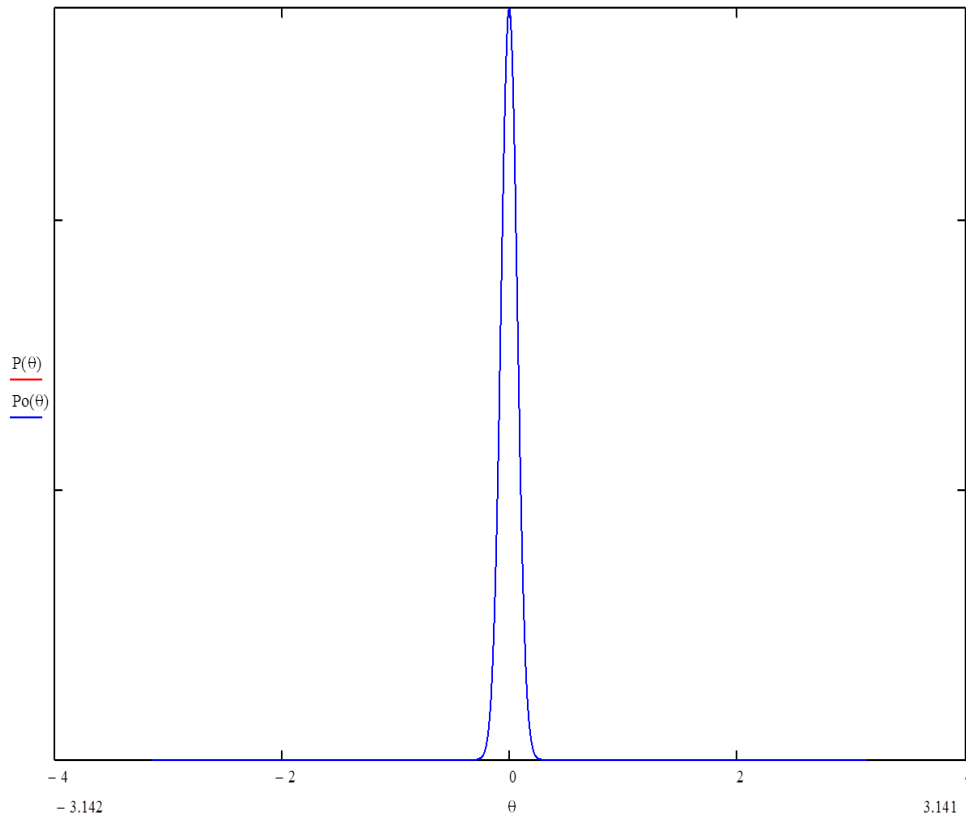


Figura 5.7: Distribuciones de probabilidad de fase para el estado coherente $\gamma = 7$ y $s = -0,005$.

Mediante la graficación de todos los datos obtenidos γ vs s se logró observar que s se comporta de una forma parecida a una exponencial. Para encontrar una función $s = s(\gamma)$ se propuso que s tiene la forma

$$s = \frac{A}{e^{C\gamma^2} + B}. \quad (5.28)$$

Para encontrar las constantes A , B y C de la función s , se utilizaron tres coordenadas para formar un sistema de tres ecuaciones no lineales con tres incógnitas (A , B y C), las coordenadas tomadas para formar este sistema de

ecuaciones son: $(\gamma = 0,001, s = -0,56)$, $(\gamma = 1, s = -0,323)$ y $(\gamma = 3, s = -0,034)$, resolviendo el sistema de tres ecuaciones se encontró que s es

$$s = \frac{-0,154}{e^{0,184\gamma^2} - 0,7249}. \quad (5.29)$$

La función obtenida nos da una buena descripción para s ya que se ajusta muy bien con los puntos obtenidos.

En la figura 5.8 mostramos una gráfica donde podemos apreciar los puntos obtenidos y la función $s(\gamma)$, la gráfica se obtuvo con ayuda de Matlab 15. En esta imagen podemos observar un muy buen ajuste debido a que las cruces de color rojo muestran los diferentes puntos obtenidos con el programa Mathcad 15, mientras que la línea continua de color negro muestra la función $s(\gamma)$ obtenida y dada por la ecuación (5.29).

