



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

“El teorema de Fary-Milnor”

TESIS

que para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

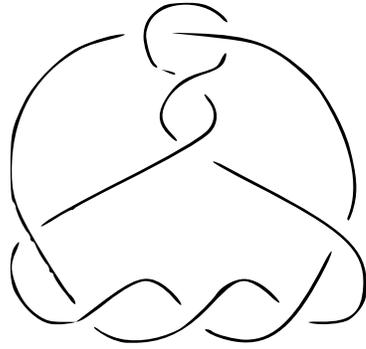
presenta

OMAR SÁNCHEZ ANTONIO

director de tesis

DR. VÍCTOR A. CRUZ Y DR. RICARDO ROSAS

Huajuapán de León, Oaxaca, Julio 2014.



EL TEOREMA DE FARY-MILNOR

A mi familia

PRÓLOGO

“Les recuerdo que matemático no es el nombre de un talento sino de una pasión.”

– Alberto Barajas

La *Geometría Diferencial* es el estudio de la geometría empleando las herramientas de cálculo, análisis, álgebra, topología, entre muchas otras. Se puede dividir en dos vertientes: la primera, la que estudia las propiedades locales de las curvas y superficies, y se llama *geometría diferencial local* o *clásica*; y la segunda, que estudia la influencia de las propiedades locales sobre el comportamiento de toda una curva o superficie llamada *geometría diferencial global*.

El teorema de Fary-Milnor es un maravilloso ejemplo del estudio de la geometría diferencial global, pues bajo ciertas condiciones nos da una conexión entre la *curvatura* de la curva y su estructura. Este teorema fue probado por J. Milnor e I. Fary en 1949.

La historia cuenta que en 1947, J. Milnor era estudiante en la Universidad de Princeton y se encontraba tomando un curso de geometría diferencial impartido por A. Tucker. Él había leído que W. Fenchel y más tarde K. Borsuk, habían probado el siguiente resultado

TEOREMA DE FENCHEL. *La curvatura total de una curva cerrada en el espacio es siempre al menos 2π , la igualdad es válida sólo si la curva acota una región convexa en el plano.*

K. Borsuk, famoso topólogo polaco, se preguntó acerca de la curvatura total en el caso de una curva anudada. J. Milnor pensó el problema algunos días y llegó a la conclusión de que la curvatura total es siempre mayor que 4π . Esto lo logró con sólo 18 años de edad. Mientras tanto en Francia, el matemático húngaro I. Fary demostró de forma independiente y casi al mismo tiempo este mismo resultado. No se conocen muchos detalles sobre la historia de la demostración de I. Fary. Este resultado se conoce hoy en día como el teorema de Fary-Milnor.

TEOREMA DE FARY-MILNOR. *La curvatura total de una curva anudada en el espacio es mayor o igual que 4π .*

En 2012 en una entrevista J. Milnor hizo el siguiente comentario acerca de su teorema: “*pienso que hice un trabajo muy pobre explicando la prueba en el artículo, pero uno tiene que aprender cómo explicar las matemáticas*” véase [24].

Motivados por las diferentes técnicas que existen para la demostración de este teorema y la respuesta de J. Milnor, este trabajo está dedicado al estudio del teorema de Fary-Milnor y algunas de sus diferentes pruebas.

Dividimos esta tesis en 6 capítulos. El primer capítulo tiene gran influencia del libro de W. Santos y H. Alencar [2], y se presentan las herramientas necesarias para el estudio de las curvas en el plano. Por ejemplo, trataremos la *suavidad*, *regularidad*, y el que estén *parametrizadas por longitud de arco*.

En el capítulo 2 se motiva el estudio de la propiedad más importante de las curvas planas, la *curvatura*, se presentan algunas de sus diferentes interpretaciones. Se estudia además, la curvatura con signo y se muestra que esta última tiene una conexión con la convexidad de una curva cerrada.

El capítulo 3 es un breve estudio de las curvas en el espacio. Se muestra cómo definir un marco ortonormal en un punto sobre la curva que determina la construcción de la misma.

Para el capítulo 4, se presenta el estudio de la prueba original del teorema de Fary-Milnor utilizada por J. Milnor en [16]. El resultado principal en este capítulo es mostrar la conexión que existe entre el *número de puentes* de una curva y su *curvatura total*.

Durante el capítulo 5 se presenta la técnica empleada por S. S. Chern en [5], la demostración de S. S. Chern tiene como base la fórmula de Cauchy-Crofton, se muestran además algunas consecuencias de la fórmula de Cauchy-Crofton como el teorema de Fenchel.

Finalmente, en el capítulo 6 se hace una demostración del teorema de Fary-Milnor usando la teoría de superficies y cuya idea se le debe a M.P. Do Carmo dada por él en [6]. El resultado principal en este capítulo es mostrar que la información de la *curvatura Gaussiana* de una superficie tubular alrededor de una curva se ve reflejada en la *curvatura total* de la curva.

Agradecimientos. De las muchas cosas que le debo a mi familia, su apoyo durante estos cinco años, es lo principal. A V. Cruz y a O. Palmas, por haberme adentrado en el mundo de la geometría, a A. Maceda por sus grandes comentarios en la revisión de la tesis, así como el gran apoyo profesional de J. L. Hernández y R. Rosas en la redacción de la tesis. Con respecto a la edición de esta tesis gran parte se deben a los comentarios de I. García. A los profesores y compañeros de la UTM por tantas experiencias que compartimos.

*Omar Sánchez Antonio,
Julio 2014.*

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO, PÁG. III

LISTA DE SÍMBOLOS, PÁG. VII

- 1 CURVAS, PÁG. 1
 - 1.1 *Curvas planas*, pág. 1
 - 1.2 *Curvas suaves*, pág. 2
 - 1.3 *Reparametrizaciones y longitud de arco de una curva*, pág. 5

- 2 CURVATURA , PÁG. 8
 - 2.1 *La curvatura como el radio de la circunferencia límite*, pág. 8
 - 2.2 *Curvatura como variación de ángulos*, pág. 11
 - 2.3 *La curvatura como la circunferencia en dos puntos*, pág. 12
 - 2.4 *Curvatura con signo*, pág. 14

- 3 CURVAS EN EL ESPACIO, PÁG. 21

- 4 CURVATURA TOTAL Y NÚMERO DE PUENTES, PÁG. 25
 - 4.1 *Curvatura total de un polígono*, pág. 25
 - 4.2 *El número de puentes de un polígono*, pág. 29
 - 4.3 *Curvatura total de una curva*, pág. 34

- 5 LA FÓRMULA DE CAUCHY-CROFTON, PÁG. 42
 - 5.1 *La fórmula de Cauchy-Crofton según S.S. Chern*, pág. 42
 - 5.2 *La fórmula de Cauchy-Crofton vía la fórmula de coárea*, pág. 45
 - 5.3 *Consecuencias de la fórmula de Cauchy-Crofton*, pág. 48

- 6 LA PRUEBA DE M.P. DO CARMO, PÁG. 51
 - 6.1 *Superficies*, pág. 51
 - 6.2 *Primera y segunda forma fundamental*, pág. 53
 - 6.3 *Superficie tubular*, pág. 56

CONCLUSIONES, PÁG. 62

LISTA DE SÍMBOLOS

TÉRMINO	SIGNIFICADO
\mathbb{Z}	Enteros
\mathbb{N}	Naturales
\mathbb{R}	Reales
\langle , \rangle	Producto interior
$\ \cdot \ $	Norma euclidiana
$ $	Valor absoluto
\times	Producto cruz
$\det(A)$	Determinante de A
δ_{ij}	Delta de Kronecker
\mathbb{S}^2	Esfera unitaria en \mathbb{R}^3
$\text{card } A$	Cardinalidad de A
$f _B$	Función restringida a un subconjunto
$\mathcal{C}^k(I)$	Conjunto de funciones de orden k en I
$\mathcal{C}^\infty(I)$	Conjunto de funciones suaves en I
k	Curvatura de una curva
\tilde{k}	Curvatura con signo
τ	Torsión
pq	Segmento que une a p y q
CT	Curvatura total de un polígono
\overline{CT}	Curvatura total normalizada
κ	Curvatura total de una curva
μ	Número de puentes
L_α	Longitud de arco
B_u	Círculo máximo con polo u
H_u	Recta generada por u
E, F, G	Coef. de la primera forma fundamental
e, f, g	Coef. de la segunda forma fundamental
N	Aplicación de Gauss
K	Curvatura Gaussiana
S	Superficie regular
$\mathcal{N}(u)$	$\text{card}(B_u \cap \alpha)$
$T_p S$	Espacio tangente en $p \in S$
I_p	Primera forma fundamental
II_p	Segunda forma fundamental

§1. CURVAS

El propósito de este capítulo es el estudio de las curvas planas. Se introducen conceptos que se usan a largo de todo este trabajo y se estudian algunas de las propiedades importantes de las curvas.

1.1 Curvas planas

Al dibujar un trazo sin retirar el lápiz del papel obtenemos una curva en el plano. Dicha curva se describe como el *lugar geométrico de los puntos que satisfacen cierta propiedad*. Sin embargo hay lugares geométricos que no representan a una curva. Por ejemplo, el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen la relación

$$y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ 0, & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

no se puede dibujar sin retirar el lápiz del papel.

En el camino por describir el proceso de dibujar una curva preferimos entenderlo como el *movimiento continuo de una partícula*. Por tanto, a una curva la entendemos como la imagen en el plano de una función continua definida en un intervalo $I = [a, b]$. La trayectoria de una partícula en movimiento se describe por sus coordenadas y éstas a su vez son funciones que dependen de un parámetro t . A saber, las funciones coordenadas son funciones reales de variable real. Así, una curva plana es la deformación continua de un intervalo I . La discusión anterior la resumimos en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1. Una *curva* en el plano es una aplicación $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde la regla de correspondencia está dada por $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$ y donde $x_1, x_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas. El conjunto $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(t) = (u, v) \text{ para algún } t \in I\}$ se llama la *imagen* o *traza* de la curva. Las funciones x_1, x_2 se llaman *funciones coordenadas* de α . Si $I = [a, b]$, los puntos $\alpha(a), \alpha(b)$ se llaman *punto inicial* y *punto final* de la curva α , respectivamente.

En algunas ocasiones, cuando no haya confusión, nos referiremos como curva a la imagen de la curva y no a la regla de correspondencia. Las características de las curvas de este trabajo que nos interesan estudiar, se ilustran en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2. Diremos que α es una *curva cerrada* si $\alpha(a) = \alpha(b)$. Si α es inyectiva, la curva se llama *curva simple*. Una *curva cerrada simple* es una curva cerrada inyectiva en $[a, b]$, es decir, los únicos puntos donde α coincide son el punto final e inicial.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de curvas en el plano.

Ejemplo. Consideremos la curva $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t).$$

En este caso, la imagen de esta curva es el conjunto en el plano $\mathbb{S}^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ (véase la figura 1.1). Además, observamos que esta curva es una curva cerrada simple. Esto se debe a que $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ y la inyectividad de la función $\cos t$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

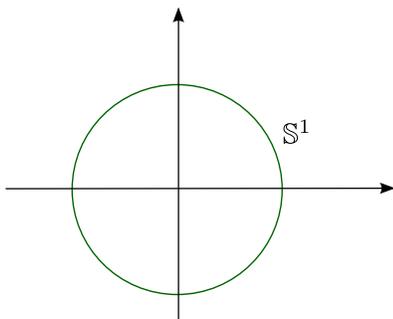


Figura 1.1: Circunferencia con centro en el origen y radio 1

Ejemplo. Consideremos una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (t, f(t)),$$

es una curva en el plano cuya imagen está en la figura 1.2. Observamos que α no es una curva cerrada pero sí es una curva simple. Si la curva no fuera simple existirían $t_1, t_2 \in [a, b]$, distintos tal que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, pero esto implica que $t_1 = t_2$, lo cual no es posible.

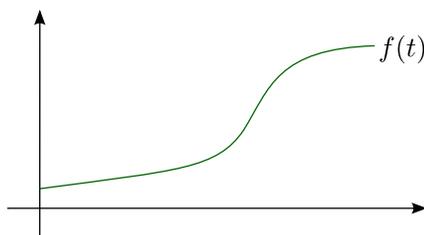


Figura 1.2: Gráfica de la función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Ejemplo. Consideremos la curva $\alpha: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (at \cos t, bt \sin t),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, son distintos. La imagen de esta curva se presenta en la figura 1.3 y se llama la *espiral de Arquímedes*. No es difícil ver que la curva α es una curva simple pero no es cerrada.

1.2 Curvas suaves

Ahora, nuestro interés recae en reflejar la propiedad de la curva que es posible dibujar, buscamos que en general la curva no tengan “picos”, esto es que sea *suave*. La propiedad de ser *suave* se refleja en que las funciones coordenadas sean *diferenciables*. Es buen momento para que recordemos el concepto de que una función real de variable real sea diferenciable.

DEFINICIÓN 1.3. Una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto se dice *diferenciable* en un punto $x_0 \in I$, si el siguiente límite existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

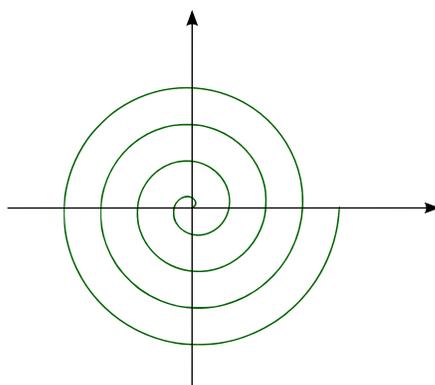


Figura 1.3: Espiral de Arquímedes

A este límite lo denotamos por $f'(x_0)$ y se llama la *derivada* de f en x_0 . Decimos que f es diferenciable en I si f es diferenciable para todo $x \in I$.

Si para todo $x_0 \in I$ existe $f'(x_0)$, definimos la función derivada f' como aquella función tal que $x_0 \mapsto f'(x_0)$. De manera análoga podemos definir las funciones derivadas de orden superior. De esta forma tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.4. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

1. La función $f \in \mathcal{C}^0(I)$ si f es continua en x , para todo $x \in I$.
2. Sea $k \in \mathbb{N}$. La función $f \in \mathcal{C}^k(I)$ si existen todas la derivadas de orden menor o igual a k y, además, éstas son continuas para todo $x \in I$.
3. La función $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ si $f \in \mathcal{C}^k(I)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. A dichas funciones las denominaremos *suaves*.

Recordemos que una curva está determinada por sus funciones coordenadas, entonces que una curva sea suave depende de que las funciones coordenadas lo sean. Así:

DEFINICIÓN 1.5. Una curva es *suave* si cada función coordenada lo es.

DEFINICIÓN 1.6. Una curva cuyas funciones coordenadas son de al menos clase \mathcal{C}^1 se llama *curva diferenciable*.

En el siguiente ejemplo mostramos una curva suave.

Ejemplo. Consideremos la curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (\text{sen}(at), \text{sen}(bt)),$$

donde $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$. Dado que la función $\text{sen}(at)$, es suave, se tiene que α es una curva suave. Al mover los parámetros a y b , se tiene una familia de curvas cuyas imagenes se llaman *curvas de Lissajous* (véase la figura 1.4).

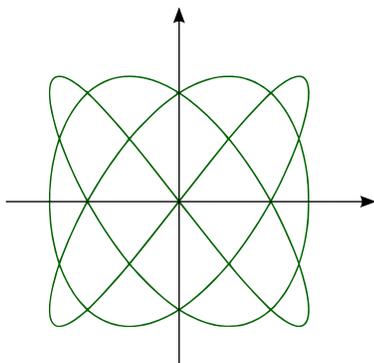


Figura 1.4: Curva de Lissajous

DEFINICIÓN 1.7. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable. El *vector velocidad* en $t_0 \in I$ se denota por $\dot{\alpha}(t_0) = (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))$, donde $\dot{x}_i(t_0) = \frac{dx_i}{dt}(t_0)$, para $i = 1, 2$.

A continuación mostramos un ejemplo que ilustra la definición anterior.

Ejemplo. Sea $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva definida por la regla

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

La imagen de la curva se llama la *cicloide* (véase la figura 1.5). El vector velocidad en un punto arbitrario t es

$$\dot{\alpha}(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

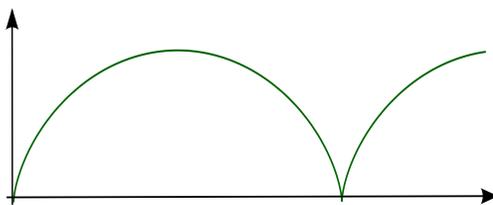


Figura 1.5: Cicloide

DEFINICIÓN 1.8. Una curva diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es *regular* en $t_0 \in I$, si $\dot{\alpha}(t_0) \neq (0, 0)$. Una curva se dice *regular* en I si α es regular para todo $t \in I$.

Observemos que la regularidad en un punto es equivalente a que $\|\dot{\alpha}(t)\| \neq 0$. Del hecho de la continuidad de $\dot{\alpha}$ y la regularidad en un punto se obtiene que localmente la curva no se autointerseca.

PROPOSICIÓN 1.1. Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular en $t_0 \in I$. Existe $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño tal que α restringida al intervalo $I_0 = \{t \in I : |t - t_0| < \epsilon\}$ es inyectiva.

Demostración. Si α es regular en t_0 , entonces $\dot{x}_1(t_0) \neq 0$. Debido a la continuidad de $\dot{\alpha}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\dot{x}_1(t) \neq 0$ en I_0 . Esto implica que α es estrictamente monótona en I_0 y por tanto α es inyectiva en I_0 . \square

La curva $\alpha(t) = (t, f(t))$, donde f es diferenciable es un ejemplo de curva regular. La siguiente proposición muestra que una curva regular es localmente una curva de este tipo.

PROPOSICIÓN 1.2. *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular en $t_0 \in I$, entonces existe $\delta > 0$, tal que α restringida a $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, coincide con la gráfica de una función $h: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.*

Demostración. Por la regularidad de la curva, supongamos sin pérdida de generalidad que existe $t_0 \in I$ tal que $\dot{x}_1(t_0) \neq 0$. Por el teorema de la función inversa¹ existe una vecindad $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de t_0 tal que la función

$$x_1^{-1}: x_1(I_\delta) \rightarrow I_\delta,$$

es de clase \mathcal{C}^1 . Además, la función x_1 restringida a I_δ es inyectiva por la proposición 1.1. Sea $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\beta(t) = \alpha(x_1^{-1}(t))$ donde $J = x_1(I_\delta)$. Observamos que

$$\beta(t) = (x_1(x_1^{-1}(t)), x_2(x_1^{-1}(t))) = (t, x_2(x_1^{-1}(t))).$$

Si $f(t) = x_2 \circ x_1^{-1}(t)$, entonces $\beta(t) = (t, f(t))$ coincide con α en I_δ . \square

1.3 Reparametrizaciones y longitud de arco de una curva

Dada una curva, al recorrer el intervalo donde esté definida según el orden en \mathbb{R} se induce una orientación a la curva, en este caso decimos que la curva tiene orientación positiva. Recordemos que una curva está definida sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, es posible “cambiar” el intervalo de tal manera que la imagen de la curva sea la misma, aunque la forma en que se recorre sea distinta. Es decir, más “rápida” o más “lenta”, esto dependerá del vector velocidad. Esta modificación en el intervalo de definición de la curva se llama *reparametrización*. En esta sección analizamos este cambio en la curva.

DEFINICIÓN 1.9. Sean $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva y $h: J \rightarrow I$ una función de clase \mathcal{C}^∞ estrictamente monótona. La composición de funciones

$$\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

es una *reparametrización de la curva α* .

Usando la regla de la cadena tenemos que $\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}(h(t))h'(t)$ esto implica que

$$\|\dot{\beta}(t)\| = \|\dot{\alpha}(h(t))\| |h'(t)|.$$

Si ocurre que $h'(t) \neq 0$, para todo $t \in J$, la reparametrización de α también es una curva regular, si α lo es. Además, no es difícil ver que

¹El teorema de la función inversa para funciones reales de variable real dice, si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva y continua en I , y si $f'(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces f^{-1} es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, y $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, véase [28, pág. 95].

1. Si h es una función creciente, la curva α conserva su orientación.
2. Si h es una función decreciente, la curva α invierte su orientación.

Ejemplo. Consideremos la curva $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Sea $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t) = 2\pi - t$. La curva

$$\beta = \alpha \circ h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

es una reparametrización de la curva α . Además, esta reparametrización invierte la orientación de α , pues $h'(t) = -1$.

DEFINICIÓN 1.10. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. La función $L_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(\xi)\| d\xi,$$

donde $t_0 \in I$, se llama *longitud de arco*.

Observemos que, dado que $\|\dot{\alpha}(\xi)\|$ es una función continua, por el teorema fundamental del cálculo², la función L_α es de clase \mathcal{C}^1 en I .

