UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

ESPACIOS DE LIPSCHITZ EN ESPACIOS DE FUNCIONES INTEGRABLES CON PESO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
FELICIANO AGUILAR REYES

DIRECTOR
DR. JOSÉ MARGARITO HERNÁNDEZ MORALES

CO-DIRECTOR
M. C. TIRSO MIGUEL ÁNGEL RAMÍREZ SOLANO

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA SEPTIEMBRE 2014

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo del Dr. José Margarito Hernández Morales, a quien agradezco su gran labor como supervisor, director de tesis y quien me otorgó gran material bibliográfico para la redacción de la misma. También le debo agradecimentos a mi co-director M. C. Tirso Miguel Ángel Ramírez Solano por las revisiones que llevó a cabo simultáneamente con mi director, a mis revisores: Dr. Cuauhtemoc Héctor Castañeda Roldán, M. C. Luz del Carmen Álvarez Marín, quienes de manera independiente dieron sus puntos de vista, sugerencias y una lista de los errores que contenían los primeros borradores.

También me gustaría agradecer al Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) por el incentivo económico que me fue otorgado durante la realización de mi tesis. No puedo terminar sin agradecer a mis padres, cuyo estímulo y gran apoyo me conducieron a terminar mi licenciatura. Es a ellos a quienes dedico este trabajo.

Simbología

Conjuntos

X, Y	—	Espacios cuasi-semimétricos.
$E, \mathbb{E}, \mathbb{F}, F$	—	Espacios lineales.
X^α	—	Espacio métrico de Hölder, $0 < \alpha \leq 1$.
$\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X, E)$	—	Espacio de funciones Lipschitz continuas de X en E.
$\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$	—	Abreviación de $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.
$\mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$	—	Subespacio de $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$.
$\mathrm{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})$	—	Espacio de Lipschitz en $L_{2\pi}^1$.
$\mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})$	—	Subespacio de $\mathrm{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})$.
$\mathrm{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_\omega$	—	Espacio de Lipschitz en $L(\omega)$.
$\mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_\omega$	—	Subespacio de $\mathrm{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_\omega$.
$\mathrm{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_{u,v}$	—	Espacio de Lipschitz en $L(u, v)$.
$\mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_{u,v}$	—	Subespacio de $\mathrm{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_{u,v}$.
$\mathbb{N}$	—	Conjunto de los números naturales (no incluye al 0).
$\mathbb{R}_+$	—	Intervalo $[0, \infty)$.
$\widehat{\mathbb{R}_+}$	—	$\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.
$\mathbb{R}_+^*$	—	Intervalo $(0, \infty)$.
I	—	$(0, b]$, $(0, b)$, $\mathbb{R}_+$ o $\mathbb{R}_+^*$.
$\mathbb{T}$	—	Espacio cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
$C(\mathbb{T})$	—	Espacio de funciones continuas definidas sobre $\mathbb{T}$.
$C_{2\pi}$	—	Abreviación de $C(\mathbb{T})$.
$L_{2\pi}^\infty$	—	Espacio de funciones esencialmente acotadas.
$L^1(\mathbb{T})$	—	Espacio de funciones Lebesgue integrables sobre $\mathbb{T}$.
$L_{2\pi}^1$	—	Abreviación de $L^1(\mathbb{T})$.
$L(\omega)$	—	Espacio de funciones f tales que $f\omega \in L_{2\pi}^1$.
$L(u, v)$	—	Espacio de funciones f tales que $f^+u - f^-v \in L_{2\pi}^1$.

Funciones y funcionales

d, ρ	—	Cuasi-semimétricas.
ρ^s	—	Semimétrica $\text{máx}\{\rho, \bar{\rho}\}$.
ν	—	Seminorma asimétrica o cuasi-norma.
$\bar{\nu}$	—	Conjugado de la cuasi-norma asimétrica ν.
$\|\| \cdot \|\|$	—	Norma en un determinado espacio lineal.
$\|\| \cdot \|\|_1$	—	Norma en $L^1_{2\pi}$.
$\|\| \cdot \|\|_\omega$	—	Norma en $L(\omega)$.
$\|\| \cdot \|_{u,v}$	—	Norma asimétrica en $L(u,v)$.
$\|\| \cdot \|\|_\infty$	—	Norma uniforme definida por $\|\| \cdot \|\|_\infty = \sup \|\| \cdot \|\|$.
$\|\| \cdot \|$	—	Seminorma asimétrica.
$\overline{\|\| \cdot \|}$	—	Conjugado de $\|\| \cdot \|$.
$\|\| \cdot \|^s$	—	Abreviación de $\text{máx}\left\{\|\| \cdot \|, \overline{\|\| \cdot \|}\right\}$.
$\{F_n\}$	—	Kernel de Féjer.
f_t	—	Función traslación definida por $f_t(x) = f(x+t)$.
f^+	—	Parte positiva de f.
f^-	—	Parte negativa de f.
$\psi(\delta, \cdot)$	—	Función de admisibilidad (vea definiciones 2.1.1 y 3.1.1).
$\Delta_t^r(f, \cdot)$	—	Diferencia de orden r dada por $\Delta_t^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}(-1)^{r-k} f(x+kt)$.
$\Delta_t^r(f, \cdot)_\omega$	—	Incremento en $L(\omega)$.
$\Delta_t^1(f, \cdot)_{u,v}$	—	Incremento en $L(u,v)$
$\theta_\alpha^\infty(\cdot)$, $\theta_\alpha^\infty(\cdot, \delta)$	—	Seminormas en $\text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$.
$\|\| \cdot \|\|_{\alpha,\infty}$	—	Norma en el espacio $\text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$.
$\theta_\alpha^1(\cdot)$, $\theta_\alpha^1(\cdot, \delta)$	—	Seminormas en $\text{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})$.
$\|\| \cdot \|\|_{\alpha,1}$	—	Norma en el espacio $\text{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})$.
$\theta_\alpha^1(\cdot)_\omega$, $\theta_\alpha^1(\cdot, \delta)_\omega$	—	Seminormas en $\text{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_\omega$.
$\|\| \cdot \|\|_{\alpha,\omega}$	—	Norma en el espacio $\text{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_\omega$.
$\theta_\alpha^1(\cdot)_{u,v}$, $\theta_\alpha^1(\cdot, \delta)_{u,v}$	—	Funcionales en $\text{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_{u,v}$.
$\|\| \cdot \|_{\alpha,u,v}$	—	Norma asimétrica no degenerada en el espacio $\text{Lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_{u,v}$.
$\Theta(\cdot)$, $\Theta(\cdot, \delta)$	—	Funcionales en $\mathbb{F}$.
$\Theta((f_n), \delta)$	—	Abreviación de $\sup_{n \in \mathbb{N}} \Theta(f_n, \delta)$.

Índice general

Introducción

Este trabajo tiene como próposito, hacer un estudio de la teoría desarrollada sobre aproximación a funciones en distintos espacios de Lipschitz, partiendo desde los espacios de Lipschitz en el espacio de funciones continuas, hasta espacios de Lipschitz en el espacio de funciones integrables con peso sensible al signo. En [1] se menciona que −los espacios de Lipschitz han sido estudiados por décadas, pero que su progreso ha sido demasiado lento y algunos de sus resultados básicos son de tiempos recientes. No existe una razón matemática fuerte del por qué muchos de los teoremas recientemente probados, no lo fueron desde hace 40 o 50 años. Parte de la explicación es que probablemente los espacios de Lipschitz no habían despertado mucho interés, y han sido vistos como obscuras construcciones matemáticas con poca aplicación−. Por mencionar algunos resultados, diremos que en el contexto de espacios de Lipschitz hay versiones de teoremas importantes del Análisis Funcional, así como de Topología. Como ejemplo (vea [1, pág 4]): "Sean X, Y espacios métricos y $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$ sus completaciones respectivamente. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función Lipschitz continua, entonces existe una única extensión también Lipschitz continua $\widehat{f} : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$".

El primer trabajo en aproximación polinomial con norma de Hölder(o de Lipschitz) fue presentada por Kalandiya [2]. Otro trabajo reciente, de Wel Li, Du Zou, Deyi Li y Zhaouyuan Zhang [3], de universidades chinas, trata sobre los conos normados asimétricamente, formados por mapeos que ellos denominan "K-Lipschitz por la derecha" y "K-Lipschitz por la izquierda" de un espacio lineal normado asimétricamente (X, d) a otro espacio lineal normado asimétricamente (Y, ρ), que se anulan en un punto fijo x_0. En estos conos caracterizan los puntos de mejor aproximación, finalmente, muestran que dichos conos son espacios de los denominados cuasi-métricos bicompletos.

Mucho se ha investigado recientemente sobre espacios de Hölder (o de Lipschitz) de orden superior contenidos en los espacios $C(A)$ y $L^p(A)$, siendo $A = [a, b]$ $(a < b)$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Estos espacios están formados por aquellas funciones f para las cuales $\theta_\alpha^L(f) < +\infty$, donde $\theta_\alpha^L(f)$ es el supremo de la familia de seminormas

$$\theta_\alpha^L(f, \delta) = \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||\Delta_t^r(f, \cdot)||_L}{|t|^\alpha} \qquad 0 < \delta \leq \pi,$$

con $\alpha > 0$, $r = [\alpha] + 1$ y Δ_t^r, una diferencia de orden superior. Para profundizar en el tratamiento del orden superior vea [4, pág 44], donde L es cualquiera de los espacios mencionados y $||\cdot||_L$ es la norma en éste.

Según nuestro conocimiento, el primer trabajo sobre el tema de aproximación asimétrica dado por un peso uniforme generalizado fue introducido por Moursund [5] en 1966. Este fue seguido por una serie de artículos del mismo autor, así como de otros matemáticos de esa época, entre los que mencionamos [6], donde una larga lista de referencias pueden ser halladas. Después, pero independientemente, Krein y Nudelman, en 1973 (vea [7]), consideran un caso un poco más particular, mediante el funcional sobre $C[a,b]$ dado por,

$$\rho(f) = \sup_{a\leq x\leq b} (f^+(x)u(x) + f^-(x)v(x)),$$

u, v, $f \in C[a,b]$, con u y v estrictamente positivas. Puesto que u actúa sobre la parte positiva de f y v lo hace sobre la parte negativa de f, el par (u,v) fue llamado después un peso sensible al signo (vea [8], [9] y una extensa lista de referencias dadas ahí). El funcional ρ es sub-aditivo y homogéneo positivo, pero no una norma en general, jústamente porque la diferencia $\rho(f) \neq \rho(-f)$ puede ocurrir. Por ejemplo, bastaría tomar $u = 1$ y $v = 2$. Esta es la razón por la que el funcional es llamado norma asimétrica.

Los espacios de Lipschitz en los que aquí trataremos la aproximación de funciones son subespacios de las funciones: continuas $C_{2\pi} := C(\mathbb{T})$, integrables $L^1_{2\pi} := L^1(\mathbb{T})$, integrables con peso $L(\omega)$ y las funciones integrables con peso sensible al signo $L(u,v)$.

Enseguida damos una breve descripción de la estructura que hemos decidido darle a este trabajo.

En el capítulo inicial de Preliminares, mostramos algunos conceptos que se derivan del concepto de norma, debilitando alguna(s) de la(s) propiedade(s) que definen a ésta. En esta parte coleccionamos las principales características topológicas de los espacios resultantes, las cuales se utilizan en los capítulos restantes para estudiar la convergencia de sucesiones. Este primer capítulo incluye una sección donde mencionamos la importancia de una unidad aproximativa y también una sección para dar una noción de funciones de Lipschitz (o Hölder).

En el capítulo 2 tratamos una aproximación en espacios de Lipschitz, considerando a éste como subespacio de uno los espacios $C_{2\pi}$, $L^1_{2\pi}$ y $L(\omega)$. Por $L(\omega)$ denotamos al espacio de funciones con valores reales definidas sobre $\mathbb{T}$ que son integrables con respecto a una función peso ω, aquí definimos una diferencia adecuada $\Delta^r_t(f,\cdot)_\omega$, para medir la suavidad de funciones en $L(\omega)$, e introducimos la correspondiente familia de seminormas

$$\theta^1_\alpha(\cdot,\delta)_\omega := \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||\Delta^r_t(f,\cdot)_\omega||_1}{|t|^\alpha}, \qquad 0<\delta\leq\pi.$$

Finalmente en el último capítulo tratamos una aproximación sobre el espacio $L(u,v)$, donde éste último espacio es el conjunto de funciones f tales que f^+u+f^-v es integrable. En este capítulo se usan más a menudo los conceptos dados en la primera sección de Preliminares. En este caso se introduce la familia de funcionales

$$\theta^1_\alpha(\cdot,\delta)_{u,v} := \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||\Delta_t(f,\cdot)_{u,v}||_1}{|t|^\alpha}, \qquad 0<\delta\leq\pi.$$

Estos funcionales no son seminormas, pero tienen características muy similares a éstas. Además, mediante

$$\theta^1_\alpha(f)_{u,v} = \sup_{\delta>0} \theta^1_\alpha(f,\delta)_{u,v};$$

se generan espacios de Lipschitz en este contexto, los cuales se describen en el momento apropiado.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo se divide en cuatro secciones. En las primeras dos secciones se incluyen algunos conceptos que se derivan de los espacios normados.

En la tercera sección describimos al espacio $L^1_{2\pi}$, así también como algunos resultados de aproximación en este espacio, los cuales nos servirán para los capítulos posteriores.

En la última sección describimos de manera breve los espacios de Lipschitz en el espacio de funciones continuas. Es en esta última sección, cuando comenzamos a familiarizarnos con los espacios de Lipschitz "abstractos" que describiremos en el segundo capítulo.

§1.1 Cuasi-métricas y normas asimétricas

Distancias asimétricas fueron ya consideradas por Hausdorff en su libro sobre Teoría de Conjuntos [10, págs 166-168]. En [11], su autor menciona que existió mucho progreso en espacios cuasi-uniformes entre los años 1966 y 1982. Este es jústamente el periodo en que diferentes autores dan los primeros pasos en aproximación asimétrica. Fueron motivados no sólo por las aplicaciones en Teoría de Aproximación, sino también en Ciencias de la Computación, específicamente en análisis de complejidad de programas, así como por propio interés teórico. Existen hoy en día muchos trabajos sobre espacios normados asimétricamente y sobre los más generales espacios cuasi-métricos (también llamados espacios pseudo-métricos).

Los primeros trabajos sobre normas asimétricas fueron tempranamente esbozadas por Krein y después utilizados por él y Nudelman en [7], donde se pueden encontrar algunas referencias. Las ideas de Krein fueron seguidas en varios trabajos en aproximación con peso sensible al signo por matemáticos rusos, por ejemplo en [12].

El estudio sistemático de las propiedades de los espacios lineales normados asimétricamente, se inició de manera más general y abstracta con los trabajos de Romaguera de la Universidad Politécnica de Valencia (vea [13]), así como de sus colaboradores en la misma universidad y en otras universidades de España: Alegre, Ferrer, García-Raffi, Sánchez Pérez, Sánchez Alvarez, Sanchis, Valero. Por mencionar algunos de los trabajos de estos investigadores, se tiene: [14], [15] y [16], donde se puede seguir la evolución de algunos de los resultados obtenidos en los últimos años.

Un trabajo un poco más reciente y extenso sobre espacios cuasi-métricos y normados asimétricamente, es el realizado por Cobzas en [17], donde la presentación sigue las ideas de la teoría de espacios normados (topología, operadores lineales continuos, funcionales lineales continuos, dualidad, geometría de espacios normados asimétricamente, operadores compactos) enfatizando similaridades, así como diferencias con respecto a la teoría clásica, tomando como referencia los espacios bitopológicos (vea [18]).

Definición. Sea X un conjunto no vacío. Una función $\rho : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ es una *cuasi-métrica* sobre X si cumple,

(CS1) $\rho(x, x) = 0$, para todo $x \in X$.

(CS2) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

(CS3) Si existen $x, y \in X$ que satisfacen,

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0,$$

entonces $x = y$.

El par (X, ρ) se llama *espacio cuasi-métrico.* Si no se requiere especificar la cuasi-métrica ρ, diremos simplemente que X es un espacio cuasi-métrico. Si la propiedad (CS3) es omitida, entonces la función ρ es llamada *cuasi-semimétrica* y el par (X, ρ), se llama *espacio cuasi-semimétrico.*

Ejemplo. La función $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ dada por,

$$\rho(x, y) = \max_{x,y \in \mathbb{R}} \{y - x, 0\},$$

es una cuasi-métrica sobre $\mathbb{R}$.

El *conjugado* de una cuasi-semimétrica ρ es la cuasi-semimétrica $\bar{\rho}$ (también denotado por ρ^{-1}) que es definida mediante,

$$\bar{\rho}(x, y) = \rho(y, x), \ x, y \in X.$$

Con ρ y $\bar{\rho}$ se define,

$$\rho^s(x, y) = \max_{x,y \in X} \{\rho(x, y), \bar{\rho}(x, y)\},$$

este funcional es una semi-métrica sobre X y es una métrica si y sólo si ρ es una cuasi-métrica.

Definición 1.1.1. Sea E un espacio lineal. Una función $\nu : E \longrightarrow [0, \infty)$ es una *norma asimétrica* sobre E si cumple,

(NA1) Si existe $x \in E$ tal que $\nu(x) = 0 = \nu(-x)$, entonces $x = 0$.

(NA2) $\nu(\lambda x) = \lambda \nu(x)$, para todo $x \in E$ y para todo $\lambda \geq 0$.

(NA3) $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$, para todo $x, y \in E$.

Al par (E, ν) se le llama *espacio lineal asimétrico, espacio no simétrico* o *espacio normado asimétricamente.* Si la condición (NA1) es omitida entonces ν se llama *seminorma asimétrica* y el par (E, ν) *espacio seminormado asimétricamente.*

El conjugado de una seminorma asimétrica ν, es la seminorma asimétrica $\bar{\nu}$ definida por,

$$\bar{\nu}(x) = \nu(-x), \ x \in E,$$

mientras que,

$$\nu^s(x) = \max_{x,y \in E}\{\nu(x), \bar{\nu}(x)\}.$$

No es difícil verificar que ν^s es una seminorma. De hecho esta seminorma se llama *seminorma asociada a* ν. La seminorma asimétrica ν es una norma asimétrica si y solo si ν^s es una norma.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ la función ν definida mediante,

$$\nu(x) = \max_{x \in \mathbb{R}}\{x, 0\},$$

es una norma asimétrica.

Usaremos el símbolo $|| \cdot |$ para denotar una norma asimétrica o una seminorma asimétrica indistintamente.

Proposición. Sea $(E, ||\cdot|)$ un espacio lineal seminormado asimétricamente. La función $\rho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$\rho(x, y) = ||y - x|,$$

es una cuasi-semimétrica sobre E.

