



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

“CURVAS Y SUPERFICIES B-SPLINES”

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

NANCY MARTÍNEZ LUNA

DIRECTOR DE TESIS:

M. C. LUZ DEL CARMEN ÁLVAREZ MARÍN

CO-DIRECTOR DE TESIS:

DR. CUAUHTÉMOC H. CASTAÑEDA ROLDÁN

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MARZO DE 2015

*A mis padres que a pesar de las adversidades siempre me dieron su apoyo incondicional.
Los amo mucho.*

Agradecimientos

A mis padres por ser un ejemplo de lucha y superación incansable. Gracias por su comprensión, confianza, amor y consejos que me motivaron a seguir adelante. Mil palabras no bastarían para agradecerles su apoyo ya que he sido testigo de los grandes esfuerzos y sacrificios que realizan día a día para salir adelante. Gracias también a mis hermanos por el apoyo y cariño que siempre me han demostrado.

A mis amigas, quienes durante años han sido mis confidentes, hermanas y un gran apoyo en todo momento. Gracias por todo amigas mías, las quiero mucho.

A Andrés, por brindarme su amor, comprensión y apoyo incondicional. Gracias por motivarme a ser cada día mejor, eres una persona muy especial en mi vida. Te amo mucho.

A mis asesores M.C. Luz del Carmen Álvarez Marín y Dr. Cuauhtémoc H. Castañeda Roldán por el apoyo otorgado durante el desarrollo de esta investigación.

A mis sinodales, el M.C. Adolfo Maceda Méndez, M.C. Juan Luis Hernández y el Dr. José Margarito Hernández Morales por sus correcciones y sugerencias realizadas durante el desarrollo de este trabajo de tesis.

A mis amigos y compañeros que conocí durante mi estancia en la UTM. Gracias por su amistad y todos los gratos momentos que pasamos juntos.

Índice general

Agradecimientos	V
Introducción	1
1. Curvas de Bézier	3
1.1. Polinomios de Bernstein	3
1.2. Propiedades de los polinomios de Bernstein	4
1.3. Curvas de Bézier simples	7
1.3.1. Propiedades de las curvas de Bézier simples	8
1.4. Conversión entre representaciones	11
1.4.1. Conversión de potencias a Bernstein	12
1.4.2. Conversión de Bernstein a potencias	14
1.5. Técnicas constructivas para curvas de Bézier simples	16
1.5.1. Elevación de grado	16
1.5.2. Reducción de grado	18
1.6. Curvas de Bézier compuestas	20
1.7. Algoritmo de De Casteljaou	24
1.8. Subdivisión	24
1.9. Interpolación con curvas de Bézier	26
1.9.1. Interpolación cúbica de Hermite	27
1.10. Algoritmo para evaluar curvas de Bézier	30
2. Aproximación en el plano por splines cúbicos	31
2.1. Splines cúbicos	31
2.1.1. Construcción de los splines cúbicos	32
2.2. Condiciones finales	35
2.3. El subespacio lineal $S(X_n, 3)$	36
3. Curvas B-Splines	43
3.1. Base de B-Splines	43
3.2. Nodos múltiples	49
3.3. B-Splines	50
3.4. Relación de recurrencia para B-Splines	57
3.5. Evaluación de B-Splines por recurrencia	60
3.6. Propiedades de los B-Splines	61
3.7. Los polinomios de Bernstein como funciones B-Splines	64

3.8.	Curvas B-Spline	66
3.8.1.	Propiedades de las curvas B-Splines	66
3.9.	Interpolación con curvas B-Splines	70
3.9.1.	Soporte de interpolación	71
3.9.2.	Bases de B-Splines para interpolación	72
3.9.3.	Interpolación con condiciones en los extremos	73
3.10.	Algoritmo de De Boor	75
3.11.	Algoritmo para evaluar curvas B-Splines	75
4.	Superficies de Bézier	77
4.1.	Superficies producto tensorial	77
4.2.	Superficies de Bézier simples	78
4.2.1.	Propiedades de las superficies de Bézier simples	78
4.3.	Superficies de Bézier compuestas	81
4.4.	Superficies de Bézier rectangulares compuestas	82
4.5.	Interpolación con superficies de Bézier	83
5.	Superficies B-Splines	85
5.1.	Propiedades de las superficies B-Splines	85
5.2.	Interpolación con superficies B-Splines	89
5.3.	Algoritmo para evaluar superficies B-Splines	89
A.	Ejemplos	93
A.1.	Curvas de Bézier	93
A.2.	Curvas B-Splines	101
A.3.	Superficies B-Spline	106
B.	Definiciones y resultados de álgebra lineal	111
B.1.	Interpolación de Lagrange	112

Introducción

El problema de ajustar un conjunto de puntos dados por una curva o una superficie se ha considerado desde hace mucho tiempo; entre sus aplicaciones más impactantes figura la determinación de órbitas de cuerpos celestes, como la del asteroide Ceres, al inicio del siglo XIX. Tal vez el método más conocido es el de mínimos cuadrados, que se atribuye a genios de la talla de Isaac Newton y Carl Friedrich Gauss. En décadas recientes la exigencia de precisión y operatividad en el diseño de imágenes y objetos tridimensionales ha conducido a la creación de métodos de ajuste sofisticados, como el de ajuste por splines, que se aborda en este trabajo.

En una primera instancia, supongamos que se parte de un conjunto de puntos (x_i, y_i) en el plano y se quiere obtener una función sencilla $y = f(x)$ cuya gráfica pase tan cerca como sea posible de ellos. Se sabe que existen polinomios cuya gráfica los contiene a todos, conocidos como polinomios de interpolación. Pero hay un problema relacionado con este tipo de solución: puede que el grado de los términos de estos polinomios deba ser muy alto y esto provoque oscilaciones muy grandes en sus gráficas. Una alternativa es usar un polinomio de menor grado resignándose a que la gráfica del mismo no incluya a todos los puntos dados, y que únicamente pase tan cerca de ellos como sea posible. La situación para el ajuste por una superficie a un conjunto de puntos en el espacio es análoga.

La composición de curvas de Bézier da solución al problema de trazar una curva suave que interpola a un conjunto de puntos prefijados sin que se presenten oscilaciones incómodas. Las curvas de Bézier son curvas paramétricas que tienen asociado un polígono de control que permite la modificación local de su forma, lo cual las hace una herramienta útil para el modelado geométrico. La teoría de curvas y superficies de Bézier fue desarrollada a principios de los 60 en el área de la industria automotriz por los ingenieros franceses Pierre Bézier en Renault y Paul de Casteljaou en Citroën [2].

Actualmente, se utilizan las curvas de Bézier como herramientas de diseño gráfico en programas como Adobe Photoshop, Adobe Illustrator, Inkscape, etc. o en animación gráfica para controlar el movimiento, en aplicaciones como Adobe Flash, Adobe After Effects, Adobe Shockwave, entre otras.

Una de las limitantes de las curvas de Bézier es que el número de puntos de control determina el grado de la curva, por lo que nos centraremos a estudiar splines polinómicos. Los splines son funciones determinadas por segmentos de curvas que se unen suavemente para formar una curva diferenciable, es por esto que a este tipo de interpolación se le conoce con el nombre de interpolación a trozos.

En la teoría de funciones splines surge el hecho de que bajo ciertas condiciones, el conjunto formado por estas funciones tiene la estructura de un espacio vectorial de dimensión finita; lo cual nos permite hablar de distintas bases para dichos espacios. En la búsqueda de una base especial, cuyos elementos

tuvieran soporte compacto surgieron las funciones B-Splines, nombre que le dio Schoenberg en uno de sus trabajos, publicado en 1967 [7]. A mediados de los 70 algunos autores ya habían puesto de manifiesto la estrecha relación entre curvas de Bézier y los splines, observando que las primeras eran un caso particular de las llamadas curvas B-Splines.

Un caso más general de las curvas B-Splines son las llamadas NURBS que en este trabajo no abordaremos.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar las curvas y superficies B-Spline e implementar algoritmos existentes para dos y tres dimensiones. Asimismo diseñar un material de apoyo accesible y al alcance de un estudiante de la Lic. Matemáticas Aplicadas o de ingeniería.

Este trabajo de tesis consta de 5 capítulos y dos apéndices.

En el primer capítulo estudiaremos las curvas de Bézier. Una curva de Bézier se define por medio de polinomios de Bernstein y puntos en el plano llamados puntos de control; veremos algunas de las propiedades que cumplen, así como un algoritmo para construirlas. También estudiaremos interpolación con curvas de Bézier.

El capítulo 2 esta dedicado a los splines cúbicos de interpolación, daremos resultados importantes como el teorema de existencia y unicidad y el teorema de convergencia del spline cúbico que interpola a una función.

Las curvas B-Splines se estudiarán en el capítulo 3, estas curvas están definidas por funciones B-Splines y por un conjunto de puntos en el plano. Se estudiará también la interpolación con curvas B-Spline, mencionando el teorema de Schoenberg-Whitney, que establece las condiciones para que el problema de interpolación tenga solución única.

En el capítulo 4 se estudiarán las superficies de Bézier, las cuales resultan ser el producto tensorial de dos curvas de Bézier. También veremos como construir estas superficies a partir de su malla de control y finalmente se estudiarán las superficies Bézier de interpolación.

El capítulo 5 está dedicado a las superficies B-Spline, estas superficies se definen de manera similar a las superficies de Bézier, pero ahora tomamos el producto tensorial de dos curvas B-Spline; también se realizará interpolación con superficies B-Splines.

En el apéndice A, se muestran algunas pruebas utilizando los algoritmos implementados en Matlab para la construcción de curvas y superficies.

El apéndice B contiene definiciones y resultados que complementan la teoría de la tesis.

Capítulo 1

Curvas de Bézier

Las curvas de Bézier son curvas polinómicas expresadas con *polinomios de Bernstein*. Una curva de Bézier de grado n se especifica por un conjunto de $n + 1$ puntos que son llamados *puntos de control*. El polígono obtenido al unir los puntos de control se denomina *polígono de control*. Comenzaremos este capítulo con la definición de polinomios de Bernstein.

1.1. Polinomios de Bernstein

Definición 1.1. Llamamos *polinomios de Bernstein* de grado n a los polinomios dados por la expresión

$$N_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ son los coeficientes binómicos.

Ejemplo 1.1. Ejemplos de polinomios de Bernstein.

a) Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} N_0^1(x) &= \binom{1}{0} x^0 (1-x)^{1-0} = 1-x. \\ N_1^1(x) &= \binom{1}{1} x^1 (1-x)^{1-1} = x. \end{aligned}$$

b) Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} N_0^2(x) &= \binom{2}{0} x^0 (1-x)^{2-0} = (1-x)^2. \\ N_1^2(x) &= \binom{2}{1} x^1 (1-x)^{2-1} = 2x(1-x). \\ N_2^2(x) &= \binom{2}{2} x^2 (1-x)^{2-2} = x^2. \end{aligned}$$

c) Para $n = 3$,

$$N_0^3(x) = \binom{3}{0} x^0 (1-x)^{3-0} = (1-x)^3.$$

$$N_1^3(x) = \binom{3}{1} x^1 (1-x)^{3-1} = 3x(1-x)^2.$$

$$N_2^3(x) = \binom{3}{2} x^2 (1-x)^{3-2} = 3x^2(1-x).$$

$$N_3^3(x) = \binom{3}{3} x^3 (1-x)^{3-3} = x^3.$$

1.2. Propiedades de los polinomios de Bernstein

A continuación mostraremos algunas propiedades de los polinomios de Bernstein restringidas al intervalo $[0, 1]$.

Proposición 1.1. Los $n + 1$ polinomios de Bernstein de grado n

1. Forman una partición de la unidad, es decir,

$$\sum_{k=0}^n N_k^n(x) = 1.$$

2. Cumplen

$$\begin{aligned} N_0^n(0) &= 1, & N_k^n(0) &= 0, & k &= 1, \dots, n-1; \\ N_n^n(1) &= 1, & N_k^n(1) &= 0, & k &= 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

3. Satisfacen la relación de recurrencia

$$N_k^n(x) = (1-x)N_k^{n-1}(x) + xN_{k-1}^{n-1}(x).$$

4. Son no negativos en el intervalo $[0, 1]$, esto es, si $x \in [0, 1]$,

$$N_k^n(x) \geq 0.$$

5. La derivada de $N_k^n(x)$ es

$$\frac{dN_k^n(x)}{dx} = n[N_{k-1}^{n-1}(x) - N_k^{n-1}(x)].$$

6. El polinomio $N_k^n(x)$ tiene un máximo en $\frac{k}{n}$.

7. Son linealmente independientes.

8. Son simétricos, es decir,

$$N_k^n(x) = N_{n-k}^n(1-x).$$

Demostración. 1. Esta propiedad se sigue del desarrollo del binomio de Newton

$$1 = (x + (1 - x))^n = \sum_{k=0}^n N_k^n(x).$$

2. Se tiene que

$$\begin{aligned} N_0^n(x) &= \binom{n}{0} x^0 (1-x)^n, \\ N_0^n(0) &= 1, \\ N_n^n(x) &= \binom{n}{n} x^n (1-x)^0, \\ N_n^n(1) &= 1, \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} N_k^n(0) &= 0, \\ N_k^n(1) &= 0, \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n-1$.

3. En efecto,

$$\begin{aligned} N_k^n(x) &= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (1-x) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} + x \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= (1-x) N_k^{n-1}(x) + x N_{k-1}^{n-1}(x). \end{aligned}$$

4. Basta observar que

$$x^k \geq 0 \text{ y } (1-x)^{n-k} \geq 0, \text{ si } x \in [0, 1].$$

5. La demostración se hará para $k = 1 \dots n-1$,

$$\begin{aligned} \frac{dN_k^n(x)}{dx} &= \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \binom{n}{k} (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} - n \binom{n-1}{k} (1-x)^{(n-1)-k} x^k \\ &= n \left[\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \right] \\ &= n [N_{k-1}^{n-1}(x) - N_k^{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

6. Se tiene que

$$0 = \frac{dN_k^n(x)}{dx} = \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} [k(1-x) - (n-k)x],$$

de la expresión anterior se sigue que $nx = k$, así $x = \frac{k}{n}$. Al calcular la segunda derivada se obtiene,

$$\frac{d^2 N_k^n(x)}{dx^2} = \binom{n}{k} x^{k-2} (1-x)^{n-k-2} [k^2 + (n-1)nx^2 - kx - 2kx(n-1)],$$

evaluando en $\frac{k}{n}$ y simplificando

$$\frac{d^2 N_k^n(\frac{k}{n})}{dx^2} = \binom{n}{k} \frac{n^3 (1 - \frac{k}{n})^{n-k} (\frac{k}{n})^k}{k(k-n)}.$$

Concluimos que $N_k^n(x)$ tiene un máximo en $\frac{k}{n}$.

7. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k N_k^n(x) = 0,$$

luego

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 0,$$

multiplicando por $\frac{1}{(1-x)^n}$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{k=0}^n \alpha_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \binom{n}{k} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \end{aligned}$$

haciendo $t = \frac{x}{1-x}$, obtenemos,

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \binom{n}{k} t^k = 0,$$

de aquí que todos los α_k son cero.

8. En efecto,

$$\begin{aligned} N_k^n(x) &= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-k} (1-x)^{n-k} (1-(1-x))^k \\ &= N_{n-k}^n(1-x). \end{aligned}$$

□

1.3. Curvas de Bézier simples

Los polinomios de grado menor o igual que n forman un espacio vectorial real de dimensión $n + 1$ y los polinomios de Bernstein son $n + 1$ polinomios linealmente independientes de grado n . Por tanto, podremos representar una curva polinómica como combinación de los polinomios de Bernstein.

Definición 1.2. Sea $\{P_0, \dots, P_n\}$ un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 , se llama *curva de Bézier* de grado n a

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

donde $N_k^n(t)$ es el k -ésimo polinomio de Bernstein de grado n , y a P_0, \dots, P_n les denominaremos *puntos de control*.

El nombre de polígono de control hace referencia a que sirve para controlar la forma de la curva.

Ejemplo 1.2. Ejemplos de curvas de Bézier.

a) Para $n = 1$,

$$C(t) = \sum_{k=0}^1 P_k N_k^1(t) = P_0 N_0^1(t) + P_1 N_1^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1,$$

luego se tiene que

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0, \\ C(1) &= P_1. \end{aligned}$$

Así, $C(t)$ es la recta que une los puntos P_0 y P_1 .

b) Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} C(t) &= P_0 N_0^2(t) + P_1 N_1^2(t) + P_2 N_2^2(t) \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0, \\ C(1) &= P_2. \end{aligned}$$

c) Para $n = 3$,

$$\begin{aligned} C(t) &= P_0 N_0^3(t) + P_1 N_1^3(t) + P_2 N_2^3(t) + P_3 N_3^3(t) \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0, \\ C(1) &= P_3. \end{aligned}$$

A continuación se muestran las gráficas del ejemplo anterior.

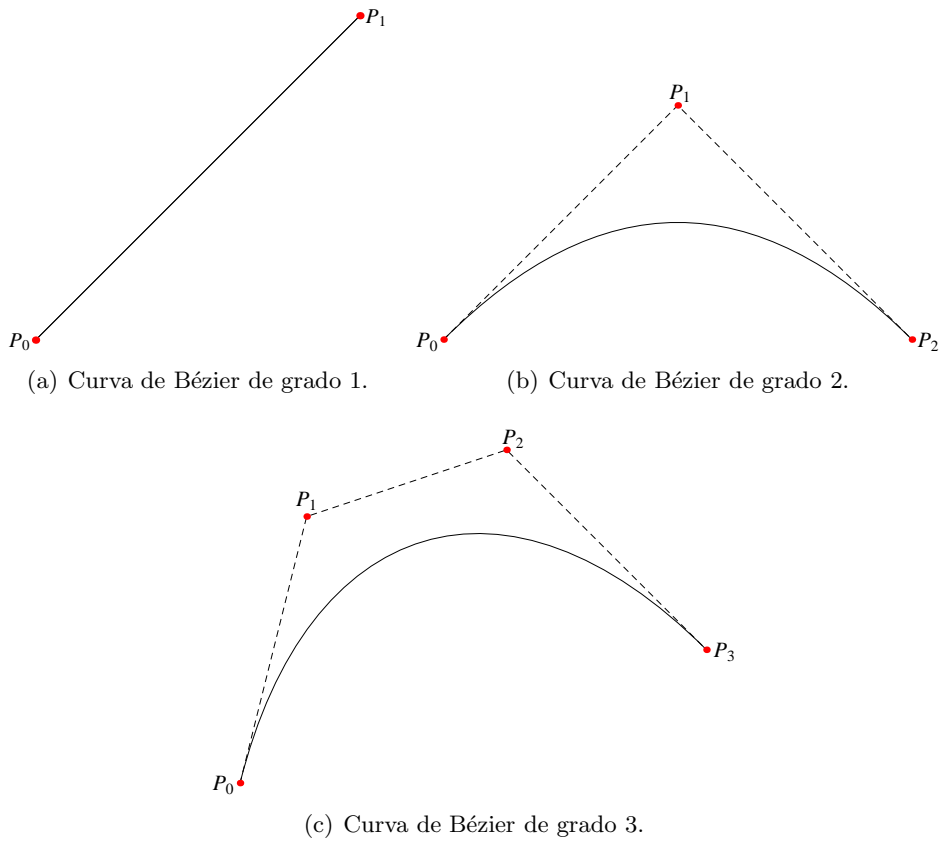


Figura 1.1: Curvas de Bézier.

1.3.1. Propiedades de las curvas de Bézier simples

En esta sección mostraremos algunas propiedades que cumplen las curvas de Bézier simples.

Proposición 1.2. Sea

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1.1)$$

una curva de Bézier donde P_0, \dots, P_n son puntos en el plano, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Interpolación de los puntos de control extremos.

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0. \\ C(1) &= P_n. \end{aligned}$$

2. Tangencia al polígono de control en sus extremos.

$$\begin{aligned} C'(0) &= n(P_1 - P_0). \\ C'(1) &= n(P_n - P_{n-1}). \end{aligned}$$

3. La r -ésima derivada de una curva de Bézier esta dada por

$$C^{(r)}(t) = n(n-1)\cdots(n-r+1) \sum_{k=0}^{n-r} \Delta^r P_k N_k^{n-r}(t),$$

donde $\Delta^r P_k = \Delta^{r-1} P_{k+1} - \Delta^{r-1} P_k$ y $\Delta^1 P_k = \Delta P_k = P_{k+1} - P_k$.

4. Control pseudo-local. Si dos curvas de Bézier difieren sólo en el punto j la diferencia entre éstas sólo involucra al polinomio $N_j^n(t)$.
5. Restricción a la envolvente convexa. La curva de Bézier con puntos de control P_0, \dots, P_n siempre se encuentra en la cápsula convexa de dichos puntos.
6. Invarianza afín. La representación de una curva de Bézier es invariante bajo aplicaciones afines, esto es, si $C(t)$ es una curva de Bézier con puntos de control P_0, \dots, P_n y Φ es una aplicación afín, entonces $\Phi(C(t))$ es una curva de Bézier con puntos de control $\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n)$.

Demostración. 1. Sea $C(t)$ una curva de Bézier, por la propiedad 2 de la Proposición 1.1 se tiene

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0, \\ C(1) &= P_n. \end{aligned}$$

2. Sea $C(t)$ una curva de Bézier, por la propiedad 2 de la Proposición 1.1 se tiene

$$\begin{aligned} N_0^n(0) &= 1, & N_k^n(0) &= 0, & 1 \leq k \leq n-1; \\ N_n^n(1) &= 1, & N_k^n(1) &= 0, & 1 \leq k \leq n-1, \end{aligned}$$

además sabemos que

$$\frac{dN_k^n(t)}{dt} = n[N_{k-1}^{n-1}(t) - N_k^{n-1}(t)],$$

dada una curva de Bézier de grado n

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t),$$

derivando

$$\begin{aligned} C'(t) &= -P_0 \binom{n}{0} n(1-t)^{n-1} + \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} P_k N_k^n(t) + nP_n t^{n-1} \\ &= -nP_0(1-t)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} nP_k [N_{k-1}^{n-1}(t) - N_k^{n-1}(t)] + nP_n t^{n-1}, \end{aligned}$$

así

$$C'(0) = n(P_1 - P_0)$$

y

$$C'(1) = n(P_n - P_{n-1}).$$

3. De la demostración anterior se tiene

$$\begin{aligned}
C'(t) &= -nP_0(1-t)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} nP_k[N_{k-1}^{n-1}(t) - N_k^{n-1}(t)] + nP_n t^{n-1} \\
&= -nP_0N_0^{n-1}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} nP_k[N_{k-1}^{n-1}(t) - N_k^{n-1}(t)] + nP_nN_{n-1}^{n-1}(t) \\
&= n[(P_1 - P_0)N_0^{n-1}(t) + \dots + (P_n - P_{n-1})N_{n-1}^{n-1}(t)] \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} (P_{k+1} - P_k)N_k^{n-1}(t) \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k N_k^{n-1}(t),
\end{aligned}$$

donde $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$; con esto se prueba que $C'(t)$ también es una curva de Bézier de grado $n-1$, con puntos de control ΔP_k . Por inducción sobre r se tiene

$$C^{(r)}(t) = n(n-1)\cdots(n-r+1) \sum_{k=0}^{n-r} \Delta^r P_k N_k^{n-r}(t),$$

donde $\Delta^r P_k = \Delta^{r-1} P_{k+1} - \Delta^{r-1} P_k$ y $\Delta^1 P_k = \Delta P_k = P_{k+1} - P_k$. Las derivadas en los puntos extremos son

$$\begin{aligned}
C^{(r)}(0) &= n(n-1)\cdots(n-r+1) \sum_{k=0}^{n-r} \Delta^r P_0, \\
C^{(r)}(1) &= n(n-1)\cdots(n-r+1) \sum_{k=0}^{n-r} \Delta^r P_{n-r}.
\end{aligned}$$

4. Sea

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t)$$

y

$$\bar{C}(t) = \sum_{k \neq j}^n P_k N_k^n(t) + \bar{P}_j N_j^n(t)$$

curvas de Bézier que tienen los mismo puntos de control, excepto el j -ésimo, entonces

$$\begin{aligned}
H(t) &= C(t) - \bar{C}(t) \\
&= \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t) - \left(\sum_{k \neq j}^n P_k N_k^n(t) + \bar{P}_j N_j^n(t) \right) \\
&= (P_j - \bar{P}_j) N_j^n(t).
\end{aligned}$$

Nótese que el máximo de $H(t)$ se obtiene en el máximo de $N_j^n(t)$ el cual es $t = \frac{j}{n}$. Por tanto, el mayor error entre las curvas $C(t)$ y $\bar{C}(t)$ es $\|(P_j - \bar{P}_j) N_j^n\left(\frac{j}{n}\right)\|$.

5. De la propiedad 1 de los polinomios de Bernstein tenemos

$$\sum_{k=0}^n N_k^n(t) = 1,$$

entonces para cualquier $t \in [0, 1]$, la curva

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t),$$

se encuentra en la cápsula convexa de los puntos P_0, \dots, P_n .

6. Sea

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t),$$

una curva de Bézier y $\Phi(P) = AP + B$ una aplicación afín, donde A es una matriz de tamaño 2×2 , entonces

$$\begin{aligned} \Phi(C(t)) &= A \left(\sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t) \right) + B \\ &= \sum_{k=0}^n [AP_k N_k^n(t) + B N_k^n(t) - B N_k^n(t)] + B \\ &= \sum_{k=0}^n (AP_k + B) N_k^n(t) + B \left(1 - \sum_{k=0}^n N_k^n(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (AP_k + B) N_k^n(t) \\ &= \sum_{k=0}^n \Phi(P_k) N_k^n(t), \end{aligned}$$

esta última parte se debe a que

$$\sum_{k=0}^n N_k^n(t) = 1.$$

□

1.4. Conversión entre representaciones

Algunos sistemas antiguos de diseño asistido por computadora (Computer Aided Desing - CAD) utilizan la base de potencias $\{1, t, \dots, t^n\}$ para representar curvas. Por lo tanto es importante disponer de formas eficientes para transformar una curva en base de potencias a su representación de Bézier y viceversa.

1.4.1. Conversión de potencias a Bernstein

Proposición 1.3. Para toda n y $0 \leq i \leq n$

$$t^i = \sum_{k=i}^n \binom{n-i}{k-i} t^k (1-t)^{n-k}. \quad (1.2)$$

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre i .

Para $i = 0$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^n N_k^n(t) = 1.$$

Supongamos que la expresión 1.2 se cumple para $i < n$. Ahora veamos que es verdadera para $i = n$.

$$\begin{aligned} t^n &= t(t^{n-1}) \\ &= t \sum_{k=i-1}^n \binom{n-(i-1)}{k-(i-1)} t^k (1-t)^{(n-1)-k} \\ &= \sum_{k=i}^n \binom{(n-1)-(i-1)}{(k-1)-(i-1)} t t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= \sum_{k=i}^n \binom{n-i}{k-i} t^k (1-t)^{n-k}. \end{aligned}$$

□

De la proposición anterior se tiene el siguiente resultado

$$t^i = \sum_{k=i}^n \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} N_k^n(t), \quad 0 \leq i \leq n. \quad (1.3)$$

Observaciones

- t^1 es combinación de $N_1^n(t), \dots, N_n^n(t)$.
- t^2 es combinación de $N_2^n(t), \dots, N_n^n(t)$.
- $t^n = N_n^n(t)$.