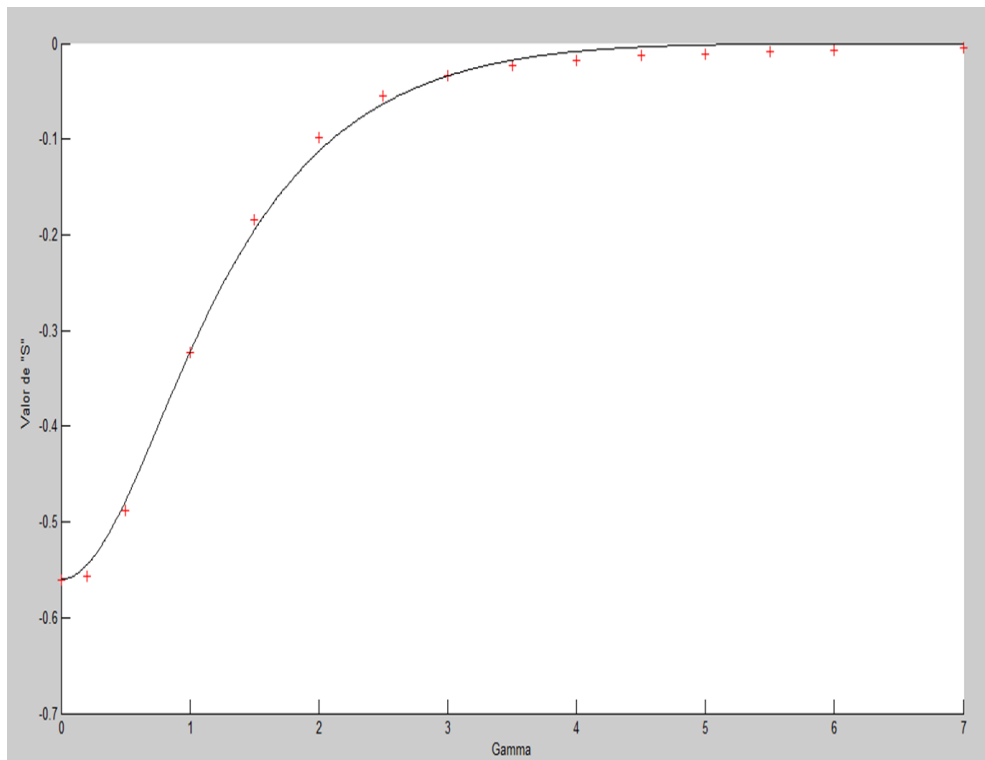


Figura 5.8: Gráfica de la función $s = s(\gamma)$ en el rango de $0 < \gamma < 7$ y valores de s obtenidos con ayuda del error cuadrático medio al aproximar las ecuaciones (5.5) y (5.25).

Con lo mencionado en el párrafo anterior, podemos finalmente escribir la probabilidad de fase para un estado coherente, obtenida mediante la función generatriz de cuasiprobabilidades. Esta probabilidad de fase se puede expresar como una función que solo depende de θ , es decir, $P(\theta)$. A diferencia de la ecuación (5.27), la cual depende de θ y a su vez de un parámetro s , es decir, $P(\theta, s)$.

Esta probabilidad de fase se obtiene sustituyendo la ecuación (5.29) en las ecuaciones (5.27a) y (5.27b). Cabe mencionar que esta probabilidad de fase es el objetivo de la tesis y además representa un método alternativo para obtener la probabilidad de fase para un estado coherente, el resultado es el siguiente:

$$P(\theta) = \frac{1}{2} e^{\frac{-2e^{0,184\gamma^2} + 1,45}{e^{0,184\gamma^2} - 0,571} \gamma^2} + h_0(\theta) (h_1(\theta) - h_2(\theta)), \quad (5.30a)$$

donde

$$h_0(\theta) = \gamma \cos(\theta) e^{\frac{-2e^{0,184\gamma^2} + 1,45}{e^{0,184\gamma^2} - 0,571} (\gamma^2 \sin^2(\theta))}, \quad (5.30b)$$

$$h_1(\theta) = \sqrt{\frac{\pi(e^{0,184\gamma^2} - 0,571)}{-4e^{0,184\gamma^2} + 2,9}}, \quad (5.30c)$$

$$h_2(\theta) = \sum_n \frac{\left(\frac{-2e^{0,184\gamma^2} + 1,45}{e^{0,184\gamma^2} - 0,571}\right)^{n+1} (\gamma \cos(\theta))^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \quad (5.30d)$$

donde γ representa el estado coherente.

A continuación, en las figuras (5.9), (5.10) y (5.11), se logra apreciar dos gráficas en cada una, las cuales describen la probabilidad de fase para un estado coherente. La gráfica de color rojo $P_0(\theta)$ representa la ecuación (5.5) y la gráfica de color azul $P(\theta)$ representa las ecuaciones (5.30a), (5.30b), (5.30c) y (5.30d), que es el resultado de obtener la probabilidad de fase para un estado coherente mediante la función generatriz de cuasiprobabilidad.

En los tres casos las gráficas se encuentran normalizadas. Los valores de γ fueron propuestos y son 1, 3 y 5. Para el estado coherente $\gamma = 3$ y $\gamma = 5$ se logra apreciar una mejor aproximación que en el estado coherente $\gamma = 1$.