Demostración. Por (NA1) de la Definición (1.1.1) se sigue que $\rho(x, y) \geq 0$ para todo par de elementos $x, y \in E$. De (NA2) tenemos que $\rho(x, x) = 0$ para todo $x \in E$ y ahora de (NA3), $\rho(x, y) = ||y - x| \leq ||z - x| + ||y - z| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$, para todo $x, y, z \in E$. Por lo tanto, ρ es una cuasi-semimétrica. □

Lo que nos dice la proposición previa es que toda seminorma asimétrica induce de manera natural una cuasi-semimétrica. Nos conviene denotar el conjugado de una seminorma asimétrica por $\overline{||\cdot|}$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$, la seminorma asimétrica $||\cdot|$ definida por,

$$||x| = \max_{x\in\mathbb{R}}\{x, 0\}$$

determina la cuasi-semimétrica ρ que está definida mediante la expresión,

$$\rho(x, y) = \max_{x,y\in\mathbb{R}}\{y - x, 0\}.$$

Proposición. Sea E un espacio lineal. Si ρ es una cuasi-semimétrica sobre E que cumple

(i) $\rho(x, y) = \rho(y - x, 0)$, para todo $x, y \in E$.

(ii) $\rho(\lambda x, 0) = \lambda\rho(x, 0)$ para todo $x \in E$ y para todo $\lambda \geq 0$.

Entonces ρ está determinada por una seminorma asimétrica.

Demostración. Definamos una función $\nu : E \longrightarrow [0, \infty)$ por $\nu(x) = \rho(x, 0)$. Entonces para todo $x, y \in E$ y para todo $\lambda \geq 0$,

(NA2) $\nu(\lambda x) = \rho(\lambda x, 0) = \lambda\rho(x, 0) = \lambda\nu(x)$.

(NA3) $\nu(x + y) = \rho(x + y, 0) \leq \rho(x + y, x) + \rho(x, 0) = \rho(x, 0) + \rho(y, 0) = \nu(x) + \nu(y)$.

Por lo tanto ν es una seminorma asimétrica sobre E y claramente ρ está determinada por ν. □

En (NA2) de la Definición (1.1.1) hemos tomado $\lambda \geq 0$, sin embargo existen espacios normados asimétricamente que poseen una propiedad adicional.

Definición. Si en un espacio normado asimétricamente $(E, ||\cdot|)$, existe una constante $D = D(E, ||\cdot|)$ tal que en (NA2) de la Definición (1.1.1) satisface,

$$||\lambda x| \leq |\lambda|D||x| \text{ para todo } x \in E \text{ y para todo } \lambda \in \mathbb{R},$$

entonces el par $(E, ||\cdot|)$ se llama *espacio lineal normado asimétricamente no degenerado* y la constante D es llamada *constante de asimetría.*

Ejemplo. En $C[a,b]$, con

$$||f| = \sup_{a\leq x\leq b} \left(2f^{+}(x) + f^{-}(x)\right),$$

se puede ver que,

$$||\lambda f| \leq 2|\lambda| \cdot ||f|.$$

DeVore y Lorentz en [4, pág 16] dan la definición de "espacio cuasi-normado" de la manera siguiente.

Definición. Sea E un espacio lineal. Una función $\nu : E \longrightarrow [0,\infty)$ se llama *cuasi-norma* sobre E si cumple,

(CN1) $\nu(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, para todo $x \in E$.

(CN2) $\nu(\lambda x) = \lambda\nu(x)$, para todo $x \in E$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(CN3) $\nu(x+y) \leq C(\nu(x) + \nu(y))$, para todo $x, y \in E$ y para algún $C = C(E,\nu)$.

El par (E,ν) se llama *espacio cuasi-normado.*

Ejemplo. Si $0 < p < 1$, entonces el espacio $L^p[a,b]$ $(a < b)$ el cual consta de funciones $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ para los cuales

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

es un espacio cuasi-normado.

En efecto, las propiedades (CN1) y (CN2) de la definición previa se demuestran de manera análoga al caso $1 \leq p < \infty$.

Para probar la propiedad (CN3), primero mostraremos que si $s, t \geq 0$ y $0 < p < 1$, entonces

$$(s+t)^p \leq s^p + t^p. \tag{1.1}$$

Para esto, no hay pérdida de generalidad si suponemos que $t > s > 0$, de tal forma que sólo tenemos que probar

$$\left(1 + \frac{s}{t}\right)^p \leq 1 + \left(\frac{s}{t}\right)^p.$$

Fijemos pues p $(0 < p < 1)$ y definamos una función $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\phi(x) = 1 + x^p - (1+x)^p.$$

Notemos que para cada $x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= px^p - p(1+x)^{p-1}\\ &= p\left(\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right)\\ &= \frac{p}{x^{1-p}}\left(1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^{1-p}\right) > 0,\end{aligned}$$

esto implica que ϕ es creciente y además $f(0) = 0$, de modo que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$, esto es

$$1 + x^p \geq (1+x)^p \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Ahora sean $f, g \in L^p[a,b]$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $f, g \neq 0$, luego del resultado (1.1),

$$\begin{aligned}||f+g||_p^p &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx\\ &\leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\, dx\\ &\leq \int_a^b (|f(x)|^p + |g(x)|^p)\, dx\\ &= ||f||_p^p + ||g||_p^p,\end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned}||f+g||_p &\leq (||f||_p^p + ||g||_p^p)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(2\max\{||f||_p^p, ||g||_p^p\}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}(||f||_p + ||g||_p).\end{aligned}$$

Notemos que en este caso una constante de la propiedad (CN3) es $C = 2^{1/p}$.

Definición 1.1.2. Sea E un espacio lineal. Una función $\nu : E \longrightarrow [0,\infty)$ es llamada una *cuasi-norma asimétrica no degenerada* sobre E si cumple,

(CA1) $\nu(x) = 0 \iff x = 0$, para todo $x \in E$.

(CA2) $\nu(\lambda x) \leq |\lambda| D\nu(x)$, para todo $x \in E$, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y para alguna constante $D = D(E,\nu)$.

(CA3) $\nu(x+y) \leq C(\nu(x)+\nu(y))$, para todo $x, y \in E$ y para alguna constante $C = C(E,\nu)$.

El par (E,ν) es llamado *espacio cuasi-normado asimétricamente no degenerado.*

En el último capítulo de este trabajo veremos algunos espacios lineales con esta estructura.

§1.2 Convergencia en espacios asimétricos

La noción de convergencia para sucesiones en un espacio normado se generaliza a espacios lineales normados asimétricamente. Si (X, ρ) es un espacio cuasi-semimétrico, entonces para cada $x \in X$ y $\lambda > 0$, la *bola con centro x y radio λ* es el conjunto,

$$B_\rho(x, \lambda) = \{y \in X : \rho(x, y) < \lambda\},$$

mientras que la *bola cerrada con centro x y radio λ* está dada por,

$$B_\rho[x, \lambda] = \{y \in X : \rho(x, y) \leq \lambda\}.$$

La topología τ_ρ de un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), es definida a partir de la familia $\nu_\rho(x)$ de τ_ρ-vecindades de un punto arbitrario $x \in X$. Un conjunto V de X es una τ_ρ - *vecindad* de un punto $x \in X$ si existe $\lambda > 0$ tal que $B_\rho(x, \lambda) \subset V$. Un conjunto $G \subset X$ es τ_ρ - *abierto* si y sólo si, G es una τ_ρ - vecindad de cada uno de sus puntos. La convergencia de una sucesión (x_n) a un elemento $x \in X$, es definida enseguida en un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ).

Definición. Una sucesión (x_n) en un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ), se dice que *converge a un elemento $x \in X$ respecto a τ_ρ* lo cual se denota por $x_n \xrightarrow{\rho} x$ si,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

Esta convergencia es generalmente llamada *ρ-convergencia*, se observa que

$$x_n \xrightarrow{\rho^s} x \text{ si y sólo si } x_n \xrightarrow{\rho} x \text{ y } x_n \xrightarrow{\bar{\rho}} x.$$

En un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ) se tienen conceptos derivados del concepto de sucesión de Cauchy en espacios métricos.

Definición. Una sucesión (x_n) en un espacio cuasi-semimétrico (X, ρ) es una *sucesión K-Cauchy por la izquierda*, (*K-Cauchy por la derecha* respectivamente), si dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ ($\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, respectivamente), para todo $n \geq m \geq N_0$.

También decimos que la sucesión (x_n) es *ρ^s-Cauchy* si dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N$, $\rho^s(x_m, x_n) < \varepsilon$. Se verifica que una sucesión es ρ^s-Cauchy si y sólo si es K-Cauchy por la izquierda y K-Cauchy por la derecha. Ilustramos la diferencia entre una sucesión K-Cauchy por la izquierda y K-Cauchy por la derecha a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo. Para $x, y \in \mathbb{R}$, definimos una cuasi-métrica ρ como

$$\rho(x,y) = y - x, \text{ si } x \leq y$$

y

$$\rho(x,y) = 1, \text{ si } x > y.$$

Tomando la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$, se cumple que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$,

$$\rho\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) = 1,$$

esto nos muestra que $\left(\frac{1}{n}\right)$ no es una sucesión K-Cauchy por la izquierda. Sin embargo si es una sucesión K-Cauchy por la derecha, ya que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, luego si $n \geq m \geq N$ entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, esto implica que,

$$\rho\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \varepsilon - \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Proposición. Toda sucesión convergente en un espacio normado asimétricamente no degenerado $(E, ||\cdot|)$, es una sucesión $||\cdot|^s$-Cauchy.

Demostración. Sean D una constante de asimetría del espacio E y (x_n) una sucesión en E que converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$||x_n - x| < \frac{\varepsilon}{1+D} \text{ para todo } n \geq N_0.$$

Ahora, si $n \geq m \geq N_0$, entonces

$$||x_n - x_m| \leq ||x_n - x| + D||x_m - x| < \frac{\varepsilon}{1+D} + D\frac{\varepsilon}{1+D} = \varepsilon.$$

Esto nos muestra que (x_n) es una sucesión K-Cauchy por la izquierda. Para verificar que (x_n) es una sucesión K-Cauchy por la derecha se procede de manera análoga. $\square$

Un espacio cuasi-métrico (X, ρ) es llamado *bicompleto* si el espacio métrico (X, ρ^s) es completo. Un espacio normado asimétricamente bicompleto es llamado *espacio bi-Banach*. Una serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ en un espacio normado asimétricamente $(E, ||\cdot|)$ se dice que es *sumable* con suma s, si $s \in E$ y la sucesión de las sumas parciales de la serie converge a s, esto es:

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - s\right|\right. \longrightarrow 0.$$

En este caso escribimos $s = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$.

La serie se dice que es *absolutamente sumable* si, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||x_i|$ es sumable.

Teorema 1.2.1. Un espacio lineal normado asimétricamente no degenerado es bi-Banach si y sólo si, toda serie absolutamente sumable es sumable.

Demostración. Primero probaremos que toda serie absolutamente sumable es sumable, siempre que el espacio es bi-Banach.

Sean $(E, ||\cdot|)$ un espacio lineal normado asimétricamente bi-Banach con constante de asimetría D y $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Dado que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i| < \infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\sum_{i=N_0}^{\infty} ||x_i| < \varepsilon$. Ahora, si $n > m \geq N_0$, entonces

$$||s_n - s_m| = \left\| \sum_{i=n}^{m} x_i \right| \leq \sum_{i=n}^{\infty} ||x_i| \leq \sum_{i=N_0}^{\infty} ||x_i| < \varepsilon.$$

De manera análoga,

$$||s_m - s_n| \leq D\varepsilon.$$

Así, (s_n) es una sucesión $||\cdot|^s$-Cauchy, luego usando que E es un espacio bi-Banach, la sucesión de sumas parciales debe converger a un elemento $s \in X$ con respecto a la norma $||\cdot|^s$ y por lo tanto, con respecto a $||\cdot|$. Esto muestra que la serie es absolutamente sumable.

Procedemos ahora a probar el recíproco de la condicional ya probada.

Sea (x_n) una sucesión $||\cdot|^s$-Cauchy en E. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que,

$$||x_n - x_m| < 2^{-k} \text{ para todo } n, m \geq n_k.$$

Eligiendo los $n_k's$ de manera creciente, obtenemos una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n), luego haciendo $y_1 = x_{n_1}$ y $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$, si $k > 1$, se cumple que $x_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} y_i$, notando ahora que para $k > 1$, la desigualdad $||y_k| < 2^{-k}$ es válida, tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} ||y_i| \leq ||y_1| + \sum_{i=2}^{k} 2^{-i} = ||y_1| + 2 - 2^{k+1} \leq ||y_1| + 2,$$

esto muestra que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ es absolutamente sumable, luego aplicando nuestra hipótesis, existe $x \in E$ tal que, $\sum_{i=1}^{\infty} y_i = x$ y por lo tanto la subsucesión (x_{n_k}) converge a x. Mostraremos ahora que $x_n \xrightarrow{||\cdot|^s} x$. Puesto que (x_n) es una sucesión $||\cdot|^s$-Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$||x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } m, n \geq N_0$$

y dado que $x_{n_k} \xrightarrow{||\cdot|} x$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } k \geq K.$$

Elegimos $k \in \mathbb{N}$ de tal manera que $k > K$ y $n_k \geq N_0$, mediante esto, para $n > N_0$,

$$||x_n - x| \leq ||x_n - x_{n_k}| + ||x_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Esto muestra que $x_n \xrightarrow{||\cdot|} x$. De manera similar se verifica que $x_n \xrightarrow{\overline{||\cdot|}} x$, obteniendo así la convergencia a x con respecto a $||\cdot|^s$. $\square$

§1.3 Funciones Lipschitz continuas

Las funciones Lipschitz continuas pueden considerarse como una generalización de lo que en Análisis Funcional se conoce como "funcional lineal acotado". De hecho, un *funcional lineal acotado* es una funcion $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ para el cual existe $M > 0$ tal que,

$$|g(x)| \leq M||x|| \text{ para todo } x \in E.$$

En este caso se prueba que el conjunto de estos funcionales, es un espacio de Banach (vea por ejemplo [19, pág 106]), además de que gran parte de los resultados que se tienen con un funcional lineal acotado, también son válidos para las funciones Lipschitz continuas. El espacio de funcionales lineales acotados es el análogo a lo que nosotros denotaremos como $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X, E)$ con $\alpha = 1$ (donde E es un espacio normado). Para profundizar un poco más sobre funciones Lipschitz continuas (de valores reales), consulte [1].

Definición. Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es *Lipschitz continua*, si existe una constante $M \geq 0$, de tal manera que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq Md(x, y) \text{ para todo } x, y \in X. \tag{1.2}$$

Ejemplo. En el caso de que $X, Y = \mathbb{R}$, el Teorema del Valor Medio garantiza que toda función de X en Y derivable y con derivada acotada, es una función Lipschitz continua.

Proposición. Toda función Lipschitz continua es uniformemente continua.

Demostración. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ una función Lipschitz continua y fijemos $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe una constante $M > 0$ tal que,

$$\rho(f(x), f(y)) \leq Md(x, y) \text{ para todo } x, y \in X.$$

Tomando $\delta = \varepsilon/M$ que sólamente depende de ε, tenemos que si $d(x, y) < \delta$ entonces para todo $x, y \in X$, $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. $\square$

Para dar una interpretación geométrica de una función Lipschitz continua, consideremos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a < b)$, esta función será Lipschitz continua si el conjunto de todas las pendientes de cada una de las posibles secantes a la gráfica de f, es un conjunto acotado.

La siguiente figura muestra que la función $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2},$$

no es Lipschitz continua, ya que la pendiente de la recta secante que une a los puntos C y A será cada será cada vez más negativa a medida que el punto C se acerca al punto A a través de la gráfica de f.

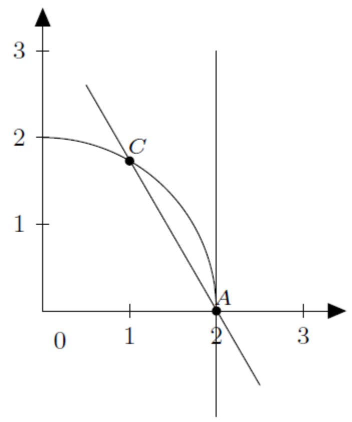


Figura 1.1: Gráfica de f

Hemos dado la definición de función Lipschitz continua entre espacios métricos cualesquiera, sin embargo, en este trabajo nos interesa cuando el espacio de llegada es un espacio normado.

Definición. Si (X, d) un espacio métrico y $0 < \alpha < 1$, el espacio métrico (X, d^α) llama *espacio métrico de Hölder*.

Denotaremos (X, d^α) simplemente por X^α.

Ahora, sean (X, d) un espacio métrico y $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado. Dada una función $f : X \longrightarrow E$ acotada (esto es, para cada $x \in E$, la cantidad $||f(x)||$ no excede al valor de una determinada constante), la *norma uniforme* de f es la norma $||\cdot||_\infty$ definida por,

$$||f||_\infty = \sup_{x \in E} ||f(x)||.$$

Para $0 < \alpha \leq 1$, denotemos por $||\cdot||_{\alpha,\infty}$ al funcional cuyos valores quedan determinados por la expresión,

$$||f||_{\alpha,\infty} = \theta_\alpha^\infty(f) + ||f||_\infty, \tag{1.3}$$

No es difícil probar que este funcional es una norma, en la siguiente página mencionamos el correspondiente espacio sobre el cual se define $||\cdot||_{\alpha,\infty}$. El término $\theta_\alpha^\infty(\cdot)$ es el funcional que asigna a cada función Lipschitz continua su *constante de Lipschitz*[1], la constante de Lipschitz de una función f es la cantidad

$$\theta_\alpha^\infty(f) = \sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{||f(x)-f(y)||}{d^\alpha(x,y)}.$$

También denotemos por $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ al conjunto de todas la funciones Lipschitz continuas de X en E. No es difícil probar que este conjunto junto la norma (1.3) es un espacio normado, de hecho este espacio se llama *espacio grande de Lipschitz*.

Proposición 1.3.1. Si $f \in \mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$, entonces

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{||f(x)-f(y)||}{d^\alpha(x,y)} = \inf\left\{M:\ ||f(x)-f(y)|| \leq Md^\alpha(x,y); x,y\in X\right\}.$$

Demostración. Sea $A = \{M:\ ||f(x)-f(y)|| \leq Md^\alpha(x,y); x,y\in X\}$. Si $\beta = \inf\limits_{M\in A} M$ entonces $\beta \in A$ ya que A es un conjunto cerrado. Combinando este resultado con el hecho de que f es una función Lipschitz continua,

$$\frac{||f(x)-f(y)||}{d^\alpha(x,y)} \leq \beta, \text{ para todo } x,y\in X,$$

así,

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{||f(x)-f(y)||}{d^\alpha(x,y)} \leq \beta.$$

Más aún, se da la igualdad ya que si $\beta_0 = \sup\limits_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{||f(x)-f(y)||}{d^\alpha(x,y)}$ satisface $\beta_0 < \beta$, entonces haciendo $\varepsilon = \beta - \beta_0 > 0$, se tiene $\beta_0 = \beta - \varepsilon$, esto implicaría que

$$\frac{||f(x)-f(y)||}{d^\alpha(x,y)} \leq \beta_0 \text{ para todo } x,y\in X,$$

[1]En algunos casos es importante el valor de α. Una función que cumple la desigualdad (1.2) con la métrica d^α, también se dice que satisface una *condición de Hölder de orden* α

y como consecuencia

$$||f(x) - f(y)|| \leq (\beta - \varepsilon) d^{\alpha}(x, y) \text{ para todo } x, y \in X,$$

lo cual es absurdo, ya que $\beta - \varepsilon < \beta = \inf\limits_{M \in A} M$. □

Para $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}^{\infty}(X, E)$ fijo, definimos

$$\theta_{\alpha}^{\infty}(f, \delta) = \sup_{\substack{x,y \in X \\ 0 < d^{\alpha}(x,y) \leq \delta}} \frac{||f(x) - f(y)||}{d^{\alpha}(x, y)}, \qquad \delta \geq 0.$$

El funcional $\theta_{\alpha}^{\infty}(\cdot, \cdot)$ satisface las siguientes propiedades.