Reescribiendo la ecuación (1.3)

$$t^i = \sum_{k=i}^n c_{ik} N_k^n(t), \quad 0 \leq i \leq n, \quad (1.4)$$

donde

$$c_{ik} = \begin{cases} \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}}, & 0 \leq i \leq n, \quad i \leq k \leq n; \\ 0, & k < i. \end{cases} \quad (1.5)$$

Proposición 1.4. Si $C(t)$ es una curva polinómica expresada en base de potencias

$$C(t) = \sum_{i=0}^n Q_i t^i,$$

donde Q_i son puntos en el plano, entonces su expresión en base de Bernstein es

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^n(t),$$

donde

$$[P_0 \ P_1 \ \dots \ P_n] = [Q_0 \ Q_1 \ \dots \ Q_n] \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0n} \\ 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Demostración. Sea $C(t)$ una curva expresada en base de potencias, entonces

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{i=0}^n Q_i t^i \\ &= [Q_0 \ Q_1 \ \dots \ Q_n] \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \\ &= [Q_0 \ Q_1 \ \dots \ Q_n] \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0n} \\ 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0^n(t) \\ N_1^n(t) \\ N_2^n(t) \\ \vdots \\ N_n^n(t) \end{bmatrix} \\ &= [P_0 \ P_1 \ \dots \ P_n] \begin{bmatrix} N_0^n(t) \\ N_1^n(t) \\ N_2^n(t) \\ \vdots \\ N_n^n(t) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^n P_i N_i^n(t). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.3. Consideremos la siguiente curva polinómica expresada en base de potencias

$$C(t) = (0, 1) + t(3, 6) + t^2(3, -3) + t^3(-1, -2), \quad t \in [0, 1],$$

de acuerdo a la proposición anterior obtenemos,

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \\ 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Así, la curva polinómica en base de Bernstein es

$$C(t) = (1-t)^3(0,1) + 3t(1-t)^2(1,3) + 3t^2(1-t)(3,-4) + t^3(5,2), \quad t \in [0,1].$$

1.4.2. Conversión de Bernstein a potencias

Proposición 1.5. Para toda n y $0 \leq i \leq n$

$$N_k^n(t) = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i. \quad (1.6)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} N_k^n(t) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} t^{i+k} \\ &= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} t^i \\ &= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i. \end{aligned}$$

□

Ahora, escribiendo la ecuación (1.6) en forma matricial, se obtiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} N_0^n(t) \\ N_1^n(t) \\ N_2^n(t) \\ \vdots \\ N_n^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ 0 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}$$

donde

$$d_{kj} = (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k}.$$

Proposición 1.6. Si la curva polinómica $C(t)$ esta expresada en base de Bernstein

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^n(t),$$

entonces su expresión en base de potencias es

$$C(t) = \sum_{i=0}^n Q_i t^i;$$

donde

$$[Q_0 \quad Q_1 \quad \dots \quad Q_n] = [P_0 \quad P_1 \quad \dots \quad P_n] \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ 0 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Demostración. Sea $C(t)$ una curva expresada en base de Bernstein, entonces

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{i=0}^n P_i N_i^n(t) \\ &= [P_0 \quad P_1 \quad \dots \quad P_n] \begin{bmatrix} N_0^n(t) \\ N_1^n(t) \\ N_2^n(t) \\ \vdots \\ N_n^n(t) \end{bmatrix} \\ &= [P_0 \quad P_1 \quad \dots \quad P_n] \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ 0 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \\ &= [Q_0 \quad Q_1 \quad \dots \quad Q_n] \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^n Q_i t^i. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.4. Dada la siguiente curva polinómica expresada en base de Bernstein

$$C(t) = (1-t)^3(0,1) + 3t(1-t)^2(1,3) + 3t^2(1-t)(3,-4) + t^3(5,2), \quad t \in [0,1],$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \\ 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Así, la curva polinómica expresada en base de potencias es

$$C(t) = (0, 1) + t(3, 6) + t^2(3, -3) + t^3(-1, -2), \quad t \in [0, 1].$$

Obsérvese que las matrices de los ejemplos 1.3 y 1.4, son inversas una de la otra.

1.5. Técnicas constructivas para curvas de Bézier simples

Al momento de intentar aproximar alguna forma geométrica, podemos manipular los puntos de control para obtener una mejor aproximación, pero probablemente no obtenemos la exactitud que quisiéramos, esto puede ser porque no tenemos suficientes puntos de control. En esta sección describiremos dos técnicas básicas para solucionar el problema antes mencionado, estos procedimientos consisten en elevar o disminuir el grado de una curva de Bézier.

1.5.1. Elevación de grado

Sea $C(t)$ una curva de Bézier

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t), \quad (1.7)$$

ahora la escribimos como una curva de grado $n + 1$

$$C(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \bar{P}_k N_k^{n+1}(t). \quad (1.8)$$

Lo que se pretende es que (1.7) y (1.8) sean la misma curva. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \bar{P}_k N_k^{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t) \\ \sum_{k=0}^{n+1} \bar{P}_k \binom{n+1}{k} t^k (1-t)^{n+1-k} &= \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \end{aligned}$$

multiplicando por $t + (1 - t)$ el término de la derecha se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \bar{P}_k \binom{n+1}{k} t^k (1-t)^{n+1-k} &= \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} t^{k+1} (1-t)^{n-k} \\ &+ \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P_{k-1} \binom{n}{k-1} t^k (1-t)^{n-k+1} \\ &+ \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \bar{P}_k \binom{n+1}{k} &= P_{k-1} \binom{n}{k-1} + P_k \binom{n}{k}, \quad k = 1, \dots, n. \\ \bar{P}_0 \binom{n+1}{0} &= P_0 \binom{n}{0}. \\ \bar{P}_{n+1} \binom{n+1}{n+1} &= P_n \binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Realizando algunas operaciones, obtenemos,

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= \frac{k}{(n+1)} P_{k-1} + \frac{(n-k+1)}{(n+1)} P_k, \quad k = 1, \dots, n. \\ \bar{P}_0 &= P_0. \\ \bar{P}_{n+1} &= P_n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Aunque las curvas de Bézier hayan sido definidas sobre $[0, 1]$ es posible utilizar otros intervalos, sólo hace falta transformar el intervalo para que la parametrización esté definida sobre $[a, b]$, esto se logra haciendo $t(u) = \frac{u-a}{b-a}$, $u \in [a, b]$.

La elevación de grado puede interpretarse como un proceso de corte de esquinas efectuado sobre el polígono de control para obtener un polígono con un punto más. Cuanto más recortemos las esquinas más se suaviza el polígono y más se aproxima a la curva que controla.

Ejemplo 1.5. Consideremos la curva de Bézier de tercer grado, cuyos puntos de control son $P_0 = (0, 1)$, $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (3, 4)$, $P_3 = (5, 2)$.

$$C(t) = (1-t)^3(0, 1) + 3t(1-t)^2(1, 3) + 3t^2(1-t)(3, 4) + t^3(5, 2), \quad t \in [0, 1].$$

De acuerdo a las ecuaciones (1.9)

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= \frac{k}{4} P_{k-1} + \left[1 - \frac{k}{4}\right] P_k, \quad k = 1, 2, 3. \\ \bar{P}_0 &= P_0. \\ \bar{P}_4 &= P_3. \end{aligned}$$

Sustituyendo los puntos de control

$$\begin{aligned}\bar{P}_0 &= P_0 = (0, 1). \\ \bar{P}_1 &= \frac{1}{4}(0, 1) + \frac{3}{4}(1, 3) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right). \\ \bar{P}_2 &= \frac{2}{4}(1, 3) + \frac{1}{2}(3, 4) = \left(2, \frac{7}{2}\right). \\ \bar{P}_3 &= \frac{3}{4}(3, 4) + \frac{1}{4}(5, 2) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right). \\ \bar{P}_4 &= P_3 = (5, 2).\end{aligned}$$

La curva de Bézier resultante al elevar el grado es

$$\begin{aligned}C(t) &= (1-t)^4(0, 1) + 4t(1-t)^3\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right) + 6t^2(1-t)^2\left(2, \frac{7}{2}\right) \\ &+ 4t^3(1-t)\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) + t^4(5, 2), \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Obsérvese que la curva en realidad es de tercer grado, ya que en base de potencias se tiene

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \\ 3 & -3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$C(t) = (0, 1) + t(3, 6) + t^2(3, -3) + t^3(-1, -2), \quad t \in [0, 1].$$

1.5.2. Reducción de grado

Este método es el proceso inverso del que se mostró anteriormente. Consiste en convertir una curva de Bézier de grado n en una curva de Bézier de grado $n-1$, en general, esto no siempre es posible. Por ejemplo, no podemos describir una curva cúbica con una función cuadrática. La reducción de grado se puede realizar cuando la curva dada es el resultado de la elevación de grado.

Consideremos una curva de Bézier de grado n fija

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1.10)$$

lo primero que nos interesa es saber si es posible reducir el grado de esta curva. Para esto necesitamos la proposición 1.6, que expresa el cambio de base de Bernstein a base de potencias, para así poder calcular el coeficiente de t^n y verificar si es o no nulo. Recordemos

$$Q_n = d_{0n}P_0 + d_{1n}P_1 + \cdots + d_{nn}P_n,$$

donde, como se vio anteriormente

$$d_{in} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i},$$

entonces

$$Q_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} P_i.$$

La condición para que sea posible la reducción de grado es que $Q_n = \mathbf{0}$. Cuando ya sabemos que es posible reducir el grado de la curva nos interesa calcular los coeficientes de $C(t)$ de forma que se exprese

$$C(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{P}_k N_k^{n-1}(t). \quad (1.11)$$

Para calcular estos coeficientes observemos que la curva 1.10 puede obtenerse al elevar el grado la curva 1.11, es decir,

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{k}{\binom{n}{k}} \widehat{P}_{k-1} + \frac{\binom{n-k}{k}}{\binom{n}{k}} \widehat{P}_k, & k = 1, \dots, n-1. \\ P_0 &= \widehat{P}_0. \\ P_n &= \widehat{P}_{n-1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \widehat{P}_k &= \frac{n}{n-k} P_k - \frac{k}{n-k} \widehat{P}_{k-1}, & k = 1, \dots, n-1. \\ \widehat{P}_0 &= P_0. \\ \widehat{P}_{n-1} &= P_n. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6. Consideremos la curva polinómica que encontramos en la sección anterior, donde $t \in [0, 1]$,

$$C(t) = (1-t)^4(0, 1) + 4t(1-t)^3\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right) + 6t^2(1-t)^2\left(2, \frac{7}{2}\right) + 4t^3(1-t)\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) + t^4(5, 2),$$

se cumple que $Q_4 = \mathbf{0}$, puesto que $C(t)$ proviene de elevar el grado a una curva de Bézier de tercer grado. Tenemos que $P_0 = (0, 1)$, $P_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$, $P_2 = \left(2, \frac{7}{2}\right)$, $P_3 = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $P_4 = (5, 2)$. Luego

$$\begin{aligned} \widehat{P}_0 &= P_0 = (0, 1). \\ \widehat{P}_1 &= \frac{4}{3}P_1 + \frac{1}{3}\widehat{P}_0 = (1, 3). \\ \widehat{P}_2 &= \frac{2}{4}P_2 - \frac{2}{2}\widehat{P}_1 = (3, 4). \\ \widehat{P}_3 &= 4P_3 - 3\widehat{P}_2 = (5, 2). \end{aligned}$$

Así, la curva de tercer grado es

$$C(t) = (1-t)^3(0, 1) + 3t(1-t)^2(1, 3) + 3t^2(1-t)(3, 4) + t^3(5, 2), \quad t \in [0, 1].$$

1.6. Curvas de Bézier compuestas

En la sección anterior estudiamos curvas de Bézier simples, ahora estudiaremos las curvas de Bézier compuestas. Las curvas de Bézier compuestas se obtienen al “pegar” varias curvas de Bézier simples, primero se analizará la composición de dos curvas, después se hará de manera general. Supongamos que tenemos los puntos de control P_0, \dots, P_n y Q_0, \dots, Q_n de dos curvas donde $P_n = Q_0$. Una condición que queremos que se cumpla al momento de unir estas curvas, es que la curva resultante tenga un cierto grado de suavidad. Sabemos que el vector tangente a la curva de Bézier en sus puntos extremos está dado por

$$C'(0) = n(P_1 - P_0), \quad C'(1) = n(P_n - P_{n-1}).$$

Desde el punto de vista geométrico lo importante es que el vector tangente a la primera curva en P_n tenga la misma dirección de $P_n - P_{n-1}$, mientras que el vector tangente a la segunda curva tenga la dirección de $Q_1 - P_n$. Es decir, que los vectores $P_n - P_{n-1}$ y $Q_1 - P_n$ sean proporcionales. Sin embargo, esto no garantiza la continuidad del vector tangente. Para unir dos curvas de Bézier primero elegimos dos intervalos consecutivos $[u_0, u_1]$ y $[u_1, u_2]$, donde están definidas las curvas $C_1(u)$ y $C_2(u)$ respectivamente. De ésta manera las curvas están dadas por

$$C_1(u) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n \left(\frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \right), \quad u \in [u_0, u_1]$$

y

$$C_2(u) = \sum_{k=0}^n Q_k N_k^n \left(\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \right), \quad u \in [u_1, u_2],$$

con la condición $P_n = Q_0$. Derivando las expresiones anteriores

$$C_1'(u) = \frac{1}{u_1 - u_0} \sum_{k=0}^n P_k \frac{d}{du} N_k^n \left(\frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \right), \quad u \in [u_0, u_1];$$

$$C_2'(u) = \frac{1}{u_2 - u_1} \sum_{k=0}^n Q_k \frac{d}{du} N_k^n \left(\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \right), \quad u \in [u_1, u_2].$$

Utilizando las propiedades 5 y 2 de la Proposición 1.1, se tiene

$$C_1'(u_1) = \frac{1}{u_1 - u_0} n(P_n - P_{n-1}).$$

$$C_2'(u_1) = \frac{1}{u_2 - u_1} n(Q_1 - Q_0).$$

Para que la curva compuesta tenga derivada continua se debe cumplir

$$\frac{1}{u_1 - u_0} n(P_n - P_{n-1}) = \frac{1}{u_2 - u_1} n(Q_1 - Q_0), \quad (1.12)$$

equivalentemente

$$Q_1 - Q_0 = \lambda(P_n - P_{n-1}),$$

donde

$$\lambda = \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} = \frac{\|Q_1 - Q_0\|}{\|P_n - P_{n-1}\|}. \quad (1.13)$$

Ejemplo 1.7. Sean $C_1(t)$ y $C_2(t)$ curvas de Bézier

$$\begin{aligned} C_1(t) &= (1-t)^2(0,0) + 2t(1-t)(-1,1) + t^2(1,3), & t \in [0,1]; \\ C_2(t) &= (1-t)^2(1,3) + 2t(1-t)(2,4) + t^2(5,1), & t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Los puntos de control de la primera curva son $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (-1,1)$, $P_2 = (1,3)$ y de la segunda curva $Q_0 = (1,3)$, $Q_1 = (2,4)$, $Q_2 = (5,1)$.

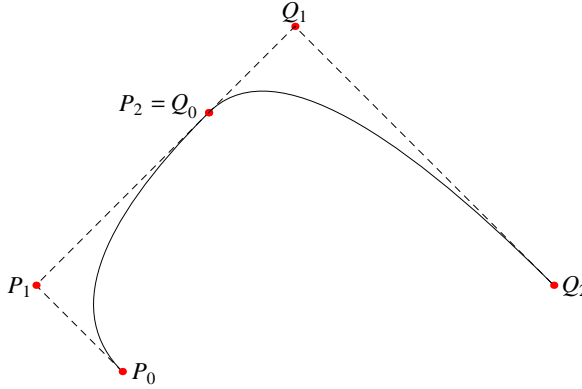


Figura 1.2: Gráfica del ejemplo 1.7.

Las curvas se unen en $(1,3)$ y los puntos $(-1,1)$, $(1,3)$ y $(2,4)$ son colineales, de aquí que el vector tangente tiene la misma dirección para ambas curvas. Si quisiéramos construir una curva compuesta a partir de $C_1(t)$ y $C_2(t)$ debemos comenzar por elegir los intervalos $[u_0, u_1]$ y $[u_1, u_2]$ donde varía el parámetro global u , es decir, debemos encontrar el soporte donde estará definida la curva de Bézier compuesta

$$\frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} = \frac{\|Q_1 - Q_0\|}{\|P_n - P_{n-1}\|} = \frac{1}{2},$$

Considerando $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, y $u_2 = 3$, la curva compuesta $C(u)$ estará definida en el intervalo $[0, 3]$,

$$\begin{aligned} C_1(u) &= \left(1 - \frac{u}{2}\right)^2(0,0) + 2\frac{u}{2}\left(1 - \frac{u}{2}\right)(-1,1) + \frac{u^2}{2}(1,3), & u \in [0,2]. \\ C_2(u) &= (1 - (u-2))^2(1,3) + 2(u-2)(1 - (u-2))(2,4) + (u-2)^2(5,1), & u \in [2,3]. \end{aligned}$$

Observemos que la curva $C(u)$ es de clase C^1 en el intervalo $[0, 3]$.

Ahora construiremos una curva de Bézier compuesta que tenga continuidad hasta la segunda derivada. De la propiedad 3 proposición 1.2, se tiene

$$C''(0) = n(n-1)\Delta^2 P_0 = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0).$$

$$C''(1) = n(n-1)\Delta^2 P_{n-2} = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}).$$

Dadas dos curvas de Bézier definidas en $[u_0, u_1]$, $[u_1, u_2]$ respectivamente, entonces

$$C''(u_1) = \frac{n(n-1)}{(u_1 - u_0)^2}(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) = \frac{n(n-1)}{(u_1 - u_0)^2}\Delta^2 P_{n-2}$$

y

$$C''(u_1) = \frac{n(n-1)}{(u_2 - u_1)^2} (Q_2 - 2Q_1 + Q_0) = \frac{n(n-1)}{(u_2 - u_1)^2} \Delta^2 Q_0.$$

La segunda derivada será continua si

$$\frac{1}{(u_1 - u_0)^2} \Delta^2 P_{n-2} = \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} \Delta^2 Q_0,$$

o bien

$$\frac{1}{(u_1 - u_0)^2} (P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) = \frac{1}{(u_2 - u_1)^2} (Q_2 - 2Q_1 + Q_0).$$

El general se tiene el siguiente resultado que nos proporciona las condiciones que debe cumplir una curva de Bézier compuesta para que tenga continuidad hasta la r -ésima derivada.

Teorema 1.1. Si construimos una curva de Bézier compuesta por dos curvas de grado n definidas en $[u_0, u_1]$ y $[u_1, u_2]$ respectivamente cuyos puntos de control son $P_0, \dots, P_n, Q_0, \dots, Q_n$, con $P_n = Q_0$ y se imponen condiciones sobre los puntos de control de cada curva para que sean derivables y continuas en u_1 hasta de orden n , entonces se obtiene la siguiente relación

$$\frac{\Delta^r P_{n-2}}{(u_1 - u_0)^r} = \frac{\Delta^r Q_0}{(u_2 - u_1)^r}, \quad r = 1, \dots, n,$$

donde $\Delta^r P_{n-2} = \Delta^{r-1} P_{n-1} - \Delta^{r-1} P_n$ y $\Delta^1 P_{n-2} = \Delta P_{n-2} = P_{n-1} - P_n$.

Demostración. La demostración no es difícil de realizar, basta aplicar inducción sobre n . □

Como se vio anteriormente, para unir dos curvas de Bézier

$$\begin{aligned} C_1(u) &= \sum_{k=0}^n P_k N_k^n \left(\frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \right), & u \in [u_0, u_1], \\ C_2(u) &= \sum_{k=0}^n Q_k N_k^n \left(\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \right), & u \in [u_1, u_2], \end{aligned}$$

basta que cumpla $P_n = Q_0$ y que los puntos $P_{n-1}, P_n = Q_0$ y Q_1 sean colineales. Para que la curva compuesta sea de clase C^1 se debe cumplir

$$\frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0} = \frac{\|Q_1 - Q_0\|}{\|P_n - P_{n-1}\|}. \quad (1.14)$$

Observaciones

- 1) Si conocemos los subintervalos $[u_0, u_1]$ y $[u_1, u_2]$, la ecuación (1.14) impone restricciones sobre el punto Q_1 .
- 2) Si los puntos de control son dados y cumplen que $P_{n-1}, P_n = Q_0$ y Q_1 son colineales, entonces la ecuación 1.14 impone restricciones sobre los subintervalos $[u_0, u_1]$ y $[u_1, u_2]$.

De manera general, al unir m curvas de Bézier simples de grado n las cuales están definidas respecto al parámetro $u \in [0, 1]$,

$$C_i(u) = \sum_{k=0}^n P_k^{(i)} N_k^n(u), \quad i = 1, \dots, m,$$

la condición necesaria y suficiente para que se pueda construir una curva de Bézier compuesta de clase C^1 es

$$P_{n-1}^i, P_n^i = P_0^{i+1} \text{ y } P_1^{i+1} \text{ alineados, } \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Después debemos elegir el intervalo $[u_{i-1}, u_i]$ sobre el que estará definida cada curva $C_i(u)$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}} = \frac{\|P_1^{(i+1)} - P_0^{(i+1)}\|}{\|P_n^i - P_{n-1}^i\|}, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (1.15)$$

Ejemplo 1.8. Consideremos las siguientes curvas de Bézier de segundo grado respecto al parámetro $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} C_1(t) &= (1-t)^2(0,0) + 2t(1-t)(-1,1) + t^2(1,3). \\ C_2(t) &= (1-t)^2(1,3) + 2t(1-t)(2,4) + t^2(5,1). \\ C_3(t) &= (1-t)^2(5,1) + 2t(1-t)(6,0) + t^2(7,5). \end{aligned}$$

Veamos que las condiciones geométricas se cumplen

$$\begin{aligned} (-1,1), (1,3) \text{ y } (2,4) &\text{ están alineados,} \\ (2,4), (5,1) \text{ y } (6,0) &\text{ están alineados.} \end{aligned}$$

Construimos el soporte $S = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, con $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + (u_1 - u_0) \frac{\|P_4 - P_3\|}{\|P_2 - P_1\|} = \frac{3}{2}. \\ u_3 &= u_2 + (u_2 - u_1) \frac{\|P_7 - P_6\|}{\|P_5 - P_4\|} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Considerando $S = \{0, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}\}$, la curva compuesta es

$$\begin{aligned} C_1(u) &= (1-u)^2(0,0) + 2u(1-u)(-1,1) + u^2(1,3), \quad u \in [0, 1]. \\ C_2(u) &= (1-(2u-2))^2(1,3) + 2(2u-2)(1-(2u-2))(2,4) \\ &\quad + (2u-2)^2(5,1), \quad u \in [1, \frac{3}{2}]. \\ C_3(u) &= (1-(6u-9))^2(5,1) + 2(6u-9)(1-(6u-9))(6,0) \\ &\quad + (6u-9)^2(7,5), \quad u \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]. \end{aligned}$$

No es difícil probar las condiciones de continuidad.

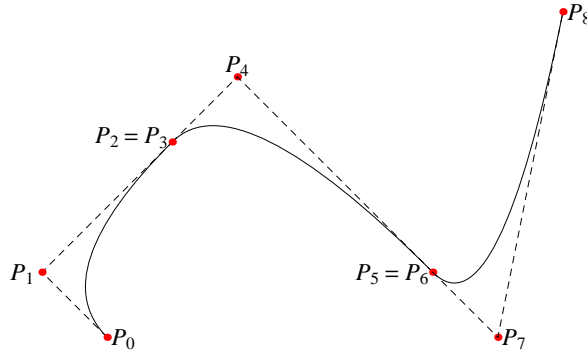


Figura 1.3: Gráfica del ejemplo 1.8.

1.7. Algoritmo de De Casteljaou

Una curva de Bézier

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t),$$

se puede evaluar usando el algoritmo de De Casteljaou, esto usualmente se hace para $t \in [0, 1]$, entonces el algoritmo involucra solamente combinaciones convexas, lo que garantiza la estabilidad numérica del algoritmo [10].

Sean $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ los puntos de control y $t \in [0, 1]$.

1. Para $i = 0$ hasta n .

$$P_i^{(0)} = P_i.$$

2. Para $k = 1$ hasta n .

Para $i = 0$ hasta $n - k$.

$$P_i^{(k)} = (1 - t)P_i^{(k-1)} + tP_{i+1}^{(k-1)}.$$

3. Regresar $C(t) = P_0^{(n)}$.

1.8. Subdivisión

La técnica de subdivisión nos provee un método muy rápido para generar una aproximación a una curva de Bézier. Algunas de las razones por las que se hace el proceso de subdivisión de curvas son:

1. Partición de una curva de Bézier compuesta en dos curvas.
2. Incremento de control.
3. El polígono de control formado por los nuevos puntos de control se aproxima mejor a la curva de lo que lo hacía el polígono de control formado por los puntos de control originales.

Sea $C(u)$ una curva de Bézier

$$C(u) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(u), \quad u \in [0, 1].$$

Dado $c \in (0, 1)$ se quiere encontrar 2 curvas $C_1(u)$ y $C_2(u)$

$$C_1(u) = \sum_{k=0}^n Q_k N_k^n\left(\frac{u}{c}\right), \quad u \in [0, c],$$

$$C_2(u) = \sum_{k=0}^n R_k N_k^n\left(\frac{u-c}{1-c}\right), \quad u \in [c, 1],$$

que unidas nos den $C(u)$. Lo que haremos a continuación es encontrar los nuevos puntos de control Q_0, \dots, Q_n y R_0, \dots, R_n . Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, por la ecuación de conversión 1.6

$$N_k^n(\lambda u) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} (\lambda u)^j, \quad k = 0, \dots, n,$$

y de la ecuación 1.3

$$\begin{aligned} N_k^n(\lambda u) &= \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} \lambda^j \left[\sum_{i=j}^n \frac{\binom{n-j}{i-j}}{\binom{n}{i}} N_i^n(u) \right] \\ &= \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \lambda^j \left[\sum_{i=j}^n \binom{i}{k} \binom{i-k}{j-k} N_i^n(u) \right]. \end{aligned}$$

Considerando $\binom{p}{q} = 0$ si $p < q$, se tiene

$$\begin{aligned} N_k^n(\lambda u) &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{k} N_i^n(u) \left[\sum_{j=0}^n (-1)^{j-k} \binom{i-k}{j-k} \lambda^j \right] \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} N_i^n(u) \left[\sum_{j=k}^i (-1)^{j-k} \binom{i-k}{j-k} \lambda^j \right] \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} N_i^n(u) \left[\sum_{h=0}^{i-k} (-1)^h \binom{i-k}{h} \lambda^{k+h} \right] \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} N_i^n(u) \left[\lambda^k \sum_{h=0}^{i-k} (-1)^h \binom{i-k}{h} \lambda^h \right] \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} N_i^n(u) (\lambda^k (1-\lambda)^{i-k}) \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} N_i^n(u) \frac{1}{\binom{i}{k}} N_k^i(\lambda) \\ &= \sum_{i=k}^n N_k^i(\lambda) N_i^n(u). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(u) &= \sum_{k=0}^n P_k N_k^n\left(\frac{u}{c}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n P_k \left[\sum_{i=k}^n N_k^i(c) N_i^n\left(\frac{u}{c}\right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n N_i^n\left(\frac{u}{c}\right) \left[\sum_{k=0}^i P_k N_k^i(c) \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$Q_i = \sum_{k=0}^i P_k N_k^i(c). \quad (1.16)$$

Cada Q_i es una curva de Bézier de grado i correspondiente a los puntos de control P_0, \dots, P_i , evaluada en el punto c , y por tanto Q_i , es el primero de los puntos calculados en la etapa i -ésima del algoritmo de De Casteljau

$$Q_i = P_0^{(i)}, \quad i = 0, \dots, n.$$

No es difícil ver que los puntos de control de la curva $C_2(u)$ son

$$R_i = P_i^{(n-i)}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Con esto ya tenemos los puntos de control de las nuevas curvas de Bézier.

1.9. Interpolación con curvas de Bézier

Supongamos que tenemos $n+1$ puntos a_0, \dots, a_n y queremos obtener una curva $C(t)$ definida en el intervalo $[0, 1]$ que cumpla $C(t_0) = a_0$ y $C(t_n) = a_n$. Para resolver esto, debemos encontrar el polígono de control de la curva $C(t)$ de grado n tal que

$$C(t_i) = \sum_{k=0}^n P_k N_k^n(t_i) = a_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

es decir, se trata de resolver un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones. En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} N_0^n(t_0) & \dots & N_n^n(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_0^n(t_n) & \dots & N_n^n(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

En base de potencias se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & t_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_0 \\ \vdots \\ \tilde{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_0 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{bmatrix}.$$

La matriz de coeficientes es una matriz de Vandermonde, y es no singular ya que los t_i son distintos. Con esto el sistema anterior tiene solución única.

1.9.1. Interpolación cúbica de Hermite

Sean Q_0, \dots, Q_m puntos de interpolación y

$$D_i = C'(u_i), \quad i = 0, \dots, m,$$

las derivadas de la curva en cada nodo de interpolación. A partir de los datos dados encontraremos los puntos de control $P_{3i-1}, P_{3i} = Q_i, P_{3i+1}$, para $i = 1, \dots, m-1$ de la curva $C(u)$ de grado 3. Recordemos que

$$C'(u_i) = \frac{3(P_{3i} - P_{3i-1})}{u_i - u_{i+1}} = \frac{3(P_{3i+1} - P_{3i})}{u_{i+1} - u_i}, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (1.17)$$

y

$$C'(u_0) = \frac{3(P_1 - P_0)}{u_1 - u_0}, \quad C'(u_m) = \frac{3(P_{3m} - P_{3m-1})}{u_m - u_{m-1}},$$

de la ecuación 1.17 se tiene

$$P_{3i-1} = Q_i - \frac{u_i - u_{i+1}}{3} D_i, \quad i = 1, \dots, m-1$$

y

$$P_{3i+1} = Q_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{3} D_i, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Luego

$$\begin{aligned} P_{3i} &= Q_i, & i = 0, \dots, m-1. \\ P_{3i-1} &= Q_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{3} D_i, & i = 1, \dots, m-1. \\ P_{3i+1} &= Q_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{3} D_i, & i = 0, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Las ecuaciones anteriores nos permiten calcular los puntos de control de una curva de Bézier cúbica de m tramos a partir de los puntos de interpolación Q_0, \dots, Q_m y de sus derivadas D_0, \dots, D_m .

