UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

CONTINUIDAD DEL ESPECTRO USANDO ν-CONVERGENCIA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

ISRAEL MORALES JIMÉNEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. SALVADOR SÁNCHEZ PERALES

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. JESÚS FERNANDO TENORIO ARVIDE.

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, DICIEMBRE DEL 2013.

Dedicado a las cuatro
mujeres de mi vida:
Elvira, Mónica, Jocabeth,
Dolores.

Agradecimientos

Como es de esperarse, un trabajo de tesis no es de solo uno. Le doy las GRACIAS a:

DIOS, por darme la fuerza para sobrepasar dificultades y la oportunidad de tener a seres maravillosos en mi vida.

A mi madre Elvira María Jiménez, ella que ha confiado en mí y ha sido bondadosa para con sus hijos. A mi hermana mayor Mónica Morales Jiménez, por ser mi alma gemela. A mi hermana menor Jocabeth Juárez Jiménez, aquella que me arranca sonrisas y a la vez reflexiones de improviso. A mi padrastro Pedro Juárez García, por ser ejemplo para mí de persona respetuosa con los demás. A mi primo Salvador Jiménez Hernández y a mi abuela Dolores López López por su incondicional apoyo.

Al Dr. Salvador Sánchez Perales, director de esta tesis, por la oportunidad de trabajar a su lado y confiar en mí, además por su paciencia en la corrección del escrito así como la observación de mis malos hábitos matemáticos de los cuales no me percataba. Prometo mejorar en ellos.

Al Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide, codirector de esta tesis, por sus observaciones hechas al manuscrito.

A mis sinodales Dr. Cuauhtemoc Castañeda Roldan, M.C. Adolfo Maceda Méndez y Dr. Franco Barragan Mendoza por sus correcciones y atinados comentarios y observaciones que hicieron que mejorara en gran madida este trabajo.

A la Dra. Silvia Reyes Mora, por su invaluable apoyo para la realización de mi estancia en el CIMAT en el verano del 2012 y por muchas otras cosas más.

A la M.C. Verónica Borja Macías, por su apoyo y atención en momentos que lo necesité. Así como de sus dinámicas para mejorar mi calidad expositiva.

A todos mis profesores de la licenciatura, por ser parte esencial en mi formación matemática.

A mis amigos y compañeros, parte de mí se los debo a ellos.

Por último, quiero agradecer a PROMEP por el financiamiento económico para la realización de esta tesis por medio del cuerpo académico de Modelación Matemática y Topología UTMIX-CA-33.

Prefacio

Introducción

El análisis funcional es una rama del análisis matemático que permite abordar problemas de esta área de forma más general por medio del estudio de espacios de funciones y transformaciones lineales. Una faceta importante del análisis funcional es la teoría espectral de operadores lineales, como campo de investigación dentro de la teoría de operadores.

El análisis espectral es el término que se utiliza para la teoría que generaliza el estudio de valores y vectores propios de una matriz cuadrada a transformaciones lineales actuando sobre espacios abstractos. Formalmente, dada una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ con entradas en los números complejos, se trata de hallar todos los valores complejos λ para los cuales

$$\lambda I - A \quad \text{no es invertible,} \tag{1}$$

donde I denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$. En este caso, se dice que λ es un valor propio de A. Resolver este problema es relativamente sencillo, pues, para conocer los valores λ que satisfacen (1), basta con tomar el determinante de (1), igualar a cero y resolver la ecuación obtenida. Se sabe que existe un isomorfismo entre el espacio de matrices de tamaño $n \times n$ y el espacio de tranformaciones lineales de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Es decir, toda transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ tiene una representación matricial de tamaño $n \times n$ con entradas en los complejos. Motivado por esto, dada una tranformación lineal T de un espacio normado X en sí mismo, se busca hallar los valores complejos λ para los cuales

$$\lambda I - T \quad \text{no es invertible,} \tag{2}$$

en el espacio de las tranformaciones lineales continuas, donde $I : X \to X$, representa la transformación lineal identidad. Resolver este problema es una tarea difícil ya que no se tiene un criterio único para su resolución. La dificultad depende en gran medida de la naturaleza de T y X. El hecho que el conjunto de las transformaciones lineales continuas definidas sobre un espacio de Banach X en sí mismo sea una álgebra de Banach unitaria, el problema anterior se puede formular sobre álgebras de Banach unitarias, esto es: dada una álgebra de Banach unitaria $\mathcal{A}$ con unidad e, la teoría espectral investiga las propiedades de aquellos valores complejos λ para los cuales $\lambda e - a$ no es invertible en $\mathcal{A}$, donde $a \in \mathcal{A}$.