Probabilidad de fase para el estado coherente $\gamma = 1$

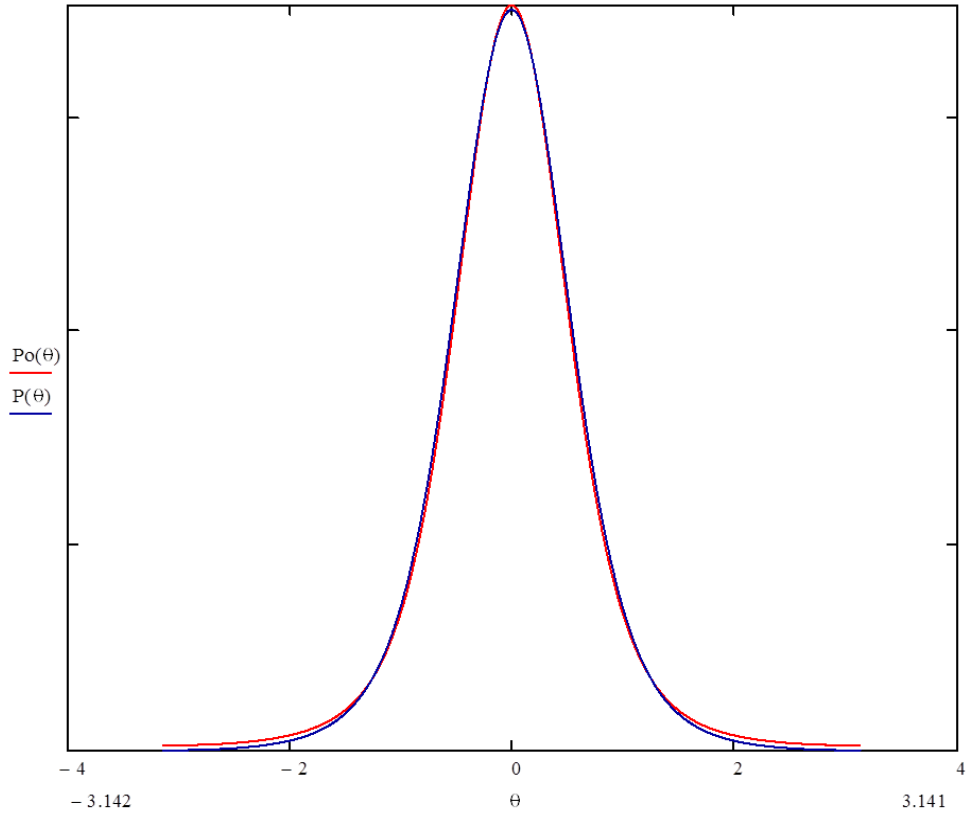


Figura 5.9: Probabilidad de fase para el estado coherentes $\gamma = 1$ obtenido de las ecuaciones (5.5) y (5.30).