Ejemplo 1.9. Consideremos los puntos de interpolación

$$Q_0 = (0, 1), \quad Q_1 = (5, 2), \quad Q_2 = (10, 5), \quad Q_3 = (6, 9), \quad Q_4 = (5, 4),$$

y las derivadas de la curva en los nodos $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$,

$$D_0 = (6, 12), \quad D_1 = (12, -12), \quad D_2 = (24, 48), \quad D_3 = (-48, 0), \quad D_4 = (48, -72).$$

Primero tenemos que

$$\begin{aligned} P_0 &= Q_0 = (0, 1), \\ P_3 &= Q_1 = (5, 2), \\ P_6 &= Q_2 = (10, 5), \\ P_9 &= Q_3 = (6, 9), \\ P_{12} &= Q_4 = (5, 4) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
P_1 &= Q_0 + \frac{u_1 - u_0}{3} D_0 = (1, 3), \\
P_2 &= Q_1 - \frac{u_1 - u_0}{3} D_1 = (3, 4), \\
P_4 &= Q_1 + \frac{u_2 - u_1}{3} D_1 = (6, 1), \\
P_5 &= Q_2 - \frac{u_2 - u_1}{3} D_2 = (8, 1), \\
P_7 &= Q_2 + \frac{u_3 - u_2}{3} D_2 = (11, 7), \\
P_8 &= Q_3 - \frac{u_3 - u_2}{3} D_3 = (8, 9), \\
P_{10} &= Q_3 + \frac{u_4 - u_3}{3} D_3 = (4, 9), \\
P_{11} &= Q_4 - \frac{u_4 - u_3}{3} D_0 = (3, 7).
\end{aligned}$$

Por lo que los puntos de control de la curva de Bézier son

$$\begin{aligned}
\text{Tramo 1: } & P_0 = (0, 1), \quad P_1 = (1, 3), \quad P_2 = (3, 4), \quad P_3 = (5, 2). \\
\text{Tramo 2: } & P_3 = (5, 2), \quad P_4 = (6, 1), \quad P_5 = (8, 1), \quad P_6 = (10, 5). \\
\text{Tramo 3: } & P_6 = (10, 5), \quad P_7 = (11, 7), \quad P_8 = (8, 9), \quad P_9 = (6, 9). \\
\text{Tramo 4: } & P_9 = (6, 9), \quad P_{10} = (4, 9), \quad P_{11} = (3, 7), \quad P_{12} = (5, 4).
\end{aligned}$$

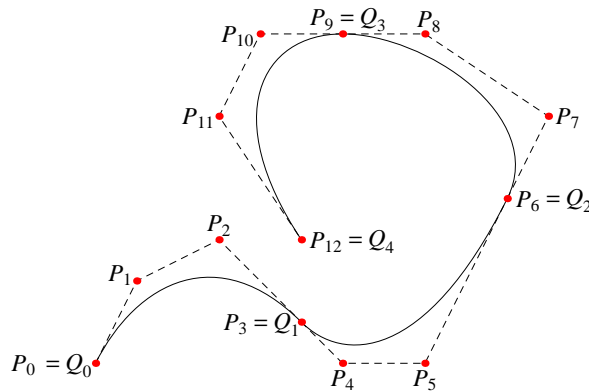


Figura 1.4: Gráfica ejemplo 1.9.

La forma del interpolante cúbico de Hermite depende de la dirección asignada a cada punto de soporte elegido, es por eso que se mostrarán métodos para estimar la derivada en cada punto del soporte. A continuación se describen los principales métodos para estimar D_i . Si el soporte no es conocido se elige basado en la longitud de cuerda. En todos los casos supondremos que tenemos $m + 1$ puntos de interpolación.

1. Interpolante de Catmul-Rown. La dirección de la tangente es un promedio entre los vectores que unen los siguientes puntos de interpolación Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1} .

$$D_i = r_i[(1 - \lambda_i)(Q_i - Q_{i-1}) + \lambda_i(Q_{i+1} - Q_i)], \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

Haciendo $\lambda_i = \frac{1}{2}$ y r_i en función del soporte

$$r_i = \frac{1}{\frac{1}{2}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1}{2}(u_{i+1} - u_i)}.$$

Así,

$$D_i = \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

2. Interpolante de Bessel. Este método se basa en construir una parábola $R(u)$ de tal manera que

$$\begin{aligned} R(u_{i-1}) &= Q_{i-1}, \\ R(u_i) &= Q_i, \\ R(u_{i+1}) &= Q_{i+1}, \end{aligned}$$

lo que nos interesa es tomar la aproximación $D_i = R'(u_i)$. Escribiendo la parábola de la forma

$$R(u) = A_2(u - u_i)^2 + A_1(u - u_i) + Q_i$$

se tiene que $R'(u_i) = A_1$, resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{aligned} Q_{i-1} &= A_2(u_{i-1} - u_i)^2 + A_1(u_{i-1} - u_i) + Q_i, \\ Q_{i+1} &= A_2(u_{i+1} - u_i)^2 + A_1(u_{i+1} - u_i) + Q_i, \end{aligned}$$

obtenemos,

$$R'(u_i) = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{u_{i+1} - u_i} + \frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+1} - u_{i-1}} \frac{Q_i - Q_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}$$

nombrando $\alpha_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}}$ y teniendo en cuenta que $\frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+1} - u_{i-1}} = 1 - \alpha_i$

$$D_i = \alpha_i \frac{Q_{i+1} - Q_i}{u_{i+1} - u_i} + (1 - \alpha_i) \frac{Q_i - Q_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}, \quad (1.19)$$

para $i = 1, \dots, m - 1$.

3. Interpolante de Akima. Este método se trata de una estimación de D_i de la forma 1.19, pero eligiendo

$$\alpha_i = \frac{\|Q_{i-1} - Q_{i-2}\|}{\|Q_{i-1} - Q_{i-2}\| + \|Q_{i+1} - Q_i\|},$$

para $i = 1, \dots, m - 1$.

Con los tres métodos vistos se obtienen estimaciones para las derivadas a excepción de D_0 y D_m . Si $R_1(u)$ es la parábola que interpola a Q_0, Q_1 y Q_2 en u_0, u_1 y u_2 entonces

$$\begin{aligned} D_0 &= R_1'(u_0), \\ D_1 &= R_1'(u_1), \end{aligned}$$

donde D_1 se calcula por 1.19 y D_0 puede simplificarse para obtener

$$D_0 = 2 \frac{q_1 - Q_0}{u_1 - u_0} - D_1.$$

Ahora, si la parábola $R_{m-1}(u)$ interpola a Q_{m-2} , Q_{m-1} y Q_m en u_{m-2} , u_{m-1} y u_m respectivamente, se tiene

$$D_m = R'_{m-1}(u_m),$$

luego

$$D_m = 2 \frac{Q_m - Q_{m-1}}{u_m - u_{m-1}} - D_{m-1}.$$

1.10. Algoritmo para evaluar curvas de Bézier

A continuación se muestra el algoritmo para la evaluación de una curva de Bézier.

1. Calcular los nodos de interpolación a partir de los puntos de interpolación Q_i .
2. Calcular las derivadas en cada nodo de interpolación.
3. Calcular los puntos de control P_i con las ecuaciones 1.18.
4. Aplicar el algoritmo de De Casteljaou.

En la sección A.1 del Apéndice A, se muestran los ejemplos correspondientes a este capítulo.

Capítulo 2

Aproximación en el plano por splines cúbicos

Sea $X_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$. Supongamos que deseamos obtener una función $s \in C[a, b]$ que aproxime a la función f de la cual sólo conocemos los valores

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Una forma de resolver este problema es la interpolación lineal en cada subintervalo. Dados los datos (2.1), la función s es definida en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ como una línea recta que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Así, la función s esta dada por

$$s(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f(x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (2.2)$$

para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Como s se compone de líneas rectas se tiene que es continua. En general, podemos definir s una función polinomial de grado a lo más k en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tal que $f(x_i) = s(x_i)$, para $i = 0, \dots, n - 1$. Cuando s se define de esta manera se le llama *spline*.

Dada una partición X_n de $[a, b]$

$$X_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

se define un *spline de grado k* como una función $s \in C^{k-1}[a, b]$ tal que en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, s es un polinomio de grado a lo más k . A los puntos x_0, \dots, x_n se les conoce como nodos o puntos de apoyo. Denotemos por $S(X_n, k)$ al conjunto de funciones spline en X_n de grado k . Nótese que el conjunto de polinomios de grado k en $[a, b]$ es un subconjunto de $S(X_n, k)$. A continuación analizaremos los splines cúbicos.

2.1. Splines cúbicos

Definición 2.1. Dada una partición X_n del intervalo $[a, b]$

$$X_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

una función $s \in C^2[a, b]$ se denomina *spline cúbico* si satisface las siguientes condiciones:

1. El polinomio s es de grado a lo más 3 en cada subintervalo

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

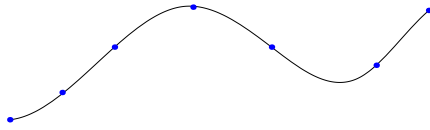
2. Se cumple que s es continua, así como su primera y segunda derivada en $[a, b]$, es decir,

$$s^{(k)}(x_i - 0) = s^{(k)}(x_i + 0), \quad k = 0, 1, 2 \text{ y } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Donde $s^{(k)}(x_i - 0)$ y $s^{(k)}(x_i + 0)$ denotan continuidad por la izquierda y por la derecha respectivamente. Si además, se tiene una función $f \in C^2[a, b]$ tal que $y_i = f(x_i)$, para $i = 0, 1, \dots, n$ y

3. se cumple $s(x_i) = f(x_i)$, entonces a $s(x)$ se le llama spline cúbico interpolante de f en X_n .

A continuación se muestra la gráfica de un spline cúbico.



2.1.1. Construcción de los splines cúbicos

Ahora mostraremos la construcción de los splines cúbicos y algunas condiciones que deben cumplir.

Denotemos por $s(x_i) = y_i$, $s'(x_i) = m_i$, $s''(x_i) = M_i$ y $h_i = x_i - x_{i-1}$. Usando la fórmula de interpolación de Lagrange, el spline cúbico está dado por

$$s(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + a_i x + b_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (2.3)$$

y se tiene que

$$s'(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + a_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (2.4)$$

Ahora, dado que $s(x_i) = y_i$, de la ecuación (2.3)

$$y_i = s(x_i) = M_i \frac{h_i^2}{6} + a_i x_i + b_i.$$

Análogamente para y_{i-1} tenemos

$$y_{i-1} = M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + a_i x_{i-1} + b_i.$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i = y_i - M_i \frac{h_i^2}{6} \\ a_i x_{i-1} + b_i = y_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \end{cases}$$

para a_i y b_i , obtenemos,

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6},$$

sustituyendo en la expresión (2.4)

$$\begin{aligned} s'(x) &= -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \\ &\quad - \frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

también tenemos que

$$b_i = -a_i x_i + y_i - M_i \frac{h_i^2}{6}.$$

Por lo tanto

$$a_i x + b_i = \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6} \right) (x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} \right) (x - x_{i-1}).$$

Luego la ecuación 2.3 se convierte en

$$\begin{aligned} s(x) &= M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} \\ &\quad + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{6} \right) (x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} \right) (x - x_{i-1}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

para $x \in [x_{i-1}, x_i]$. De (2.5), obtenemos,

$$s'(x_i - 0) = M_i \frac{h_i}{3} + M_{i-1} \frac{h_i}{6} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

y

$$s'(x_{i-1} - 0) = -M_{i-1} \frac{h_i}{3} - M_i \frac{h_i}{6} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i},$$

si reemplazamos $i - 1$ por i e i por $i + 1$ en ésta última ecuación, tenemos

$$s'(x_i + 0) = -M_i \frac{h_{i+1}}{3} - M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \quad (2.7)$$

como estamos suponiendo que s' es continua, se debe cumplir

$$s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0),$$

es decir,

$$M_i \frac{h_i}{3} + M_{i-1} \frac{h_i}{6} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = -M_i \frac{h_{i+1}}{3} - M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}.$$

Reduciendo la expresión anterior, obtenemos,

$$\frac{1}{6}h_i M_{i-1} + \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1})M_i + \frac{1}{6}h_{i+1}M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad (2.8)$$

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$$

o equivalentemente

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (2.9)$$

en donde

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad y \quad d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right),$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Las ecuaciones 2.9 se conocen como ecuaciones de M -continuidad del spline cúbico s que interpola a f en X_n .

Utilizando los valores $s'(x_i) = m_i$ se puede hacer una interpolación de Hermite [6], lo cual nos da un polinomio de grado 3 en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} s(x) &= f(x_{i-1}) \left(\frac{(x - x_i)^2}{h_i^2} + 2 \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)^2}{h_i^3} \right) \\ &+ f(x_i) \left(\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} - 2 \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})^2}{h_i^3} \right) \\ &+ f'(x_{i-1})(x - x_{i-1}) \frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} + f'(x_i)(x - x_i) \frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} \end{aligned}$$

de igual forma se tiene

$$\begin{aligned} s(x) &= y_{i-1} \frac{[h_i + 2(x - x_{i-1})](x - x_i)^2}{h_i^3} + y_i \frac{[h_i - 2(x - x_i)](x - x_{i-1})^2}{h_i^3} \\ &+ m_{i-1} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)^2}{h_i^2} - m_i \frac{(x_i - x)(x - x_{i-1})^2}{h_i^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Derivando la expresión anterior

$$s'(x) = 6 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^3} (x - x_i)(x - x_{i-1}).$$

$$s''(x) = 6 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^3} (x_i + x_{i-1} - 2x).$$

Por lo tanto,

$$s''(x_i - 0) = \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} - 6 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}.$$

$$s''(x_{i-1} + 0) = -\frac{4m_{i-1}}{h_i} - \frac{2m_i}{h_i} + 6 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}.$$

Si sustituimos $i - 1$ por i e i por $i + 1$ en la última ecuación, se tiene

$$s''(x_i + 0) = -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} + 6\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2}, \quad (2.11)$$

por la condición de continuidad de la segunda derivada se debe tener que

$$s''(x_i - 0) = s''(x_i + 0)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} - 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} &= -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} + 6\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2}, \\ \frac{2}{h_i}m_{i-1} + \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}\right)4m_i + \frac{2}{h_{i+1}}m_{i+1} &= 6\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2}\right), \\ \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}m_{i+1} &= 3\left(\lambda_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \mu_i\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}\right), \\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} &= C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde los valores λ_i y μ_i han sido definidos anteriormente y

$$C_i = 3\left(\lambda_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \mu_i\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}\right).$$

A las ecuaciones 2.12 se les llama ecuaciones de m – *continuidad* del spline cúbico s que interpola a f en X_n .

2.2. Condiciones finales

Se han mostrado dos formas de obtener el spline cúbico s , las cuales están dadas por las ecuaciones 2.6 y 2.10. Al definir los valores M_i o m_i , $i = 0, 1, \dots, n$, el spline s queda completamente determinado. Para lograr esto, se utilizarán las $n - 1$ ecuaciones lineales descritas por 2.9 y 2.12 para M_i y m_i respectivamente. Ya que para encontrar los $n + 1$ valores desconocidos, sólo contamos con $n - 1$ ecuaciones lineales, necesitamos agregar nuevas condiciones que reciben el nombre de *condiciones finales*. Las condiciones faltantes se pueden obtener:

1. Especificando el valor de la primera o la segunda derivada de f en los puntos $x = a$ y $x = b$.
2. Estableciendo algunas de las siguientes relaciones

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 \quad y \quad \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

o

$$2m_0 + \mu_0 m_1 = C_0 \quad y \quad \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = C_n,$$

donde $d_0, C_0, d_n, C_n \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \lambda_0, \mu_0, \mu_n, \lambda_n \leq 1$.

3. Dando la condición final periódica

$$y_n = y_0, \quad m_n = m_0 \quad y \quad M_n = M_0.$$

Una vez que se agrega cualquiera de las tres condiciones finales, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con $n + 1$ ecuaciones y $n + 1$ incógnitas para el cual, la matriz de coeficientes es tridiagonal y diagonalmente dominante, además es no singular y por tanto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Teorema de existencia y unicidad). Supongamos que tenemos una partición X_n de $[a, b]$

$$X_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$f \in C^2[a, b]$. Para cualquiera de las tres condiciones finales que se impongan, existe un único spline cúbico que interpola a f .

Por la construcción de un spline cúbico de interpolación, se sabe que s interpola a f en los x_i y lo mismo ocurre para s' y f' , más aún se tiene el siguiente resultado que nos asegura la convergencia de s a f al igual que la de $s^{(i)}$ a $f^{(i)}$ para $i = 1, 2$.

Teorema 2.2 (Teorema de Convergencia). Supongamos que tenemos una partición X_n de $[a, b]$

$$X_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$f \in C^2[a, b]$ y $s \in S(X_n, 3)$ que satisfacen

$$s(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n;$$

$$s'(a) = f'(a), \quad s'(b) = f'(b).$$

Entonces, para todo $x \in [a, b]$, $|f^{(r)}(x) - s^{(r)}(x)| \leq 5\delta^{2-r}\omega(f''; [a, b], \delta)$, para $r = 0, 1, 2$.

Donde $\delta = \delta(X_n) = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ y $\omega(f''; [a, b], \delta)$ es el módulo de continuidad de f'' para δ sobre $[a, b]$.

Demostración. Ver [8] □

2.3. El subespacio lineal $S(X_n, 3)$

Afirmamos que $S(X_n, 3)$ es un subespacio lineal de $C^2[a, b]$. En efecto, dados $s_1, s_2 \in S(X_n, 3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

1. $s_1 + \alpha s_2$ es cúbico en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, pues así lo son s_1 y s_2 .
2. $s_1 + \alpha s_2$ es continua así como su primera derivada sobre $[a, b]$ pues $s_1, s_2 \in C^2[a, b]$.

Por lo anterior $S(X_n, 3)$ es un espacio vectorial, más aún, es un espacio vectorial de dimensión $n + 3$, para ver esto, consideremos la partición X_n del intervalo $[a, b]$ definida anteriormente, y las funciones splines cúbicos que satisfacen las condiciones

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$c'_i(x_0) = c'_i(x_n) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

A estas funciones splines se les conoce como *splines fundamentales*. Ahora bien, afirmamos que las funciones $\{x, x^2, c_0(x), \dots, c_n(x)\}$ forman una base para $S(X_n, 3)$. En efecto, obsérvese que

$$t(x) = ax + bx^2 + \sum_{i=0}^n \alpha_i c_i(x) \in S(X_n, 3).$$

Si $s \in S(X_n, 3)$, nombremos $s_i = s(x_i)$, para $i = 0, \dots, n$ y $s'_0 = s'(x_0)$, $s'_n = s'(x_n)$, consideremos

$$q(x) = \frac{x^2}{2} \frac{s'_0 - s'_n}{x_0 - x_n} + x \frac{s'_0 x_n - s'_n x_0}{x_n - x_0},$$

claramente $q \in P_2$ y $s - q \in S(X_n, 3)$, $q'(x_0) = s'_0$ y $q'(x_n) = s'_n$.
Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^n (s_i - q_i) c_i(x)$$

es un spline cúbico que interpola a la función $s - q$ y por el Teorema 2.1 esto implica que

$$s(x) - q(x) = \sum_{i=0}^n (s_i - q_i) c_i(x),$$

equivalentemente

$$s(x) = q(x) + \sum_{i=0}^n (s_i - q_i) c_i(x).$$

Por lo tanto $x, x^2, c_0(x), \dots, c_n(x)$ generan a $S(X_n, 3)$. Ahora veamos que son linealmente independientes. Supongamos que

$$t(x) = ax + bx^2 + \sum_{i=0}^n \alpha_i c_i = 0,$$

para $a, b, \alpha_i \in \mathbb{R}$, entonces $t'(x_0) = t'(x_n) = 0$, pero

$$\begin{aligned} t'(x_0) &= a + 2bx_0 + \sum_{i=0}^n \alpha_i c'_i(x_0) \\ &= a + 2bx_0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} t'(x_n) &= a + 2bx_n + \sum_{i=0}^n \alpha_i c'_i(x_n) \\ &= a + 2bx_n, \end{aligned}$$

así se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} a + 2bx_0 = 0 \\ a + 2bx_n = 0 \end{cases}$$

de aquí que $a = b = 0$, luego

$$t(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i c_i(x) = 0.$$

Ahora evaluando en x_j se tiene lo siguiente

$$t(x_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i c_i(x_j) = \alpha_j,$$

esto implica que $\alpha_j = 0$, para $j = 0, \dots, n$, así $x, x^2, c_0(x), \dots, c_n(x)$ son *linealmente independientes* y por lo tanto forman una base para $S(X_n, 3)$, de aquí que la dimensión de $S(X_n, 3)$ es $n + 3$.

Como hemos visto, la manera de definir un spline cúbico dada una partición X_n , es estableciendo los valores que debe tomar la función en cada nodo x_i , también es necesario dar alguna de las 3 condiciones finales mencionadas anteriormente. Sean $n+3$ splines cúbicos $\phi_0, \dots, \phi_{n+2}$, que satisfacen las siguientes condiciones de interpolación

$$\begin{aligned}\phi_i(x_j) &= \delta_{ij}, & i, j &= 0, \dots, n; \\ \phi'_i(x_0) &= \phi'_i(x_n) = 0, & i &= 0, \dots, n; \\ \phi_{n+1}(x_i) &= 0, & i &= 0, \dots, n; \\ \phi'_{n+1}(x_0) &= \phi'_{n+2}(x_n) = 1, \\ \phi'_{n+1}(x_n) &= 0, \\ \phi_{n+2}(x_i) &= \phi'_{n+2}(x_0) = 0, & i &= 0, \dots, n;\end{aligned}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (2.13)$$

Veamos que este conjunto también forma una base para $S(X_n, 3)$, basta con demostrar que sus elementos son linealmente independientes. Supongamos que

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+2} \alpha_i \phi_i(x) = 0,$$

si evaluamos en s en x_j , $j = 0, \dots, n$, se tiene

$$s(x_j) = \sum_{i=0}^{n+2} \alpha_i \phi_i(x_j) = x_j = 0,$$

entonces

$$a_{n+1} \phi_{n+1}(x) + a_{n+2} \phi_{n+2}(x) = 0,$$

al derivar la expresión se tiene que

$$a_{n+1} \phi'_{n+1}(x) + a_{n+2} \phi'_{n+2}(x) = 0,$$

evaluando en x_0 y x_n

$$a_{n+1} = 0 \text{ y } a_{n+2} = 0.$$

Así, concluimos que $\{\phi_i : i = 0, \dots, n+2\}$ es una base para $S(X_n, 3)$. Esta base recibe el nombre de *base cardinal*.

Otra forma de representar los splines cúbicos es usando el concepto de función de *potencias truncadas*, estas funciones se denotan por x_+^k .

A continuación definimos dichas funciones

$$x_+^k = \begin{cases} x^k, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

La siguiente figura muestra la gráfica de $(x - x_i)_+^3$ para $i = 1, \dots, n - 1$.

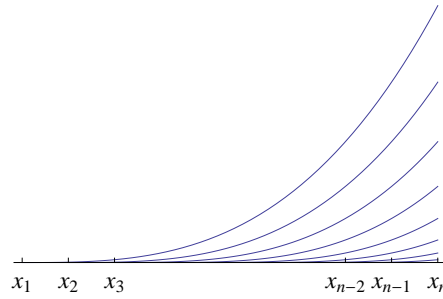


Figura 2.1: Potencias truncadas.

Veamos que $\{1, x, x^2, x^3, (x - x_1)_+^3, \dots, (x - x_{n-1})_+^3\}$ es una base para $S(X_n, 3)$, para esto primero obsérvese que $(x - x_1)_+^3, \dots, (x - x_{n-1})_+^3$ son linealmente independientes. Supongamos que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x - x_i)_+^3 = 0, \quad (2.15)$$

para $c_i \in \mathbb{R}$.

Si $y_1 \in (x_1, x_2)$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= f(y_1) \\ &= c_1 (y_1 - x_1)_+^3 \\ &= c_1 (y_1 - x_1)^3, \end{aligned}$$

sabemos que $(y_1 - x_1)^3 > 0$, entonces $c_1 = 0$.

Ahora, para $y_2 \in (x_2, x_3)$

$$\begin{aligned} 0 &= f(y_2) \\ &= c_2 (y_2 - x_2)_+^3 \\ &= c_2 (y_2 - x_2)^3, \end{aligned}$$

como $(y_2 - x_2)^3 > 0$, entonces $c_2 = 0$. Siguiendo con este mismo procedimiento, se tiene que dado $y_i \in (x_i, x_{i+1})$

$$\begin{aligned} 0 &= f(y_i) \\ &= c_i (y_i - x_i)_+^3 \\ &= c_i (y_i - x_i)^3, \end{aligned}$$

dado que $(y_i - x_i)^3 > 0$, se concluye que $c_i = 0$.

Ahora, supongamos que

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x - x_i)_+^3 + c_n + c_{n+1}x + c_{n+2}x^2 + c_{n+3}x^3 = 0, \quad (2.16)$$

para $c_i \in \mathbb{R}$.

Evaluando en x_0 y x_1 respectivamente

$$\begin{aligned} p(x_0) &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x_0 - x_i)^3 + c_n + c_{n+1}x_0 + c_{n+2}x_0^2 + c_{n+3}x_0^3 \\ &= c_n + c_{n+1}x_0 + c_{n+2}x_0^2 + c_{n+3}x_0^3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x_1) &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x_1 - x_i)^3 + c_n + c_{n+1}x_1 + c_{n+2}x_1^2 + c_{n+3}x_1^3 \\ &= c_n + c_{n+1}x_1 + c_{n+2}x_1^2 + c_{n+3}x_1^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para $y_1 \in (x_0, x_1)$, se tiene

$$\begin{aligned} p(y_1) &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(y_1 - x_i)^3 + c_n + c_{n+1}y_1 + c_{n+2}y_1^2 + c_{n+3}y_1^3 \\ &= c_n + c_{n+1}y_1 + c_{n+2}y_1^2 + c_{n+3}y_1^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, sea $y_2 \neq y_1 \in (x_0, x_1)$

$$\begin{aligned} p(y_2) &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(y_2 - x_i)^3 + c_n + c_{n+1}y_2 + c_{n+2}y_2^2 + c_{n+3}y_2^3 \\ &= c_n + c_{n+1}y_2 + c_{n+2}y_2^2 + c_{n+3}y_2^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas

$$\begin{cases} c_n + c_{n+1}x_0 + c_{n+2}x_0^2 + c_{n+3}x_0^3 = 0 \\ c_n + c_{n+1}x_1 + c_{n+2}x_1^2 + c_{n+3}x_1^3 = 0 \\ c_n + c_{n+1}y_1 + c_{n+2}y_1^2 + c_{n+3}y_1^3 = 0 \\ c_n + c_{n+1}y_2 + c_{n+2}y_2^2 + c_{n+3}y_2^3 = 0 \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es una matriz de Vandermonde. Calculando su determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2^3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

De aquí que los coeficientes c_n, c_{n+1}, c_{n+2} y c_{n+3} deben ser cero. Regresando a la expresión 2.16

tendríamos una combinación lineal igual a cero, como ya habíamos demostrado que las funciones truncadas son linealmente independientes, podemos concluir que $\{1, x, x^2, x^3, (x - x_1)_+^3, \dots, (x - x_{n-1})_+^3\}$ es una base para $S(X_n, 3)$. Así, un spline cúbico se expresa

$$s(x) = p(x) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x - x_i)_+^3, \quad (2.17)$$

para algunos $c_i \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, donde $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ denota el espacio de los polinomios de grado a lo más 3 con coeficientes en \mathbb{R} .

Ejemplo 2.1. Sea $X_3 : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 3$, una partición de $[0, 3]$, con $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. A continuación mostraremos como expresar los splines fundamentales en términos de la base de potencias truncadas. Recordemos que los *splines fundamentales* están definidos como

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$c'_i(x_0) = c'_i(x_3) = 0, \quad j, i = 0, \dots, 3.$$

Proponemos

$$s_i(x) = a_0^i + a_1^i x + a_2^i x^2 + a_3^i x^3 + a_4^i (x - 1)_+^3 + a_5^i (x - 2)_+^3, \quad i = 0, \dots, 3,$$

derivando la expresión anterior, se obtiene,

$$s'_i(x) = a_1^i + 2a_2^i x + 3a_3^i x^2 + 3a_4^i (x - 1)_+^2 + 3a_5^i (x - 2)_+^2, \quad i = 0, \dots, 3.$$

De las condiciones de interpolación

$$\begin{aligned} s_i(x_j) &= c_i(x_j), & j, i = 0, \dots, 3, \\ s'_i(x_0) &= c'_i(x_0) = 0, & i = 0, \dots, 3, \\ s'_i(x_3) &= c'_i(x_3) = 0, & i = 0, \dots, 3, \end{aligned}$$

obtenemos los sistemas

$$\begin{cases} a_0^i &= c_i(x_0) \\ a_0^i + a_1^i + a_2^i + a_3^i &= c_i(x_1) \\ a_0^i + 2a_1^i + 4a_2^i + 8a_3^i + a_4^1 &= c_i(x_2) \\ a_0^i + 3a_1^i + 9a_2^i + 27a_3^i + 8a_4^1 + a_5^i &= c_i(x_3) \\ a_1^i &= 0 \\ a_1^i + 6a_2^i + 27a_3^i + 12a_4^1 + 3a_5^i &= 0 \end{cases}$$

Equivalentemente

$$\begin{cases} a_0^i &= c_i(x_0) \\ a_0^i + a_2^i + a_3^i &= c_i(x_1) \\ a_0^i + 4a_2^i + 8a_3^i + a_4^1 &= c_i(x_2) \\ a_0^i + 9a_2^i + 27a_3^i + 8a_4^1 + a_5^i &= c_i(x_3) \\ 6a_2^i + 27a_3^i + 12a_4^1 + 3a_5^i &= 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema para cada $i = 0, 1, 2, 3$, obtenemos,

$$\begin{aligned} s_0(x) &= 1 - \frac{11}{5}x^2 + \frac{6}{5}x^3 - \frac{9}{5}(x-1)_+^3 + \frac{4}{5}(x-2)_+^3, \\ s_1(x) &= \frac{14}{5}x^2 - \frac{9}{5}x^3 + \frac{16}{5}(x-1)_+^3 - \frac{11}{5}(x-2)_+^3, \\ s_2(x) &= -\frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}x^3 - \frac{11}{5}(x-1)_+^3 + \frac{16}{5}(x-2)_+^3, \\ s_3(x) &= \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}(x-1)_+^3 - \frac{9}{5}(x-2)_+^3. \end{aligned}$$

Así tenemos que la base de splines fundamentales $\{x, x^2, c_0(x), c_1(x), c_2(x), c_3(x)\}$ expresada en términos de potencias truncadas esta dada por $x, x^2, s_0(x), s_1(x), s_2(x), s_3(x)$.