Ciertamente la formulación del problema en estos términos le tomó tiempo a los matemáticos, pues antes tuvo que haber un desarrollo importante en áreas de la matemática como lo son: álgebra lineal, análisis matemático y topología. Así que sus inicios de manera formal se encuentra a inicios del siglo XX, con los trabajos de matemáticos como Ivar Fredholm, David Hilbert, Henri Lebesgue, Maurice René Fréchet, Erhard Schmidt, Hermann Weyl y Frigyes Riesz, por mencionar algunos.

Las aplicaciones prácticas de la teoría espectral sobre álgebras de Banach particulares permite resolver sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales y problemas con valores en la frontera. Esto permite que la teoría espectral sea de gran importancia en áreas como ecuaciones diferenciales, sistema dinámicos, campos magnéticos. Más aún, el desarrollo de la teoría espectral es fundamental en la mecánica cuántica, pues, la teoría de operadores y la teoría espectral juegan un rol esencial en la formulación matemática de dicha área.

Objetivo

Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Banach unitaria con unidad e. Dado $a \in \mathcal{A}$, el espectro de a, denotado por $\sigma(a)$, es el conjunto de valores complejos λ tales que $\lambda e - a$ no es invertible en $\mathcal{A}$. Queda así definida la aplicación σ que a cada $a \in \mathcal{A}$ le asigna el conjunto $\sigma(a)$. Ya que a menudo no es posible calcular el espectro, se busca aproximarlo con la métrica de Hausdorff, ya que el espectro es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Es en este punto donde la continuidad de σ toma un rol esencial.

Existen varios resultados en donde se establece bajo qué condiciones $\sigma(a_n) \to \sigma(a)$ (con la métrica de Hausdorff) cuando $\{a_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ que converge a $a \in \mathcal{A}$ bajo la norma en $\mathcal{A}$. Por ejemplo J. D. Newburg en [26] lo hace cuando $\mathcal{A}$ es una álgebra de Banach conmutativa, J. B. Conwall y B. B. Morrel en [9, 10] caracterizan la continuidad de σ cuando $\mathcal{A}$ es la álgebra de los operadores lineales acotados definidos sobre un espacio de Hilbert en sí mismo y S. Sánchez-Perales en [31] establece condiciones suficientes para la continuidad de σ en el caso del álgebra de los operadores acotados definidos sobre espacios de Banach en sí mismo. Otros trabajos que podemos citar al respecto son [5] y [13].

Recientemente, en el libro *Spectral Computations of Bounded Operators*, M. Ahues *et al.* han definido una nueva convergencia más general que la convergencia en norma, llamada $\nu-$convergencia, la cual está definida como: la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathcal{A}$ converge en $\nu-$convergencia a $a \in \mathcal{A}$ si

$$\{\|a_n\|\} \text{ está acotada}, \quad \|(a_n - a)a_n\| \to 0 \quad \text{y} \quad \|(a_n - a)a_n\| \to 0.$$

En este trabajo de tesis se estudia la aproximación del espectro ahora usando $\nu-$convergencia, siguiendo las líneas de investigación de [9] y [31].

Resultados

Esta tesis está distribuida en cuatro capítulos, una conclusión y un apéndice.

En el Capítulo 1, se presentan resultados preliminares sobre álgebras de Banach [30], el espacio de los operadores lineales acotados [19], operadores compactos [19], [36], el álgebra de Calkin [30] y la teoría de funciones con valores en espacios normados, que se encuentran en libros clásicos como lo son [15], [17], [8] y [35]. Los conceptos de análisis matemático y topología que aparacen en el escrito fueron tomados de los libros [2], [25], [18] y [11].

