



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

**"LA TRANSFORMADA DE RADON Y SU  
APLICACIÓN EN LA TOMOGRAFÍA AXIAL  
COMPUTARIZADA"**

**TESIS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

PRESENTA:

**JESÚS MANUEL GARCÍA RUIZ**

DIRECTORA DE TESIS:

**DRA. SILVIA REYES MORA**

CODIRECTOR DE TESIS:

**DR. GUILLERMO ARTURO LANCHO ROMERO**

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, ENERO 2015.

Tesis apoyada por la SEP mediante el programa "Beca de Titulación 2014" con número de folio: 832024



*"La formulación de un problema, es más importante que su solución".*  
*Albert Einstein.*



*Este trabajo de tesis está dedicado a mi familia,  
sin ellos nada de esto hubiera sido posible.*



# Agradecimientos

Gracias a mi padre Alfonso quien me enseñó el valor del esfuerzo y sacrificio por la familia. A mi madre Claudia quien desde niño me apoyó para que siguiera estudiando y que en estos momentos es el motor principal que me motiva a querer ser una mejor persona. A mis hermanos Ángel y Ricardo que en las buenas y en las malas siempre han estado apoyándome y dándome ánimos, sin mencionar los momentos de diversión que he pasado con ellos. A mi abuela Delfina quien nos ha apoyado incondicionalmente y que sin ella seríamos nada. A toda mi familia en general ya que mucho o poco siempre nos han apoyado en los momentos difíciles y han estado compartiendo nuestras alegrías y tristezas. A Saiveth quien ha sido una persona de vital importancia en mis últimos años de formación en esta universidad ya que siempre me ha motivado, aún cuando sentía perdidas mis esperanzas. A todos los amigos que hice a lo largo de estos 5 años y que me ayudaron tanto en mi formación profesional como en mi formación personal, gracias por todos los momentos de diversión que pasé junto a ustedes.

Un agradecimiento especial a la Dra. Silvia Reyes Mora, quien a pesar de la gran cantidad de trabajo que tenía, siempre tuvo tiempo de ayudarme a realizar este trabajo de tesis, gracias también por ser una amiga. Agradezco también a todos los profesores que se tomaron el tiempo para revisar este trabajo de tesis; al Dr. Guillermo Arturo Lancho Romero, al Dr. Franco Barragán Mendoza, al Dr. José Margarito Hernández Morales y particularmente al M.C. Adolfo Maceda Méndez por su apoyo brindado en el seminario de tesis. Agradezco también a todos los profesores que durante estos 5 años han sido parte fundamental en mi formación profesional.



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>III</b>
Resumen . . . . .	IV
Introducción . . . . .	V
<b>1. La transformada de Radon</b>	<b>1</b>
1.1. Diferentes formas de la definición de la transformada de Radon . . . . .	1
1.1.1. Dos dimensiones . . . . .	1
1.1.2. Dimensiones superiores . . . . .	5
1.2. Ejemplos importantes . . . . .	6
1.3. Propiedades básicas de la transformada de Radon . . . . .	10
1.3.1. Linealidad . . . . .	10
1.3.2. Homogeneidad . . . . .	10
1.3.3. Traslación . . . . .	11
1.4. Transformada de Radon de una transformación lineal . . . . .	11
1.5. Transformada de Radon de la derivada de una función . . . . .	12
1.6. Derivada de la transformada de Radon . . . . .	13
<b>2. Relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier</b>	<b>17</b>
2.1. Transformada inversa de Radon . . . . .	17
2.1.1. Dimensión impar . . . . .	17
2.1.2. Dimensión par . . . . .	20
2.2. Transformadas directa e inversa de Fourier . . . . .	22
2.3. Relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier . . . . .	23

<b>3. Métodos de inversión</b>	<b>27</b>
3.1. Método directo de Fourier . . . . .	28
3.1.1. Dos dimensiones . . . . .	28
3.1.2. Tres dimensiones . . . . .	30
3.2. Retroproyección . . . . .	32
3.3. Retroproyección filtrada . . . . .	35
<b>4. Tomografía Axial Computarizada</b>	<b>37</b>
4.1. Generaciones de sistemas tomográficos . . . . .	37
4.2. El problema inverso de la Tomografía Axial Computarizada . . . . .	40
4.3. Adquisición de datos a partir de integrales de línea . . . . .	41
4.4. Reconstrucción de imágenes . . . . .	43
4.5. Algoritmo de retroproyección filtrada . . . . .	44
4.6. Reconstrucción de geometría en abanico . . . . .	47
4.7. Otros tipos de reconstrucción . . . . .	50
4.8. Estudios actuales . . . . .	52
<b>5. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>A. Funciones generalizadas o distribuciones</b>	<b>55</b>
A.1. La distribución delta de Dirac . . . . .	56
A.2. Derivadas de distribuciones . . . . .	58
<b>B. Problemas inversos</b>	<b>61</b>
B.1. Problemas bien planteados y problemas mal planteados . . . . .	61
B.2. Mal planteamiento de la transformada de Radon . . . . .	63
<b>C. Señales y Sistemas</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

---

# Resumen

La tomografía axial computarizada es una técnica de imagen médica que utiliza rayos X para obtener cortes o secciones de objetos anatómicos con fines diagnósticos. Esta técnica tiene sus bases en la transformada de Radon la cual es una transformada integral y es de principal interés en esta tesis.

Esta tesis se divide en cuatro capítulos principales con el fin de que sea un documento de fácil entendimiento. En el primer capítulo se aborda la transformada de Radon, definiciones, propiedades y ejemplos. En el capítulo dos se estudia la transformada inversa de Radon en dos casos, cuando la dimensión del espacio es par o impar, y la relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier. El capítulo tres trata sobre algunos métodos de inversión los cuales tratan de encontrar a la función  $f$  sin necesidad de recurrir a la transformada inversa de Radon. Por último, en el cuarto capítulo se estudia la TAC desde el punto de vista matemático y se ve cómo se aplican los métodos de inversión discutidos en el capítulo tres.



# Introducción

La Tomografía Axial Computarizada (TAC), nace como un método o una herramienta en medicina mediante visualización por rayos X. El fundamento de la tomografía es la adquisición de una imagen por rayos X, de un corte transversal de un objeto, para distintos ángulos de rotación con respecto al mismo. Cada una de estas imágenes es una proyección del objeto y el problema consiste en obtener la estructura interna del objeto a partir de todas las posibles proyecciones ([8]). Esta técnica busca superar tres limitaciones en la radiología convencional. Primero, la imposibilidad de mostrar en una imagen radiológica bidimensional toda la información contenida en una escena tridimensional, debido a la superposición de los objetos en la imagen que se tenía; segundo, la limitada capacidad para distinguir tejidos blandos; y finalmente, la imposibilidad de cuantificar las densidades de los tejidos ([13]). Tras la pronta inclusión de la tomografía en la práctica clínica, no sólo se propusieron diferentes geometrías, sino que también se buscaron métodos que ofrecieran aproximaciones que permitieran reconstruir la imagen con el menor costo computacional posible. Esto llevó a que la retroproyección y la retroproyección filtrada [30], originalmente propuestos en astronomía, fueran rápidamente adoptadas.

Los métodos matemáticos en los cuales se basa la TAC fueron desarrollados por A.M. Cormack en 1962 ([5]), sin embargo desde 1917 Johann Radon planteó el problema de reconstruir una función  $f$  si se conocen sus integrales sobre rectas arbitrarias. Si la ecuación normal de una recta es  $p = x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi$ , la integral sobre la recta se puede escribir como

$$F(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \phi - s \operatorname{sen} \phi, p \operatorname{sen} \phi + s \cos \phi) ds,$$

donde la función  $F$  es una *proyección* en una dimensión de la función  $f$  a un ángulo  $\phi$ . Si se conoce esta  $F$  para todo ángulo  $\phi$ , entonces a la función  $F$  se llamará la transformada de Radon bidimensional de la función  $f$  ([33]). Así, el problema directo consiste en hallar  $F(p, \phi)$  a partir del conocimiento de  $f(x, y)$  mientras que el problema inverso es hallar  $f(x, y)$  a partir del conocimiento de todas las proyecciones  $F(p, \phi)$ .

El interés principal radica en hallar fórmulas de inversión de la transformada de Radon. Por ejemplo Minkowsky escribió el operador de inversión en término de funciones esféricas, Funk redujo el problema de la inversión en la transformada de Abel [9], mientras que Helgason aborda la transformada de Radon en geometría integral en espacios homogéneos [11]. Usaremos esta última referencia para consultar algunas propiedades básicas de la transformada de Radon.

Dentro de todo este contexto, se debe aclarar que no existe un documento que reúna la infor-

mación sobre la Transformada de Radon y su aplicación a la Tomografía Axial Computarizada (TAC), de manera clara y detallada. Los documentos hallados sobre el tema, hablan de la TAC con unos cuantos detalles de su justificación teórica, pero no hay documentos en español donde se exponga con detalle la teoría matemática relacionada con la transformada de Radon y su aplicación a la TAC. Por lo tanto, se profundiza en el tema con el fin de recolectar la mayor cantidad de información posible para formar un documento de fácil entendimiento por cualquier persona que se inicia en esta línea de investigación.

---

# Capítulo 1

## La transformada de Radon

En este capítulo se exponen los fundamentos matemáticos de la transformada de Radon, comenzando con la definición en dos y tres dimensiones para después dar una definición general. También se menciona y se prueban algunas propiedades de la transformada de Radon, las cuales sirven para establecer la relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier. Además, se concluye este capítulo analizando algunos ejemplos de la transformada de Radon de algunas funciones particulares.

### 1.1. Diferentes formas de la definición de la transformada de Radon

Se comienza dando la definición de *función de prueba*:

**Definición 1.1.1.** Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es *función de prueba* si:

- $f \in C^\infty(D)$ ,
- existe  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto con  $K \subset D$  tal que  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ .

*Nota 1.* Se denota al conjunto de funciones de prueba sobre  $U$  como  $\mathcal{D}(U)$ . En caso de tener  $U = \mathbb{R}^n$  se denota  $\mathcal{D}(U)$  simplemente como  $\mathcal{D}$ .

#### 1.1.1. Dos dimensiones

Imagine en el plano un conjunto convexo  $K$  que en su interior tiene un subconjunto abierto  $D$ . Si considera todas las posibles rectas  $L$  que intersecan a  $K$  resulta claro que no todas cortan a  $D$ , mientras que otras lo cortan una longitud  $m$ . La pregunta es la siguiente: Si se conoce el valor de  $m$  para toda recta  $L$  que corte a  $D$ , ¿se puede conocer la forma y posición de  $D$ ?

El matemático Austriaco Johann Radon probó que sí es posible resolver este problema, obteniendo la transformada que hoy lleva su nombre. Es decir, probó que se puede reconstruir el interior de  $D$  a partir del conocimiento de lo que sucede en cada recta  $L$  al atravesar  $D$ .

A continuación se da la definición de la transformada de Radon bidimensional para funciones de prueba.

**Definición 1.1.2.** Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  función de prueba. Sea  $L$  una recta que interseca a  $D$  como lo ilustra la Figura 1.1.1, la *transformada de Radon de la función  $f$*  se define como la integral de línea de  $f$  sobre  $L$ , para toda  $L$  que interseca a  $D$  y se denota mediante

$$\check{f} = \mathcal{R}(f) = \int_L f(x, y) ds, \quad (1.1)$$

donde  $ds$  es el incremento sobre  $L$ .

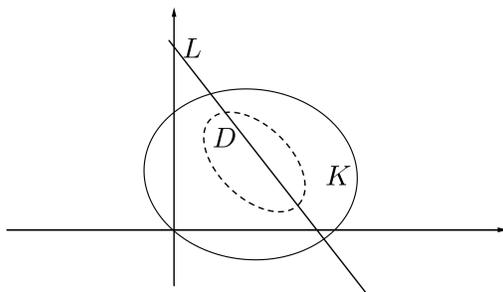


Figura 1.1.1: Representación del conjunto  $D$  y la recta  $L$

Otra forma de definir la transformada de Radon es a partir del análisis de la Figura 1.1.2.

**Definición 1.1.3.** Sean  $(x, y) \in L$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$  un ángulo fijo. Dada la ecuación normal de la recta  $L$

$$p = x \cos \phi + y \sin \phi = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \quad (1.2)$$

la integral (1.1) se puede expresar como:

$$\check{f}(p, \phi) = \int_L f(x, y) ds, \quad (1.3)$$

cuando dicha integral exista.

Si  $\check{f}(p, \phi)$  existe para todos los valores de  $p$  y  $\phi$ , entonces se dirá que  $\check{f}(p, \phi)$  es la transformada de Radon en dos dimensiones de  $f$ , mientras que para un ángulo  $\phi$  fijo se dirá que es una *proyección* de  $f$  al ángulo  $\phi$ .

Sea  $(x, y)$  un punto en la recta  $L$  y sean  $\alpha$  y  $\phi$  como lo ilustra la Figura 1.1.2. Veamos la forma de la ecuación (1.3) en términos de los nuevos ejes coordenados  $PS$ . Se tiene que en el

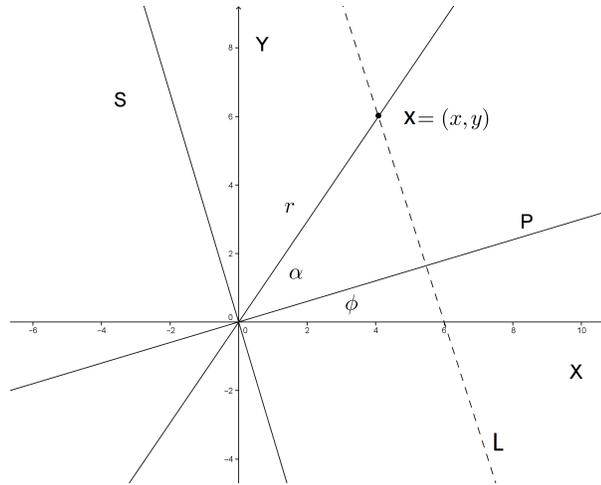


Figura 1.1.2: Representación geométrica de la relación entre las variables  $x, y$  y  $p, s$ .

antiguo sistema de ejes coordenados:

$x = r \cos(\phi + \alpha)$  y  $y = r \sin(\phi + \alpha)$  mientras que en el nuevo sistema de ejes coordenados  $p = r \cos \alpha$  y  $s = r \sin \alpha$ .

Usando el hecho de que  $\cos(\phi + \alpha) = \cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \alpha$  y  $\sin(\phi + \alpha) = \sin \phi \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha$ , se tiene:

$$x = p \cos \phi - s \sin \phi.$$

$$y = p \sin \phi + s \cos \phi.$$

Con todo lo anterior (1.3) toma la siguiente forma más general en términos de  $p$  y  $\phi$  como

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \phi - s \sin \phi, p \sin \phi + s \cos \phi) ds. \quad (1.4)$$

Otra forma de definir la transformada de Radon surge cuando se usa notación vectorial.

**Definición 1.1.4.** Dados  $\mathbf{x} = (x, y)$  y  $\boldsymbol{\xi}$  un vector unitario en el plano en dirección de  $p$ , entonces la transformada de Radon se puede expresar como:

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\boldsymbol{\xi} + t\boldsymbol{\xi}^{\perp}) dt, \quad (1.5)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}^{\perp}$  es un vector perpendicular a  $\boldsymbol{\xi}$  y  $t$  es un parámetro escalar tal que  $\mathbf{x} = p\boldsymbol{\xi} + t\boldsymbol{\xi}^{\perp}$  como lo ilustra la Figura 1.1.3.

Una última forma de definir la transformada de Radon es utilizando la distribución delta de Dirac ([26],[35]), pues usando (1.4) se tiene:

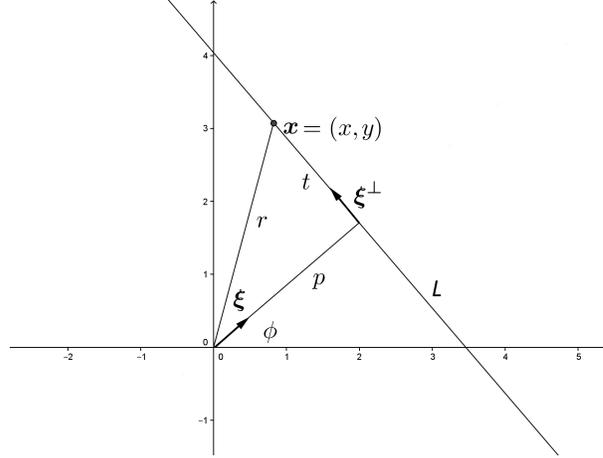


Figura 1.1.3: Representación geométrica de un punto  $\mathbf{x} = (x, y)$  en la recta  $L$  como una combinación lineal de  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\boldsymbol{\xi}^\perp$ .

$$\begin{aligned}
 \check{f}(p, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \phi - s \operatorname{sen} \phi, p \operatorname{sen} \phi + s \cos \phi) ds \\
 &= \frac{1}{|\operatorname{sen} \phi|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, p \operatorname{sen} \phi + s \cos \phi) dx \\
 &= \frac{1}{|\operatorname{sen} \phi|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \frac{p}{\operatorname{sen} \phi} - x \cot \phi) dx \\
 &= \frac{1}{|\operatorname{sen} \phi|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(y - \frac{p}{\operatorname{sen} \phi} + x \cot \phi) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \phi - y \operatorname{sen} \phi) dx dy
 \end{aligned}$$

Así, la transformada de Radon de la función  $f$  se puede expresar como

$$\check{f}(p, \phi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(p - x \cos \phi - y \operatorname{sen} \phi) dx dy, \quad (1.6)$$

cuando dicha integral exista.

Para cuestiones prácticas es conveniente denotar  $\int$  en lugar de  $\iint_{\mathbb{R}^2}$  y  $d\mathbf{x}$  en vez de  $dx dy$ , pues al definir esta nueva notación, la ecuación (1.6) se puede escribir como

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

donde  $\mathbf{x} = (x, y)$  y  $\boldsymbol{\xi} = (\cos \phi, \operatorname{sen} \phi)$ .

### 1.1.2. Dimensiones superiores

Al igual que en el caso bidimensional, la transformada de Radon de una función  $f$  definida en el espacio XYZ se puede definir mediante  $p$  y un vector unitario  $\boldsymbol{\xi}$  donde ahora:

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} = \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z.$$

La principal diferencia es que ahora la integración no se realiza sobre rectas sino sobre planos que intersecan a la superficie  $D$  y  $p$  ahora denota la distancia del plano al origen como lo ilustra la Figura 1.1.4.

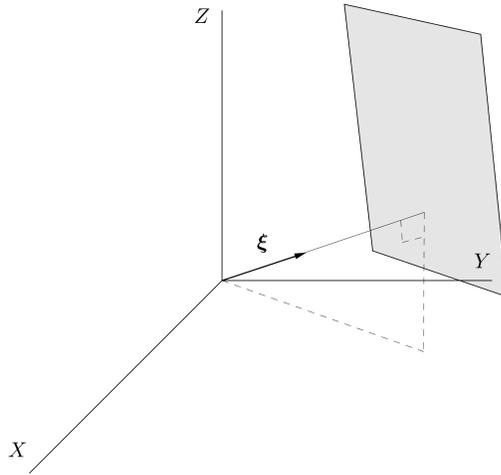


Figura 1.1.4: Geometría para la transformada de Radon en tres dimensiones.

Se tiene que la transformada de Radon de una función  $f \in \mathcal{D}$  definida en  $\mathbb{R}^3$  es

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) dx dy dz. \quad (1.8)$$

De manera general, si  $f$  es una función de prueba definida en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , y  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  es un vector unitario, se define la transformada de Radon de  $f$  como la integral sobre todos los hiperplanos en el hiper-espacio que intersecan a  $D$ , es decir

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) \delta(p - \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \dots - \xi_n x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (1.9)$$

donde una vez más, la distribución delta de Dirac es evaluada en el hiperplano cuya ecuación normal es  $p = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$ .

Note que si una vez mas se denota  $\int \dots \int$  como  $\int$ ,  $dx_1 dx_2 \dots dx_n$  por  $d\mathbf{x}$  y se usa la notación

vectorial para vectores en  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que (1.9) se simplifica como (1.7).

Así, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de prueba, entonces se puede dar la siguiente definición.

**Definición 1.1.5.** Dada una función de prueba  $f \in \mathcal{D}$  y  $\boldsymbol{\xi}$  un vector unitario en  $\mathbb{R}^n$ , se define la transformada de Radon de  $f$  como:

$$\mathcal{R}(f) = \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.10)$$

cuando dicha integral exista.

*Nota 2.* En lo que sigue del escrito se considerará esta como la definición formal de la transformada de Radon.