Si consideramos $t_1, t_2 \in I$, tales que $t_1 < t_2$. De la definición 1.10 la longitud de arco entre los puntos t_1 y t_2 es

$$L_\alpha(t_2) - L_\alpha(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\alpha}(\xi)\| d\xi.$$

DEFINICIÓN 1.11. Una curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está *parametrizada por longitud de arco* si

$$L_\alpha(t) = t + c,$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

En la definición anterior observamos que una curva está parametrizada por longitud de arco si el vector velocidad es siempre constante. La siguiente proposición caracteriza a una curva parametrizada por longitud de arco.

PROPOSICIÓN 1.3. *Una curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada por longitud de arco si y sólo si para todo $t \in I$*

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = 1.$$

Demostración. Por el teorema fundamental del cálculo

$$L'_\alpha(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(\xi)\| d\xi = \|\dot{\alpha}(t)\|.$$

²El teorema fundamental del cálculo dice que si f es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces F es clase \mathcal{C}^1 en $[a, b]$ y $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = F'(x) = f(x)$, véase [28, pág. 118].

Por otra parte, si α está parametrizada por longitud de arco, $L'_\alpha(t) = 1$, lo que implica que $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$. Si $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$, para todo $t \in I$ se tiene que

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t d\xi = t - t_0.$$

□

De aquí en adelante, usaremos el parámetro s para diferenciar una curva parametrizada por longitud de arco de una curva de parámetro t y $\alpha'(s)$ en lugar de $\dot{\alpha}(t)$ para distinguir que se está derivando una curva parametrizada por longitud de arco.

El siguiente ejemplo ilustra la proposición 1.3.

Ejemplo. Sea la curva $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(s) = r(\cos(s/r), \operatorname{sen}(s/r)),$$

la imagen de la curva α es el conjunto $\mathbb{S}_r^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$. Un cálculo directo nos muestra que $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in [0, 2\pi]$.

TEOREMA 1.1. *Toda curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ puede ser reparametrizada por longitud de arco.*

Demostración. Como α es regular, $L'_\alpha(t) = \|\dot{\alpha}(t)\| > 0$. Esto implica que la función $L_\alpha(t)$ es estrictamente creciente. Así, la función $L_\alpha(t)$ es inyectiva. Además, la función L_α es de clase \mathcal{C}^1 . Por el teorema de la función inversa $L_\alpha(t)$ tiene inversa. Definimos la función $h: J \rightarrow I$ como $h(t) = L_\alpha^{-1}(t)$ donde $J = L_\alpha(I)$. Por lo anterior, la curva

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

es una reparametrización de la curva α . Para probar que la curva β está parametrizada por longitud de arco basta probar que $\|\beta'(t)\| = 1$. Observemos que

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| |h'(t)| = \|\alpha'(h(t))\| \frac{1}{|L'_\alpha(h(t))|} = \|\alpha'(h(t))\| \frac{1}{\|\alpha'(h(t))\|} = 1.$$

□

Ejemplo. Consideremos la curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \operatorname{sen} t),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $h: \left(\frac{-a\sqrt{b^2+1}}{b}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$h(s) = \frac{1}{b} \ln \left(1 + \frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}} \right).$$

La curva $\beta = \alpha \circ h$ está parametrizada por longitud de arco, después de algunos cálculos se puede ver que

$$\|\beta'(s)\| = 1.$$

§2. CURVATURA

La idea de curvatura está presente en muchos contextos, en la ingeniería, el arte, en física entre otras. Es tan simple que podemos fácilmente comparar dos objetos y decir cual de los dos es más curvado, es decir, tenemos una noción intuitiva de su significado. Entonces podemos preguntarnos, ¿qué es la curvatura?, ¿cómo entenderla?

En este capítulo se hace un estudio de la curvatura y se muestran algunas técnicas para calcularla.

2.1 La curvatura como el radio de la circunferencia límite

Al intentar describir que tan curvada es una curva, observamos que esto depende del punto sobre la curva y que alrededor del punto podemos compararla con una recta o una circunferencia (véase la figura 2.1). Por tanto, si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva, para cada $t \in I$, debe ser posible asignar un número real que dependa de t , al cual le llamaremos *curvatura*.

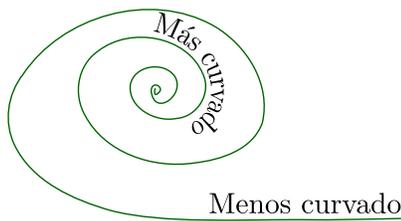


Figura 2.1: La curvatura es una propiedad puntual

El comparar con una recta o una circunferencia se debe a que describir que tan curvada es una recta o una circunferencia es fácil. Por ejemplo, una recta no está curvada, es decir, la curvatura es cero. Si C_r es una circunferencia de radio r , observamos que está curvada de la misma forma en cualquier punto.

Ahora, consideremos C_{r_1} y C_{r_2} circunferencias de radios $r_1 < r_2$. La circunferencia C_{r_1} está más curvada que la circunferencia C_{r_2} (véase la figura 2.2). Es decir, mientras menor sea el radio de la circunferencia, ésta estará más curvada. La discusión anterior la resumimos de la siguiente manera:

1. Si C_r es una circunferencia de radio r , su curvatura es $\frac{1}{r}$ en cada punto.
2. Si H es una recta entonces la curvatura de H es cero y H puede entenderse como una circunferencia de radio infinito.

Para una curva, saber cual es la curvatura en un punto no es tan sencillo. Como vimos anteriormente, esto se debe a que la curva no está curvada de la misma forma en todos los puntos. Entonces, ¿cómo calcular la curvatura en un punto de una curva? Existen varias interpretaciones geométricas de la curvatura las cuales nos ayudan a calcular este número. Una primera idea es la siguiente.

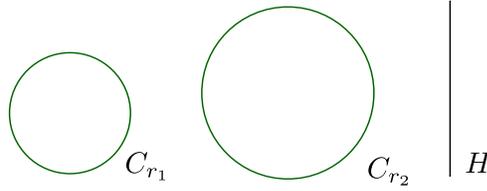


Figura 2.2: Circunferencias de radio r_1, r_2 e ∞

La idea se basa en que podemos encontrar una circunferencia tangente en un punto que localmente se parezca a nuestra curva en el punto en cuestión. El radio de esta circunferencia determina la curvatura de la curva en ese punto. Si la circunferencia depende de los puntos en la imagen de la curva, se podría en este caso aprovechar todo el cálculo que ofrece la curva. Para tal análisis, en adelante consideraremos curvas de al menos clase \mathcal{C}^2 , es decir, curvas cuyas funciones coordenadas son de al menos clase \mathcal{C}^2 .

Consideremos $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $t_1, t_2, t_3 \in I$ de tal forma que $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ sean puntos no colineales. Sabemos que para tres puntos no colineales dados existe una única circunferencia que pasa por esos puntos¹, cuyo centro denotaremos por C_{t_1, t_2, t_3} . Para $t_0 \in I$, en caso de que el límite cuando t_1, t_2, t_3 tienden a t_0 exista la circunferencia obtenida se llama la *circunferencia límite tangente* en $\alpha(t_0)$.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco. La cantidad $k_1(s)$ en un punto $\alpha(s)$ está dada por

$$k_1(s) = \frac{1}{r(s)},$$

donde $r(s)$ es el radio de la circunferencia límite tangente en $\alpha(s)$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada por longitud de arco, entonces*

$$k_1(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Es decir, el inverso del radio de la circunferencia límite en $\alpha(s)$ es $\|\alpha''(s)\|$.

Demostración. Sean $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco y $t_1, t_2, t_3 \in I$ puntos distintos y cercanos a $t \in I$. Los puntos en la imagen de la curva $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ son distintos por la regularidad de la curva. Supongamos sin pérdida de generalidad que $t_1 < t_2 < t_3$ y que $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ no son colineales. Consideremos la función $d: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

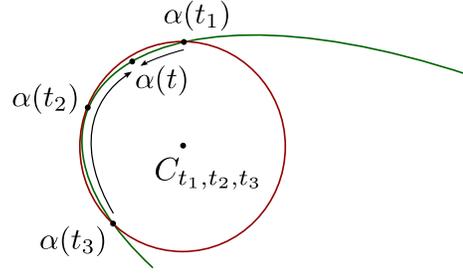
$$d(t) = \langle \alpha(t) - C_{t_1, t_2, t_3}, \alpha(t) - C_{t_1, t_2, t_3} \rangle. \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) mide la distancia al cuadrado de C_{t_1, t_2, t_3} a los puntos de la curva α . Los puntos $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ están sobre la circunferencia con centro C_{t_1, t_2, t_3} . Esto implica que $d(t_1) = d(t_2) = d(t_3)$. Entonces por el teorema del valor medio² existen puntos $\xi_1 \in (t_1, t_2)$ y $\xi_2 \in (t_2, t_3)$ tales que

$$\langle \dot{\alpha}(\xi_i), \alpha(\xi_i) - C_{t_1, t_2, t_3} \rangle = 0, \text{ para } i = 1, 2.$$

¹Esta afirmación se sigue de la ecuación general de la circunferencia.

²El *teorema del valor medio* afirma que si f es continua en un cerrado $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) entonces $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ para algún $\xi \in (a, b)$.

Figura 2.3: Circunferencia C_{t_1, t_2, t_3}

Nuevamente, usando el teorema del valor medio existe $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ tal que

$$\langle \ddot{\alpha}(\eta), \alpha(\eta) - C_{t_1, t_2, t_3} \rangle + \langle \dot{\alpha}(\eta), \dot{\alpha}(\eta) \rangle = 0.$$

Hacemos que t_1, t_2, t_3 tiendan a t para obtener

$$\langle \dot{\alpha}(t), \alpha(t) - C \rangle = 0, \quad (2.2)$$

$$\langle \ddot{\alpha}(t), \alpha(t) - C \rangle = -\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle, \quad (2.3)$$

donde C es el centro de la circunferencia límite en $\alpha(t)$. La ecuación (2.2) nos muestra que el vector velocidad $\dot{\alpha}(t)$ es perpendicular al vector $\alpha(t) - C$. Además, afirmamos que $\dot{\alpha}(t)$ no está en la misma dirección de $\ddot{\alpha}(t)$, pues de ocurrir la circunferencia límite puede no existir. Supongamos pues que $\dot{\alpha}(t)$ y $\ddot{\alpha}(t)$ están en la misma dirección, entonces tendremos que $\ddot{\alpha}(t) = b\dot{\alpha}(t)$, para algún $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esto implica que

$$0 = \langle \dot{\alpha}(t), \alpha(t) - C \rangle = \frac{1}{b} \langle \ddot{\alpha}(t), \alpha(t) - C \rangle = -\frac{1}{b} \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle,$$

y así $\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = 0$. Esto es una contradicción ya que por regularidad $\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle \neq 0$.

Si suponemos que la curva está parametrizada por longitud de arco se tiene que $\alpha'(s)$ y $\alpha''(s)$ son perpendiculares, esto implica que $\alpha''(s)$ y $\alpha(s) - C$ están en la misma dirección. Si $\alpha''(s)$ es distinto del vector cero se tendrá que $\alpha(s) - C = c\alpha''(s)$, para algún $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sustituyendo en la ecuación (2.3) tenemos

$$c\|\alpha''(s)\|^2 = c\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -1. \quad (2.4)$$

Debido a que $\alpha(s) - C = c\alpha''(s)$ se tiene

$$\|\alpha(s) - C\| = |c|\|\alpha''(s)\|. \quad (2.5)$$

Usando las ecuaciones (2.5) y (2.4) obtenemos

$$\|\alpha(s) - C\| = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|},$$

lo que queríamos demostrar. \square

La existencia de la circunferencia límite depende de una condición sobre la $\alpha''(s)$, esto se muestra en el siguiente resultado

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco. Si $\alpha''(s)$ es distinta del vector cero, entonces para $s_1, s_2, s_3 \in I$, lo suficientemente cercanos a s , los puntos $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ no son colineales.*

Demostración. Supongamos que los puntos en $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ son colineales. Sea H la recta que contiene a tales puntos, entonces existen puntos $\xi_1 \in (s_1, s_2)$ y $\xi_2 \in (s_2, s_3)$ tales que $\alpha'(\xi_1)$ y $\alpha'(\xi_2)$ son paralelos a H . Por otro lado, α es una curva parametrizada por longitud de arco entonces $\alpha'(\xi_1), \alpha'(\xi_2) \in \mathbb{S}^1$ y $\alpha'(\xi_1) = \alpha'(\xi_2)$, entonces existe $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ tal que $\alpha''(\eta) = 0$, pero por continuidad esto no ocurre para puntos cercanos a s . \square

2.2 Curvatura como variación de ángulos

Mostraremos a continuación un segundo enfoque para estudiar la curvatura. Observemos que la curvatura depende de la rapidez con que se mueven las rectas tangentes, es decir, la rapidez con que se mueve cierto ángulo. Para determinar este ángulo consideremos una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco y el vector tangente $\alpha'(s)$ en un punto. Medimos el ángulo formado por el vector tangente y el eje coordenado x (véase la figura 2.4). Observamos que este ángulo varía en cada punto de la curva.

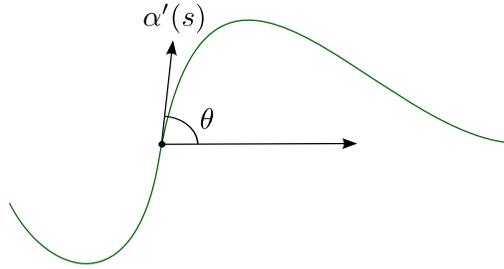


Figura 2.4: Ángulo formado por $\alpha'(s)$ y el eje x

Sea $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ la función que mide el ángulo formado por el vector $\alpha'(s)$ y el eje x , es decir,

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{x_2'(s)}{x_1'(s)}\right).$$

En el caso de que $x_1'(s)$ se anule, consideramos la función $\tilde{\theta}(s) = \arctan\left(\frac{x_1'(s)}{x_2'(s)}\right)$. Definimos la cantidad $k_2(s)$ en un punto $\alpha(s)$ por

$$k_2(s) = \left| \frac{d}{ds} \theta(s) \right|.$$

PROPOSICIÓN 2.3. *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada por longitud de arco, entonces*

$$k_2(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Demostración. Observemos que

$$\frac{d}{ds} \theta(s) = x_1'(s)x_2''(s) - x_1''(s)x_2'(s) = \det \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

La condición de que α esté parametrizada por longitud de arco se traduce en que $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$. Esto implica que

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle,$$

o bien que $\alpha'(s)$ y $\alpha''(s)$ son perpendiculares. Así, el determinante en (2.6) es el área del rectángulo formado por α' y α''

$$\det \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix} = \|\alpha'(s)\| \|\alpha''(s)\| = \|\alpha''(s)\|.$$

Hemos probado que

$$\left| \frac{d}{ds} \theta(s) \right| = \|\alpha''(s)\|.$$

□

2.3 La curvatura como la circunferencia en dos puntos

Procedemos a mostrar una tercer y última forma de ver a la curvatura. Para esto consideremos una curva parametrizada por longitud de arco, dos puntos distintos en la imagen de la curva y las rectas normales a las tangentes en estos puntos, para luego generar una circunferencia con centro en la intersección de las normales y que pase por uno de los puntos. Si hacemos que un punto tienda al otro punto obtendremos en el límite una circunferencia cuyo radio es la curvatura en el segundo punto.

Para comenzar, consideremos una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco, $\alpha(s_1), \alpha(s_2)$ puntos sobre la curva y $C_{\alpha(s_1), \alpha(s_2)}$ la circunferencia que pasa por $\alpha(s_1)$ con centro en la intersección de las normales por $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ (véase la figura 2.5).

Definimos la cantidad $k_3(s)$ en un punto $\alpha(s)$ como $\frac{1}{r(s)}$, donde $r(s)$ es el radio de la circunferencia C obtenida como el límite de la circunferencias $C_{\alpha(s_1), \alpha(s_2)}$ cuando s_1 tiende a s_2 .

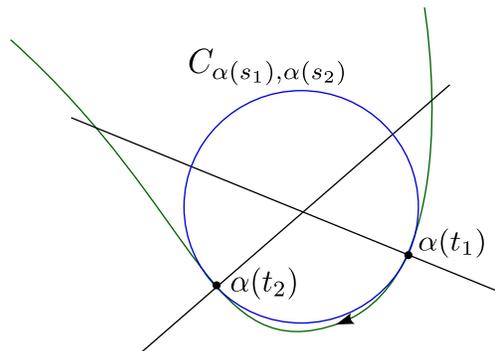


Figura 2.5

Observamos que las rectas tangentes en estos puntos están dadas por

$$y - x_2(s_i) = m_i(x - x_1(s_i)), \quad (2.7)$$

donde $m_i = \frac{x_2'(s_i)}{x_1'(s_i)}$, para $i = 1, 2$. Esto implica que las rectas normales en los puntos son

$$y - x_2(s_i) = -\frac{1}{m_i}(x - x_1(s_i)), \text{ para } i = 1, 2. \quad (2.8)$$

De las ecuaciones (2.8) obtenemos

$$x - x_1(s_i) = m_i x_2(s_i) - m_i y, \text{ para } i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Al restar las ecuaciones (2.9) obtenemos la siguiente igualdad

$$y = \frac{x_1(s_2) - x_1(s_1) + m_2 x_2(s_2) - m_1 x_2(s_1)}{m_2 - m_1}. \quad (2.10)$$

Si r_{s_1, s_2} es el radio de la circunferencia $C_{\alpha(s_1), \alpha(s_2)}$ se cumple que

$$r_{s_1, s_2}^2 = (x - x_1(s_1))^2 + (y - x_2(s_1))^2. \quad (2.11)$$

Ahora, de las ecuaciones (2.11), (2.8) y (2.10), se tiene que r_{s_1, s_2}^2 se reduce a

$$r_{s_1, s_2}^2 = (1 + m_1^2) \left(\frac{1 + m_2 a}{b} \right)^2, \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{x_2(s_2) - x_2(s_1)}{x_1(s_2) - x_1(s_1)}, \\ b &= \frac{m_2 - m_1}{x_1(s_2) - x_1(s_1)}. \end{aligned}$$

Calculamos el límite cuando $s_1 \rightarrow s_2$ de la función r_{s_1, s_2}^2 , se obtiene que r_{s_1, s_2} tiende a $r(s)$. Por tanto, tenemos que

$$r(s)^2 = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix}^2}.$$

La ecuación anterior nos dice que $k_3(s)$ visto como el inverso del radio de la circunferencia límite que pasa por $\alpha(s_1)$ y centro en la intersección de las normales en el punto $\alpha(s_2)$, es igual a $\|\alpha''(s)\|$. Los argumentos presentados muestran el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.4. *El inverso del radio de la circunferencia límite cuando s_1 tiende a s_2 es igual a $\|\alpha''(s)\|$.*

Como hemos visto, las cantidades $k_1(s)$, $k_2(s)$ y $k_3(s)$ son distintas formas de abordar a la curvatura y, además, por las proposiciones 2.2, 2.3 y 2.5, éstas funciones son equivalentes. Por tanto tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1. *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada por longitud de arco, entonces*

$$k_1(s) = k_2(s) = k_3(s).$$

Para nuestros fines nos basta la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco de clase \mathcal{C}^2 la *curvatura* en un punto $\alpha(s)$ es

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

De otra forma como en (2.6),

$$k(s) = \left| \det \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix} \right|.$$

Los siguientes ejemplos nos ilustran las definiciones anteriores.

Ejemplo. Como vimos en el ejemplo de la página 7, la curva $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(s) = r(\cos s/r, \sin s/r),$$

está parametrizada por longitud de arco y su imagen es \mathbb{S}_r^1 . Un cálculo directo nos muestra que

$$k(s) = \frac{1}{r}.$$

Es decir, la circunferencia tiene curvatura constante igual a $\frac{1}{r}$.

Ejemplo. Consideremos la curva parametrizada por longitud de arco $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(s) = \xi + s\eta,$$

donde $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\eta\| = 1$. Un cálculo directo nos muestra que

$$k(s) = 0,$$

para todo $s \in I$. Así, la curvatura de una recta es cero en cada punto.

De los ejemplos anteriores, podemos afirmar que el concepto de curvatura dado refleja nuestra intuición de curvatura.