En el segundo capítulo se hace un estudio de las propiedades más importantes del espectro sobre álgebras de Banach unitarias. También, en la segunda sección de este mismo capítulo se utiliza como herramienta el cálculo funcional de funciones complejas de valores en espacios normados para hacer el estudio del espectro más detallado. La bibliografía utilizada fue: [36], [15] y [29].

En el tercer capítulo se aborda la teoría de Fredholm sobre el álgebra de los operadores acotados, mostrando la mayoria de los resultados involucrados en este tema. Se citan los siguientes libros para el estudio de esta teoría: [36], [30], [24] y [34].

Finalmente en el cuarto capítulo, se plantea de forma rigurosa el problema y se estudia la aproximación del espectro usando $\nu-$convergencia, utilizando la teoría desarrollada en los capítulos anteriores. En la primera sección se presenta la métrica de Hausdorff y se caracteriza la convergencia con esta métrica usando el límite inferior y el límite superior de una sucesión de subconjuntos de un espacio métrico; se cita [16] para su estudio. En la segunda sección se generaliza el concepto de $\nu-$convergencia para álgebras de Banach unitarias y se hacen notar las ventajas y desventajas de trabajar con este criterio de aproximación en el caso especial de la álgebra de los operadores lineales acotados. En la tercera sección se generalizan resultados de [23, Sección 2] a álgebras de Banach unitarias obteniendo como resultado principal la aproximación del espectro usando $\nu-$convergencia sobre los elementos de una álgebra de Banach unitaria que tienen espectros totalmente disconexo. Cabe mencionar que la originalidad de los resultados obtenidos en estas tres secciones hace factible la redacción de un capítulo de un libro para su posible publicación.

En la tercera sección, se sigue la línea de investigación de [9] y [31] y se obtienen condiciones suficientes para que un operador Fredholm sea un punto de continuidad del espectro usando $\nu-$convergencia. La mayoría de los resultados de esta sección son nuevos, por ello se está redactando un artículo para su posible publicación en una revista internacional.

El Apéndice contiene resultados concernientes con álgebra lineal, componentes conexas de un espacio topológico, así como teoremas clásicos de análisis funcional.

Notación

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
$\emptyset$	conjunto vacío
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales; $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$A \subseteq B$	A está contenido en B; para todo $a \in A$, $a \in B$
$A \subsetneq B$	A está propiamente contenido en B; $A \subseteq B$ con $A \neq B$
$A \nsubseteq B$	A no está contenido en B; existe $a \in A$ con $a \notin B$
$\text{iso}(U)$	conjunto de puntos aislados del conjunto U
$\text{acc}(U)$	conjunto de puntos de acumulación del conjunto U
$\text{int}(U)$	conjunto de puntos interiores del conjunto U
$\overline{U}$	conjunto de puntos adherentes del conjunto U
∂U	frontera del conjunto U; $\partial U = \overline{U} \backslash int(U)$
$X \backslash U$	complemento de $U \subseteq X$ en X
$\{x_n\}$	sucesión de elementos en X, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, donde X es un espacio topológico
$B_X(x, \epsilon)$	bola abierta en X centrada en $x \in X$ y radio $\epsilon > 0$; $B_X(x, \epsilon) = \{y \in X : \|y - x\| < \epsilon\}$