## 1.2. Ejemplos importantes

Los ejemplos que siguen son importantes ya que muestran la complejidad de la transformada de Radon y también se utilizan para clarificar algunos resultados a lo largo de la tesis. El primer y segundo ejemplo representan el cálculo de la transformada de Radon para una distribución gaussiana en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  respectivamente, el tercero tiene como dominio un subconjunto abierto mientras que el cuarto y el quinto ejemplo solamente poseen como dominio un subconjunto compacto.

*Ejemplo 1.* Considere la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ , se sigue que:

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} \delta(p - \xi_1 x - \xi_2 y) dx dy. \quad (1.11)$$

Realizando el cambio de variable

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

tenemos que (1.11) toma la forma

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} \delta(p - \xi_1 x - \xi_2 y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 - v^2} \delta(p - u) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \delta(u - p) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} e^{-p^2} dv \\ &= e^{-p^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \\ &= \sqrt{\pi} e^{-p^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Observe que el resultado anterior indica que  $\check{f}$  es radial, es decir, sólo depende del valor de  $p$ .

*Ejemplo 2.* Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$ , entonces

$$\check{f}(p, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} \delta(p - \xi_1 x - \xi_2 y - \xi_3 z) dx dy dz. \quad (1.13)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \frac{-\xi_1 \xi_2}{q} & q & \frac{-\xi_2 \xi_3}{q} \\ \frac{-\xi_3}{q} & 0 & \frac{\xi_1}{q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde  $q = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ , entonces

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} \delta(p - \xi_1 x - \xi_2 y - \xi_3 z) dx dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2-w^2} \delta(p - u) du dv dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \delta(u - p) du dv dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-w^2} e^{-p^2} dv dw \\ &= e^{-p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-w^2} dv dw \\ &= \pi e^{-p^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

De manera general se puede ver que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es dada por  $f(x_1, \dots, x_n) = e^{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2}$ , entonces:

$$\mathcal{R}(e^{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2}) = (\sqrt{\pi})^{n-1} e^{-p^2}. \quad (1.15)$$

*Ejemplo 3.* Dada  $\lambda > 1$  se define  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 - x^2 - y^2)^{\lambda-1}, & \text{si } x^2 + y^2 < 1; \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases} \quad (1.16)$$

Entonces usando (1.4) y observando que  $x^2 + y^2 = p^2 + s^2$  se tiene que (1.16) queda como

$$f(p, s) = \begin{cases} (1 - p^2 - s^2)^{\lambda-1}, & \text{si } p^2 + s^2 < 1; \\ 0, & \text{si } p^2 + s^2 \geq 1. \end{cases}$$

De donde

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\sqrt{1-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} (1-p^2-s^2)^{\lambda-1} ds.$$

Sabiendo que  $\int_{-a}^a (a^2-t^2) dt = a^{2\lambda-1} B(\frac{1}{2}, \lambda) = \frac{a^{2\lambda-1} \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}$ , siendo  $B(x, y)$  la función Beta y  $\Gamma(x)$  la función Gamma, se tiene

$$\check{f}(p, \phi) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} (1-p^2)^{\lambda-1/2}, \quad -1 \leq p \leq 1.$$

Note que si  $\lambda < 1$ , entonces  $\text{supp}(f) = \mathbb{R}^2$ , el cual no es compacto, con lo cual, la integral no existe y por tanto, no existe su transformada de Radon.

*Ejemplo 4.* Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (1.17)$$

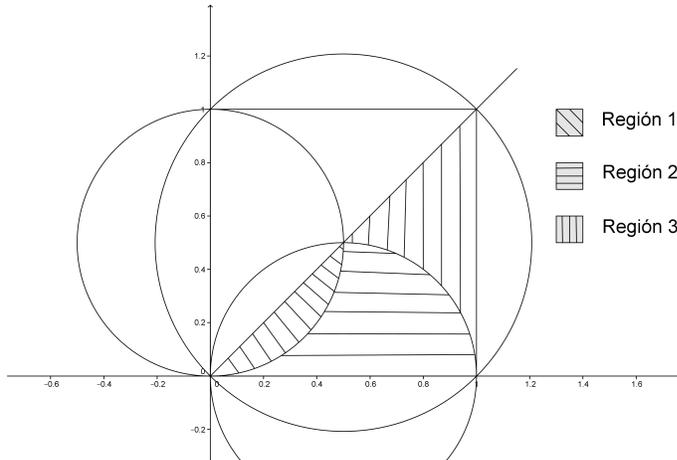


Figura 1.2.1: Representación del dominio de  $\check{f}(p, \phi)$ :  $\phi \in [0, \pi/4]$ .

Entonces para  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ :

$$\check{f}(p, \phi) = \begin{cases} \frac{p}{\text{sen} \phi \cos \phi}, & \text{si } 0 < p < \text{sen} \phi; & \text{Región 1} \\ \frac{1}{\cos \phi}, & \text{si } \text{sen} \phi \leq p \leq \cos \phi; & \text{Región 2} \\ \frac{\text{sen} \phi + \cos \phi - p}{\text{sen} \phi \cos \phi}, & \text{si } \cos \phi < p \leq \text{sen} \phi \cos \phi; & \text{Región 3} \end{cases}$$

y por la simetría de la región, para  $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  se tiene:

$$\check{f}(p, \phi) = \begin{cases} \frac{p}{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}, & \text{si } 0 < p < \cos \phi; & \text{Región 1} \\ \frac{1}{\operatorname{sen} \phi}, & \text{si } \cos \phi \leq p \leq \operatorname{sen} \phi; & \text{Región 2} \\ \frac{\operatorname{sen} \phi + \cos \phi - p}{\operatorname{sen} \phi \cos \phi}, & \text{si } \operatorname{sen} \phi < p \leq \operatorname{sen} \phi \cos \phi; & \text{Región 3} \end{cases}$$

Como último ejemplo considere la función característica sobre el disco unitario.

*Ejemplo 5.* Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada como:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

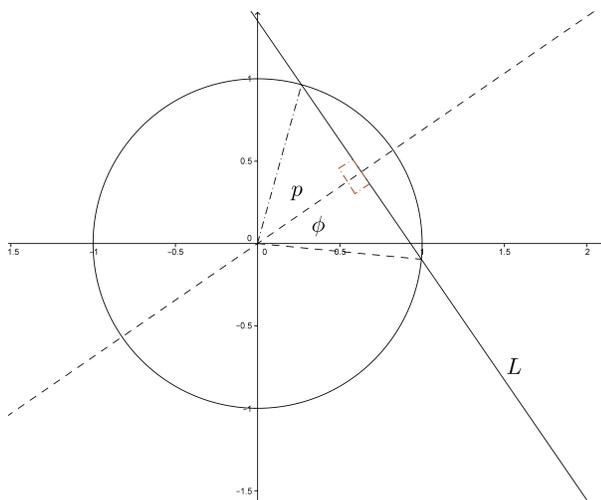


Figura 1.2.2: Representación geométrica de la transformada de Radon de la función característica sobre el círculo unitario.

Entonces:

$$\check{f}(p, \phi) = \begin{cases} 2(1 - p^2)^{1/2}, & \text{si } |p| \leq 1; \\ 0, & \text{si } |p| > 1. \end{cases}$$

Note que en este ejemplo, la transformada de Radon de la función  $f$  no es más que la longitud del segmento de recta que interseca al círculo unitario como lo ilustra la Figura 1.2.2.

### 1.3. Propiedades básicas de la transformada de Radon

Ya que se conoce un poco sobre la transformada de Radon, lo siguiente es ver las propiedades que cumple pues serán de vital importancia en capítulos posteriores. Además de ser un gran apoyo al calcular transformadas de Radon de funciones sin necesidad de recurrir siempre a la definición de ésta.

#### 1.3.1. Linealidad

**Proposición 1.** Sean  $f, g \in \mathcal{D}$  y  $\alpha, \beta$  escalares. Luego, se tiene que:

$$\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R}(f) + \beta \mathcal{R}(g).$$

*Demostración.* En efecto, por definición de la transformada de Radon se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) &= \int (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int (\alpha f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \alpha \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \beta \int g(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \alpha \mathcal{R}(f) + \beta \mathcal{R}(g). \end{aligned}$$

□

#### 1.3.2. Homogeneidad

**Proposición 2.** Dada  $f \in \mathcal{D}$  y  $s > 0$ , se obtiene:

$$\check{f}(sp, s\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|s|} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}).$$

En especial si  $\boldsymbol{\zeta}$  es un vector cualquiera distinto del vector cero, se cumple

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\zeta}\|} \check{f}\left(\frac{p}{\|\boldsymbol{\zeta}\|}, \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\|\boldsymbol{\zeta}\|}\right).$$

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{D}$  y  $\alpha > 0$  un escalar. Por definición de la transformada de Radon se tiene

$$\begin{aligned} \check{f}(sp, s\boldsymbol{\xi}) &= \int f(\mathbf{x}) \delta(sp - s\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int f(\mathbf{x}) \delta(s(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ahora usando la proposición 7 del Apéndice A se concluye que:

$$\check{f}(sp, s\xi) = \frac{1}{|s|} \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

□

### 1.3.3. Traslación

**Proposición 3.** Sean  $f \in \mathcal{D}$  y  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathcal{R}(f(\mathbf{x} \pm \mathbf{a})) = \check{f}(p \pm \xi \cdot \mathbf{a}, \xi). \quad (1.18)$$

*Demostración.* Solamente se probará que  $\mathcal{R}(f(\mathbf{x} + \mathbf{a})) = \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{a}, \xi)$ . El otro caso se prueba de manera similar.

En base a la Definición 1.1.5 de la transformada de Radon se tiene que:

$$\mathcal{R}(f(\mathbf{x} + \mathbf{a})) = \int f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Realizando el cambio de variable  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$  se observa que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f(\mathbf{y})) &= \int f(\mathbf{y}) \delta(p - \xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a})) d\mathbf{y} \\ &= \int f(\mathbf{y}) \delta(p + \xi \cdot \mathbf{a} - \xi \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{a}, \xi), \end{aligned}$$

de donde se obtiene la igualdad deseada. □

## 1.4. Transformada de Radon de una transformación lineal

**Proposición 4.** Dada una función  $f \in \mathcal{D}$  y  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal representada por la matriz  $A$  tal que  $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}$  entonces

$$\mathcal{R}f(\mathbf{Ax}) = \mathcal{R}(f(B^{-1}\mathbf{y})) = |\det B| \check{f}(p, B^t \xi), \quad (1.19)$$

donde  $B = A^{-1}$ .

*Demostración.* En efecto, por definición de la transformada de Radon se tiene:

$$\mathcal{R}(f(\mathbf{Ax})) = \int f(\mathbf{Ax}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

Recordando que  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}^t \boldsymbol{\xi}$  se puede ver que  $\boldsymbol{\xi} \cdot A\mathbf{x} = A^t \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$ . Ahora haciendo uso del teorema de cambio de variable se concluye que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f(A\mathbf{x})) &= \int f(A\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int f(\mathbf{y}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot B\mathbf{y}) |\det B| d\mathbf{y} \\ &= |\det B| \int f(\mathbf{y}) \delta(p - B^t \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

donde el jacobiano de la transformación es la magnitud del determinante de  $B$ .

Así,  $\mathcal{R}(f(A\mathbf{x})) = |\det B| \check{f}(p, B^t \boldsymbol{\xi})$ .

□

*Nota 3.* Dado que  $B^t \boldsymbol{\xi}$  generalmente no es un vector unitario, se puede aplicar la propiedad de homogeneidad de la transformada de Radon para transformarlo en un vector unitario.

**Corolario 1.** Dada  $f \in \mathcal{D}$  y  $A$  una matriz ortogonal, observa que:

$$\mathcal{R} f(A\mathbf{x}) = \check{f}(p, A\boldsymbol{\xi}). \quad (1.20)$$

La demostración de este corolario es inmediata.

**Corolario 2.** Dada  $f \in \mathcal{D}$  y  $A = \lambda I$ , se tiene que:

$$\mathcal{R} f(\lambda \mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda^n} \check{f}\left(p, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \check{f}(\lambda p, \boldsymbol{\xi}). \quad (1.21)$$

La prueba de este corolario es sencilla a partir de la demostración de la Proposición 4.

*Ejemplo 6.* Recordando que  $\mathcal{R}(e^{-x^2-y^2}) = \sqrt{\pi} e^{-p^2}$ , es fácil calcular  $\mathcal{R}(e^{-(x/a)^2-(y/b)^2})$ .

Si  $f(\mathbf{x}) = f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  y

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}.$$

Entonces note que  $f(B^{-1}\mathbf{x}) = e^{-(x/a)^2-(y/b)^2}$ , de donde al usar la proposición anterior se tiene que  $\mathcal{R}(e^{-(x/a)^2-(y/b)^2}) = |\det B| \check{f}(p, B^t \boldsymbol{\xi})$ . Aquí  $\boldsymbol{\zeta} = B^t \boldsymbol{\xi} = (a\xi_1, b\xi_2)^t$  no es un vector unitario por lo que usando la propiedad de homogeneidad se concluye que:

$$\mathcal{R}(e^{-(x/a)^2-(y/b)^2}) = \frac{ab\sqrt{\pi}}{\|\boldsymbol{\zeta}\|} e^{-(p/\|\boldsymbol{\zeta}\|)^2}.$$

## 1.5. Transformada de Radon de la derivada de una función

**Proposición 5.** Dada  $f \in \mathcal{D}$  y  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ , se cumple:

1.  $\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p}$ .
2.  $\mathcal{R}\left(\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p}$ .
3.  $\mathcal{R}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\right) = \xi_l \xi_k \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2}$ .
4.  $\mathcal{R}\left(\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_l b_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}\right) = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2}$ .

*Demostración.* Sólo se probará el primer inciso ya que los demás se prueban de manera similar. Para ello note que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\varepsilon}{\xi_k}\right) - f(\mathbf{x})}{\frac{\varepsilon}{\xi_k}}. \quad (1.22)$$

Aplicando la transformada de Radon a (1.22) y usando (1.18) con  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_k \cdot \frac{\varepsilon}{\xi_k}$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) &= \int \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\varepsilon}{\xi_k}\right) - f(\mathbf{x})}{\frac{\varepsilon}{\xi_k}} \right) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \xi_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\check{f}(p + \varepsilon, \boldsymbol{\xi}) - \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \\ &= \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p}. \end{aligned}$$

□

*Ejemplo 7.* Considere el punto 4 de la Proposición 5 pero ahora suponga que

$$a_l b_k = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{si } l = k \\ 0, & \text{si } l \neq k. \end{cases}$$

En este caso, la transformada de Radon de dicho argumento se reduce a la transformada de Radon del Laplaciano ( $\Delta_{\mathbf{x}}$ ) de la función  $f$ .

Así,

$$\mathcal{R}(\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})) = |\boldsymbol{\xi}|^2 \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2},$$

para  $|\boldsymbol{\xi}| = 1$ .

## 1.6. Derivada de la transformada de Radon

Anteriormente se vio la relación que existe entre la transformada de Radon de alguna derivada parcial de una función  $f$  y la derivada parcial con respecto a  $p$  de la transformada de Radon de

la función  $f$ . Es decir,  $\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p}$ .

La pregunta ahora es:

¿Quién es  $\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\}$ , en caso de existir?

Para responder esta pregunta se usa la definición de la transformada de Radon y la regla de Leibniz para derivar una integral obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Ahora haciendo uso de (Apéndice A, Proposición 8) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\} = -\frac{\partial}{\partial p} \int x_k f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

o equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\} = -\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{R}\{x_k f(\mathbf{x})\}.$$

De lo anterior se da la proposición siguiente .

**Proposición 6.** Dada  $f \in \mathcal{D}$ , se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\} = -\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{R}\{x_k f(\mathbf{x})\}, \quad (1.23)$$

cuando dichas derivadas existan.

*Ejemplo 8.* Sea  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ . Luego:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(e^{-x^2 - y^2}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} \delta(p - \xi_1 x - \xi_2 y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2 + v^2) / \|\boldsymbol{\xi}\|^2} \delta(p - u) \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} du dv \\ &= \sqrt{\pi} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-p^2 / (\xi_1^2 + \xi_2^2)}. \end{aligned}$$

Ahora:

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial \xi_1}(p, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\pi} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-3/2} \xi_1 e^{-\left(\frac{p^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right)} (2p^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1} - 1).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{R}\{x f(\mathbf{x})\} &= -\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\sqrt{\pi} \xi_1 p}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} e^{-\left(\frac{p^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right)} \right) \\ &= -\left[ \sqrt{\pi} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-3/2} \xi_1 e^{-\left(\frac{p^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right)} (1 - 2p^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}) \right] \\ &= \sqrt{\pi} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-3/2} \xi_1 e^{-\left(\frac{p^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right)} (2p^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1} - 1). \end{aligned}$$

Para el caso particular en el que  $\xi = (\cos \phi, \sin \phi)$  se tiene

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial \xi_1} = \sqrt{\pi} \cos \phi e^{-p^2} (2p^2 - 1) = -\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{R}\{xf(\mathbf{x})\}.$$

Note que en los ejemplos antes descritos se consideró todo el espacio en cuestión como el dominio de las funciones ahí definidas; esto en las aplicaciones no es del todo cierto ya que en la gran mayoría de éstas se consideran dominios acotados. Por ejemplo, considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

En base al Ejemplo 7, se debe cumplir que

$$\mathcal{R}(\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})) = |\xi|^2 \frac{\partial^2 \check{f}(p, \xi)}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \check{f}(p, \xi)}{\partial p^2}.$$

Por un lado se tiene que  $\mathcal{R}\{\Delta_{\mathbf{x}} f(x, y)\} = \mathcal{R}\{4\} = 8\sqrt{1-p^2}$ , de acuerdo al Ejemplo 5.

Por otra parte, dado que  $\check{f}(p, \phi) = \frac{2}{3}\sqrt{1-p^2}(1+2p^2)$ , se sigue que:

$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \check{f}(p, \phi) = \frac{2-12p^2+8p^4}{(1-p^2)^{3/2}}$ , contradiciendo la supuesta igualdad. Este problema sencillo prueba que el Teorema 5 no se cumple en general para dominios acotados.



## Capítulo 2

# Relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier

### 2.1. Transformada inversa de Radon

En esta sección se estudia la transformada inversa de Radon. Se analiza la fórmula de inversión de la transformada de Radon en dos casos, cuando la dimensión de  $\mathbb{R}^n$  es par y cuando es impar. Una fórmula general de la transformada inversa de Radon puede hallarse en [11].

La notación usada en esta sección es la misma que se ha venido manejando. En particular,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$  mientras que  $\boldsymbol{\xi}$  seguirá siendo un vector unitario en  $\mathbb{R}^n$ ,  $p$  un escalar y  $\Delta_{\mathbf{x}}$  el operador Laplaciano.

#### 2.1.1. Dimensión impar

Primero, note que para un vector arbitrario  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , se cumple

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{y}) |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} &= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}) |p| \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})) dp d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) |p| \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} dp \quad (\text{haciendo } \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |p| \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp, \end{aligned}$$

donde en el último paso se usa la propiedad de traslación de la transformada de Radon introducida en el Capítulo 1.

Integrando sobre la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$  (denotada por  $S^{n-1}$ ) se tiene

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int f(\mathbf{y}) |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} = \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} |p| \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.1)$$

con  $d\xi$  el elemento de superficie en la esfera unitaria. Por otro lado, se tiene que la integral del lado izquierdo de (2.1) puede reescribirse usando la siguiente identidad dada en [12]:

$$4(2\pi)^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}}^{(n+1)/2} \int_{|\xi|=1} \int f(\mathbf{y})|\xi \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|d\mathbf{y} d\xi,$$

la cual es válida para  $n$  impar,  $n \geq 3$ . Note que el operador Laplaciano de la igualdad anterior se puede descomponer como  $\Delta_{\mathbf{x}}^{(n+1)/2} = \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-1)/2} \Delta_{\mathbf{x}}$ , de donde se obtiene:

$$4(2\pi)^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-1)/2} \Delta_{\mathbf{x}} \int_{|\xi|=1} \int_{-\infty}^{\infty} |p|\check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) dp d\xi. \quad (2.2)$$

Haciendo el cambio de variables  $t = p + \xi \cdot \mathbf{x}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |p|\check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) dp &= \int_{-\infty}^{\infty} |t - \xi \cdot \mathbf{x}|\check{f}(t, \xi) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\xi \cdot \mathbf{x}} |t - \xi \cdot \mathbf{x}|\check{f}(t, \xi) dt + \int_{\xi \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \xi \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \xi) dt \\ &= \int_{\xi \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \xi \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \xi) dt - \int_{-\infty}^{\xi \cdot \mathbf{x}} (t - \xi \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \xi) dt. \end{aligned}$$

Usando la regla de Leibniz para diferenciar una integral y recordando la regla de la cadena se prueba que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} |p|\check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) dp &= \Delta_{\mathbf{x}} \int_{\xi \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \xi \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \xi) dt \\ &\quad - \Delta_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\xi \cdot \mathbf{x}} (t - \xi \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \xi) dt \\ &= -2\xi \cdot \xi \check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi). \end{aligned}$$

Dado que  $\xi \cdot \xi = 1$  se tiene

$$\Delta_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} |p|\check{f}(p + \xi \cdot \mathbf{x}, \xi) dp = -2\check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi).$$

Combinando esta última expresión con (2.2) se obtiene la fórmula de inversión de la transformada de Radon para  $n$  impar mayor o igual que 3, lo cual se enuncia en el teorema siguiente.