Generalizando, se puede demostrar que el conjunto de funciones

$$\{1, x, \dots, x^k, (x-x_1)_+^k, \dots, (x-x_{n-1})_+^k\},$$

es una base para $S(X_n, k)$, el cual es por tanto, un espacio vectorial de dimensión $n+k$. Así, dado $s \in S(X_n, k)$

$$s(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i + \sum_{i=1}^{n-1} d_i (x-x_i)_+^k, \quad (2.18)$$

para algunos $c_i, d_i \in \mathbb{R}$.

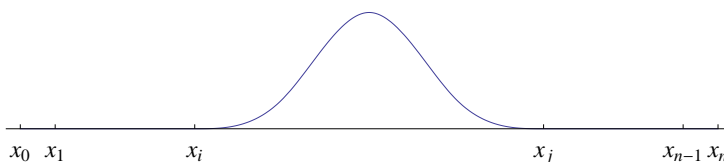
Capítulo 3

Curvas B-Splines

Este capítulo está dedicado al estudio de las curvas B-Spline. Una curva B-Spline es una curva polinómica a tramos, donde los tramos se conectan entre sí con un cierto grado de diferenciabilidad. Comenzaremos el capítulo con la construcción de una base para $S(X_n, 3)$.

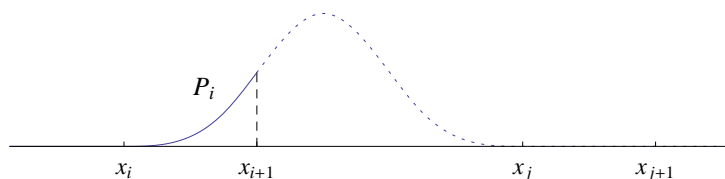
3.1. Base de B-Splines

Como se vio anteriormente, con las potencias truncadas hemos encontrado funciones que son una base para los splines cúbicos y que son idénticamente nulas en toda la recta real excepto en un intervalo. Una pregunta interesante sería: ¿Cuál es el menor número de subintervalos consecutivos de $[a, b]$, en los que un spline cúbico no trivial puede ser no nulo?



No es difícil probar que no es posible encontrar un spline cúbico que sólo sea no nulo en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, tampoco es posible encontrar un spline cúbico no nulo sólo en dos subintervalos de $[a, b]$. A continuación revisaremos con detalle que no es posible obtener un spline cúbico que sea no nulo únicamente en tres subintervalos de $[a, b]$.

En la figura se muestra el primer tramo de no-nulidad $P_i(x)$, correspondiente al subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$.



Dado que el spline debe ser dos veces diferenciable en $x = x_i$, es decir,

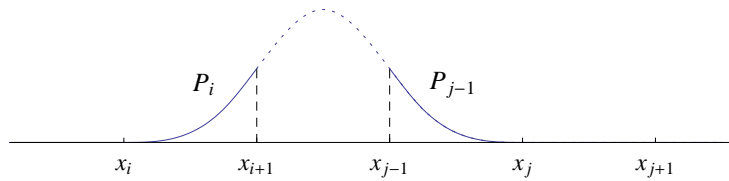
$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= 0, \\ P_i'(x_i) &= 0, \\ P_i''(x_i) &= 0, \end{aligned}$$

así, $P_i(x)$ será de la forma

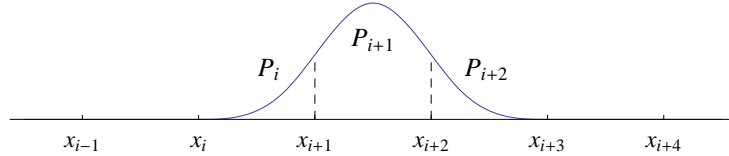
$$P_i(x) = \lambda(x - x_i)^3. \quad (3.1)$$

Con este mismo razonamiento, se tiene que el último tramo de la curva, el polinomio $P_{j-1}(x)$ definido en $(x_{j-1}, x_j]$ esta dado por

$$P_{j-1}(x) = \mu(x - x_j)^3. \quad (3.2)$$



Ahora si estos dos tramos se unen, la gráfica se verá de la siguiente manera, en donde $j = i + 3$.



La curva de unión entre $P_i(x)$ y $P_{i+2}(x)$ es un polinomio de tercer grado $P_{i+1}(x)$ que podemos escribir de la siguiente manera

$$P_{i+1}(x) = a_3(x - x_{i+1})^3 + a_2(x - x_{i+1})^2 + a_1(x - x_{i+1}) + a_0. \quad (3.3)$$

Denotemos por $h_i = x_{i+1} - x_i$, se deben cumplir las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} P_{i+1}(x_{i+1}) &= P_i(x_{i+1}), \\ P_{i+1}'(x_{i+1}) &= P_i'(x_{i+1}), \\ P_{i+1}''(x_{i+1}) &= P_i''(x_{i+1}), \end{aligned}$$

de la ecuación 3.3 y 3.1 se obtiene

$$P_{i+1}(x_{i+1}) = a_0 = \lambda(x_{i+1} - x_i)^3.$$

Ahora derivando las ecuaciones 3.3, 3.1 y evaluando en $x = x_{i+1}$

$$P_{i+1}'(x_{i+1}) = a_1 = 3\lambda(x_{i+1} - x_i)^2,$$

de aquí se tiene que $a_1 = 3\lambda(x_{i+1} - x_i)^2$, también

$$P''_{i+1}(x_{i+1}) = 2a_2 = 6\lambda(x_{i+1} - x_i),$$

así, $a_2 = 3\lambda h_i$. Ahora sustituyendo a_0, a_1 y a_2 en la ecuación 3.3, obtenemos,

$$P_{i+1}(x) = a_3(x - x_{i+1})^3 + 3\lambda h_i(x - x_{i+1})^2 + 3\lambda h_i^2(x - x_{i+1}) + \lambda h_i^3, \quad (3.4)$$

agregando la condición de que P_{i+1} y P_{i+2} coincidan hasta la segunda derivada en $x = x_{i+2}$, se tiene

$$\begin{aligned} P_{i+1}(x_{i+2}) &= a_3 h_{i+1}^3 + 3\lambda h_i h_{i+1}^2 + 3\lambda h_i^2 h_{i+1} + \lambda h_i^3 \\ &= \mu(x_{i+2} - x_{i+3})^3 = -\mu h_{i+2}^3, \\ P'_{i+1}(x_{i+2}) &= 3a_3 h_{i+1}^2 + 6\lambda h_i h_{i+1} + 3\lambda h_i^2 = 3\mu(x_{i+2} - x_{i+3})^2 = 3\mu h_{i+2}^2, \\ P''_{i+1}(x_{i+2}) &= 6a_3 h_{i+1} + 6\lambda h_i = 6\mu(x_{i+2} - x_{i+3}) = -6\mu h_{i+2}, \end{aligned}$$

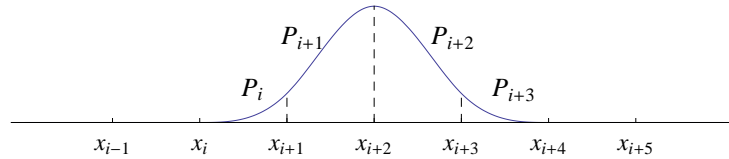
tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} (a_3 - \lambda)h_{i+1}^3 + \lambda(h_i + h_{i+1})^3 + \mu h_{i+2}^3 = 0 \\ (a_3 - \lambda)h_{i+1}^2 + \lambda(h_i + h_{i+1})^2 - \mu h_{i+2}^2 = 0 \\ (a_3 - \lambda)h_{i+1} + \lambda(h_i + h_{i+1}) + \mu h_{i+2} = 0. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es no singular, por lo que el sistema tiene solución única. En donde,

$$\begin{cases} a_3 - \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

entonces $a_3 = \lambda = \mu = 0$. Con esto se concluye que los polinomios $P_i(x)$, $P_{i+1}(x)$ y $P_{i+2}(x)$ son nulos, es decir, la función spline es nula. Dado que no es posible construir un spline cúbico tomando únicamente tres intervalos en donde la función es no nula, se buscará un spline no nulo en cuatro intervalos.



Ahora se toma $P_{i+3}(x)$ como el polinomio $P_{i+2}(x)$ anterior, resta calcular el nuevo $P_{i+2}(x)$, este lo obtendremos a partir de $P_{i+3}(x)$ imponiendo continuidad hasta la segunda derivada en $x = x_{i+3}$, de la misma manera que se calculó $P_{i+1}(x)$ en función de $P_i(x)$.

De esta manera se tienen que los polinomios en cada subintervalo son

$$\begin{aligned} P_i(x) &= \lambda(x - x_i)^3, \\ P_{i+1}(x) &= a_3(x - x_{i+1})^3 + 3\lambda h_i(x - x_{i+1})^2 + 3\lambda h_i^2(x - x_{i+1}) + \lambda h_i^3, \\ P_{i+2}(x) &= b_3(x - x_{i+3})^3 - 3\mu h_{i+3}(x - x_{i+3})^2 + 3\mu h_{i+3}^2(x - x_{i+3}) - \mu h_{i+3}^3, \\ P_{i+3}(x) &= \mu(x - x_{i+4}). \end{aligned}$$

Imponiendo continuidad en $x = x_{i+2}$

$$P_{i+1}(x_{i+2}) = P_{i+2}(x_{i+2}),$$

entonces

$$(a_3 - \lambda)h_{i+1}^3 + \lambda(h_i + h_{i+1})^3 + (b_3 - \mu)h_{i+2}^3 + \mu(h_{i+2} + h_{i+3})^3 = 0.$$

Como se debe cumplir

$$P'_{i+1}(x_{i+2}) = P'_{i+2}(x_{i+2})$$

equivalentemente

$$(a_3 - \lambda)h_{i+1}^2 + \lambda(h_i + h_{i+1})^2 - (b_3 - \mu)h_{i+2}^2 - \mu(h_{i+2} + h_{i+3})^2 = 0.$$

También se debe cumplir

$$P''_{i+1}(x_{i+2}) = P''_{i+2}(x_{i+2}),$$

entonces

$$(a_3 - \lambda)h_{i+1} + \lambda(h_i + h_{i+1}) + (b_3 - \mu)h_{i+2} + \mu(h_{i+2} + h_{i+3}) = 0.$$

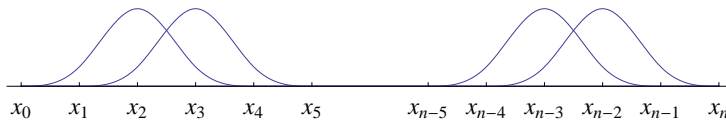
Así, se obtiene un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} h_{i+1}^3 & (h_i + h_{i+1})^3 & h_{i+2}^3 \\ h_{i+1}^2 & (h_i + h_{i+1})^2 & -h_{i+2}^2 \\ h_{i+1} & (h_i + h_{i+1}) & h_{i+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 - \lambda \\ \lambda \\ b_3 - \mu \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -(h_{i+2} + h_{i+3})^3 \\ (h_{i+2} + h_{i+3})^2 \\ -(h_{i+2} + h_{i+3}) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

La matriz es no singular, así que el sistema tiene solución única para cada valor de μ . Llamaremos B-Splines a los splines que son no nulos únicamente en un intervalo $[x_i, x_{i+4}]$. Dada una partición X_n del intervalo $[a, b]$ se pueden construir los siguientes $n - 3$ B-Splines

$$B_0^3(x), B_1^3(x), \dots, B_{n-4}^3(x),$$

que se muestran en la gráfica



Lo que deseamos es construir una base para $S(X_n, 3)$, sabemos que este espacio tiene dimensión $n + 3$ por lo que falta definir 6 B-Splines más para completar la base, esto se soluciona introduciendo tres nodos a la izquierda de x_0 y tres a la derecha de x_n . Con esto ya se pueden considerar los siguientes B-Splines

$$B_{-3}^3(x), B_{-2}^3(x), B_{-1}^3(x), B_0^3(x), B_1^3(x), \dots, B_{n-4}^3(x), B_{n-3}^3(x), B_{n-1}^3(x).$$

Así ya tenemos una base para $S(X_n, 3)$ y cualquier spline cúbico podrá expresarse como combinación lineal de estos B-Splines

$$s(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} \lambda_k B_k^3(x)$$

Una de las propiedades más relevantes de la base de los B-Splines es que son de soporte compacto, es decir, $B_k^3(x)$ es no nulo sólo en el subintervalo $[x_k, x_{k+4}]$.

En general, queremos encontrar una base $\{B_k^p(x), k = 1, \dots, p+n\}$ del espacio de splines $S(X_n, p)$ definidos en el intervalo $[a, b]$ tal que todo $s \in S(X_n, p)$ pueda expresarse

$$s(x) = \sum_{k=1}^{p+n} \lambda_k B_k^p(x)$$

donde cada $B_k^p(x)$ sea cero en casi todo el intervalo $[a, b]$, excepto en un intervalo de la forma (x_k, x_t) , donde $0 < k < t < n$ y $X_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Esto es

$$\begin{aligned} B_k^p(x) &= 0, & x \in [x_0, x_k] \cup [x_t, x_n], \\ B_k^p(x) &\neq 0, & x \in (x_k, x_t). \end{aligned}$$

Supongamos que

$$B_k^p(x) = \sum_{i=k}^t d_i (x - x_i)_+^p, \quad x \in [a, b],$$

donde los d_i deben satisfacer la condición $B_k^p(x) = 0$, para $x_t \leq x \leq b$, es decir,

$$\sum_{i=k}^t d_i (x - x_i)_+^p = 0, \quad x \in [x_t, b], \quad (3.6)$$

pero

$$(x - x_i)_+^p = \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} x_i^r x_+^{p-r}, \quad i = k, \dots, t.$$

Así, la ecuación 3.6 queda

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=k}^t d_i (x - x_i)_+^p \\ &= \sum_{i=k}^t d_i \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} x_i^r x_+^{p-r} \\ &= d_k \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} x_k^r x_+^{p-r} + \dots + d_t \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} x_t^r x_+^{p-r} \\ &= \binom{p}{0} (d_k + \dots + d_t) x_+^p + \dots + \binom{p}{k} (d_k x_k^p + \dots + d_t x_t^p) x_+^{p-p}, \end{aligned}$$

de aquí se puede concluir que

$$\sum_{i=k}^t d_i x_i^r = 0, \quad r = 0, \dots, p,$$

el cual es un sistema homogéneo de $p+1$ ecuaciones con $t-k$ incógnitas y tiene soluciones no triviales si $p+1+k \leq t$. Entonces podemos concluir que el menor número de subintervalos de $[a, b]$ en los que $B_k^p(x)$ es no nulo es $t-k = p+1$ donde p es el grado del B-Spline.

De la identidad B.4

$$\sum_{i=k}^{p+k+1} \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k+1} \frac{1}{x_j - x_i} x_i^r = \delta_{rk+p+1} = 0$$

para $r = 0, \dots, p$, y de que

$$\sum_{i=k}^t d_i x_i^r = 0, \quad r = 0, \dots, p,$$

se tiene

$$d_i = \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k+1} \frac{1}{x_j - x_i}.$$

Por tanto

$$B_k^p(x) = \sum_{i=k}^{p+k+1} \left[\prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k+1} \frac{1}{x_j - x_i} \right] (x - x_i)_+^p, \quad -\infty < x < \infty,$$

es el spline buscado, al cual llamaremos B-Spline. Nótese que si $X_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, pueden definirse únicamente $B_0^p(x), B_1^p(x), \dots, B_{n-p-1}^p(x)$, por lo cual sólo tenemos $n - p$ funciones B-Spline, sin embargo la dimensión de $S(X_n, p)$ es $n + p$ así que hacen falta $2p$ funciones B-Spline. Para solucionar esto, introducimos algunos nodos extras fuera del intervalo $[a, b]$, p a la izquierda de a y p a la derecha de b , esto es $\{x_{-p}, \dots, x_{-1}\}$ y $\{x_{n+1}, \dots, x_{n+p}\}$ que satisfagan las condiciones

$$x_{-p} < x_{-p+1} < \dots < x_{-1} = a,$$

y

$$b = x_n < x_{n+1} < \dots < x_{n+p}.$$

Ahora definimos $B_k^p(x)$ como

$$B_k^p(x) = \sum_{i=k}^{p+k+1} \left[\prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k+1} \frac{1}{x_j - x_i} \right] (x - x_i)_+^p, \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.7)$$

para $k = -p, -p+1, \dots, n-1$, pero hacemos uso del valor de la función sólo en el intervalo $[a, b]$. Así, el conjunto $\{B_{-p}^p(x), \dots, B_{n-1}^p(x)\}$ tiene $n + p$ funciones, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Dada una partición $X_n : x_{-p} < x_{-p+1} < \dots < x_{n+p}$ que cumple

$$x_{-p} < x_{-p+1} < \dots < x_{-1} = a,$$

$$b = x_n < x_{n+1} < \dots < x_{n+p},$$

y $B_k^p(x)$ definido como en 3.7 para $k = -p, -p+1, \dots, n-1$. Entonces los $B_k^p(x)$ son una base para $S(X_n, p)$.

Demostración. Para que los $B_k^p(x)$ sean una base para $S(X_n, p)$, basta demostrar que son linealmente independientes. Sea

$$s(x) = \sum_{k=-p}^{n-1} \lambda_k B_k^p(x), \quad x \in [a, b],$$

donde $\lambda_{-k}, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. Demostraremos que si algún λ_k es distinto de cero, entonces el spline $s(x)$ es distinto de cero en $[x_{-p}, b]$. Sea q el menor entero tal que λ_q es distinto de cero, se sigue

$$s(x) = \lambda_q B_q^p(x) \neq 0, \quad x \in [x_q, x_{q+1}].$$

Así $s(x)$ es no nulo en $[x_q, x_{q+1}]$. □

3.2. Nodos múltiples

En esta sección analizaremos el efecto que puede causar que un nodo se repita varias veces, mostraremos con un ejemplo que sucede si hay un nodo doble.

Ejemplo 3.1. Consideremos un B-Spline cúbico como el que se contruyó al inicio de la sección 3.1,

$$x_i = 0, \quad x_{i+1} = 1, \quad x_{i+2} = 2, \quad x_{i+3} = 3, \quad x_{i+4} = 4.$$

Resolviendo el sistema 3.5

$$\begin{aligned} \mu &= -\lambda, \\ a_3 - \mu &= -4\lambda, \\ b_3 - \mu &= 4\lambda. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3, \quad 0 \leq x < 1, \\ P_1(x) &= x^3 - 4(x-1)^3, \quad 1 \leq x < 2, \\ P_2(x) &= -(x-4)^3 + 4(x-3)^3, \quad 2 \leq x < 3, \\ P_3(x) &= -(x-4)^3, \quad 3 \leq x < 4. \end{aligned}$$

Veamos que ocurre si hacemos tender el nodo $x = 2$ hacia 1, nombremos $x_{i+2} = p$

$$\begin{bmatrix} (p-1)^3 & p^3 & (3-p)^3 \\ (p-1)^2 & p^2 & -(3-p)^2 \\ p-1 & p & 3-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 - \lambda \\ \lambda \\ b_3 - \mu \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -(4-p) \\ (4-p)^2 \\ -(4-p)^3 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior

$$\begin{aligned} a_3 - \lambda &= \frac{-2\mu(p-4)}{p-1}, \\ \lambda &= \frac{\mu(p-4)}{p}, \\ b_3 - \mu &= \frac{-2\mu(p-4)}{p-3}, \end{aligned}$$

tomando $\lambda = 1$, obtenemos,

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{p}{p-4}, \\ a_3 &= \frac{-1-p}{p-1}, \\ b_3 - \mu &= \frac{p(5-p)}{(p-4)(p-3)},\end{aligned}$$

así, los cuatro tramos no nulos del B-Spline son

$$\begin{aligned}P_0(x) &= x^3, \quad 0 \leq x < 1, \\ P_1(x) &= x^3 - \frac{2}{p-1}(x-1)^3, \quad 1 \leq x < p, \\ P_2(x) &= \frac{p}{p-4}(x-4)^3 + \frac{2p}{3-p}(x-3)^3, \quad p \leq x < 3, \\ P_3(x) &= \frac{p}{p-4}(x-4)^3, \quad 3 \leq x < 4.\end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando $p \rightarrow 1$, se tiene

$$\begin{aligned}Q_0(x) &= x^3, \quad 0 \leq x < 1, \\ Q_1(x) &= \frac{-1}{3}(x-4)^3 + (x-3)^3, \quad 1 \leq x < 3, \\ Q_2(x) &= \frac{-1}{3}(x-4)^3, \quad 3 \leq x < 4.\end{aligned}$$

Obsérvese que el polinomio $P_1(x)$ ha desaparecido ya que el intervalo en el que estaba definido es vacío. Ahora veamos si se cumplen las condiciones de continuidad

$$\begin{aligned}Q_0(1) &= 1 = Q_1(1), \\ Q'_0(1) &= 3 = Q'_1(1), \\ Q''_0(1) &= 6 \neq -6 = Q''_1(1),\end{aligned}$$

la curva es de clase C^1 en $x = 1$. Si tenemos un nodo doble, disminuye en uno el orden de continuidad en la curva. En general, si un nodo se repite r veces tendríamos que disminuye el orden de continuidad de la curva en r unidades.

3.3. B-Splines

Definición 3.1. Dado un soporte

$$S = \{u_0, \dots, u_m\} = \underbrace{\{x_0, x_0, \dots, x_0\}}_{r_0}, \underbrace{\{x_1, x_1, \dots, x_1\}}_{r_1}, \dots, \underbrace{\{x_n, x_n, \dots, x_n\}}_{r_n}$$

donde $m = \sum_{i=0}^n r_i - 1$, un *B-Spline* $B_j^p(x)$ de grado p es una función definida en $(-\infty, \infty)$, de clase C^{p-r_i} en cada punto de ruptura x_i , y que es nula excepto en $p+1$ subintervalos consecutivos, en los cuales tiene grado p .

Observaciones

1. Un B-Spline restringido a un subintervalo es un polinomio de grado p .
2. El grado p debe ser siempre mayor o igual a $r_i - 1$.
3. Un B-Spline es nulo en a lo más $p + 1$ subintervalos (depende de la multiplicidad de los nodos).
4. Cada nodo u_i tiene asociado un B-Spline, donde el último será no nulo en

$$[u_{m-p-1}, u_{m-p}), [u_{m-p}, u_{m-p+1}), \dots, [u_{m-1}, u_m)$$

y este B-Spline se denotará por B_{m-p-1}^p , por tanto tenemos definidos

$$B_0^p(x), B_1^p(x), \dots, B_{m-p-1}^p(x)$$

que son $m - p$ B-Splines.

Ejemplo 3.2. Ejemplos de B-Splines.

1. B-Splines de grado 0.

Dada la partición $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; como $p = 0$, las multiplicidades r_i tienen que cumplir $1 \leq p + 1 = 1$, de aquí que $r_i = 1$. El soporte a considerar es

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

el orden de continuidad es $r_i = -1$. Es decir, las funciones son discontinuas en cada nodo.

$$B_0^0(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ c, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_1^0(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1; \\ c, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & 2 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_2^0(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 2; \\ c, & 2 \leq x < 3; \\ 0, & 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_3^0(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 3; \\ c, & 3 \leq x < 4; \\ 0, & 4 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_4^0(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 4; \\ c, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & 5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

En este caso, elegimos $c = 1$.

A continuación se muestran las respectivas gráficas.

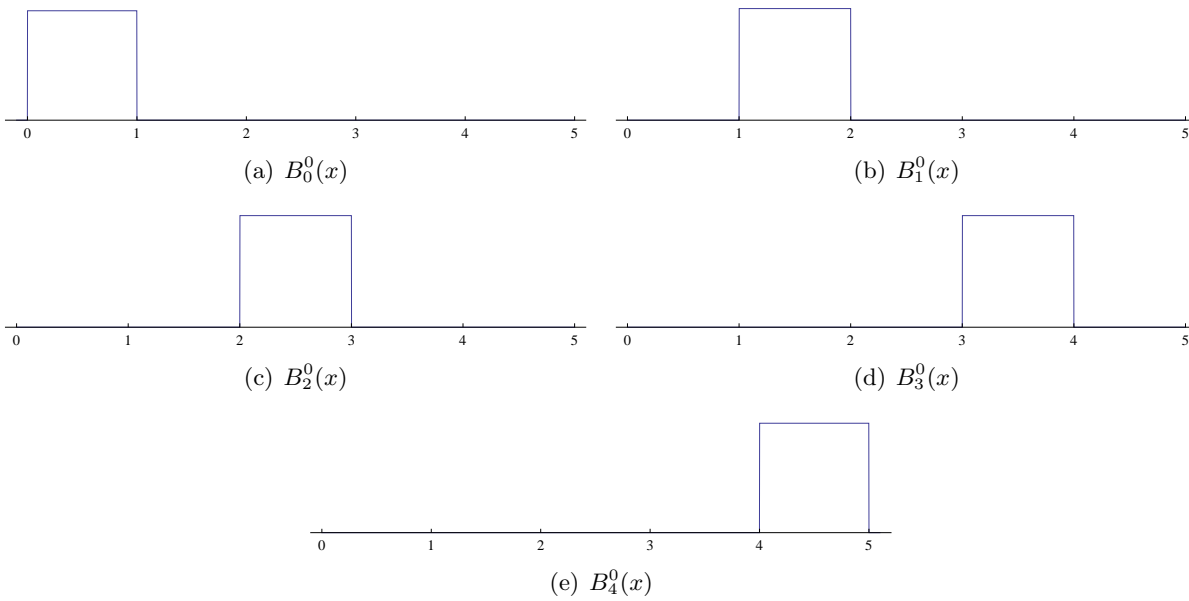


Figura 3.1: B-Splines de grado 0.

2. B-Splines de grado 1. Se tiene que $p = 1$, los r_i pueden ser 1 ó 2. Mostraremos algunos casos particulares.

a) Veamos el caso en que $r_i = 1$, es decir, todos los nodos son simples. Las funciones son de clase C^0 . El soporte a considerar es

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$B_0^1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & 2 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_1^1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1; \\ x - 1, & 1 \leq x < 2; \\ 3 - x, & 2 \leq x < 3; \\ 0, & 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_2^1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 2; \\ x - 2, & 2 \leq x < 3; \\ 4 - x, & 3 \leq x < 4; \\ 0, & 4 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_3^1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 3; \\ x - 3, & 3 \leq x < 4; \\ 5 - x, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & 5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

A continuación se muestran las gráficas.