$B_X[x,\epsilon]$	bola cerrada en X centrada en $x \in X$ y radio $\epsilon > 0$; $B_X[x,\epsilon] = \{y \in X : \|y - x\| \leq \epsilon\}$
$\dim(X)$	dimensión de X
$\mathcal{A}$	álgebra de Banach unitaria sobre $\mathbb{C}$
e	unidad en $\mathcal{A}$; $ea = a = ae$, para todo $a \in \mathcal{A}$
$\mathcal{G}_l(\mathcal{A})$	conjunto de elementos invertibles por la izquierda en $\mathcal{A}$; $\mathcal{G}_l(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} :$ existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $ba = e\}$
$\mathcal{G}_r(\mathcal{A})$	conjunto de elementos invertibles por la derecha en $\mathcal{A}$; $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} :$ existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab = e\}$
$\mathcal{G}(\mathcal{A})$	conjunto de elementos invertibles en $\mathcal{A}$; $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \mathcal{G}_l \cap \mathcal{G}_r(\mathcal{A})$
$\mathcal{L}(X,Y)$	espacio de transformaciones lineales de X en Y; $\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \| T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y),$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y todo $x, y \in X\}$
$\mathcal{L}(X)$	espacio de tranformaciones lineales de X en X; $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$
$\mathcal{B}(X,Y)$	espacio de los operadores lineales acotados de X en Y; $\mathcal{B}(X,Y) = \{L \in \mathcal{L}(X,Y) :$ existe $\beta > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq \beta\|x\|,$ para todo $x \in X\}$
$\mathcal{B}(X)$	espacio de operadores lineales acotados de X en X; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,Y)$
$K(X,Y)$	espacio de transformaciones lineales compactas de X en Y; $K(X,Y) = \{T \in \mathcal{B}(X,Y) :$ $\overline{T(U)}$ compacto en $Y,$ para todo $U \subseteq X$ acotado$\}$
$K(X)$	espacio de operadores lineales compactos; $K(X) = K(X,X)$
$\mathcal{N}(T)$	núcleo de $T \in \mathcal{L}(X,Y)$; $\mathcal{N}(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$
$\mathcal{R}(T)$	rango de $T \in \mathcal{L}(X,Y)$; $\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : T(x) = y,$ para algún $x \in X\}$
$T\|_W$	restricción de $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ al subespacio W de X; $T\|_W : W \to Y$ dado por $T\|_W(w) = T(w)$, para todo $w \in W$
$\mathcal{B}_0(X,Y)$	espacio de tranformaciones lineales de X en Y con rango de dimensión finita; $\mathcal{B}_0(X,Y) = \{T \in \mathcal{B}(X,Y) : \dim(\mathcal{R}(T)) < \infty\}$
X^*	espacio dual de X; $X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$

X^{**}	doble dual de X; $X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \mathbb{C})$
T^*	transformacion adjunta de $T \in \mathcal{B}(X,Y)$; $T^* : Y^* \to X^*$ definida como, para cada $y^* \in Y^*$, $T^*(y^*) = x^*$ donde $x^*(x) = y^*(T(x))$, para todo $x \in X$
$x+I$	clase de $x \in X$; $x + I = \{x + i : i \in I\}$
X/I	espacio cociente de X módulo I; $X/I = \{x + I : x \in X\}$
π	homomorfismo natural entre X y X/I; $\pi : X \to X/I$ dado por $\pi(x) = x + I$, para todo $x \in X$
$C(X)$	álgebra de Calkin; $C(X) = \mathcal{B}(X)/K(X)$
Γ	curva de Jordan en $\mathbb{C}$
$\mathrm{int}(\Gamma)$	interior de la curva de Jordan Γ
$\mathrm{ext}(\Gamma)$	interior de la curva de Jordan Γ
$\sigma(a)$	espectro de $a \in \mathcal{A}$; $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \notin \mathcal{G}(\mathcal{A})\}$
$\rho(a)$	resolvente de $a \in \mathcal{A}$; $\rho(a) = \mathbb{C} \backslash \sigma(a)$
$r_a(\lambda)$	función resolvente de $a \in \mathcal{A}$ evaluado en $\lambda \in \rho(a)$; $r_a : \rho(a) \to \mathcal{A}$ definida por $r_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1}$, para todo $\lambda \in \rho(a)$
$r(a)$	radio espectral de $a \in \mathcal{A}$; $r(a) = \sup\{\|\lambda\| : \lambda \in \sigma(a)\}$
$\mathcal{C}(a,\Lambda)$	conjunto de contornos de Cauchy $C \subseteq \rho(a)$ tal que $\Lambda \subseteq int(C)$ y $\sigma(a)\backslash\Lambda \subseteq ext(C)$, donde Λ es conjunto espectral para $a \in \mathcal{A}$
$p(a,\Lambda)$	proyección espectral asociada a $a \in \mathcal{A}$ al conjunto espectral Λ para a; $p(a,\Lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C r_a(\lambda) d\lambda$, donde $C \in \mathcal{C}(a,\Lambda)$
$\alpha(T)$	dimensión de $\mathcal{N}(T)$ con $T \in \mathcal{B}(X,Y)$; $\alpha(T) = \dim(\mathcal{N}(T))$
$\beta(T)$	dimensión de $X/\mathcal{R}(T)$ con $T \in \mathcal{B}(X,Y)$; $\beta(T) = \dim \mathcal{R}(T)$
$\Phi_-(X)$	conjunto de operadores semi-Fredholm inferior; $\Phi_-(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \beta(T) < \infty\}$
$\Phi_+(X)$	conjunto de operadores semi-Fredholm superior; $\Phi_+(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \alpha(T) < \infty$ y $\mathcal{R}(T)$ es cerrado$\}$