**Teorema 1.** Suponga que  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  con  $n$  impar,  $n \geq 3$ . Dada  $\check{f}(p, \xi)$  se puede recuperar a la función  $f$  mediante

$$f(\mathbf{x}) = C_n \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-1)/2} \int_{|\xi|=1} \check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi) d\xi \quad (2.3)$$

$$= C_n \int_{|\xi|=1} \left( \frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \check{f}(\xi \cdot \mathbf{x}, \xi) d\xi. \quad (2.4)$$

donde

$$C_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}.$$

*Demostración.* La primera igualdad se deduce de la construcción que se ha realizado para hallar a la función  $f$ .

Para probar la segunda igualdad en el teorema, considere el caso particular cuando  $n = 3$  y  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ .

Usando la primera igualdad de este teorema y la regla de Leibniz para derivar una integral se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_x \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} &= \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por otro lado usando la regla de la cadena es fácil ver que

$$\frac{\partial}{\partial x} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{p=\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}},$$

y de manera similar se puede probar que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{p=\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}.$$

De donde se tiene que (2.5) queda como

$$\Delta_x \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} |\boldsymbol{\xi}|^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{p=\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}.$$

La forma de proceder para el caso general es el mismo que se usó para este caso particular.  $\square$

El siguiente ejemplo es importante en las aplicaciones ya que muestra la fórmula de inversión para un objeto tridimensional dada su transformada de Radon.

*Ejemplo 9.* Sea  $f = f(x, y, z)$ . Luego  $C_n = C_3 = -1/8\pi^2$  y la fórmula de inversión es:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{8\pi^2} \Delta_x \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}_{pp}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

o más explícitamente,

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}(\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Claramente  $\boldsymbol{\xi}$  y  $d\boldsymbol{\xi}$  pueden escribirse en términos de coordenadas esféricas usuales en  $\mathbb{R}^3$ , es decir,

$$\boldsymbol{\xi} = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \text{ y } d\boldsymbol{\xi} = \sin \phi \, d\phi \, d\theta,$$

donde  $0 \leq \phi < \pi$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

### 2.1.2. Dimensión par

Al igual que en el caso anterior, note que para un vector arbitrario  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se cumple:

$$\int f(\mathbf{y}) \log |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}) \log |p| \delta(p - (\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}))) dp d\mathbf{y}.$$

Nuevamente usando el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración y usando la propiedad de traslación de la transformada de Radon se tiene

$$\int f(\mathbf{y}) \log |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \log |p| \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp.$$

Integrando sobre  $S^{n-1}$  y usando la siguiente identidad para  $n$  par,  $n \geq 2$ ,

$$(2\pi)^n (-1)^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}}^{n/2} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int f(\mathbf{y}) \log |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi},$$

se sigue que

$$(2\pi)^n (-1)^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-2)/2} \Delta_{\mathbf{x}} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \log |p| \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp d\boldsymbol{\xi}. \quad (2.6)$$

Note que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{x}} \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \check{f}(t, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial}{\partial t} \check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial x_j} t \\ &= \xi_j \frac{\partial}{\partial t} \check{f}(t, \boldsymbol{\xi}), \end{aligned}$$

de donde:

$$\Delta_{\mathbf{x}} \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|^2 \check{f}_{tt}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Así,

$$\Delta_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \log|p| \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp = \int_{-\infty}^{\infty} \log|p| \check{f}_{tt}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp.$$

Ahora aplicando integración por partes se llega a que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \log|p| \check{f}_{tt}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp &= \int_{-\infty}^{\infty} \log|t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}| \check{f}_{tt}(t, \boldsymbol{\xi}) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}_p(p, \boldsymbol{\xi})}{p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} dp. \end{aligned}$$

Todo lo anterior se resume en el teorema siguiente.

**Teorema 2.** Suponga que  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  con  $n$  par y  $n \geq 2$ . Dada  $\check{f}(p, \boldsymbol{\xi})$  se puede recuperar a la función  $f$  mediante

$$f(\mathbf{x}) = \frac{C_n}{i\pi} \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-2)/2} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}_p(p, \boldsymbol{\xi})}{p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} dp d\boldsymbol{\xi} \quad (2.7)$$

$$= \frac{C_n}{i\pi} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} dp d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.8)$$

donde  $C_n$  es la misma dada en el Teorema 1.

El siguiente ejemplo muestra cómo recuperar una función  $f(x, y)$  a partir de su transformada de Radon.

*Ejemplo 10.* Suponga que  $n = 2$ . Luego:

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}_p(p, \boldsymbol{\xi})}{p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} dp d\phi, \quad (2.9)$$

donde  $\boldsymbol{\xi} = (\cos \phi, \sin \phi)$  y  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} = x \cos \phi + y \sin \phi$ .

Realizando algunos cambios de variable se tiene que la ecuación (2.9) puede escribirse como

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}_p(p, \boldsymbol{\xi})}{p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} dp d\phi,$$

o de manera alternativa como:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}_p(p, \boldsymbol{\xi})}{p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} dp d\phi.$$

Haciendo  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ , se tiene que  $f$  en coordenadas polares se escribe como

$$f(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}_p(p, \boldsymbol{\xi})}{p - r \cos(\phi - \theta)} dp d\phi.$$

Las fórmulas dadas en este ejemplo constituyen una solución al *problema de reconstrucción a partir de las proyecciones*  $\tilde{f}(p, \xi)$ .

Ahora se analiza la relación entre la transformadas de Radon y la transformada de Fourier. Para ello se comienza definiendo las transformadas directa e inversa de Fourier de una función  $f$  usando las definiciones dadas en [3]. Posteriormente se da la relación entre las transformadas de Radon y de Fourier para darse cuenta que recuperar la función  $f$  a partir de su transformada de Radon es más sencilla usando la transformada de Fourier que la transformada inversa de Radon.

## 2.2. Transformadas directa e inversa de Fourier

**Definición 2.2.1.** Sea  $f$  localmente integrable en  $\mathbb{R}^n$  (ver definición A.0.1). Si los puntos en  $\mathbb{R}^n$  son denotados por  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  y los puntos en el espacio de Fourier  $n$ -dimensional por  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ , entonces se define y se denota la *transformada de Fourier  $n$ -dimensional de  $f$*  mediante

$$\mathcal{F}_n(f) = \tilde{f}(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (2.10)$$

y la *transformada inversa de Fourier* de la función  $\tilde{f}$  como

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_n^{-1} \tilde{f} = \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (2.11)$$

*Observación 1.* Note que  $\tilde{f}(\mathbf{k})$  es una función de valores complejos de  $\mathbf{k}$ . Mas aún, si  $n = 1$ ,  $k = 0$  entonces

$$\mathcal{F}_1(f) = \tilde{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

es decir, se tiene la integral usual de la función  $f$ .

*Ejemplo 11.* Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-ax} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

con  $a > 0$ .

Se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(f) &= \int_0^{\infty} e^{-2\pi i s x} e^{-ax} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x(2\pi i s + a)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i s + a}. \end{aligned}$$

Note que la transformada de Fourier de la función  $f(x) = e^{-ax}$  es otra función de valores complejos la cual es continua en su dominio de definición. Esta función es conocida usualmente

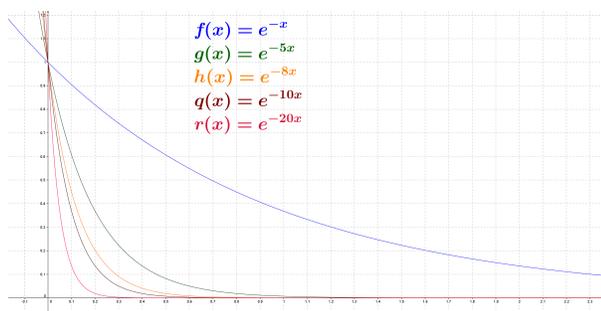


Figura 2.2.1: Gráficas de  $f(x) = e^{-ax}$  para distintos valores de  $a$ .

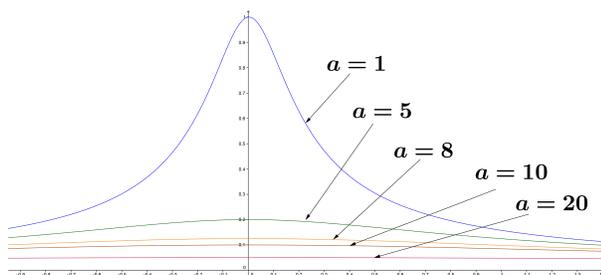


Figura 2.2.2: Gráficas de  $\mathcal{F}(e^{-ax}) = \frac{1}{2\pi is + a}$  para distintos valores de  $a$ .

como el espectro de frecuencias de la función  $f$  [30]. En otras palabras, la transformada de Fourier de la función  $f$  es una extensión a funciones aperiódicas de las series de Fourier [29].

Se considera este ejemplo en particular ya que muchos fenómenos físicos se modelan mediante la función exponencial, tales como el crecimiento o decremento de un capital o población. En este ejemplo la función exponencial modela la pérdida de intensidad a través del cuerpo humano conforme transcurre el tiempo.

Para conocer más sobre la transformada de Fourier y sus aplicaciones se puede consultar [15] ó [29].

### 2.3. Relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier

Como se vió anteriormente, encontrar una fórmula explícita de inversión para la transformada de Radon es muy complicado. En vez de eso, en esta sección se da un teorema que establece la relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier lo cual permite recuperar a la función  $f$  de manera más sencilla.

Para ello note que dada  $f \in \mathcal{D}$  localmente integrable se cumple:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n(f) &= \int f(\mathbf{x})e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})e^{-2\pi it} \delta(t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})dt d\mathbf{x}, t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Usando el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración se tiene:

$$\mathcal{F}_n(f) = \tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{x})e^{-2\pi it} \delta(t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) d\mathbf{x}dt,$$

luego, si  $\mathbf{k}=s\xi$  y  $t=sp$  con  $s \in \mathbb{R}$  y  $\xi$  un vector unitario en  $\mathbb{R}^n$ , entonces:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi isp} \left( \int f(\mathbf{x})\delta(p - \xi\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x} \right) dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(p, \xi)e^{-2\pi isp} dp.\end{aligned}$$

Es decir, se obtiene:

$$\mathcal{F}_n(f) = \mathcal{F}_1(\check{f}) = \mathcal{F}_1(\mathcal{R}\{f\}),$$

donde  $\check{f}$  es la transformada de Radon  $n$ -dimensional de la función  $f$ .

Así, se ha podido establecer la relación que involucra la transformada de Radon con la transformada de Fourier. Razón por lo cual, se establece en el teorema siguiente ya que esta relación es fundamental para esta tesis, pues como se verá más adelante, los métodos de inversión más utilizados se fundamentan en esta relación.

**Teorema 3.** Sea  $f \in \mathcal{D}$  una función localmente integrable en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces se tiene

$$\mathcal{F}_n(f) = \mathcal{F}_1(\check{f}) = \mathcal{F}_1(\mathcal{R}\{f\}). \quad (2.12)$$

**Corolario.** Bajo la hipótesis del teorema anterior se observa que:

$$\check{f}(p, \xi) = (\mathcal{F}_1)^{-1}\{\tilde{f}(s\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s\xi)e^{2\pi isp} ds. \quad (2.13)$$

Es decir, se puede hallar la transformada  $n$ -dimensional de Radon aplicando la transformada inversa unidimensional de Fourier a la transformada  $n$ -dimensional de Fourier.

*Ejemplo 12.* Si  $f = f(x, y)$ , entonces  $\mathcal{F}_2\{f\} = \mathcal{F}_1\{\mathcal{R}(f)\}$ . En efecto, desglosando el lado derecho de la igualdad anterior se observa que:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1\{\mathcal{R}(f)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(f)e^{-2\pi ikp} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(p - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy e^{-2\pi ikp} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-2\pi ik(x \cos \phi + y \sin \phi)} dx dy.\end{aligned}$$

Haciendo  $k_x = k \cos \phi$ ,  $k_y = k \sin \phi$  resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1\{\mathcal{R}(f)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xk_x + yk_y)} dx dy \\ &= \mathcal{F}_2\{f\}.\end{aligned}$$

*Ejemplo 13.* Sea  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-\pi(x^2 + y^2)}$ .

Calcularemos la transformada de Radon de  $f$  por el método directo y el método de la transformada de Fourier:

■ Método Directo:

Usando la linealidad de la transformada de Radon se tiene

$$\mathcal{R}((x^2 + y^2)e^{-\pi(x^2 + y^2)}) = \mathcal{R}(x^2 e^{-\pi(x^2 + y^2)}) + \mathcal{R}(y^2 e^{-\pi(x^2 + y^2)}).$$

Ahora mediante algunos cálculos se llega a:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x^2 e^{-\pi(x^2 + y^2)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\pi(x^2 + y^2)} \delta(p - x\xi_1 - y\xi_2) dx dy \\ &= e^{-\frac{\pi p^2}{\|\xi\|^2}} \left[ \frac{p^2(\xi_1)^2}{\|\xi\|^3} + \frac{(\xi_2)^2}{2\pi\|\xi\|} \right],\end{aligned}$$

y de manera similar se prueba que:

$$\mathcal{R}(y^2 e^{-\pi(x^2 + y^2)}) = e^{-\frac{\pi p^2}{\|\xi\|^2}} \left[ \frac{p^2(\xi_2)^2}{\|\xi\|^3} + \frac{(\xi_1)^2}{2\pi\|\xi\|} \right].$$

Si  $\xi = (\cos \phi, \sin \phi)$ , entonces  $\mathcal{R}((x^2 + y^2)e^{-\pi(x^2 + y^2)}) = e^{-\pi p^2} (p^2 + \frac{1}{2\pi})$ .

■ Método de la transformada de Fourier:

Aplicando la transformada bidimensional de Fourier a la función  $f$  se tiene:

$$\tilde{f}(su, sv) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) e^{-\pi(x^2 + y^2)} e^{-2\pi i s(xu + yv)} dx dy,$$

se puede ver que

$$\tilde{f}(su, sv) = e^{-\pi s^2(u^2 + v^2)} \left( \frac{1}{\pi} - s^2(u^2 + v^2) \right).$$

Si se evalúa en  $u^2 + v^2 = 1$  con  $\xi = (u, v)$ , entonces se tiene

$$\tilde{f}(s\xi) = e^{-\pi s^2} \left( \frac{1}{\pi} - s^2 \right).$$

Usando el Corolario del Teorema 3 se concluye

$$\begin{aligned}\check{f}(p, \xi) &= \mathcal{F}_1^{-1}(\tilde{f}(s\xi)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s\xi) e^{2\pi i s p} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} - s^2\right) e^{-\pi s^2} e^{2\pi i s p} ds = e^{-\pi p^2} \left(p^2 + \frac{1}{2\pi}\right).\end{aligned}$$

Si el lector comprueba los resultados obtenidos en este ejemplo mediante los dos métodos, notará que resulta más complicado hacer los cálculos de la transformada de Radon usando el método de la transformada de Fourier que hacerlo directamente. Sin embargo, como se vió en la unidad anterior, es muy difícil aplicar la transformada inversa de Radon, motivo por el cual se ilustran en el Capítulo 3 algunos métodos que usan la relación mostrada en el Teorema 3.

## Capítulo 3

# Métodos de inversión

Una vez que se analizó la transformada de Radon y su relación con la transformada de Fourier, se exponen algunos métodos recientes de inversión de la transformada de Radon.

La siguiente fórmula dada en [33],

$$f(P) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\bar{F}_p(q)}{q},$$

es equivalente a las fórmulas dadas en el Teorema 2 del Capítulo 2 y es una solución al *problema de reconstrucción a partir de proyecciones*.

La fórmula dada es válida cuando  $f$  es una función continua con soporte compacto (ver Apéndice A, Definición A.0.2.) y las proyecciones  $\check{f}$  son conocidas para todas las rectas  $L$ . La condición de soporte compacto no tiene inconvenientes dado que se puede considerar al objeto en cuestión dentro del disco unitario, y la condición de continuidad se puede corregir en la mayoría de los casos. Sin embargo, dado que en la práctica se toma un número finito de proyecciones, surgen problemas relacionados con la unicidad de la solución. De hecho, el siguiente teorema refleja la dificultad de encontrar una única función  $f$  en las aplicaciones ([20],[31]):

**Teorema.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de soporte compacto. Dada  $\check{f}(p, \phi)$  para todo valor de  $p \in \mathbb{R}$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$ , se puede recuperar  $f$  a partir del conocimiento de  $\check{f}(p, \phi)$  mediante

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\check{f}_p(p, \boldsymbol{\xi})}{p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} dp d\phi,$$

donde  $\boldsymbol{\xi} = (\cos \phi, \sin \phi)$ .

Note que este teorema indica que la función  $f$  no se puede obtener mediante un número finito de proyecciones.

Los algoritmos que a continuación se presentan son para el problema de reconstrucción bidimensional a partir de proyecciones donde la proyección constituye una muestra de la transformada de Radon en  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.1. Método directo de Fourier

En esta sección se estudiará el método directo de Fourier. Se analizará el Teorema 3 para los casos bidimensional y tridimensional ya que en estos casos es donde existen las aplicaciones.

#### 3.1.1. Dos dimensiones

La versión bidimensional del *teorema de la proyección de cortes* es equivalente al *teorema del corte central* y básicamente establece la relación entre la transformada bidimensional de Fourier de una función  $f(x, y)$  y la transformada unidimensional de Fourier de la transformada de Radon de la función  $f$ , es decir

$$\mathcal{F}_2\{f\} = \mathcal{F}_1\{\mathcal{R}(f)\} = \mathcal{F}_1\{\check{f}\}. \quad (3.1)$$

Note que existe un cambio de coordenadas entre coordenadas rectangulares y coordenadas polares en el espacio de Fourier como lo ilustra la Figura 3.1.1 ya que

$$\mathcal{F}_2\{f(x, y)\} = \tilde{f}(k_x, k_y),$$

mientras que

$$\mathcal{F}_1\check{f}(p, \phi) = \tilde{f}(k, \phi).$$

Así, se puede pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en el espacio bidimensional de Fourier obteniéndose  $\tilde{f}(k_x, k_y) = \tilde{f}(k, \phi)$ , donde  $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$  y  $\phi = \tan^{-1}(k_y/k_x)$ .

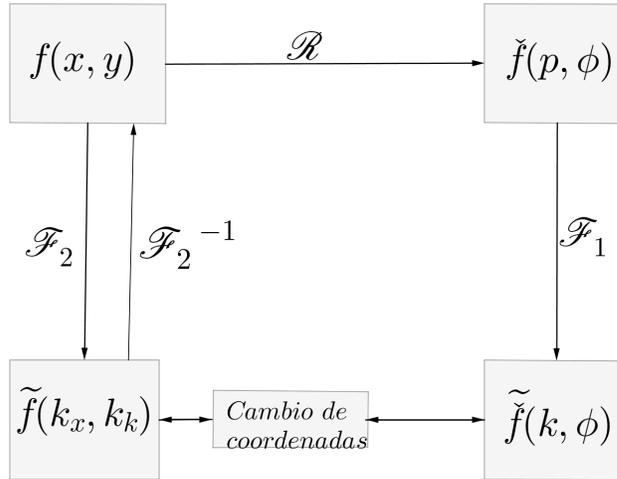


Figura 3.1.1: Diagrama del teorema de cortes de Fourier en dos dimensiones.

Se sigue que en términos de una proyección de  $f$  a un ángulo fijo  $\phi = \theta$ , denotado por  $\check{f}_\theta(p)$ , la misma información es contenida en la proyección  $\check{f}_\theta(p)$  como en un corte al mismo ángulo de la transformada bidimensional de Fourier de  $f$ .