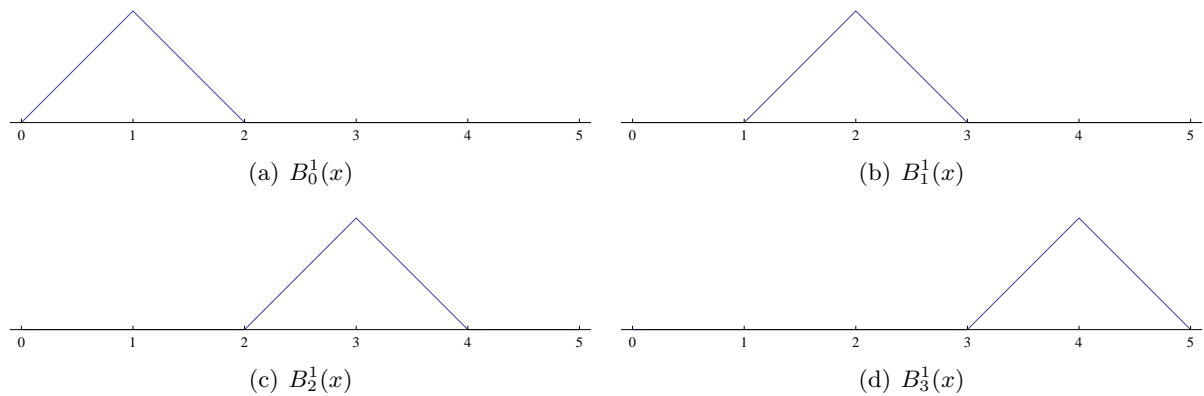


Figura 3.2: B-Splines de grado 1.

b) Ahora si $r_0 = 2$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$, $r_5 = 2$, el soporte a considerar es

$$S = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5\}.$$

El primer B-spline es no nulo sólo en $[0, 1)$.

$$B_0^1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ 1 - x, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

El B-Spline $B_1^1(x)$ es no nulo en $[0, 1)$ y $[1, 2)$, su definición es idéntica a la del caso anterior para $B_0^1(x)$. Los B-Splines $B_2^1(x)$, $B_3^1(x)$, $B_4^1(x)$ son iguales a los $B_1^1(x)$, $B_2^1(x)$, $B_3^1(x)$ del ejemplo anterior. Finalmente, $B_5^1(x)$ es no nulo en $[4, 5)$

$$B_5^1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 4; \\ x - 4, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & 5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

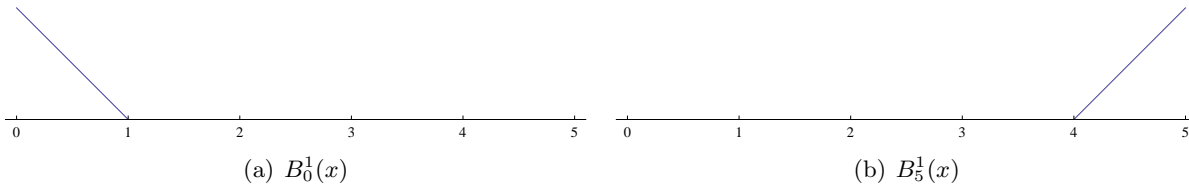


Figura 3.3: B-Splines de grado 1.

c) Si tomamos $r_0 = r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = r_5 = 1$, el soporte a considerar es

$$S = \{0, 1, 2, 3, 3, 4, 5\}.$$

Los B-Splines $B_0^1(x)$, $B_1^1(x)$ y $B_4^1(x)$ son iguales a los vistos en a). Mientras que $B_2^1(x)$ es no nulo sólo en $[2, 3)$

$$B_2^1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 2; \\ x - 2, & 2 \leq x < 3; \\ 0, & 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

El B-Spline $B_3^1(x)$ es no nulo en $[3, 4)$

$$B_3^1(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 3; \\ 4 - x, & 3 \leq x < 4; \\ 0, & 4 \leq x < \infty. \end{cases}$$

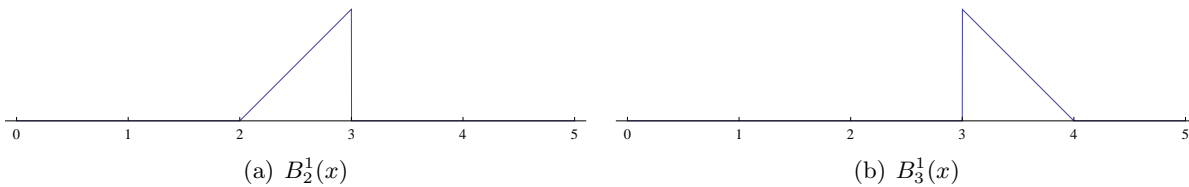


Figura 3.4: B-Splines de grado 1.

3. B-Splines de grado 2. Ahora tenemos $p = 2$ y las multiplicidades de los nodos pueden ser 1, 2 ó 3.

a) Consideremos primero el caso en que todos los nodos son simples, $r_i = 1$. Obsérvese que los B-Splines son de clase C^1 . El soporte a considerar es

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$B_0^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & 1 \leq x < 2; \\ \frac{(x-3)^2}{2}, & 2 \leq x < 3; \\ 0, & 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_1^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1; \\ \frac{(x-1)^2}{2}, & 1 \leq x < 2; \\ -x^2 + 5x - \frac{11}{2}, & 2 \leq x < 3; \\ \frac{(x-4)^2}{2}, & 3 \leq x < 4; \\ 0, & 4 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_2^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 2; \\ \frac{(x-2)^2}{2}, & 2 \leq x < 3; \\ -x^2 + 7x - \frac{23}{2}, & 3 \leq x < 4; \\ \frac{(x-5)^2}{2}, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & 5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

A continuación se muestran las gráficas.

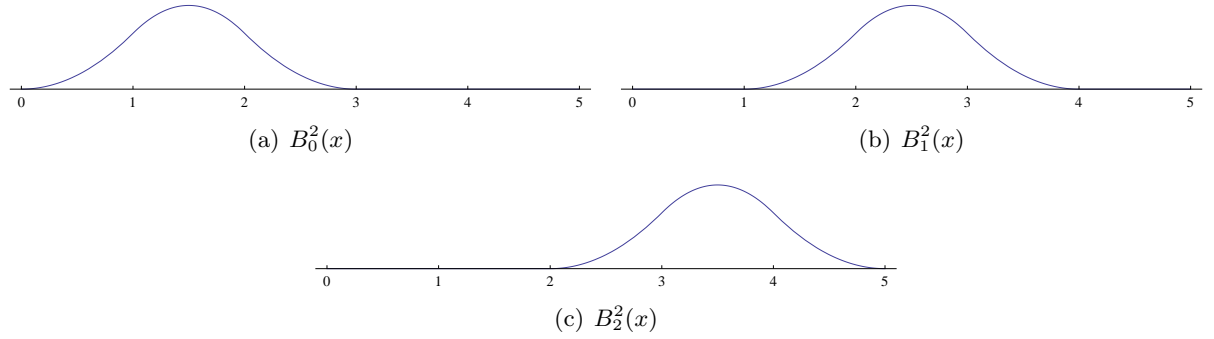


Figura 3.5: B-Splines de grado 2.

- b) Ahora, si $r_0 = 2, r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$ y $r_5 = 2$, el primero y el último B-Spline son continuos y los restantes son de clase C^1 . El soporte a considerar es

$$S = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5\}.$$

El primer B-Spline $B_0^2(x)$ es no nulo en $[0, 1), [1, 2)$.

$$B_0^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ \frac{x(4-3x)^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & 2 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Los B-Splines $B_1^2(x), B_2^2(x)$ y $B_3^2(x)$ son análogos a $B_0^2(x), B_1^2(x)$ y $B_2^2(x)$ definidos en a) y $B_4^2(x)$ es nulo excepto en $[3, 4)$ y $[4, 5)$.

$$B_4^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 3; \\ \frac{(x-3)^2}{2}, & 3 \leq x < 4; \\ \frac{(5-x)(3x-11)}{2}, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & 5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

A continuación se muestran las gráficas.

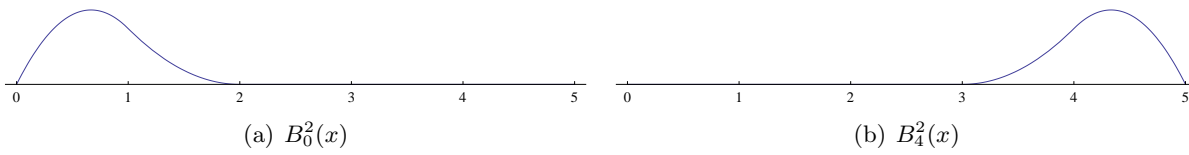


Figura 3.6: B-Splines de grado 2.

c) Si $r_0 = 3, r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$ y $r_5 = 3$, el primer y último B-Spline son discontinuos, los restantes son de clase C^1 , el soporte a considerar es

$$S = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}.$$

$$B_0^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ (1-x)^2, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_1^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ \frac{x(4-3x)}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & 2 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_5^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 3; \\ \frac{(x-3)^2}{2}, & 3 \leq x < 4; \\ \frac{(5-x)(3x-11)}{2}, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & 5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$B_6^2(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 4; \\ (x-4)^2, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & 5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Los B-Splines $B_2^2(x)$, $B_3^2(x)$ y $B_4^2(x)$ son iguales a los $B_1^2(x)$, $B_2^2(x)$ y $B_3^2(x)$ anteriores.

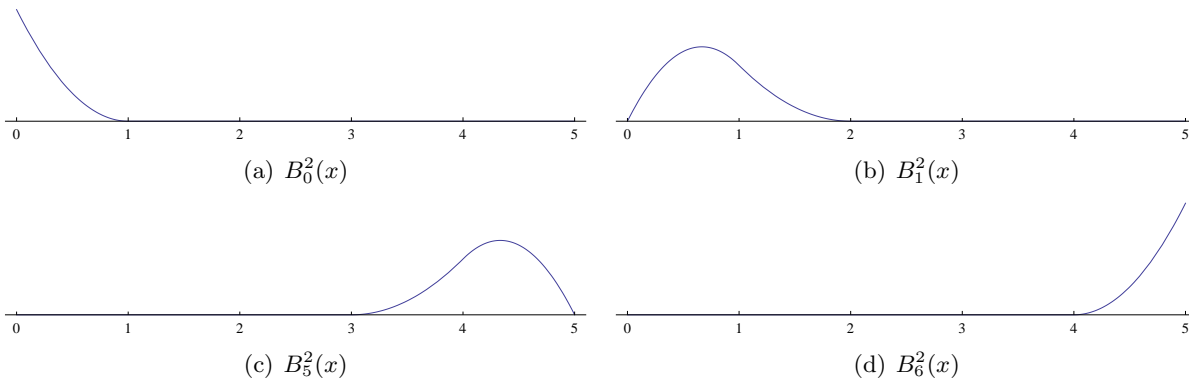


Figura 3.7: B-Splines de grado 2.

3.4. Relación de recurrencia para B-Splines

Esta relación de recurrencia se basa en expresar los B-Splines como diferencias divididas de potencias truncadas.

Considérese el soporte

$$S = \underbrace{\{x_0, x_0, \dots, x_0\}}_{r_0}, \underbrace{\{x_1, x_1, \dots, x_1\}}_{r_1}, \dots, \underbrace{\{x_n, x_n, \dots, x_n\}}_{r_n} = \{u_0, \dots, u_m\}$$

donde cada x_i aparece repetido tantas veces como lo indica su multiplicidad r_i . Sean

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & u_i \leq x \leq u_{i+1}; \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.8)$$

para $i = 0, \dots, m - 1$. Se puede demostrar que

$$B_i^p(x) = \frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i} B_i^{p-1}(x) + \frac{u_{i+p+1} - x}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(x), \quad p \geq 1, \quad (3.9)$$

son los $m - p$ B-Splines de grado p asociados al soporte S [9].

Obsérvese que un intervalo puede ser vacío, en cuyo caso las funciones $B_i^0(x)$ serán idénticamente nulas. También en 3.9 pueden aparecer denominadores nulos, cuando esto sucede el B-Spline que lo acompaña es nulo, así el cociente $\frac{0}{0}$ se interpreta como 0 para todo x .

Cuando $p = 0$, los nodos sólo pueden tener multiplicidad $r_i = 1$ por lo que $u_i = x_i$ y todos los intervalos son no vacíos.

Ejemplo 3.3. Sea el soporte $S = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\} = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5\}$,

1. B-Splines de grado 0.

$$B_0^0(x) = 0.$$

$$B_1^0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$B_2^0(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$B_3^0(x) = \begin{cases} 1, & 2 \leq x < 3; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$B_4^0(x) = \begin{cases} 1, & 3 \leq x < 4; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$B_5^0(x) = \begin{cases} 1, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$B_6^0(x) = 0.$$

Las gráficas son como en 1. del ejemplo anterior.

2. B-Splines de grado 1.
Por recurrencia se tiene

$$B_i^1(x) = \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i} B_i^0(x) + \frac{u_{i+2} - x}{u_{i+2} - u_{i+1}} B_{i+1}^0(x).$$

$$\begin{aligned} B_0^1(x) &= \frac{x}{0} B_0^0(x) + \frac{1-x}{1} B_1^0(x) \\ &= (1-x) B_1^0(x) \\ &= \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^1(x) &= \frac{x}{1} B_1^0(x) + \frac{2-x}{1} B_2^0(x) \\ &= \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1; \\ 2-x, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^1(x) &= \frac{x-1}{1} B_2^0(x) + \frac{3-x}{1} B_3^0(x) \\ &= \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2; \\ 3-x, & 2 \leq x < 3; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3^1(x) &= \frac{x-2}{1} B_3^0(x) + \frac{4-x}{1} B_4^0(x) \\ &= \begin{cases} x-2, & 2 \leq x < 3; \\ 4-x, & 3 \leq x < 4; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4^1(x) &= \frac{x-3}{1} B_4^0(x) + \frac{5-x}{1} B_5^0(x) \\ &= \begin{cases} x-3, & 3 \leq x < 4; \\ 5-x, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5^1(x) &= \frac{x-4}{0} B_5^0(x) + \frac{5-x}{1} B_6^0(x) \\ &= (x-4) B_5^0(x) \\ &= \begin{cases} x-4, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Las gráficas son como en 1. b) del ejemplo anterior.

3. B-Splines de grado 2.

Por recurrencia se tiene

$$B_i^2(x) = \frac{x - u_i}{u_{i+2} - u_i} B_i^1(x) + \frac{u_{i+3} - x}{u_{i+3} - u_{i+1}} B_{i+1}^1(x).$$

$$\begin{aligned} B_0^2(x) &= \frac{x}{1} B_0^1(x) + \frac{2-x}{2} B_1^1(x) \\ &= \begin{cases} \frac{x(4-3x)}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^2(x) &= \frac{x}{2} B_1^1(x) + \frac{3-x}{2} B_2^1(x) \\ &= \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & 1 \leq x < 2; \\ \frac{(3-x)^2}{2}, & 2 \leq x < 3; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^2(x) &= \frac{x-1}{2} B_2^1(x) + \frac{4-x}{2} B_3^1(x) \\ &= \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2}, & 1 \leq x < 2; \\ -x^2 + 5x - \frac{11}{2}, & 2 \leq x < 3; \\ \frac{(4-x)^2}{2}, & 3 \leq x < 4; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

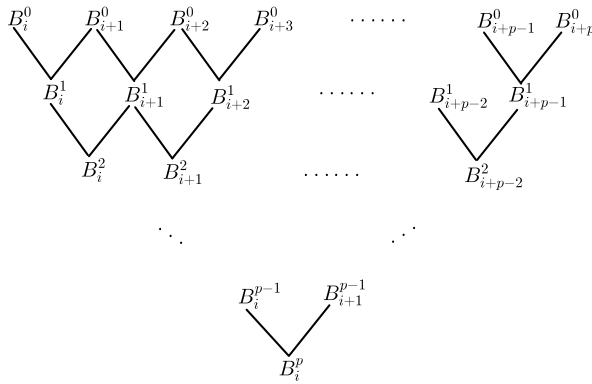
$$\begin{aligned} B_3^2(x) &= \frac{x-2}{2} B_3^1(x) + \frac{5-x}{2} B_4^1(x) \\ &= \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{2}, & 2 \leq x < 3; \\ -x^2 + 7x - \frac{23}{2}, & 3 \leq x < 4; \\ \frac{(5-x)^2}{2}, & 4 \leq x < 5. \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4^2(x) &= \frac{x-3}{2} B_4^1(x) + \frac{5-x}{2} B_5^1(x) \\ &= \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{2}, & 3 \leq x < 4; \\ \frac{(5-x)(3x-11)}{2}, & 4 \leq x < 5; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Las gráficas son como en 2. b) del ejemplo anterior.

3.5. Evaluación de B-Splines por recurrencia

En los ejemplos anteriores se han obtenido expresiones para B-Splines de varios grados utilizando la relación de recurrencia, en la práctica lo que se desea es la evaluación de los B-Splines en un valor específico $x = \bar{x}$, o en todo el intervalo $[x_0, x_k]$, con el fin de dibujar una curva expresada como una combinación de B-Splines. Notése que $B_i^p(x)$ depende de B_i^{p-1} y B_{i+1}^{p-1} , si a su vez estos B-Splines de grado $p-1$ se obtienen por recurrencia, se necesita del calculo de B_i^{p-2} , B_{i+1}^{p-2} y B_{i+2}^{p-2} ; continuando con este mismo procedimiento observamos que para calcular $B_i^p(x)$ necesitamos de los B-Splines de grado 0, la relación de recurrencia puede representarse esquemáticamente.



Donde cabe destacar que para un $x = \bar{x}$ dado, la primera fila del esquema anterior contiene a lo más un elemento distinto de 0, ya que $B_k^0(x) \neq 0$ sólo si $\bar{x} \in [x_k, x_{k+1})$. Recordemos que si $\bar{x} \in [x_k, x_{k+1})$ los B-Splines que son no nulos son $B_{k-p}^p(\bar{x}), \dots, B_k^p(\bar{x})$ donde

$$\begin{array}{rcl} B_{k-p}^p(\bar{x}) & \text{depende de} & B_{k-p}^0(\bar{x}), \dots, B_k^0(\bar{x}), \\ B_{k-p+1}^p(\bar{x}) & \text{depende de} & B_{k-p+1}^0(\bar{x}), \dots, B_{k+1}^0(\bar{x}), \\ \dots & \dots & \dots \\ B_k^p(\bar{x}) & \text{depende de} & B_k^0(\bar{x}), \dots, B_{k+p}^0(\bar{x}), \end{array}$$

aunque sólo $B_k^0(\bar{x})$ es distinto de 0 y vale 1.

Para un determinado grado j , el primero de los B-Splines no nulos $B_{k-j}^j(\bar{x})$, sólo requiere del segundo término en la relación de recurrencia y el último B-Spline no nulo $B_k^j(\bar{x})$ depende únicamente del primer término de la recurrencia. Lo primero que se necesita hacer es determinar el intervalo $[u_k, u_{k+1})$ con $u_k < u_{k+1}$ tal que $x \in [u_k, u_{k+1})$ ya que el subíndice k establece el único B-Spline no nulo en \bar{x} .

A continuación enunciaremos y demostraremos algunas propiedades de las funciones B-Spline a través de su definición.

3.6. Propiedades de los B-Splines

Proposición 3.1. Dado un B-Spline se verifican las siguientes propiedades.

1. Soporte local

$$B_i^p(x) = 0, \quad x \notin [u_i, u_{i+p+1}).$$

2. No negatividad

$$B_i^p(x) > 0, \quad x \in [u_i, u_{i+p+1}).$$

3. Base local. Si $x \in [u_k, u_{k+1})$, los únicos B-Splines que posiblemente sean no nulos son

$$B_{k-p}^p(x), B_{k-p+1}^p(x), \dots, B_0^p(x), \dots, B_k^p(x),$$

si $k \leq p$, entonces los B-Splines no nulos son

$$B_0^p(x), B_1^p(x), \dots, B_k^p(x).$$

4. Partición de la unidad. En un intervalo no vacío $[u_k, u_{k+p})$ con $p \leq k < m - p - 1$, los $p + 1$ B-Splines que son no nulos cumplen

$$\sum_{i=k-p}^k B_i^p(x) = 1.$$

5. Derivadas.

$$\frac{dB_i^p(x)}{dx} = p \left[\frac{B_i^{p-1}(x)}{u_{i+p} - u_i} - \frac{B_{i+1}^{p-1}(x)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right].$$

Demostración. 1. La demostración se hará por inducción sobre p .

Para $p = 0$, por definición $B_i^0(x) = 0$, si $x \notin [u_i, u_{i+1})$.

Ahora supongamos que se cumple para $p - 1$, esto es

$$\begin{aligned} B_i^{p-1}(x) &= 0, & x \notin [u_i, u_{i+p}), \\ B_{i+1}^{p-1}(x) &= 0, & x \notin [u_{i+1}, u_{i+p+1}). \end{aligned}$$

Pero por recurrencia sabemos que

$$B_i^p(x) = \frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i} B_i^{p-1}(x) + \frac{u_{i+p+1} - x}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(x),$$

se sigue que

$$B_i^p(x) = 0, \quad x \notin [u_i, u_{i+p+1}).$$

2. La demostración se realizará por inducción sobre el grado p .

Para $p = 0$, por definición se tiene que $B_i^0(x) = 1 > 0$, si $x \in [u_i, u_{i+1})$. Suponiendo que se cumple para $p - 1$, es decir,

$$\begin{aligned} B_i^{(p-1)}(x) &\geq 0, & x \in [u_i, u_{i+p}), \\ B_{i+1}^{(p-1)}(x) &\geq 0, & x \in [u_{i+1}, u_{i+p+1}). \end{aligned}$$

Por tanto, para $x \in [u_i, u_{i+p+1})$, ambos B-Splines son no negativos y además

$$\frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i} \geq 0$$

y

$$\frac{u_{i+p+1} - x}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \geq 0$$

según la relación de recurrencia y la hipótesis de inducción

$$B_i^p(x) > 0, \quad x \in [u_i, u_{i+p+1}).$$

3. Se sigue de la propiedad 1.

4. En efecto, sabemos que

$$B_i^p(x) = \frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i} B_i^{p-1}(x) + \frac{u_{i+p+1} - x}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(x)$$

entonces

$$\sum_{i=k-p}^k B_i^p(x) = \sum_{i=k-p}^k \frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i} B_i^{p-1}(x) + \sum_{i=k-p}^k \frac{u_{i+p+1} - x}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(x).$$

En el primer sumando $B_{k-p}^{p-1}(x) = 0$, cambiando i por $i - 1$ se tiene

$$\sum_{i=k-p}^k B_i^p(x) = \sum_{i=k-p+1}^k \frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i} B_i^{p-1}(x) + \sum_{i=k-p+1}^{k+1} \frac{u_{i+p} - x}{u_{i+p} - u_i} B_i^{p-1}(x),$$

en el segundo sumando $B_{k+1}^{p-1}(x) = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-p}^k B_i^p(x) &= \sum_{i=k-p+1}^k \left(\frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i} + \frac{u_{i+p} - x}{u_{i+p} - u_i} \right) B_i^{p-1}(x) \\ &= \sum_{i=k-p+1}^k B_i^{p-1}(x). \end{aligned}$$

Así, la suma de los $p + 1$ B-Splines de grado p no nulos en $[x_k, x_{k+1})$ es igual a la suma de los p B-Splines de grado $p - 1$ no nulos, procediendo de la misma manera se llega a que la suma será igual al único B-Spline de grado 0 no nulo en $[x_k, x_{k+1})$, así

$$\sum_{i=k-p}^k B_i^p(x) = 1.$$

5. La demostración se hará por inducción sobre p .

Para $p = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} B_i^1(x) &= \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i} B_i^0(x) + \frac{u_{i+2} - x}{u_{i+2} - u_{i+1}} B_{i+1}^0(x), \\ \frac{dB_i^1(x)}{dx} &= \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i} \frac{dB_i^0(x)}{dx} + \frac{1}{u_{i+1} - u_i} B_i^0(x) \\ &+ \frac{u_{i+2} - x}{u_{i+2} - u_{i+1}} \frac{dB_{i+1}^0(x)}{dx} - \frac{1}{u_{i+2} - u_{i+1}} B_{i+1}^0(x) \\ &= 1 \left[\frac{B_i^0(x)}{u_{i+1} - u_i} - \frac{B_{i+1}^0(x)}{u_{i+2} - u_{i+1}} \right]. \end{aligned}$$

Supongamos que la afirmación es verdadera para p . Primero nombremos

$$\begin{aligned} \alpha_i^p &= \frac{1}{u_{i+p} - u_i}, \\ U_i^p &= \frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i}, \end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\alpha_i^k U_i^{k+1} = \alpha_i^{k+1} U_i^k, \quad (3.10)$$

$$\alpha_{i+1}^k (1 - U_i^{k+1}) = \alpha_{i+1}^{k+1} (1 - U_{i+1}^k), \quad (3.11)$$

reescribiendo la hipótesis de inducción

$$\frac{dB_i^p(x)}{dx} = p \left[\alpha_i^p B_i^{p-1}(x) - \alpha_{i+1}^p B_{i+1}^{p-1}(x) \right].$$

Utilizando la relación de recurrencia tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dB_i^{p+1}(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[U_i^{p+1} B_i^p(x) + (1 - U_{i+1}^{p+1}) B_{i+1}^p(x) \right] \\ &= U_i^{p+1} \frac{d}{dx} B_i^p(x) + \alpha_i^{p+1} B_i^p(x) \\ &+ (1 - U_{i+1}^{p+1}) \frac{d}{dx} B_{i+1}^p(x) - \alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x), \end{aligned}$$

ahora utilizando la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \frac{dB_i^{p+1}(x)}{dx} &= U_i^{k+1} \left(p \alpha_i^p B_i^{p-1}(x) - p \alpha_{i+1}^p B_{i+1}^{p-1}(x) \right) + \alpha_i^{k+1} B_i^p(x) \\ &+ (1 - U_{i+1}^{p+1}) \left(p \alpha_{i+1}^p B_{i+1}^{p-1}(x) - p \alpha_{i+2}^p B_{i+2}^{p-1}(x) \right) - \alpha_{i+1}^{k+1} B_{i+1}^p(x), \end{aligned}$$

reordenando términos

$$\begin{aligned} \frac{dB_i^{p+1}(x)}{dx} &= \alpha_i^{k+1} B_i^p(x) + p \alpha_i^p U_i^{k+1} B_i^{p-1}(x) - \alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x) \\ &- p \alpha_{i+2}^p (1 - U_{i+1}^{p+1}) B_{i+2}^{p-1}(x) - p \alpha_{i+1}^p U_i^{p+1} B_{i+1}^{p-1}(x) \\ &+ p \alpha_{i+1}^k (1 - U_{i+1}^{k+1}) B_{i+1}^{p-1}(x), \end{aligned}$$

reemplazando 3.10 y 3.11 en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\frac{dB_i^{p+1}(x)}{dx} &= \alpha_i^{p+1} B_i^p(x) + p\alpha_i^p U_i^{p+1} B_i^{p-1}(x) - \alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x) \\
&- p\alpha_{i+2}^p \left(1 - U_{i+1}^{p+1}\right) B_{i+2}^{p-1}(x) - p\alpha_{i+1}^p U_i^{p+1} B_{i+1}^{p-1}(x) \\
&+ p\alpha_{i+1}^p B_{i+1}^{p-1}(x) - p\alpha_{i+1}^p U_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^{p-1}(x) \\
&= \alpha_i^{p+1} B_i^p(x) + p\alpha_i^p U_i^{p+1} B_i^{p-1}(x) - \alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x) \\
&- p\alpha_{i+2}^p \left(1 - U_{i+1}^{p+1}\right) B_{i+2}^{p-1}(x) + p\alpha_{i+1}^p \left(1 - U_i^{p+1}\right) B_{i+1}^{p-1}(x) \\
&- p\alpha_{i+1}^p U_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^{p-1}(x) \\
&= \alpha_i^{p+1} B_i^p(x) + p\alpha_i^{p+1} U_i^p B_i^{p-1}(x) - \alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x) \\
&- p\alpha_{i+1}^{p+1} \left(1 - U_{i+2}^p\right) B_{i+2}^{p-1}(x) + p\alpha_i^{p+1} \left(1 - U_{i+1}^p\right) B_{i+1}^{p-1}(x) \\
&- p\alpha_{i+1}^{p+1} U_{i+1}^p B_{i+1}^{p-1}(x).
\end{aligned}$$

Reagrupando términos y utilizando la relación de recurrencia

$$\begin{aligned}
\frac{dB_i^{p+1}(x)}{dx} &= \alpha_i^{p+1} B_i^p(x) + p\alpha_i^{p+1} \left[U_i^p B_i^{p-1}(x) + (1 - U_{i+1}^p) B_{i+1}^{p-1}(x) \right] \\
&- p\alpha_{i+1}^{p+1} \left[U_{i+1}^p B_{i+1}^{p-1}(x) + (1 - U_{i+2}^p) B_{i+2}^{p-1}(x) \right] - \alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x) \\
&= \alpha_i^{p+1} B_i^p(x) + p\alpha_i^{p+1} B_i^p(x) - p\alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x) - \alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x) \\
&= (p+1)\alpha_i^{p+1} B_i^p(x) - (p+1)\alpha_{i+1}^{p+1} B_{i+1}^p(x).
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{dB_i^{p+1}(x)}{dx} = (p+1) \left[\frac{B_i^p(x)}{u_{i+p+1} - u_i} - \frac{B_{i+1}^p(x)}{u_{i+p+2} - u_{i+1}} \right].$$

□

3.7. Los polinomios de Bernstein como funciones B-Splines

Consideremos un caso particular de soporte, el cual consta sólo de dos nodos y ambos son de multiplicidad $p+1$

$$S = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}.$$

Dado que sólo hay un subintervalo no vacío, los B-Splines de grado p están constituidos por $p+1$ polinomios no nulos en $[0, 1]$. En general, tenemos que estos B-Splines no nulos son los polinomios de Bernstein.

Proposición 3.2. Sea $S = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$ entonces los B-Splines no nulos asociados al soporte S son los polinomios de Bernstein de grado p .

Demostración. Para p fijo, hagamos inducción sobre $k \leq p$.