(i) Para todo $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}^{\infty}(X, E)$, $\theta_{\alpha}^{\infty}(f, \cdot)$ es no decreciente en la variable δ.

(ii) Para todo $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}^{\infty}(X, E)$, $\theta_{\alpha}^{\infty}(f, \cdot)$ es constante para $\delta \geq diam(X^{\alpha})$, siempre que X se acotado [2], en tal caso

$$\sup_{\delta > 0} \theta_{\alpha}^{\infty}(f, \delta) = \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{||f(x) - f(y)||}{d^{\alpha}(x, y)},$$

(iii) Si X no es acotado, entonces para todo $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}^{\infty}(X, E)$,

$$\lim_{\delta \to \infty} \theta_{\alpha}^{\infty}(f, \delta) = \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{||f(x) - f(y)||}{d^{\alpha}(x, y)}.$$

El espacio $\mathrm{lip}_{\alpha}^{\infty}(X, E)$ llamado *espacio pequeño de Lipschitz*, está formado por funciones $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}^{\infty}(X, E)$ que satisfacen

$$\theta_{\alpha}^{\infty}(f, \delta) \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0.$$

Cuando X^{α} no es acotado, dado $f \in \mathrm{Lip}_{\alpha}^{\infty}(X, E)$ usamos el hecho de que $\theta_{\alpha}^{\infty}(f, \delta)$ es no decreciente en la variable δ, y que es acotado por $\theta_{\alpha}^{\infty}(f)$ para concluir que

$$\lim_{\delta \to \infty} \theta_{\alpha}^{\infty}(f, \delta) = \sup_{\delta > 0} \theta_{\alpha}^{\infty}(f, \delta).$$

[2] El diámetro de un espacio métrico X se define por $diam(X) := \sup\limits_{x,y \in X} d(x, y)$. Decimos que X es acotado si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $diam(X) \leq L$.

Dados un espacio métrico (X,d), un espacio normado E y una función $f : X \longrightarrow E$, de la Proposición (1.3.1) y de la propiedades del funcional $\theta_\alpha^\infty(f,\delta)$, tenemos las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha^\infty(f) &= \text{ínf}\,\{M : \ ||f(x)-f(y)|| \leq M d^\alpha(x,y); x,y \in X\} \\
&= \sup_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \frac{||f(x)-f(y)||}{d^\alpha(x,y)} \\
&= \sup_{\delta>0} \theta_\alpha^\infty(f,\delta).
\end{aligned}$$

Si no consideramos la norma $||\cdot||_{\alpha,\infty}$ en (1.3) y nos restrigimos a considerar únicamente el funcional $\theta_\alpha^\infty(\cdot)$, entonces el espacio $\text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ es un espacio seminormado (con seminorma $\theta_\alpha^\infty(\cdot)$). Esto se cumple en virtud de las siguientes propiedades sobre $\theta_\alpha^\infty(\cdot)$. La prueba se omite ya que se sigue de las propiedades del supremo.

(i) $\theta_\alpha^\infty(f) \geq 0$ para todo $f \in \text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$.

(ii) $\theta_\alpha^\infty(\lambda f) = |\lambda|\theta_\alpha^\infty(f)$ para todo $f \in \text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\theta_\alpha^\infty(f+g) \leq \theta_\alpha^\infty(f) + \theta_\alpha^\infty(g)$ para todo $f,g \in \text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$.

En general no se cumple que $\theta_\alpha^\infty(f) = 0$ implique $f = 0$, ya que si f es cualquier función constante, entonces $\theta_\alpha^\infty(f) = 0$.

En lo que resta de esta sección, mostraremos los resultados necesarios para probar que $\text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ es un espacio de Banach con la norma $||\cdot||_{\alpha,\infty}$.

Proposición. Sean (X,d) un espacio métrico y $(E,||\cdot||)$ un espacio normado. Si (f_n) es una sucesión de funciones en $\text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ que converge puntualmente a una función $f \in \text{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$, es decir:

$$f_n(x) \xrightarrow{||\cdot||} f(x)$$

para todo $x \in X$, entonces

$$\theta_\alpha^\infty(f) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \theta_\alpha^\infty(f_n).$$

Demostración. Para cada $x,y \in X$,

$$\begin{aligned}
||f(x)-f(y)|| &= \left\| \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(y) \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} ||f_n(x)-f_n(y)|| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n(x)-f_n(y)||,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

luego al dividir por $d^\alpha(x,y)$, $x \neq y$ y al tomar al supremo sobre todos los $x, y \in X$ obtenemos el resultado deseado. $\square$

Proposición 1.3.2. Sean (X,d) un espacio métrico y $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado. Si (f_n) es una sucesión en $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ tal que la sucesión de sumas parciales de (f_n) converge puntualmente a alguna función $f \in \mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$, esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{||\cdot||} f(x) \text{ para todo } x \in X,$$

entonces

$$\theta_\alpha^\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \theta_\alpha^\infty(f_n).$$

Demostración. Para cada $x \in X$, sea $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, entonces

$$g_n(x) \xrightarrow{||\cdot||} f(x) \text{ para todo } x \in X,$$

y

$$\theta_\alpha^\infty(g_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \theta_\alpha^\infty(f_k).$$

Aplicando la proposición previa tenemos,

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha^\infty(f) &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \theta_\alpha^\infty(g_n)\\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \theta_\alpha^\infty(f_k)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_\alpha^\infty(f_n).
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.3.1. Si X es un espacio métrico y $(E, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach, entonces $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ es un espacio de Banach con la norma

$$||\cdot||_{\alpha,\infty} = \theta_\alpha^\infty(\cdot) + ||\cdot||_\infty. \tag{1.5}$$

Demostración. Dado que $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ es un espacio normado, resta probar que es un espacio completo. En virtud del Teorema (1.2.1), este teorema queda probado al mostrar que toda serie absolutamente sumable en $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ es sumable. Sea (f_n) una sucesión en $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(X,E)$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\alpha,\infty} < \infty$.

Notando que $||f_n||_{\alpha,\infty} \geq ||f_n(x)||$ para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f_n(x)|| < \infty$. Ahora, dado que E es un espacio de Banach, a ésta última serie nuevamente aplicamos el Teorema (1.2.1) para poder definir la función $f : X \longrightarrow E$ mediante $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Mostraremos a continuación que $f \in \mathrm{Lip}^{\infty}_{\alpha}(X, E)$ y que $g_N = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n$ converge a f con la norma $|| \cdot ||_{\alpha,\infty}$. Para obtener que $f \in \mathrm{Lip}^{\infty}_{\alpha}(X, E)$, involucramos en la siguiente desigualdad la Proposición (1.3.2), concluyendo que $\theta^{\infty}_{\alpha}(f) < \infty$.

$$\theta^{\infty}_{\alpha}(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{\infty}_{\alpha}(f_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\alpha,\infty} < \infty.$$

Para obtener que la sucesión (g_N) converge a f con la norma $|| \cdot ||_{\alpha,\infty}$, basta con notar que para toda $x \in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - g_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$$

converge a la función cero, de modo que aplicando nuevamente la Proposición (1.3.2), obtenemos la siguiente desigualdad y el resultado deseado se tiene haciendo tender N a infinito.

$$\begin{aligned} ||f - g_N||_{\alpha,\infty} &= \left|\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \right|\right| + \theta^{\infty}_{\alpha}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \right) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (||f_n||_{\infty} + \theta^{\alpha}_{\alpha}(f_n)) \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} ||f_n||_{\alpha,\infty}. \end{aligned}$$

□

§1.4 Convolución de funciones en $L^1_{2\pi}$

Como ya hemos mencionado, trabajaremos con funciones de valores reales definidas sobre $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, el grupo $\mathbb{T}$ se identifica con un intervalo semiabierto de la forma $(a, b]$ o $[a, b)$ con la restricción $b = a + 2\pi$. Nosotros hemos escogido al intervalo $(0, 2\pi]$ (siguiendo algunas notas de Katznelson en [20]). En algunas referencias bibliográficas (por ejemplo vea [4]) se trabaja sobre el intervalo $(-\pi, \pi]$, esto conduce a que en [4] el kernel de Fejér está dado por,

$$F_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2(n+1)\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})},$$

mientras que en [20],

$$F_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{(n+1)\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})}.$$

La razón es por la forma en que se definen en cada uno de estos textos a un kernel.

Si escogemos trabajar sobre algún otro intervalo, hay que definir el kernel de Féjer de tal forma que la integral de F_n sobre este intervalo, sea igual a 1.

También mostraremos una relación entre el kernel de Fejér y el kernel de Dirichlet (esta relación facilita los cálculos al hacer la convolución de una función integrable con el kernel de Fejér). Por otra parte, la ausencia de un elemento neutro en el producto convolución de funciones en $L^1_{2\pi}$ nos favorece en la aproximación tanto de funciones Lipschitz continuas como funciones de Lipschitz en los distintos espacios de funciones integrables: $L^1_{2\pi}$, $L(\omega)$ y $L(u, v)$. Comenzamos analizando de manera breve al grupo $\mathbb{T}$.

Recordemos que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ consta de las clases de equivalencia de elementos en $\mathbb{R}$ bajo la relación,

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x = y + 2\pi n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, la operación sobre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ definida por $[x] + [y] = [x + y]$ no depende de los representantes de cada clase, es decir, si

$$x \sim y \text{ y } x' \sim y', \text{ entonces } [x] + [x'] = [y] + [y'].$$

Esto nos permite reconsiderar los elementos de $\mathbb{T}$ como números reales con la condición de que a un elemento $x \in \mathbb{R}$ lo identificamos con $x + 2\pi$, o de manera alternativa podemos escribir $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$.

Denotemos por $L^1_{2\pi} = L^1(\mathbb{T})$, al espacio de las funciones reales definidas sobre $\mathbb{T}$ que son Lebesgue integrables (con la medida normalizada de Lebesgue vea [21, págs 278-280]). La norma de un elemento $f \in L^1_{2\pi}$ es definida por

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{T}} |f(x)|\, dx.$$

Definición. Un *polinomio trigonométrico* T es una función definida sobre $\mathbb{T}$ de la forma,

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right), \qquad x \in \mathbb{T}.$$

El grado de T es el más grande n tal que $a_n \neq 0$ o $b_n \neq 0$.

Usando el hecho de que si m y n son enteros positivos,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\ dx = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0, \end{cases}$$

tenemos que los coeficientes a_n y b_n, están dados por la fórmula,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(x)\cos(nx)\ dx,\ n = 0, 1, 2\cdots, N;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(x)\operatorname{sen}(nx)\ dx,\ n = 1, 2, \cdots, N.$$

Definición. Una *serie trigonométrica* sobre $\mathbb{T}$, es una expresión de la forma,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)), \qquad x \in \mathbb{T}.$$

Los *coeficientes de Fourier* de una función $f \in L^1_{2\pi}$ se definen por,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,\ n = 0, 1, 2\dots$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\ dx,\ n = 1, 2, 3\dots$$

La *serie de Fourier* de f, es la expresión,

$$S(f, x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\operatorname{sen}(nx)),$$

y la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f la denotamos por $S_n(f, \cdot)$.

Siempre que $f \in L^1_{2\pi}$, podemos calcular sus coeficientes de Fourier y por lo tanto formar su serie de Fourier, sin embargo esto no implica que dicha serie converja en cada x, y aunque lo haga, puede que no converja a $f(x)$. Por ejemplo en [22, pág 447], puede consultar que existe una función $f \in L^1_{2\pi}$ tal que $S_n(f, \cdot)$ no converge a f en la norma $||\cdot||_1$.

Definición. Si $f, g \in L^1_{2\pi}$, el *producto convolución* de f y g o simplemente la *convolución* de f y g, es una función en $L^1_{2\pi}$ definida mediante la expresión,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x - \tau)g(\tau)\ d\tau.$$

Las siguientes propiedades se deducen de manera inmediata.

(i) El operador $*$ es conmutativo, $f * g = g * f$, para todo $f, g \in L^1_{2\pi}$.

(ii) El operador $*$ es asociativo, $(f * g) * h = f * (g * h)$, para todo $f, g, h \in L^1_{2\pi}$.

(iii) El operador $*$ es ditributivo con respecto a la suma, $f * (g + h) = f * g + f * h$, para todo $f, g, h \in L^1_{2\pi}$.

Una deficiencia del operador $*$ es que no existe $e \in L^1_{2\pi}$ tal que $f * e = f$ para todo $f \in L^1_{2\pi}$, (para una prueba cosulte [21, pág 285]). A cambio de esto tenemos el concepto de una unidad aproximativa.

Definición. Una *unidad aproximativa* en $L^1_{2\pi}$, es una sucesión (U_n) de funciones continuas sobre $\mathbb{T}$ tales que,

(i) Existe un conjunto compacto B de $\mathbb{T}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{sop}\, U_n \subset B.$$

(ii) Para todo conjunto abierto V que contiene al punto 0,

$$\sup_{x \notin V} U_n(x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$||U_n||_1 = 1.$$

Recalcamos que el soporte de una función f denotada por $\text{sop}(f)$ es la cerradura del conjunto de puntos en donde f no se anula.

Con una unidad aproximativa (U_n) se asegura que para toda $f \in L^1_{2\pi}$,

$$||f * U_n - f||_1 \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Para una prueba consulte por ejemplo [21, pág 292].

Definición. El *kernel de Dirichlet*, es una función sobre $\mathbb{T}$ que está definida por

$$D_n(x) = \frac{\text{sen}\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\text{sen}(\frac{x}{2})}, \qquad x \neq 0,$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

El kernel de Dirichlet no es una unidad aproximativa, sin embargo, si $f \in L^1_{2\pi}$, sustituyendo los coeficientes de Fourier de f en su serie de Fourier y recordando la identidad,

$$1 + 2\cos(x) + 2\cos(2x) + \cdots + 2\cos(nx) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}$$

obtenemos,

$$\begin{aligned}
S_n(f,x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\operatorname{sen}(kx)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen}(kt)\operatorname{sen}(kx)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{2\pi} f(t)(\cos(kx)\cos(kt) + \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(kt))\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)\cos(kx) + \operatorname{sen}(kt)\operatorname{sen}(kx))\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)(t-x)}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\frac{t-x}{2})}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt \\
&= (D_n * f)(x).
\end{aligned}$$

Definición. Para $n \in \mathbb{N}$. La función F_n definida sobre $\mathbb{T}$ mediante,

$$F_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{(n+1)\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})}, \qquad x \neq 0$$

se llama *kernel de Fejér*.

El kernel de Fejér es una unidad aproximativa (vea [21, pág 449]), además, si $f \in L^1_{2\pi}$, nos fijamos en las medias aritméticas de $S_n(f)$,

$$\sigma_n(f,x) = \frac{S_0(f,x) + S_1(f,x) + \cdots + S_n(f,x)}{n+1}, \qquad x \in \mathbb{T}.$$

Recordando también la identidad,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)},$$

tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x)&=\frac{(f*D_0)(x)+(f*D_1)(x)+\cdots+(f*D_n)(x)}{n+1}\\&=\frac{(f*(D_0+D_1+\cdots+D_n))(x)}{n+1}\\&=\int_{\mathbb{T}}f(x-t)\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3t}{2}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{(n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right)dt\\&=\int_{\mathbb{T}}f(x-t)\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{(n+1)\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt\\&=(f*F_n)(x).\end{aligned}$$

Teorema (Fejér)**.** Sea $f\in L^1_{2\pi}$.

(i) Supongamos que
$$\lim_{h\to 0}(f(x+h)+f(x-h))$$
existe y es finito. Entonces,
$$\sigma(f,x)\longrightarrow\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(x+h)+f(x-h)),$$
en particular si t_0 es un punto de continuidad de f, entonces
$$\sigma(f,t_0)\longrightarrow f(t_0).$$

(ii) Si cada punto de un intervalo cerrado I es un punto de continuidad de f, entonces $\sigma(f,\cdot)$ converge uniformemente a $f(\cdot)$ en el intervalo I.

(iii) Si para todo t, $m\le f(t)$, entonces $m\le\sigma(f,t)$; si para todo t, $f(t)\le M$, entonces $\sigma(f,t)\le M$.

Para una prueba consulte por ejemplo [20, pág 18].

Capítulo 2

Espacios de Lipschitz en espacios lineales

Este capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera sección se describen resultados que generalizan los espacios de Lipschitz en los espacios, $C_{2\pi}$, $L^1_{2\pi}$ y $L(\omega)$. Para denotar cada uno de estos espacios, usamos la letra $\mathbb{E}$, mientras que para denotar el espacio grande de Lipschitz y el espacio pequeño de Lipschitz en $\mathbb{E}$, usamos respectivamente las letras $\mathbb{F}$ y F.

En la segunda sección, se trabaja en el caso particular, $\mathbb{E} = C_{2\pi}$, $\mathbb{F} = \mathrm{Lip}^{\infty}_{\alpha}(\mathbb{T})$ y $F = \mathrm{lip}^{\infty}_{\alpha}(\mathbb{T})$. En la tercera sección se trabaja en el caso $\mathbb{E} = L^1_{2\pi}$, $\mathbb{F} = \mathrm{Lip}^1_{\alpha}(\mathbb{T})$ y $F = \mathrm{lip}^1_{\alpha}(\mathbb{T})$. En la última sección es cuando trabajamos en el espacio de funciones integrables con peso, este espacio lo hemos denotado por $L(\omega)$, en tal caso tenemos que $\mathbb{E} = L(\omega)$, $\mathbb{F} = \mathrm{Lip}^1_{\alpha}(\mathbb{T})_{\omega}$ y $F = \mathrm{lip}^1_{\alpha}(\mathbb{T})_{\omega}$.

§2.1 Teoría general

El resultado más importante en esta sección, es el Teorema Tauberiano, el cual garantiza la convergencia de una sucesión *0-equicontinua* de funciones de Lipschitz con una norma definida a partir de la norma del supremo en $C_{2\pi}$ (nos referimos a la norma $||\cdot||_{\alpha,\infty}$) o la norma en $L^1_{2\pi}$ (en este caso $||\cdot||_{\alpha,1}$) según sea el caso, también este teorema establece un resultado cuantitativo a cerca de la convergencia de tal sucesión. Algunos de los resultados que describimos en esta sección pueden también ser consultados en [22].