Esto es,  $\tilde{f}(k_x, k_y)$  evaluado en la recta que pasa por el origen a un ángulo  $\theta$  en el espacio de

Fourier es equivalente a la transformada unidimensional de Fourier de la proyección  $\check{f}_\theta(p)$ , donde el ángulo de proyección es el mismo ángulo  $\theta$  como lo ilustra la Figura 3.1.2. Después de realizar

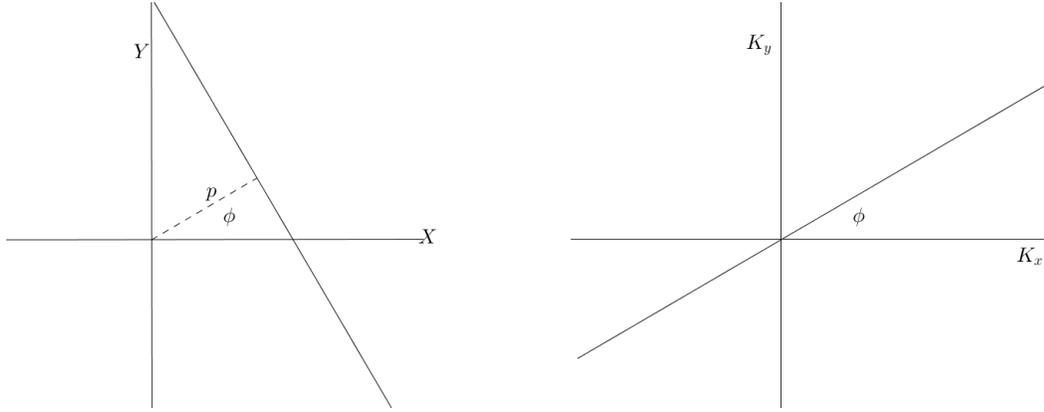


Figura 3.1.2: Ilustración geométrica del teorema de cortes de Fourier bidimensional.

el cambio de coordenadas,  $\check{f}(k_x, k_y)$  puede ser escrito como  $\check{f}(k, \phi)$ , donde  $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$  y  $\phi = \tan^{-1}(k_y/k_x)$ . Si  $\phi = \theta$ , entonces:

$$\check{f}(k, \theta) = \check{f}_\theta(k).$$

Con lo anterior, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 4** (Teorema de Cortes de Fourier). Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de prueba. Para  $\phi \in [0, 2\pi)$  se tiene que:

$$\check{f}(k, \phi) = \check{f}_\phi(k). \quad (3.2)$$

En resumen, el teorema de cortes de Fourier establece que la transformada unidimensional de Fourier de la proyección de una función  $f(x, y)$ , obtenida a partir de rayos paralelos entre sí y formando un ángulo  $\phi$  con el eje  $X$ , es el corte o muestreo de la transformada bidimensional de Fourier de la función  $\check{f}(k_x, k_y)$  a lo largo de una recta que forma un ángulo  $\phi$  con el eje  $k_x$ . Según este teorema, si se tienen todas las proyecciones  $\check{f}(p, \phi)$  se puede obtener  $f(x, y)$  calculando la transformada inversa de Fourier bidimensional a  $S_\phi(w)$ , es decir,

$$f(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}\{S_\phi(w)\}.$$

Dado que  $S_\phi$  está en coordenadas polares es necesario un cambio de coordenadas polares a coordenadas cartesianas como lo ilustra la Figura 3.1.3.

Cuando una reconstrucción se obtiene mediante el Teorema de cortes de Fourier, se dice usualmente que se uso el método directo de Fourier.

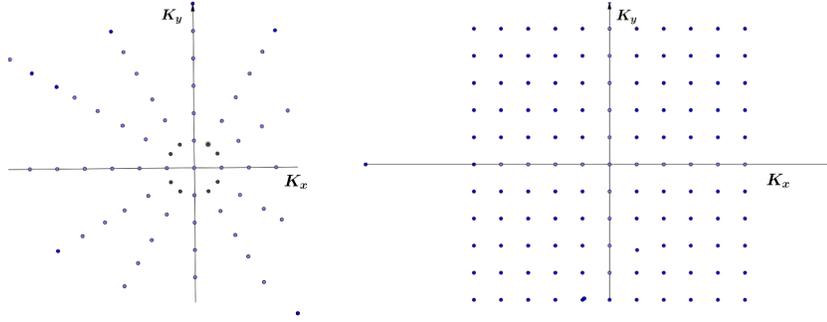


Figura 3.1.3: Diagrama que ilustra el cambio de coordenadas en el espacio de Fourier.

### 3.1.2. Tres dimensiones

Antes que nada, recuerde que en general una recta  $\mathbf{L}$  en el espacio puede ser escrita en forma vectorial como:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + s\boldsymbol{\tau}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{L}_0$  es un vector de desplazamiento,  $s \in \mathbb{R}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector director como lo ilustra la Figura 3.1.4. Note que el vector  $\mathbf{L} - \mathbf{L}_0$  es paralelo al vector  $\boldsymbol{\tau}$ , el cual se supondrá unitario y puede ser escrito como:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

El vector de desplazamiento  $\mathbf{L}_0$  puede ser descrito como:

$$\mathbf{L}_0 = u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}, \quad (3.4)$$

donde  $u, v \in \mathbb{R}$  y  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  son dos vectores de dirección normalizados. Note que dichos vectores se pueden elegir de tal forma que  $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  formen una base ortonormal para  $\mathbb{R}^3$ . Los vectores  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  pueden ser descritos de diferentes formas, en este caso se consideran como los describe [27]:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} -\cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Cabe mencionar que existen diferentes formas de definir estos vectores unitarios, por ejemplo, algunas pueden hallarse en [23], [22].

Siguiendo [4], se tiene que las integrales de línea en  $\mathbb{R}^3$  se pueden expresar usando las ecuaciones (3.3), (3.4) como

$$\check{f}(\phi, \theta, u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\boldsymbol{\tau} + u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}) ds. \quad (3.5)$$

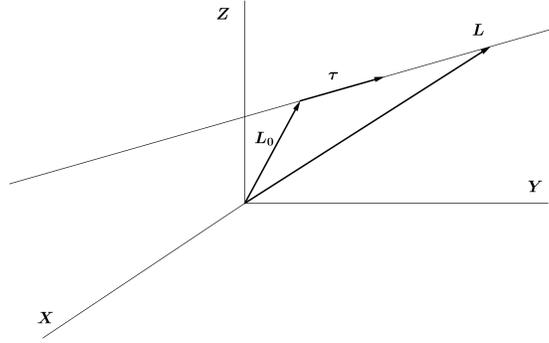


Figura 3.1.4: Representación geométrica de una recta en el espacio.

La transformación del dominio  $(x, y, z)$  al dominio  $(s, u, v)$  es muy útil ya que si

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\text{sen } \phi & -\cos \phi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \phi \cos \theta & \cos \phi & -\text{sen } \phi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{p},$$

entonces usando el hecho de que los vectores  $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  son ortogonales y unitarios se tiene que

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} s \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & \text{sen } \phi \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi \text{sen } \theta & -\text{sen } \phi \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^t \mathbf{L}.$$

Una característica de la matriz  $\mathbf{Q}$  es que sólo dos ángulos son necesarios, mientras que una matriz de rotación en general usa tres ángulos de rotación.

Así, si

$$\check{f}(\phi, \theta, u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\boldsymbol{\tau} + u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}) ds,$$

entonces aplicando la transformada bidimensional de Fourier a la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2\{\check{f}(\phi, \theta, u, v)\} &= \check{F}(\phi, \theta, k_u, k_v) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\phi, \theta, u, v) e^{-2\pi i u k_u + v k_v} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s\boldsymbol{\tau} + u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}) e^{-2\pi i u k_u + v k_v} ds du dv. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por otro lado, dado que:

$$\mathcal{F}_3\{f(\mathbf{L})\} = \check{F}(\mathbf{K}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{L}) e^{-2\pi i \mathbf{L} \cdot \mathbf{K}} d\mathbf{L},$$

entonces

$$f(\mathbf{L}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(\mathbf{K}) e^{2\pi i \mathbf{L} \cdot \mathbf{K}} d\mathbf{K}. \quad (3.7)$$

Como  $\mathbf{L} = s\boldsymbol{\tau} + u\boldsymbol{\alpha} + v\boldsymbol{\beta}$  y dado que  $u = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L}$  y  $v = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{L}$ , se tiene que 3.6 queda como

$$\check{F}(\phi, \theta, k_u, k_v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{L}) e^{-2\pi i \mathbf{L} \cdot (k_u \boldsymbol{\alpha} + k_v \boldsymbol{\beta})} d\mathbf{L}. \quad (3.8)$$

Este resultado muestra que la transformada bidimensional de Fourier de las integrales de línea es la transformada tridimensional de Fourier de la función  $f$ , es decir, es la versión tridimensional del teorema de cortes de Fourier.

En resumen se tiene el siguiente teorema

**Teorema 5.** Dadas  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{L}$  una recta en el espacio dada como en (3.3) donde  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  son como se describieron anteriormente, se tiene que:

$$\mathcal{F}_2\{\check{f}(\phi, \theta, u, v)\} = \mathcal{F}_3\{f(\mathbf{L})\}. \quad (3.9)$$

Así, la función  $f(\mathbf{L})$  se puede recuperar aplicando una transformada bidimensional de Fourier al sinograma para todos los valores de  $\phi, \theta$  para posteriormente aplicar la transformada inversa tridimensional de Fourier.

Como última observación note que si  $\theta = 0, u = p, v = z_0$ , entonces de la ecuación (3.5) se tiene:

$$\check{f}(p, \phi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \phi - p \operatorname{sen} \phi, s \operatorname{sen} \phi + p \cos \phi) ds, \quad (3.10)$$

la cual es la transformada de Radon bidimensional aplicada en el plano  $z = z_0$  donde el parámetro angular  $\phi$  ha sido rotado  $90^\circ$  comparada con la definición de la transformada de Radon bidimensional dada en el Capítulo 1.

## 3.2. Retroproyección

Se comienza esta sección definiendo el operador de retroproyección, el cual servirá en lo que resta de esta sección.

**Definición 3.2.1.** Considere una función arbitraria  $\psi(t, \boldsymbol{\xi})$  localmente integrable, donde  $t = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} = x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi$ . Se define el *operador de retroproyección*  $\mathcal{B}$  como

$$\mathcal{B}(\psi)(x, y) = \int_0^\pi \psi(x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi, \boldsymbol{\xi}) d\phi, \quad (3.11)$$

o en coordenadas polares mediante

$$\mathcal{B}(\psi)(r, \theta) = \int_0^\pi \psi(r \cos(\theta - \phi), \phi) d\phi, \quad (3.12)$$

donde  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \operatorname{sen} \theta$ .

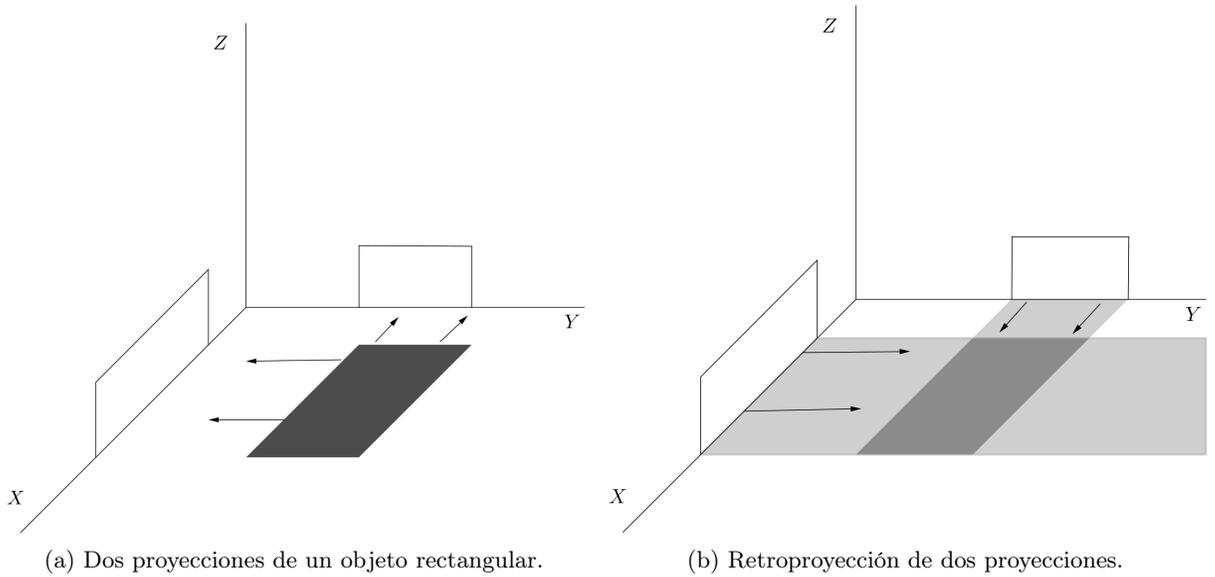


Figura 3.2.1: Descripción geométrica de las retroproyecciones, donde las retroproyecciones se superponen para aproximar al objeto original.

La interpretación geométrica de la retroproyección para sólo dos proyecciones se ilustra en la Figura 3.2.1. Ahora se define el operador de *imagen retroproyectada* como

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \mathcal{B}\check{f}(p, \phi) \\ &= \int_0^\pi \check{f}(x \cos \phi + y \sin \phi, \phi) d\phi. \end{aligned}$$

Un resultado útil mostrado en [3] es que la función original  $f(x, y)$  convolucionada con  $1/r$  da como resultado la función retroproyectada, es decir,

$$\begin{aligned} b(x, y) &= f(x, y) ** \frac{1}{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x', y') dx' dy'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  y  $**$  representa la convolución bidimensional [25]. Esto puede verse como el operador  $\mathcal{B}$  actuando sobre  $\check{f}$ , donde  $\check{f} = \mathcal{F}_1^{-1}\{\mathcal{F}_2(f)\}$  es usado para las proyecciones

$$\mathcal{B}\check{f} = \mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1}\{\mathcal{F}_2(f)\}, \quad (3.14)$$

o equivalentemente usando la ecuación (3.12)

$$b(r, \theta) = \mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1}\check{f}(k, \phi). \quad (3.15)$$

Aquí,  $\phi = \tan^{-1}(k_y/k_x)$ ,  $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$  y  $\mathcal{F}_1^{-1}$  transforma la variable  $k$ . Explícitamente:

$$\begin{aligned} b(r, \theta) &= \mathcal{B} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k, \phi) e^{2\pi i k r} dk \right\} \\ &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k, \phi) e^{2\pi i k r \cos(\theta - \phi)} dk d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} k^{-1} \tilde{f}(k, \phi) e^{2\pi i k r \cos(\theta - \phi)} k dk d\phi \\ &= \mathcal{F}_2^{-1} \{ k^{-1} \tilde{f} \}. \end{aligned}$$

Ahora, del teorema de convolución ([3],[28]) se tiene:

$$\begin{aligned} b(r, \theta) &= \mathcal{F}_2^{-1} \{ \tilde{f} \} * * \mathcal{F}_2^{-1} \{ k^{-1} \} \\ &= f(r, \theta) * * \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (3.16)$$

el cual es equivalente a la ecuación (3.13).

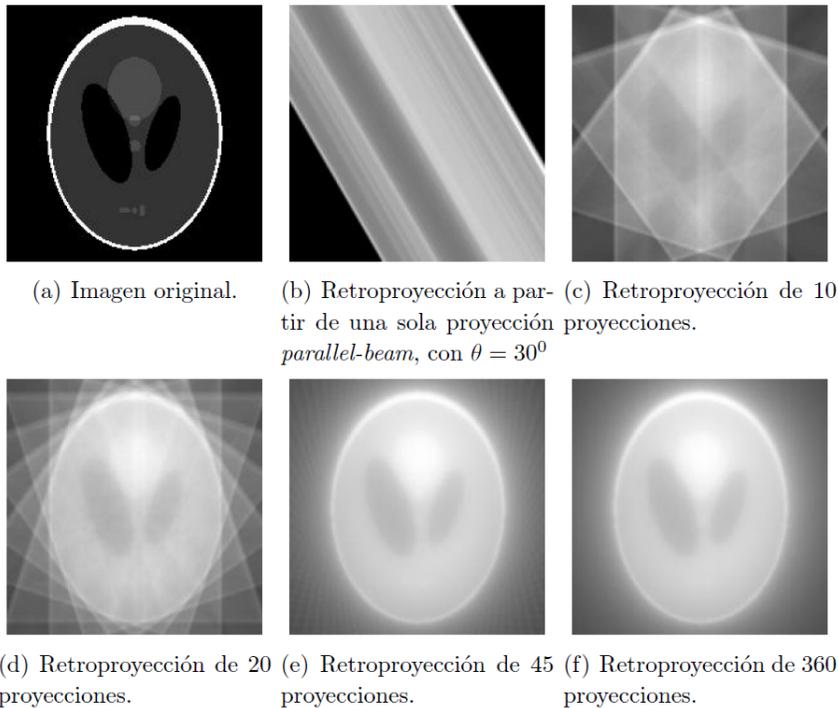


Figura 3.2.2: Proceso de reconstrucción de un objeto usando solamente la retroproyección.

El proceso de retroproyección por sí solo no reconstruye perfectamente la función  $f$ , sino que genera una versión difuminada (borrosa) de la misma (ver Figura 3.2.2<sup>1</sup>). Este fenómeno se debe

<sup>1</sup>Imagen tomada de [10].

a que la función retroproyectada, con respecto a la función original, corresponde a la ecuación (3.13).

### 3.3. Retroproyección filtrada

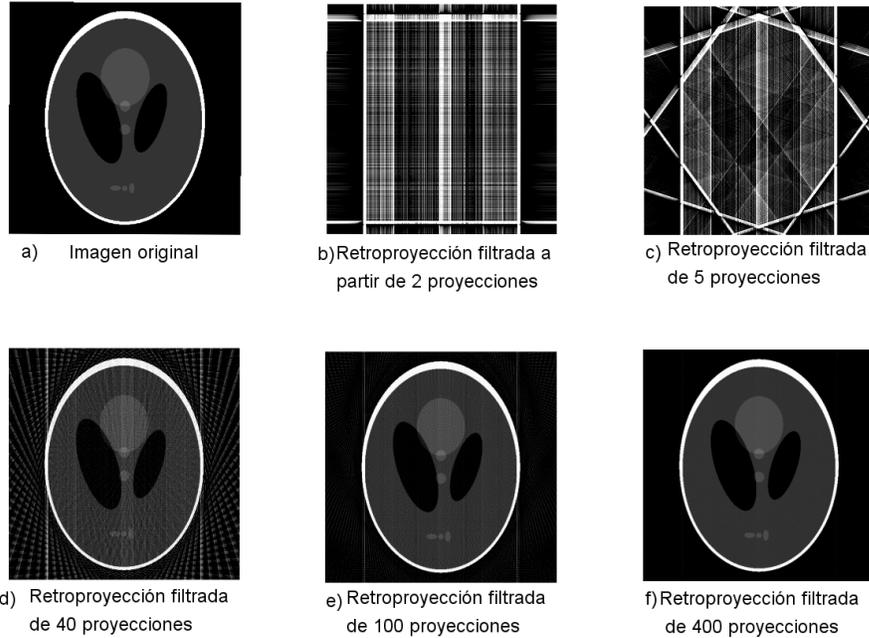


Figura 3.3.1: Proceso de reconstrucción de un objeto usando retroproyección filtrada mediante Matlab.

Para corregir el problema de la visión difuminada en la retroproyección, existe el método de retroproyección filtrada el cual transforma las proyecciones simples en proyecciones filtradas aplicando un filtro, esto con el fin de obtener proyecciones más nítidas y con menos factores de ruido como lo ilustra la Figura 3.3.1.

Es importante recordar que esta sumatoria se puede hacer ya sea en el dominio de Fourier o en el espacio de dominio debido a la linealidad de la transformada de Fourier. Como su nombre indica, hay dos pasos dentro del algoritmo de retroproyección filtrada: la parte de filtrado, que puede visualizarse como una ponderación de cada proyección en el dominio de frecuencia, y la parte de retroproyección, que es equivalente a encontrar las reconstrucciones correspondientes a cada una de las proyecciones filtradas.

A partir de la relación

$$\tilde{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xk_x + yk_y)} dx dy,$$

se tiene

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x, k_y) e^{2\pi i(xk_x + yk_y)} dk_x dk_y. \quad (3.17)$$

Pasando de coordenadas rectangulares a coordenadas polares mediante:

$$k_x = k \cos \phi, k_y = k \operatorname{sen} \phi, dk_x dk_y = k dk d\phi,$$

se puede reescribir (3.17) como:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tilde{f}(k, \phi) e^{2\pi i k(x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi)} k dk d\phi. \quad (3.18)$$

La ecuación anterior puede separarse en dos sumandos considerando  $\phi$  variando de 0 a  $\pi$  y de  $\pi$  a  $2\pi$ . Así

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^\infty \tilde{f}(k, \phi) e^{2\pi i k(x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi)} k dk d\phi \\ &+ \int_\pi^{2\pi} \int_0^\infty \tilde{f}(k, \phi + \pi) e^{2\pi i k[x \cos(\phi + \pi) + y \operatorname{sen}(\phi + \pi)]} k dk d\phi, \end{aligned}$$

y usando la propiedad

$$\tilde{f}(k, \phi + \pi) = \tilde{f}(-k, \phi),$$

la expresión (3.18) para  $f(x, y)$  puede expresarse como:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(k, \phi) |k| e^{2\pi i k p} dk \right] d\phi, \quad (3.19)$$

donde se ha simplificado la expresión usando  $p = x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi$ . Ahora, se denota  $S_\phi(k)$  como

$$S_\phi(k) = \mathcal{F}_1\{\mathcal{D}(f)\} = \mathcal{F}_2\{f\},$$

con lo que la expresión (3.19) queda como

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^\infty S_\phi(k) |k| e^{2\pi i k p} dk \right] d\phi. \quad (3.20)$$

Finalmente la ecuación (3.20) se puede expresar mediante:

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_\phi(x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi) d\phi, \quad (3.21)$$

donde

$$Q_\phi(p) = \int_{-\infty}^\infty S_\phi(k) |k| e^{2\pi i k p} dk. \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) representa una operación de filtrado (convolución) donde la respuesta en frecuencia del filtro está dada por  $|k|$ ; por lo tanto,  $Q_\phi(p)$  es llamada una *proyección filtrada*. Las proyecciones resultantes para distintos ángulos  $\phi$  son superpuestas para formar la estimación de  $f(x, y)$ .