Para $k = 0$, sabemos que

$$B_p^0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora para $k = 1$,

$$B_{p-1}^1(x) = (1-x)B_p^0(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$B_p^1(x) = xB_p^0(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando la relación de recurrencia se llega a

$$\begin{aligned} B_{p-k}^k(x) &= (1-x)B_{p-k+1}^{k-1}. \\ B_{p-k+i}^k(x) &= xB_{p-k+i}^{k-1} + (1-x)B_{p-k+i+1}^{k-1}, \quad i = 1, \dots, k-1. \\ B_p^k(x) &= xB_p^{k-1}(x). \end{aligned}$$

Supongamos que $B_{k-p+i}^{k-1}(x)$ es el $(i-1)$ -ésimo polinomio de Bernstein de grado $k-1$

$$B_{p-k+i}^{k-1}(x) = \binom{k-1}{i-1} x^{i-1} (1-x)^{k-i}, \quad i = 1, \dots, p,$$

se sigue

$$\begin{aligned} B_{p-k}^k(x) &= (1-x)B_{p-k+1}^{k-1} \\ &= (1-x) \binom{k-1}{0} x^0 (1-x)^{k-1} \\ &= (1-x)^k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{k-p+i}^p(x) &= xB_{p-k+i}^{k-1} + (1-x)B_{p-k+i+1}^{k-1} \\ &= x \binom{k-1}{i-1} x^{i-1} (1-x)^{k-i} \\ &\quad + (1-x) \binom{k-1}{i} x^i (1-x)^{k-i-1} \\ &= \left[\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} \right] x^i (1-x)^{k-i} \\ &= \binom{k}{i} x^i (1-x)^{k-i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_k^p(x) &= xB_p^{k-1}(x) \\ &= x \binom{k-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^0 \\ &= x^k. \end{aligned}$$

□

3.8. Curvas B-Spline

Definición 3.2. Dado un soporte

$$S = \{u_0, \dots, u_m\} = \underbrace{\{x_0, \dots, x_0\}}_{r_0} \underbrace{\{x_1, \dots, x_1\}}_{r_1} \dots \underbrace{\{x_k, \dots, x_k\}}_{r_k}$$

y $\{P_0, \dots, P_n\}$ un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 , una *curva B-Spline* de grado p se define como

$$C(x) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^p(x), \quad x \in [u_0, u_m],$$

donde los $B_i^p(x)$ son B-Splines de grado p , y los P_i son llamados *puntos de control* de la curva.

El número de coeficientes $n + 1$, es el número de funciones de la base y es igual a la dimensión del espacio $n + 1 = m - p$. El polígono que se forma con los puntos de control es llamado *polígono de control* o *polígono de De Boor*.

3.8.1. Propiedades de las curvas B-Splines

Proposición 3.3. Dada una curva B-Spline de grado p definida en un soporte no periódico $S = \{u_0, \dots, u_m\} = \underbrace{\{x_0, \dots, x_0\}}_{p+1} x_1, \dots, x_{h-1}, \underbrace{\{x_h, \dots, x_h\}}_{p+1}$ se cumplen las siguientes propiedades.

1. Interpolación de los puntos de control extremos.

$$\begin{aligned} C(u_0) &= P_0. \\ C(u_m) &= P_m. \end{aligned}$$

2. Derivadas en los puntos extremos.

$$\begin{aligned} C'(u_0) &= \frac{p}{u_{p+1} - u_0} (P_1 - P_0). \\ C'(u_m) &= \frac{p}{u_{m+1} - u_{m-p-1}} (P_n - P_{n-1}). \end{aligned}$$

3. Control local. Si dos curvas B-Spline $C(u)$, $C(\bar{u})$ tienen los mismos puntos de control excepto el k -ésimo punto, entonces la diferencia será

$$\bar{C}(u) - C(u) = (\bar{P}_k - P_k) B_k^p(u).$$

4. Restricción a la envolvente convexa. La curva B-Spline con puntos de control P_0, \dots, P_n , se encuentra en la cápsula convexa de dichos puntos.

5. Invarianza afín. La representación de una curva B-Spline es invariante bajo aplicaciones afines.

Demostración. 1. Para p fijo, hagamos inducción sobre $k \leq p$.

Para $k = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} B_i^0(u_0) &= 0, \quad i = 0, \dots, p-1, \\ B_p^0(u_0) &= 1, \\ B_j^0(u_0) &= 0, \quad j = p+1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Ahora para $k = 1$,

$$B_i^1(u_0) = \frac{u_0 - u_i}{u_{i+1} - u_i} B_i^0(u_0) + \frac{u_{i+2} - u_0}{u_{i+2} - u_{i+1}} B_{i+1}^0(u_0),$$

con lo cual

$$\begin{aligned} B_i^1(u_0) &= 0, \quad i = 0, \dots, p-2. \\ B_{p-1}^1(u_0) &= \frac{u_{p+1} - u_0}{u_{p+1} - u_p} B_p^0(u_0) = B_p^0(u_0) = 1. \\ B_p^1(u_0) &= \frac{u_0 - u_p}{u_{p+1} - u_p} B_p^0(u_0) + \frac{u_{p+2} - u_0}{u_{p+2} - u_{p+1}} B_{p+1}^0(u_0) = 0. \\ B_j^1(u_0) &= 0, \quad j = p+1, \dots, m-2. \end{aligned}$$

Supongamos que para $k-1$ se cumple

$$\begin{aligned} B_i^{k-1}(u_0) &= 0, \quad i = 0, \dots, p-k. \\ B_{p-k+1}^{k-1}(u_0) &= 1. \\ B_j^{k-1}(u_0) &= 0, \quad j = p-k+2, \dots, m-k-1. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} B_i^k(u_0) &= 0, \quad i = 0, \dots, p-k-1. \\ B_{p-k}^k(u_0) &= 1. \\ B_j^k(u_0) &= 0, \quad j = p-k+1, \dots, m-k-1. \end{aligned}$$

De donde $C(u_0) = P_0$. Con un razonamiento similar se obtiene que $C(u_m) = P_m$, teniendo en cuenta que $n = m - p - 1$.

2. Sea $C(u)$ una curva B-Spline de grado p ,

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^p(u), \quad u \in [u_0, u_m],$$

luego

$$C'(u_0) = \sum_{i=0}^n P_i [B_i^p(u_0)]'.$$

Pero como el soporte es no periodico, se tiene

$$\begin{aligned} B_0^{p-1}(u_0) &= 0, \\ B_1^{p-1}(u_0) &= 1, \\ B_i^{p-1}(u_0) &= 0, \quad i = 2, \dots, m-p, \end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores y por la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} [B_0^p(u_0)]' &= p \left[\frac{B_0^{p-1}(u_0)}{u_p - u_0} - \frac{B_1^{p-1}(u_0)}{u_{p+1} - u_1} \right]. \\ [B_1^p(u_0)]' &= p \left[\frac{B_1^{p-1}(u_0)}{u_{p+1} - u_1} - \frac{B_2^{p-1}(u_0)}{u_{p+2} - u_2} \right]. \\ [B_i^p(u_0)]' &= 0, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} C'(u_0) &= P_0 p \left[\frac{B_0^{p-1}(u_0)}{u_p - u_0} - \frac{B_1^{p-1}(u_0)}{u_{p+1} - u_1} \right] + P_1 p \left[\frac{B_1^{p-1}(u_0)}{u_{p+1} - u_1} - \frac{B_2^{p-1}(u_0)}{u_{p+2} - u_2} \right] \\ &= P_0 p \left[-\frac{1}{u_{p+1} - u_1} \right] + P_1 p \left[\frac{1}{u_{p+1} - u_1} \right] \\ &= \frac{p}{u_{p+1} - u_1} [P_1 - P_0]. \end{aligned}$$

Ahora calculemos $C'(u_m)$

$$C'(u_m) = \sum_{i=0}^n P_i [B_i^p(u_m)]'.$$

Pero

$$\begin{aligned} B_i^{p-1}(u_m) &= 0, \quad i = 0, \dots, m-p. \\ B_{m-p-1}^{p-1}(u_m) &= 1. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} [B_i^p(u_m)]' &= 0, \quad i = 0, \dots, m-p. \\ [B_{m-p-2}^p(u_m)]' &= p \left[\frac{B_{m-p-2}^{p-1}(u_m)}{u_{m-2} - u_{m-p-2}} - \frac{B_{m-p-1}^{p-1}(u_m)}{u_{m-1} - u_{m-p-1}} \right]. \\ [B_{m-p-1}^p(u_m)]' &= p \left[\frac{B_{m-p-1}^{p-1}(u_m)}{u_{m-1} - u_{m-p-1}} - \frac{B_{m-p}^{p-1}(u_m)}{u_m - u_{m-p}} \right]. \end{aligned}$$

Se sigue

$$\begin{aligned} C'(u_m) &= P_{m-p-2} p \left[\frac{B_{m-p-2}^{p-1}(u_m)}{u_{m-2} - u_{m-p-2}} - \frac{B_{m-p-1}^{p-1}(u_m)}{u_{m-1} - u_{m-p-1}} \right] \\ &+ P_{m-p-1} p \left[\frac{B_{m-p-1}^{p-1}(u_m)}{u_{m-1} - u_{m-p-1}} - \frac{B_{m-p}^{p-1}(u_m)}{u_m - u_{m-p}} \right] \\ &= P_{m-p-2} p \left[-\frac{1}{u_{m-1} - u_{m-p-1}} \right] + P_{m-p-1} p \left[\frac{1}{u_{m-1} - u_{m-p-1}} \right] \\ &= \frac{p}{u_{m-1} - u_{m-p-1}} [P_{m-p-1} - P_{m-p-2}] \\ &= \frac{p}{u_{m-1} - u_{m-p-1}} [P_n - P_{n-1}]. \end{aligned}$$

3. Sean

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^p(u)$$

y

$$\bar{C}(u) = \sum_{i \neq k}^n P_i B_i^p(u) + \bar{P}_k B_k^p(u)$$

curvas B-Spline que tienen los mismo puntos de control, excepto el k -ésimo punto, entonces

$$\begin{aligned} \bar{C}(u) - C(u) &= \left(\sum_{i \neq k}^n P_i B_i^p(u) + \bar{P}_k B_k^p(u) - \sum_{i=0}^n P_i B_i^p(u) \right) \\ &= (\bar{P}_k - P_k) B_k^p(u). \end{aligned}$$

4. Sea

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^p(u),$$

una curva B-Spline. Para un valor fijo \bar{u} se tiene

$$C(\bar{u}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i,$$

donde

$$\alpha_i = B_i^p(\bar{u}).$$

Sabemos que si $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1})$, los únicos B-Splines no nulos son

$$B_{k-p}^p(\bar{u}), \dots, B_k^p(\bar{u}),$$

así,

$$C(\bar{u}) = \sum_{i=k-p}^k \alpha_i P_i,$$

si $k \geq p$, por la Proposición 3.1, propiedad 4 de los B-Splines

$$\sum_{i=k-p}^k B_i^p(\bar{u}) = \sum_{i=k-p}^k \alpha_i = 1,$$

como $\alpha_i \geq 0$, $C(\bar{u})$ es una combinación convexa de los $p+1$ puntos P_{k-p}, \dots, P_k . Ahora si $k < p$, sólo podemos asegurar que

$$\sum_{i=k-p}^k \alpha_i \leq 1,$$

pero se seguirá cumpliendo que $C(\bar{u})$ está en la cápsula convexa de P_0, \dots, P_k .

5. Sea

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^p(u),$$

una curva B-Spline definida sobre un soporte no periódico y $\Phi(P) = AP + B$ una aplicación afín, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(C(u)) &= A \left(\sum_{i=0}^n P_i B_i^p(u) \right) + B \\ &= \sum_{i=0}^n [AP_i B_i^p(u) + BB_i^p(u) - BB_i^p(u)] + B \\ &= \sum_{i=0}^n (AP_i + B) B_i^p(u) + B \left(1 - \sum_{i=0}^n B_i^p(u) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (AP_i + B) B_i^p(u) \\ &= \sum_{i=0}^n \Phi(P_i) B_i^p(u) \end{aligned}$$

esta última parte se debe a que, como el soporte es no periódico

$$\sum_{i=0}^n B_i^p(u) = 1, \quad u \in [u_0, u_m].$$

Así, la curva B-Spline definida sobre el soporte es invariante bajo aplicaciones afines. □

3.9. Interpolación con curvas B-Splines

Los B-Splines se utilizan frecuentemente para resolver problemas de interpolación. Lo que nos interesa en primer lugar es la unicidad del interpolante. Dados $n + 1$ puntos $Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{R}^2$ el problema de encontrar una curva B-Spline que los interpole, nos lleva al sistema

$$C(t_k) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^p(t_k) = Q_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} B_0^p(t_0) & B_1^p(t_0) & \dots & B_n^p(t_0) \\ B_0^p(t_1) & B_1^p(t_1) & \dots & B_n^p(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^p(t_n) & B_1^p(t_n) & \dots & B_n^p(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

El teorema Schoenberg-Whitney(1953) establece cuando el problema de interpolación tiene solución única.

Teorema 3.2 (Schoenberg-Whitney). Dada la partición $X_n : x_{-p} < x_{-p+1} < \dots < x_{n+p}$ y

$$B_k^p(x) = \sum_{i=k}^{p+k+1} \left[\prod_{j=pj \neq i}^{p+k+1} \frac{1}{x_j - x_i} \right] (x - x_i)_+^p, \quad -\infty < x < \infty,$$

para $k = -p, -p+1, \dots, n-1$, y nodos de interpolación

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{n+p-1}.$$

Entonces para cualesquiera puntos Q_i en el plano, el sistema

$$\sum_{k=-p}^{n-1} P_k B_k^p(t_i) = Q_i, \quad i = 0, \dots, n+p-1,$$

tiene solución única si y sólo si los

$$B_{j-p-1}^p(t_j), \quad j = 0, \dots, n+p-1,$$

son distintos de cero.

Demostración. Ver [9] □

3.9.1. Soporte de interpolación

Frecuentemente se utilizan tres tipos de soportes de interpolación

1. Soporte uniforme. El método consiste en una partición regular del intervalo $[0,1]$

$$t_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

La ventaja que tiene este método es que las fórmulas basadas en él se simplifican y no es necesario conocer los puntos de interpolación. Pero también tiene un gran inconveniente, los incrementos en los parámetros son iguales. Por ejemplo, si Q_0 y Q_1 son puntos *cercanos*, mientras que P_2 está muy alejado de ambos, el arco de la curva entre Q_0 y Q_1 se recorre para $t \in [0, \frac{1}{n}]$ y el comprendido entre P_1 y P_2 para $t \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$; es decir, un incremento del parámetro de $\frac{1}{n}$ da lugar a arcos de longitudes muy diferentes.

2. Soporte basado en la longitud de cuerda. Este método depende de los puntos de interpolación, la ventaja que tiene sobre el soporte uniforme es que sigue manteniendo en cierta medida la geometría de los puntos de interpolación, haciendo que los incrementos $t_i - t_{i-1}$ sean proporcionales a las longitudes de Q_{i-1} a Q_i .

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_i &= t_{i-1} + \frac{\|Q_i - Q_{i-1}\|}{d}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

donde $d = \sum_{i=1}^n \|Q_i - Q_{i-1}\|$. Observemos que $t_n = 1$, por lo que se trata también una partición del intervalo $[0, 1]$. Por lo regular este es el soporte más utilizado.

3. Soporte centripetal. Similar al anterior pero basado en principios físicos. Si la variable t es el tiempo, se pretende que la curva interpoladora optimice la fuerza centrípeta a la que se ve sometido un móvil que se desplaza a lo largo de la curva. Los nodos son tales que los cuadrados de los incrementos son proporcionales a las longitudes de Q_{i-1} a Q_i .

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_i &= t_{i-1} + \frac{\sqrt{\|Q_i - Q_{i-1}\|}}{d}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

donde $d = \sum_{i=1}^n \sqrt{\|Q_i - Q_{i-1}\|}$, también se tiene que $t_n = 1$.

3.9.2. Bases de B-Splines para interpolación

Supongamos que deseamos interpolar $n + 1$ puntos Q_0, \dots, Q_n , entonces debemos considerar un espacio de curvas B-Splines de dimensión $n + 1$, donde los B-Splines serán los correspondientes a un cierto soporte de nodos, éstos son diferentes a los nodos de interpolación

$$S = \{u_0, \dots, u_l\},$$

con $l = n + p + 1$. Al elegir cualquier grado p de la curva se puede definir el valor de l , por tanto resta obtener los $l + 1$ valores, es decir, u_0, \dots, u_l .

Dado un conjunto de puntos de interpolación Q_0, \dots, Q_n , los nodos de interpolación t_0, \dots, t_n y el grado p , existen muchas formas para elegir el soporte S para así poder definir la base B-Spline a utilizar y con esto construir la curva interpoladora. De acuerdo a la elección del soporte de nodos, el determinante en el sistema 3.12 puede ser o no nulo, es decir, el problema de interpolación puede tener solución única o no. Observemos que si $u_0 < t_0$, la curva interpoladora tendrá al menos un tramo ‘antes’ de llegar a P_0 y lo mismo sucedera si $t_n < u_l$. Es decir, la curva comenzará antes del primer punto y terminará después del último punto. Para evitar estos inconvenientes es común tomar $u_0 = t_0$ y $u_l = t_l$. Una elección para el soporte de nodos que aprovecha bien las propiedades de los B-Splines y evita la situación antes mencionada es que sea no periódico, esto es

$$S = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{l-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\} \quad (3.13)$$

con $0 < u_{p+1} < u_{p+2} < \dots < u_{l-p-1} < 1$. De esta forma los nodos interiores son simples y la curva es de clase C^{p-1} . Los $n - p$ nodos interiores pueden elegirse igualmente espaciados, pero esto no es recomendable por lo que los nodos de interpolación se promedian por p

$$u_{p+i} = \frac{t_i + t_{i+1} + \dots + t_{i+p-1}}{p}, \quad i = 1, \dots, n - p. \quad (3.14)$$

Ejemplo 3.4. Supongamos que el grado es $p = 3$, entonces $l = n + p + 1 = n + 4$, el soporte debe tener cuatro nodos más que puntos de interpolación y una posible elección es

$$S = \{0, 0, t_0, \dots, t_n, 1, 1\}.$$

Si el soporte de interpolación es uno de los definidos anteriormente, tendremos que $t_0 = 0$ y $t_n = 1$ y los nodos extremos son de multiplicidad 4, mientras que los interiores son simples. En este caso la curva interpoladora sería de clase C^2 en los nodos interiores y tiene la propiedad de que la interpolación se

produce en puntos de ruptura, esto es, cada tramo de la curva es el comprendido entre dos puntos de interpolación consecutivos. En este caso, por 3.13 y 3.14 se obtiene

$$S = \{0, 0, 0, 0, u_4, \dots, u_n, 1, 1, 1, 1\}.$$

$$u_{i+3} = \frac{t_i + t_{i+1} + t_{i+2}}{3}, \quad i = 1, \dots, n-3.$$

De aquí podemos saber cuales B-Splines son no nulos

$$t_i < u_{i+3} < t_{i+2}, \quad i = 1, \dots, n-3,$$

entonces

$$u_3 < t_1 < u_4,$$

$$u_{i+1} < t_i < u_{i+3}, \quad i = 2, \dots, n-2,$$

$$u_n < t_{n-1} < u_{n+1},$$

donde $u_3 = 0$ y $u_{n+1} = 1$. Se tienen las siguientes conclusiones:

1. Todos los B-Splines se anulan en $t_0 = 0$, por ser un nodo de multiplicidad $p+1 = 4$, excepto $B_0^3(u)$ que vale 1.
2. Todos los B-Splines se anulan en $t_n = 1$, por ser un nodo de multiplicidad $p+1 = 4$, excepto $B_n^3(u) = 1$.
3. En $u = t_1$ son no nulos $B_0^3, B_1^3, B_2^3, B_3^3$.
En $u = t_i + 2$ pueden ser no nulos $B_i^3, B_{i+1}^3, B_{i+2}^3, B_{i+3}^3, B_{i+4}^3$, para $i = 0, \dots, n-4$.
En $u = t_{n-1}$ son no nulos $B_{n-3}^3, B_{n-2}^3, B_{n-1}^3, B_n^3$.

Notemos que sólo pueden ser a lo más $p+1 = 4$ B-Splines no nulos, por ejemplo para $u = t_2$, $B_0^3(t_2) \neq 0$ si $t \in [u_0, u_4)$, pero entonces $B_4^3(t_2) = 0$. Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones se obtienen los puntos de control

$$\sum_{i=0}^n P_i B_i^3(t_k) = Q_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

la matriz asociada al sistema es cuatridiagonal y puede triangularizarse con $2n$ eliminaciones del método de Gauss.

3.9.3. Interpolación con condiciones en los extremos

Otra alternativa consiste en tomar un soporte no periódico con nodos interiores iguales a los de interpolación, excepto en $t_0 = 0$ y $t_n = 1$

$$S = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, t_1, \dots, t_{n-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}, \quad (3.15)$$

con lo cual la interpolación se produce en los puntos de ruptura.

Obsérvese que hay más nodos de los necesarios, pues la dimensión de los B-Splines de grado p definidos sobre el soporte es $2(p+1) + (n-1) - (p+1) = n+1+p-1$, luego existen $p-1$ parámetros más

que puntos a interpolar. Estos parámetros pueden determinarse imponiendo condiciones adicionales a las de interpolación, usualmente en los extremos, aunque sólo en el caso de que p sea impar las condiciones serán simétricas. Para $p = 3$ quedarán dos parámetros libres, lo que corresponde a lo visto en el capítulo 2, donde se imponían valores para las primeras o segundas derivadas en los extremos. Una curva B-Spline definida en un soporte del tipo 3.15

$$S = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, t_1, \dots, t_{n-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\},$$

depende de $n + 3$ puntos de control, los llamaremos $P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}$

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n+2} P_i B_i^p(u).$$

Al imponer las $n + 1$ condiciones de interpolación se tiene el sistema

$$\sum_{i=0}^{n+2} P_i N_i^p(t_k) = Q_k, \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.16)$$

Sabemos que para un soporte no periódico, la curva interpola a los puntos de control extremos

$$P_0 = Q_0, \quad P_{n+2} = Q_n, \quad (3.17)$$

estas ecuaciones corresponden a la primera y última ecuación en 3.16 debido a que $B_i^p(0) = 0$ para $i = 1, \dots, n + 2$ y $B_i^p(1) = 0$ para $i = 0, \dots, n + 1$. Las ecuaciones para $k = 1, \dots, n - 1$ contienen a los B-Splines evaluados en nodos simples t_1, \dots, t_{n-1} , por lo que todos los sumandos son nulos salvo tres

$$P_k N_k(t_k) + P_{k+1} N_{k+1}(t_k) + P_{k+2} N_{k+2}(t_k) = Q_k \quad (3.18)$$

para $k = 1, \dots, n - 1$. Resta imponer dos condiciones por ejemplo P_1 y P_{n+1} , así, el sistema anterior quedará con $n - 1$ ecuaciones y $n - 1$ incógnitas. Para especificar los puntos de control P_1 y P_{n+1} se dan las derivadas de la curva B-Spline en los extremos.

$$\begin{aligned} C'(0) &= \frac{p}{u_{p+1} - u_1} (P_1 - P_0) \\ &= \frac{3}{u_4 - u_1} (P_1 - P_0) \\ &= \frac{3}{t_1} (P_1 - P_0) \\ &= \frac{3}{t_1} (P_1 - Q_0), \\ C'(1) &= \frac{3}{1 - t_{n-1}} (P_{n+2} - P_{n+1}) \\ &= \frac{3}{1 - t_{n-1}} (Q_n - P_{n+1}), \end{aligned}$$

luego se tiene

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_0 + \frac{t_1}{3} D_0, \\ P_{n+1} &= Q_n - \frac{1 - t_{n-1}}{3} D_n, \end{aligned}$$

donde $D_0 := C'(0)$ y $D_n := C'(1)$. El sistema formado por las ecuaciones anteriores junto con 3.18 y 3.17 constituyen un procedimiento de interpolación muy eficiente cuyo coste computacional es proporcional a n .

3.10. Algoritmo de De Boor

El algoritmo de De Boor es una generalización del algoritmo de De Casteljaou. Este algoritmo, numéricamente estable, proporciona un método para encontrar un punto $C(u)$ de una curva B-Spline a partir de los puntos de control y u en su dominio.

Sean $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ los puntos de control de la curva B-Spline y $u \in [u_c, u_{c+1}]$.

1. Para $i = 0$ hasta n .

$$P_i^{(0)} = P_i.$$

2. Si $u \neq u_c$, entonces $s = 0$.
3. Si no se encuentra la multiplicidad s de u_c .
4. Para $r = 1$ hasta $p - s$.

Para $i = c - p + r$ hasta $c - s$.

$$a_i^r = \frac{u - u_i}{u_{i+p+r+1} - u_i}.$$

$$P_i^{(r)} = (1 - a_i^r)P_{i-1}^{(r-1)} + a_i^r P_i^{(r-1)}.$$

5. Regresar $C(u) = P_c^{(p)}$.

3.11. Algoritmo para evaluar curvas B-Splines

El siguiente algoritmo es para dibujar una curva B-Spline de grado p , dados $n + 1$ puntos de interpolación.

1. Calcular los nodos de interpolación t_i a partir de los puntos de interpolación Q_i .
2. Calcular el soporte de $S_u = \{u_0, \dots, u_{n+p+1}\}$.
3. Calcular los puntos de control.
4. Aplicar el algoritmo de De Boor.

En la sección A.2 del Apéndice A, se muestran las pruebas realizadas con los algoritmos implementados en Matlab realizando interpolación con curvas B-Splines.

Capítulo 4

Superficies de Bézier

En los capítulos anteriores estudiamos como ajustar un conjunto de puntos en el plano por una curva suave, a partir de puntos dados. Ahora, si los puntos están en el espacio tendremos que utilizar superficies. La mayoría de las propiedades de las curvas de Bézier se generalizan a superficies de Bézier.

Consideremos la siguiente región rectangular

$$R = \{[a, b] \times [c, d]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

en el plano xy . Una partición de R es una malla Z

$$Z = X_n \times Y_m,$$

donde

$$\begin{aligned} X_n & : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \\ Y_m & : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d. \end{aligned}$$

La partición Z divide a R en nm rectángulos

$$R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

donde $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$.

4.1. Superficies producto tensorial

Las superficies producto tensorial pueden ser definidas usando una variedad de bases; sin embargo, serán de interés las que utilizan los polinomios de Bernstein definidos en $[0, 1]$.

Definición 4.1. Una superficie paramétrica *producto tensorial* se define como

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i(u) C_j(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

donde $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y $B_i(u)$, $C_j(v)$ son llamadas funciones bases.

4.2. Superficies de Bézier simples

Una superficie producto tensorial de Bézier es una extensión de una curva de Bézier en dos direcciones paramétricas (u, v) .

Definición 4.2. Una *superficie de Bézier* es una superficie producto tensorial

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

donde los $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y $N_i^n(u), N_j^m(v)$ son polinomios de Bernstein en la variable u y v respectivamente. Al igual que en curvas de Bézier a los puntos P_{ij} se les llama puntos de control.

El conjunto de puntos de control forman la red o malla de control de Bézier.

4.2.1. Propiedades de las superficies de Bézier simples

Proposición 4.1. Sea

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v), \quad u \in [0, 1],$$

una superficie de Bézier. Se tienen las siguientes propiedades.

1. Interpolación de los vértices de la malla de control.

$$S(0, 0) = P_{00}.$$

$$S(0, 1) = P_{0m}.$$

$$S(1, 0) = P_{n0}.$$

$$S(1, 1) = P_{nm}.$$

2. Derivadas parciales.

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial u} = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (P_{i+1,j} - P_{ij}) N_i^{n-1}(u) N_j^m(v).$$

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial v} = m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (P_{i,j+1} - P_{ij}) N_i^n(u) N_j^{m-1}(v).$$

3. Restricción de la envolvente convexa. Una superficie de Bézier se encuentra contenida en la cápsula convexa de los puntos de control.
4. Invarianza afín. La representación de una superficie de Bézier es invariante bajo aplicaciones afines.
5. Curvas isoparamétricas. Al dejar fijo un parámetro de una superficie de Bézier, ésta se convierte en una curva de Bézier.

Demostración. 1. Sea $S(u, v)$ una superficie de Bézier

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

por las propiedades de los polinomios de Bernstein se tiene

$$\begin{aligned} N_0^n(0) &= 1, & N_i^n(0) &= 0, & i &= 1, \dots, n; \\ N_n^n(1) &= 1, & N_i^n(1) &= 0, & i &= 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} N_0^m(0) &= 1, & N_i^m(0) &= 0, & i &= 1, \dots, m; \\ N_n^m(1) &= 1, & N_i^m(1) &= 0, & i &= 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se sigue que

$$\begin{aligned} S(0, 0) &= P_{00}. \\ S(0, 1) &= P_{0m}. \\ S(1, 0) &= P_{n0}. \\ S(1, 1) &= P_{nm}. \end{aligned}$$

2. Sea $S(u, v)$ una superficie de Bézier

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1].$$

Calculando la derivada parcial con respecto a u , obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \frac{dN_i^n(u)}{du} N_j^m(v) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} n [N_{i-1}^{n-1}(u) - N_i^{n-1}(u)] N_j^m(v) \\ &= n \sum_{j=0}^m [P_{0j} (N_{-1}^{n-1}(u) - N_0^{n-1}(u)) + P_{1j} (N_0^{n-1}(u) - N_1^{n-1}(u)) \\ &\quad + \dots + P_{nj} (N_{n-1}^{n-1}(u) - N_n^{n-1}(u))] N_j^m(v) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m (P_{i+1,j} - P_{ij}) N_i^{n-1}(u) N_j^m(v). \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene una fórmula similar para las derivadas parciales respecto a v

$$\frac{\partial S(u, v)}{\partial v} = m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} (P_{i,j+1} - P_{ij}) N_i^n(u) N_j^{m-1}(v).$$

3. Dado que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^n(u) N_j^m(v) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m N_j^m(v) \right) N_i^n(u) \\ &= \sum_{i=0}^n N_i^n(u) \\ &= 1 \end{aligned}$$

y $N_i^n(u) N_j^m(v) \geq 0$, entonces cualquier punto de la superficie es una combinación lineal convexa de los puntos de control.