Sean $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}, \mathbb{R}^*_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}, \widehat{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ y denotemos por I al intervalo abierto $(0, b)$ (o semiabierto $(0, b]$) donde $I = \mathbb{R}^*_+$ es posible. Sea $\mathbb{E}$ un espacio lineal real o complejo y

$$\Theta(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times I \to \widehat{\mathbb{R}}_+$$

una familia $\Theta(\cdot, \delta)$, $\delta \in I$, de cuasi-seminormas sobre $\mathbb{E}$, es decir la subaditividad de las seminormas usuales es sustituida por la propiedad más general de que existe una constante $C \geq 1$ (que asumimos que no depende de δ), tal que para todo par de elementos $f, g \in \mathbb{E}$, se cumple $\Theta(f+g,\delta) \leq C(\Theta(f,\delta)+\Theta(g,\delta))$. Sin pérdida de generalidad es asumido que para todo $f \in \mathbb{E}$ fijo, $\Theta(f,\cdot)$ es una función creciente de δ.

Sea

$$\Theta(f) = \sup_{\delta \in I} \Theta(f,\delta). \tag{2.1}$$

Consideremos,

$$\mathbb{F} := \{f \in \mathbb{E} : \Theta(f) < \infty\},$$

$$F = \{f \in \mathbb{F} : \Theta(f,\delta) \to 0 \text{ cuando } \delta \to 0\}.$$

Entonces $\mathbb{F}$ y F son subespacios lineales de $\mathbb{E}$ que son cuasi-seminormados por (2.1) y que eventualmente pueden coincidir.

Ejemplo. A manera de ilustración sea E un espacio lineal normado, consideremos $\mathbb{F}$ al espacio grande de Lipschitz definido en la página (12) y F como el espacio pequeño de Lipschitz dado en la página (13).

Proposición 2.1.1. El espacio F es cerrado en $(\mathbb{F},\Theta)$.

Demostración. Sea $(f_n) \subset F$ una sucesión que converge a $f \in \mathbb{F}$. Fijemos $\varepsilon > 0$, dado que $f_n \xrightarrow{\Theta} f$ podemos escoger un $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\Theta(f_n - f) \leq \varepsilon$ y usando que $f_n \in F$, también podemos escoger un $\delta > 0$ tal que $\Theta(f_n,\delta) \leq \varepsilon$. Entonces $\Theta(f,\delta) \leq C(\Theta(f_n - f) + \Theta(f_n,\delta)) \leq 2C\varepsilon$, lo cual implica que $f \in F$. $\square$

Definición. Un conjunto $G \subset F$ es llamado 0-*equicontinuo* si

$$\Theta(G,\delta) = \sup_{g \in G} \Theta(g,\delta) \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0.$$

Una sucesión (f_n) en F se dice que es 0-equicontinua si lo es el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. En tal caso simplificamos la notación escribiendo,

$$\Theta(\{f_n : n \in \mathbb{N}\},\delta) = \Theta((f_n),\delta)$$

Inicialmente se llamó conjuntos equilipschitzianos a los conjunto 0-equicontinuos. El siguiente resultado nos da un ejemplo de sucesiones 0-equicontinuas.

Proposición 2.1.2. Toda sucesión convergente en el espacio cuasi-normado (F, Θ) es una sucesión 0-equicontinua.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión en F tal que $f_n \xrightarrow{\Theta} f$ para algún $f \in F$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\Theta(f_n - f) \leq \varepsilon$ siempre que $n \geq N$. También elijamos $\delta_0 \in I$ de tal forma que $\Theta(f, \delta_0) \leq \varepsilon$. Entonces para cualquier $0 < \lambda \leq \delta_0$ y $n \geq N$,

$$\Theta(f_n, \lambda) \leq C(\Theta(f_n - f, \lambda) + \Theta(f, \lambda)) \leq C(\Theta(f_n - f) + \Theta(f, \delta_0)) \leq 2C\varepsilon.$$

Para $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ elijamos δ_i de tal forma que $\Theta(f_i, \delta_i) \leq \varepsilon$. Haciendo $\delta = \min_{0 \leq i \leq N} \{\delta_i\}$ y usando el hecho de que $\Theta(f_i, \delta_i)$ es una función creciente respecto de la constante δ_i, obtenemos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Theta(f_n, \delta) \leq 2C\varepsilon.$$

□

En lo que resta de esta sección asumiremos que $\mathbb{E}$ es un espacio lineal normado con norma $|| \cdot ||_{\mathbb{E}}$. Definimos otra norma en $\mathbb{F}$ por medio de

$$||f - g||_{\mathbb{F}} = ||f - g||_{\mathbb{E}} + \Theta(f - g). \tag{2.2}$$

Definición 2.1.1. Dado un espacio normado $\mathbb{E}$, la familia de cuasi-seminormas $\Theta(\cdot, \delta)$, $\delta \in I$, definidas anteriormente se dice que es *admisible con respecto la métrica inducida por la norma* $|| \cdot ||_{\mathbb{E}}$ si se cumplen las siguientes condiciones.

(i) El espacio normado $(\mathbb{F}, || \cdot ||_{\mathbb{F}})$ es de Banach.

(ii) Existe una constante $K > 0$ y una función $\psi : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para cada $\delta \in I$,

$$\lim_{t \to 0} \psi(\delta, t) = \psi(\delta, 0)$$

y para toda $f \in F$,

$$\Theta(f) \leq K\Theta(f, \delta) + \psi(\delta, ||f||_{\mathbb{E}}). \tag{2.3}$$

Con respecto la condición (i), dado que F es un subespacio cerrado de $(\mathbb{F}, \Theta)$, se sigue de (2.2) que F es un subespacio cerrado de $(\mathbb{F}, || \cdot ||_{\mathbb{F}})$ también, de tal forma que si $(\mathbb{F}, || \cdot ||_{\mathbb{F}})$ es de Banach, también lo es $(F, || \cdot ||_{\mathbb{F}})$.

Teorema (Tauberiano)**.** Supongamos que $(F, || \cdot ||_{\mathbb{F}})$ ha sido definido de $(\mathbb{E}, || \cdot ||_{\mathbb{E}})$ por una familia de cuasi-seminormas admisibles $\Theta(\cdot, \delta)$, $\delta \in I$. Sea $(f_n) \subset F$ una sucesión 0-equicontinua. Entonces, si esta sucesión converge en $(\mathbb{E}, || \cdot ||_{\mathbb{E}})$ a un elemento f, se sigue que $f \in F$ y que (f_n) converge a f en $(F, || \cdot ||_{\mathbb{F}})$. Más aún, si para cada $\delta \in I$, $\psi(\delta, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}_+$, entonces

$$\Theta(f_n - f) \leq 2CK\Theta((f_n), \delta) + \psi(\delta, ||f_n - f||_{\mathbb{E}}). \tag{2.4}$$

Demostración. Primero describimos de manera breve la idea de la prueba. En principio, probaremos que $\Theta(f_n - f_m) \longrightarrow 0$ cuando $m, n \longrightarrow \infty$, pero dado que (f_n) es una sucesión convergente con respecto a la norma $||\cdot||_{\mathbb{E}}$, entonces $||f_n - f_m||_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0$, de tal forma que

$$||f_n - f_m||_{\mathbb{F}} \longrightarrow 0,$$

esto implica que la sucesión (f_n) es una sucesión de Cauchy con respecto a la métrica inducida por la norma $||\cdot||_{\mathbb{F}}$.

Posteriormente, una vez que hallamos probado de que $(F, ||\cdot||_{\mathbb{F}})$ es completo, podemos ya garantizar la existencia de un un elemento $g \in F$ que cumple,

$$f_n \xrightarrow{||\cdot||_{\mathbb{F}}} g,$$

pero por la forma en que está definida $||\cdot||_{\mathbb{F}}$,

$$||f_n - g||_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0,$$

sin embargo, $||f_n - f||_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0$, lo cual forza a que $f = g$, siendo f la función dada en la hipótesis del teorema.

Con lo anterior y una vez que hayamos probado los argumentos restantes, ya habremos probado que si la sucesión $(f_n) \subset F$ converge a f en $(\mathbb{E}, ||\cdot||_{\mathbb{E}})$, entonces $f \in F$ y (f_n) converge a f con respecto a $||\cdot||_{\mathbb{F}}$. La desigualdad (2.4), será probada involucrando algunas desigualdades que aparecen en una parte del resto de la prueba. Procedemos a verificar los argumentos que faltan.

Primero mostramos que

$$\Theta(f_n - f_m) \longrightarrow 0.$$

Para esto, fijemos $\varepsilon > 0$, por las hipótesis del teorema, podemos usar la desigualdad (2.3) para obtener,

$$\Theta(f_n - f_m) \leq K\Theta(f_n - f_m, \delta) + \psi(\delta, ||f_n - f_m||_{\mathbb{E}}). \tag{2.5}$$

Por otro lado, dado que la sucesión (f_n) es 0-equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que $\Theta((f_n), \delta) \leq \varepsilon$. En particular $\Theta(f_n, \delta)$, $\Theta(f_m, \delta) \leq \varepsilon$, así, $\Theta(f_n - f_m, \delta) \leq 2\varepsilon$.

Ahora, en virtud de que la sucesión (f_n) converge en el espacio $(\mathbb{E}, ||\cdot||_{\mathbb{E}})$, existe $N > 0$ tal que para toda $m, n \geq N$,

$$||f_n - f_m||_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon,$$

también por la continuidad de ψ,

$$\psi(\delta, ||f_n - f_m||_{\mathbb{E}}) \leq \varepsilon,$$

y después de algunas operaciones,

$$\Theta(f_n - f_m) \leq (2CK + 1)\varepsilon.$$

Con esto hemos tenido éxito en probar que,

$$\Theta(f_n - f_m) \longrightarrow 0 \text{ cuando } m, n \longrightarrow \infty.$$

La completéz del espacio $(F, ||\cdot||_{\mathbb{F}})$, se sigue de la hipótesis del teorema en la cual menciona que la familia de cuasi-seminormas $\Theta(\cdot, \delta)$ es admisible con respecto a la métrica inducida por la norma $||\cdot||_{\mathbb{E}}$.

Por último, notemos que dado que la sucesión (f_n) es 0-equicontinua, apartir de la desigualdad (2.5) podemos concluir,

$$\begin{aligned}
\Theta(f_n - f_m) &\leq CK(\Theta(f_n, \delta) + \Theta(f_m, \delta)) + \psi(\delta, ||f_n - f_m||_{\mathbb{E}}) \\
\Theta(f_n - f_m) &\leq CK\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \Theta(f_n, \delta) + \sup_{m\in\mathbb{N}} \Theta(f_m, \delta)\right) + \psi(\delta, ||f_n - f_m||_{\mathbb{E}}) \\
&= CK(\Theta((f_n), \delta) + \Theta((f_m), \delta)) + \psi(\delta, ||f_n - f_m||_{\mathbb{E}}) \\
&= 2CK\Theta((f_n), \delta) + \psi(\delta, ||f_n - f_m||_{\mathbb{E}}).
\end{aligned}$$

Hacemos tender m a infinito, y por la continuidad de ψ,

$$\Theta(f_n - f) \leq 2CK\Theta((f_n), \delta) + \psi(\delta, ||f_n - f||_{\mathbb{E}}).$$

De esta forma, el teorema queda probado.

□

§2.2 Espacios de Lipschitz en $C_{2\pi}$

Una de las ventajas de trabajar con funciones reales con dominio $\mathbb{T}$, es la existencia de una traslación bien definida, donde por *traslación* nos referimos a una función f_t definida mediante

$$f_t(x) = f(x + t),$$

siendo $t \in \mathbb{T}$ y f una función de valores reales definida sobre $\mathbb{T}$.

Si no se trabaja sobre $\mathbb{T}$ y se escoge un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces para definir una traslación f_t (siendo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$), hay que hacer énfasis en el valor de t, ya que nos podemos salir del dominio de la función f. Para este caso consulte por ejemplo Lorentz en [4, pág 51]. Con la restricción mencionada en esta referencia bibliográfica, los resultados que mostramos a continuación se pueden extender a cualquier intervalo cerrado $[a, b]$.

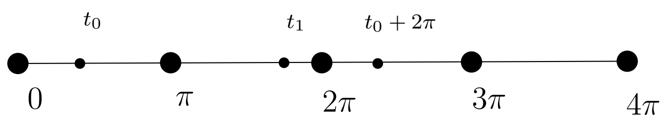
Por otro lado, el Teorema de Fejér garantiza la convergencia uniforme de la sucesión de funciones $(F_n * f)$ en $\mathbb{T}$. Este hecho es importante para la convergencia en el espacio $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$, de hecho la convergencia de una sucesión de funciones en $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ se debe al Teorema Tauberiano.

Antes de hablar de funciones Lipschitz definidas sobre $\mathbb{T}$, enfatizamos que el grupo $\mathbb{T}$ es un espacio métrico con la distancia,

$$|t_1 - t_2|_{2\pi} = \mathrm{mín}\{|t_1 - t_2|, 2\pi - |t_1 - t_2|\}.$$

En el siguiente diagrama, se puede apreciar de manera gráfica la distancia entre el punto t_0 y t_1 con la métrica que acabamos de mencionar.

El punto t_0 está identificado con el punto $t_0 + 2\pi$, por lo que la distancia entre el punto t_0 y el punto t_1 es gráficamente la longitud del segmento que une a t_1 con $t_0 + 2\pi$.



El espacio de funciones de valores reales 2π periódicas y continuas sobre $\mathbb{T}$ lo denotamos por $C_{2\pi}$ o $C(\mathbb{T})$ indistintamente. La norma uniforme en $C_{2\pi}$ es la norma del supremo que está dada por,

$$||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|.$$

En este caso, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ si,

$$\theta_\alpha^\infty(f) = \sup_{0<|t|\leq\pi} \sup_{x\in\mathbb{T}} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|^\alpha} < \infty.$$

Posteriormente, para cada $0 < \delta \leq \pi$ fijo, introducimos la familia de funcionales $\theta_\alpha^\infty(\cdot, \delta)$,

$$\theta_\alpha^\infty(f, \delta) = \sup_{0<|t|\leq\delta} \sup_{x\in\mathbb{T}} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|^\alpha} = \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||f_t - f||_\infty}{|t|^\alpha},$$

en virtud de la Proposición (1.3.1), tenemos la igualdad,

$$\theta_\alpha^\infty(f) = \sup_{0<\delta\leq\pi} \theta_\alpha^\infty(f, \delta).$$

Estamos en el caso particular en que, $E = C_{2\pi}$, $\mathbb{F} = \mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ y $F = \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$. Donde $\mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ consta de funciones f en $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ que satisfacen

$$\theta_\alpha^\infty(f,\delta) = \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||f_t - f||_\infty}{|t|^\alpha} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0. \tag{2.6}$$

A continuación describimos brevemente algunas relaciónes entre los espacios $\mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ y $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$. Aclaramos que la derivada de una función definida sobre $\mathbb{T}$ es vista como la derivada usual sobre el intervalo $(0, 2\pi]$.

Proposición. Si f es una función derivable sobre $\mathbb{T}$ y con derivada acotada, entonces

$$f \in \mathrm{Lip}_1^\infty(\mathbb{T}).$$

Demostración. Es una consecuencia del Teorema del Valor Medio, más aún, tenemos la desigualdad

$$\theta_1^\infty(f) \leq ||f'||_\infty < \infty.$$

□

Ejemplo. Todo polinomio trigonométrico de grado a lo más n, pertenece a $\mathrm{Lip}_1^\infty(\mathbb{T})$.

De (2.6), el espacio $\mathrm{lip}_1^\infty(\mathbb{T})$ consta únicamente de las funciones constantes (note que consta de las funciones cuya derivada es cero en $\mathbb{T}$) por lo que de manera inmediata tenemos la inclusión $\mathrm{lip}_1^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathrm{Lip}_1^\infty(\mathbb{T})$. El espacio $\mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ consta de más elementos cuando $0 < \alpha < 1$. Por ejemplo, consulte [1, págs 76, 77] para ver una prueba de las siguientes afirmaciones.

(i) Si $0 < \alpha < \beta < 1$, entonces $\mathrm{Lip}_\beta^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$.

(ii) Si $0 < \alpha < 1$, entonces $\mathrm{Lip}_1^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ y $\mathrm{Lip}_1^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$.

Proposición 2.2.1. Para un α fijo, la familia de cuasi-seminormas $\theta_\alpha^\infty(\cdot,\delta)$, $\delta \in (0,\pi]$ definidas en (2.6) es admisible con respecto a la métrica inducida por la norma $||\cdot||_\infty$.

Demostración. Tenemos que probar que

(i) El espacio $(\mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T}), ||\cdot||_{\alpha,\infty})$ es de Banach.

(ii) Existe una constante $K > 0$ y una función $\psi : (0,\pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para cada $\delta \in (0,\pi]$,

$$\lim_{t\to 0} \psi(\delta, t) = \psi(\delta, 0),$$

y para toda $f \in \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$

$$\theta_\alpha^\infty(f) \leq K\theta_\alpha^\infty(f,\delta) + \psi(\delta, ||f||_{\alpha,\infty}).$$

La condición (i) se sigue del Teorema (1.3.1) y del hecho de que $(\mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T}), ||\cdot||_{\alpha,\infty})$ es un subespacio cerrado de $(\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T}), ||\cdot||_{\alpha,\infty})$.

Ahora, para probar la condición (ii), sean $0 < \delta \leq \pi$ y $f \in \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$, entonces

$$\begin{aligned}\theta_\alpha^\infty(f) &= \sup_{0<|t|\leq\pi} \frac{||f_t - f||_\infty}{|t|^\alpha} \\ &\leq \sup_{0<|t|<\delta} \frac{||f_t - f||_\infty}{|t|^\alpha} + \sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{||f_t - f||_\infty}{|t|^\alpha} \\ &\leq \theta_\alpha^\infty(f,\delta) + 2||f||_\infty/\delta^\alpha,\end{aligned}$$

Luego al definir $\psi : (0,\pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por $\psi(\delta,t) = 2t/\delta^\alpha$ tenemos que para cada $\delta \in (0,\pi]$,

$$\psi(\delta,t) \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow 0,$$

y con esto obtenemos el resultado deseado. La existencia de K ya se mencionó, a saber $K = 1$. $\square$

Una aplicación de la desigualdad (2.4) del Teorema Tauberiano al resultado previo nos lleva a la siguiente desigualdad,

$$\theta_\alpha^\infty(f_n - f) \leq \frac{2}{\delta^\alpha}||f_n - f||_\infty + 2\theta_\alpha^\infty((f_n),\delta),$$

donde f_n ($n \in \mathbb{N}$) son los términos de una sucesión convergente en $C_{2\pi}$, luego se obtiene el resultado cuantitativo en el espacio $\mathrm{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$

$$||f_n - f||_{\alpha,\infty} \leq \left(1 + \frac{2}{\delta^\alpha}\right)||f_n - f||_\infty + 2\theta_\alpha^\infty((f_n),\delta).$$

Se pueden construir sucesiones de funciones (por ejemplo si usamos el kernel de Fejér) de tal forma que de la desigualdad previa se obtenga una más explícita. A manera de ilustración hemos considerado el siguiente ejemplo sobre el conjunto $C[-a,a]$ (los resultados dados en esta sección son los mismos en este espacio).