## Capítulo 4

# Tomografía Axial Computarizada

Como último capítulo de esta tesis, se aborda el tema de la Tomografía Axial Computarizada (TAC), se analiza su relación con la transformada de Radon y se ilustra un ejemplo de cómo aplicar este método de reconstrucción.

La TAC nace como una técnica de diagnóstico en medicina mediante la visualización por rayos X. El fundamento de la tomografía es la adquisición de una imagen por rayos X de un corte transversal de un objeto para distintos ángulos de rotación con respecto al mismo. Cada una de estas imágenes es una proyección, y la tomografía es la técnica de reconstrucción de imágenes a partir de proyecciones de un objeto. La palabra axial deriva de su uso médico, originado porque las proyecciones se obtienen rotando el tubo y el detector en torno a un eje.

### 4.1. Generaciones de sistemas tomográficos

En esta sección se dan a conocer algunos de los diferentes tipos de sistemas tomográficos que se han venido desarrollando en las últimas décadas.

La historia posiblemente comenzó en 1895 cuando el físico alemán *Wilhelm Konrad Röntgen* (1845-1923) descubrió los rayos X, al observar como se había cubierto una placa fotográfica [32]. Röntgen descubrió además las propiedades penetrantes de los rayos X sobre la materia y la acción de estos sobre las películas químicas de placas fotográficas y pantallas fluorescentes. Con estas propiedades de los rayos X fue posible obtener imágenes bidimensionales o radiografías del interior del cuerpo humano, aunque debido al escaso avance tecnológico de la época no fue posible detectar la complejidad anatómica de tejidos suaves tales como músculos, tendones, nervios y vasos sanguíneos.

Un importante progreso fue cuando se logró medir la cantidad de rayos X absorbidos por distintos materiales mediante un detector. Este avance permitió asociar a cada material una única función llamada *coeficiente de atenuación*, la cual mide la capacidad del material para absorber o dispersar la radiación de rayos X y es característica de cada material. Los datos obtenidos al radiar un objeto por medio de rayos X desde distintas direcciones suelen llamarse las *proyecciones* del objeto ([6],[7]).

En 1917 Johann Radon demostró matemáticamente que se puede reconstruir un objeto bidimensional o tridimensional si se conocen todas sus proyecciones ([11],[33]). Sin embargo sus trabajos permanecieron en el olvido aproximadamente 50 años hasta que Cormack y Hounsfield usaron sus resultados para crear de manera independiente las bases de la tomografía computarizada. El primer tomógrafo fue construido por Hounsfield en 1972; este tipo de escáneres se caracterizaba por trabajar con un único detector y una fuente de rayos X altamente colimada (Técnica para hacer los rayos X paralelos). De esta manera, tanto la fuente como el detector se trasladaban linealmente hasta cubrir al objeto de estudio, para después rotarlos conjuntamente y realizar la siguiente proyección, tal como lo ilustra la Figura 4.1.1<sup>1</sup>. Como se podrá imaginar, el tiempo

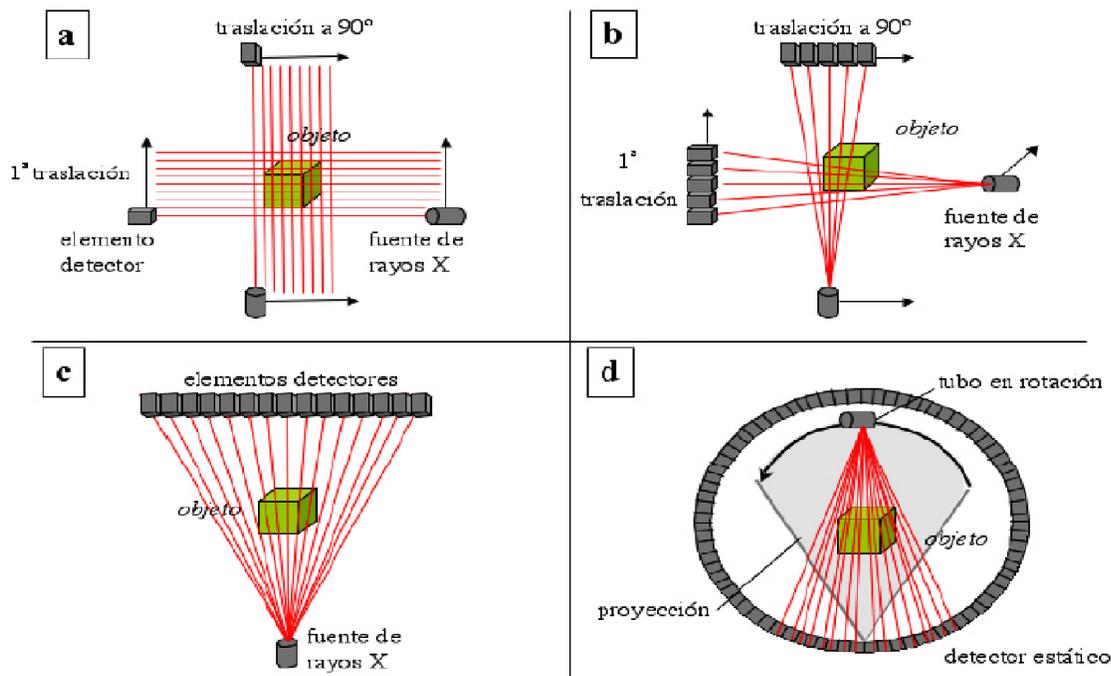


Figura 4.1.1: Generaciones de tomógrafos. a) 1ª generación: traslación lineal con un único detector, b) 2ª generación: traslación lineal con múltiples detectores, c) 3ª generación: detector lineal o en arco, d) 4ª generación: anillo de detección estático.

de adquisición entre proyecciones era muy alto, por lo que surgieron los tomógrafos de segunda generación que esencialmente tenían el mismo mecanismo que los tomógrafos de primera generación salvo que ahora se incluían varios elementos detectores.

Los tomógrafos de tercera generación se caracterizan por tener un arreglo de detectores ya sea lineal o en arco suficientemente largo tal que el campo de visión cubra al objeto en cualquier proyección; de esta manera se elimina la traslación lineal, disminuyendo el tiempo de adquisición. Esta geometría es conocida como *fanbeam* o geometría en abanico.

Dentro de la geometría de los escáneres de tercera generación, si se aumenta el número de detectores perpendicular al plano de proyección se obtiene la llamada geometría *cone-beam* o de haz

<sup>1</sup>Imagen tomada de [8] para un objeto tridimensional.

cónico, tal como lo ilustra la Figura 4.1.2.

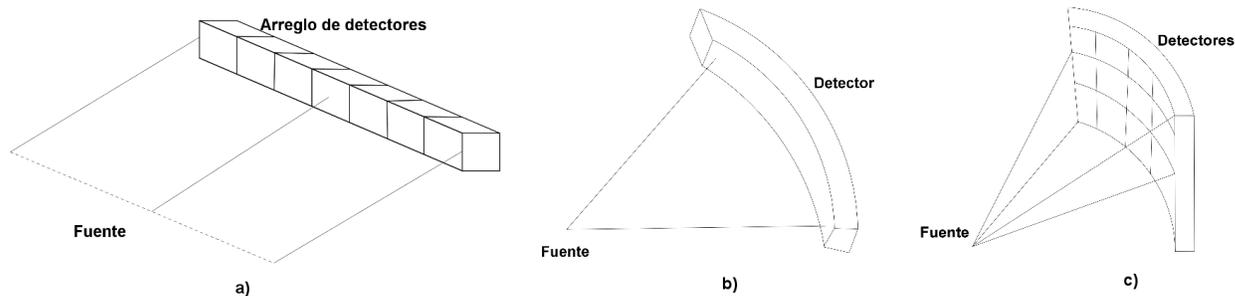


Figura 4.1.2: Ilustración de las diferentes geometrías: a) geometría paralela b) geometría fanbeam c) geometría cone-beam.

Los algoritmos de reconstrucción varían entre estos dos tipos de geometrías a pesar de estar en la misma generación de escáneres: la reconstrucción *fanbeam* se realiza mediante el *algoritmo de retroproyección filtrada* mientras que la reconstrucción *cone-beam* se aproxima mediante métodos iterativos menos exactos que la *fanbeam*.

Los tomógrafos de cuarta generación introducidos en 1976 constan de un arreglo de detectores colocados en forma circular tal que cubren al objeto de estudio, mientras que el tubo emisor de rayos X gira dentro del arreglo, iluminando varios elementos de detección a la vez [14]. No obstante, el tamaño del anillo necesario para mantener una distancia adecuada entre el paciente y la fuente de Rayos X, y la cantidad de detectores requerida para alcanzar una resolución espacial aceptable, hicieron que este diseño resultara prácticamente muy costoso. Aproximadamente en

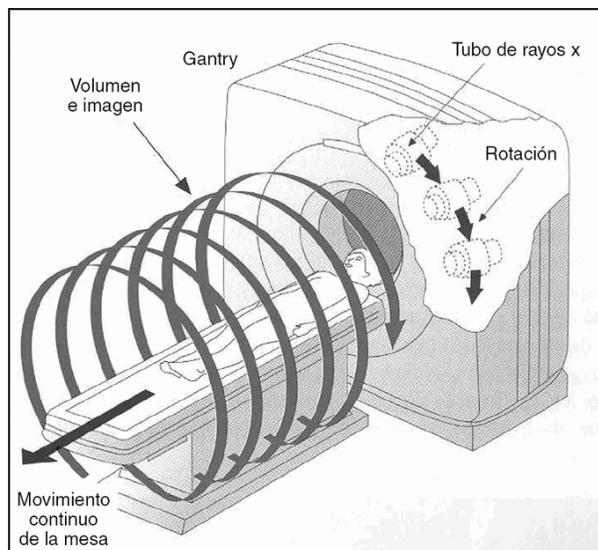


Figura 4.1.3: Tomógrafo en espiral.

1978 se introdujo la tomografía por rayo de electrones (EBCT, del inglés *electron beam computed*

*tomography*) que constituye la quinta generación de tomógrafos. El EBCT utiliza una arquitectura estacionaria, donde un rayo de electrones hace un barrido a lo largo de cuatro placas semicirculares que rodean al paciente ([10]).

En la década de los 80's surgieron los tomógrafos de quinta generación los cuales consistían de aproximadamente 14 fuentes fijas de rayos X y numerosos detectores también fijos lo cual permitía una alta resolución espacial, sin embargo debido al gran peso de hasta 15 toneladas y el costo de varios millones de dólares nunca logró hacerse comercial salvo en Estados Unidos.

La sexta generación de tomógrafos es la constituida por tomógrafos en espiral o helicoidal (Figura 4.1.3<sup>2</sup>), la cual usa la geometría fanbeam salvo que se caracteriza por hacer un movimiento continuo de la camilla a través del *gantry* (parte del tomógrafo en continua rotación que contiene el tubo de rayos X y el arreglo de detectores). La posibilidad de escanear órganos y regiones anatómicas en un período muy corto de tiempo demostró las ventajas de esta innovación, sin embargo, en la tomografía en espiral los tubos de rayos X se podían sobrecalentar. Este hecho impulsó el desarrollo de las arquitecturas con múltiples detectores y en 1998 llevó a la introducción de modelos de séptima generación: tomógrafos multi-tajadas (MSCT, del inglés *Multi-Slice Computed Tomography*), también llamados multi-detectores (MDCT, del inglés *Multi-Detector Computed Tomography*). Estos equipos se caracterizan, principalmente, por tener arreglos multidimensionales (varias líneas de detectores) y se basan en la geometría cone-beam. Así, permiten recoger datos correspondientes a varias tajadas simultáneamente y, por consiguiente, reducen el número de rotaciones del tubo de rayos X necesaria para cubrir una región anatómica específica ([6], [14], [19]).

## 4.2. El problema inverso de la Tomografía Axial Computarizada

Considere un plano fijo a través del cuerpo humano. Denote con  $\rho(x, y)$  el cambio de densidad en el punto  $(x, y)$  y suponga que  $L$  es una recta en el plano que interseca al cuerpo. Suponga que se envía un haz delgado de rayos X al interior del cuerpo a lo largo de la dirección determinada por la recta  $L$  y se mide qué tanto es atenuada la intensidad del rayo cuando pasa a través del cuerpo. Parametrizando  $L$  mediante

$$p e^{i\phi} + s e^{i\phi} \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{R},$$

donde se hace la identificación de  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ . Se tiene que la atenuación de la intensidad  $I$  está descrita aproximadamente por  $dI = -\gamma \rho I ds$  con  $\gamma$  una constante. Integrando a lo largo de la recta  $L$  se tiene

$$\ln I(s) = -\gamma \int_{s_0}^s \rho(p e^{i\phi} + s e^{i\phi}) ds,$$

o asumiendo que  $\rho$  es de soporte compacto, el algoritmo de la variación de intensidad del haz al ser aplicado en la dirección  $L$  viene dado por

$$\ln I(\infty) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p e^{i\phi} + s e^{i\phi}) ds.$$

---

<sup>2</sup>Imagen tomada de [21].

De esta forma se ve que a partir del conocimiento de la distribución de las densidades en el interior del cuerpo, la cual corresponde a los factores de atenuación del haz de rayos X, se pueden calcular todas las integrales de línea. Esta es la llamada transformada de Radon

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p e^{i\phi} + s e^{i\phi}) ds, \quad p \in \mathbb{R}, \phi \in [0, \pi). \quad (4.1)$$

El problema directo es calcular la transformada de Radon cuando  $\rho$  es dada, mientras que el problema inverso es hallar la función de densidades  $\rho$  si se conocen los valores de su transformada de Radon.

Se tiene que el problema inverso es un problema mal planteado (ver Apéndice B, Definición B.1.1). En efecto, suponga que  $\rho$  tiene simetría radial y considere las rectas  $L$  paralelas al eje  $Y$ . Se tiene que  $\rho = \rho(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y el rayo  $L_x$  que pasa a través de  $(x, 0)$  se puede parametrizar por  $(x, s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Esto conduce a

$$V(x) := \ln(\infty) = -2\gamma \int_0^{\infty} \rho(\sqrt{x^2 + y^2}) ds. \quad (4.2)$$

Si nuevamente se asume que  $\rho$  es de soporte compacto contenido en  $X$  donde  $X := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R, R \text{ suficientemente grande}\}$ , mediante el cambio de variable  $s = \sqrt{r^2 - x^2}$  en (4.2) se llega a

$$V(x) = -2\gamma \int_x^{\infty} \frac{r \rho(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr = -2\gamma \int_x^R \frac{r \rho(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr.$$

Un último cambio adicional en las variables  $z = R^2 - r^2$  y  $y = R^2 - x^2$  transforma esta ecuación en la siguiente *ecuación integral de Abel* para la función  $z \mapsto \rho(\sqrt{R^2 - z})$ :

$$V(\sqrt{R^2 - y}) = -\gamma \int_0^y \frac{\rho(\sqrt{R^2 - z})}{\sqrt{y - z}} dz, \quad 0 \leq y \leq R.$$

Así, el problema inverso es hallar  $\rho$  en esta última ecuación conociendo  $V$ , el cual es un problema mal planteado (ver Ejemplo 22).

¿Qué tan serio es que este problema inverso sea mal planteado? Como ya se sabe, la estabilidad de la solución no está asegurada, por lo que en aplicaciones deben hallarse métodos que aseguren una buena estimación de la función  $f$ , ya que regularmente existen perturbaciones en la recolección de datos tales como factores de ruido. Para ello, se utiliza la regularización (filtros) para hallar a la mejor aproximación de la solución.

### 4.3. Adquisición de datos a partir de integrales de línea

Una imagen tomográfica o perfil consiste en las medidas de flujo de radiación a través de un objeto para distintos ángulos de incidencia. Considere un corte transversal que se divide en *vóxels* con dimensiones  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  donde a cada vóxel puede asignarse una atenuación  $\mu$ .

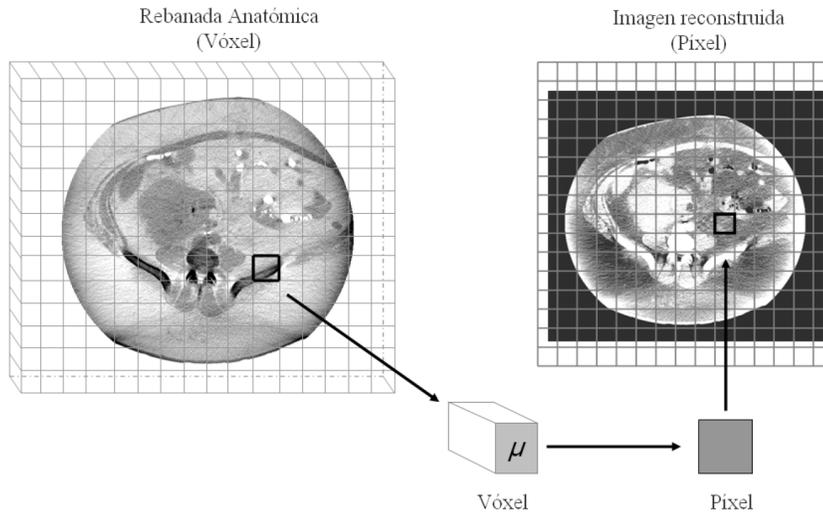
(Figura 4.3.1<sup>3</sup>)

Figura 4.3.1: Proceso de adquisición de una imagen.

Considérese también un rayo de intensidad  $I_0$ , que penetra un objeto a lo largo de una trayectoria  $L$ , en línea recta, pasando por cada vóxel (o región discretizada del objeto) con una distribución no homogénea de atenuaciones  $\mu(x)$ . La intensidad del rayo que alcanza el detector  $I(x)$  depende no sólo de la distancia atravesada  $x$  sino también de la atenuación  $\mu(x)$  de cada punto en su trayectoria, obedeciendo la ley de Beer-Lambert:

$$I(x) = I_0 e^{-\int_L \mu(x) dx}. \quad (4.3)$$

Dado que es posible medir tanto  $I_0$  como la intensidad de salida  $I(x)$  en el detector del tomógrafo, resulta conveniente escribir (4.3) como:

$$p(x) = -\ln \left( \frac{I(x)}{I_0} \right) = \int_L \mu(x) dx. \quad (4.4)$$

La ecuación (4.4) constituye una integral de línea o transformada de Radon de los coeficientes de atenuación lineal a través del recorrido de los rayos X. La *proyección*  $p(x)$ , formada por las integrales de línea paralelas o en abanico tiene implicaciones importantes. La primera, que el detector registra la integral de línea y ésta depende de las atenuaciones en cada región del objeto en la trayectoria del rayo. La segunda, que aunque se usa información volumétrica, el detector registra la proyección  $p(x)$ , que es una señal unidimensional para cada ángulo  $\phi$ .

Una de las suposiciones hechas es que cada vóxel contiene una atenuación uniforme (que corresponde a un tejido específico), lo cual no es necesariamente cierto, ya que es muy probable que existan vóxeles con dos o más materiales simultáneamente. Este efecto es llamado el efecto del

<sup>3</sup>Imagen tomada de [10] para un objeto tridimensional.

volumen parcial que en algunas aplicaciones específicas (que no se abordan en esta tesis) debe ser corregido.

#### 4.4. Reconstrucción de imágenes

En la reconstrucción tomográfica se presentan una serie de proyecciones medidas de 0 a  $2\pi$  (aunque teóricamente sólo se necesitan proyecciones que cubran hasta  $\pi$ ) en el *senograma* o transformada de Radon. Un senograma es el conjunto de proyecciones del objeto variando  $\phi$  de 0 a  $2\pi$  como lo ilustra la Figura 4.4.1.