Probabilidad de fase para el estado coherente $\gamma = 3$

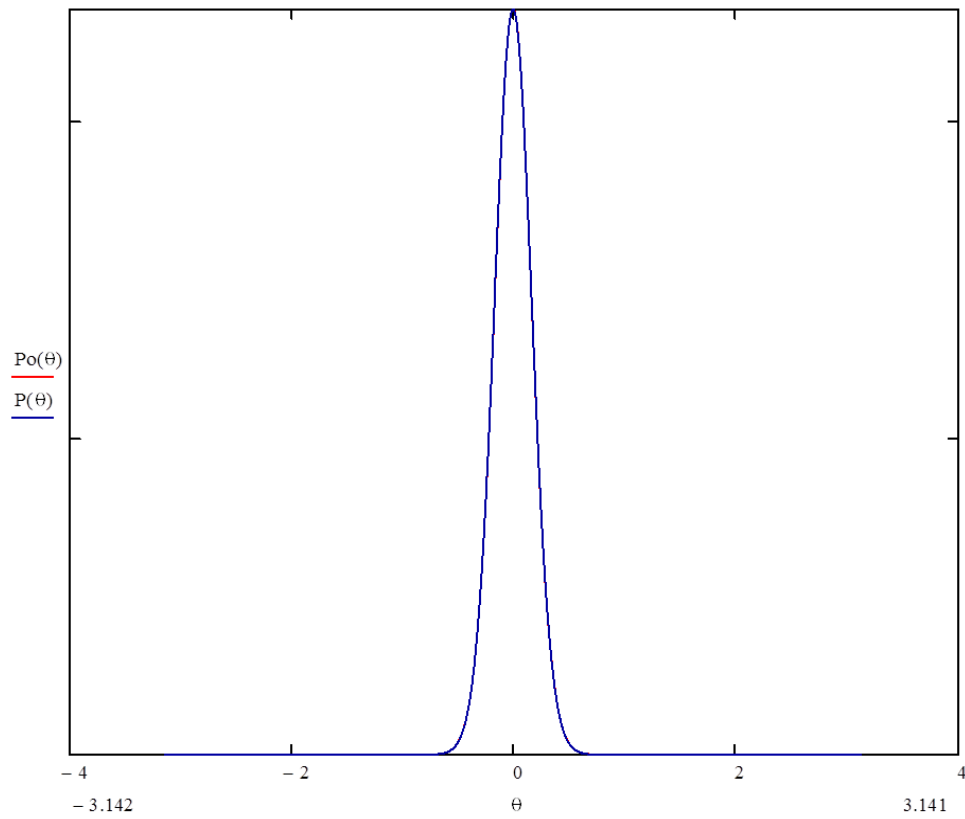


Figura 5.10: Probabilidad de fase para el estado coherentes $\gamma = 3$ obtenido de las ecuaciones (5.5) y (5.30).

Probabilidad de fase para el estado coherente $\gamma = 5$

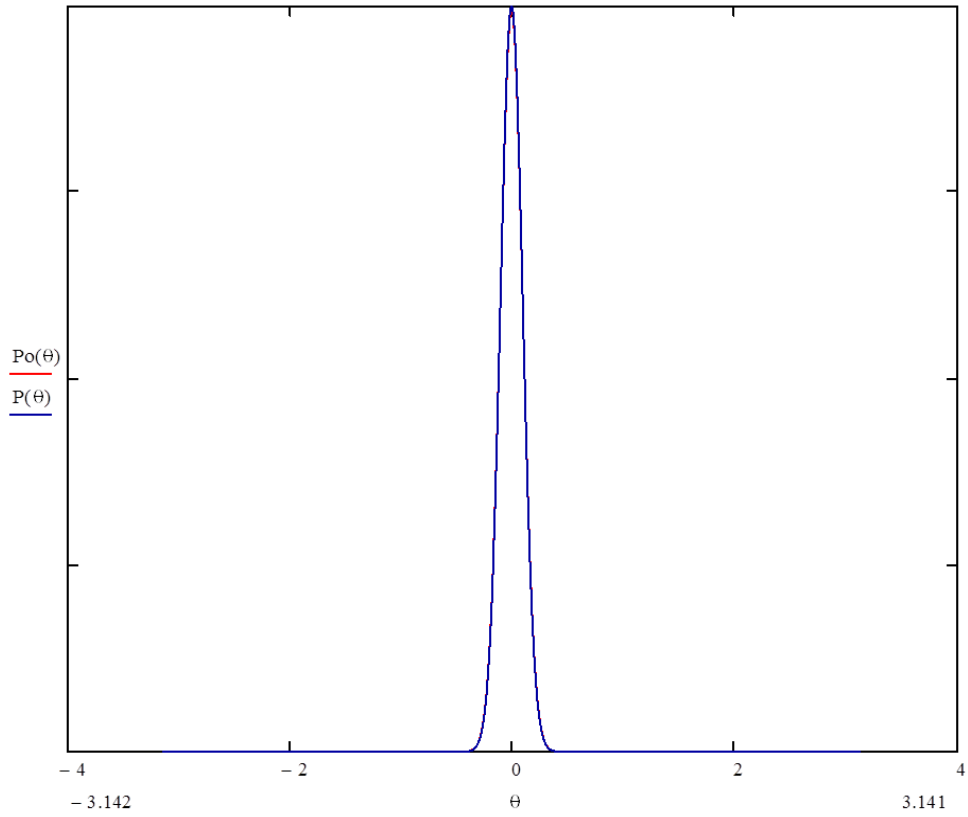


Figura 5.11: Probabilidad de fase para el estado coherentes $\gamma = 5$ obtenido de las ecuaciones (5.5) y (5.30).

Capítulo 6

Conclusiones

El objetivo de esta tesis se cumplió satisfactoriamente. Se calculó la función $s(\gamma)$ que permite calcular la probabilidad de fase para cualquier estado coherente mediante la función generatriz de cuasiprobabilidad. El resultado obtenido es una forma alternativa de calcular la probabilidad de fase de un estado coherente y coincide con el reportado en la literatura, que se obtiene a partir de los iegen-estados del operador de fase.

Como posible trabajo a futuro sobre este tema podría ser encontrar la probabilidad de fase para cualquier estado mediante la función generatriz de cuasiprobabilidades[V].

Referencias Generales

- [I] H. M. Moya-Cessa and F. Soto-Eguibar, *Introduction to Quantum Optics*. Rinton Press, (2011).
- [II] D. F. Walls and G.J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, (1994).
- [III] P. Meystre and M. Sargent, *Elements of Quantum Optics*, Springer, (2007).
- [IV] J.J Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Adison Wesley, (1985).
- [V] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, cambridge University, (1997).