Ejemplo. Sean $0 < a < 1$ y $0 < \alpha \leq 1$. Consideremos el espacio $C[-a,a]$ y el intervalo $I = (0,\infty)$. Consideremos también la sucesión de funciones (f_n) en $\mathrm{lip}_\alpha^\infty([-a,a])$, donde cada término f_n de la sucesión está dado por,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Tenemos que esta sucesión converge uniformemente a la función que es idénticamente cero en el intervalo $[-a,a]$ y también lo hace $f_n'(x) = x^{n-1}$, por lo que

$$||f_n||_\infty \longrightarrow 0 \text{ y } ||f_n'||_\infty \longrightarrow 0,$$

además la sucesión f_n es 0-equicontinua ya que (vea la Proposición (2.1.2))

$$\theta_\alpha^\infty(f_n) \leq ||f_n'||_\infty \longrightarrow 0.$$

Tenemos todas las hipótesis del Teorema Tauberiano, por lo tanto podemos enunciar el resultado cuantitativo

$$||f_n||_{\alpha,\infty} \leq \left(1 + \frac{1}{\delta^\alpha}\right) ||f_n||_\infty + 2\theta_\alpha^\infty((f_n), \delta).$$

§2.3 Espacios de Lipschitz en $L^1_{2\pi}$

Otra de las ventajar de trabajar sobre el grupo $\mathbb{T}$ es que de la igualdad (2.7), la norma en $L^1_{2\pi}$ es invariante bajo traslaciones. Para trabajar sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, hay que tener cuidado con la traslación, para tal caso consulte [4, pág 51].

Dados $f \in L^1_{2\pi}$ y $t \in \mathbb{T}$, se tiene que también f_t definida por,

$$f_t(x) = f(x + t)$$

es integrable y además

$$\int_{\mathbb{T}} f(x + t)\ dx = \int_{\mathbb{T}} f(x)\ dx. \tag{2.7}$$

Con estas observaciones podemos describir los espacios de Lipschitz en $L^1_{2\pi}$.

Definición. Una función $f \in L^1_{2\pi}$, se dice que satisface una *condición integral de Hölder de orden* α , $0 < \alpha \leq 1$, si existe una constante $M > 0$ tal que,

$$||f_t - f||_1 = \int_{\mathbb{T}} |f(x + t) - f(x)|\ dx \leq M|t|^\alpha, \qquad 0 < |t| \leq \pi$$

Al ínfimo de los $M's$ que satisfacen la desigualdad previa lo denotaremos por $\theta_\alpha^1(f)$, se tiene además que,

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha^1(f) &= \inf_M\{M : ||f_t - f||_1 \leq M|t|^\alpha,\ 0 < |t| \leq \pi\} \\
&= \sup_{0<|t|\leq\pi} \frac{||f_t - f||_1}{|t|^\alpha} \\
&= \sup_{0<\delta\leq\pi} \theta_\alpha^1(f, \delta),
\end{aligned}$$

donde $\theta^1_\alpha(\cdot,\delta)$ es la familia de seminormas,

$$\theta^1_\alpha(f,\delta) = \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||f_t - f||_1}{|t|^\alpha}, \qquad\qquad 0<\delta\leq\pi.$$

El conjunto de todas las funciones que satisfacen la definición previa lo denotaremos por $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$.

Ejemplo. Toda función Lipschitz continua satisface una condición integral de Hölder de orden α.

Se sigue al tomar en ambos lados de la siguiente desigualdad la integral sobre $\mathbb{T}$ con respecto a x,

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^\alpha.$$

No estamos preparados para demostrar que existen funciones en $L^1_{2\pi}$ que no satisfacen una condición integral de Hölder de orden α, para esto nos restrigimos a dar un ejemplo para el caso $\alpha = 1$.

Ejemplo. La función $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x-\pi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-\pi}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

pertenece a $L^1_{2\pi}$ pero no satisface una condición integral de Hölder de orden 1.

Omitimos los argumentos para la validéz de nuestro ejemplo, mencionamos que hay que tener presente que f no es de "variación acotada"[1] y posteriormente aplicar el Teorema 24 mencionado en [23, págs, 599-601].

De manera natural definimos el subespacio $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ como el conjunto de funciones $f \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ tales que

$$\theta^1_\alpha(f,\delta) \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0.$$

Teorema. Si $0 < \alpha, \beta < 1$, entonces las siguientes inclusiones son válidas.

(i) El espacio $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ contiene a $\mathrm{Lip}^1_1(\mathbb{T})$.

(ii) El espacio $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ contiene a $\mathrm{Lip}^1_1(\mathbb{T})$.

(iii) Si $\alpha < \beta$, entonces $\mathrm{Lip}^1_\beta(\mathbb{T})$ está contenido en $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$.

[1]El concepto de "variación acotada"puede ser consultado en [19, págs 23-24].

Demostración. Para probar (i) basta con notar que si $f \in \mathrm{Lip}_1^1(\mathbb{T})$, entonces existe $M > 0$ tal que para todo $t \in (-\pi, \pi]$,

$$||f_t - f||_1 \leq M|t| \leq M\pi^{1-\alpha}|t|^\alpha.$$

Ahora con respecto a (ii), sea $\varepsilon > 0$, definiendo

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\theta_1^1(f)}\right)^{1/(1-\alpha)},$$

tenemos que si $0 < |t| \leq \delta$, entonces

$$\begin{aligned} ||f_t - f||_1 &\leq \theta_1^1(f)|t|^\alpha |t|^{1-\alpha} \\ &\leq \delta^{1-\alpha}|t|^\alpha \\ &= \varepsilon|t|^\alpha, \end{aligned}$$

esto muestra que si $\delta \longrightarrow 0$, entonces $\theta_\alpha^1(f,\delta) \longrightarrow 0$ por lo tanto, la función f pertenece a $\mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})$.

Finalmente para probar (iii), sea $\varepsilon > 0$, primero definimos

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\theta_\beta^1(f)}\right)^{1/(\beta-\alpha)},$$

de tal forma que si $0 < |t| \leq \delta$ y $f \in \mathrm{Lip}_\beta^1(\mathbb{T})$ entonces,

$$||f_t - f||_1 \leq \theta_\beta^1(f)|t|^\beta \leq \varepsilon|t|^\alpha.$$

Esto muestra que $\theta_\alpha^1(f,\delta)$ tiende a cero cuando δ tiende a cero. □

Hasta el momento, hemos considerado una diferencia de orden 1,

$$\Delta_t^1(f,x) := f(x+t) - f(x),$$

es posible considerar una diferencia de orden superior mediante la observación

$$\begin{aligned} \Delta_t^2(f,x) &:= \Delta_t^1(\Delta_t^1(f,x)) = f(x+2t) - 2f(x+t) + f(x), \\ \Delta_t^3(f,x) &:= \Delta_t^1(\Delta_t^2(f,x)) = f(x+3t) - 3f(x+2t) + 3f(x+t) - f(x), \end{aligned}$$

deduciendo que

$$\Delta_t^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}(-1)^{r-k} f(x+kt),$$

con $r \geq 1$.

Trabajar con una diferencia de orden $r > 1$ es análogo al caso $r = 1$, de modo que podemos hablar de funciones Lipschitz usando una diferencia de orden superior. Para este caso, si $\alpha > 0$ y no es un número entero, elegimos $r = [\alpha] + 1$, donde $[\alpha]$ es la parte entera de α, notemos que $r - 1 < \alpha \leq r$.

La elección de r con respecto de α se hace de tal forma que tenga sentido aproximar funciones de Lipschitz en este contexto, ya que si $\alpha > r$ estaremos aproximando polinomios algebraicos solamente.

Definición. Se dice que una función $f \in L^1_{2\pi}$ satisface una *condición integral de Lipschitz con incremento* r si existe $M > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}} |\Delta_t^r(f, x)|\, dx \leq M|t|^\alpha, \qquad 0 < |t| \leq \pi.$$

No hay confusión en denotar nuevamente por $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ al conjunto de todas las funciones que satisfacen la definición previa, pues sólo hay que valernos del valor de α. En este caso,

$$\theta^1_\alpha(f) = \sup_{0<\delta\leq\pi} \theta^1_\alpha(f, \delta),$$

donde

$$\theta^1_\alpha(f, \delta) := \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||\Delta_t^r(f, \cdot)||_1}{|t|^\alpha}.$$

De manera análoga al caso $r = 1$, se define el espacio $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$. Se deduce del caso general que $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ es un espacio normado con norma

$$|| \cdot ||_{\alpha,1} = \theta^1_\alpha(\cdot) + || \cdot ||_1,$$

esta norma se llama *norma de Hölder (o de Lipschitz) de orden* r. Estamos situados en el caso particular donde $\mathbb{F} = \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ y $F = \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$. Por lo que todos los resultados que se mencionaron en el caso general, pueden ser usados sin nigún problema.

Teorema 2.3.1. Si $\alpha > 0$ no es un número entero y $r = [\alpha] + 1$, el espacio $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach con la norma

$$|| \cdot ||_{\alpha,1} = \theta^1_\alpha(\cdot) + || \cdot ||_1.$$

Demostración. Dado que $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ es un espacio normado, sólo resta probar que es un espacio completo con la métrica inducida por la norma $|| \cdot ||_{\alpha,1}$. Para tal propósito, sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$, entonces (f_n) es una sucesión de Cauchy con la norma $|| \cdot ||_1$, ya que

$$||f_n - f_m|| \leq ||f_n - f_m||_{\alpha,1} \longrightarrow 0 \text{ cuando } m, n \longrightarrow \infty.$$

Así por la completéz del espacio $L^1_{2\pi}$, existe una función $f \in L^1_{2\pi}$ tal que

$$f_n \stackrel{||\cdot||_1}{\longrightarrow} f.$$

A continuación probaremos que la sucesión (f_n) converge a f con la norma $||\cdot||_{\alpha,1}$ y que $f \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$. Comenzamos notando que $\theta^1_\alpha(f_n - f_m) \longrightarrow 0$ cuando $m, n \longrightarrow 0$ ya que la desigualdad

$$\theta^1_\alpha(f_n - f_m) \leq ||f_n - f_m||_{\alpha,1}$$

es cierta para cada par de números naturales m, n . Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\theta^1_\alpha(f_n - f_m) < \varepsilon \text{ para todo } m, n \geq N,$$

esto implica

$$\frac{||\Delta^r_t(f_n - f_m, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} < \varepsilon \text{ para todo } m, n \geq N \text{ y para todo } 0 < |t| \leq \pi.$$

Por otro lado, dado que $f_n \stackrel{||\cdot||_1}{\longrightarrow} f$, dado $0 < |t| \leq \pi$, existe $M = M(\varepsilon, t) > N$ tal que

$$||f - f_M||_1 < \varepsilon |t|^\alpha.$$

Luego si $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\frac{||\Delta^r_t(f_n - f, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} &\leq \frac{||\Delta^r_t(f_n - f_M, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} + \frac{||\Delta^r_t(f_M - f, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} \\
&\leq \frac{||\Delta^r_t(f_n - f_M, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} + \frac{\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} ||(f_M - f)(\cdot + t)||_1}{|t|^\alpha} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2^r ||f_M - f||_1}{|t|^\alpha} < (1 + 2^r)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ahora tomamos el supremo sobre todos los $0 < |t| \leq \pi$ en ambos lados de la desigualdad

$$\frac{||\Delta^r_t(f_n - f, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} < \varepsilon$$

concluyendo,

$$\theta^1_\alpha(f - f_n) \leq (1 + 2^r)\varepsilon \text{ para todo } n \geq N,$$

y con esto hemos probado que (f_n) converge a f con la norma $||\cdot||_{\alpha,1}$, en particular $f_N - f \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$, de donde $f = f_N - (f_N - f) \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$. □

Corolario 2.3.1. Si $\alpha > 0$ no es entero y $r = [\alpha] + 1$, entonces el espacio $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ es un espacio completo con la norma $||\cdot||_{\alpha,1} = ||\cdot||_1 + \theta^1_\alpha(\cdot)$.

Demostración. Basta con notar que $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ es un subespacio cerrado en $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ y aplicar el teorema previo. □

En el siguiente corolario asumimos también que α no es entero.

Corolario. Sea $\alpha > 0$ fijo, $r = [\alpha]+1$, entonces la familia de cuasi-seminormas $\theta^1_\alpha(\cdot, \delta)$, $0 < \delta \leq \pi$ dadas por

$$\theta^1_\alpha(f, \delta) = \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||\Delta^r_t(f, \cdot)||_1}{|t|^\alpha},$$

es admisible con respecto la métrica inducida por la norma $|| \cdot ||_1$.

Demostración. La condición (i) de la definición (2.1.1) es cierta en virtud del corolario previo y la condición (ii) es cierta al observar que si $f \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ y $\delta \in (0, \pi]$,

$$\begin{aligned}
\theta^1_\alpha(f) &= \sup_{0<|t|\leq\pi} \frac{||\Delta^r_t(f, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} \\
&\leq \sup_{0<|t|<\delta} \frac{||\Delta^r_t(f, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} + \sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{||\Delta^r_t(f, \cdot)||_1}{|t|^\alpha} \\
&\leq \theta^1_\alpha(f, \delta) + \frac{2^r||f||_1}{\delta^\alpha}.
\end{aligned}$$

y además al definir $\psi : (0, \pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mediante

$$\psi(\delta, t) = 2^r t/\delta^\alpha,$$

tenemos que para cada $0 < \delta \leq \pi$,

$$\psi(\delta, t) \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow 0$$

y con esto obtenemos el resultado deseado, con valor de la constante $K = 1$. □

Podemos establecer un resultado cuantitativo sobre la convergencia de una sucesión 0-equicontinua de funciones en $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})$ usando el Teorema Tauberiano. Si (f_n) es 0-equicontinua que converge a f en la norma $|| \cdot ||_1$ y además se cumplen las hipótesis restantes del Teorema Tauberiano, entonces

$$\theta^1_\alpha(f_n - f) \leq 2\theta^1_\alpha((f_n), \delta) + \frac{2^r||f_n - f||_1}{\delta^\alpha}.$$

Esto implica que,

$$||f_n - f||_{\alpha,1} \leq \left(\frac{2^r}{\delta^\alpha} + 1\right) ||f_n - f||_1 + 2\theta^1_\alpha((f_n), \delta).$$

A continuación damos el ejemplo de una sucesión de funciones en $L^1_{2\pi}$, probaremos que esta sucesión es 0-equicontinua y mostraremos como queda la desigualdad previa.

Ejemplo. Sobre $\mathbb{T}$ definimos

$$f(x) = \begin{cases} \pi x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ 2\pi^2 - \pi x & \text{si } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Primero notemos que $f \in \mathrm{Lip}_1^{\infty}(\mathbb{T})$, de aquí se sigue que $f \in \mathrm{Lip}_1^1(\mathbb{T})$, pero hemos probado también que,

$$\mathrm{Lip}_1^1(\mathbb{T}) \subset \mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T}) \text{ para todo } 0 < \alpha < 1.$$

Este resultado nos será útil para asegurar que la sucesión de funciones $\{\sigma_n(\cdot,\cdot)\}$ que definiremos a continuación es 0-equicontinua. De manera concreta, usaremos que

$$\theta_\alpha^1(f,\delta) \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0.$$

Necesitamos definir una sucesión de funciones que converja a f en la norma $||\cdot||_1$, para esto usamos una unidad aproximativa. El kernel de Féjer es apropiado para este caso.

Después de realizar los respectivos cálculos vemos que

$$\sigma_n(f,x) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{2}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(kx) + \cdots + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(kx)\right).$$

La expresión anterior se simplifica más, en la práctica conviene escribir

$$\sigma_n(f,x) = \sigma_{n-1}(f,x) - \frac{2}{n+1}\sum_{k \text{ impar}}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2},$$

donde

$$\sigma_1(f,x) = \frac{\pi^2}{2} - 2\cos(x).$$

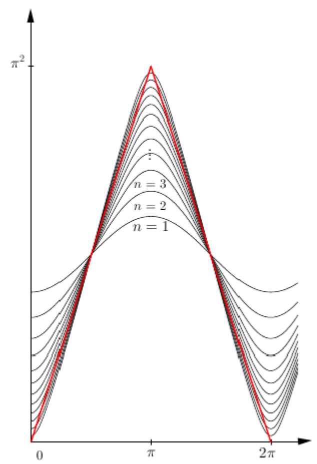


Figura 2.1: Algunas gráficas de $\sigma_n(f,\cdot)$

Para probar que la sucesión $\{\sigma_n(f,\cdot)\}$ es 0-equicontinua, primero observemos que

$$\begin{aligned}\theta^1_\alpha(\sigma_n,\delta) &= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||(F_n * f)_t - F_n * f||_1}{|t|^\alpha}\\ &= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||F_n * f_t - F_n * f||_1}{|t|^\alpha}\\ &= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||F_n * (f_t - f)||_1}{|t|^\alpha}\\ &\leq \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||F_n||_1||f_t - f||_1}{|t|^\alpha}\\ &= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||f_t - f||_1}{|t|^\alpha}\\ &= \theta^1_\alpha(f,\delta).\end{aligned}$$

Luego al tomar el supremo sobre todos los $n \in \mathbb{N}$ y hacer δ suficientemente pequeño obtenemos el resultado que anhelabamos.

Del ejemplo previo presentamos el siguiente resultado cuantitativo.

$$||F_n * f - f||_{\alpha,1} \leq \left(\frac{2}{\delta^\alpha} + 1\right) ||F_n * f - f||_1 + 2\theta^1_\alpha((F_n * f),\delta),$$

donde recalcamos que F_n denota el kernel de Féjer.

§2.4 Espacios de Lipschitz en $L(\omega)$

En la sección previa trabajamos sobre el espacio $L^1_{2\pi}$, sin embargo existen funciones que no son integrables pero al multiplicarlos por otra función, resultan ser integrables. En esta sección trataremos con este tipo de funciones.

Denotemos por $F_{2\pi}$ al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ que son medibles (bajo la medida normalizada de Lebesgue en $\mathbb{T}$). Definimos el espacio $L(\omega)$ como el conjunto de funciones f en $F_{2\pi}$, tales que $f\omega \in L^1_{2\pi}$, siendo $\omega \in L^\infty_{2\pi}$, $\omega > 0$ *c.d*, dicha función es llamada un *peso*. De manera concreta,

$$L(\omega) = \left\{ f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es medible y } \int_0^{2\pi} |f(x)|\omega(x)\, dx < \infty \right\}.$$

Como ejemplo de pesos definidos sobre $\mathbb{T}$, tenemos la familia de funciones conocida como pesos *tipo Jacobi*.

$$\omega(x) = x^\beta (2\pi - x)^\alpha, \qquad x \in \mathbb{T},\ \alpha,\beta \geq -1.$$

Ejemplo. La función $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sec(x/2 - \pi/2)$ no es integrable sobre $\mathbb{T}$.

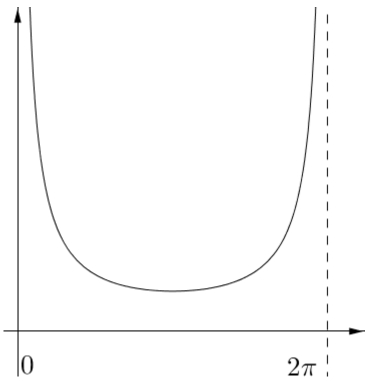


Figura 2.2: Gráfica de f

Sin embargo al considerar el peso tipo Jacobi, $\omega(x) = x(2\pi - x)^{3/2}$, tenemos que ωf es integrable.