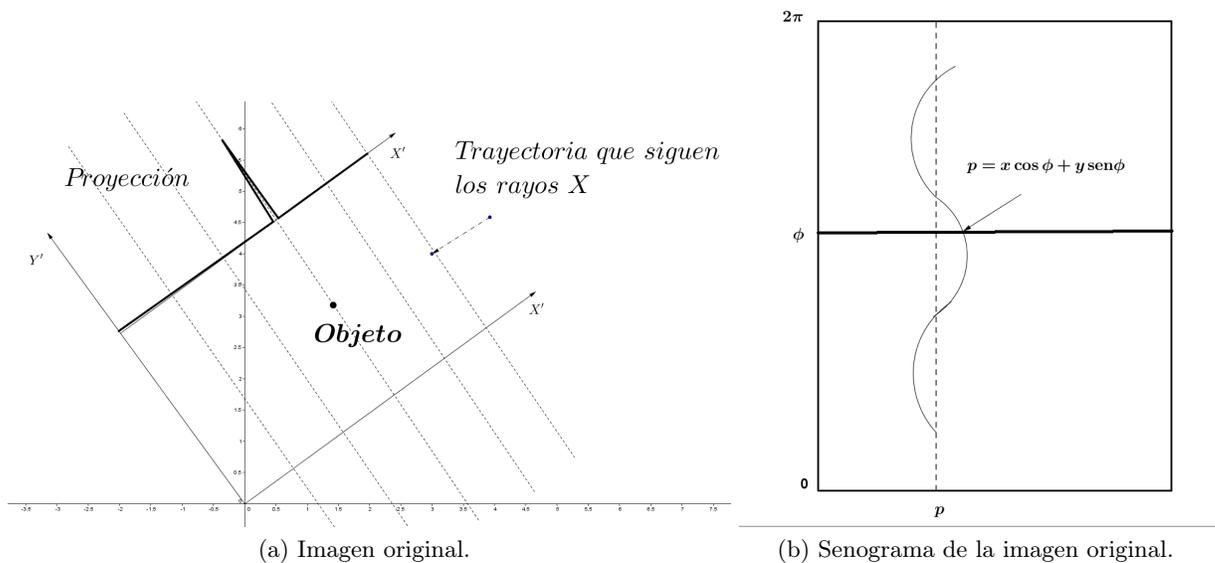


Figura 4.4.1: Representación de la imagen original y su respectivo senograma.

Si se denota como  $f(x, y)$  al mapa de atenuación del objeto que se quiere reconstruir y  $\check{f}(p, \phi)$  la proyección de  $f(x, y)$  a un ángulo  $\phi$ , entonces se tiene que  $p = x \cos \phi + y \sen \phi$ . De donde

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) ds,$$

la cual es la transformada de Radon bidimensional de la función  $f$  presentada en el Capítulo 1, la cual se puede reescribir como:

$$\check{f}(p, \phi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(p - x \cos \phi - y \sen \phi) dx dy.$$

Las proyecciones tomográficas pueden expresarse como la transformada de Radon del mapa de atenuaciones del objeto que se desea reconstruir, con lo cual el problema de la reconstrucción es equivalente a encontrar la inversa de la transformada de Radon.

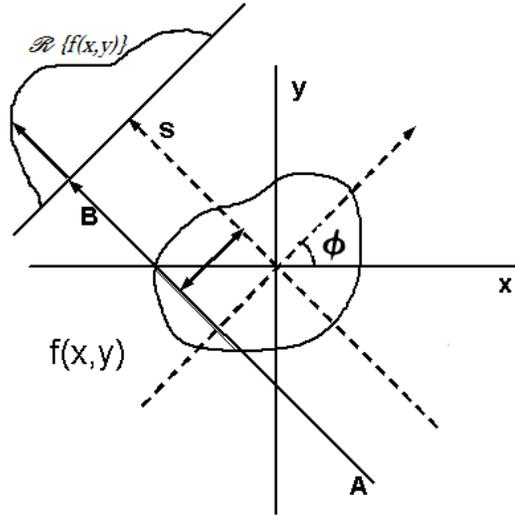


Figura 4.4.2: Diagrama que muestra la transformada de Radon o proyección de un objeto a un ángulo  $\phi$ .

Para ello recuérdese que la transformada de Fourier de la expresión anterior es:

$$\mathcal{F}_1\{\check{f}(p, \phi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(p, \phi) e^{-2\pi i p} dp.$$

El resultado del Ejemplo 12 mostrado en el Capítulo 2 es conocido como el *teorema de cortes de Fourier*, y establece que la transformada unidimensional de Fourier de una proyección  $\check{f}(p, \phi)$  de un objeto es igual a la transformada bidimensional de Fourier de la función  $f(x, y)$  evaluada en la recta de esta proyección, es decir:

$$\mathcal{F}_2\{f\} = \mathcal{F}_1\{\mathcal{R}(f)\}. \quad (4.5)$$

El teorema de cortes de Fourier indica que la proyección al ángulo  $\phi$  produce una sección transversal de la transformada bidimensional de Fourier del objeto original como lo ilustra la Figura 4.4.3.

La transformada inversa de Fourier de  $\mathcal{F}_2\{f\}$  deja como resultado la reconstrucción completa de  $f(x, y)$ , es decir:

$$f(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}\{\mathcal{F}_1\{\mathcal{R}(f)\}\}.$$

## 4.5. Algoritmo de retroproyección filtrada

Como se vió en la sección anterior, es posible recuperar a la función  $f$  usando el teorema de cortes de Fourier, sin embargo; al momento de implementar este método, resulta muy costoso en cuestiones computacionales debido a la gran cantidad de proyecciones que se realizan. Para esto,

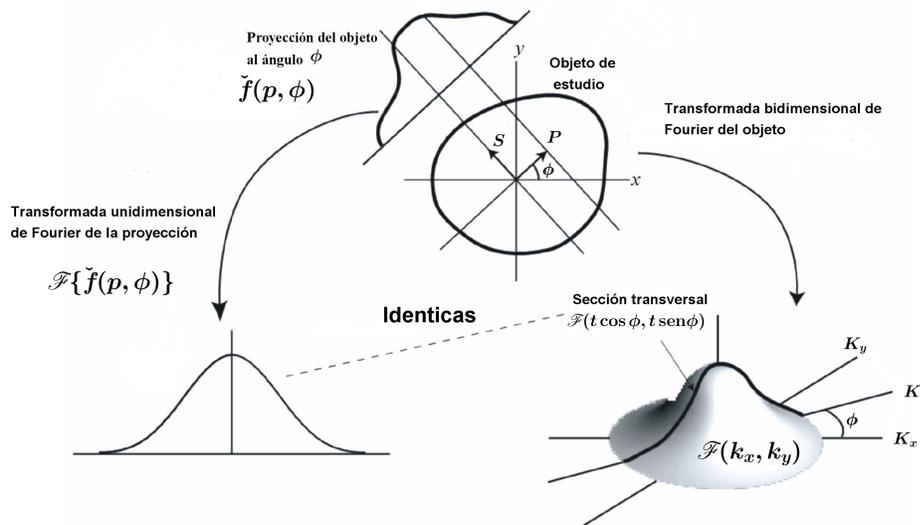


Figura 4.4.3: Ilustración del teorema de cortes de Fourier.

se han investigado diferentes técnicas de implementación de este tipo de reconstrucción. Entre ellos destaca el *algoritmo de retroproyección filtrada*, el cual se describirá en esta sección.

Recordando la fórmula de retroproyección filtrada obtenida en el Capítulo 3, se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_1\{\check{f}(p, \phi)\} e^{2\pi i t k} |k| dk d\phi \\
 &= \int_0^\pi Q_\phi(x \cos \phi + y \sen \phi) d\phi,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde:

$$Q_\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\phi(k) |k| e^{2\pi i k p} dk.$$

Por lo tanto es posible recuperar a la función  $f$  aplicando un filtro  $|k|$ . El objetivo de usar este filtro es recuperar las altas frecuencias que se han atenuado en el proceso de retroproyección. Con todo, el algoritmo de retroproyección filtrada puede implementarse como sigue:

- Aplicar la transformada de Fourier unidimensional a las proyecciones para obtener  $S_\phi(k)$ .
- Multiplicar  $S_\phi(k)$  por el filtro  $|k|$ .
- Calcular la transformada inversa de Fourier unidimensional de  $S_\phi(k)|k|$  para obtener las proyecciones filtradas  $Q_\phi(p)$ .
- Aplicar el operador de retroproyección a  $Q_\phi(p)$ .

Note que como  $Q_\phi(p) = \mathcal{F}_1^{-1}\{|k| \mathcal{F}_1\{\mathcal{R}(f)\}\}$ , entonces por el teorema de convolución  $Q_\phi(p)$

se puede expresar como

$$\begin{aligned} Q_\phi(p) &= \mathcal{F}_1^{-1}\{|k|\} * \mathcal{F}_1^{-1}\{\mathcal{F}_1\{\mathcal{R}(f)\}\} \\ &= \mathcal{F}_1^{-1}\{|k|\} * \mathcal{R}(f). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Observe que la función:

$$E(p) = \mathcal{F}_1^{-1}\{|k|\} = \int_{-\infty}^{\infty} |k| e^{2\pi i k p} dk$$

no existe para todos los valores de  $p$ . Para ello considere  $p = 0$ , luego  $E(0)$  es simplemente el área bajo la curva  $|k|$ , sin embargo, cuando  $k \rightarrow \pm\infty$  se tiene que  $E(0) \rightarrow \infty$ . Así, la ecuación (4.7) no puede aplicarse directamente.

Para ello suponga que la transformada de Fourier de la proyección es de soporte compacto. Bajo este supuesto, se tiene que:

$$Q_\phi(p) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S\phi(k) |k| e^{2\pi i k p} dk.$$

Esta ecuación indica que para calcular la proyección filtrada  $Q_\phi(p)$ , primero hay que calcular la transformada de Fourier unidimensional de la transformada de Radon para obtener  $S\phi(k)$ , multiplicándola después por  $|k|$  en el rango de  $(-\Gamma, \Gamma)$  para posteriormente calcular la transformada inversa de Fourier unidimensional. Desafortunadamente en la práctica esto no es tan sencillo de realizar puesto que no es tan sencillo discretizar el filtro. Para asegurar un buen muestreo, el ancho de banda  $\Gamma$  tiene que satisfacer el criterio de muestreo de Nyquist ([14]):

$$\Gamma = \frac{1}{2\delta} \text{ ciclos/mm},$$

donde  $\delta$  es el intervalo de muestreo de la proyección en milímetros. Bajo esta condición, se puede definir la función  $H(w)$  como:

$$H(w) = \begin{cases} |w|, & \text{si } |w| < \Gamma; \\ 0, & \text{si } |w| \geq \Gamma, \end{cases}$$

cuya transformada inversa de Fourier es la función:

$$\begin{aligned} h(p) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} |w| e^{2\pi i k p} dk \\ &= \frac{-1 + \cos(2\pi p \Gamma) + 2\pi p \Gamma \text{sen}(2\pi p \Gamma)}{2p^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Mediante algunos cálculos se ve que la función  $h$  puede expresarse como

$$h(p) = \frac{1}{2\delta^2} \left( \frac{\text{sen}(2\pi p \Gamma)}{2\pi p \Gamma} \right) - \frac{1}{4\delta^2} \left( \frac{\text{sen}(\pi p \Gamma)}{\pi p \Gamma} \right)^2. \quad (4.8)$$

Dado que la función  $H(w)$  es una función par en la variable  $w$ ,  $h(p)$  también es una función par

([14],[15]). Con todo, la ecuación (4.6) queda como:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-p_m}^{p_m} \check{f}(p', \phi) h(p - p') dp', \quad (4.9)$$

donde  $p_m$  es el valor a partir del cual se tiene  $\check{f}(p', \phi) = 0$  para todo  $p'$  tal que  $|p'| > p_m$ . Aquí se usa el hecho de que  $f$  es de soporte compacto. Dado que en las computadoras los cálculos de esta fórmula de retroproyección filtrada se realizan mediante valores enteros múltiplos de  $\delta$ , entonces sustituyendo  $t = n\delta$  en la ecuación (4.8) se tiene:

$$h(n\delta) = \begin{cases} 1/4\delta^2, & \text{si } n = 0; \\ 0, & n \text{ par}; \\ -1/(n\pi\delta)^2, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

En resumen, en esta sección se analizó la fórmula de retroproyección filtrada, observando que aunque teóricamente es posible reconstruir a la función  $f$ , en la aplicación resulta complejo aplicarla debido a la naturaleza de trabajar con un número finito de proyecciones y la discretización del kernel truncado  $|k|$ .

## 4.6. Reconstrucción de geometría en abanico

El algoritmo de retroproyección filtrada dado en la sección anterior se establece inicialmente para una geometría paralela. Sin embargo, ha de modificarse para aplicarlo a la geometría en abanico (*fanbeam*). La geometría *fanbeam* puede ser equiangular o equiespaciada; en la primera, el detector está dividido en módulos concéntricos con respecto a la fuente de rayos X, de forma que el espaciado angular entre muestras es el mismo como se ve en la Figura 4.6.1. En la geometría equiespaciada, los detectores ocupan una línea y están separados una distancia fija entre ellos, que no mantiene un ángulo igual entre ambos (con respecto al punto fuente) como lo ilustra la Figura 4.6.2.

Por tanto, para aplicar directamente la reconstrucción, es necesario convertir las proyecciones *fanbeam* en proyecciones paralelas, o bien derivar directamente una fórmula de reconstrucción. En esta sección se da una forma alternativa del método de retroproyección filtrada discutida en la sección anterior pero ahora para una geometría *fanbeam* equiangular. Se denota como  $\check{q}(\gamma, \beta)$  a la proyección *fanbeam* donde  $\beta$  es el ángulo formado por el iso-rayo (un rayo imaginario que conecta la fuente con el centro de coordenadas) y el eje  $y$ , y  $\gamma$  es el ángulo formado por un rayo X y el iso-rayo (ver Figura 4.6.3). Recordando que en la geometría paralela un rayo queda determinado especificando  $p$  y  $\phi$  entonces se tiene la siguiente relación.

$$\begin{aligned} \phi &= \beta + \gamma \\ p &= D \text{ sen} \gamma, \end{aligned} \quad (4.10)$$

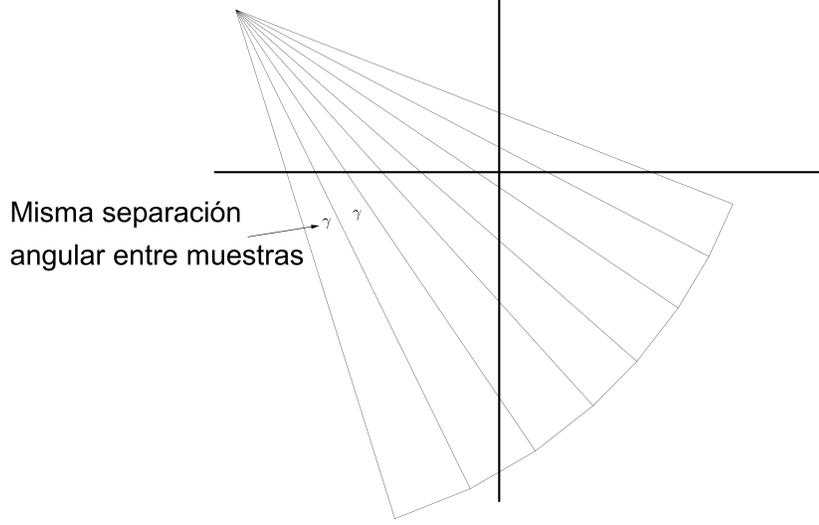


Figura 4.6.1: Geometría *fanbeam* equiangular.

donde  $D$  es la distancia de la fuente al centro de coordenadas.

Para proyecciones paralelas se obtuvo la fórmula de retroproyección filtrada dada por la ecuación (4.9), es decir:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-p_m}^{p_m} \check{f}(p', \phi) h(p - p') dp' d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_{-p_m}^{p_m} \check{f}(p', \phi) h(x \cos \phi + y \sin \phi - p') dp' d\phi. \end{aligned} \quad (4.11)$$

La ecuación anterior se puede modificar para incluir todas las proyecciones hasta  $2\pi$ :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-p_m}^{p_m} \check{f}(p', \phi) h(x \cos \phi + y \sin \phi - p') dp' d\phi.$$

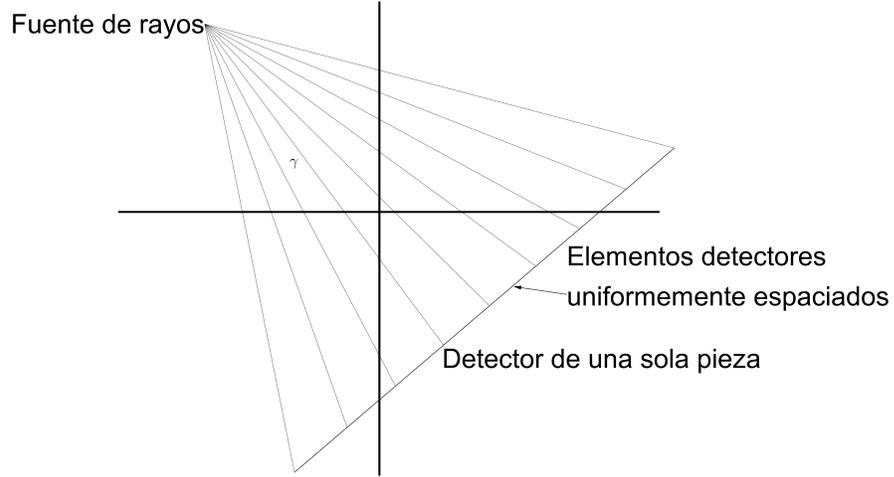
Expresando esta ecuación en coordenadas polares, se tiene:

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-p_m}^{p_m} \check{f}(p', \phi) h(r \cos(\phi - \theta) - p') dp' d\phi.$$

Sustituyendo  $p = D \sin \gamma$  y  $\phi = \beta + \gamma$  en la ecuación anterior y notando que  $dp d\phi = D \cos \gamma d\gamma d\beta$

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{2\pi - \gamma} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \check{q}(\gamma, \beta) h(r \cos(\beta + \gamma - \theta) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta, \quad (4.12)$$

donde  $\gamma_m$  es el máximo valor de  $\gamma$  para el cual se cumple  $\check{q}(\gamma, \beta) = 0$ . Claramente se ve que  $\gamma_m = \sin^{-1}(p_m/D)$ , ahora como la función que depende de  $\beta$  es periódica de periodo  $2\pi$ , los límites de integración  $-\gamma$  y  $(2\pi - \gamma)$  pueden cambiarse por 0 y  $2\pi$ , respectivamente:

Figura 4.6.2: Geometría *fanbeam* equiespaciada.

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \check{q}(\gamma, \beta) h(r \cos(\beta + \gamma - \theta) - D \operatorname{sen} \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta, \quad (4.13)$$

Dado que el argumento de la función  $h$  no está expresado en forma de convolución, se puede reescribir como

$$r \cos(\beta + \gamma - \theta) - D \operatorname{sen} \gamma = r \cos(\beta - \theta) \cos \gamma - \operatorname{sen} \gamma (r \operatorname{sen}(\beta - \theta) + D), \quad (4.14)$$

esto con el fin de escribir la ecuación (4.13) en una forma que pueda ser fácilmente implementada en una computadora. Ahora si se denota por  $L$ , la distancia de la fuente a un punto arbitrario  $(x, y)$  en el rayo  $X$  y  $\gamma'$ , el ángulo entre el iso-rayo y el rayo  $X$  como lo ilustra la Figura 4.6.4. Note que  $L$  depende de 3 parámetros,  $\beta$ ,  $r$  y  $\theta$ . Se ve fácilmente que

$$\begin{aligned} L \cos \gamma' &= D + r \operatorname{sen}(\beta - \theta), \\ L \operatorname{sen} \gamma' &= r \cos(\beta - \theta). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Luego, sustituyendo la ecuación (4.15) en la ecuación (4.14), se tiene:

$$r \cos(\beta + \gamma - \theta) - D \operatorname{sen} \gamma = L \operatorname{sen}(\gamma' - \gamma),$$

de donde nuevamente al sustituir en la ecuación (4.13):

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \check{q}(\gamma, \beta) h(L \operatorname{sen}(\gamma' - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma d\beta. \quad (4.16)$$

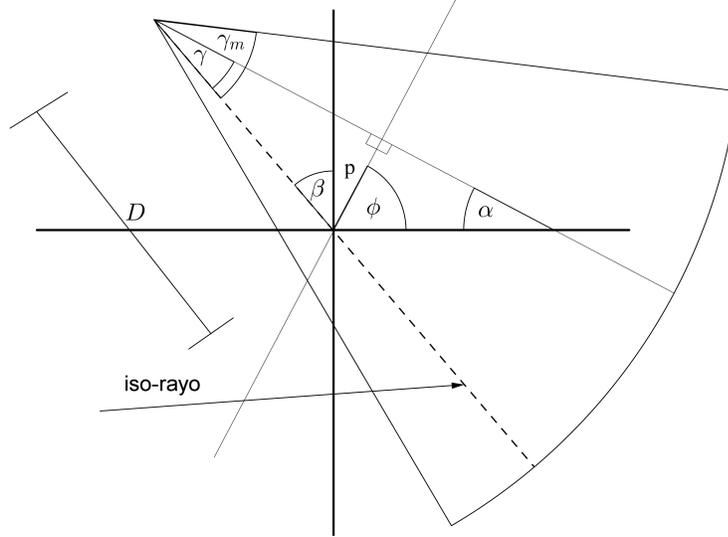


Figura 4.6.3: Geometría *fanbeam* equiangular para un rayo arbitrario.