4. Sea

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

una superficie de Bézier y sea $\Phi(P) = AP + B$ una aplicación afín, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(S(u, v)) &= A \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v) \right) + B \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m [AP_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v) + BN_i^n(u) N_j^m(v) - BN_i^n(u) N_j^m(v)] + B \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (AP_{ij} + B) N_i^n(u) N_j^m(v) + B \left(1 - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^n(u) N_j^m(v) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (AP_{ij} + B) N_i^n(u) N_j^m(v) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \Phi(P_{ij}) N_i^n(u) N_j^m(v). \end{aligned}$$

Así, al aplicar una transformación afín a una superficie de Bézier basta con transformar los puntos de control y construir a partir de éstos la nueva superficie.

5. Sea $S(u, v)$ una superficie de Bézier

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1], \quad (4.1)$$

si $v = \bar{v}$

$$S(u, \bar{v}) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m P_{ij} N_j^m(\bar{v}) \right] N_i^n(u),$$

la ecuación anterior corresponde a una curva de Bézier de grado n

$$C(u) = \sum_{i=0}^n Q_i N_i^n(u),$$

donde los puntos de control Q_i son

$$Q_i = \sum_{j=0}^m P_{ij} N_j^m(\bar{v}), \quad i = 0, \dots, n.$$

Sucede algo similar si ahora sustituimos $u = \bar{u}$ en 4.1, entonces tendríamos una curva de Bézier de grado m . □

4.3. Superficies de Bézier compuestas

Como en el capítulo 1, primero estudiaremos la composición de dos superficies de Bézier, después se hará de manera general. También analizaremos bajo que condiciones dos superficies simples pueden unirse para formar una superficie compuesta de clase C^1 .

Teorema 4.1. Dadas dos superficies de Bézier, al unir las se obtiene una superficie continua si las mallas de control comparten un polígono de control en uno de sus bordes.

Demostración. Sea

$$S_1(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(t) N_j^m(s),$$

una superficie de Bézier definida en $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$ donde $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y s, t son los parámetros $t = \frac{u-u_0}{u_1-u_0}$, $s = \frac{v-v_0}{v_1-v_0}$. Ahora supongamos que tenemos una segunda superficie de Bézier que tiene los mismos grados que $S_1(u, v)$ y que está definida sobre $[u_1, u_2] \times [v_0, v_1]$

$$S_2(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m Q_{ij} N_i^n(r) N_j^m(s),$$

con $r = \frac{u-u_2}{u_2-u_1}$, $s = \frac{v-v_0}{v_1-v_0}$. Se tiene que la superficie compuesta es continua a lo largo de la curva frontera para $u = u_1$ si y sólo si las curvas isoparamétricas para $u = u_1$ son idénticas

$$S_1(u_1, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(1) N_j^m(s) = \sum_{j=0}^m P_{nj} N_j^m(s),$$

$$S_2(u_1, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m Q_{ij} N_i^n(1) N_j^m(s) = \sum_{j=0}^m Q_{0j} N_j^m(s),$$

luego, para que éstas curvas sean iguales deben coincidir en sus puntos de control

$$P_{nj} = Q_{0j}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Llegamos a la conclusión de que una condición necesaria y suficiente para la continuidad es que las mallas de control P_{ij} Q_{ij} compartan un polígono en uno de sus bordes. □

Ahora veamos bajo que condiciones una superficie compuesta será de clase C^1 .

El teorema anterior nos dice que para que una superficie compuesta sea continua, se debe cumplir

$$P_{nj} = Q_{0j}, \quad j = 0, \dots, n,$$

con esto se tiene la continuidad de las derivadas parciales en dirección v

$$\frac{\partial S_1(u_1, v)}{\partial v} = \frac{m}{u_1 - u_0} \sum_{j=0}^{m-1} (P_{n,j+1} - P_{nj}) N_j^{m-1}(s)$$

y

$$\frac{\partial S_2(u_1, v)}{\partial v} = \frac{m}{u_1 - u_0} \sum_{j=0}^{m-1} (Q_{0,j+1} - Q_{0j}) N_j^{m-1}(s),$$

las derivadas parciales respecto a la variable u

$$\frac{\partial S_1(u_1, v)}{\partial u} = \frac{n}{u_1 - u_0} \sum_{j=0}^m (P_{n,j} - P_{n-1,j}) N_j^m(s)$$

y

$$\frac{\partial S_2(u_1, v)}{\partial u} = \frac{m}{u_2 - u_1} \sum_{j=0}^m (Q_{1,j} - Q_{0j}) N_j^m(s),$$

las ecuaciones anteriores serán iguales si los coeficientes de los $N_j^m(s)$ son iguales

$$\frac{P_{n,j} - P_{n-1,j}}{u_1 - u_0} = \frac{Q_{1,j} - Q_{0j}}{u_2 - u_1}, \quad (4.2)$$

para $j = 0, \dots, m$, es decir, los puntos P_{n-1} , $P_{nj} = Q_{0j}$, Q_{1j} están alineados. Sin embargo al tener una malla y que ésta se una a otras cuatro, no basta que los tres puntos de control sean consecutivos. En la siguiente sección trataremos este caso.

4.4. Superficies de Bézier rectangulares compuestas

Sean S_u , S_v soportes de $n + 1$ y $m + 1$ nodos respectivamente

$$\begin{aligned} S_u &= \{u_0, \dots, u_n\}, \\ S_v &= \{v_0, \dots, v_m\}, \end{aligned}$$

los puntos (u_k, v_h) son los nodos de una malla producto cartesiano de los soportes.

En cada rectángulo (u_k, v_h) , (u_{k+1}, v_h) , (u_k, v_{h+1}) , (u_{k+1}, v_{h+1}) , podemos definir una superficie de Bézier de grado p en u y grado q en v

$$S_{kh}(u, v) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q P_{kn+i, hm+j} N_i^p(t) N_j^q(s),$$

donde $t = \frac{u-u_k}{u_{k+1}-u_k}$, $s = \frac{v-v_h}{v_{h+1}-v_h}$.

Para la superficie de Bézier $S_{kh}(u, v)$ están implicados los puntos

$$\begin{array}{cccc} P_{kp,hq} & P_{kp,hq+1} & \cdots & P_{kp,(h+1)q} \\ P_{kp+1,hq} & P_{kp+1,hq+1} & \cdots & P_{kp+1,(h+1)q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{(k+1)p,hq} & P_{(k+1)p,hq+1} & \cdots & P_{(k+1)p,(h+1)q} \end{array}$$

De la ecuación 4.2, se tiene que en este caso las ecuaciones para la continuidad de clase C^1 en dirección u son

$$\frac{P_{kp,j} - P_{kp-1,j}}{u_k - u_{k-1}} = \frac{P_{kp+1,j} - P_{kp,j}}{u_{k+1} - u_k},$$

para $j = 0, \dots, mq$ y $k = 1, \dots, n - 1$. Análogamente en la dirección v

$$\frac{P_{i,hq} - P_{i,hq-1}}{u_h - u_{h-1}} = \frac{P_{i,hq+1} - P_{i,hq}}{u_{h+1} - u_h},$$

para $i = 0, \dots, np$ y $h = 1, \dots, m - 1$. Con esto hemos visto las condiciones que deben cumplir los puntos de control para formar una superficie de Bézier, en cada rectángulo de la malla.

4.5. Interpolación con superficies de Bézier

Dado un conjunto de $(n + 1)(m + 1)$ puntos Q_{ij} , $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$ y los soportes

$$\begin{aligned} S_u &= \{u_0, \dots, u_n\}, \\ S_v &= \{v_0, \dots, v_m\}, \end{aligned}$$

lo que deseamos encontrar es una superficie de Bézier compuesta de grado p en u y de grado q en v que interpole a los puntos Q_{ij} . Así, tenemos los datos suficientes para llevar a cabo la interpolación, comenzaremos por la variable u donde se realizarán $m + 1$ interpolaciones de $n + 1$ puntos cada una.

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{00} & Q_{10} & Q_{20} & \cdots & Q_{n0} \rightarrow R_{00} & R_{10} & R_{20} & \cdots & R_{np,0} \\ Q_{01} & Q_{11} & Q_{21} & \cdots & Q_{n1} \rightarrow R_{01} & R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{np,1} \\ Q_{02} & Q_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{n2} \rightarrow R_{02} & R_{12} & R_{22} & \cdots & R_{np,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{0m} & Q_{1m} & Q_{2m} & \cdots & Q_{nm} \rightarrow R_{0m} & R_{1m} & R_{2m} & \cdots & R_{np,m} \end{array}$$

A continuación los puntos de control obtenidos se interpolan por columnas, aquí se realizarán $np + 1$ interpolaciones de $m + 1$ puntos cada una

$$\begin{array}{ccccccc} R_{00} & R_{01} & R_{02} & \cdots & R_{0m} \rightarrow P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & P_{0,mq} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \rightarrow P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1,mq} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \rightarrow P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2,mq} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{np,0} & R_{np,1} & R_{np,2} & \cdots & R_{np,m} \rightarrow P_{np,0} & P_{np,1} & P_{np,2} & \cdots & P_{np,mq} \end{array}$$

Así, obtenemos los puntos de control P_{ij} con $i = 0 \dots, np$ y $j = 0 \dots, mq$, con ésto la superficie de Bézier se define perfectamente.

Capítulo 5

Superficies B-Splines

El principal problema que afectaba a las curvas de Bézier, es que al imponer condiciones de continuidad a la derivada de la curva en cada punto de unión, se imponían también restricciones sobre los puntos de control.

Esto se resolvía utilizando curvas B-Splines, ya que la base de B-Splines tiene incorporadas las condiciones de continuidad en cada punto de unión mediante el concepto de nodos múltiples. Como se vio en el capítulo anterior, para unir superficies de Bézier el problema es aún mayor, y la única técnica viable para encontrar los puntos de control sería generalizar el método de Hermite para superficies.

En este capítulo utilizaremos el producto tensorial de bases B-Splines para poder definir superficies B-Splines sin que las condiciones de continuidad involucren a los puntos de control.

Consideremos dos soportes de nodos

$$S_u = \{u_0, \dots, u_r\} \text{ y } S_v = \{v_0, \dots, v_s\}$$

ambos no periódicos y definidos en $[0, 1]$.

Definición 5.1. Una *superficie B-Spline* es una combinación de las funciones producto tensorial de los B-Splines asociados a cada soporte

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

donde los $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ constituyen la malla o red de control.

5.1. Propiedades de las superficies B-Splines

Proposición 5.1. Sea

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

una superficie B-Spline. Se tienen las siguientes propiedades

1. Interpolación en las esquinas de la red de control.

$$\begin{aligned} S(0,0) &= P_{00}. \\ S(0,1) &= P_{0m}. \\ S(1,0) &= P_{n0}. \\ S(1,2) &= P_{nm}. \end{aligned}$$

2. Derivadas parciales en las esquinas de la red.

3. Orden de continuidad. En un punto P_{kh} donde u_k es de multiplicidad α y v_h es de multiplicidad β , $S(u, v)$ tiene derivadas parciales de orden $p - \alpha$ con respecto a u y $q - \beta$ con respecto a v .

4. Control local. Dada una superficie B-Spline, si el punto P_{kh} es modificado por \bar{P}_{kh} , entonces

$$S(u, v) - \bar{S}(u, v) = (P_{kh} - \bar{P}_{kh})B_k^p(u)B_h^q(v).$$

5. Restricción a la envolvente convexa. Una superficie B-Spline esta comprendida en el menor poliedro convexo que contiene a todos los puntos de control.

6. Las superficies B-Splines son invariantes bajo aplicaciones afines.

7. Si una superficie B-Spline está definida en soportes que no tienen nodos interiores

$$S_u = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}, \quad S_v = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\},$$

entonces la superficie B-Spline es un superficie de Bézier.

Demostración. 1. Sea

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

una superficie B-Spline, definida sobre soportes no periódicos

$$S_u = \{u_0, \dots, u_r\} \text{ y } S_v = \{v_0, \dots, v_s\},$$

con $u_0 = \dots = u_p = 0$, $v_0 = \dots = v_q = 0$, $u_{r-p} = \dots = u_r = 1$ y $v_{s-q} = \dots = v_s = 1$. De la propiedad 1 de los B-Splines

$$\begin{aligned} B_0^p(0) &= 1 & B_i^p(0) &= 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ B_0^q(0) &= 1 & B_j^q(0) &= 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B_n^p(1) &= 1 & B_i^p(1) &= 0, \quad i = 0, \dots, n-1; \\ B_m^q(1) &= 1 & B_j^q(1) &= 0, \quad j = 0, \dots, m-1, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} S(0, 0) &= P_{00}. \\ S(0, 1) &= P_{0m}. \\ S(1, 0) &= P_{n0}. \\ S(1, 2) &= P_{nm}. \end{aligned}$$

2. Sea

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

una superficie B-Spline, definida sobre soportes no periódicos

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \left(\frac{dB_i^p(u)}{du} \right) B_j^q(v) \\ &= \sum_{j=0}^m \left[\sum_{i=0}^n P_{ij} \left(\frac{dB_i^p(u)}{du} \right) B_j^q(v) \right], \end{aligned}$$

de la propiedad 2 de los B-Splines

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} p \left[\frac{B_i^{p-1}(x)}{u_{i+p} - u_i} - \frac{B_{i+1}^{p-1}(x)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right] B_j^q(v), \\ \frac{\partial S(0, v)}{\partial u} &= \frac{p}{u_{p+1}} \sum_{j=0}^m (P_{1j} - P_{0j}) B_j^q(v), \\ \frac{\partial S(1, v)}{\partial u} &= \frac{p}{1 - u_n} \sum_{j=0}^m (P_{nj} - P_{n-1,j}) B_j^q(v). \end{aligned}$$

Para $v = 0, 1$ se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(0, 0)}{\partial u} &= \frac{p}{u_{p+1}} (P_{10} - P_{00}). \\ \frac{\partial S(0, 1)}{\partial u} &= \frac{p}{u_{p+1}} (P_{1m} - P_{0m}). \\ \frac{\partial S(1, 0)}{\partial u} &= \frac{p}{1 - u_n} (P_{n0} - P_{n-1,0}). \\ \frac{\partial S(1, 1)}{\partial u} &= \frac{p}{1 - u_n} (P_{nm} - P_{n-1,m}). \end{aligned}$$

Resultan unas ecuaciones similares para las derivadas con respecto a v .

3. Esta propiedad se sigue de lo visto en la sección 3.2 del capítulo 3.

4. Sea

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v)$$

y

$$\bar{S}(u, v) = \sum_{i \neq k}^n \sum_{j \neq h}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v) + \bar{P}_{kh} B_k^p(u) B_h^q(v)$$

superficies B-Spline que tienen los mismos puntos de control, excepto por el punto P_{kh}

$$\begin{aligned} S(u, v) - \bar{S}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v) - \sum_{i \neq k}^n \sum_{j \neq h}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v) + \bar{P}_{kh} B_k^p(u) B_h^q(v) \\ &= (P_{kh} - \bar{P}_{kh}) B_k^p(u) B_h^q(v). \end{aligned}$$

5. Esta es una consecuencia de

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^p(u) B_j^q(v) = 1$$

para un punto (\bar{u}, \bar{v}) , $S(\bar{u}, \bar{v})$ es una combinación convexa de los puntos de control

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} P_{ij},$$

donde $a_{ij} \geq 0$ y $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} = 1$.

6. Sea

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v), \quad u, v \in [0, 1],$$

una superficie B-Spline y $\Phi(P) = AP + B$ una aplicación afín, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(S(u, v)) &= A \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v) \right) + B \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[AP_{ij} B_i^p(u) B_j^q(v) + BN_i^n(u) N_j^m(v) - BN_i^n(u) N_j^m(v) \right] + B \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (AP_{ij} + B) B_i^p(u) B_j^q(v) + B \left(1 - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^p(u) B_j^q(v) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (AP_{ij} + B) B_i^p(u) B_j^q(v) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \Phi(P_{ij}) B_i^p(u) B_j^q(v). \end{aligned}$$

Así, al aplicar una transformación afín a una superficie B-Spline basta con realizarla sobre los puntos de control y construir a partir de éstos la nueva superficie.

7. Esta propiedad se sigue de que los B-Splines básicos asociados a cada soporte son los polinomios de Bernstein.

□

5.2. Interpolación con superficies B-Splines

El proceso que se sigue para obtener una superficie B-Spline interpolando un conjunto de puntos, es muy parecido al utilizado para superficies de Bézier.

Sean Q_{ij} los puntos a interpolar con $i = 0, \dots, n$ y $j = 0, \dots, m$, lo que deseamos es encontrar una superficie B-Spline de grado p en u y grado q en v que interpole a los puntos dados, observemos que el soporte en u debe tener $n + p + 2$ nodos, ya que $r + 1 = n + p + 2$, como $s + 1 = m + q + 2$ el soporte en v debe tener $m + q + 2$ nodos,

$$S_u = \{u_0, \dots, u_{n+p+1}\} \text{ y } S_v = \{v_0, \dots, v_{m+q+1}\}.$$

Es necesario definir los soportes de nodos para los B-Splines así como los soportes de interpolación, esto se vio en la sección 3.11.1. Comenzando con la variable u , se realizarán $m + 1$ interpolaciones cada una de $n + 1$ puntos.

Q_{00}	Q_{10}	Q_{20}	\dots	Q_{n0}	se interpola con	$C_0(u) = \sum_{i=0}^n R_{i0} B_i^p(u)$
Q_{01}	Q_{11}	Q_{21}	\dots	Q_{n1}	se interpola con	$C_1(u) = \sum_{i=0}^n R_{i1} B_i^p(u)$
Q_{02}	Q_{12}	Q_{22}	\dots	Q_{n2}	se interpola con	$C_2(u) = \sum_{i=0}^n R_{i2} B_i^p(u)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
Q_{0m}	Q_{1m}	Q_{2m}	\dots	Q_{nm}	se interpola con	$C_m(u) = \sum_{i=0}^n R_{im} B_i^p(u)$

Después, realizamos la interpolación en la variable v con los puntos obtenidos anteriormente.

R_{00}	R_{01}	R_{02}	\dots	R_{0m}	se interpola con	$D_0(u) = \sum_{i=0}^m P_{0i} B_i^q(v)$
R_{10}	R_{11}	R_{12}	\dots	R_{1m}	se interpola con	$D_1(u) = \sum_{i=0}^m P_{1i} B_i^q(v)$
R_{20}	R_{21}	R_{22}	\dots	R_{2m}	se interpola con	$D_2(u) = \sum_{i=0}^m P_{2i} B_i^q(v)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
R_{n0}	R_{n1}	R_{n2}	\dots	R_{nm}	se interpola con	$D_n(u) = \sum_{i=0}^m P_{ni} B_i^q(v)$

Los puntos obtenidos P_{ij} son los puntos de control de la superficie B-Spline de bigrado (p, q) , con estos datos y los soportes, la superficie queda completamente determinada.

5.3. Algoritmo para evaluar superficies B-Splines

El siguiente algoritmo es para dibujar una superficie B-Spline de grado p en la variable u y de grado q en la variable v .

1. Calcular los nodos de interpolación t_i, t'_i para la variable u y v respectivamente, todo esto a partir de los nodos de interpolación $Q_{ij}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$.
2. Calcular los soportes $S_u = \{u_0, \dots, u_{n+p+1}\}, S_v = \{v_0, \dots, v_{m+q+1}\}$.
3. Calcular los puntos de control P_{ij} , con $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$. El número de puntos de control es $(n + 1)(m + 1), P_{ij} \in \mathbb{R}^3$.

4. Aplicar el algoritmo de Boor primero en dirección u y después en dirección v .

En la sección A.3 del Apéndice A, los ejemplos correspondientes a este capítulo.

Conclusiones

La teoría de B-Splines es de gran importancia por sus aplicaciones en distintas áreas y da lugar a métodos de aproximación e interpolación fáciles de implementar; sus aproximantes tiene propiedades que permiten hacer modificaciones locales y por ello se adaptan fácilmente a la forma deseada. Las curvas de Bézier son un caso particular de las curvas B-Splines, de modo que el estudio de éstas últimas involucra el estudio de las primeras. En cuanto al desempeño de ambas, como ya se comentó antes, el grado de las curvas de Bézier depende directamente del número de puntos de control, lo que puede provocar mas cálculos en un momento dado. Mientras que con las curvas B-splines se puede usar un grado relativamente bajo, reduciendo con esto el número de operaciones. Lo mismo sucede con las superficies de Bézier y superficies B-Splines.

Cabe mencionar que los resultados expuestos en este trabajo se pueden encontrar tanto en libros dedicados a graficación por computadora como en textos propiamente de matemáticas, sin embargo, se trató de hallar un punto intermedio entre ambos enfoques, tanto en las definiciones como en los resultados mostrados, con el fin de hacer estos temas más accesibles para los estudiantes de alguna licenciatura o ingeniería que requieran conocerlos. Al mismo tiempo, se muestran varios ejemplos ilustrativos que hacen más asimilable el material desarrollado.

Para aplicar la teoría vista en el desarrollo de la tesis, se hizo la programación de los algoritmos de De Casteljaou y de De Boor. Con estos programas se reprodujeron perfiles de imágenes y superficies de objetos reales, respectivamente. A pesar de que las mediciones sobre unas y otros se hicieron manualmente, la curvas y las superficies obtenidas resultaron ser muy parecidas a las originales.

La teoría de splines es muy extensa, aquí se abordaron únicamente sus principios, quedando pendientes otros temas importantes como el estudio de los NURBS (B-Splines racionales no uniformes) que son una generalización de los B-Splines.

Apéndice A

Ejemplos

Mostraremos algunas pruebas que se realizaron con los algoritmos en 2D y 3D implementados en Matlab. Cabe mencionar que para todos los ejemplos se tomó una partición de 0.01 de ancho del intervalo $[0,1]$.

A.1. Curvas de Bézier

El programa *curvabezier* recibe como datos de entrada los puntos de control, el número de tramos y el grado de la curva, este programa realiza la gráfica de la curva de Bézier por medio del algoritmo de De Casteljaou.

El programa llamado *intercurvabezier* recibe como datos de entrada los puntos de interpolación y el grado de la curva, este programa calcula en primer lugar el soporte de interpolación basado en la longitud de cuerda, posteriormente la derivada direccional de la curva en cada punto del soporte, para esto se utilizó el interpolante de Bessel; por último calcula los puntos de control por medio del interpolante cúbico de Hermite y se utiliza el programa *curvasbezier*.

Ejemplo A.1. Mostraremos la construcción de una circunferencia por medio de 4 tramos de Bézier de grado 2, enseguida se muestran los puntos de control para cada tramo.

Tramo 1: $(1, 0), (1, -1), (0, -1)$.

Tramo 2: $(0, -1), (-1, -1), (-1, 0)$.

Tramo 3: $(-1, 0), (-1, -1), (0, 1)$.

Tramo 4: $(0, 1), (1, 1), (1, 0)$.

Después de ejecutar el programa *curvabezier*, obtenemos la siguiente gráfica, donde los puntos de control aparecen en color rojo.

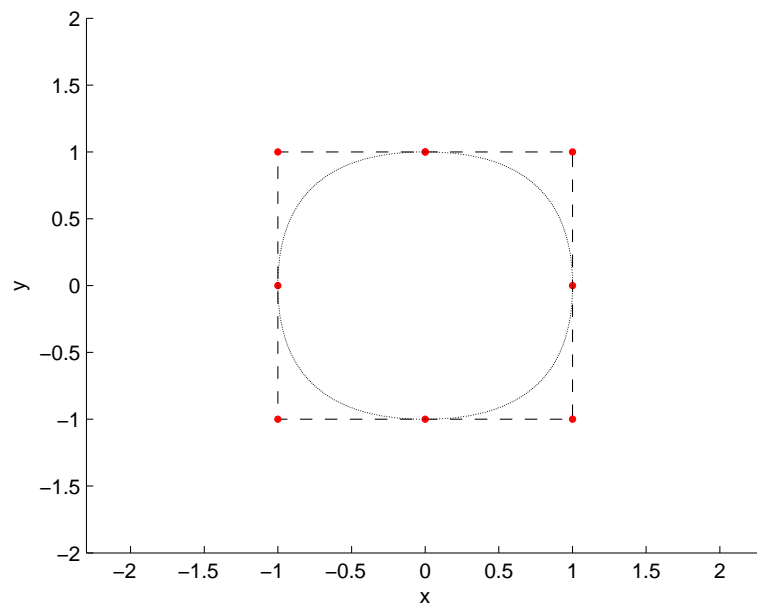


Figura A.1: Curva de Bézier compuesta de grado 2.

En la siguiente gráfica se muestra en color verde la circunferencia utilizando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y de color negro la gráfica obtenida anteriormente con curvas de Bézier.

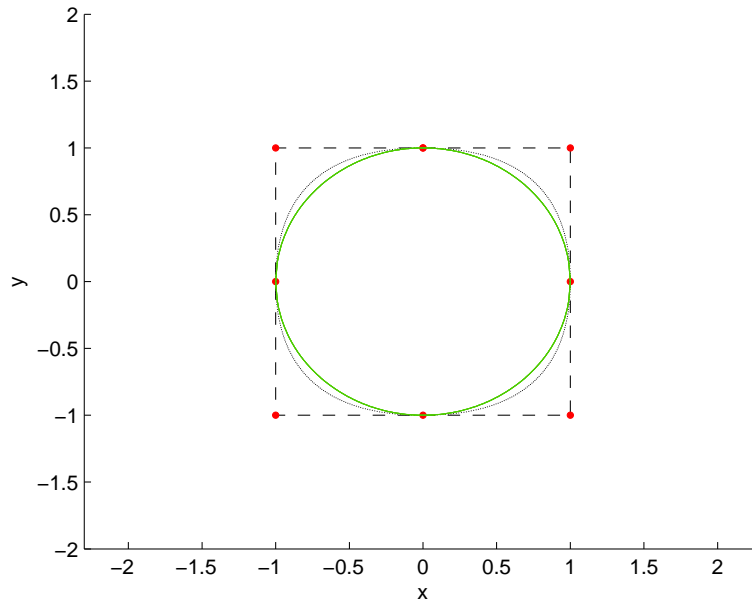


Figura A.2: Curva de Bézier compuesta de grado 2.

El error aproximado entre una y otra con la norma uniforme es de 0.0981. Gráficamente se observa que la gráfica obtenida no fue una buena aproximación de $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo A.2. Ahora mostraremos la construcción de una circunferencia por medio de ocho tramos de Bézier de grado 2. Los puntos de control para cada tramo son:

$$\text{Tramo 1: } (1, 0), \left(1, \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Tramo 2: } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 1\right), (0, 1).$$

$$\text{Tramo 3: } (0, 1), \left(\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Tramo 4: } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-1, \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), (-1, 0).$$

$$\text{Tramo 5: } (-1, 0), \left(-1, \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Tramo 6: } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}, -1\right), (0, -1).$$

$$\text{Tramo 7: } (0, -1), \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Tramo 8: } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(1, \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\right), (1, 0).$$

Después de ejecutar el programa *curvabezier*, obtenemos la siguiente gráfica. Los puntos de control aparecen en color rojo.

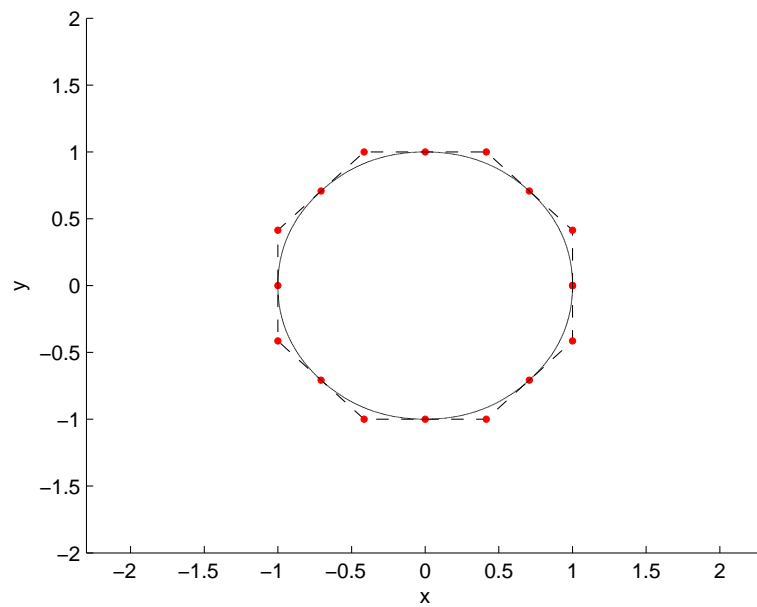


Figura A.3: Curva de Bézier compuesta de grado 2.

Al igual que en el primer ejemplo en color verde se muestra la circunferencia utilizando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, junto con la obtenida por el programa *curvabezier*.