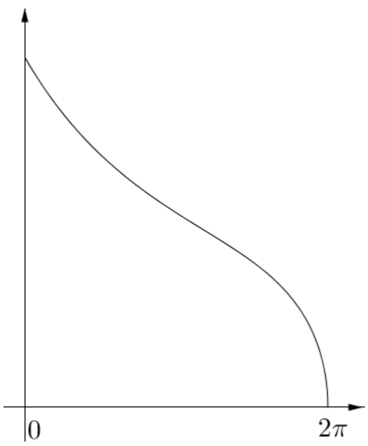


Figura 2.3: Gráfica de ωf

La norma que usaremos en $L(\omega)$ está dada por

$$||f||_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)\omega(x)|\, dx,$$

y la convolución de elementos en $L(\omega)$ con elementos de $L^1_{2\pi}$, se define como sigue.

$$(f * g)_\omega(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\omega(x-t)g(t)\, dt.$$

Note que se cumplen las igualdades

$$||f||_\omega = ||f\omega||_1 \ , \ (f * g)_\omega = (f\omega) * g;$$

donde la convolución del lado derecho es la usual de elementos en $L^1_{2\pi}$.

Para describir los espacios de Lipschitz en este contexto mencionamos que la traslación $(\omega f)_t$ está dada por

$$(\omega f)_t(x) = \omega(x+t)f(x+t).$$

Así, el espacio $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ consta de las funciones f en $L(\omega)$, que satisfacen

$$||(f\omega)_t - \omega f||_1 \leq M|t|^\alpha \text{ para todo } t. \tag{2.8}$$

De manera análoga al caso $\omega = 1$ se define el espacio $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$, con $0 < \alpha \leq 1$. Mientras que para el caso $\alpha > 0$ con α no entero, $r = [\alpha] + 1$ se cosidera,

$$\Delta^r_t(f,x)_\omega = \Delta^r_t(f\omega, x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k}\omega(x+kt)f(x+kt),$$

y también de manera análoga al caso $\omega = 1$, se definen los espacios $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ y $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ (no involucramos r para diferenciar el caso $0 < \alpha \leq 1$ ya que se sobreentiende que $r = [\alpha] + 1$). También en este contexto,

$$\theta^1_\alpha(f)_\omega = \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||\Delta^r_t(f\omega,\cdot)||_1}{|t|^\alpha}.$$

La mayoría de los resultados en $L(\omega)$ son similares a los que se mencionaron en $L^1_{2\pi}$ notando que

$$f \in L(\omega) \text{ si y sólo si } f\omega \in L^1_{2\pi}.$$

Resumimos los resultados principales que se deducen a partir del caso $\omega = 1$. De la misma forma se consideran $\alpha > 0$ y $r = [\alpha] + 1$.

Teorema. (i) El espacio $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ es un espacio de Banach con la norma

$$||f||_{\alpha,\omega} := ||f||_\omega + \theta^1_\alpha(f)_\omega.$$

(ii) La famila de seminormas $\theta^1_\alpha(\cdot,\delta)_\omega$, dadas por

$$\theta^1_\alpha(f,\delta)_\omega = \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||\Delta_t(f\omega,\cdot)||_1}{|t|^\alpha} \qquad 0 < \delta \leq \pi,$$

es adimisible con respecto a la métrica inducida por la norma $||\cdot||_\omega$.

Demostración. Es análogo al caso $\omega = 1$. $\square$

Más aún, con respecto a la condición (ii) la función de admisibilidad es

$$\psi : (0, \pi] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dada por,

$$\psi(\delta, t) = 2^r t/\delta^\alpha.$$

De esta forma, si (f_n) converge a una función f en $L(\omega)$, obtenemos el resultado cuantitativo

$$||f_n - f||_{\alpha,\omega} \leq \left(1 + \frac{2^r}{\delta^\alpha}\right) ||f_n - f||_\omega + 2\theta^1_\alpha((f_n), \delta)_\omega,$$

siendo los f_n's términos de una sucesión 0-equicontinua en $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$. En particular si usamos una unidad aproximativa en $\mathbb{T}$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema. Sean $0 < \alpha < 1$, $\omega \in \mathrm{lip}^\infty_\alpha(\mathbb{T})$, (U_n) una unidad aproximativa en $\mathbb{T}$ y $f \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$. Entonces $(U_n * f)_\omega$ converge a $f\omega$ en $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$.

Demostración. Dado que $(U_n * f)_\omega = U_n * f\omega$, entonces tenemos que $(U_n * f)$ converge a $f\omega$ en $L^1_{2\pi}$. Ahora dado que

$$||(U_n * f)_\omega - f\omega||_\omega \leq ||\omega||_\infty ||(U_n * f)_\omega - f\omega||_1 \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

entonces $(U_n * f)_\omega$ converge a $f\omega$ en $L(\omega)$. Para probar que $(U_n * f)_\omega$ es 0-equicontinua comenzamos con notar que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\theta^1_\alpha((U_n * f)_\omega, \delta)_\omega &= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||(U_n * f\omega)_t - U_n * f\omega||_1}{|t|^\alpha} \\
&= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||U_n * (f\omega)_t - U_n * f\omega||_1}{|t|^\alpha} \\
&= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||U_n * (f_t\omega_t - f\omega)||_1}{|t|^\alpha} \\
&\leq \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||U_n||_1 ||f_t - f||_\omega}{|t|^\alpha} \\
&= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{||f_t - f||_\omega}{|t|^\alpha} \\
&= \theta^1_\alpha(f, \delta)_\omega.
\end{aligned}$$

Luego, al tomar el supremo sobre todos los $n \in \mathbb{N}$ y usando que $f \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ obtenemos

$$\theta^1_\alpha((U_n * f), \delta)_\omega \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0.$$

Esto muestra que la sucesión de funciones $(U_n * f)_\omega$ es 0-equicontinua, finalmente el Teorema Tauberiano garantiza que $(U_n * f)_\omega \longrightarrow f\omega$ en $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$. $\square$

Capítulo 3

Espacios de Lipschitz en espacios asimétricos

Este capítulo se divide en dos secciones y es donde aplicamos algunos de los resultados mostrados en la sección de Preliminares. En la segunda sección del presente capítulo aplicamos parte de los resultados que describimos en la primera, otro contexto donde se pueden aplicar estos resultados es en el conjunto de las funciones llamadas *semi-Lipschitz*, que son mapeos entre espacios cuasi-métricos. Se pueden obtener resultados similares al caso de las funciones de Lipschitz si restringimos el contradominio de la función a que sea un espacio lineal normado asimétricamente no degenerado. Uno de los autores que exhiben otra forma de trabajar con funciones semi-Lipschitz es Cobzas en [17, pág 45].

§3.1 Teoría general

Sea $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}, \mathbb{R}_+^* = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}, \widehat{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ y denotemos por I al intervalo abierto $(0, b)$ (o semiabierto $(0, b]$) donde $I = \mathbb{R}_+^*$ es posible. Consideremos un espacio lineal real o complejo $\mathbb{E}$ con una norma asimétrica no degenerada $||\cdot|_{\mathbb{E}}$ y con constante de asimetría D. Sea

$$\Theta : \mathbb{E} \times I \to \widehat{\mathbb{R}}_+,$$

una familia $\Theta(\cdot, \delta)$, $\delta \in I$, de funcionales sobre $\mathbb{E}$ con las siguientes propiedades.

(i) Existe una constante universal $C \geq 1$ que no depende de δ y otra constante C_δ, tal que para todo $f, g \in \mathbb{E}$,

$$\Theta(f + g, \delta) \leq C(\Theta(f, \delta) + \Theta(g, \delta)) + C_\delta(||f|_{\mathbb{E}} + ||g|_{\mathbb{E}}).$$

(ii) Existe una constante universal $D \geq 1$ (pudiendo ser igual a la constante de asimetría de $\mathbb{E}$) y otra constante D_δ tal que para cada $f \in \mathbb{E}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\Theta(\gamma f, \delta) \leq D|\gamma|\Theta(f, \delta) + D_\delta|\gamma| \cdot ||f|_{\mathbb{E}},$$

siendo las familias (C_δ) y (D_δ) del tipo $o(1)$ en 0, en otras palabras

$$C_\delta, D_\delta \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0.$$

Sin pérdida de generalidad se asume que para toda $f \in \mathbb{E}$, $\Theta(f,\cdot)$ es una función creciente de δ. Al hacer

$$\Theta(f) = \sup_{\delta\in I} \Theta(f,\delta),$$

este funcional tiene las mismas propiedades sobre $\mathbb{E}$ que cada uno de los elementos $\theta(\cdot,\delta)$, $\delta \in I$, siempre y cuando existan y sean finitas las constantes

$$C_0 = \sup_{\delta\in I} C_\delta$$

y

$$D_0 = \sup_{\delta\in I} D_\delta.$$

Si esto es cierto, entonces

$$\Theta(f+g) \leq C(\Theta(f)+\Theta(g)) + C_0(||f|_{\mathbb{E}} + ||g|_{\mathbb{E}})$$

$$\Theta(\gamma f) \leq D|\gamma|\Theta(f) + D_0|\gamma|\cdot||f|_{\mathbb{E}}.$$

Si se definen los conjuntos

$$\mathbb{F} := \{f \in \mathbb{E} : \Theta(f) < \infty\}$$

y

$$F := \{f \in \mathbb{F} : \Theta(f,\delta) \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0\},$$

entonces F y $\mathbb{F}$ son subespacios lineales de $\mathbb{E}$.

Teorema 3.1.1. Los subespacios $\mathbb{F}$ y F descritos anteriormente son cuasi-normados asimétricamente por

$$||f|_{\mathbb{F}} = ||f|_{\mathbb{E}} + \Theta(f). \tag{3.1}$$

Demostración. Basta con verificar que $||\cdot|_{\mathbb{F}}$ es una cuasi-norma asimétrica en $\mathbb{F}$.

(i) La parte (i) de la definición (1.1.2) es inmediata.

(ii) Para cualesquiera $\gamma \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} ||\gamma f|_{\mathbb{F}} &= ||\gamma f|_{\mathbb{E}} + \Theta(\gamma f) \\ &\leq D|\gamma|\cdot||f|_{\mathbb{E}} + D|\gamma|\Theta(f) + D_0|\gamma|\cdot||f|_{\mathbb{E}} \\ &= (D+D_0)|\gamma|\cdot||f|_{\mathbb{E}} + D|\gamma|\Theta(f) \\ &\leq \text{máx}\{D+D_0, D\}|\gamma|(||f|_{\mathbb{E}} + \Theta(f)) \\ &= \text{máx}\{D+D_0, D\}||f|_{\mathbb{F}}. \end{aligned}$$

(iii) Para $f, g \in \mathbb{F}$ arbitrarios:

$$\begin{aligned}||f+g|_{\mathbb{F}} &= ||f+g|_{\mathbb{E}} + \Theta(f+g)\\ &\leq ||f|_{\mathbb{E}} + ||g|_{\mathbb{E}} + C(\Theta(f)+\Theta(g)) + C_0(||f|_{\mathbb{E}} + ||g|_{\mathbb{E}})\\ &= (1+C_0)(||f|_{\mathbb{E}} + ||g|_{\mathbb{E}}) + C(\Theta(f)+\Theta(g))\\ &\leq \max\{1+C_0, C\}(||f|_{\mathbb{E}} + ||g|_{\mathbb{E}} + \Theta(f)+\Theta(g))\\ &= \max\{1+C_0, C\}(||f|_{\mathbb{F}} + ||g|_{\mathbb{F}}).\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.2. El espacio F es cerrado en $(\mathbb{F}, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión en F tal que $f_n \xrightarrow{||\cdot|_{\mathbb{E}}} f$ para algún $f \in \mathbb{F}$. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Primero escogemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Theta(f_n - f) \leq \varepsilon$ y después un $\delta > 0$ tal que $\Theta(f_n, \delta) \leq \varepsilon$, $C_\delta \leq \varepsilon/(M_1 + M)$ y $D_\delta \leq \varepsilon/M_1$, donde M_1 es una cota superior de la sucesión $(||f_n - f|_{\mathbb{E}})$ y M una cota superior para la sucesión $(||f_n|_{\mathbb{E}})$. Así,

$$\begin{aligned}\Theta(f,\delta) &\leq C(\Theta(f_n - f, \delta) + \Theta(f_n, \delta)) + C_\delta(||f - f_n|_{\mathbb{E}} + ||f_n|_{\mathbb{E}})\\ &\leq C(D\Theta(f_n - f, \delta) + D_\delta ||f_n - f|_{\mathbb{E}} + \Theta(f_n,\delta)) + C_\delta(D||f_n - f|_{\mathbb{E}} + \Theta(f_n,\delta))\\ &\leq 4CD\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Definición. Un conjunto $G \subset F$ es llamado *0-equicontinuo* si para $\delta \in I$,

$$\Theta(G,\delta) = \sup_{g\in G} \Theta(g,\delta) \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0.$$

Una sucesión (f_n) es llamada 0-equicontinua si lo es el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. En este caso, simplificamos escribiendo

$$\Theta((f_n),\delta) = \Theta(\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \delta).$$

Teorema. Toda sucesión convergente en el espacio cuasi-normado asimétricamente $(F, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$ es 0-equicontinua.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión en F tal que

$$||f_n - f|_{\mathbb{F}} \longrightarrow 0,$$

(por tanto $\Theta(f_n - f) \longrightarrow 0$ y $||f_n - f|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0$) para algún $f \in F$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\Theta(f_n - f) \leq \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Por otro lado, sea $\delta_0 \in I$ tal que $\Theta(f,\delta_0) \le \varepsilon$ y $C_{\delta_0} \le \varepsilon/(M + ||f|_{\mathbb{E}})$, donde M es una cota superior de la sucesión $(||f_n - f|_{\mathbb{E}})$. Entonces para cualesquiera $0 < \tau \le \delta_0$ y $n \ge N$,

$$\begin{aligned}\Theta(f_n,\tau) &\le C(\Theta(f_n - f,\tau) + \Theta(f,\tau)) + C_\tau(||f_n - f|_{\mathbb{E}} + ||f|_{\mathbb{E}})\\ &\le C(\Theta(f_n - f) + \Theta(f,\delta_0)) + C_{\delta_0}(||f_n - f|_{\mathbb{E}} + ||f|_{\mathbb{E}})\\ &\le 3C\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, N$, elegimos δ_i tal que $\Theta(f_i,\delta_i) \le \varepsilon$. Finalmente si hacemos $\delta = \text{mín}\{\delta_i, i = 0, 1, \ldots, N\}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Theta(f_n,\delta) \le 3\varepsilon.$$

Esto prueba el teorema. □

Ahora asumiremos que $\mathbb{E}$ es un espacio lineal en donde está definida una cuasi-norma asimétrica no degenerada $||\cdot|_{\mathbb{E}}$ con constante de asimetría D. En este espacio también asumimos que está definida una familia de funcionales $\Theta(\cdot,\delta)$, $\delta \in I$ que a su vez define un funcional $\Theta(\cdot)$. Definimos otra cuasi-norma asimétrica en $\mathbb{F}$ por,

$$||f - g|_{\mathbb{F}} := ||f - g|_{\mathbb{E}} + \Theta(f - g).$$

Definición 3.1.1. Una familia de funcionales $\Theta(f,\delta)$, $\delta \in I$, con las propiedades que se han mencionado en (i) y (ii) al inicio de esta sección, es *admisible con respecto a la cuasi-métrica inducida por la cuasi-norma asimétrica* $||\cdot|_{\mathbb{E}}$ si se cumplen las condiciones siguientes.

(i) El espacio $(\mathbb{F}, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$ es un espacio bi-Banach.

(ii) Existe una constante $K > 0$ y una función $\psi : I \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que para cada $\delta \in I$,

$$\lim_{t\to 0} \psi(\delta,t) = \psi(\delta,0),$$

y para toda $f \in F$,

$$\Theta(f) \le K\Theta(f,\delta) + \psi(\delta, ||f|_{\mathbb{E}}). \tag{3.3}$$

La condición (i) de la definición previa y el Teorema (3.1.2) prueban que si $(\mathbb{F}, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$ es bi-Banach, entonces también lo es $(F, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$.

Teorema (Tauberiano)**.** Supongamos que $(F, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$ ha sido definido de $(E, ||\cdot|_{\mathbb{E}})$ por una familia de funcionales admisibles $\Theta(\cdot, \delta)$, $\delta \in I$. Sea $(f_n) \subset F$ una sucesión 0-equicontinua. Si esta sucesión converge en $(E, ||\cdot|_{\mathbb{E}})$ a un elemento f, entonces $f \in F$ y (f_n) converge a f en $(F, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$. Más aún, si para cada $\delta \in I$, $\psi(\delta, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}^+$, entonces

$$\Theta(f_n - f) \leq K(2CD\Theta((f_n), \delta) + MCD_\delta + 2DMC_\delta) + \psi(\delta, ||f_n - f|_{\mathbb{E}}), \tag{3.4}$$

donde M es una cota superior para la sucesión real $(||f_n|_{\mathbb{E}})$.

Demostración. Por el momento asumimos que hemos probado que $(\Theta(f_n))$ es una sucesión real de Cauchy. De las hipótesis del teorema podemos concluir que (f_n) es una sucesión $||\cdot|^s$-Cauchy en $\mathbb{E}$, por otra parte de la definición de $||\cdot|_{\mathbb{F}}$ se puede seguir que (f_n) es una sucesión $||\cdot|^s$-Cauchy en $(F, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$, pero como estamos suponiendo que $(F, ||\cdot|_{\mathbb{F}})$ es un espacio cuasi-normado bi-Banach, esto implica que existe $g \in F$ tal que $||f_n - g|_{\mathbb{F}} \longrightarrow 0$. También de la definición de $||\cdot|_{\mathbb{F}}$, $||f_n - f|_{\mathbb{E}} \leq ||f_n - g|_{\mathbb{F}}$, por lo tanto $||f_n - g|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0$, pero $||f_n - f|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0$, y esto garantiza que $f = g$ [1]. Para probar que $(\Theta(f_n))$ es una sucesión real de Cauchy, sea $\varepsilon > 0$. Para todo $\delta \in I$, de (3.3),

$$\Theta(f_n - f_m) \leq K\Theta(f_n - f_m) + \psi(\delta, ||f_n - f_m|_{\mathbb{E}}). \tag{3.5}$$

Luego de las propiedades del funcional $\Theta(\cdot, \delta)$,

$$\begin{aligned}\Theta(f_n - f_m, \delta) &\leq C(\Theta(f_n, \delta) + \Theta(-f_m, \delta)) + C_\delta(||f_n|_{\mathbb{E}} + || - f_m|_{\mathbb{E}}) \\ &\leq C(\Theta(f_n, \delta) + D\Theta(f_m, \delta) + D_\delta ||f_m|_{\mathbb{E}}) + C_\delta(M + DM) \\ &\leq C\Theta((f_n), \delta) + CD\Theta((f_n), \delta) + CD_\delta ||f_m|_{\mathbb{E}} + 2DMC_\delta \\ &\leq 2CD\Theta((f_n), \delta) + D_\delta MC + 2DMC_\delta.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Esta última parte la sustituimos en (3.5) para obtener

$$\Theta(f_n - f_m) \leq 2KCD\Theta((f_n), \delta) + KMCD_\delta + 2KDMC_\delta + \psi(\delta, ||f_n - f_m|_{\mathbb{E}}).$$

Posteriormente elegimos δ de tal forma que $\Theta((f_n), \delta) \leq \varepsilon$, $D_\delta \leq \varepsilon/M$ y $C_\delta \leq \varepsilon/M$, finalmente elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq N$, $\psi(\delta, ||f_n - f_m|_{\mathbb{E}}) \leq \varepsilon$. Por una sustitución de lo anterior en (3.5),

$$\Theta(f_n - f_m) \leq (5CDK + 1)\varepsilon.$$

La parte cualitativa del teorema ya ha sido probada. En particular $\Theta(f_n - f_m) \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$. Por último regresamos a (3.5) y usamos la continuidad de $\psi(\delta, \cdot)$ haciendo $m \longrightarrow \infty$ para obtener (3.4). □

[1] La unicidad del límite se sigue de:

$$||f - g|_{\mathbb{E}} \leq ||f - f_n|_{\mathbb{E}} + ||f_n - g|_{\mathbb{E}} \leq D||f_n - f|_{\mathbb{E}} + ||f_n - g|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0.$$

§3.2 Espacios de Lipschitz en $L(u, v)$

En la última sección del capítulo anterior tratamos con funciones que son integrables con respecto a un peso ω. Existen casos en donde el peso depende del signo de la función. Para estos casos, supongamos que $u, v \in C_{2\pi}$, $u, v > 0$ $c.d$ (a veces reemplazamos $C_{2\pi}$ por $L^{\infty}_{2\pi}$).