Ahora se expresa a la función  $h(L \operatorname{sen} \gamma' - \gamma)$  en términos de  $h(t)$ , para ello recuerde que:

$$\begin{aligned} h(L \operatorname{sen} \gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} |k| e^{2\pi i k L \operatorname{sen} \gamma} dk \\ &= \left( \frac{\gamma}{L \operatorname{sen} \gamma} \right)^2 h(\gamma), \end{aligned}$$

donde se usó el cambio de variable  $k' = (kL \operatorname{sen} \gamma)/\gamma$ . Con todo la ecuación (4.13) queda como:

$$f(r, \theta) = \frac{1}{L^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \check{q}(\gamma, \beta) h''(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta, \quad (4.17)$$

donde:

$$h''(\gamma) = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\operatorname{sen} \gamma} \right)^2 h(\gamma).$$

Con esta fórmula de retroproyección para una geometría *fanbeam* equiangular se termina esta sección, donde una vez más se observa la complejidad de hallar una fórmula para la transformada inversa de Radon. Al lector interesado en saber cómo se construye una fórmula de retroproyección para una geometría *fanbeam* equiespaciada puede consultar ([14], [16]).

## 4.7. Otros tipos de reconstrucción

Hasta ahora se han analizado fórmulas de reconstrucción para las geometrías en paralelo y *fanbeam*, sin embargo los tomógrafos más recientes utilizan ya sea la geometría *cone-beam* o la geometría helicoidal. En el caso de la geometría *cone-beam*, la integral se realiza sobre planos por lo que en cuestiones computacionales, las medidas se obtienen en una matriz de detectores. La

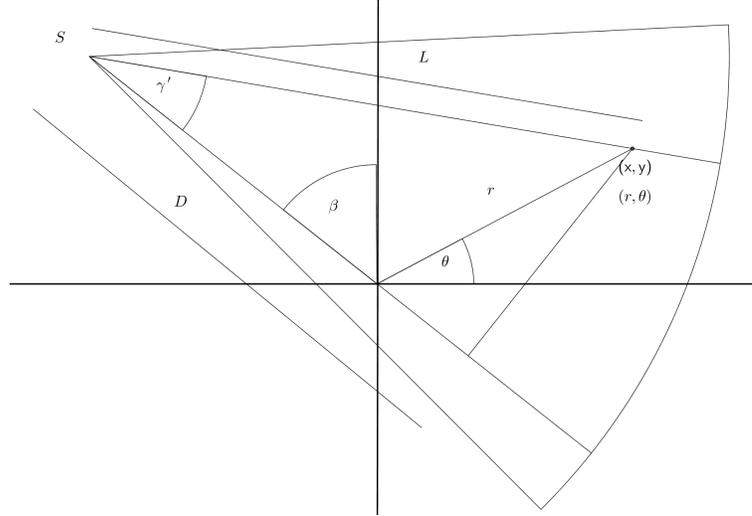


Figura 4.6.4: Geometría para describir un punto arbitrario  $(x, y)$  en un rayo X.

reconstrucción de geometría *cone-beam* es compleja, siendo uno de los algoritmos más conocidos el llamado algoritmo FDK para una configuración de detector plano ([14]). Este algoritmo fue propuesto en 1984 por Feldkamp, Davis y Kress ([18]), y corresponde a la extensión tridimensional de un algoritmo de retroproyección filtrada para proyecciones *fanbeam*.

Existe otro tipo de reconstrucción: los algoritmos de reconstrucción iterativos. Se trata de métodos que necesitan un tiempo mayor de reconstrucción con respecto a los analíticos. En ellos se propone un objeto  $f^i$  en forma de vector y se calculan las proyecciones  $p^i$  correspondientes al objeto propuesto, comparándolas después con las proyecciones originales medidas en el detector  $p^0$ . El objeto propuesto  $f^{i+1}$  se actualiza con base en la diferencia de las proyecciones.

Matemáticamente se tiene el siguiente sistema:

$$p^i = Af^i + e, \quad (4.18)$$

donde  $A$  es una matriz que depende de la geometría del sistema, la respuesta del detector y otros parámetros físicos del tomógrafo en cuestión y  $e$  es el error inducido por factores de ruido. Note que la reconstrucción tomográfica es la inversión del sistema (4.18), es decir, determinar el objeto  $f^i$  a partir de sus proyecciones  $p^i$ . El principal problema es que las proyecciones están compuestas de dos términos:  $Af^i$  y el ruido  $e$ . Dado que el ruido es algo desconocido es imposible separarlo de la señal e invertir la expresión. Así, con este proceso iterativo se produce una secuencia  $f_1, \dots, f_n$  que se espera converja a un valor óptimo  $f^{opt}$ , basado en una regla de optimización comparando  $p^i$  con  $p^0$ .

Así mismo existen también métodos estadísticos empleados para resolver el problema de reconstrucción de imágenes por métodos iterativos, tal como el método de máxima verosimilitud el cual se basa en la siguiente regla de Bayes:

$$P(f|p) = \frac{P(p|f)p(f)}{P(p)},$$

donde, dado el conjunto de proyecciones  $p$  debe encontrarse la distribución de atenuaciones  $f$  que maximice la probabilidad  $P(f|p)$ .

## 4.8. Estudios actuales

En esta sección se mencionan algunos tomógrafos hechos de 1980 a la fecha. En cuanto a la tomografía se plantea la idea de construir tomógrafos de múltiples fuentes de rayos X, entre ellos destaca la tomografía de doble fuente (DSCT, por sus siglas en inglés *Dual Source Computed Computed Tomography*) que fue recientemente introducida por Siemens en el 2005. Este escáner cuenta con dos fuentes de rayos X orientados de forma perpendicular. Como ha de suponerse, el hecho de utilizar las dos fuentes simultáneamente permite que la adquisición de proyecciones de un objeto se realicen de una manera más rápida. Aunque se ha considerado la posibilidad de crear un tomógrafo de tres fuentes, resulta que su costo computacional es elevado además de contar con aplicaciones muy específicas. Una variación de la tomografía de dos fuentes es la tomografía de dos energías (DECT, del inglés *Dual Energy Computed Tomography*) en la cual se aplican dos voltajes distintos. Ahora, una propuesta diferente para usar múltiples fuentes de rayos X es a través de una geometría inversa (IGCT, del inglés *Inverse Geometry Computed Tomography*), la cual consiste en proponer uno o varios detectores y múltiples fuentes de rayos X colocados en un arreglo lineal. Las ventajas que se tienen son adquisición con mayor cobertura volumétrica además de minimizar la dosis de radiación dependiendo de la región anatómica a estudiar. Una pregunta que se puede formular es ¿porqué no se puede lograr una mejor resolución espacial y temporal? La respuesta no es tan sencilla ya que depende de varios factores tanto físicos como tecnológicos, entre ellos se tiene que la mayor velocidad de rotación alcanzada por el *gantry* es de 3 vueltas por segundo, además de que a mayor resolución se tiene una mayor dosis de radiación y si se quiere procesar a una mayor resolución espacial, la cantidad de información a procesar sería mucha y haría más tardado el proceso de reconstrucción.

## Capítulo 5

# Conclusiones

1. Matemáticamente, el problema de reconstrucción de imágenes es un problema muy complicado ya que se necesitan conocimientos de distintas áreas entre ellas el análisis funcional, álgebra lineal, cálculo, ecuaciones diferenciales y análisis de Fourier. También es necesario que intervengan otras disciplinas tales como la Medicina, la Química, la Computación y la Física, por mencionar algunas.
2. Dada la complejidad de la fórmula de inversión de la transformada de Radon, se buscaron y se siguen buscando nuevos métodos de inversión, entre ellos la retroproyección y los métodos iterativos.
3. El problema de reconstrucción de una función  $f$  a partir de su transformada de Radon  $\check{f}$  tiene solución sólo si se conoce  $\check{f}$  de forma completa. Sin embargo, dado que en la práctica se pueden obtener un número finito de proyecciones, lo que se obtiene al implementar algún método de reconstrucción es solamente una aproximación del objeto de estudio. De ahí la necesidad de querer realizar mejores algoritmos de reconstrucción.
4. Un problema abierto en este mismo sentido es el investigar sobre la solución de problemas elípticos de valores en la frontera y que involucra el estudio de la teoría de distribuciones.



## Apéndice A

# Funciones generalizadas o distribuciones

**Definición A.0.1.** Una función  $f$  es *localmente integrable* en  $\mathbb{R}^n$  si  $\int_U |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$  existe para todo  $U \subset \mathbb{R}^n$  acotado. Si  $f$  es integrable en  $U \subset \mathbb{R}^n$  se dice que  $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$  donde  $\mathcal{L}_{loc}^1(U) = \{f : f \text{ es medible y } \int_U |f(\mathbf{x})| dx < \infty\}$ .

Si  $U = \mathbb{R}^n$  entonces se dirá que  $f$  es *absolutamente integrable* en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición A.0.2.** Sea  $f : T \rightarrow E$  una aplicación de un espacio topológico  $T$  en un espacio vectorial  $E$ . El *soporte de la función*  $f$  es :

$$\text{supp}(f) = \{x \in T : f(x) \neq 0\}.$$

Si la cerradura del soporte de la función  $f$  es compacta, se dirá que la función  $f$  es de soporte compacto.

*Nota 4.* Una función  $f$  es de soporte compacto si y sólo si existe un compacto  $K \subset T$  tal que  $f(x) = 0, \forall x \in T \setminus K$ .

*Ejemplo 14.* Si  $f(x) = \text{sen}(x)$  entonces

$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}} = \mathbb{R}$  el cual no es compacto.

*Ejemplo 15.* Si

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\infty < x \leq -1; \\ x + 1, & \text{si } -1 < x < 0; \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{si } 1 \leq x < \infty; \end{cases}$$

entonces  $\text{supp}(f) = [-1, 1]$ .

**Definición A.0.3.** Una *función de prueba* sobre un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es una función  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  que satisface:

- $\varphi \in C^\infty(U)$ ,

- Existe  $T \subset \mathbb{R}^n$  compacto con  $T \subseteq U$  tal que  $\varphi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus T$ .

*Observación 2.* Se denota al conjunto de funciones de prueba sobre  $U$  como  $\mathcal{D}(U)$ . En caso de tener  $U = \mathbb{R}^n$  se denotará  $\mathcal{D}(U)$  como  $\mathcal{D}$ .

*Observación 3.* Note que  $\mathcal{D}(U)$  es no vacío pues se puede considerar la función constante cero cuyo soporte es el vacío, el cual es compacto.

**Definición A.0.4.** Una *funcional lineal sobre  $\mathcal{D}(U)$*  es una transformación lineal  $T_f : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $T_f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle = \int_U f(x) \varphi(x) dx$ , donde  $f$  es una función localmente integrable en  $\mathbb{R}^n$  y  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ .

**Definición A.0.5.** Una *función generalizada o distribución sobre  $U$*  es una funcional lineal continua  $T : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Nota 5.* Se denotará al conjunto de todas las distribuciones sobre  $\mathcal{D}(U)$  como  $\mathcal{D}'(U)$ .

**Definición A.0.6.** Dadas dos distribuciones  $F_f$  y  $G_g$  se dice que

- Son iguales si los valores de los funcionales correspondientes coinciden para toda función de prueba  $\phi \in \mathcal{D}$ , es decir,  $\langle f(x), \phi(x) \rangle = \langle g(x), \phi(x) \rangle$ .
- Son distintas si los valores de los funcionales correspondientes son diferentes para al menos una función de prueba  $\phi \in \mathcal{D}$ , es decir,  $\langle f(x), \phi(x) \rangle \neq \langle g(x), \phi(x) \rangle$ .

**Teorema 6.** Sean  $f$  y  $g$  funciones localmente integrables tales que:

$$\langle f(x), \phi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi(x) dx = \langle g(x), \phi(x) \rangle$$

para toda función de prueba  $\phi \in \mathcal{D}$ , entonces  $f(x) = g(x)$ .

*Demostración.* Sea  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Calculando el funcional asociado se tiene:

$$\langle h(x), \phi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - g(x)] \phi(x) dx = 0,$$

de donde  $h(x) = 0$  y así  $f(x) = g(x)$ . □

## A.1. La distribución delta de Dirac

Tradicionalmente se refiere a la función delta de Dirac, abusando del lenguaje, como aquella transformación  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  dada por la siguiente expresión:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0; \\ \infty, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Por exigencias teóricas de la Física es necesario que esta función satisfaga:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0), \quad (\text{A.1})$$

para toda función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En particular, si  $f$  es la función constante 1, se debe cumplir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1. \quad (\text{A.2})$$

Note que no existe función alguna que satisfaga la condición anterior, por ello se optó a mitad del siglo XX, considerar a la delta de Dirac como el límite débil de una sucesión de funciones integrables cuya integral fuera 1.

Con todo surge la siguiente definición:

**Definición A.1.1.** La distribución delta de Dirac se considera como el límite débil de una sucesión de funciones integrables  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisfacen:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = f(0)$ , para toda función continua  $f$  en algún intervalo que contenga al 0.

*Ejemplo 16.* Considere a la sucesión de funciones  $\delta_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \notin [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]; \\ n, & \text{si } t \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]; \end{cases}$$

cada una de las cuales es Riemann-integrable y tiene integral 1. Como se puede notar, las funciones de la sucesión anterior no son continuas pero es posible hallar una sucesión de funciones continuas que cumplan las condiciones antes estipuladas.

*Ejemplo 17.* Considere a la sucesión de funciones  $\delta_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$\delta_m(x) = \frac{\text{sen}(mx)}{\pi x}.$$

Note que dicha sucesión de funciones no está definida en  $x = 0$  pero el hecho de que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1,$$

nos asegura la convergencia de dicha sucesión a la distribución delta de Dirac.

A continuación se mencionan algunas propiedades de la distribución delta de Dirac que son útiles en el desarrollo de la tesis.

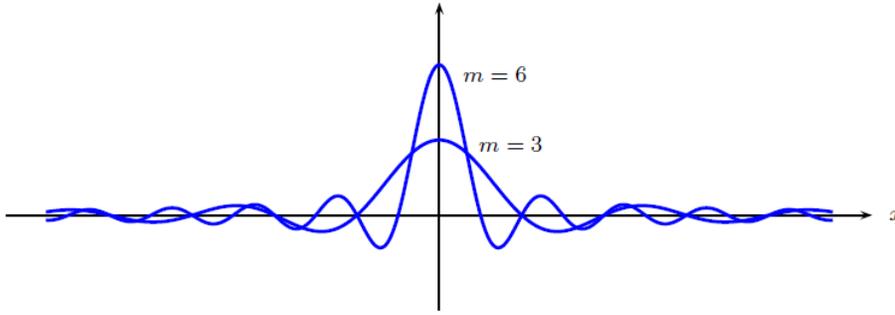


Figura A.1.1: Sucesión  $\delta_m(x) = \frac{\text{sen}(mx)}{\pi x}$ .

**Proposición 7.** Dada la distribución delta de Dirac, una función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}$ , se cumple:

1.  $\langle \delta(x - a), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$ .
2.  $\langle \delta(x), f(x) \rangle = \langle \delta(-x), f(x) \rangle$ .
3.  $\langle \delta(ax), f(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \delta(x), f(x) \rangle$ .

Para mayor información sobre la construcción de sucesiones delta de Dirac y la demostración de las afirmaciones anteriores se puede consultar [35].

*Ejemplo 18.* Veamos como se pueden simplificar algunas integrales usando la proposición anterior

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \delta(x - 2) dx = 2^3 = 8$ .
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} (3x^2 + 1) \delta(2x) = \frac{1}{|2|} (3(0) + 1) = \frac{1}{2}$ .

## A.2. Derivadas de distribuciones

Sean  $U$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f \in C^k(U)$ . Dado  $\alpha \leq k$  y  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle &= \int \partial^\alpha f(x) \varphi(x) dx \\ &= (-1)^\alpha \int f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \\ &= (-1)^\alpha \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \end{aligned}$$

donde  $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_i^\alpha}$  cuando dicha derivada parcial exista.

Se puede tomar esta ecuación para definir una derivada generalizada  $\partial^\alpha f$ , de la función generalizada  $f \in \mathcal{D}'(U)$ .

**Definición A.2.1.** Sean  $U$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f \in C^k(U)$ . Si  $|\alpha| \leq k$  y  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$  se define la *derivada generalizada de orden  $|\alpha|$  de la función generalizada  $f \in \mathcal{D}'(U)$*  como

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle .$$

*Nota 6.* Esta definición es válida ya que  $\text{supp}(\partial^\alpha f) \subset \text{supp}(f)$  (ver [35]).

*Ejemplo 19.* Considere la función de Heaviside dada por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Si  $\varphi \in \mathcal{D}$  entonces se tiene

$$\begin{aligned} \langle H(x), \varphi'(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi'(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx \\ &= -\varphi(0), \end{aligned}$$

pues  $\lim_{b \rightarrow \infty} \varphi(b) = 0$  dado que  $\varphi$  es de soporte compacto.

Por otro lado se tiene  $\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$ , de donde:

$$\langle H'(x), \varphi(x) \rangle = - \langle H(x), \varphi'(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle .$$

Por lo tanto,  $\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$ .

*Nota 7.* De acuerdo a la Definición A.2.1 y usando la Proposición 7 se observa que

$$\left\langle \frac{d}{dx} \delta(x-a), f(x) \right\rangle = - \langle \delta(x-a), f'(x) \rangle = -f'(a), \tag{A.3}$$

con  $f$  función de prueba.

En general se tiene para la distribución delta de Dirac el siguiente teorema:

**Teorema 7.** Dada  $f \in \mathcal{D}$  se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x-a) f(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(a).$$

Ahora, si  $T(x; a)$  representa a una distribución que depende del parámetro adicional  $a$ , se verá cómo es la derivada de  $T$  respecto a  $a$ .

Por definición de derivada se tiene que

$$\frac{d T}{d a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x; a+h) - T(x; a)}{h},$$

cuando dicho límite existe.

Así,

$$\left\langle \frac{dT}{da}, f \right\rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle T(x; a+h), f \rangle - \langle T(x; a), f \rangle}{h} \quad (\text{A.4})$$

En especial, cuando T representa la distribución  $\delta(x-a)$ , con  $a \in \mathbb{R}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\delta(x-a)}{da}, f \right\rangle &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \delta(x-a-h), f \rangle - \langle \delta(x-a), f \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= f'(a). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

**Proposición 8.** Para la distribución Delta de Dirac se tienen las siguientes igualdades:

1.  $\frac{\partial}{\partial a} \delta(x - \lambda a) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - \lambda a)$ .
2.  $\frac{\partial}{\partial b} \delta(ax - b) = |a| \frac{\partial}{\partial x} \delta(ax - b)$ .
3.  $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) = -x_j \frac{\partial}{\partial p} \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})$ .
4.  $\frac{\partial}{\partial a_j} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ .

Cabe recalcar que como la delta de Dirac es una distribución, las igualdades anteriores se dan de acuerdo a como se menciona en la Definición A.0.6.

## Apéndice B

# Problemas inversos

Normalmente en matemáticas se tiene una ecuación a la que se le quiere hallar su solución; informalmente, dada una causa y un modelo asociado, se desea conocer el efecto. Sin embargo, en la vida diaria los problemas prácticos no siempre vienen dados de esta manera, ya que en ocasiones se conoce el efecto de un modelo y se desconoce lo que causa dicho efecto. En otro caso, se conoce la causa y el efecto pero se quiere identificar el modelo asociado. A estos dos tipos de problemas se le conocen como *problemas inversos*, generalmente a los problemas del primer tipo se les nomina problemas de *reconstrucción* mientras que a los del segundo tipo se les denomina *problemas de identificación*.

En términos matemáticos, sean  $X, Y$  espacios normados o de Banach y  $T : X \rightarrow Y$  un operador. Dado el modelo  $T(x) = y$ , se pueden identificar 3 tipos de problemas:

**Problema Directo:** dados  $T$  y  $x \in X$ , hallar  $y \in Y$ .

**Problema de Reconstrucción:** dados  $T$  y  $y \in Y$ , hallar  $x \in X$ .

**Problema de Identificación:** dados  $x \in X$  y  $y \in Y$ , identificar  $T$ .

En el caso del problema de reconstrucción se quiere hallar  $x = T^{-1}(y)$  pero esto usualmente es complicado de resolver ya que en general, el operador  $T$  opera en espacios de dimensión infinita y en la mayoría de los casos el operador inverso  $T^{-1}$  no es continuo.