2.4 Curvatura con signo

En esta sección tenemos como objetivo analizar la *curvatura con signo*, usaremos la noción que ya tenemos de curvatura, esto dará lugar a una caracterización de *curvas convexas*. Para iniciar con la discusión hablaremos de cómo asignar en cada punto de la imagen de la curva un sistema de referencia. Consideremos una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco y los vectores

$$\tilde{v}(s) = (x_1'(s), x_2'(s)),$$

$$\tilde{n}(s) = (-x_2'(s), x_1'(s)).$$

Observamos que $\|\tilde{v}(s)\| = 1$, esto implica que $\tilde{v}'(s)$ está en dirección de $\tilde{n}(s)$, y entonces se cumple que

$$\tilde{v}'(s) = \tilde{k}(s)\tilde{n}(s). \quad (2.13)$$

Un argumento similar sirve para mostrar que $\tilde{n}'(s)$ está en dirección de $\tilde{v}(s)$. Así, podemos concluir que

$$\tilde{n}'(s) = -\tilde{k}(s)\tilde{v}(s). \quad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.13) y (2.14) se llaman *ecuaciones de Frenet*. El papel que juega la función $\tilde{k}(s)$ es que da el signo y la magnitud que tienen los vectores $\tilde{v}'(s)$ y $\tilde{n}'(s)$. La siguiente definición nos dice que la información de la curva en un punto está dada por dos vectores.

DEFINICIÓN 2.2. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco. El *vector tangente* $v(s)$ y el *vector normal* $n(s)$ están dados por

$$\begin{aligned} v(s) &= \alpha'(s), \\ n(s) &= \frac{v'(s)}{\|v'(s)\|}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Observamos que se cumplen las siguientes propiedades respecto a estos vectores.

1. $\|v(s)\| = \|n(s)\| = 1$, para todo $s \in I$.
2. $\langle v(s), n(s) \rangle = 0$, para todo $s \in I$.
3. $\alpha''(s) = k(s)n(s)$, para todo $s \in I$.

La diferencia entre $k(s)$ y $\tilde{k}(s)$ es que la primera es la magnitud de $\alpha''(s)$ mientras que la segunda aún conserva el signo. Este signo determina hacia donde apunta el vector $n(s)$, es decir, se tiene que

$$k(s) = |\tilde{k}(s)|.$$

DEFINICIÓN 2.3. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco. El conjunto de vectores

$$\{v(s), n(s)\}$$

en un punto $\alpha(s)$, se llama *diedro de Frenet*.

El diedro de Frenet permite que en cada punto de la imagen de la curva podamos dar una orientación a la curva tomando como referencia al diedro de Frenet, esta orientación nos sirve para definir la curvatura con signo.

DEFINICIÓN 2.4. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco. La *curvatura con signo* se denota y está dada por

$$\tilde{k}(s) = \det \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix}.$$

De la definición de curvatura podemos observar que se cumple

$$\tilde{k}(s) = \det \begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v(s) \\ k(s)n(s) \end{pmatrix} = k(s) \det \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

1. La curva α tiene *curvatura positiva* en $\alpha(s)$ si

$$\det \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \end{pmatrix} > 0.$$

2. La curva α tiene *curvatura negativa* en $\alpha(s)$ si

$$\det \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \end{pmatrix} < 0.$$

Cuando sea necesario haremos la distinción entre la curvatura con signo $\tilde{k}(s)$ y la curvatura $k(s)$. De aquí en adelante denotaremos a ambas por $k(s)$.

La interpretación geométrica de la curvatura con signo es la siguiente. Consideremos $s_0 \in I$, tal que $k(s_0) > 0$, entonces para todo s en una vecindad de s_0 , los puntos $\alpha(s)$ están en el semiplano determinado por la recta tangente generada por el vector $v(s_0)$ que contiene a $\tilde{n}(s_0)$ (véase la figura 2.6). Para probar esto, consideremos la función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \tilde{n}(s_0) \rangle,$$

la cual mide la proyección de $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ sobre $\tilde{n}(s_0)$. Observamos que $f'(s_0) = 0$ y $f''(s_0) = k(s_0) > 0$. Por tanto, $f(s_0)$ es un mínimo local de la función f y se alcanza en s_0 .

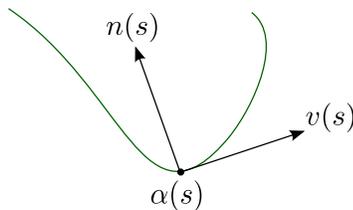


Figura 2.6: Punto donde $k(s) > 0$

De forma análoga podemos probar que si $s_0 \in I$, tal que $k(s_0) < 0$, entonces para todo s en una vecindad de s_0 , los puntos $\alpha(s)$ están en el semiplano determinado por la recta tangente generada por el vector $v(s_0)$ que contiene a $-\tilde{n}(s_0)$ (véase la figura 2.7).

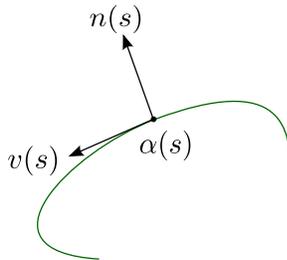


Figura 2.7: Punto donde $k(s) < 0$

Hasta ahora estudiamos algunas de las características de las curvas planas. Otra propiedad que será de gran importancia es la convexidad de una curva, para comprender esto tenemos la siguiente definición.

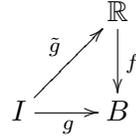
DEFINICIÓN 2.5. Una curva regular plana cerrada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es *convexa* si para cada $t \in I$, la curva está contenida en sólo uno de los dos semiplanos determinados por la recta tangente en $\alpha(t)$.

En el siguiente resultado mostramos que existe una relación entre la convexidad de la curva y la curvatura con signo.

PROPOSICIÓN 2.5. Una curva cerrada parametrizada por longitud de arco es convexa si y sólo si es simple y su curvatura no cambia de signo.

Para demostrar el teorema 2.5, discutiremos antes algunas cuestiones técnicas que serán de utilidad en la demostración del resultado.

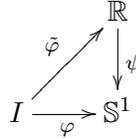
DEFINICIÓN 2.6. Sean $B \subset \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow B$ y $g: I \rightarrow B$ aplicaciones continuas. Un *levantamiento*³ de g respecto a f es una aplicación continua $\tilde{g}: I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f \circ \tilde{g} = g$. Esto se ilustra en el siguiente diagrama. Se puede probar que



Sean $\alpha: I = [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada parametrizada por longitud de arco y la función $\varphi: I \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por la regla de correspondencia $\varphi(s) = \alpha'(s)$. Esta función se llama *aplicación tangente*, entonces existe $\tilde{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}$ levantamiento de φ tal que $\varphi = \psi \circ \tilde{\varphi}$, donde $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ está dada por

$$\psi(x) = (\cos x, \sin x),$$

en un diagrama tenemos



Observemos que $\varphi(0) = \varphi(l) = p \in \mathbb{S}^1$, luego $(\psi \circ \tilde{\varphi})(0) = (\psi \circ \tilde{\varphi})(l)$, es decir

$$\tilde{\varphi}(l) = \tilde{\varphi}(0) + 2\pi k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z},$$

definimos el *grado de la aplicación tangente* como

$$\text{deg } \varphi = \frac{1}{2\pi}(\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)).$$

LEMA 2.1. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada parametrizada por longitud de arco. La curvatura $k(s)$ no cambia de signo si y sólo si el levantamiento $\tilde{\varphi}$ es monótono.

Demostración. Observemos que $\varphi'(s) = \tilde{\varphi}'(s)(-\sin \tilde{\varphi}(s), \cos \tilde{\varphi}(s))$. Por un lado

$$k(s) = \|\varphi'(s)\| = |\tilde{\varphi}'(s)|.$$

Se tiene que $k(s) = \tilde{\varphi}'(s)$. En esta última igualdad $k(s)$ es la curvatura con signo. El signo de la curvatura depende de la derivada $\tilde{\varphi}'(s)$. Si $\tilde{\varphi}'(s) > 0$, entonces $\tilde{\varphi}(s)$ es monótona creciente y $k(s) > 0$. De forma análoga, si $\tilde{\varphi}'(s) < 0$, entonces $\tilde{\varphi}(s)$ es monótona decreciente y $k(s) < 0$. Supongamos, que $k(s) > 0$, entonces $\tilde{\varphi}'(s) > 0$, esto nos dice que $\tilde{\varphi}(s)$ es monótona creciente. \square

Como podemos ver, el levantamiento $\tilde{\varphi}$ mide el ángulo con que cambian las tangentes. Este ángulo es de gran importancia y utilidad como veremos a continuación.

³Para un estudio más profundo sobre la existencia y unicidad del levantamiento véase [15]

Demostración de la proposición 2.5. Supongamos que $k(s) > 0$, para todo $s \in I$ y que α no es convexa. Existe $s_0 \in I$ tal que la recta generada por el vector $\alpha'(s_0)$ tiene la propiedad de dejar puntos de la curva en ambos lados de la recta (véase la figura 2.8). La función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle,$$

alcanza su máximo y mínimo en s_1 y s_2 respectivamente. Estos puntos satisfacen que el vector $\alpha'(s_i)$ es paralelo a la recta generada por $\alpha'(s_0)$, entonces dos de ellos deben estar en la misma dirección, supongamos que $\alpha'(s_0)$ y $\alpha'(s_1)$ son estos vectores. Es decir, $\varphi(s_0) = \varphi(s_1)$. Por el lema 2.1 $\tilde{\varphi}$ restringida a $[s_0, s_1]$ es constante. Así, para todo $s \in [s_0, s_1]$, $\alpha'(s)$ está en la misma dirección

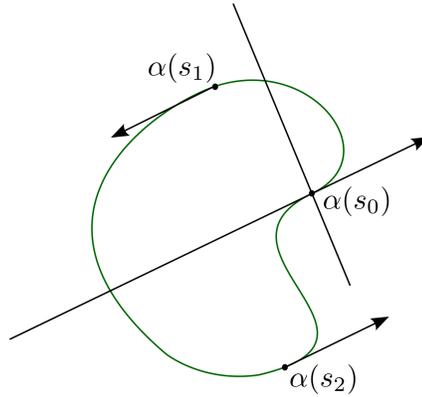


Figura 2.8

de $\alpha'(s_0)$, es decir, el arco $\alpha([s_0, s_1])$ está contenido en la recta generada por $\alpha'(s_0)$. Esto es una contradicción con la suposición de que la recta generada por $\alpha'(s_0)$ deja puntos de ambos lados de la curva. Por tanto α es convexa.

Ahora, supongamos que la curva es convexa y que la curvatura cambia de signo. Por el lema 2.1 existen $s_1, s_2 \in I$ con $s_1 < s_2$, tal que $\tilde{\varphi}(s_1) = \tilde{\varphi}(s_2)$, y $\tilde{\varphi}$ no es constante en $[s_1, s_2]$, además, existe $s_3 \in I$ tal que $\varphi(s_3) = -\varphi(s_1)$. Observamos que las rectas tangentes en s_1, s_2, s_3 son paralelas, por convexidad la curva debe estar contenida entre dos de estas rectas, lo que implica que dos de ellas coinciden. Supongamos que esto pasa para los puntos $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ con $s_2 > s_1$ (véase la figura 2.9).

Cualquier recta H en un punto del arco formado por $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ corta a la recta tangente que pasa por esos puntos. Esto muestra que la recta H deja en un semiplano a $\alpha(s_1)$ y a $\alpha(s_2)$ en el otro, pero esto es una contradicción pues la curva es convexa. \square

La proposición 2.5, es una caracterización de convexidad. Esta caracterización será de gran ayuda en capítulos posteriores.

Continuando con la discusión, ahora nos preguntamos como calcular la curvatura en el caso de una curva que no esté parametrizada por longitud de arco, esto es posible debido a que existe una función $h: J \rightarrow I$ tal que la composición $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada por

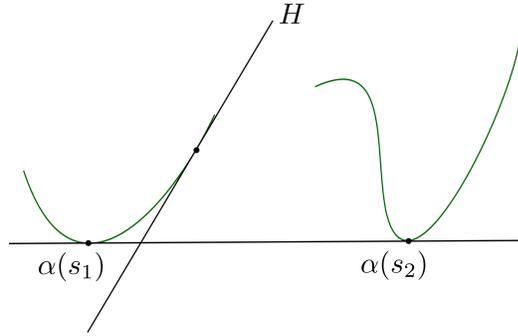


Figura 2.9

longitud de arco. Calculamos

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \dot{\alpha}(t) \frac{dh}{ds}, \\ \beta''(s) &= \ddot{\alpha}(t) \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 + \dot{\alpha}(t) \frac{d^2h}{ds^2}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De la definición 2.4 y las ecuaciones (2.15) obtenemos

$$k(t) = \det \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \frac{dh}{ds} \\ \ddot{\alpha}(t) \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 + \dot{\alpha}(t) \frac{d^2h}{ds^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{dh}{ds}\right)^3 \det \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \ddot{\alpha}(t) \end{pmatrix}.$$

También de la primera ecuación (2.15) obtenemos que

$$k(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \ddot{\alpha}(t) \end{pmatrix}}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}.$$

Por tanto, calcular la curvatura en un punto de una curva arbitraria es

$$k(t) = \frac{x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t)}{(\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2})^3}$$

La discusión anterior se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos la curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = r(\cos t, \text{sen } t).$$

Un cálculo directo nos muestra que

$$\|\dot{\alpha}(t)\|^3 = r^3.$$

Por otro lado

$$x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t) = r^2.$$

Por tanto la curvatura es

$$k(t) = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Ejemplo. En el caso de una curva de la forma $\alpha(t) = (t, f(t))$, donde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Calcular la curvatura en un punto es fácil, pues un cálculo rápido nos muestra

$$k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

§3. CURVAS EN EL ESPACIO

En este capítulo estudiamos las curvas en el espacio las cuales son una generalización de las curvas planas, por tanto su estudio es muy similar. Ahora, pensemos que tenemos una partícula que se mueve en el espacio y para describir la posición necesitamos tres números que cambian con respecto a un parámetro t , los cuales a su vez están determinados por funciones reales de variable real (véase la figura 3.1).

DEFINICIÓN 3.1. Una *curva* en el espacio es una aplicación $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde la regla de correspondencia está dada por $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ y $x_1, x_2, x_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas. El conjunto $\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(t) = (u, v, w) \text{ para algún } t \in I\}$ se llama la *imagen* o *traza* de la curva. Las funciones x_1, x_2, x_3 se llaman *funciones coordenadas* de α . Si $I = [a, b]$, los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman *punto inicial* y *final* de la curva α , respectivamente.

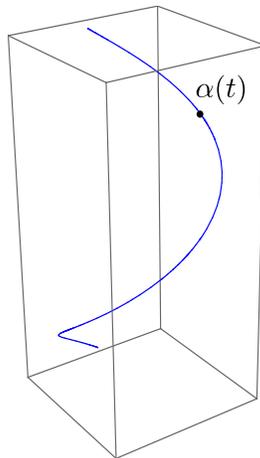


Figura 3.1: Curva en el espacio

Observamos que la definición de curva en el espacio es análoga al de una curva en el plano salvo que aumentamos la dimensión en donde se encuentra la curva, por tanto aumentamos el número de funciones coordenadas. Podemos generalizar aún más, entonces para una curva en \mathbb{R}^n necesitaremos una función con n funciones coordenadas.

Debido a esto, las definiciones para curva en el espacio como *curva cerrada*, *curva simple*, *curva suave*, *curva diferenciable*, *curva regular* son idénticas a las de una curva en el plano. El tratamiento de una reparametrización de una curva va en el mismo sentido de reparametrizar una curva en plano, y no es difícil comprobar que las definiciones en esta parte se aplican para una curva en el espacio. Por tanto, cuando hablamos de una curva en el espacio *parametrizada por longitud de arco*, entenderemos que es una curva que en cualquier instante el vector velocidad tiene magnitud uno.

La condición de que una curva esté parametrizada por longitud de arco implica más geometría

en el caso de curva en el espacio como veremos a continuación.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, entonces $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$, esto implica por la regla de Leibniz que

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

La ecuación anterior nos dice que el vector α'' es ortogonal a α' . Ahora consideremos el vector $\alpha' \times \alpha''$, donde \times significa el producto exterior de los vectores α' y α'' . Observamos que este vector es ortogonal a α' y a α'' . El resultado de esta discusión la podemos resumir como sigue.

DEFINICIÓN 3.2. Dada una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco. El conjunto de vectores ortonormales $\{v(s), n(s), b(s)\}$, donde

$$\begin{aligned} v(s) &= \alpha'(s), \\ n(s) &= \frac{v'(s)}{\|v'(s)\|}, \\ b(s) &= v(s) \times n(s), \end{aligned}$$

se llama *triedro de Frenet-Serret* en el punto $\alpha(s)$. Los vectores $v(s)$, $n(s)$ y $b(s)$ se llaman *tangente*, *normal* y *binormal*, respectivamente.

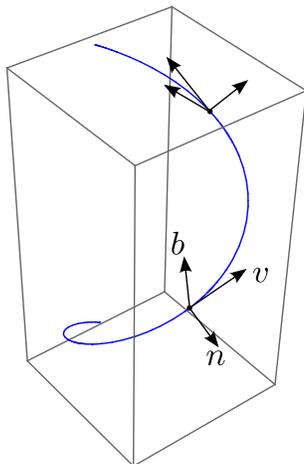


Figura 3.2: Triedro de Frenet-Serret en un punto

El triedro de Serret-Frenet ofrece información acerca de la curva, pues éste cambia conforme el parámetro s se mueve en I . Ahora, observemos que

$$n(s) = \frac{v'(s)}{\|v'(s)\|} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$

esto implica que $n(s)k(s) = \alpha''(s)$, donde $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ es la curvatura en el punto $\alpha(s)$, es decir,

$$\frac{d}{ds}v(s) = k(s)n(s). \quad (3.1)$$

Ahora, para el vector $b(s)$ se cumple que $\|b(s)\| = 1$, es decir, los vectores $b'(s)$ y $b(s)$ son ortogonales. Además, $b(s) = v(s) \times n(s)$, esto implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}b(s) &= \left(\frac{d}{ds}v(s) \times n(s) \right) + \left(v(s) \times \frac{d}{ds}n(s) \right) \\ &= (k(s)n(s) \times n(s)) + \left(v(s) \times \frac{d}{ds}n(s) \right) \\ &= v(s) \times \frac{d}{ds}n(s), \end{aligned}$$

entonces $b(s)'$ es ortogonal a $v(s)$ y $b(s)'$ debe estar en dirección de $n(s)$. Así

$$\frac{d}{ds}b(s) = \tau(s)n(s).$$

Por último, observemos que $n(s) = b(s) \times v(s)$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}n(s) &= \left(\frac{d}{ds}b(s) \times v(s) \right) + \left(b(s) \times \frac{d}{ds}v(s) \right) \\ &= (\tau(s)n(s) \times v(s)) + (b(s) \times k(s)n(s)) \\ &= -\tau(s)(v(s) \times n(s)) + k(s)(b(s) \times n(s)) \\ &= -\tau(s)b(s) - k(s)v(s). \end{aligned}$$

La discusión anterior implica que existen funciones $k(s)$ y $\tau(s)$ tales que

$$\frac{d}{ds}v(s) = k(s)n(s),$$

$$\frac{d}{ds}b(s) = \tau(s)n(s).$$

DEFINICIÓN 3.3. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco definimos a $\tau(s)$ como la *torsión* en el punto $\alpha(s)$.

La siguiente proposición nos dice que para un curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de al menos clase \mathcal{C}^3 podemos definir este marco.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco de al menos clase \mathcal{C}^3 . En cada punto sobre la imagen de α podemos definir el triedro de Frenet-Serret como el conjunto de vectores ortonormales que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}v(s) &= k(s)n(s), \\ \frac{d}{ds}n(s) &= -k(s)v(s) - \tau(s)b(s), \\ \frac{d}{ds}b(s) &= \tau(s)n(s). \end{aligned}$$

Para su demostración véase [19, pág. 18].

En forma matricial las ecuaciones de la proposición 3.1 se escriben como

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}.$$

Existen otros triedros que guardan información sobre la curva y cuya matriz también es anti-simétrica, como veremos en capítulos posteriores.

Ahora veamos, que como en el caso de las curvas planas el cálculo de la curvatura para curvas que no estén parametrizadas por longitud de arco es posible, como mostramos a continuación. Por el teorema 1.1 existe una función $h : J \rightarrow I$ tal que la composición $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco, calculamos

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \dot{\alpha}(t) \frac{dh}{ds}, \\ \beta''(s) &= \ddot{\alpha}(t) \left(\frac{dh}{ds} \right)^2 + \dot{\alpha}(t) \frac{d^2h}{ds^2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \beta'(s) \times \beta''(s) &= \left(\dot{\alpha}(t) \frac{dh}{ds} \right) \times \left(\ddot{\alpha}(t) \left(\frac{dh}{ds} \right)^2 + \dot{\alpha}(t) \frac{d^2h}{ds^2} \right) \\ &= \left(\dot{\alpha}(t) \frac{dh}{ds} \times \ddot{\alpha}(t) \left(\frac{dh}{ds} \right)^2 \right) + \left(\dot{\alpha}(t) \frac{dh}{ds} \times \dot{\alpha}(t) \frac{d^2h}{ds^2} \right) \\ &= \left(\frac{dh}{ds} \right)^3 (\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)). \end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que dado que la curva β está parametrizada por longitud de arco tenemos.

$$\beta'(s) \times \beta''(s) = (v(s) \times k(s)n(s)) = k(s)(v(s) \times n(s)) = k(s)b(s).$$

Así, obtenemos que

$$k(s)b(s) = \left(\frac{dh}{ds} \right)^3 (\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)).$$

De las ecuaciones 3.2 tenemos $\frac{dh}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|}$, por tanto

$$k(t) = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}.$$

§4. CURVATURA TOTAL Y NÚMERO DE PUENTES

En el capítulo 2 mostramos que la curvatura se puede encontrar de diferentes maneras siendo todas equivalentes. Conocida la curvatura en cada punto, nos preguntamos por el promedio de la curvatura a lo largo de toda una curva cerrada. Esto es parte de los problemas que estudia la geometría diferencial global y se conoce como *curvatura total*. En este capítulo estudiamos esta cantidad, en gran parte motivados por las notas de Liviu Nicolaescu en [20].