Sea $F_{2\pi}$ el espacio de funciones Lebesgue medibles sobre $\mathbb{T}$. Definimos el funcional $\rho_{u,v} : F_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por medio de

$$\rho_{u,v}(f) = \int_{\mathbb{T}} |f_{u,v}(x)| \, dx = \int_{\mathbb{T}} \big(f^+(x)u(x) + f^-(x)v(x) \big) \, dx, \tag{3.7}$$

donde

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \text{ y } f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

son las partes positiva y negativa de f respectivamente y la función $f_{u,v}$ está dada por

$$f_{u,v}(x) := f^+(x)u(x) - f^-(x)v(x).$$

El funcional $\rho_{u,v}$ satisface las siguientes propiedades,

(i) Si 0 denota la función cero en $F_{2\pi}$, $\rho_{u,v}(0) = 0$.

(ii) Para toda $f, g \in F_{2\pi}$, $\rho_{u,v}(f + g) \leq \rho_{u,v}(f) + \rho_{u,v}(g)$.

(iii) Para todo $f \in F_{2\pi}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\rho_{u,v}(\lambda f) = \lambda \rho_{u,v}(f)$.

Sin embargo puede existir $f \in F_{2\pi}$ tal que,

$$\rho_{u,v}(-f) \neq \rho_{u,v}(f).$$

Al definir el conjunto

$$L(u, v) := \{f \in F_{2\pi} : \rho_{u,v}(f) < \infty\},$$

por las propiedades de $\rho_{u,v}(\cdot)$, este conjunto puede no ser un espacio lineal, ya que de $\rho_{u,v}(f) < \infty$ no se infiere que $\rho_{u,v}(-f) < \infty$.

Nuestro primer trabajo será verificar bajo qué condiciones $L(u, v)$ es un espacio lineal. Con las propiedades del funcional $\rho_{u,v}$, sólo podemos asegurar que $L(u, v)$ es un cono estable bajo la adición, esto es, λf, $f + g \in L(u, v)$ siempre que $f, g \in L(u, v)$ y $\lambda \geq 0$.

Ejemplo. La función $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi - x},$$

no es integrable.

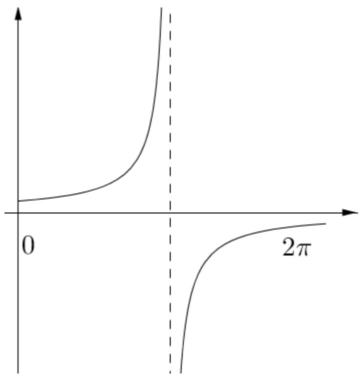


Figura 3.1: Gráfica de la función f

Sin embargo, al descomponerla en su parte positiva y negativa obtenemos las funciones

$$f^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi - x} & \text{si } 0 \leq x < \pi, \\ 0 & \text{si } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

y

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{1}{x - \pi} & \text{si } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

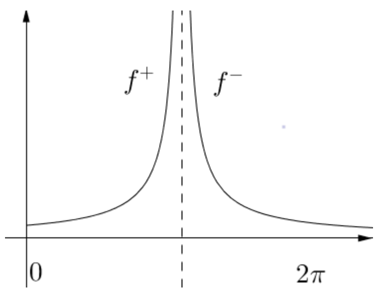


Figura 3.2: Gráfica de f^+ y f^-

Ahora, si consideramos los pesos

$$u(x) = x^2|\pi - x|(2\pi - x) \qquad \text{y} \qquad v(x) = \text{sen}^4(\pi - x),$$

tenemos

$$f_{u,v}(x) = f^+(x)u(x) - f^-(x)v(x) = \begin{cases} x^2(2\pi - x) & \text{si } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{\operatorname{sen}^4(\pi - x)}{\pi - x} & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

es integrable.

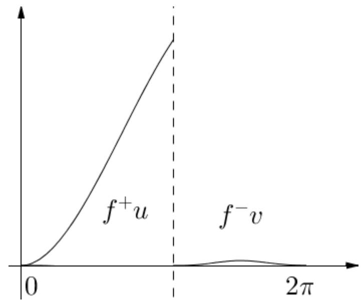


Figura 3.3: Gráfica de $f_{u,v}$

Consideremos una función $\omega \in \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ (en algunos casos basta con que $\omega \in C_{2\pi}$), para el cual existen constante A y B que cumplen,

$$0 < A \leq \omega \leq B \text{ y } u = \omega v \ c.d. \tag{3.8}$$

Enunciamos los resultados inmediatos que se obtienen a partir de esta restricción.

Teorema 3.2.1. Supongamos que se cumple la condición (3.8), entonces

(i) Como espacios lineales $L(u)$ y $L(v)$ son iguales y se cumple la desigualdad

$$||g||_u \leq B||g||_v \leq (1/A)||g||_u.$$

(ii) Los espacios $\mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_u$ y $\mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_v$ son iguales como espacio lineales y

$$\theta_\alpha^1(g, \delta)_u \leq ||g||_v \theta_\alpha^\infty(\omega, \delta) + B\theta_\alpha^1(g, \delta)_v, \tag{3.9}$$

$$\theta_\alpha^1(g, \delta)_v \leq (||g||_v / A^2)\theta_\alpha^\infty(\omega, \delta) + (1/A)\theta_\alpha^1(g, \delta)_u. \tag{3.10}$$

Demostración. La premisa (i) es trival. Para el caso de (ii) sólo probaremos las desigualdades (3.9) y (3.10), para esto usamos la identidad

$$|g_t v_t \omega_t - \omega g v| = |g_t v_t(\omega_t - \omega) + \omega(g_t v_t - g v)|$$

concluyendo

(a)

$$|\Delta_t(gu)| = |\Delta_t(gv\omega)| \le |(gv)_t||\Delta_t(\omega)| + |\omega| \cdot ||\Delta_t(gv)||_1,$$

(b)

$$|\Delta_t(gv)| = |\Delta_t(gu/\omega)| \le |(gu)_t||\Delta_t(1/\omega)| + |1/\omega| \cdot ||\Delta_t(gu)||_1.$$

Posteriormente, integrando (sobre $\mathbb{T}$) en ambos lados de la desigualdad (a) obtenemos (3.9) y (3.10) se obtiene de manera análoga manipulando (b). □

De (3.9) y (3.10) tenemos las siguientes desigualdades respectivas después de tomar el supremo sobre los $\delta > 0$.

$$\theta^1_\alpha(g)_u \le ||g||_v \theta^\infty_\alpha(\omega) + B\theta^1_\alpha(g)_v \tag{3.11}$$

y

$$\theta^1_\alpha(g)_v \le (||g||_v/A^2)\theta^\infty_\alpha(\omega) + (1/A)\theta^1_\alpha(g)_u. \tag{3.12}$$

Esto muestra que como espacios lineales $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_u$ y $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$ también son iguales.

Ahora, notemos que si $f \in L(u,v)$ y se cumple la condición (3.8), entonces

$$\begin{aligned}
\rho_{u,v}(-f) &= \int_{\mathbb{T}} ((-f)^+(x)u(x) + (-f)^-(x)v(x))\, dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} (f^-(x)u(x) + f^+(x)v(x))\, dx \\
&\le \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{A} f^+(x)u(x) + Bf^-(x)v(x)\right)\, dx \\
&\le \text{máx}\left\{\frac{1}{A}, B\right\} \int_{\mathbb{T}} (f^+(x)u(x) + f^-(x)v(x))\, dx \\
&= \text{máx}\left\{\frac{1}{A}, B\right\} \rho_{u,v}(f).
\end{aligned}$$

De manera natural, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2. Si $u, v \in C_{2\pi}$ cumplen la condición (3.8), entonces $L(u,v)$ es un espacio lineal normado asimétricamente bicompleto con norma asimétrica no degenerada

$$||f|_{u,v} := \rho_{u,v}(f) = \int_{\mathbb{T}} (u(x)f^+(x) + v(x)f^-(x))\, dx,$$

cuya constante de asimetría es

$$C_1 = \text{máx}\{B, \frac{1}{A}\}.$$

Además, para toda $f \in L(u,v)$;

$$\text{mín}\{1, A\}||f||_v \le ||f|_{u,v} \le \text{máx}\{1, B\}||f||_v \tag{3.13}$$

Demostración. Sólo probaremos que $L(u,v)$ es cerrado bajo la suma y bajo la multiplicación por escalar (las propiedades restantes se deducen apartir de estas dos). Para esto, sean $f \in L(u,v)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, deseamos probar que $||\lambda f|_{u,v} < \infty$. Es claro que para $\lambda \geq 0$, el resultado se sigue de las propiedades de $\rho_{u,v}(\cdot)$, mientras que para $\lambda < 0$, basta con trabajar con $||-f|_{u,v}$, pero esto también se sigue de la observación, $||-f|_{u,v} \leq C_1||f|_{u,v}$.

La prueba de que $f+g \in L(u,v)$ se sigue de las desigualdades,

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+ \qquad y \qquad (f+g)^- \leq f^- + g^-.$$

para todo $f, g \in L(u,v)$.

Por otro lado, de las propiedades de $\rho_{u,v}(\cdot)$ y de las observaciones anteriores, se sigue que $||\cdot|_{u,v}$ es una norma asimétrica con constante de asimetría C_1. La desigualdad (3.13) es cierta en virtud del resultado (i) del teorema previo, de la desigualdad (3.8) y de la observación

$$||f|_{u,v} := ||f_{u,v}||_1 = ||f^+u||_1 + ||f^-v||_1.$$

Finalmente, notemos que de la desigualdad,

$$||-f|_{u,v} \leq C_1||f|_{u,v}$$

deducimos que si (f_n) es una sucesión en $L(u,v)$, entonces $||f_n - f_m|_{u,v} \longrightarrow 0$ si y sólo si $||f_m - f_n|_{u,v} \longrightarrow 0$, luego, de este hecho junto con (3.13) y la completéz de cada uno de los espacios $L(u)$ y $L(v)$ se concluye que $L(u,v)$ es bicompleto. $\square$

De (3.13) tenemos que los espacios lineales $L(u,v)$ y $L(v)$ coinciden. Más aún, la norma $||\cdot||_v$ es equivalente a la norma $||\cdot|_{u,v}$. Nuestro objetivo ahora es describir los *espacios de Lipschitz con peso sensible al signo*. Para esto, consideremos el espacio $L(u,v)$ con la restricción (3.8). Primero notemos que

$$\begin{aligned}(f^+)_t(x) &= \left(\frac{|f|+f}{2}\right)(x+t)\\ &= \frac{|f|(x+t)+f(x+t)}{2}\\ &= \frac{|f(x+t)|+f(x+t)}{2}\\ &= (f_t)^+(x).\end{aligned}$$

De manera análoga, $(f^-)_t(x) = (f_t)^-(x)$. De modo que no hay ambiengüedad de definir el incremento de orden 1 de una función $f \in L(u,v)$ por,

$$\Delta_t(f)_{u,v} := \Delta_t^1(f)_{(u,v)} := (f_t^+ u_t - f_t^- v_t) - (f^+u - f^-v).$$

Posteriormente para $0 < \alpha \leq 1$, definimos el funcional

$$\theta^1_\alpha(f)_{u,v} = \sup_{0<|t|\leq\delta\leq\pi} \frac{||\Delta(f)_{u,v}||_1}{|t|^\alpha}. \tag{3.14}$$

Las definiciones de $\theta^1_\alpha(f,\delta)_{u,v}$, $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ y $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ son de manera análoga a las secciones anteriores.

Aún no hemos dicho qué propiedades tiene el conjunto $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$, no obstante, más adelante probaremos que $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ es un espacio lineal y que además es bi-Banach.

Teorema. Sean $f \in L(u,v)$ y $0 < \alpha \leq 1$. Entonces $f \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ si y sólo si $f^+ \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_u$ y $f^- \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$. Más aún, para cualquier $0 < \delta \leq \pi$,

$$\text{máx}\left\{\theta^1_\alpha(f^+,\delta)_u, \theta^1_\alpha(f^-,\delta)_v\right\} \leq \theta^1_\alpha(f,\delta)_{u,v} \leq \theta^1_\alpha(f^+,\delta)_u + \theta^1_\alpha(f^-,\delta)_v. \tag{3.15}$$

Demostración. Dado $0 < \delta \leq \pi$ fijo, basta con notar que para cada t con $0 < |t| \leq \delta$, las siguientes desigualdades son válidas.

$$\text{máx}\left\{|\Delta_t(f^+)_u|, |\Delta_t(f^-)_v|\right\} \leq |\Delta_t(f)_{u,v}| \leq |\Delta_t(f^+)_u| + |\Delta_t(f^-)_v|$$

de modo que al integrar sobre $\mathbb{T}$ éstas desigualdades, dividir por $|t|^\alpha$ y tomar el supremo sobre los t's se obtiene el resultado deseado. $\square$

En (3.15) tomado el supremo sobre $0 < \delta \leq \pi$ tenemos

$$\text{máx}\left\{\theta^1_\alpha(f^+)_u, \theta^1_\alpha(f^-)_v\right\} \leq \theta^1_\alpha(f)_{u,v} \leq \theta^1_\alpha(f^+)_u + \theta^1_\alpha(f^-)_v. \tag{3.16}$$

Esto sugiere que $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_u$ y $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})_v$ son iguales como espacios lineales.

Corolario 3.2.1. Sean $f \in L(\omega)$ y $0 < \alpha \leq 1$. Entonces, $f \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ (respectivamente $f \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$) si y sólo si, $f^+ \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ y $f^- \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ (respectivamente $f^+ \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$ y $f^- \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_\omega$). Más aún, para cualquier $0 < \delta \leq \pi$,

$$\text{máx}\{\theta^1_\alpha(f^+,\delta)_\omega, \theta^1_\alpha(f^-,\delta)_\omega\} \leq \theta^1_\alpha(f,\delta)_\omega + \theta^1_\alpha(f^-,\delta)_\omega.$$

Demostración. Basta tomar $u = v = \omega$ en el teorema previo. $\square$

Para investigar las propiedades cualitativas de $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$, primero tomamos $0 < |t| \leq \pi$, posteriormente definimos el funcional $S_t : L(u,v) \longrightarrow \mathbb{R}$ por,

$$S_t(f) = \int_{\mathbb{T}} |\Delta_t(f)_{u,v}(x)|\, dx = ||\Delta(f)_{u,v}||_1. \tag{3.17}$$

Daremos un bosquejo para exhibir la existencia de constantes positivas C y D (universales) que satisfacen,

(i) Para toda $f \in L(u, v)$,

$$S_t(\gamma f) \leq D|\gamma|S_t(f) + o(|t|^\alpha).$$

(ii) Para todo $f, g \in L(u, v)$,

$$S_t(f + g) \leq C(S_t(f) + S_t(g)) + o(|t|^\alpha).$$

Para tal propósito, se expresa a $\mathbb{T}$ como unión de conjuntos disjuntos de la siguiente forma. Dado $h \in L(u, v)$, sean

$$\begin{aligned}
A_1(h) &:= \big\{x \in \mathbb{T} : h_t^+(x) > 0 \text{ y } h^-(x) > 0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{T} : h_t^+(x) > 0 \text{ y } h(x) = 0\big\} \\
A_2(h) &:= \big\{x \in \mathbb{T} : h_t^-(x) > 0 \text{ y } h^-(x) > 0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{T} : h_t^-(x) > 0 \text{ y } h(x) = 0\big\} \\
A_3(h) &:= \big\{x \in \mathbb{T} : h_t^+(x) > 0 \text{ y } h^+(x) > 0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{T} : h^+(x) > 0 \text{ y } h_t(x) = 0\big\} \\
A_4(h) &:= \big\{x \in \mathbb{T} : h_t^-(x) > 0 \text{ y } h^+(x) > 0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{T} : h^-(x) > 0 \text{ y } h_t(x) = 0\big\}
\end{aligned}$$

Luego con los $A_i(h)$ así definidos,

$$S_t(h) = \int_{\mathbb{T}} |\Delta_t(h)_{u,v}(x)|\, dx = \sum_{i=1}^{4} \int_{A_i(h)} |\Delta_t(h)_{u,v}(x)|\, dx \tag{3.18}$$

Enseguida, se definen las constantes

$$C_2 := \min\left\{A, \frac{1}{B}\right\},$$

$$C_3 := \left(1 + \frac{1}{A^2}\right).$$

Para probar la afirmación

$$S_t(\gamma f) \leq D|\gamma|S_t(f) + o(|t|^\alpha),$$

primero se toma $\gamma \geq 0$ obteniendo

$$S_t(\gamma f) = \gamma S_t(h).$$

Mientras que para $\gamma < 0$,

$$S_t(\gamma f) = |\gamma|S_t(-f).$$

Esta última igualdad conduce a trabajar sobre $S_t(-f)$. Usando la fórmula (3.18),

$$S_t(-f) = \sum_{i=1}^{4} \int_{A_i(f)} |\Delta_t(-f)_{u,v}(x)|\, dx.$$

Por último se trabaja sobre cada uno de las cuatro integrales, de hecho en cada una de éstas integrales se tienen las desigualdades siguientes.

$$\int_{A_1(f)} |\Delta_t(-f)_{u,v}(x)|\ dx \leq C_1 \int_{A_1(f)} |\Delta_t(f)_{u,v}(x)|\ dx.$$

$$\int_{A_2(f)} |\Delta_t(-f)_{u,v}(x)|\ dx \leq C_1 \int_{A_2(f)} |\Delta_t(f)_{u,v}(x)|\ dx + ||\omega_t - \omega||_\infty \int_{A_2} |f^-(x)v(x)|\ dx.$$

$$\int_{A_3(f)} |\Delta(-f)_{u,v}(x)|\ dx \leq C_1 \int_{A_3(f)} |\Delta_t(f)_{u,v}(x)|\ dx + C_3||\omega_t - \omega||_\infty \int_{A_3(f)} |f_t^+(x)u_t(x)|\ dx.$$

$$\int_{A_4} |\Delta_t(-f)_{u,v}(x)|\ dx \leq C_1 \int_{A_4} |\Delta_t(f)_{u,v}(x)|\ dx.$$

Sumando los respectivos miembros en cada una de las desigualdades anteriores y reacomodando los términos necesarios se obtiene

$$S_t(-f) \leq C_1 S_t(f) + C_3||f|_{u,v}||\omega_t - \omega||_\infty.$$

De donde se concluye que para cada $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$S_t(\gamma f) \leq |\gamma| C_1 S_t(f) + C_3|\gamma| \cdot ||f|_{u,v}||\omega_t - \omega||_\infty.$$

Por otra parte con un poco más de trabajo se prueba que, para todo $f, g \in L(u,v)$,

$$S_t(f+g) \leq \frac{(1+C_1)}{1+C_2}(S_t(f) + S_t(g)) + \frac{2C_3}{1+C_2}(||f|_{u,v} + ||g|_{u,v})||\omega_t - \omega||_\infty.$$

En este caso hay que tener en cuenta que

$$\int_{\mathbb{T}} |\Delta_t(f+g)_{u,v}(x)|\ dx = \sum_{i=1}^{4} \int_{A_i(f+g)} |\Delta_t(f+g)_{u,v}(x)|\ dx.$$

Ahora, notemos que podemos reescribir,

$$\theta_\alpha^1(f,\delta)_{u,v} = \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{S_t(f)}{|t|^\alpha},$$

y

$$\theta_\alpha^1(f)_{u,v} = \sup_{0<\delta\leq\pi} \theta_\alpha^1(f,\delta)_{u,v}.$$

Por lo que después del bosquejo que hicimos tenemos el siguiente resultado.