*Ejemplo 20.* Suponga que se tiene un cierto cuerpo en un espacio inaccesible. Suponga además que se puede iluminar este cuerpo desde diferentes direcciones y registrar su sombra. Así, se tiene el siguiente problema inverso: determinar la forma del cuerpo si las proyecciones de dicho cuerpo son conocidas (problema de reconstrucción).

### B.1. Problemas bien planteados y problemas mal planteados

**Definición B.1.1.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados o de Banach,  $T : X \rightarrow Y$  un operador no necesariamente lineal. Dado el modelo  $T(x) = y$ , el problema de reconstrucción se dice *bien planteado* en el sentido de Hadamard si se satisface:

1. *Existencia*: Para cada  $y \in Y$  existe  $x \in X$  tal que  $T(x) = y$ .
2. *Unicidad*: Para cada  $y \in Y$  existe a lo más un  $x \in X$  tal que  $T(x) = y$ .
3. *Estabilidad*: La solución  $x$  depende continuamente de  $y$ , es decir, para cada sucesión  $\{x_n\} \subset X$  tal que  $T(x_n) \rightarrow T(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se cumple que  $x_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Note que un problema bien planteado es equivalente a decir que el operador  $T$  es biyectivo y el operador  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  es continuo. Un problema se dirá *mal planteado* si al menos no se cumple una de las condiciones anteriores.

Los problemas inversos son en general mal planteados, particularmente inestables. La existencia y la unicidad de la solución sólo dependen de los espacios  $X, Y$  y del operador  $T$ , mientras que la estabilidad también depende de las consideraciones topológicas del problema, como lo son las normas que se escojan para  $X$  y para  $Y$ . En cuestión de aplicaciones, la estabilidad es una condición de vital importancia ya que si no se tiene, los errores que se tienen en la medición de los datos y de los métodos numéricos usados para aproximar la solución, hacen que dicha solución pueda no tener relación con la solución exacta.

Recuerde que  $\ell_2$  es el conjunto de todas las sucesiones  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Así, se tiene el siguiente ejemplo de un operador que no cumple con la condición de estabilidad.

*Ejemplo 21.* Dado el operador  $A : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  mediante

$$Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right),$$

se tiene que el operador inverso de  $A$  es dada por

$$A^{-1}y = (y_1, 2y_2, 3y_3, \dots, ny_n, \dots).$$

Considere  $y_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots)$ .

Observe que  $y_n \rightarrow 0$  mientras que  $\|A^{-1}y_n\|_2 = \|(0, \dots, \sqrt{n}, \dots)\|_2 = \sqrt{n} \rightarrow \infty$ , por lo que no existe estabilidad. Mas aún, si se toma  $y' = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots)$ , entonces el sistema  $Ax' = y'$  no tiene solución en  $\ell_2$ , pues  $y' = Ax' = A(1, 1, \dots, 1, \dots)$  pero  $x' \notin \ell_2$  ya que  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$  diverge.

**Definición B.1.2.** Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$ , con  $X, Y$  espacios normados, es un *operador compacto* si y sólo si la imagen de cualquier conjunto acotado  $A$  es un conjunto precompacto, es decir,  $\overline{T(A)}$  es compacto.

Note que en la definición anterior no se exige la continuidad del operador  $T$ , pero de hecho lo son dado que los conjuntos compactos en un espacio normado son conjuntos acotados.

**Teorema 8.** Sean  $X, Y$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  un operador compacto. Luego el operador inverso  $T^{-1}$  no es continuo a menos que la dimensión de  $X$  sea finita.

Note que el teorema anterior indica que la ecuación  $T(x) = y$ , donde  $T$  es un operador compacto, es mal planteada si  $X$  no es de dimensión finita.

## B.2. Mal planteamiento de la transformada de Radon

*Ejemplo 22.* Considere la ecuación integral de Fredholm de primer tipo:

$$T(u(x)) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy, \quad c \leq x \leq d, \quad (\text{B.1})$$

con  $T(u)$  y  $K(x, y)$  dados y  $u(y)$  desconocido. Suponga además que  $K(x, y), K_x(x, y), K_y(x, y) \in C([c, d] \times [a, b])$ ,  $T \in C[c, d]$  y  $u \in C[a, b]$ . El problema de hallar  $u(y)$  a partir de  $T$  y  $K$  es mal planteado pues falla la condición de estabilidad mencionada en (Apéndice B, Definición B.1.1). En efecto, considere la sucesión  $\{u_n\} \subset C[a, b]$  dada por  $u_n(y) = n \sin(n^2 y)$  y sea  $v_n(x) = \int_a^b K(x, y)u_n(y)dy$ .

Se tiene:

$$\begin{aligned} |v_n(x) - v_0(x)| &= \left| \int_a^b K(x, y)n \sin(n^2 y)dy \right| \\ &= \left| -\frac{K(x, y) \cos(n^2 y)}{n} \Big|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b K_y(x, y) \cos(n^2 y)dy \right| \\ &\leq \frac{k}{n} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde  $k$  no depende de  $n$ . Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n(x) - v_0(x)\| = 0,$$

es decir, para  $n$  suficientemente grande,  $v_n$  y  $v_0$  se encuentran cerca la una de la otra mientras que para  $u_n$  y  $u_0$  se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(y) - u_0(y)\| = \infty,$$

de donde el problema de hallar  $u(y)$  dados  $T(u)$  y  $K(x, y)$  es mal planteado.



## Apéndice C

# Señales y Sistemas

La teoría sobre señales y sistemas son de vital importancia en casi todos los campos de la ingeniería eléctrica y en muchas otras ingenierías y disciplinas científicas. En este apéndice se introducen algunos conceptos matemáticos importantes relacionados con la teoría de señales y sistemas. Para una lectura más a fondo sobre estos conceptos se puede consultar [24].

Una señal es una función que representa alguna cantidad física, y comúnmente contiene información sobre el comportamiento o la naturaleza del fenómeno a estudiar. Por ejemplo, en un circuito RC, la señal puede representar el voltaje que pasa por el capacitor, o la corriente que fluye en el resistor. Matemáticamente se tiene la siguiente definición

**Definición C.0.1.** Una señal es una función  $x$  que brinda información de algún fenómeno físico y que comúnmente varía con el tiempo denotada como  $x(t)$ .

Se pueden considerar en principio dos tipos de señales: las señales continuas, son aquellas en donde la variable  $t$  es una variable continua y las señales discretas, en donde la variable  $t$  solo toma valores discretos. Se denotarán las señales continuas y las señales discretas como  $x(t)$  y  $x[n]$  respectivamente.

*Ejemplo 23.* Considere la señal discreta  $x[n]$  dada por:

$$x[n] = \begin{cases} (1/2)^n, & \text{si } n \geq 0; \\ 0, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Note que los términos de dicha señal se pueden expresar como los términos de una sucesión formada por los valores de  $x[n]$ , es decir, se podría considerar a  $x[n]$  como:

$$x[n] = \{1, 1/2, 1/4, \dots, (1/2)^n, \dots\}$$

En este contexto se define un sistema como sigue:

**Definición C.0.2.** Un *sistema* es un modelo matemático de un proceso físico que relaciona dos señales: la señal de entrada y la señal de salida. Matemáticamente se tiene que si  $x$  y  $y$  son dos señales entonces el sistema es visto como una función de  $x$  en  $y$ , es decir,

$T\{x(t)\} = y(t)$ , donde  $T$  es un operador que representa una regla de correspondencia entre  $x$  y  $y$ .

Un sistema se dirá *invariante en el tiempo* si una traslación en la señal de entrada causa el mismo efecto en la señal de salida, es decir, si  $T\{x(t)\} = y(t)$  entonces  $T\{x(t - \tau)\} = y(t - \tau)$ .

Un ejemplo de un sistema invariante en el tiempo es el siguiente

*Ejemplo 24.* Sean  $x(t)$  y  $y(t)$  señales continuas. Si se define  $T\{x(t)\} = \frac{dx(t)}{dt}$  entonces  $T\{x(t - \tau)\} = \frac{d}{dt}x(t - \tau)$ , por otro lado  $y(t - \tau) = \frac{d}{dt}x(t - \tau)$ , por lo que el sistema es invariante en el tiempo. Un ejemplo de un sistema que no es invariante en el tiempo es el siguiente

*Ejemplo 25.* Sean  $x(t)$  y  $y(t)$  señales continuas. Si se define  $T\{x(t)\} = x(-t)$  entonces  $T\{x(t - \tau)\} = x(-(t - \tau)) = x(\tau - t)$  el cual es distinto de  $y(t - \tau) = x(-t - \tau)$ . Con lo que el sistema varía con el tiempo.

Ahora se definirá la respuesta de impulso o respuesta impulsiva de un sistema, el cual como se verá más adelante, desempeña un papel muy importante al querer calcular la salida  $y(t)$ .

**Definición C.0.3.** Se define la *respuesta de impulso*  $h$  de un sistema continuo  $T$ , como la respuesta del sistema cuando la entrada es  $\delta(t)$ , es decir,  $h(t) = T\{\delta(t)\}$ .

Dado que para una señal continua  $x(t)$  se cumple que:

$$x(t) = \int x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau,$$

la respuesta  $y(t)$  del sistema ante una entrada arbitraria  $x(t)$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} y(t) &= T\{x(t)\} \\ &= T\left\{\int x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right\} \\ &= \int x(\tau)T\{\delta(t - \tau)\}d\tau \\ &= \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= (x * h)(t). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Esta ecuación indica que un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo está completamente caracterizado por su respuesta de impulso.

En este punto cabe mencionar que no es sencillo visualizar el proceso de convolucionar dos funciones  $x$  y  $y$ . Para entender mejor este proceso, considere una señal continua  $x(t)$  y suponga que se quiere aproximar por una señal discreta  $\hat{x}(t)$  formada por una sucesión de pulsos como lo ilustra la Figura C.0.1.

Se define la función  $\delta_{\Delta}(t)$  como:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \text{si } 0 \leq t \leq \Delta; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

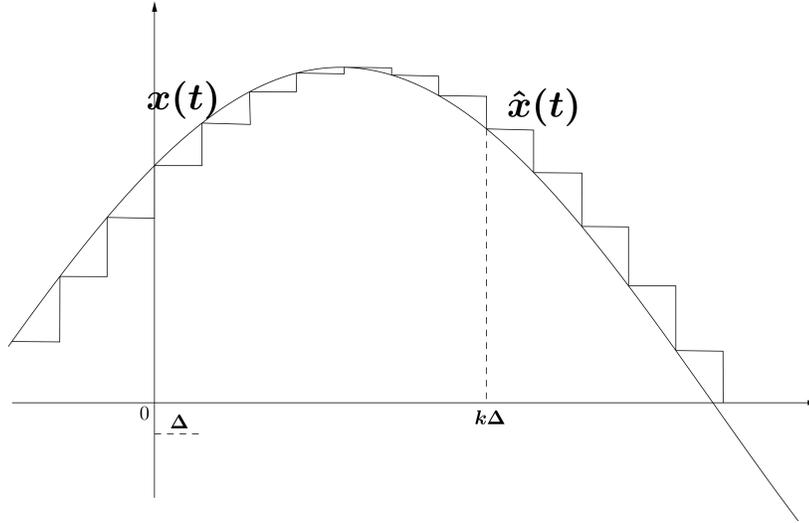


Figura C.0.1: Ilustración grafica de la señal  $x(t)$  y una aproximación  $\hat{x}(t)$ .

Entonces se tiene que la función  $x(t)$  se expresa por

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta. \quad (\text{C.2})$$

Observe que si  $\Delta \rightarrow 0$ , entonces  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ . Luego,  $k\Delta$  tiende a una variable  $\tau$ ,  $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$  tiende a la distribución  $\delta(t - \tau)$  y así la sumatoria dada por (C.2) se transforma en la siguiente integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

Suponga que para  $x(t)$  se tiene un sistema lineal  $T$  en el cual  $T\{x(t)\} = y(t)$ , para alguna salida  $y(t)$ . Ahora dado que el sistema es lineal se tiene que la salida  $y(t)$  se puede aproximar mediante la entrada  $x(t)$ , es decir:

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta, \quad (\text{C.3})$$

donde  $h_{\Delta}(t) = T\{\delta_{\Delta}(t)\}$ . Nuevamente al hacer tender  $\Delta$  a cero se tiene que la ecuación (C.3) se convierte en:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (\text{C.4})$$

En resumen, la entrada  $x(t)$  puede pensarse como una suma de impulsos escalonados y desplazados en el tiempo, donde el *peso* del impulso  $\delta(t - \tau)$  es precisamente  $x(\tau)d\tau$ . Con esta misma interpretación la ecuación (C.3) representa la superposición de las respuestas a cada uno de estos impulsos y por linealidad el peso de la respuesta  $h(t - \tau)$  al impulso desplazado  $\delta(t - \tau)$  también es  $x(\tau)d\tau$ .

Note que si el sistema no es invariante en el tiempo es necesario conocer  $h(t - \tau)$  para todo valor de  $t = \tau$ , con lo que  $h(t - \tau)$  es una familia de respuestas impulsivas. Por otro lado si el sistema es

invariante en el tiempo, basta con conocer una única respuesta de impulso y que por comodidad se suele elegir la respuesta de impulso aplicada en  $t = 0$  como lo ilustra la Figura C.0.2.

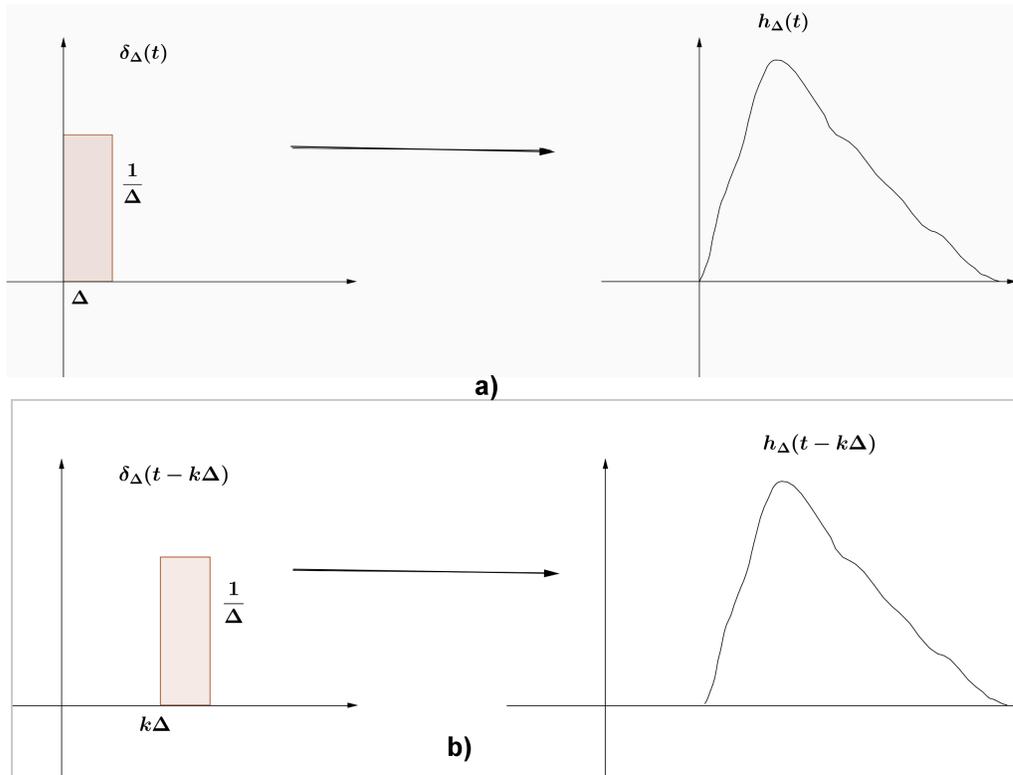


Figura C.0.2: Respuesta de impulso  $h$  de un sistema invariante en el tiempo.

En la integral de convolución de dos funciones  $x$  y  $h$ , los valores de los límites de integración cambian de acuerdo a la naturaleza de las funciones a integrar. Si se supone que  $x$  y  $h$  son de soporte compacto, y se supone que  $x$  se anula fuera de  $[L_1, U_1]$  y  $h$  se anula fuera de  $[L_2, U_2]$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} (x * h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{\text{máx } \{L_1, L_2\}}^{\text{mín } \{U_1, U_2\}} x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] BEJARANO, J. S. Análisis de fenómenos de ondas no suaves mediante el método asintótico débil. Master's thesis, División de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Sonora, 2009.
- [2] BERTERO, M., AND BOCCACCI, P. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. Taylor&Francis, 1998.
- [3] BRACEWELL, R. N. *The Fourier transform and its applications*. McGraw-Hill, 2000.
- [4] CLACK, R. Towards a complete description for three dimensional filtered backprojection. *Physics in Medicine and Biology* 37(3) (1992), 645–660.
- [5] CORMACK, A. Representation of a function by its line integrals with some radiological applications. *Journal of Applied Physics* 34 (1963), 2722 –2727.
- [6] EPSTEIN, C. L. *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. Pearson Prentice Hall, 2003.
- [7] FARIDANI, A. Introduction to the Mathematics of Computed Tomography, Inverse Problems. *MSRI Publications* 47 (2003), 1–46.
- [8] FRANCO FERREIRA, L. *Desarrollo, puesta en marcha y caracterización de un sistema de tomografía Axial computarizada para ensayos no destructivos*. Servicio de Publicacións e Intercambio Científico, 2008.
- [9] GINDIKIN, S. G. Some notes on the Radon transform and integral geometry. *Springer* 1 (1992), 23–32.
- [10] GIRALDO, J. R., CLAVIJO, C. A., AND MCCOLLOUGH, C. Tomografía computarizada por rayos x: Fundamentos y actualidad. *Revista de Ingeniería Biomédica* 2 (2008), 13–31.
- [11] HELGASON, S. *The Radon transform*, second ed. Birkhäuser, Pearson Prentice Hall, 1999.
- [12] HILBERT, D., AND COURANT, R. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience, 1962.
- [13] HOUNSFIELD, G. Computed medical imaging. *Science* 1 (1980), 22–28.
- [14] HSIEH, J. *Computed Tomography: principles, design, artifacts and recent advances*. Washington, SPIE Press, 2003.

- 
- [15] HSU, H. P. *Fourier analysis*. Simon and Schuster, 1970.
- [16] KAK, A. C., AND SLANEY, M. *Principles of computerized tomographic imaging*. New York, IEEE Press, 1988.
- [17] KIRSCH, A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlang, New York, 2011.
- [18] L. A. FELDKAMP, L. C. D., AND KRESS, J. W. Practical cone-beam algorithm. *J. Opt. Soc. Am.* 1 (1984), 612–619.
- [19] MAHSA, N. A., AND ALIREZA, S. Analytical image reconstruction methods in emission tomography. *Biomedical Science and Engineering* 6 (2013), 100–107.
- [20] MARR, R. B. *An overview of image reconstruction in Ill-Posed Problems: Theory and Practice*. M. Z. Nashed, 1982.
- [21] MUÑIZ, S. H., AND CASANOVAS, M. M. Introducción a la tomografía computarizada. *Revista española de Medicina Nuclear e Imagen Molecular* 25 (2006), 206–214.
- [22] NATTERER, F. *The Mathematics of Computerized Tomography*, 2 ed. John Wiley & Sons, 1986.
- [23] ORLOV, S. S. Theory of three dimensional reconstruction. conditions for a complete set of projections. *Sov. Phys. Crystallogr* 20(3) (1975), 312–314.
- [24] P. HSU, H. *Signals and Systems*, 3 ed. McGraw-Hill, 2013.
- [25] PAPOULIS, A. *Sistemas digitales y analógicos, transformadas de Fourier, estimación espectral*. Marcombo, 1985.
- [26] PÉREZ, J. A. La distribución delta. *Sociedad Matemática Mexicana* 38 (2003), 1–14.
- [27] R. CLARCK, D. T., AND DEFRISE, M. Algorithm for the three-dimensional reconstruction incorporating cross-plane rays. *IEEE Trans. Med. Imag.* MI-8(1) (1989), 32–42.
- [28] RUDIN, W., AND GARCÍA, L. *Análisis funcional*. Reverté, 1979.
- [29] SEELEY, R. T. *Introducción a las series e integrales de Fourier*. Reverté, 2004.
- [30] SHEPP, L., AND LOGAN, B. The Fourier reconstruction of a head section. *Transactions on nuclear science* 1 (1974), 21–43.
- [31] SMITH, K. T., SOLMON, D. C., AND WAGNER, S. L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs. *American Mathematical Society* 83 (1977), 1227–1270.
- [32] SOLMON, D. C. The X-Ray Transform. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 56 (1976), 61–83.
-

- 
- [33] STANLEY DEANS, R. *The Radon transform and some of its applications*. University of South Florida, 1983.
- [34] TOFT, P. *The Radon Transform: Theory and Implementation*. Department of Mathematical Modelling, Section for Digital Signal Processing, 1996.
- [35] VLADIMIROV, V. *Methods of the Theory of Generalized Functions*. Taylor & Francis, 2002.
-