4.1 Curvatura total de un polígono

Para comenzar con la discusión consideramos un triángulo en el plano, el cual está determinado por los puntos p_0, p_1, p_2 , los cuales se llaman vértices del triángulo. Los lados del triángulo con orientación son los segmentos p_1p_0, p_2p_1, p_0p_2 , los ángulos interiores son $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$.

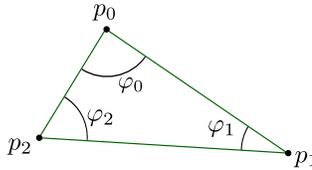


Figura 4.1

Una vez que definimos los lados del triángulo el ángulo $\theta_i = \pi - \varphi_i$, se llama *ángulo exterior*. Entonces, es bien conocido que se cumple

$$\begin{aligned}\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 &= (\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_0 + \varphi_2) + (\varphi_0 + \varphi_1) \\ &= 2(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2) \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

La discusión anterior podemos resumirla en que *la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 2π* . Pero nuestro objetivo va más allá de un triángulo, pues queremos estudiar lo que ocurre con la suma de ángulos exteriores para un polígono de m lados.

DEFINICIÓN 4.1. Un *polígono plano* P de m lados es una sucesión finita de puntos en el plano

$$p_0, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m,$$

los cuales solo requieren que $p_i \neq p_{i+1}$, para $i = 0, \dots, m - 2$, y $p_m = p_0$. Estos puntos se llaman *vértices* y los segmentos $p_i p_{i-1}$, con $i = 1, \dots, m$, son los *lados* del polígono. En caso de que la región que acota un polígono es convexa¹ diremos que el polígono es *convexo*.

¹Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es *convexo* si para cualesquiera $u, v \in A$, $\lambda u + (1 - \lambda)v \in A$, para todo $\lambda \in (0, 1)$.

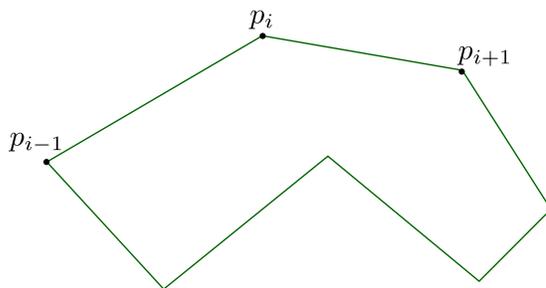


Figura 4.2: Polígono en el plano.

Observemos que los vértices del polígono determinan los vectores unitarios

$$\gamma_i = \frac{p_i - p_{i-1}}{\|p_i - p_{i-1}\|}, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Denotamos por θ_i al ángulo entre los vectores γ_{i+1} y γ_i que satisfacen $0 \leq \theta_i \leq \pi$, para $i = 1, \dots, m-1$, y θ_m es el ángulo entre γ_m y γ_1 . De esta manera, usamos los ángulos exteriores para una primera definición de curvatura total, en el caso de un polígono.

DEFINICIÓN 4.2. La *curvatura total* de un polígono P en el plano es

$$\text{CT}(P) = \sum_{i=1}^m \theta_i.$$

A continuación, se muestra cómo se comporta la curvatura total de un polígono convexo.

PROPOSICIÓN 4.1. Si P es un polígono convexo, entonces

$$\text{CT}(P) = 2\pi.$$

Demostración. Sean p_0, p_1, \dots, p_m los vértices del polígono convexo P . La curvatura total de P es

$$\text{CT}(P) = \sum_{i=1}^m \theta_i = \theta_1 + \dots + \theta_{i-1} + \theta_i + \theta_{i+1} + \dots + \theta_m.$$

Supongamos que eliminamos el vértice p_i del polígono P (véase la figura 4.3). Denotemos por P_{m-1} a este nuevo polígono, el cual tiene curvatura total

$$\text{CT}(P_{m-1}) = \theta_1 + \dots + \tilde{\theta}_{i-1} + \tilde{\theta}_{i+1} + \dots + \theta_m, \quad (4.1)$$

donde $\tilde{\theta}_{i-1}$ y $\tilde{\theta}_{i+1}$ son los ángulos formados al eliminar el vértice p_i . Por la convexidad de P estos ángulos cumplen que

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{i-1} &= \theta_{i-1} + a, \\ \tilde{\theta}_{i+1} &= \theta_{i+1} + b. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (4.1) y usando el hecho que $\theta_i = a + b$, se obtiene que

$$\text{CT}(P) = \text{CT}(P_{m-1}).$$

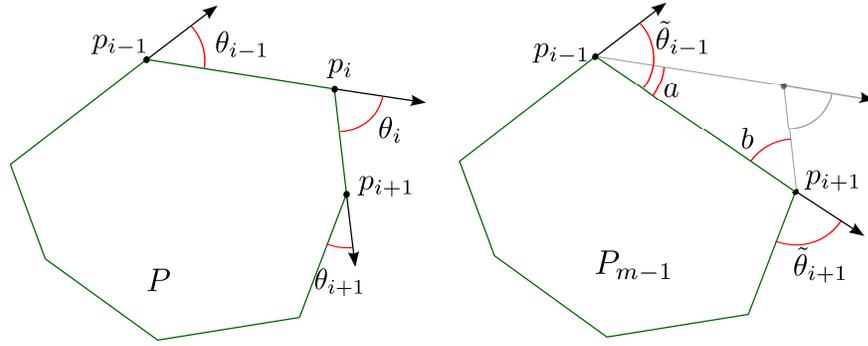


Figura 4.3: Polígonos convexos

Procediendo recursivamente se tiene la cadena de igualdades

$$CT(P) = CT(P_{m-1}) = \dots = CT(P_3) = 2\pi.$$

□

En la proposición anterior construimos un polígono a partir de uno dado quitando un vértice. En general, podemos construir polígonos por *adjunción* de vértices por lo cual tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.3. Sean p_0, \dots, p_m los vértices de un polígono P y \tilde{p} un punto distinto de los vértices de P , la *adjunción* de \tilde{p} a P es añadir el vértice \tilde{p} al conjunto de vértices $p_0, \dots, p_{i-1}, p_i, \dots, p_m$ de tal forma que estos vértices formen un nuevo polígono.

Lo interesante ocurre al calcular la curvatura total de un polígono que no es convexo. Para esto consideremos el polígono P convexo cuyos vértices son p_0, \dots, p_m y P' el polígono cuyos vértices son los mismos que P más un vértice \tilde{p} de tal forma que la adjunción de este vértice forme un polígono que no es convexo (véase la figura 4.4). De la proposición anterior, $CT(P) = 2\pi$, donde

$$CT(P) = \theta_1 + \dots + \theta_{i-1} + \theta_i + \theta_{i+1} + \dots + \theta_m.$$

Por otro lado

$$CT(P') = \theta_1 + \dots + \tilde{\theta}_{i-1} + \tilde{\theta} + \tilde{\theta}_i + \dots + \theta_m, \quad (4.2)$$

donde $\tilde{\theta}_{i-1}$ es el ángulo formado por los vectores $\tilde{\gamma}_{i-1}$ y $\tilde{\gamma}_{i-1}$. El ángulo $\tilde{\theta}_i$ está formado por $\tilde{\gamma}_i$ y $\tilde{\gamma}_i$, y $\tilde{\theta}$ es el ángulo formado por los vectores $\tilde{\gamma}_{i-1}, \tilde{\gamma}_i$, donde

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{i-1} &= \frac{\tilde{p} - p_{i-1}}{\|\tilde{p} - p_{i-1}\|}, \\ \tilde{\gamma}_i &= \frac{p_i - \tilde{p}}{\|p_i - \tilde{p}\|}. \end{aligned}$$

Si a, b, c son los ángulos interiores del triángulo formado por los vértices p_{i-1}, \tilde{p} y p_i , entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{i-1} &= \theta_{i-1} + b, \\ \tilde{\theta}_i &= \theta_i + c, \\ \tilde{\theta} &= b + c. \end{aligned}$$

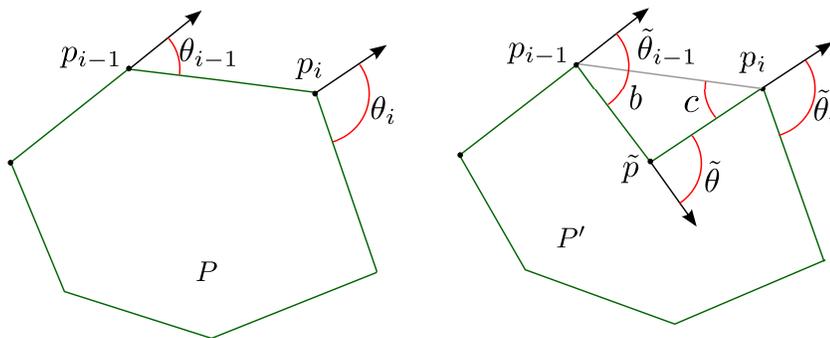


Figura 4.4

Sustituyendo estas igualdades en (4.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{CT}(P') &= \theta_1 + \theta_2 + \cdots + (\theta_{i-1} + b) + (b + c) + (\theta_i + c) + \cdots + \theta_m \\ &= \text{CT}(P) + 2(b + c). \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\text{CT}(P') > \text{CT}(P).$$

La discusión se resume en que la curvatura total de un polígono al que adjuntamos un vértice es mayor que el polígono original. Es decir, es válida la última desigualdad y así, se tiene por la proposición 4.1 el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.2. *Si P un polígono no convexo, entonces*

$$\text{CT}(P) > 2\pi.$$

El problema de calcular la curvatura total de un polígono en el espacio es similar al del plano lo único que perdemos es la idea de convexidad. Comencemos por definir la curvatura total de un polígono. La definición siguiente es análoga al de un polígono en el plano.

DEFINICIÓN 4.4. Un *polígono* P de m lados en el espacio es una sucesión finita de puntos

$$p_0, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m,$$

en el espacio, los cuales solo requieren que $p_i \neq p_{i+1}$, para $i = 0, \dots, m-2$, y $p_0 = p_m$. Estos puntos se llaman *vértices* y los segmentos $p_i p_{i-1}$, con $i = 1, \dots, m$, son los *lados* del polígono.

El siguiente lema nos da una relación entre $\text{CT}(P)$ y $\text{CT}(P')$ donde P' se obtiene de P adjuntando un vértice más.

LEMA 4.1. *La adjunción de un nuevo vértice a un polígono cerrado no disminuye la curvatura total.*

Demostración. Sean $p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_m$ los vértices de un polígono P en el espacio y P' un polígono con vértices $p_0, \dots, p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, \dots, p_m$. Sean θ'_i los ángulos exteriores del polígono P'

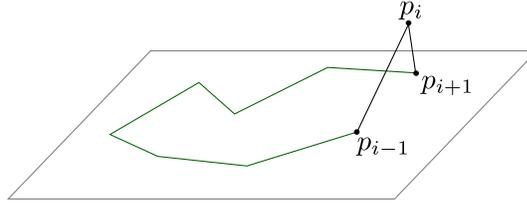


Figura 4.5: Polígono en el espacio.

y θ_i los ángulos exteriores del polígono P . Denotemos por β^- al ángulo formado por los vectores γ_{i-1} y γ_i , y por β^+ al ángulo entre γ_i y γ_{i+1} , donde $\gamma = \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{\|p_{j+1} - p_{j-1}\|}$. Se tiene la siguiente relación

$$\beta^- + \beta^+ = \theta_j. \quad (4.3)$$

Entonces,

$$\text{CT}(P) - \text{CT}(P') = \theta_{j+1} + \theta_j + \theta_{j-1} - \theta'_{j+1} - \theta'_{j-1}. \quad (4.4)$$

Usando la desigualdad del triángulo para triángulos esféricos obtenemos

$$\begin{aligned} \beta^- + \theta_{j-1} &\geq \theta'_{j-1}, \\ \beta^+ + \theta_{j+1} &\geq \theta'_{j+1}. \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (4.3), (4.4) y la ecuaciones anteriores se sigue que

$$\text{CT}(P) - \text{CT}(P') \geq 0$$

□

Observamos que la curvatura total se mantiene al adjuntar un vértice, si el vértice p_j es colineal a p_{j-1}, p_{j+1} , en el caso del plano, como hemos visto, esto depende de la posición de los vértices $p_{j-2}, p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, p_{j+2}$, y por lo tanto $\text{CT}(P')$ aumenta si estos vértices acotan una región no convexa y no aumenta si acotan una región convexa.

COROLARIO 4.1. *Si el vértice p_j es remplazado por p'_j el cual es colineal con los vértices p_{j-1}, p_{j+1} , entonces la curvatura decrece.*

4.2 El número de puentes de un polígono

El aporte principal de J. Milnor en [16] es la técnica que utilizó para la demostración del teorema principal. Está consiste en construir un invariante el cual tiene una muy cercana relación con la curvatura total de una curva. Este nuevo invariante es llamado *número de puentes* de la curva.

Consideremos un polígono P en el espacio con vértices p_0, \dots, p_m , el vector γ_i define una función $\gamma_P: V_P \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$\gamma_P(p_i) = \gamma_i,$$

donde V_P es el conjunto de vértices del polígono P . La función γ_P se llama la *aplicación tangente del polígono P* . De forma similar el ángulo θ_i define una función $\theta_P: V_P \rightarrow [0, \pi)$ dada por

$$\theta_P(p_i) = \theta_i.$$

DEFINICIÓN 4.5. Sea P un polígono en el espacio, definimos la *curvatura total normalizada* de P como

$$\overline{\text{CT}}(P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in V_P} \theta_P(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \theta_i.$$

De la definición 4.5 tenemos que $\text{CT}(P) = 2\pi \overline{\text{CT}}(P)$, por la proposición 4.2, si P es un polígono convexo plano obtenemos que $\overline{\text{CT}}(P) = 1$.

Si P es un polígono, la imagen de los vértices p_i, p_{i+1} bajo γ_P determinan un círculo máximo en \mathbb{S}^2 , éste se obtiene mediante la intersección del plano que contiene a $\gamma_P(p_i), \gamma_P(p_{i+1})$ y al origen con \mathbb{S}^2 . Los puntos $\gamma_P(p_i), \gamma_P(p_{i+1})$ determinan dos arcos en este círculo máximo. Denotamos por σ_i al arco con menor longitud, observamos que la longitud en la esfera del arco σ_i es igual a θ_i . Estos arcos a su vez determinan una curva poligonal en \mathbb{S}^2 la cual denotaremos con σ_P (véase la figura 4.6). De esta manera se tiene que la curvatura total de un polígono P es

$$\overline{\text{CT}}(P) = \frac{1}{2\pi} (\text{Longitud } \sigma_P).$$

La discusión anterior se resume en que la imagen bajo la aplicación tangente del polígono P es

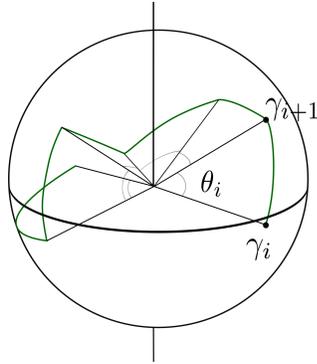


Figura 4.6: Curva poligonal en \mathbb{S}^2

un polígono esférico cuya longitud coincide con la curvatura total del polígono.

Ahora que ya hemos estudiado varias propiedades de los polígonos en el plano y espacio, presentamos a continuación la construcción del *número de puentes de un polígono*. Para tal efecto, consideremos un vector $u \in \mathbb{S}^2$, el cual determina la funcional $f_u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_u(x) = \langle u, x \rangle.$$

La funcional f_u restringida a P induce una funcional continua $\ell_u: P \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $\ell_u(x) = \langle u, x \rangle$, donde x es un punto sobre el polígono P . Observe que geoméricamente, ℓ_u proyecta el polígono P sobre la recta generada por u .

DEFINICIÓN 4.6. Un mínimo local de la función ℓ_u es un punto p tal que

$$\ell_u(p) < \ell_u(x),$$

para todo x en una vecindad de p .

Geoméricamente, un mínimo local de ℓ_u es un punto p sobre el polígono P de tal forma que la proyección de p sobre la recta generada por u es de norma mínima, entonces para cada $u \in \mathbb{S}^2$ definimos la función $\mu_u: V_P \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\mu_u(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \text{ es mínimo local de } \ell_u; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función μ_u nos dice si un vértice de P es mínimo local de ℓ_u para un vector $u \in \mathbb{S}^2$. De esta manera dado un polígono P , podemos contar los vértices en V_P que son mínimos locales de ℓ_u , entonces definimos la función $\tilde{\mu}_P: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\mu}_P(u) = \sum_{p \in V_P} \mu_u(p),$$

que cuenta el número de mínimos locales en P asociados a ℓ_u .

DEFINICIÓN 4.7. Un vector $u \in \mathbb{S}^2$ es *no degenerado* si la función ℓ_u toma distintos valores en cada vértice de V_P . En otro caso, decimos que u es un *vector degenerado*. El conjunto de puntos en \mathbb{S}^2 degenerados se denota por

$$\Delta_P = \{u \in \mathbb{S}^2 : u \text{ es degenerado}\},$$

y denotamos a $\mathbb{S}^2 \setminus \Delta_P$ por Ω_P .

Observemos que si $u \in \mathbb{S}^2$ es un vector degenerado entonces existen vértices p_i, p_j distintos en V_P tal que

$$\langle u, p_i - p_j \rangle = 0.$$

Es decir, el vector $p_j - p_i$ es perpendicular al vector u (véase la figura 4.7).

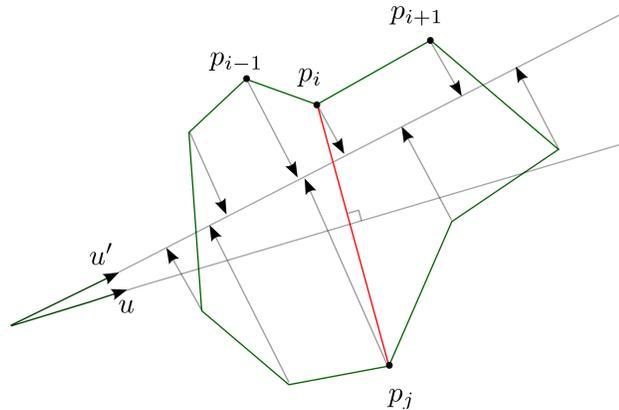


Figura 4.7: Vector no degenerado

AFIRMACIÓN 4.1. Si B_{ij} es el círculo máximo que se obtiene de la intersección de \mathbb{S}^2 con el plano que es perpendicular a la recta generada por $p_j - p_i$. Si $w \in B_{ij}$, entonces w es degenerado.

Demostración. Esto se debe a que el plano perpendicular a $p_i - p_j$ tiene como ecuación a $\langle p_i - p_j, x \rangle = 0$.

□

AFIRMACIÓN 4.2. *Se cumple la siguiente igualdad*

$$\Delta_P = \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} B_{ij}. \quad (4.5)$$

Demostración. Para cada $p_i, p_j \in V_P$ distintos, generamos la recta H_{ij} paralela al vector $p_j - p_i$, consideramos el plano perpendicular a H_{ij} que pase por el origen. La intersección de H_{ij} con \mathbb{S}^2 es B_{ij} . Como el número de combinaciones es finito, el número de círculos máximos es finito. Por tanto, la unión es finita.

□

Observemos que el conjunto Δ_P tiene área cero. Por tanto el conjunto de vectores no degenerados es casi todo \mathbb{S}^2 . Observemos que los círculos máximos B_{ij} dividen a \mathbb{S}^2 en un número finito de los polígonos esféricos. Esto implica que el conjunto de vectores no degenerados es la unión de los interiores de un número finito de polígonos esféricos. De esta manera podemos escribir

$$\Omega_P = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{P}_j, \quad (4.6)$$

donde \mathcal{P}_j denota el interior de cada polígono esférico.