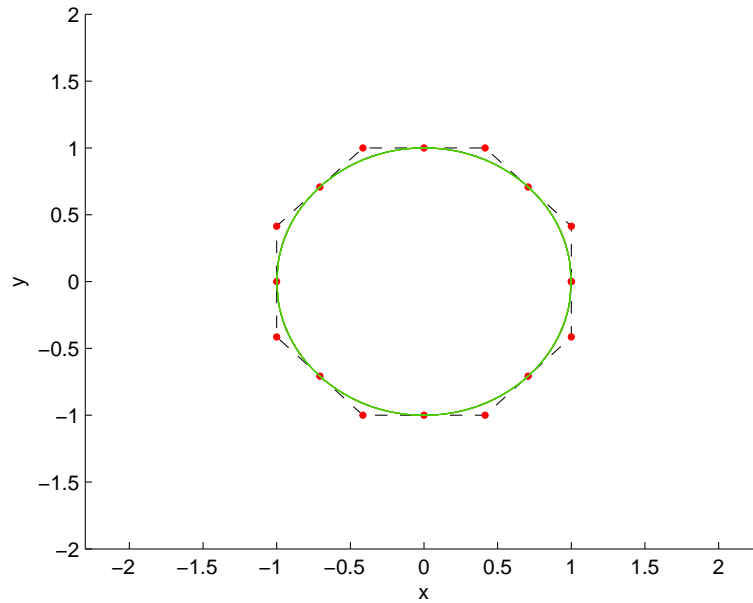


Figura A.4: Curva de Bézier compuesta de grado 2.

El error aproximado entre una y otra con la norma uniforme es de 0.0096. Gráficamente podemos decir que se hizo una buena aproximación de $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo A.3. Ahora mostraremos un ejemplo de interpolación con curvas de Bézier cúbicas. Con los siguientes 9 puntos de interpolación $(0,1)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(1,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0,-1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-1,0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0,1)$, ejecutamos el programa *intercurvabezier* y se obtiene la siguiente gráfica, en color azul se muestran los puntos de interpolación.

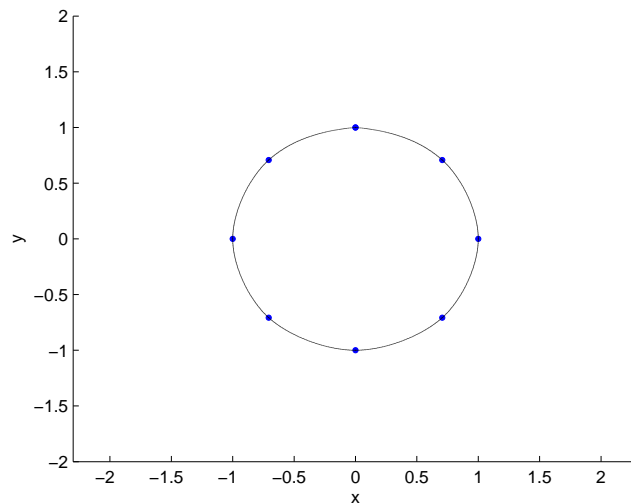


Figura A.5: Curva de Bézier compuesta de grado 3.

En color verde se muestra la gráfica realizada con la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, junto con la realizada por el programa *intercurvabezier*.

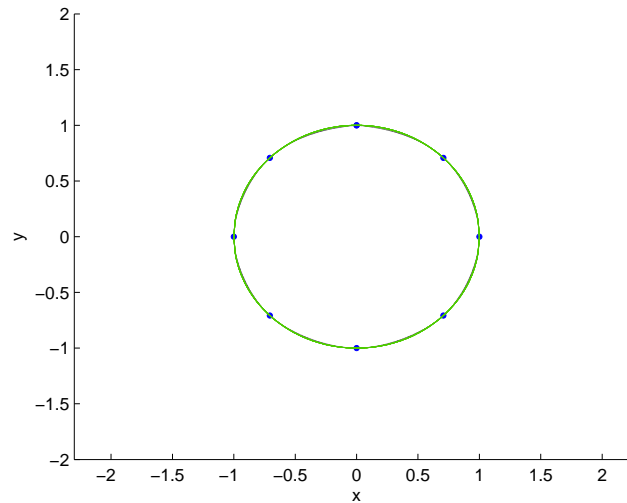


Figura A.6: Curva de Bézier compuesta de grado 3.

El error aproximado con la norma uniforme es de 0.0250. Gráficamente se ve una buena aproximación de $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo A.4. Interpolaremos por una curva de Bézier cúbica compuesta los siguientes puntos de interpolación $(0,1)$, $(5,2)$, $(10,5)$, $(6,9)$, $(5,4)$. Al ejecutar el programa *intercurvabezier* se obtiene la siguiente gráfica.

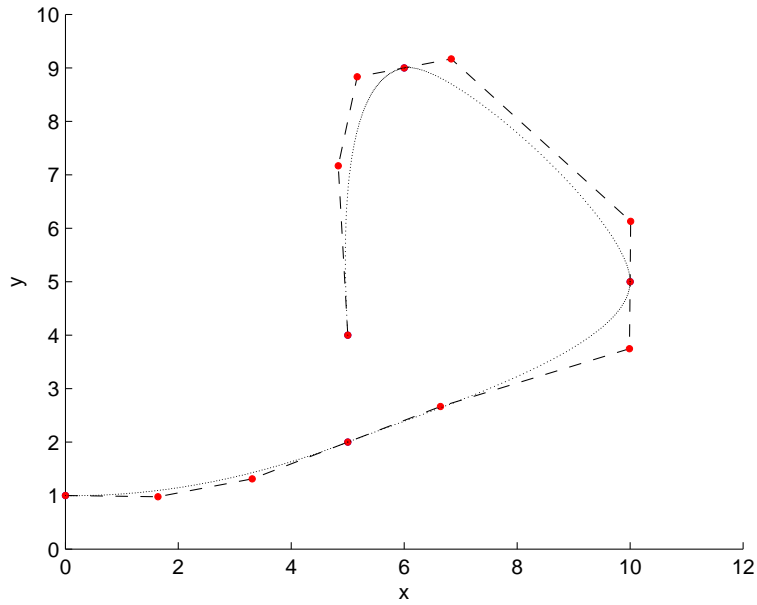


Figura A.7: Curva de Bézier compuesta de grado 3.

A.2. Curvas B-Splines

Ahora mostraremos ejemplos utilizando interpolación con curvas B-Spline. Para esto utilizaremos el programa *interBSpline*, este programa recibe como datos de entrada los puntos de interpolación y el grado de la curva. Lo que el programa calcula en primer lugar es el soporte de interpolación basado en la longitud de cuerda, después el soporte no periódico, por último los puntos de control y realiza la gráfica utilizando el algoritmo de De Boor.

Ejemplo A.5. Dados los puntos $(0,0)$, $(2,2)$, $(4,0)$, $(6,3)$, $(8,4)$ y $(10,2)$ los interpolamos con una curva B-Spline de grado 3. Al ejecutar el programa *interBSpline* se obtiene la gráfica que se muestra a continuación, en color azul podemos ver los puntos de interpolación y en rojo los de control.

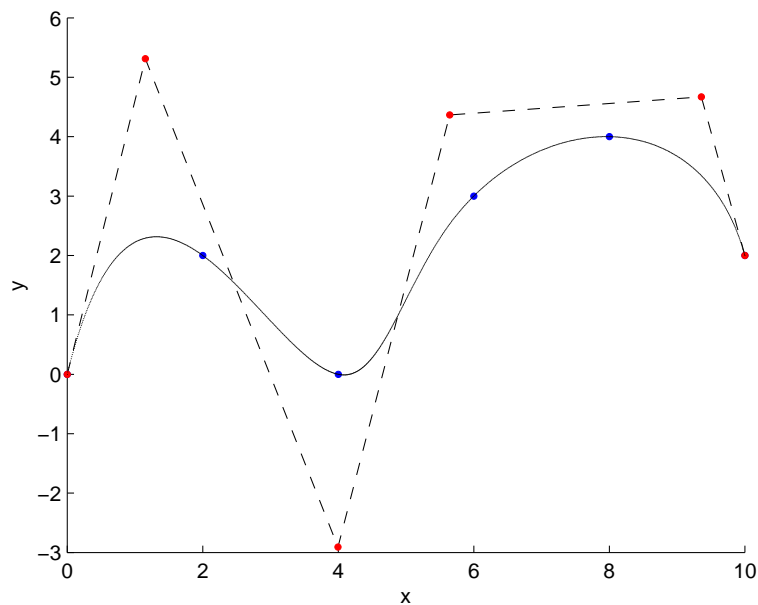


Figura A.8: Curva de Bézier de grado 3.

Ejemplo A.6. Lo que se pretende es reconstruir la siguiente imagen por medio de una curva B-Spline de segundo grado.



Para esto se tomaron medidas manualmente de 39 puntos de interpolación $(9,0)$, $(8.5,1.5)$, $(8,3)$, $(4,3.3)$, $(3, 4)$, $(3,6)$, $(2,7)$, $(2,8)$, $(2.3,8.2)$, $(1.5,9)$, $(2,10)$, $(0.2, 11)$, $(1.3,12.4)$, $(2,14)$, $(1.5,17)$, $(2.5,22)$, $(2.3,23)$, $(4,24)$, $(6,25)$, $(18,26.5)$, $(20.3,25.5)$, $(21,26.5)$, $(27,28.5)$, $(32,23)$, $(32,14)$, $(31,6)$, $(36,0)$, $(28,3)$, $(25.5,10)$, $(25,18)$, $(23,22)$, $(24.5, 18)$, $(23,11)$, $(18,5)$, $(18,3.5)$, $(20,0)$, $(16,0)$, $(12,0)$, $(9,0)$. Al ejecutar el programa *interBSpline* se obtiene la siguiente gráfica, en color azul se muestran los puntos de interpolación.

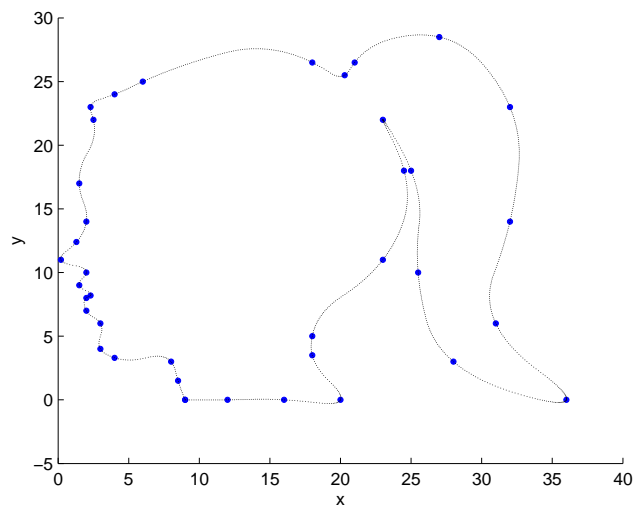


Figura A.9: Curva de B-Spline de grado 2.

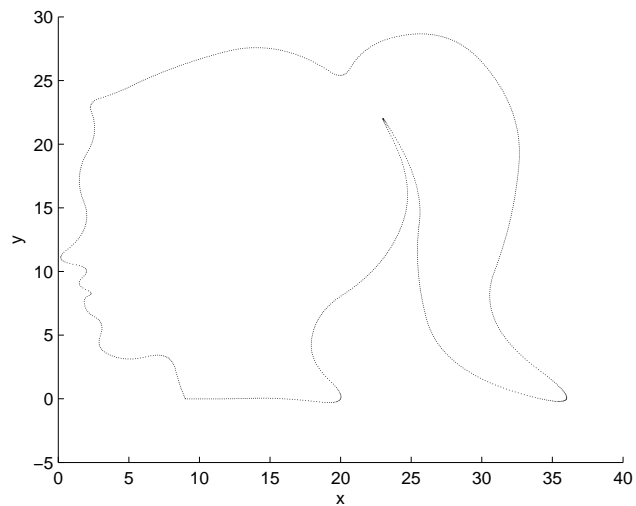


Figura A.10: Curva de B-Spline de grado 2.

Ejemplo A.7. Se pretende reconstruir el perfil de la siguiente fotografía por medio de una curva B-Spline se grado 2.



Se tomaron 26 puntos de interpolación $(9, 0.1)$, $(10, 0)$, $(12.9, 1)$, $(13.1, 2)$, $(13.4, 2.6)$, $(13.8, 3.1)$, $(13.8, 4)$, $(13.7, 4.2)$, $(14, 4.4)$, $(14.2, 4.6)$, $(14.2, 5)$, $(13.9, 6.1)$, $(14.45, 6.4)$, $(15, 6.9)$, $(15, 8)$, $(14.5, 8.7)$, $(13.8, 9.4)$, $(13.4, 10)$, $(13.3, 10.5)$, $(13.4, 11.5)$, $(13.45, 12.5)$, $(13.3, 14)$, $(12.6, 16)$, $(11, 18.8)$, $(7, 20.8)$, $(2, 20.5)$. Al ejecutar el programa se obtiene la siguiente gráfica, en color azul se muestran los puntos de interpolación.

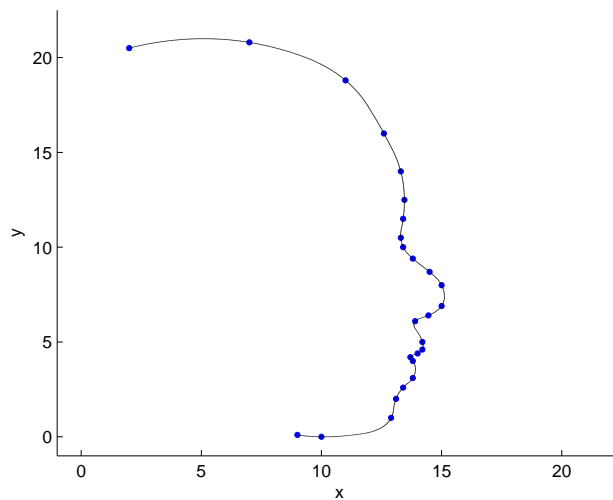


Figura A.11: Curva de B-Spline de grado 2.

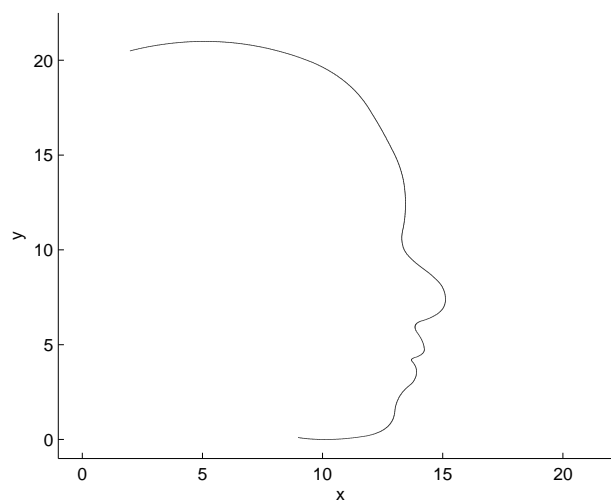


Figura A.12: Curva de B-Spline de grado 2.

A.3. Superficies B-Spline

El programa *supBSpline* recibe como datos de entrada el bigrado de la superficie, los soportes y una matriz P que contiene los puntos de control. La gráfica de la superficie la realiza aplicando dos veces al algoritmo de De Boor.

El programa *intersupBSpline* recibe como datos de entrada el bigrado de la superficie y una matriz Q con los puntos de interpolación. El programa calcula los soportes de interpolación basados en la longitud de cuerda, posteriormente calcula los soportes no periódicos y los puntos de control. Por último se utiliza el programa *supBSpline* para realizar la gráfica de la superficie.

Ejemplo A.8. A continuación se muestra la imagen de un objeto cuya superficie deseamos reconstruir por medio de una superficie B-Spline de bigrado (2,2).



La matriz Q de tamaño $n \times m$ con $n = 13$ y $m = 4$ contiene los puntos de interpolación, cabe mencionar que los datos se tomaron de forma manual.

$$Q = \begin{bmatrix} (0, 0, 0) & (4.1667, 0, 0) & (8.3333, 0, 0) & (12.5, 0, 0) \\ (0, 0, 5) & (4.1667, 0, 5) & (8.3333, 0, 5) & (12.5, 0, 5) \\ (0, 0, 8) & (4.1667, 0, 8) & (8.3333, 0, 8) & (12.5, 0, 8) \\ (0, 3.06, 11.7) & (4.1667, 3.06, 11.7) & (8.3333, 3.06, 11.7) & (12.5, 3.06, 11.7) \\ (0, 6.15, 12.8) & (4.1667, 6.15, 12.8) & (8.3333, 6.15, 12.8) & (12.5, 6.15, 12.8) \\ (0, 8.21, 12.3) & (4.1667, 8.21, 12.3) & (8.3333, 8.21, 12.3) & (12.5, 8.21, 12.3) \\ (0, 11.3, 9.5) & (4.1667, 11.3, 9.5) & (8.3333, 11.3, 9.5) & (12.5, 11.3, 9.5) \\ (0, 12.3, 8) & (4.1667, 12.3, 8) & (8.3333, 12.3, 8) & (12.5, 12.3, 8) \\ (0, 12.3, 5) & (4.1667, 12.3, 5) & (8.3333, 12.3, 5) & (12.5, 12.3, 5) \\ (0, 12.3, 0) & (4.1667, 12.3, 0) & (8.3333, 12.3, 0) & (12.5, 12.3, 0) \\ (0, 8.2, 0) & (4.1667, 8.2, 0) & (8.3333, 8.2, 0) & (12.5, 8.2, 0) \\ (0, 4.1, 0) & (4.1667, 4.1, 0) & (8.3333, 4.1, 0) & (12.5, 4.1, 0) \\ (0, 0, 0) & (4.1667, 0, 0) & (8.3333, 0, 0) & (12.5, 0, 0) \end{bmatrix}$$

Al ejecutar el programa *intersupBSpline* se obtiene la siguiente gráfica, en color azul se muestran los puntos de interpolación y en rojo los puntos de control.

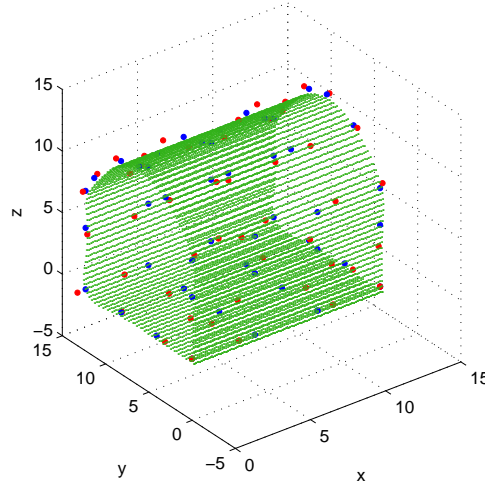


Figura A.13: Superficie B-Spline.

Ahora, disminuyendo los puntos de interpolación, $n = 13$ y $m = 3$.

$$Q = \begin{bmatrix} (0, 0, 0) & (6.25, 0, 0) & (12.5, 0, 0) \\ (0, 0, 5) & (6.25, 0, 5) & (12.5, 0, 5) \\ (0, 0, 8) & (6.25, 0, 8) & (12.5, 0, 8) \\ (0, 3.06, 11.7) & (6.25, 3.06, 11.7) & (12.5, 3.06, 11.7) \\ (0, 6.15, 12.8) & (6.25, 6.15, 12.8) & (12.5, 6.15, 12.8) \\ (0, 8.21, 12.3) & (6.25, 8.21, 12.3) & (12.5, 8.21, 12.3) \\ (0, 11.3, 9.5) & (6.25, 11.3, 9.5) & (12.5, 11.3, 9.5) \\ (0, 12.3, 8) & (6.25, 12.3, 8) & (12.5, 12.3, 8) \\ (0, 12.3, 5) & (6.25, 12.3, 5) & (12.5, 12.3, 5) \\ (0, 12.3, 0) & (6.25, 12.3, 0) & (12.5, 12.3, 0) \\ (0, 8.2, 0) & (6.25, 8.2, 0) & (12.5, 8.2, 0) \\ (0, 4.1, 0) & (6.25, 4.1, 0) & (12.5, 4.1, 0) \\ (0, 0, 0) & (6.25, 0, 0) & (12.5, 0, 0) \end{bmatrix}$$

Al ejecutar el programa *intersupBSpline* se obtiene la siguiente gráfica, en color azul se muestran los puntos de interpolación y en rojo los puntos de control.

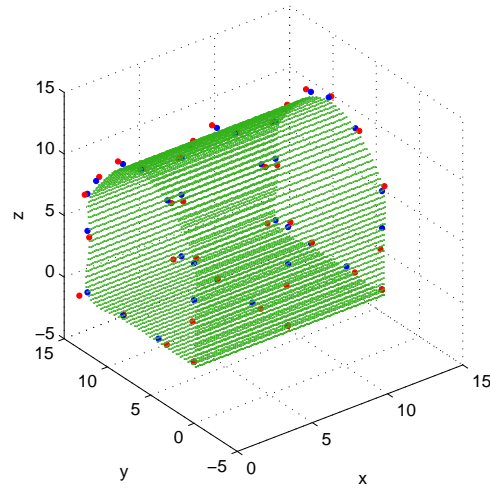


Figura A.14: Superficie B-Spline.

Podemos observar que a pesar de disminuir el número de puntos de interpolación seguimos recuperando la superficie original.

Ejemplo A.9. Ahora, daremos los puntos de control utilizados para la construcción de la superficie de un jarro de bigrado $(3, 3)$.

$$P = \begin{bmatrix} (1, -1, 0) & (-1, -1, 0) & (-1, 1, 0) & (1, 1, 0) & (1, -1, 0) \\ (2, -2, 1) & (-2, -2, 1) & (-2, 2, 1) & (2, 2, 1) & (2, -2, 1) \\ (2, -2, 2) & (-2, -2, 2) & (-2, 2, 2) & (2, 2, 2) & (2, -2, 2) \\ (1, -1, 3) & (-1, -1, 3) & (-1, 1, 3) & (1, 1, 3) & (1, -1, 3) \\ (0.5, -0.5, 4) & (-0.5, -0.5, 4) & (-0.5, 0.5, 4) & (0.5, 0.5, 4) & (0.5, -0.5, 4) \\ (1, -1, 5) & (-1, -1, 5) & (-1, 1, 5) & (1, 1, 5) & (1, -1, 5) \end{bmatrix}$$

Sean $S_u = \{0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1\}$ y $S_v = \{0, 0, 0, 0, 0.33, 0.66, 1, 1, 1, 1\}$, $n = 5$, $m = 6$. Al ejecutar el programa *supBSpline* se obtiene la siguiente gráfica, en color rojo se muestran los puntos de control.

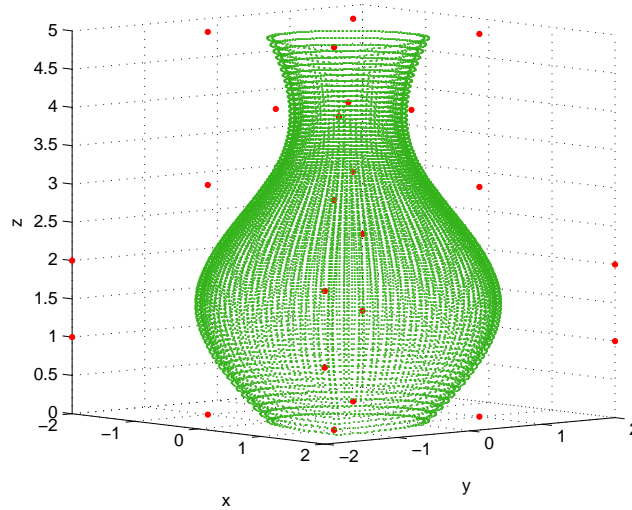


Figura A.15: Superficie B-Spline.

Cabe mencionar que al momento de realizar las pruebas de los ejemplos se utilizó una computadora con 2Gb de memoria RAM y el tiempo de ejecución en general no es mayor a 2.5 minutos, en el caso de superficies y menor a un minuto para curvas.

Apéndice B

Definiciones y resultados de álgebra lineal

Definición B.1. Una función $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es llamada *aplicación afín* si es de la forma

$$\Phi(P) = AP + B,$$

donde $A \in \mathbb{M}_{n \times m}$, $\det A \neq 0$ y B representa una traslación [10].

Definición B.2. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. La *matriz de Vandermonde* generada por los puntos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ se define mediante la siguiente fórmula

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Teorema B.1 (Fórmula para el determinante de Vandermonde). Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\det V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Observación: Si tenemos una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\det A = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)$$

y es distinto de cero si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, $\alpha_2 \neq \alpha_3$ y $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$.

Definición B.3. Una matriz A de $n \times n$ es *diagonalmente dominante* si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Teorema B.2. Toda matriz diagonalmente dominante es no singular

Demostración. Consideremos el sistema lineal $Ax = 0$, supongamos que dicho sistema tiene una solución $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ diferente de cero. Sea k tal que

$$|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad (\text{B.1})$$

se tiene que $|x_k| > 0$. Dado que $Ax = 0$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

si $i = k$

$$a_{kk}x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j,$$

de aquí que

$$|a_{kk}| \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{|a_{kj}| |x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|.$$

Lo cual contradice el hecho de que A es una matriz diagonalmente dominante, con esto la solución del sistema es la trivial, así, esta es una condición necesaria y suficiente para la no singularidad de A . \square

Definición B.4. Sea f una función definida sobre $[a, b]$, el *módulo de continuidad* de $f(x)$ sobre $[a, b]$ $\omega(\delta)$, para $\delta > 0$, es definido por

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| \leq \delta\}.$$

El módulo de continuidad depende de δ , la función f y el intervalo $[a, b]$, es decir, $\omega(\delta) = \omega(f; [a, b]; \delta)$.

B.1. Interpolación de Lagrange

Un método para construir una interpolación polinómica fue propuesto por Lagrange. Si queremos aproximar una función $f \in C[a, b]$ por un polinomio

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i, \quad a \leq x \leq b,$$

donde lo que debemos determinar son los coeficientes c_i , $0 \leq i \leq n$. Para que el polinomio p interpole a la función en un conjunto de puntos dados x_0, \dots, x_n debe ser tal que

$$p(x_i) = f(x_i), \quad (\text{B.2})$$

para $x_i \in [a, b]$, $0 \leq i \leq n$, el siguiente teorema nos muestra que las condiciones B.2 determinan la unicidad del polinomio $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Teorema B.3. Sean x_0, \dots, x_n un conjunto de $n + 1$ puntos distintos en $[a, b]$ y $f \in C[a, b]$. Entonces existe un único polinomio $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ que satisface

$$p(x_i) = f(x_i).$$

Demostración. Sea

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad a \leq x \leq b,$$

para $k = 0, \dots, n$, nótese que $l_k(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ y que

$$l_k(x_i) = \delta_{ki}, \quad i = 0, \dots, n,$$

donde

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i; \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

Luego

$$p = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x),$$

está en $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ya que satisface las condiciones (B.2). Ahora resta probar la unicidad, supongamos que $p, q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ satisfacen

$$p(x_i) = q(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

luego $p - q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ y $(p - q)(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$, entonces $p - q$ es un polinomio de grado n con $n + 1$ raíces, luego $p(x) - q(x) = 0$ y por tanto $p(x) = q(x)$. \square

En particular si $f(x) = x^i$, $x \in [a, b]$, $i = 0, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n x_k^i l_k(x) \\ &= x^i, \end{aligned}$$

así,

$$\sum_{k=0}^n x_k^i l_k(x) = x^i. \quad (\text{B.3})$$

Para $i = 0$, se tiene

$$\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1.$$

Otro caso interesante se obtiene al sustituir la función l_k en la ecuación (B.3)

$$\begin{aligned}x^i &= \sum_{k=0}^n x_k^i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \\ &= \sum_{k=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x_k^i (x - x_j)}{x_k - x_j}.\end{aligned}$$

Así, se tiene la identidad

$$\delta_{in} = \sum_{k=0}^n \frac{x_k^i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (\text{B.4})$$

Bibliografía

- [1] Bartels Richard H., Beatty Jhon C. and Barsky Brian A. *An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modeling*. Morgan Kaufmann Publisher, 1987.
- [2] Cordero Valle Juan Manuel, Cortés Parejo José. *Curvas y Superficies para Modelado Geométrico*. RA-MA, 2002.
- [3] Lorentz G. G. *Bernstein Polynomials*. Chelsea Publishing Company New York, N., 1986.
- [4] Farin Gerald. *Curves and Surfaces for CGDA: A Practical Guide*. Academic Press, 2002.
- [5] J. E. Marsden, L. Sirovich. *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1987.
- [6] Theodore J. Rivlin. *An introduction to the Approximation of functions*. Blaisdell Publishing Company, 1969.
- [7] Schumaker Larry L. *Spline Functions: Basic Theory*. Springer, 1980.
- [8] Martínez Cortés Ivonne Lilian. *Aproximación de funciones en 2D y 3D mediante splines cúbicos y bicúbicos y una aplicación*. Tesis de Licenciatura, 2003.
- [9] Powell M. J. D. *Approximation theory and methods*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1981.
- [10] Marco Paluszny, Hartmut Prautzsch and Wolfgang Boehm. *Métodos de Bézier y B-Splines*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [11] Cheney E. W. *Introduction to Approximation Theory*. AMS Chelsea Publishing, 1982.