Teorema. Para cualesquiera $f, g \in L(u,v)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \delta \leq \pi$ y $0 < \alpha \leq 1$,

$$\theta_\alpha^1(\gamma f,\delta)_{u,v} \leq |\gamma| C_1 \theta_\alpha^1(f,\delta)_{u,v} + C_3|\gamma| \cdot ||f|_{u,v} \theta_\alpha^\infty(\omega,\delta),$$

$$\theta_\alpha^1(f+g,\delta)_{u,v} \leq \frac{1+C_1}{1+C_2}\left(\theta_\alpha^1(f,\delta)_{u,v} + \theta_\alpha^1(g,\delta)_{u,v}\right) + \frac{2C_3}{1+C_2}\left(||f|_{u,v} + ||g|_{u,v}\right)\theta_\alpha^\infty(\omega,\delta).$$

Demostración. Procedemos a probar sólamente la primera desigualdad ya que la otra desigualdad se sigue de manera análoga. De la propiedad de $S_t(\gamma f)$,

$$\begin{aligned}\theta_\alpha^1(\gamma f, \delta)_{u,v} &= \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{S_t(\gamma f)}{|t|^\alpha} \\ &\leq |\gamma| C_1 \sup_{0<|t|\leq\delta} \frac{S_t(f)}{|t|^\alpha} + C_3 ||f|_{u,v} \sup_{0<|t|\leq\delta} \sup_{x\in\mathbb{T}} \frac{|\omega(x+t)-\omega(x)|}{|t|^\alpha} \\ &= |\gamma| C_1 \theta_\alpha^1(f, \delta)_{u,v} + C_3 ||f|_{u,v} \theta_\alpha^\infty(f, \delta).\end{aligned}$$

□

Corolario. El funcional $\theta_\alpha(\cdot)_{u,v}$ que hemos definido por

$$\theta_\alpha^1(f)_{u,v} = \sup_{0<\delta\leq\pi} \theta_\alpha^1(f, \delta)_{u,v},$$

tiene las propiedades,

$$\theta_\alpha^1(\gamma f)_{u,v} \leq |\gamma| C_1 \theta_\alpha^1(f)_{u,v} + C_3 |\gamma| \cdot ||f||_{u,v} \theta_\alpha^\infty(\omega),$$

$$\theta_\alpha^1(f+g)_{u,v} \leq \frac{1+C_1}{1+C_2} \left(\theta_\alpha^1(f)_{u,v} + \theta_\alpha^1(g)_{u,v}\right) + \frac{2C_3}{1+C_2} \left(||f|_{u,v} + ||g|_{u,v}\right) \theta_\alpha^\infty(\omega).$$

Demostración. Se sigue del teorema previo al tomar el supremo sobre $0 < \delta \leq \pi$. □

El lector puede notar que el funcional $\theta_\alpha^1(\cdot)_{u,v}$ que hemos definido en esta sección es un caso particular del funcional que hemos denotado por $\Theta(\cdot)$, en la sección que hemos llamado Teoría general, la cual reaparece en este tercer capítulo. En resumen tenemos,

$$\theta_\alpha^1(\cdot)_{u,v} = \Theta(\cdot),$$

$$\theta_\alpha^1(\cdot, \delta)_{u,v} = \Theta(\cdot, \delta),$$

$$C = \frac{1+C_1}{1+C_2},$$

$$D = C_1,$$

$$C_\delta = \frac{2C_3}{1+C_2} \theta_\alpha^\infty(\omega, \delta),$$

$$D_\delta = C_3 \theta_\alpha^\infty(\omega, \delta),$$

$$C_0 = \frac{2C_3}{1+C_2} \theta_\alpha^\infty(\omega),$$

$$D_0 = C_3 \theta_\alpha^\infty(\omega).$$

De tal forma que en este contexto, los espacios de Lipschitz se definen de la forma:

Definición. Decimos que una función $f \in L(u, v)$ satisface una *condición de Lipschitz de orden* α *con respecto al peso* (u, v) si

$$\theta^1_\alpha(f)_{u,v} < \infty.$$

Al conjunto de tales funciones lo denotamos por $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$.

Este es un caso particular del espacio $\mathbb{F}$ mencionado en la primera sección de este capítulo. Por lo que se tiene el siguiente resultado.

Proposición. Para $0 < \alpha \leq 1$, el conjunto $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ es un espacio lineal cuasi-normado asimétricamente por la *cuasi-norma asimétrica de Lipschitz*

$$||f|_{\alpha,u,v} = ||f|_{u,v} + \theta^1_\alpha(f)_{u,v}.$$

Demostración. Véase Teorema (3.1.1). □

En este contexto, el espacio $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$, está formado por funciones f en $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ que satisfacen

$$\theta^1_\alpha(f, \delta)_{u,v} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \delta \longrightarrow 0.$$

Teorema 3.2.3. Los espacios lineales $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ (respectivamente $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$) y $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$ (respetivamente $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$) coinciden. Una sucesión (f_n) en $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ converge a una función f en la cuasi-norma asimétrica $|| \cdot |_{\alpha,u,v}$ si y sólo si (f_n) converge a f en la norma $|| \cdot ||_{\alpha,v}$.

Demostración. De (3.13), $L(u, v)$ y $L(v)$ son iguales como espacios lineales y la norma asimétrica $||\cdot|_{u,v}$ es equivalente a la norma $||\cdot||_v$. De (3.15), una función $f \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ si y sólo si $f^+ \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_u$ y $f^- \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$. Mientras que de (3.9) y (3.10), $f^+ \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_u$ (respectivamente $f^+ \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_u$) si y sólo si $f^+ \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$ (respectivamente $f \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$). Por otra parte del Corolario (3.2.1) , $f \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$ (respectivamente $f \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$) si y sólo si $f^+, f^- \in \mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$ (respectivamente $f^+, f^- \in \mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_v$). Estos argumentos muestran la primera parte del teorema. Para probar la otra parte del teorema, observamos que

$$||f_n - f|_{u,v} \longrightarrow 0 \text{ si y sólo si } ||f_n - f||_v \longrightarrow 0,$$

y de (3.16)

$$\theta^1_\alpha(f_n - f)_{u,v} \longrightarrow 0 \text{ si y sólo si } \theta^1_\alpha((f_n - f)^+)_u \longrightarrow 0 \text{ y } \theta^1_\alpha((f_n - f)^-)_v \longrightarrow 0$$

Posteriormente de (3.11) y (3.12)

$$\theta^1_\alpha((f_n - f)^+)_u \longrightarrow 0 \text{ si y sólo si } \theta^1_\alpha((f_n - f)^+)_v \longrightarrow 0,$$

y por tanto,

$$\theta^1_\alpha(f_n - f)_{u,v} \longrightarrow 0 \text{ si y sólo si } \theta^1_\alpha(f_n - f)_v \longrightarrow 0.$$

Finalmente concluimos,

$$||f_n - f|_{\alpha,u,v} \longrightarrow 0 \text{ si y sólo si } ||f_n - f||_{\alpha,v} \longrightarrow 0.$$

□

Teorema. Para todo $0 < \alpha \leq 1$, el espacio cuasi-normado asimétricamente $\mathrm{Lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$ con la cuasi-norma asimétrica,

$$|| \cdot |_{\alpha,u,v} = || \cdot |_{u,v} + \theta^1_\alpha(\cdot)_{u,v}$$

es bi-Banach.

Demostración. Se sigue del teorema previo y la completéz del espacio $L(v)$. □

En este contexto sabemos que para cada $0 < \delta \leq \pi$, $\theta^1_\alpha(\cdot,\delta)_{u,v}$ no es una semi-norma, sino que sólamente es un funcional, sin embargo nos permite formar espacios de Lipschitz, más aún, esta familia de funcionales es admisible con con respecto a la cuasi-métrica inducida por la norma asimétrica $|| \cdot |_{u,v}$, se puede probar que

$$\begin{aligned}
\theta^1_\alpha(f)_{u,v} &= \sup_{0<|t|\leq\pi} \frac{||\Delta_t(f)_{u,v}||_1}{|t|^\alpha} \\
&\leq \sup_{0<|t|\leq\delta\leq\pi} \frac{||\Delta_t(f)_{u.v}||_1}{|t|^\alpha} + \sup_{\delta<|t|\leq\pi} \frac{||\Delta_t(f)_{u,v}||_1}{|t|^\alpha} \\
&\leq \theta^1_\alpha(f,\delta)_{u,v} + \frac{2||f|_{u,v}}{\delta^\alpha}.
\end{aligned}$$

Mientras que la función $\psi : (0,\pi] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ está dada por

$$\psi(\delta,t) = \frac{2t}{\delta^\alpha}.$$

Luego si el espacio $\left(\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}, || \cdot |_{u,v}\right)$ es definido de $(L(u,v), || \cdot |_{u,v})$ a partir de la familia de funcionales $\theta^1_\alpha(\cdot,\delta)_{u,v}$, $0 < \delta \leq \pi$ y (f_n) es una sucesión 0-equicontinua que converge a una función f en $L(u,v)$ en la norma $|| \cdot |_{u,v}$, entonces (f_n) converge a f en $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$. Más aún,

$$||f_n - f|_{\alpha,u,v} \leq \left(1 + \frac{2}{\delta^\alpha}\right) ||f_n - f|_{u,v} + \frac{(1+C_1)^2}{1+C_2}\theta^1_\alpha((f_n),\delta)_{u,v} + \frac{M(1+5C_1)C_3}{1+C_2}\theta^\infty_\alpha(\omega,\delta).$$

En particular si usamos el siguiente resultado, tenemos una aproximación de funciones en $\mathrm{lip}^1_\alpha(\mathbb{T})_{u,v}$. En lo que sigue asumimos que se cumple la condición (3.8).

Teorema. Si $0 < \alpha < 1$, $v \in \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$, (U_n) una unidad aproximativa en $L^1_{2\pi}$ y $f \in \mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_{u,v}$, entonces

$$||(f^+ * U_n)_u - (f^- * U_n)_v - (f^+u - f^-v)|_{\alpha,u,v} \longrightarrow 0.$$

Demostración. Por la condición (3.8), $\omega \in \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$, ahora usando que $v \in \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ podemos concluir que $u = \omega v \in \mathrm{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ (para esta afirmación vea [1, pág 15]). Por otro lado $f_{u,v} \in \mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_{u,v}$ si y sólo si $f^+ \in \mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_u$ y $f^- \in \mathrm{lip}_\alpha^1(\mathbb{T})_v$, luego por el Teorema (2.4),

$$||(f^+ * U_n)_u - f^+u||_{\alpha,u} \longrightarrow 0$$

y

$$||(f^+ * U_n)_v - f^+v||_{\alpha,v} \longrightarrow 0$$

Ahora probaremos que

$$||(f^+ * U_n)_u - (f^- * U_n)_v - (f^+u - f^-v)||_{\alpha,v} \longrightarrow 0.$$

Para esto, note que

$$\begin{aligned} ||(f^+ * U_n)_u - (f^- * U_n)_v - (f^+u - f^-v)||_{\alpha,v} = \\ ||(f^+u) * U_n - f^+u - ((f^-v) * U_n - f^-v)||_{\alpha,v} \leq \\ ||(f^+u) * U_n - f^+u||_{\alpha,v} + ||(f^-v) * U_n - f^-v||_{\alpha,v}, \end{aligned}$$

pero éste último término tiende a cero para n suficientemente grande. Luego por el Teorema (3.2.3), concluimos que

$$||(f^+ * U_n)_u - (f^- * U_n)_v - (f^+u - f^-v)|_{\alpha,u,v} \longrightarrow 0$$

que era lo que queríamos probar. □

Conclusiones

La aproximación de funciones en espacios de Lipschitz de funciones continuas y funciones integrables ha sido generalizado a espacios de funciones con peso simétrico y más aún, a espacios de funciones integrables con peso sensible al signo.

Resaltamos la importancia del Teorema Tauberiano en la teoría de los espacios de Lipschitz del tipo de funciones mencionadas, ya que éste permite contruir sucesiones de funciones polinomiales que convergen a una función dada en $\mathrm{Lip}_{\alpha}^{(\cdot)}(\mathbb{T})_{(\cdot)}$. Tales sucesiones son construidas por medio de una unidad aproximativa o kernel, como el kernel de Féjer o el kernel de Jackson.

La teoría general de los espacios de Lipschitz en espacios lineales normados ha sido adaptada y generalizada para espacios de Lipschitz en espacios lineales normados asimétricamente, de tal manera que la familia de funciones con los que se contruyen los espacios de Lipschitz en los espacios normados asimétricamente, se convierten en cuasinormas para valores apropiados de los componentes de las familias de las constantes (C_δ) y (D_δ). En el caso particular de las funciones integrables, los valores apropiados de estas constantes son aquellos en que el peso sensible al signo es $(u, v) = (1, 1)$.

Una de las formas posibles de proseguir este trabajo es eliminar la restricción de $u = \omega v$ en el peso sensible al signo y trabajar con la aproximación de funciones en el cono $L(u, v)$ resultante.

Bibliografía

[1] Nik W. *Lipschitz Algebras.* World Scientific, 1999.

[2] Kalandiya A. I. A direct method of solving the wind theory equation and its application in elastic theory. *Math. Sbornik*, **42**:249–272, 1957.

[3] Wen Li, Du Zou, Deyi Li, and Zhaoyuan Zhang. Best approximation in asymmetric normed linear spaces. *International Conference on Information Science and Technology (Nanjing China)*, pages 398–401, 2011.

[4] Ronald A. Devore and George G. Lorentz. *Constructive approximation.* Springer Verlag, 1993.

[5] David G. Morsund. Chebyshev approximation using a generalized weight function. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **3**(3):435–450.

[6] Chalmers B. L. and Taylor G. D. Uniform approximation with constraints. *Jber. d. Dt. Math.-Verein*, **81**:49–86, 1979.

[7] Krein M. G. and Nudelman A. A. *The Markov moment problem and extremals problems. Ideas and problems of P. L. Chevishev and A. A. Markov and their furhter development.* Nauka, Moskow, 1973.

[8] Babenko V. F. Non symmetric approximation in spaces of summable functions. *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal*, pages 407–416, 1982.

[9] Dolzhenko E. P. and Sevast'yanov E. A. Sign-sensitive approximation. *Journal of Mathematical Sciences*, pages 3025–3257, 1998.

[10] Felix H. *Set Theory.* AMS Chelsea Publishing, 2005.

[11] Albert Künzi H.-P. Nonsymmetric distances and their associated topologies: About the origin of basic ideas in the area of asymmetric topology. *in C.E Aull and R. Lowen, Handbook of the History of General Topology, Dordrecht, Kluwer*, **3**:853–968, 2001.

[12] Simonov B. V. On the element of best nonsymmetric approximation in spaces with nonsymmetric quasi-norms. *Mathematical notes*, **74**(6):902–912, 2003.

[13] Romaguera S. Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric spaces. *Journal of approximation theory*, pages 292–301, 2000.

[14] Alegre C. Continuous operators on asymmetric normed spaces. *Acta Math. Hungar*, **122**(4):357–372, 2009.

[15] Alegre C., Ferrando I. L., García-Raffi L. M., and Enrique Alfonso S. P. Compactness in asymmetric normed spaces. *Topology Appl.*, **155**:527–539, 2008.

[16] Mayor G. and Valero O. Aggregation of asymmetric distances in computer science. *Information Sciences*, **180**(6):803–812, 2010.

[17] Stefan C. Functional analysis in asimetric normed spaces. *arXiv:1006.1175v1*, pages 1–5,11, 2010.

[18] Kelly J. C. Bitopological spaces. *Proc. London Math. Soc.*, **13**:71–89, 1963.

[19] David G. Luenberger. *Optimization by vector space methods.* JohnWiley & Sons, Inc., 1969.

[20] Yitzhak K. *An introduction to harmonic analysis.* John Wiley & Sons,Inc, 1968.

[21] Miguel Antonio J. P. *Medida, integración y funcionales.* Pueblo y Educación, 1989.

[22] Miguel Antonio J. P. A tauberian theorem for a class of function spaces. *Monografias de la Academia de Ciencias de Zaragoza, Nr.*, **20**:77–85, 2002.

[23] Hardy G. H. and Littlehood J. E. Some properties of fractional integrals. *I, Math Zeitschrift*, **27**:565–606.

[24] George Angelos A. and Gheorghe Sorin G. *Approximation theory, Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation.* Springer Science+Business Media, LLC, 2000.

[25] Tom M. Apostol. *Análisis Matemático.* Reverté, 1976.

[26] Miguel Antonio J. P. and Jośe Margarito H. M. Asymmetric Hölder spaces of sign sensitive weighted integrable functions. *Communications in mathematics and applications*, pages 39–50, 2011.

[27] Bustamante J. and Miguel Antonio J. P. Trends in Hölder approximation. *Published by Marc Lassonde (Editor): Approximation, Optimization and Mathematical Economics; Physica-Verlag*, pages 81–86, 2001.