PROPOSICIÓN 4.3. *Si $u_0, u_1 \in \mathcal{P}_j$ para $j = 1, \dots, n$, entonces*

$$\tilde{\mu}_P(u_0) = \tilde{\mu}_P(u_1).$$

Demostración. Sea $u: [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_j$ una curva tal que $u(0) = u_0$ y $u(1) = u_1$. Consideremos $p_i \in V_P$. Debido a que $u(t)$ es un vector no degenerado

$$\langle u(t), p_{i-1} - p_i \rangle \text{ y } \langle u(t), p_{i+1} - p_i \rangle,$$

son distintas de cero para todo $t \in [0, 1]$. Además, el signo de estas cantidades no depende del parámetro t , depende de la posición de los vectores, entonces p_i es mínimo local de ℓ_{u_0} si y sólo si

$$\langle u(0), p_{i-1} - p_i \rangle > 0 \text{ y } \langle u(0), p_{i+1} - p_i \rangle > 0,$$

lo que implica que

$$\langle u(1), p_{i-1} - p_i \rangle > 0 \text{ y } \langle u(1), p_{i+1} - p_i \rangle > 0.$$

El hecho de que p_i es mínimo local de ℓ_{u_0} equivale a que p_i sea mínimo local de ℓ_{u_1} . De forma similar se prueba para cada $p_j \in V_P$. Por tanto

$$\tilde{\mu}_P(u_0) = \tilde{\mu}_P(u_1).$$

□

La prueba de la proposición 4.3 nos dice que para cada \mathcal{P}_j la función $\tilde{\mu}_P$ es constante. El siguiente lema es una consecuencia de este hecho.

LEMA 4.2. Si P un polígono en el espacio, entonces

$$\overline{\text{CT}}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_P(u) dA_u.$$

Demostración. Observemos que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_P(u) dA_u = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\sum_{p \in V_P} \mu_u(p) \right) dA_u = \frac{1}{4\pi} \sum_{p \in V_P} \int_{\mathbb{S}^2} \mu_u(p) dA_u.$$

Como el conjunto de vértices de polígono P es $V_P = \{p_1, \dots, p_m\}$, entonces escribimos

$$\sum_{p \in V_P} \mu_u(p) = \sum_{i=1}^m \mu_u(p_i). \text{ De esta manera tenemos}$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{p \in V_P} \int_{\mathbb{S}^2} \mu_u(p) dA_u = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{S}^2} \mu_u(p_i) dA_u.$$

Basta calcular la siguiente integral

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mu_u(p_i) dA_u.$$

Sea $D_i = \{u \in \mathbb{S}^2 : \langle u, p_i \rangle \leq \langle u, p_{i-1} \rangle \text{ y } \langle u, p_i \rangle \leq \langle u, p_{i+1} \rangle\}$, notemos que p_i es un mínimo local de ℓ_u si $u \in \mathbb{S}^2 \cap D_i$. Por tanto, si $u \in D_i$, se cumple que

$$\langle u, p_{i-1} - p_i \rangle > 0 \text{ y } \langle u, p_{i+1} - p_i \rangle > 0.$$

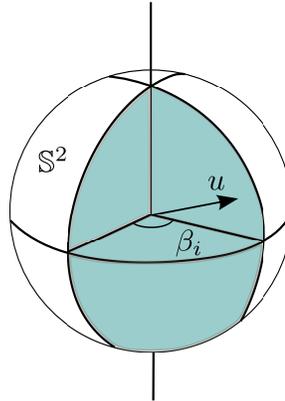


Figura 4.8: Media luna

Esto último depende del ángulo formado por los vectores $p_{i-1} - p_i$ y $p_{i+1} - p_i$ con el vector u . Lo cual implica que u debe estar comprendido en un ángulo β que es igual al ángulo comprendido entre los planos perpendiculares a $p_{i-1} - p_i$ y $p_{i+1} - p_i$. La región donde u es un mínimo local corresponde a la media luna cuya área es igual a 2β (véase la figura 4.8). Así, tenemos la cadena de igualdades

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{p \in V_P} \int_{\mathbb{S}^2} \mu_u(p) dA_u = \frac{1}{4\pi} \sum_{p \in V_P} 2\beta = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \beta_i.$$

Además, $\beta_i = \theta_i$. Por tanto

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_P(u) dA_u = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \beta_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \theta_i = \overline{\text{CT}}(P),$$

lo que termina la prueba. \square

El lema 4.2 es una primera versión del resultado de J. Milnor. Ahora, buscaremos llevar este resultado a una curva en el espacio de dimensión tres.

4.3 Curvatura total de una curva

Una vez que analizamos la curvatura total de un polígono deseamos obtener resultados similares para curvas en el espacio. Para esto consideremos una curva cerrada simple. A cada punto sobre la imagen en la curva es posible asignarle un punto sobre la esfera y formar una nueva curva en la misma. La manera de hacerlo es la siguiente.

DEFINICIÓN 4.8. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrada, simple y regular. La función $\gamma_\alpha: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$\gamma_\alpha(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|},$$

se llama *aplicación tangente* de la curva α . A la imagen de I bajo γ_α se le llama *curva tangente* de α .

Consideremos ahora un curva cerrada, y observemos que a esta curva se le puede asociar un polígono, como nos muestra la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.9. Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrada simple y P un polígono con vértices $p_i = \alpha(t_i)$, donde $a = t_0, t_1, \dots, t_m = b \in [a, b]$ con $t_i < t_{i+1}$, entonces el polígono P se dice que es un *polígono inscrito* en α .

Por aproximación de polígonos inscritos, el siguiente lema caracteriza a la curvatura total definida en 4.5 como el supremo de polígonos inscritos.

LEMA 4.3. Si P es un polígono, entonces

$$\overline{\text{CT}}(P) = \sup\{\overline{\text{CT}}(P')\},$$

donde P' pertenece al conjunto de los polígonos inscritos en P .

Demostración. Supongamos que P_n es un polígono de n vértices tal que coincide con los primeros n vértices de P . Por el lema 4.1 se cumple que $\overline{\text{CT}}(P) \geq \overline{\text{CT}}(P_n)$. Si por adjunción producimos una secuencia de polígonos P_{n+1}, \dots, P_m adjuntando los vértices restantes. El lema 4.1 nos dice que

$$\overline{\text{CT}}(P_m) \geq \dots \geq \overline{\text{CT}}(P_{n+1}),$$

como $P_m = P$, se tiene que $\overline{\text{CT}}(P) = \sup\{\overline{\text{CT}}(P')\}$. \square

El lema 4.3 da lugar a la definición de curvatura total.

DEFINICIÓN 4.10. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrada, definimos la *curvatura total* de la curva α como

$$\kappa(\alpha) = \sup\{\overline{\text{CT}}(P)\},$$

donde P pertenece al conjunto de los polígonos inscritos en la curva α .

El siguiente resultado caracteriza la curvatura total de una curva como el promedio de las curvaturas de la curva.

TEOREMA 4.1. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco de al menos clase \mathcal{C}^2 , entonces

$$\kappa(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_I \|\alpha''(s)\| ds.$$

Demostración. Consideremos una sucesión de polígonos $\{P_m\}$ inscritos en la curva de tal forma que $\lim_{m \rightarrow \infty} (s_{i+1}^m - s_i^m) = 0$, y el punto $\tilde{s}_i^m = \frac{1}{2}(s_i^m + s_{i+1}^m)$, entonces la imagen de los puntos \tilde{s}_i^m bajo la aplicación tangente γ_α es un polígono esférico tal que tiene como longitud $\sum_{i=1}^m \eta_i^m$, donde η_i^m es el ángulo entre los vectores $\gamma_\alpha(\tilde{s}_i^m)$ y $\gamma_\alpha(\tilde{s}_{i+1}^m)$. Esta sucesión cumple

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \eta_i^m = \int_I \|\alpha''(s)\| ds.$$

Por hipótesis la curva α es clase \mathcal{C}^2 , se tiene pues, que $\alpha''(s)$ es una curva continua y por tanto es uniformemente continua en I . Es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\|\alpha''(u) - \alpha''(v)\| < \epsilon$, si $|u - v| < \delta$. Como

$$\begin{aligned} \alpha(s_{i+1}^m) - \alpha(s_i^m) &= (s_{i+1}^m - s_i^m)\alpha'(\tilde{s}_i^m) + \int_{\tilde{s}_i^m}^{s_{i+1}^m} (\alpha''(u) - \alpha''(\tilde{s}_i^m)) du \\ &\quad + \int_{s_i^m}^{\tilde{s}_i^m} (\alpha''(\tilde{s}_i^m) - \alpha''(u)) du, \end{aligned}$$

Por la continuidad uniforme tenemos que

$$\left\| \frac{\alpha(s_{i+1}^m) - \alpha(s_i^m)}{s_{i+1}^m - s_i^m} - \alpha'(\tilde{s}_i^m) \right\| < (s_{i+1}^m - s_i^m) \frac{\epsilon}{4}, \quad (4.7)$$

siempre que $\max_i \{s_{i+1}^m - s_i^m\} < \delta$. La desigualdad anterior nos dice que el vector $\frac{\alpha(s_{i+1}^m) - \alpha(s_i^m)}{s_{i+1}^m - s_i^m}$ está en una bola abierta de radio $\frac{\epsilon}{4}(s_{i+1}^m - s_i^m)$ con centro en $\alpha'(\tilde{s}_i^m)$. Sea φ_i^m el ángulo entre $\alpha(s_{i+1}^m) - \alpha(s_i^m)$ y $\alpha'(\tilde{s}_i^m)$, observemos que φ_i^m es igual al ángulo entre $\alpha'(\tilde{s}_i^m)$ y γ_{i+1} , donde

$$\gamma_{i+1} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\|p_{i+1} - p_i\|} = \frac{\alpha(s_{i+1}^m) - \alpha(s_i^m)}{\|\alpha(s_{i+1}^m) - \alpha(s_i^m)\|},$$

se tiene que $\text{sen } \varphi_i^m < (s_{i+1}^m - s_i^m) \frac{\epsilon}{4}$. Para ϵ suficiente pequeño obtenemos

$$\varphi_i \leq 2 \text{sen } \varphi_i^m \leq (s_{i+1}^m - s_i^m) \frac{\epsilon}{2}.$$

Observemos que los vectores en γ_i, γ_{i+1} y $\alpha'(\tilde{s}_i^m)$ forman un triángulo esférico, aplicamos la desigualdad del triángulo para triángulos esféricos y obtenemos que

$$\theta_i^m \leq \eta_i^m + \varphi_i^m + \varphi_{i-1}^m,$$

$$\eta_i^m \leq \theta_i^m + \varphi_i^m + \varphi_{i-1}^m,$$

donde θ_i^m es el ángulo entre los vectores γ_{i-1} y γ_i . Las desigualdades anteriores implican que $|\theta_i^m - \eta_i^m| \leq (s_{i+1}^m - s_i^m) \frac{\epsilon}{2}$, con lo que obtenemos

$$\left| \sum_{i=1}^m \theta_i^m - \sum_{i=1}^m \eta_i^m \right| \leq l\epsilon.$$

Por lo tanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\text{CT}}(P_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \theta_i^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \eta_i^m = \frac{1}{2\pi} \int_I \|\alpha''(s)\| ds.$$

Para mostrar que $\frac{1}{2\pi} \int_I \|\alpha''(s)\| ds = \sup\{\overline{\text{CT}}(P)\}$, habremos que demostrar que $\frac{1}{2\pi} \int_I \|\alpha''(s)\| ds$ es una cota superior de los polígonos inscritos en la curva α . Observemos que es posible construir una sucesión de polígonos $\{P_m\}$ tal que

$$\overline{\text{CT}}(P_1) \leq \dots \leq \overline{\text{CT}}(P_{m-1}) \leq \overline{\text{CT}}(P_m) \leq \overline{\text{CT}}(P_{m+1}) \leq \dots$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\overline{\text{CT}}(P_m) \leq \frac{1}{2\pi} \int_I \|\alpha''(s)\| ds,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. □

En este punto cabe aclarar que podemos escribir $\kappa(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_I \|\alpha''(s)\| ds = \frac{1}{2\pi} \int_I k(s) ds$, pero como hemos visto, parametrizar una curva por longitud de arco puede ser una tarea muy difícil, en tal caso usando las ecuaciones (3.2) del capítulo 3, obtenemos que si $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada de al menos clase \mathcal{C}^2 , entonces

$$\kappa(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_I k(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(t) \|\dot{\alpha}(t)\| dt. \quad (4.8)$$

Una vez que demostrado el teorema 4.1, presentamos una forma de construir polígonos inscritos en una curva. Consideremos una curva parametrizada por longitud de arco y empezamos por dividir el intervalo $I = [0, l]$ en segmentos de longitud $\frac{l}{2^n}$, donde $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Aproximamos la curva por una sucesión de curvas poligonales obtenidas de la siguiente forma

1. El polígono P_0 tiene 2^n vértices donde el vértice p_i^0 cumple $p_i^0 = \alpha(s_i^0)$, donde $s_i^0 = \frac{il}{2^n}$ para $i = 0, \dots, 2^n$.
2. El polígono P_1 tiene 2^{n+1} vértices y se obtiene dividiendo el intervalo I en segmentos de longitud $\frac{l}{2^{n+1}}$ donde $p_i^1 = \alpha(s_i^1)$, con $s_i^1 = \frac{il}{2^{n+1}}$ para $i = 0, \dots, 2^{n+1}$.

3. En general, el polígono P_m tiene 2^{n+m} vértices y se construye dividiendo el intervalo $[0, l]$ en segmentos de longitud $\frac{l}{2^{n+m}}$ de tal forma que $p_i^m = \alpha(s_i^m)$, con $s_i^m = \frac{il}{2^{n+m}}$ para $i = 0, \dots, 2^{n+m}$.

Los vértices de los polígonos P_m y P_{m+1} cumplen que $V_{P_m} \subset V_{P_{m+1}}$, esto se debe a que el conjunto de vértices de P_{m+1} contiene a los vértices de P_m y los vértices generados por los puntos medios de $[s_i^m, s_{i-1}^m]$. Además, para P_m se cumple que

$$L_\alpha(s_i^m) - L_\alpha(s_{i-1}^m) = \frac{l}{2^{n+m}}.$$

A continuación, consideremos el conjunto $V_\infty = \bigcup_{m \geq 0} V_{P_m}$, observemos que si $p \in V_\infty$, entonces existe $m \geq 0$, tal que $p \in V_{P_m}$, lo cual implica que $p = p_i^m = \alpha(s_i^m)$, donde p_i^m es el vértice en V_{P_m} que coincide con p . Para un vértice $p_i^m \in V_{P_m}$ se cumple que para $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{P_{m+j}}(p_i^m) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_{2^j i}^{m+j} - p_{2^j(i-1)}^{m+j}}{\|p_{2^j i}^{m+j} - p_{2^j(i-1)}^{m+j}\|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha(s_{2^j i}^{m+j}) - \alpha(s_{2^j(i-1)}^{m+j})}{\|\alpha(s_{2^j i}^{m+j}) - \alpha(s_{2^j(i-1)}^{m+j})\|} = \gamma_\alpha(s_i^m).$$

Observamos que la imagen esférica de la curva α tiene longitud $\int_I \|\alpha''(s)\| ds$. Por otro lado los vectores $\gamma_\alpha(s_i^m)$ generan un polígono esférico P_m que tiene longitud $\sum_{i=1}^{2^{n+m}} \theta_i^m$. Entonces para m muy grande obtenemos

$$\sum_{i=1}^{2^{n+m}} \theta_i^m \approx \int_I \left\| \frac{d\alpha'}{ds} \right\| ds.$$

Como lo muestra el teorema 4.1, la igualdad ocurre en el límite.

Toda la discusión precedente nos ayuda a demostrar el teorema más importante de este capítulo, el cual es el caso general del lema 4.2. A continuación enunciamos el teorema.

TEOREMA 4.2. *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco de al menos clase \mathcal{C}^2 , entonces*

$$\kappa(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_\alpha(u) dA_u.$$

Demostración. En el caso de polígonos se ha mostrado que la igualdad anterior se cumple. Consideremos ahora la colección de polígonos con 2^n vértices. Sean P_m, P_{m+1} y $u \in \mathbb{S}^2$, se cumple que $V_{P_m} \subset V_{P_{m+1}}$, lo cual implica que

$$\tilde{\mu}_{P_m}(u) = \sum_{p \in V_{P_m}} \mu_u(p) \leq \sum_{p \in V_{P_{m+1}}} \mu_u(p) = \tilde{\mu}_{P_{m+1}}(u),$$

la desigualdad anterior nos dice que tenemos una sucesión de funciones con valores positivos, creciente tal que $\tilde{\mu}_{P_m} \leq \tilde{\mu}_{P_{m+1}} \leq \tilde{\mu}_\alpha$.

Sea $u \in \mathbb{S}^2$, probemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{P_m}(u) = \tilde{\mu}_\alpha(u)$. Supongamos que $\tilde{\mu}_\alpha(u)$ es finito, es decir, el número de mínimos locales asociados a la función ℓ_u es finito. Por lo tanto existen, s_1^m, \dots, s_n^m

tal que $\ell(s_i^m)$ es mínimo. Elegimos el radio más pequeño de estas vecindades de tal forma que $\ell(s_i^m) \leq \ell(s)$, para todo $x \in I$ tal que $|s - s_i^m| < \epsilon$. Podemos encontrar $m, n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\frac{l}{2^{n+m}} < \epsilon.$$

Esto nos permite construir un polígono P_m con vértices en la vecindades donde la función ℓ_u alcanza un mínimo. De tal forma que $\tilde{\mu}_{P_m}(u) = \tilde{\mu}_\alpha(u)$.

Si $\tilde{\mu}_\alpha(u) = \infty$, el conjunto de valores de s para los cuales la función ℓ_u es mínimo debe contener un subconjunto $\{s_{2i}\}$ tal que

$$s_0 < s_2 < \dots < \lim_{i \rightarrow \infty} s_{2i} < \dots < l.$$

Seleccionando una sucesión de valores intermedios s_{2i+1} tales que $\ell_u(s_{2i}) < \ell_u(s_{2i-1})$ y $\ell_u(s_{2i}) < \ell_u(s_{2i+1})$, dado cualquier $2j < \infty$, seleccionamos vecindades de $\alpha(s_i)$ para $i < 2j$, suficientemente pequeño de tal forma que cualquier polígono con al menos un vértice en cada vecindad tenga $j - 1$ mínimos. Esto se cumple para m suficientemente grande.

La discusión anterior implica que $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{P_m} = \tilde{\mu}_\alpha$ y cada una de las integrales $\int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_{P_m}(u) dA_u$ existe. Aplicamos el teorema de la convergencia monótona² a las funciones $\tilde{\mu}_{P_m}$, así

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_{P_m}(u) dA_u = \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_\alpha(u) dA_u. \quad (4.9)$$

Por otro lado, del teorema 4.1 obtenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_{P_m}(u) dA_u = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2^{n+m}} \theta_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\text{CT}}(P_m) = \kappa(\alpha). \quad (4.10)$$

Concluimos de las ecuaciones (4.9) y (4.10) que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_\alpha(u) dA_u = \kappa(\alpha),$$

que es lo que se quería demostrar. □

Los resultados obtenidos sobre $\tilde{\mu}_\alpha$ dan pie a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.11. Sean $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco. El número de puentes de la curva α es

$$\mu(\alpha) = \min_{u \in \mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_\alpha(u).$$

Del teorema 4.2 concluimos el siguiente resultado.

COROLARIO 4.2. Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco de al menos clase \mathcal{C}^2 , entonces

$$\kappa(\alpha) \geq \mu(\alpha). \quad (4.11)$$

²El teorema de la convergencia monótona dice que, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones crecientes positivas que convergen a f entonces $\int f = \lim \int f_n$. Para una prueba de este teorema véase [3, pág. 31]

Demostración.

$$\kappa(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\mu}_\alpha(u) dA_u \geq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \mu(\alpha) dA_u = \frac{\mu(\alpha)}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} dA_u = \mu(\alpha).$$

□

La siguiente definición es una equivalencia de convexidad para curvas en el plano.

DEFINICIÓN 4.12. Una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cerrada es *convexa*, si cualquier recta que interseca a la curva, lo hace en a lo más dos puntos.

A diferencia de la definición 2.5, la anterior podemos aplicarla para polígonos en el plano, como mostramos en el siguiente resultado.

LEMA 4.4. *Un polígono cerrado P es convexo si y sólo si para cada $u \in \mathbb{S}^2$ se cumple que $\tilde{\mu}_P(u) = 1$, o $\tilde{\mu}_P(u) = \infty$.*

Demostración. Probamos la necesidad. Supongamos que P es un polígono en el plano tal que para cualquier $u \in \mathbb{S}^2$, $\tilde{\mu}_P(u) = 1$ o $\tilde{\mu}_P(u) = \infty$.

1. Si $\tilde{\mu}_P(u) = 1$, existe $p_{j_0} \in V_P$, tal que $\mu_u(p_{j_0}) = 1$, el vértice p_{j_0} es la mínima proyección de todos los vértices de P . Consideramos a H_u la recta perpendicular al vector u , entonces H_u interseca al polígono P en a lo más dos puntos, de lo contrario si H_u toca a P en puntos x_1, x_2, x_3 se tiene que existe un punto x_4 tal que H_u interseca a P en este punto, lo que nos dice que $\tilde{\mu}_P(u) = 2$, esto es una contradicción pues $\mu_P(u) = 1$.
2. Si $\tilde{\mu}_P(u) = \infty$, y H_u es una recta perpendicular a u la cual interseca a P un número finito de veces, digamos r veces, entonces rotamos H_u con respecto a uno de sus puntos de intersección con P de tal forma que el número de intersecciones se mantenga, entonces existen u' y $H_{u'}$ perpendicular a u' tal que $\tilde{\mu}_P(u') < \infty$ y el número de intersecciones con P es $r' \geq r$, por el primer caso $r' \leq 2$, y por tanto $r \leq 2$.

En ambos casos, dado $u \in \mathbb{S}^2$ encontramos rectas perpendiculares a u tal que el número de intersecciones con P es a lo más dos, pero esto es la condición de convexidad. □

La consecuencia de los resultados anteriores se ve reflejada en el famoso teorema de Fenchel.

TEOREMA DE FENCHEL. *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco de al menos clase \mathcal{C}^2 , entonces*

$$\int_I k(s) ds \geq 2\pi.$$

La igualdad se da si y sólo si la curva es convexa.

Demostración. Observamos que $\mu(\alpha) \geq 1$, para cualquier curva, entonces por el corolario 4.2, $\kappa(\alpha) \geq 1$. Así, $\kappa(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_I k(s) ds \geq 1$, de forma equivalente $\int_I k(s) ds \geq 2\pi$.

La prueba de la segunda parte del teorema se basa en la siguiente observación: cualquier polígono inscrito en una curva convexa es siempre convexo, dada una curva que no es convexa ésta admite un polígono inscrito que no es convexo. Entonces sólo resta probar que esto ocurre para polígonos.

Por la proposición 4.1 se tiene que un polígono convexo cumple que $CT(P) = 2\pi$, de forma equivalente $\overline{CT}(P) = 1$.

Si P es un polígono en el espacio tal que $\overline{CT}(P) = 1$, seleccionamos cuatro vértices no coplanares y por el corolario 4.1, hallamos un polígono P' tal que $\overline{CT}(P') < 1$, lo cual es imposible. Esto implica que P está en un plano.

Si existe un polígono no convexo tal que $\overline{CT}(P) = 1$, entonces el lema 4.4 nos dice que existe un vector $u \in \mathbb{S}^2$ tal que $1 < \tilde{\mu}_P(u) < \infty$, podemos encontrar una vecindad de cualquier u dentro de la cual $\tilde{\mu}_P(u)$ es constante. Esto significa que

$$\overline{CT}(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \tilde{\mu}_P(u) du > \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} du = 1.$$

□

El teorema de Fary-Milnor dice que una curva anudada tiene curvatura total mayor igual que 4π . Donde por una curva anudada entendemos una curva que no se puede deformar a \mathbb{S}^1 . De manera más formal se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.13. Una curva cerrada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es *deformable* a \mathbb{S}^1 si existe una homotopía $F: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

1. $F(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = \mathbb{S}^1$,
2. $F(\mathbb{S}^1 \times \{1\}) = \alpha$,
3. $F(\mathbb{S}^1 \times \{t\}) = \alpha_t$ es homeomorfa a \mathbb{S}^1 para todo $t \in [0, 1]$.

Tal homotopía se llama *isotopía* y se dice que las curvas son isotópicas a \mathbb{S}^1 . Una curva cerrada se dice que es un *nudo* si no existe esta isotopía.

La figura 4.9 intenta deformar el trébol en \mathbb{S}^1 ya se observa que esto no es posible.

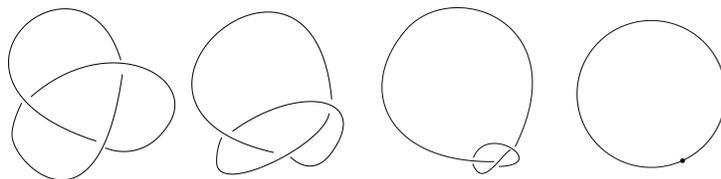


Figura 4.9: Deformación continua de un nudo

Observamos que el teorema de Fenchel se obtiene fácil de la desigualdad (4.11). Por tanto, para obtener el teorema de Fary-Milnor bastaría que en (4.11) el número de puentes sea mayor igual a dos, este invariante para curvas definido por J. Milnor guarda relación con el número de puentes definido en teoría de nudos³.

En [25], M. Scharlemann comenta que existe esta relación, él define el número de puentes de la siguiente forma.

³Acerca del número de puentes en teoría de nudos véase [1]

DEFINICIÓN 4.14. El *número de puentes* de una curva cerrada en el espacio es el mínimo número de puentes que se necesitan para construir un camino a través de la curva. La regla de tráfico es: *sólo cruzar sobre cada puente una exactamente una vez, pero puedes pasar debajo de el cualquier número de veces.*

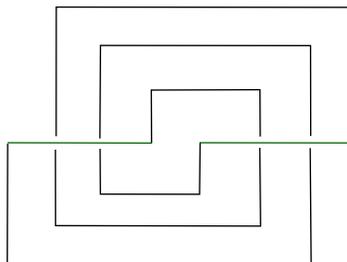


Figura 4.10: El trébol con número de puentes igual a dos

Se puede probar que bajo esta definición una curva que no está anudada tiene número de puentes igual a uno. El ejemplo clásico es el trébol, la figura 4.10 es equivalente al trébol, en esta figura podemos ver que el número de puentes es igual a dos.

En general encontrar las ecuaciones que definen un nudo es complicado, por ejemplo para el trébol, consideremos $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = (4 \cos 2t + 2 \cos t, 4 \sin 2t - 2 \sin t, \sin 3t),$$

La figura 4.11 es la imagen del trébol. Usando la ecuación 4.8, un cálculo computacional nos dice

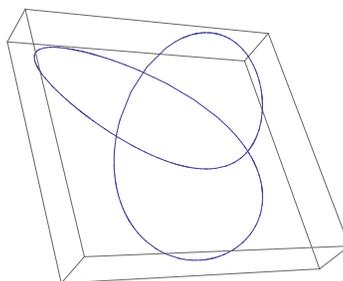


Figura 4.11: Trébol

que la curvatura total de este nudo satisface que

$$\int_0^l k(s) ds \approx 14,2304 > 4\pi,$$

que es lo que se esperaría.

§5. LA FÓRMULA DE CAUCHY-CROFTON

Otra técnica usada en la demostración de los teoremas de Fenchel y Fary-Milnor se basa en la fórmula de Cauchy-Crofton. Esta fórmula da una conexión entre la longitud de la curva y proyecciones de la curva sobre rectas. Además, la fórmula de Cauchy-Crofton está relacionada con problemas de geometría integral, por ejemplo, el problema de la aguja de Buffon¹.

Si el lector está interesado en tópicos de geometría integral, le recomendamos el trabajo de L. Santaló en [5, pág. 303].

5.1 La fórmula de Cauchy-Crofton según S.S. Chern

La base de la fórmula de Cauchy-Crofton está en la medida del conjunto de los círculos máximos que intersecan a una curva sobre la esfera \mathbb{S}^2 . Para comenzar, observemos que cada vector $u \in \mathbb{S}^2$ determina un círculo máximo B_u . Al vector u se le llama *polo*. Entonces, por la medida de un conjunto de círculos máximos entenderemos el área de los polos sobre la esfera tales que B_u interseca a la curva.

Sean $\alpha: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ una curva diferenciable. La función $\mathcal{N}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ asigna a cada $u \in \mathbb{S}^2$ el número de intersecciones de B_u con la curva α , es decir, $\mathcal{N}(u) = \text{card}(B_u \cap \alpha(I))$. La figura 5.1 nos ilustra una curva en \mathbb{S}^2 con $\mathcal{N}(u) = 2$.

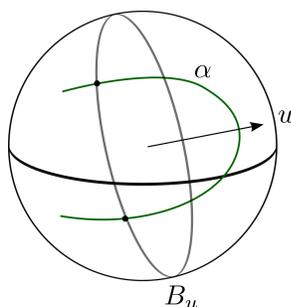


Figura 5.1: Curva en \mathbb{S}^2 donde $\mathcal{N}(u) = 2$

Recordemos que en el capítulo 3, a cada curva en \mathbb{R}^3 , es posible asignarle un triedro de Serret-Frenet. En general, en cada punto de la curva puede definirse localmente un conjunto de vectores $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}^2$ para cada s , que satisfagan

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

$$\det(e_1, e_2, e_3) = 1.$$

¹ El problema de la aguja de Buffon, dice que la probabilidad de que una aguja de longitud l lanzada aleatoriamente a una hoja, en la cual se han trazado líneas paralelas de longitud d interseque a una línea es igual a $\frac{2l}{\pi d}$.

² Observemos que puede tomarse como marco al triedro de Frenet-Serret $\{v(s), n(s), b(s)\}$.

Este conjunto de vectores tiene ciertas propiedades, por ejemplo,

$$\frac{d}{ds} \langle e_i(s), e_j(s) \rangle = 0.$$

Por la regla de Leibniz tenemos

$$\left\langle \frac{d}{ds} e_i(s), e_j(s) \right\rangle = - \left\langle e_i(s), \frac{d}{ds} e_j(s) \right\rangle. \quad (5.1)$$

Además, se cumple que

$$\frac{d}{ds} e_i(s) = \sum_{l=1}^3 a_{l,i}(s) e_l(s), \quad (5.2)$$

donde $a_{l,i}: I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas debido a la continuidad de e_i . Usando la relación (5.2) en la ecuación (5.1) obtenemos

$$\left\langle \sum_{l=1}^3 a_{l,i}(s) e_l(s), e_j(s) \right\rangle = - \left\langle e_i(s), \sum_{l=1}^3 a_{l,j}(s) e_l(s) \right\rangle.$$

Equivalentemente,

$$\sum_{l=1}^3 a_{l,i}(s) \langle e_l(s), e_j(s) \rangle = - \sum_{l=1}^3 a_{l,j}(s) \langle e_i(s), e_l(s) \rangle.$$

De aquí que los coeficientes se relacionan por

$$a_{j,i} = -a_{i,j}. \quad (5.3)$$

Para simplificar las cosas podemos omitir el doble subíndice. La relación (5.3) nos dice que $a_{i,i} = a_i = 0$ y da lugar al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} e_1(s) &= a_2(s) e_2(s) + a_3(s) e_3(s), \\ \frac{d}{ds} e_2(s) &= -a_2(s) e_1(s) + a_1(s) e_3(s), \\ \frac{d}{ds} e_3(s) &= -a_3(s) e_1(s) - a_1(s) e_2(s) \end{aligned}$$

En forma matricial el sistema de ecuaciones se escriben como

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_2(s) & a_3(s) \\ -a_2(s) & 0 & a_1(s) \\ -a_3(s) & -a_1(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{pmatrix}.$$

Observamos la antisimetría en la matriz del sistema, si suponemos que la curva $\alpha(s)$ está definida por el vector $e_1(s)$ y parametrizada por longitud de arco, obtenemos que $a_2(s)^2 + a_3(s)^2 = 1$, para todo $s \in I$. Con lo que tenemos que existe una función $\theta(s)$ tal que

$$a_2(s) = \cos \theta(s) \text{ y } a_3(s) = \text{sen } \theta(s).$$

Si un círculo máximo B_u interseca a la curva α , entonces lo hará en el punto $e_1(s)$, lo cual implica que el polo u que está asociado a B_u cae en el plano determinado por los vectores $e_2(s)$ y $e_3(s)$ (véase la figura 5.2). Por tanto, si u es un polo tal que B_u interseca a la curva α , se tiene

$$u(s, \varphi) = e_2(s) \cos \varphi + e_3(s) \operatorname{sen} \varphi,$$

donde $\varphi \in [0, 2\pi]$ es el ángulo formado por el polo u respecto a $e_2(s)$ ³. El par (s, φ) nos sirve para

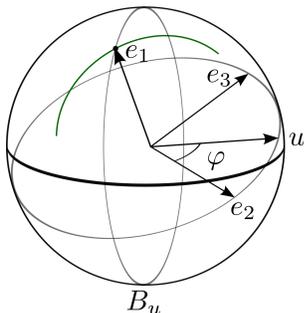


Figura 5.2

describir el dominio de los polos en la esfera para los cuales $\mathcal{N}(u) > 0$. Observemos que puede ocurrir que $\mathcal{N}(u) = \infty$, se puede probar lo cual no haremos que el conjunto de polos que cumplen esto tiene área cero.

FÓRMULA DE CAUCHY-CROFTON EN \mathbb{S}^2 . Si $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una curva parametrizada por longitud de arco, entonces

$$\int_0^l \|\alpha'(s)\| ds = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{N}(u) dA_u.$$

Demostración. Como vimos anteriormente un vector $u \in \mathbb{S}^2$, se puede escribir en términos de $e_2(s)$ y $e_3(s)$ de la forma

$$u(s, \varphi) = e_2(s) \cos \varphi + e_3(s) \operatorname{sen} \varphi,$$

luego calculando la diferencial de u obtenemos

$$du = (-e_2(s) \operatorname{sen} \varphi + e_3(s) \cos \varphi)(d\varphi + a_1(s) ds) - e_1(s)(a_2(s) \cos \varphi + a_3(s) \operatorname{sen} \varphi) ds.$$

Un cálculo directo muestra que los vectores

$$v(s, \varphi) = -e_2(s) \operatorname{sen} \varphi + e_3(s) \cos \varphi,$$

$$w(s, \varphi) = -e_1(s)(a_2(s) \cos \varphi + a_3(s) \operatorname{sen} \varphi)$$

son ortogonales. El elemento de área de u queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} dA_u &= |w \times v| d\theta ds \\ &= |w||v| \operatorname{sen} \psi d\theta ds \\ &= |a(s) \cos \varphi + a_3(s) \operatorname{sen} \varphi| d\theta ds \\ &= |\cos \varphi \cos \theta + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta| d\theta ds \\ &= |\cos(\varphi - \theta)| d\theta ds, \end{aligned}$$

³En el caso de tomar como marco al triedro de Serret-Frenet obtendríamos que $u(s, \varphi) = n(s) \cos \varphi + b(s) \operatorname{sen} \varphi$.

donde ψ es el ángulo entre los vectores u y w . Entonces, la medida de los círculos máximos que intersecan a la curva se puede escribir como

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{N}(u) dA_u = \int_0^l \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \theta)| d\theta ds,$$

Observamos que $\cos(\varphi - \theta) = \cos(\theta - \varphi)$, haciendo $t = \theta - \varphi$, se tiene $dt = d\theta$, lo que implica que

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} |\cos(\theta - \varphi)| d\theta ds = \int_0^l ds \int_0^{2\pi} |\cos t| dt = \int_0^l ds \left(4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = 4 \int_0^l ds = 4l.$$

Por tanto, obtenemos

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{N}(u) dA_u = l.$$

donde l es la longitud de la curva. □

5.2 La fórmula de Cauchy-Crofton vía la fórmula de córea

En esta sección probamos la fórmula de Cauchy-Crofton usando una técnica que consiste en aplicar la fórmula de córea en una versión para funciones reales de variable real.

FÓRMULA DE COÁREA. *Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase \mathcal{C}^1 , entonces se cumple*

$$\int_I |f'(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \text{card}(f^{-1}(\{y\})) dy.$$

La prueba de la fórmula requiere de un estudio especial y la omitimos por escapar a nuestros propósitos. Una demostración se puede consultar en [8, pág. 79].

Para comenzar el estudio de la fórmula de Cauchy-Crofton, consideremos una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable, $u \in \mathbb{S}^1$ y la función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \langle \alpha(t), u \rangle. \tag{5.4}$$

Consideremos el conjunto

$$f^{-1}(\{y\}) = \{t \in I : \langle \alpha(t), u \rangle = y\}.$$

Si $\text{card } f^{-1}(\{y\}) = n$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces existen $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$, tales que $\langle \alpha(t_i), u \rangle = y$. Es decir, la cantidad $\text{card } f^{-1}(\{y\})$ cuenta el número de proyecciones sobre u de magnitud y de la curva α .

El siguiente resultado nos acerca a probar la versión plana de la fórmula de Cauchy-Crofton.

LEMA 5.1. *Si w es un vector en el plano y $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, entonces se cumple que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\langle w, u(\theta) \rangle| d\theta = 4\|w\|.$$

Demostración. Esto se obtiene observando que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\langle w, u(\theta) \rangle| d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \|w\| \|u(\theta)\| |\cos \varphi(\theta)| d\theta \\ &= \|w\| \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

donde $\varphi(\theta)$ es el ángulo formado por los vectores w y u , entonces podemos escribir a $\varphi(\theta)$ como

$$\varphi(\theta) = \theta + c,$$

para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Así, obtenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\langle w, u(\theta) \rangle| d\theta &= \|w\| \int_{-\pi}^{\pi} |\cos \varphi(\theta)| d\theta \\ &= \|w\| \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\theta + c)| d\theta. \\ &= \|w\| \int_{-\pi+c}^{\pi+c} |\cos \sigma| d\sigma \\ &= \|w\| \int_{-\pi}^{\pi} |\cos \sigma| d\sigma \\ &= 4\|w\|. \end{aligned}$$

□

Haciendo uso del lema 5.1 probamos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.1. *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable con $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, entonces se cumple*

$$\int_I \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_I |\langle \dot{\alpha}(t), u(\theta) \rangle| dt d\theta.$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_I |\langle \dot{\alpha}(t), u(\theta) \rangle| dt d\theta &= \int_I \int_{-\pi}^{\pi} |\langle \dot{\alpha}(t), u(\theta) \rangle| d\theta dt \\ &= \frac{1}{4} \int_I 4\|\dot{\alpha}(t)\| dt \\ &= \int_I \|\dot{\alpha}(t)\| dt. \end{aligned}$$

□

Observemos que aplicando la fórmula de coárea a la función f cuya regla está dada por (5.4), obtenemos la siguiente igualdad

$$\int_I |\langle \dot{\alpha}(t), u(\theta) \rangle| dt = \int_{\mathbb{R}} \text{card}\{t \in I : \langle \alpha(t), u(\theta) \rangle = y\} dy.$$

Por la proposición 5.1 tenemos

$$\int_I \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{card}\{t \in I : \langle \alpha(t), u(\theta) \rangle = y\} dy d\theta. \quad (5.5)$$

La discusión anterior se resume en el siguiente resultado

FÓRMULA DE CAUCHY-CROFTON EN \mathbb{R}^2 . Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable, entonces

$$\int_I \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^1} \int_I \text{card}\{t \in I : \langle \alpha(t), u \rangle = y\} dy du.$$

La fórmula de Cauchy-Crofton nos dice que para $u \in \mathbb{S}^1$, el promedio del número de puntos en la imagen de la curva α con proyección igual a y sobre la recta generada por u , debe ser cuatro veces la longitud de la curva.

Buscamos ahora una versión para la fórmula de Cauchy-Crofton el espacio, de nueva cuenta la fórmula de coárea juega un papel importante. Comencemos por recordar que si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, es posible definir la integral de f sobre la esfera \mathbb{S}^2 , mediante la siguiente regla

$$\int_{\mathbb{S}^2} f dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \varphi) \cos \varphi d\theta d\varphi.$$

LEMA 5.2. Sean $w \in \mathbb{R}^3$ y $u \in \mathbb{S}^2$ se cumple que

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\langle w, u \rangle| du = 2\pi \|w\|.$$

Demostración. Si $w = (0, 0, c)$ donde $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} |\langle w, u \rangle| du &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |c \text{sen } \varphi| \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \|w\| \int_{-\pi}^{\pi} |\text{sen } \varphi| \cos \varphi d\varphi \\ &= 2\pi \|w\|. \end{aligned}$$

Si $w = (a, b, 0)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} |\langle w, u \rangle| du &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |a \cos \theta \cos \varphi + b \text{sen } \theta \cos \varphi| \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |a \cos \theta + b \text{sen } \theta| \cos^2 \varphi d\theta d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |a \cos \theta + b \text{sen } \theta| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |a \cos \theta + b \text{sen } \theta| d\theta \\ &= 2\pi \|w\|. \end{aligned}$$

□

Para el caso general véase [14, pag. 56].

Consideremos una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $u \in \mathbb{S}^2$. Usando la fórmula de coárea para la función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \langle \alpha(t), u \rangle$, se tiene

$$\int_I |\langle \alpha'(t), u \rangle| dt = \int_{\mathbb{R}} \text{card}\{t \in I : \langle \alpha(t), u \rangle = y\} dy.$$

Calculando el promedio de la longitud de la proyección al variar al vector u en \mathbb{S}^2 , se tiene

$$\int_{\mathbb{S}^2} \int_I |\langle \alpha'(t), u \rangle| dt dA_u = \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}} \text{card}\{t \in I : \langle \alpha(t), u \rangle = y\} dy dA_u. \quad (5.6)$$

Por el lema 5.2 sabemos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \int_I |\langle \dot{\alpha}(t), u \rangle| dt dA_u = 2\pi \int_I \|\dot{\alpha}(t)\| dt. \quad (5.7)$$

Combinando las ecuaciones (5.6) y (5.7) concluimos:

FÓRMULA DE CAUCHY-CROFTON EN \mathbb{R}^3 . Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable, entonces

$$\int_I \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}} \text{card}\{t \in I : \langle \alpha(t), u \rangle = y\} dy du.$$

5.3 Consecuencias de la fórmula de Cauchy-Crofton

La fórmula de Cauchy-Crofton tiene una consecuencia inmediata, el teorema de Fenchel. Consideremos a $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco y $u \in \mathbb{S}^2$. La función f definida por la relación 5.4 tiene al menos dos puntos críticos tales que

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), u \rangle = 0.$$

Esto implica que al menos existen dos puntos en la imagen de la curva que están a una distancia de $\frac{\pi}{2}$ del vector u . Es decir, la curva interseca en al menos dos puntos al círculo máximo B_u cuyo polo es el vector u . Así, $\mathcal{N}(u) \geq 2$ (véase la figura 5.3). De la fórmula de Cauchy-Crofton obtenemos

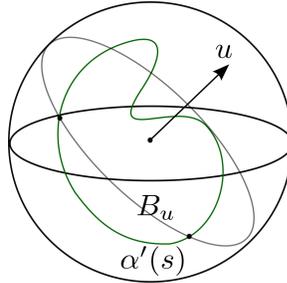


Figura 5.3: Al menos dos puntos en la curva α intersecan a B_u

$$\int_I \|\alpha''(s)\| ds = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{N}(u) dA_u \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} dA_u = 2\pi.$$

Con la discusión precedente hemos probado el siguiente resultado.

TEOREMA DE FENCHEL. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrada parametrizada por longitud de arco, de al menos clase \mathcal{C}^2 . Entonces se cumple

$$\int_I k(s) ds \geq 2\pi. \quad (5.8)$$

Observemos que puede ocurrir que la curvatura total sea igual a 2π , pero este caso lo trataremos en el capítulo siguiente. A continuación, presentamos dos consecuencias del teorema de Fenchel, ambas muestran la relación que existe entre la curvatura de la curva y su longitud.

COROLARIO 5.1. *Si $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada parametrizada por longitud de arco, de al menos clase \mathcal{C}^2 de manera que $k(s) \leq 1/r$ para $r > 0$. Entonces*

$$l \geq 2\pi r$$

Demostración. De la cadena de desigualdades, se concluye la afirmación

$$l = \int_0^l ds \geq \int_0^l rk(s)ds \geq r \int_0^l k(s)ds \geq 2\pi r.$$

□

Al elevar al cuadrado la desigualdad (5.8), se tiene

$$4\pi^2 \leq \left(\int_I k(s)ds \right)^2. \quad (5.9)$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\left(\int_I lk(s)ds \right)^2 \leq \left(\int_I l^2 ds \right) \left(\int_I k(s)^2 ds \right) = l^3 \left(\int_I k(s)^2 ds \right).$$

De donde obtenemos que

$$\left(\int_I k(s)ds \right)^2 \leq l \left(\int_I k(s)^2 ds \right).$$

Así, la ecuación (5.9) implica

$$4\pi^2 \leq l^2 \max_{s \in I} \{k(s)^2\},$$

y de donde concluimos

$$l \geq \frac{2\pi}{\max_{s \in I} \{k(s)\}}.$$

Hemos mostrado así el siguiente resultado.

COROLARIO 5.2. *Si $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada parametrizada por longitud de arco, de al menos clase \mathcal{C}^2 , entonces*

$$l \geq \frac{2\pi}{\max_{s \in I} \{k(s)\}}.$$

La prueba de este corolario puede hacerse más sencilla, si en el corolario 5.1 tomamos a $r = \frac{1}{\max_{s \in I} \{k(s)\}}$.

La consecuencia más importante en este capítulo obtenida de la fórmula de Cauchy Crofton, es el teorema de Fary-Milnor. Recordemos que una curva anudada es una curva que no se puede deformar continuamente en \mathbb{S}^1 .

TEOREMA DE FARY-MILNOR. *La curvatura total de una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ anudada en el espacio es mayor o igual que 4π .*

Demostración. Consideremos α' y la función $\mathcal{N}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que cuenta el número de intersecciones de la curva α' con el círculo máximo que tiene como polo a u . Es decir, cuenta el número de puntos críticos de la función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(s) = \langle \alpha(s), u \rangle$. Este número es par a menos que el círculo máximo esté sobre α' . Si suponemos que la curvatura total es menor que 4π , entonces por la fórmula de Cauchy-Crofton existe $u \in \mathbb{S}^2$ tal que $\mathcal{N}(u) = 2$. Al hacer una rotación de tal forma que $u = (0, 0, 1)$, tenemos

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), (0, 0, 1) \rangle = x_3'(s) = 0.$$

Es decir, la función x_3 tiene exactamente dos puntos críticos, el máximo y mínimo. Estos puntos extremos dividen a la curva α en dos arcos de tal forma que x_3 incrementa en uno y decrece en el otro. Cada plano perpendicular a u , entre estos puntos interseca a la curva en exactamente dos puntos, es decir, la curva acota una región homeomorfa⁴ a un disco. Por tanto la curva no está anudada. \square

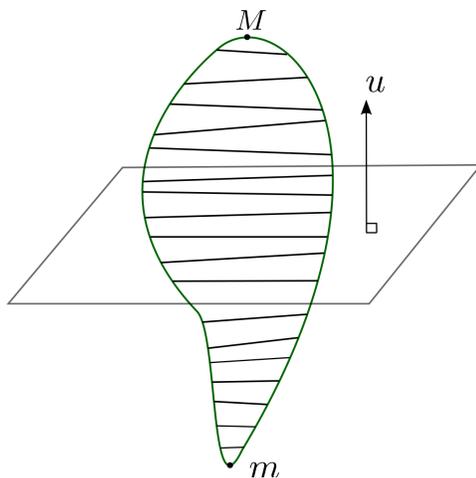


Figura 5.4: El mínimo m y el máximo M dividen a la curva en dos arcos

⁴Dos subconjuntos A y B son homeomorfos si existe una función $f: A \rightarrow B$ continua con inversa continua.

§6. LA PRUEBA DE M.P. DO CARMO

Nuestro principal interés en este último capítulo es dar una demostración más de los teoremas de Fenchel y Fary-Milnor usando la teoría de superficies, motivados por el método utilizado por M.P. Do Carmo en [6]. Las superficies serán vistas como subconjuntos de \mathbb{R}^3 . A continuación, presentamos los elementos necesarios de la teoría superficies.

6.1 Superficies

En toda esta sección entenderemos por una *aplicación diferenciable* $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a una aplicación cuyas derivadas parciales son continuas.

DEFINICIÓN 6.1. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, es una *superficie regular* si para cada $p \in S$, existe un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, una vecindad relativa¹ $U \subset \mathbb{R}^3$ de p en S y una aplicación diferenciable $\varphi : \Omega \rightarrow U$, tal que

1. φ es un homeomorfismo.
2. $\varphi(\Omega) = U$.
3. La transformación lineal asociada a la diferencial de $\varphi : \Omega \rightarrow U$, la cual denotaremos por $D\varphi(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es inyectiva para todo $q \in \Omega$.

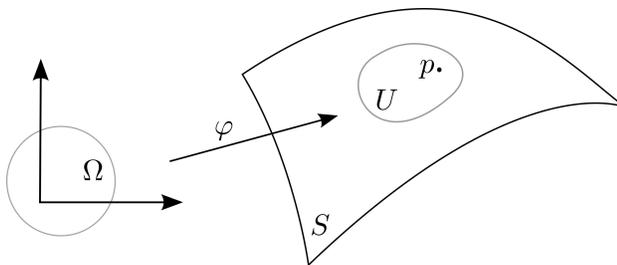


Figura 6.1

En la definición 6.1 reconocemos los siguientes elementos:

1. El par (U, φ) se llama *parametrización* alrededor de p , el par (U, φ^{-1}) se llama *carta* alrededor de p .
2. La colección $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ donde \mathcal{I} es conjunto de índices, es una *estructura* para S , si cumple que $S = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$.

¹Si A es un abierto en \mathbb{R}^3 y S un subconjunto en \mathbb{R}^3 entonces $A \cap S$ es *vecindad relativa* a S .

Observemos que en la definición 6.1 con la condición 1 pedimos que φ sea una aplicación inyectiva continua y su inversa sea continua ya que por la condición 2 es suprayectiva. La condición 3 se ve reflejada en las derivadas parciales ya que si escribimos a φ como

$$\varphi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)),$$

entonces esta condición se traduce en que los vectores $\frac{\partial}{\partial u}\varphi(q)$ y $\frac{\partial}{\partial v}\varphi(q)$ sean linealmente independientes.

Como en el caso de las curvas, para una superficie puede existir más de una parametrización alrededor de un punto $p \in S$ (véase la figura 6.2). Estas parametrizaciones cumplen la siguiente propiedad.

PROPOSICIÓN 6.1. *Sean S una superficie regular, $p \in S$, $\varphi: \Omega \rightarrow U$ y $\tilde{\varphi}: \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{U}$ dos parametrizaciones alrededor de p , entonces*

$$\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}(U \cap \tilde{U}),$$

$$\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}: \tilde{\varphi}^{-1}(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \varphi^{-1}(U \cap \tilde{U}),$$

son difeomorfismos².

Demostración. Considere la función $F: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(u, v, t) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v) + t).$$

Observemos que $F|_{\Omega \times \{0\}} = \varphi$. Sea $p \in U \cap \tilde{U}$, tal que $\tilde{\varphi}(\tilde{q}) = p$ y $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}(\tilde{q}) = q$. Calculando la diferencial de la función F tenemos que

$$\det(DF(q)) \neq 0.$$

Por el teorema de la función inversa³, existe una vecindad W de $\varphi(q)$ tal que F^{-1} es diferenciable en esa vecindad. Por la continuidad de $\tilde{\varphi}$ existe una vecindad \tilde{W} de \tilde{q} tal que $\tilde{\varphi}(\tilde{W}) \subset W$. Además,

$$\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}|_{\tilde{W}} = F^{-1} \circ \tilde{\varphi}|_{\tilde{W}}.$$

Lo que termina la demostración. □

De aquí en adelante dos parametrizaciones que cumplan las hipótesis de la proposición 6.1, diremos que son *compatibles*.

²Una función $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo si f es un homeomorfismo y, además, f y f^{-1} son diferenciables.

³El *teorema de la función inversa* dice que si para una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con derivadas parciales continuas, $Df(x_0)$ es invertible con $x_0 \in U$, entonces existen abiertos $U_0 \subset U$ y $W_0 \subset f(U)$ tales que

1. Si $x \in U_0$ entonces $f(x) \in W_0$.
2. f es inyectiva en U_0 y f^{-1} es inyectiva en W_0 .
3. f^{-1} es continuamente diferenciable.

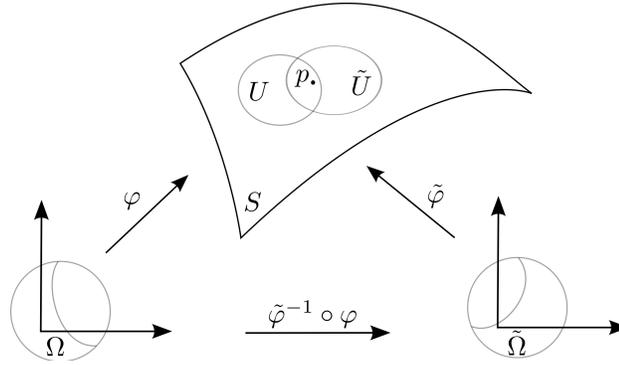


Figura 6.2: Compatibilidad de las parametrizaciones

6.2 Primera y segunda forma fundamental

El estudio de las curvas es de gran importancia para las superficies, pues nos permite definir el concepto de *espacio tangente* a una superficie. Podemos decir cuándo una curva sobre una superficie es diferenciable.

DEFINICIÓN 6.2. Sean S es una superficie, $p \in S$ y $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una curva tal que $\alpha(0) = p$, entonces α es *diferenciable* en p si para una parametrización (U, φ) alrededor de p la función $\varphi^{-1} \circ \alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ es diferenciable en cero.

DEFINICIÓN 6.3. Sean S una superficie regular y $p \in S$. El *espacio tangente* en el punto p es el conjunto

$$T_p S = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S, \text{ con } \alpha(0) = p \text{ y } \dot{\alpha}(0) = \xi\}.$$

El siguiente nos dice que el espacio tangente es la imagen de \mathbb{R}^2 bajo la transformación lineal $D\varphi(q)$.

PROPOSICIÓN 6.2. Si S es una superficie, $p \in S$ y (U, φ) una parametrización alrededor de p , con $\varphi(q) = p$, entonces

$$D\varphi(q)(\mathbb{R}^2) = T_p S.$$

Demostración. Sea $\xi \in T_p S$, entonces existe $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\dot{\alpha}(0) = \xi$. Como α es diferenciable en p tomamos una parametrización alrededor de p de tal forma que la función $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ es diferenciable en cero. Observemos que

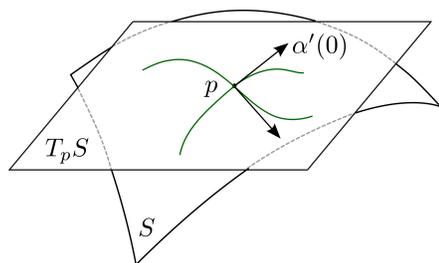
$$\xi = \dot{\alpha}(0) = (\varphi \circ \beta)'(0) = D\varphi(q)(\dot{\beta}(0)),$$

por lo tanto $\xi \in D\varphi(q)(\mathbb{R}^2)$.

Por otro lado, si $\xi \in D\varphi(q)(\mathbb{R}^2)$ existe $\eta \in \mathbb{R}^2$, tal que $\xi = D\varphi(q)(\eta)$. Consideremos la curva $\beta(t) = p + t\eta$, observamos que $\beta(0) = p$ y $\dot{\beta}(0) = \eta$, la curva $\alpha = \varphi \circ \beta$ cumple que

$$\dot{\alpha}(0) = D\varphi(q)(\eta) = \xi,$$

por tanto, $\xi \in T_p S$. □

Figura 6.3: Espacio tangente en un punto $p \in S$

Observamos que el espacio tangente $T_p S$ tiene estructura de espacio vectoriales de dimensión 2 en \mathbb{R} , por tanto construiremos una base para $T_p S$. Consideremos $\xi \in T_p S$, por definición de espacio tangente existe $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\xi = \dot{\alpha}(0)$. Notemos que es posible encontrar una curva $\beta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ de tal forma que para una parametrización alrededor de p tenemos

$$\alpha = \varphi \circ \beta.$$

De esta manera $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, y por la regla de la cadena

$$\dot{\alpha}(0) = \frac{\partial}{\partial u} \varphi(q) \frac{d}{dt} u(0) + \frac{\partial}{\partial v} \varphi(q) \frac{d}{dt} v(0).$$

Los vectores $\frac{\partial}{\partial u} \varphi(q)$ y $\frac{\partial}{\partial v} \varphi(q)$ son linealmente independientes y además pertenecene a $T_p S$. Por tanto, una base para $T_p S$ es el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \varphi(q), \frac{\partial}{\partial v} \varphi(q) \right\}.$$

A continuación, mostramos que el producto interior en \mathbb{R}^3 hereda un producto interior en $T_p S$. Consideremos un vector $\xi \in T_p S$, observemos

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle_p &= \langle \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0), \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0) \rangle \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle u'(0)^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle u'(0)v'(0) + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle v'(0)^2 \\ &= Eu'(0)^2 + 2Fu'(0)v'(0) + Gv'(0)^2. \end{aligned}$$

Lo anterior motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.4. La forma cuadrática en $T_p S$ definida por $I_p(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle_p$, se llama *primera forma fundamental* o *métrica sobre una superficie regular* S .

Observemos que los coeficientes de la métrica son

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle. \end{aligned}$$

Podemos decir que la primera forma fundamental nos posibilita medir sobre la superficie. Es decir, si $\varphi: \Omega \rightarrow S$ es una parametrización alrededor de p y consideramos $\mathcal{R} \subset S$ tal que $p \in \mathcal{R}$, entonces el área de \mathcal{R} es

$$\text{área}(\mathcal{R}) = \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

DEFINICIÓN 6.5. Una superficie regular S se dice que es *orientable* si existe una estructura $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ que cubre a S , de tal forma que cualesquiera dos parametrizaciones (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ alrededor de $p \in S$ cumplen que

$$\frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} = \det \begin{pmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{v}} \\ u_{\tilde{v}} & v_{\tilde{u}} \end{pmatrix} > 0.$$

PROPOSICIÓN 6.3. *Una superficie regular S es orientable si y sólo si existe una aplicación continua $F: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vectores normales en S .*

Para una demostración de este resultado véase [6, pág. 124].

DEFINICIÓN 6.6. Consideremos S una superficie regular y orientable y (U, φ) una parametrización alrededor de $p \in S$. La aplicación $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por la regla

$$N(q) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q),$$

se llama *aplicación de Gauss*.

Dada una superficie S orientable, podemos definir la aplicación de Gauss sobre S . A continuación, procedemos a estudiar la diferencial $DN(p): T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$.

PROPOSICIÓN 6.4. *Sea S una superficie regular y orientable. La diferencial $DN(p): T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ es una aplicación lineal autoadjunta⁴.*

Para una prueba de este teorema, véase [6, pág. 165].

La proposición 6.4 nos dice que $\langle DN(p)(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, DN(p)(\eta) \rangle$, por tanto obtenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.7. La forma cuadrática definida por $II_p(v) = -\langle DN(p)(v), v \rangle$, se llama *segunda forma fundamental* de S en p .

Usando el hecho de que dada una transformación lineal entre espacios vectoriales el determinante de la matriz asociada a la transformación no depende de la base escogida, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.8. Sean S una superficie regular y $p \in S$. La *curvatura Gaussiana* de S en p es

$$K(p) = \det(DN(p)).$$

Si $\xi \in T_p S$, entonces existe $\alpha: I \rightarrow S$, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \xi$. Además, se cumple $\alpha' = \varphi_u u' + \varphi_v v'$. Observemos que

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= II_p(\varphi_u u' + \varphi_v v') \\ &= -\langle DN(p)(\varphi_u u' + \varphi_v v'), \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u, \varphi_u \rangle (u')^2 - \langle N_v, \varphi_v \rangle (v')^2 - \langle N_u, \varphi_v \rangle u' v' - \langle N_v, \varphi_u \rangle u' v'. \end{aligned}$$

⁴Un *aplicación lineal autoadjunta* es una transformación lineal $T: V \rightarrow V$ tal que $T^* = T$, donde T^* es el operador adjunto de T , recordemos que un operador adjunto cumple que para $x, y \in V$, es válida $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$.

Observemos que $\langle N, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_v \rangle = 0$. Por tanto

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2fv'u' + g(v')^2,$$

donde los coeficientes

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \varphi_{uu} \rangle, \\ f &= \langle N, \varphi_{uv} \rangle, \\ g &= \langle N, \varphi_{vv} \rangle, \end{aligned}$$

son los coeficientes de la forma cuadrática asociada a II_p . La siguiente proposición da una manera de calcular la curvatura Gaussiana en un punto.

PROPOSICIÓN 6.5. *La curvatura Gaussiana en un punto $p \in S$, es*

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Para una prueba de este resultado, véase [22, pág. 159].

6.3 Superficie tubular

La base de la demostración del teorema de Fenchel se basa en la construcción de una superficie tubular T alrededor de una curva.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco. Consideremos la aplicación $\varphi: I \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(s, \theta) = \alpha(s) + r(n(s) \cos \theta + b(s) \sin \theta), \quad (6.1)$$

donde $n(s)$ y $b(s)$ son los vectores normal y binormal en un punto $\alpha(s)$ y $r > 0$ es el radio del tubo (véase la figura 6.4). Observemos que si s es fijo, entonces θ nos genera una circunferencia alrededor de $\alpha(s)$.

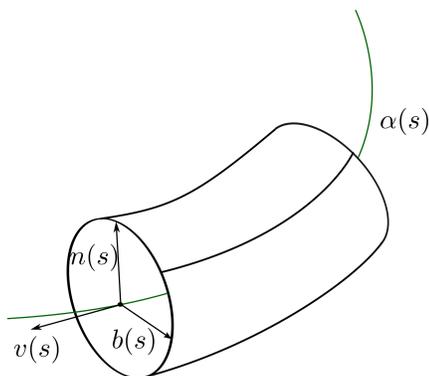


Figura 6.4: Superficie tubular

Un cálculo nos muestra que

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= r^2(1 - rk(s) \cos \theta)^2, \\ \varphi_s \times \varphi_\theta &= -r(1 - rk(s) \cos \theta)(b(s) \operatorname{sen} \theta + n(s) \cos \theta), \\ eg - f^2 &= -(1 - rk(s) \cos \theta)rk(s) \cos \theta. \end{aligned}$$

Por la proposición 6.5, la curvatura Gaussiana está dada por

$$K(p) = \frac{-k(s) \cos \theta}{r(1 - rk(s) \cos \theta)}$$

LEMA 6.1. Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco y T un tubo alrededor de α parametrizado por $\varphi: I \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces

$$\int_{\mathcal{R}} K(p) dA = 2 \int_I k(s) ds.$$

donde \mathcal{R} son los puntos sobre el tubo de curvatura Gaussiana positiva.

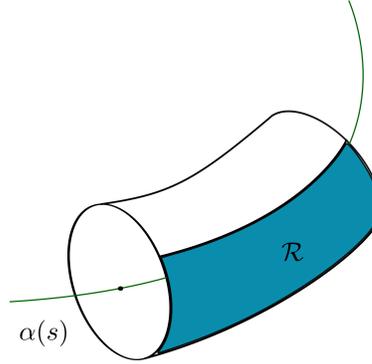


Figura 6.5: Región donde la curvatura Gaussiana es positiva

Demostración. Observemos que si $k(s) = 0$ entonces $K(p) = 0$. Esto pasa si un arco de la curva está contenido en una recta. Si $K(p) \geq 0$, entonces $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, lo que implica que

$$\int_{\mathcal{R}} K(p) dA = \int_I \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} K(p) \sqrt{EG - F^2} d\theta ds = \int_I \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -k(s) \cos \theta d\theta ds = 2 \int_I k(s) ds$$

□

El siguiente resultado, junto con el lema 6.1, nos serán de gran utilidad en la demostración de el teorema de Fenchel. La demostración la omitimos, pero puede consultarse en [19, p. 156].

TEOREMA DE CHERN-LASHOFF. Si S es una superficie regular compacta⁵. Entonces

$$\int_S K^+(p) dA \geq 4\pi,$$

donde $K^+(p) = \max\{0, K(p)\}$.

⁵Para nuestros fines por un conjunto compacto entendemos un conjunto cerrado y acotado. Dicha caracterización se conoce como de Heine-Borel, véase [28, pág. 237]

Estamos en condiciones de presentar el siguiente resultado.

TEOREMA DE FENCHEL. *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada simple parametrizada por longitud de arco, entonces*

$$\int_I k(s) ds \geq 2\pi.$$

La igualdad ocurre si y sólo si α es una curva plana y convexa.

Demostración. Sea $\mathcal{R} \subset T$, la región donde la curvatura Gaussiana es positiva. Aplicando el teorema de Chern-Lashoff a T y el lema 6.1 tenemos

$$\int_I k(s) ds \geq 2\pi.$$

Ahora, supongamos que la curva es plana y convexa. La aplicación de Gauss restringida a cada circunferencia generada por φ con s constante es un círculo máximo B_s . Los puntos en T donde $K(p) \geq 0$, son los puntos para los cuales $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$. Si denotamos por B_s^+ los puntos en B_s donde $K(p) \geq 0$, entonces para cada $s \in I$, el círculo máximo B_s^+ tiene como extremo común a los puntos p y q (véase la figura 6.6). Los puntos donde la curvatura Gaussiana se anula son en $\theta = \frac{\pi}{2}$, o bien, $\theta = \frac{3}{2}\pi$, y están en dirección de $\pm b(s)$, esto se debe a que la curva es plana. Por convexidad tenemos que para $s_1, s_2 \in I$ distintos

$$B_{s_1}^+ \cap B_{s_2}^+ = \{p\} \cup \{q\}.$$

Esto implica que la aplicación de Gauss cubre a \mathbb{S}^2 una vez y equivalentemente $\int_{\mathcal{R}} K(p) dA = 4\pi$.

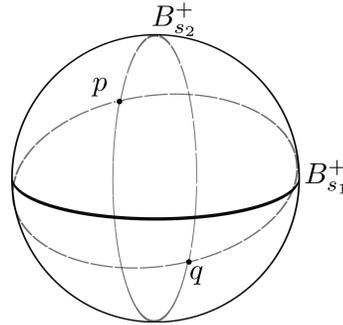


Figura 6.6

Por tanto, $\int_I k(s) ds = 2\pi$.

Ahora, supongamos que la curvatura total es igual a 2π . Esto equivale a que $\int_{\mathcal{R}} K(p) dA = 4\pi$. Los puntos en T donde la curvatura se anula están en dirección de $\pm b(s)$. Además, se puede probar que para todo $s \in I$, los arcos B_s^+ tienen los mismos extremos p y q . Supongamos que no. Entonces existen $s_1, s_2 \in I$ tales que $B_{s_1} \cap B_{s_2}$ tienen puntos distintos de $N(\mathcal{R} \cap \mathcal{Q})$, donde $\mathcal{Q} = \{p \in S : K(p) \leq 0\}$, es decir, $B_{s_1} \cap B_{s_2}$ son puntos antípodas que no provienen de puntos de curvatura cero. Si $p_1, p_2 \in N^{-1}(B_{s_1}^+ \cap B_{s_2}^+)$, tomamos vecindades U_1 y U_2 alrededor de p_1 y p_2

respectivamente tales que $N(U_i) \subset B_{s_1}^+ \cap B_{s_2}^+$. Así, N cubre dos veces a $N(U_1) \cap N(U_2)$, mientras todo lo demás en \mathbb{S}^2 se cubre una vez, lo cual implica que

$$\int_{\mathcal{R}} K(p)dA = \text{área}(N(\mathcal{R})) = \text{área}(\mathbb{S}^2) + \text{área}(N(U_1) \cap N(U_2)) = 4\pi + \text{área}(N(U_1) \cap N(U_2)) > 4\pi.$$

Esto es una contradicción. Por tanto $b(s)$ es paralelo a la recta H generada por el vector $p - q$. Así, para todo $s \in I$, el vector $n(s)$ está contenido en un plano perpendicular a la recta H . Por tanto, α está contenida en un plano.

Por último, mostremos que la curva es convexa. Por la proposición 2.5 la convexidad equivale a que la curvatura no cambie de signo. Aquí, entenderemos a la curvatura como la curvatura con signo y por tanto,

$$2\pi = \int_I k(s)ds \geq \int_I \tilde{k}(s)ds.$$

Consideremos el conjunto $J = \{s \in I : \tilde{k}(s) \geq 0\}$, entonces $\int_J \tilde{k}(s)ds \geq 2\pi$. Esto implica que $\int_I \tilde{k}(s)ds = 2\pi$, y así, la curvatura es positiva en cualquier punto $s \in I$. Por tanto la curva α es convexa. \square

Antes de que procedamos con la demostración del teorema de Fary-Milnor, comentamos algunos detalles técnicos. Consideremos $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco y fijamos $s_0 \in I$. Elegimos $u_0 \in \mathbb{R}^3$ unitario tal que $u_0 \neq b(s_0)$. La función $f_{u_0}: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f_{u_0}(s) = \langle \alpha(s), u_0 \rangle,$$

tiene un punto crítico en s si la recta generada por el vector $\alpha'(s)$ es perpendicular al vector u_0 . Ahora,

$$\begin{aligned} f_{u_0}''(s) &= \langle \alpha''(s), u_0 \rangle \\ &= k(s)\langle n(s), u_0 \rangle, \end{aligned}$$

debido a que $u_0 \neq b(s_0)$, para todo $s \in I$, tenemos que $f_{u_0}''(s) \neq 0$, esto nos dice que los puntos críticos de f_{u_0} son no degenerados, por tanto tiene un máximo y un mínimo.

La demostración del teorema de Fary-Milnor se basa en que para cada $u \in \mathbb{S}^2$, la función f_u tiene exactamente dos puntos críticos a saber, máximo y mínimo, como lo dice el siguiente resultado.

LEMA 6.2. *Sea $u \in \mathbb{S}^2$, tal que $u \neq b(s)$ para todo $s \in I$, si la curvatura total es menor que 4π , la función f_u tiene exactamente dos puntos críticos.*

Demostración. La prueba se hace por contradicción. Suponga que la función f_u tiene al menos tres puntos críticos, a saber $s_1, s_2, s_3 \in I$. Como hemos visto, estos puntos corresponden a máximos y mínimos y entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que dos de ellos son máximos y el tercero es un mínimo. Sea P un plano perpendicular a u tal que $P \cap T = \emptyset$. Se tienen dos casos:

1. Si $f_u(s_1) = f_u(s_2)$, entonces trasladando P hasta tocar a T , el plano P tocará en puntos p_1 y p_2 distintos tales que $K(p_1) > 0$ y $K(p_2) > 0$ (véase la figura 6.7).

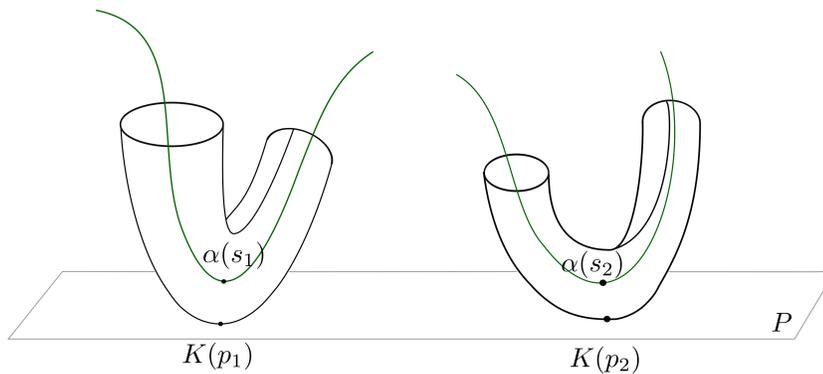


Figura 6.7

2. Si $f_u(s_1) < f_u(s_2)$, en este caso consideramos un segundo plano \tilde{P} paralelo a P a una distancia r , donde r es el radio de T . Si p_1 es el punto donde P toca a T entonces $K(p_1) > 0$. Hacemos mover al mismo tiempo los dos planos hasta que \tilde{P} toca al punto $\alpha(s_2)$, entonces P toca a T en un punto p_2 donde $K(p_2) > 0$ (véase la figura 6.8).

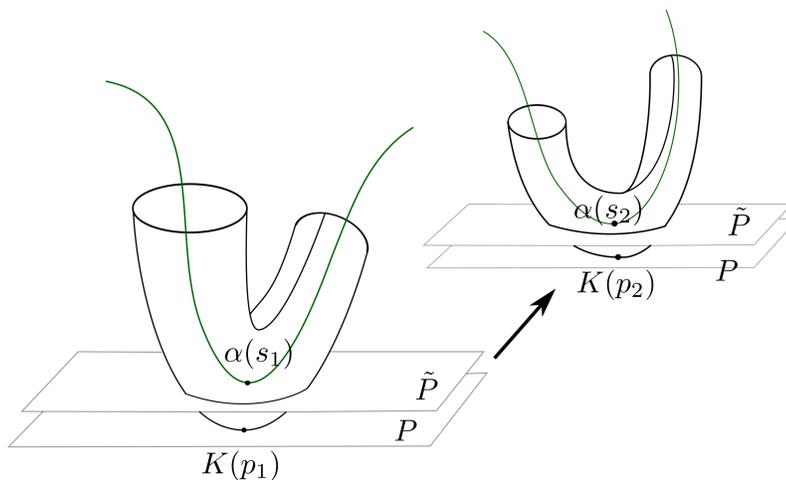


Figura 6.8

En cualquiera de los dos casos la aplicación de Gauss lleva a dos puntos distintos de \mathcal{R} en un único punto de \mathbb{S}^2 , entonces

$$2 \int_I k(s) ds = \int_{\mathcal{R}} K dA = \text{área}(N(\mathcal{R})) > 8\pi.$$

Es decir, la imagen de la aplicación de Gauss cubre dos veces a \mathbb{S}^2 . Esto es una contradicción pues nuestra hipótesis inicial fue que la curvatura total es menor que 4π . Que implica que la función f_u tiene exactamente dos puntos críticos. \square

TEOREMA DE FARY-MILNOR. *La curvatura total de una curva anudada en el espacio es mayor o igual que 4π .*

Demostración. Sea $u_0 \in \mathbb{S}^2$ y suponga que la curvatura total es menor que 4π . Por el lema anterior la función f_{u_0} tiene exactamente dos puntos críticos s_1 y s_2 que corresponden al máximo y mínimo. Consideramos los planos P_1 y P_2 perpendiculares a u_0 que pasen por $\alpha(s_1)$ y $\alpha(s_2)$ respectivamente. Cada plano perpendicular a u_0 comprendido entre P_1 y P_2 interseca a la curva α en exactamente dos puntos, formando una superficie acotada por α homeomorfa a un disco. Por tanto, α no está anudada. \square

CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado tres técnicas diferentes para la demostración del teorema de Fary-Milnor.

En el capítulo 4, se hizo un extenso estudio acerca de la técnica utilizada por J. Milnor en [16] para la demostración de su teorema. Los elementos más importantes utilizados en esta prueba son aproximación por polígonos, función altura, y la geometría de la esfera. La demostración es complicada, requiere dedicación pues es una combinación de los elementos mencionados y resulta bastante interesante debido a que nos abre el camino a un estudio más profundo de los trabajos de J. Milnor.

En el capítulo 5 se desarrolló la técnica usada por S.S. Chern y se mostró la fórmula de Cauchy-Crofton. Esta fórmula puede considerarse como el inicio de la llamada geometría integral. Con ella se tiene una demostración alternativa del teorema de Fary-Milnor, y requiere el uso de la función altura para contar el número de puntos críticos en la esfera. La prueba es una consecuencia de la combinación de la función altura y de la fórmula de Cauchy-Crofton, aunque es menos complicada que la de J. Milnor requiere de una herramienta más fuerte, como lo es la fórmula de Cauchy-Crofton. En este capítulo además, se mostraron diferentes resultados acerca de las curvas, por ejemplo, los corolarios 5.1 y 5.2, dan una cota inferior para la longitud de una curva cerrada en términos de la curvatura, estos resultados son consecuencia inmediata del teorema de Fenchel.

En el capítulo 6 se estudió la prueba de M.P. Do Carmo y se mostraron propiedades importantes de las superficies las cuales son una motivación para el inicio del estudio de variedades (véase [7]). El papel más importante en este capítulo corre a cargo de la curvatura Gaussiana y nuevamente el uso de la función altura. La prueba es más visual y también requiere de un resultado fuerte como es el teorema de Chern-Lashoff.

Como trabajo futuro queda establecer la conexión que existe entre el número de puentes definido en 4.11 y el número de puentes en teoría de nudos, esto permitirá establecer una relación con la curvatura total y los distintos tipos de nudos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. ADAMS. “The Knot Book”. American Mathematical Society (2004).
- [2] H. ALENCAR Y W. SANTOS. “Geometría diferencial das curvas planas”. IMPA (2003).
- [3] R. G. BARTLE. “The Elements Integration and Lebesgue Measure”. Wiley-Interscience (1995).
- [4] F. BRICKELL Y C.C. HSIUNG. The total absolute curvature of closed curves in riemannian manifolds. *Journal Differential Geometry*, páginas 177–193 (1974).
- [5] S.S. CHERN. “Global Differential Geometry”. The Mathematical Association of America (1989).
- [6] M. P. DO CARMO. “Geometría Diferencial de Curvas e Superficies”. Sociedade Brasileira de Matemática (2005).
- [7] M. P. DO CARMO. “Geometría Riemanniana”. Projeto Euclides (2005).
- [8] L. C. EVANS Y R. F. GARIEPY. “Measure Theory and Fine Properties of Functions”. Taylor and Francis US (2000).
- [9] I. FARY. Sur la courbure totale d’une courbe gauche faisant un nud. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, páginas 128–138 (1949).
- [10] W. FENCHEL. On the differential geometry of closed space curves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, páginas 44–54 (1951).
- [11] D. FUCHS Y S. TABACHNIKOV. “Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics”. American Mathematical Society (2007).
- [12] D. HILBERT Y S. CONH-VOSSEN. “Geometry and the Imagination”. AMS Chelsea Publishing (1999).
- [13] R.A. HORN. On Fenchel’s theorem. *The American Mathematical Monthly*, páginas 380–381 (1971).
- [14] D.A. KLAIN. “Introduction to geometric probability”. Cambridge University Press (1997).
- [15] E.L. LIMA. “Grupo Fundamental e Espacos de Recobrimento”. Projeto Euclides (2003).
- [16] J. W. MILNOR. On the total curvature of knots. *Annals of Mathematics*, páginas 248–257 (1950).
- [17] J. W. MILNOR. On total curvatures of closed space curves. *Mathematica Scandinavica*, páginas 289–296 (1953).
- [18] J. W. MILNOR. “Topology from Differentiable Viewpoint”. Princeton University Press (1997).

- [19] S. MONTIEL Y A. ROS. “Curves and Surfaces”. American Mathematical Society (2005).
- [20] L. I. NICOLAESCU. Knots and their curvatures. Notas (2012).
- [21] R. OSSERMAN. Curvature in the eighties. *The American Mathematical Monthly*, páginas 731–756 (1990).
- [22] O. A. PALMAS Y J. G. REYES. “Curso de Geometría Diferencial. Parte 1. Curvas y Superficies”. UNAM (2005).
- [23] O. A. PALMAS Y J. G. REYES. “Curso de Geometría Diferencial. Parte 2. Geometría Intrínseca de las superficies”. UNAM (2005).
- [24] M. RAUSSEN Y C. SKAU. Interview with John Milnor. *American Mathematical Society. Notices*, páginas 400–408 (2012).
- [25] M. SCHARLEMANN. “Topological aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas”. Springer (1992).
- [26] M. SPIVAK. “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2”. Publish or Perish (1999).
- [27] J. M. SULLIVAN. Curves of finite total curvature. *Discrete Differential Geometry*, páginas 137–161 (2008).
- [28] W.R. WADE. “Introduction to Analysis”. Prentice Hall (1995).
- [29] A. YAMAN. Formules de Cauchy-Crofton. Notas (2012).

ÍNDICE ALFABÉTICO

- ángulo exterior, 25
- teorema
 - de la convergencia monótona, 38
- adjunción, 27
- aplicación
 - de Gauss, 55
 - tangente de la curva , 34
 - tangente del polígono, 29
- aplicacion, 29
- círculos máximo, 42
- carta, 51
- cicloide, 4
- circulo máximo, 30, 31
- circunferencia límite tangente, 9
- continuidad uniforme, 35
- curva, 1
 - cerrada, 1
 - cerrada simple, 1
 - convexa, 16, 39
 - diferenciable, 3
 - en el espacio, 21
 - parametrizada por longitud de arco , 6
 - plana, 1
 - regular, 4
 - simple, 1
 - suave, 3
- curvatura, 8, 14
 - con signo, 15
 - Gaussiana, 55
 - negativa, 15
 - positiva, 15
 - signo, 14
 - total de un polígono, 26
 - total de una curva, 35
 - total normalizada, 30
- derivada, 3
- diedro de Frenet, 15
- difeomorfismo, 52
- ecuaciones de Frenet, 14
- espacio tangente, 53
- espiral de Arquímedes, 2
- estrictamente monótona, 5
- estructura, 51
- fórmula, 42
 - de Cauchy-Crofton, 42, 44
 - de coárea, 45
- función, 2
 - creciente, 6
 - decreciente, 6
 - diferenciable, 2
 - suave, 3
- funciones coordenadas, 1
- grado, 17
- homeomorfismo, 51
- isotopía, 40
- Lissajous, 3
- longitud de arco , 6
- mínimo local, 31
- número de puentes, 29, 30, 38
- polígono, 25
 - convexo, 25
 - en el espacio, 28
 - plano, 25
- poligono
 - convexo, 26
- polo, 42
- primera forma fundamental, 54
- punto inicial y final, 1
- regla de la cadena, 54
- reparametrización, 5
- segunda forma fundamental, 55
- superficie, 51

- orientable, 55
- regular, 51
- tubular, 56

teorema, 5

- de Chern-Lashoff, 57
- de Fary-Milnor, 40, 50, 60
- de Fenchel, 39, 48, 58
- de la función inversa, 5, 7, 52
- del valor medio, 9
- fundamental de cálculo, 6

torsión, 23

traza, 1

triedro de Frenet-Serret, 22

vector, 4

- binormal, 22
- no degenerado, 31
- normal, 22
- tangente, 22
- velocidad, 4

vertices, 25, 28