$\Phi(X)$	conjunto de operadores Fredholm; $\Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$
$\Phi_\pm(X)$	conjunto de operadores semi-Fredholm; $\Phi_\pm(X) = \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$
$i(T)$	índice de $T \in \Phi_\pm(X)$; $i(T) = \alpha(T) - \beta(T)$, para todo $T \in \Phi_\pm(X)$
$\mathcal{N}^\infty(T)$	hiper-núcleo de $T \in \mathcal{B}(X)$; $\mathcal{N}^\infty(T) = \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{N}(T^n)$
$\mathcal{R}^\infty(T)$	hiper-rango de $T \in \mathcal{B}(X)$; $\mathcal{R}^\infty(T) = \bigcap_{n=0}^\infty \mathcal{R}(T^n)$
$p(T)$	ascenso de $T \in \mathcal{B}(X)$; $p(T) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{n+1})\}$
$q(T)$	descenso de $T \in \mathcal{B}(X)$; $q(T) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathcal{R}(T^n) = \mathcal{R}(T^{n+1})\}$
$\sigma_p(T)$	espectro punto de $T \in \mathcal{B}(X)$; $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda - T) \neq \{0\}\}$
$\sigma_{ap}(T)$	espectro punto aproximado de $T \in \mathcal{B}(X)$; $\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T$ no está acotado por abajo$\}$
$\sigma_e(T)$	espectro Fredholm de $T \in \mathcal{B}(X)$; $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi(X)\}$
$\sigma_{s-F}(T)$	espectro semi-Fredholm de $T \in \mathcal{B}(X)$; $\sigma_{s-F}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi_\pm(T)\}$
$\sigma_{le}(T)$	espectro esencial izquierdo de $T \in \mathcal{B}(X)$; $\sigma_{le}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi(\lambda I - T) \notin \mathcal{G}_l(C(X))\}$
$\sigma_{re}(T)$	espectro esencial derecho de $T \in \mathcal{B}(X)$; $\sigma_{re}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi(\lambda I - T) \notin \mathcal{G}_r(C(X))\}$
$\text{dist}(x, E)$	distancia de $x \in X$ a $E \subseteq X$; $\text{dist}(x, E) = \text{ínf}\{d(x, e) : e \in E\}$
$(E)_\epsilon$	nube de $E \subseteq X$ con radio $\epsilon > 0$; $(E)_\epsilon = \{x \in X : \text{dist}(x, E) < \epsilon\}$
$\hat{S}(X)$	colección de subconjuntos de X cerrados, acotados y no vacíos
$S(X)$	colección de subconjuntos de X compactos y no vacíos
$h(E, F)$	distancia de E a F con la métrica de Hausdorff; $h(E, F) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : E \subseteq (F)_\epsilon$ y $F \subseteq (E)_\epsilon\}$, para todo $E, F \in \hat{S}(X)$
$\text{lím inf } E_n$	límite inferior de la sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de X; $\text{lím inf } E_n = \{x \in X :$ para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap U_n \neq \emptyset,$ para cualquier $n > n_0\}$
$\text{lím sup } E_n$	límite superior de la sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de X; $\text{lím sup } E_n = \{x \in X :$ para cada $\epsilon > 0$ existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $B_\epsilon(x) \cap E_n \neq \emptyset,$ para todo $n \in J\}$

$a_n \xrightarrow{n} a$	convergencia en norma de la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathcal{A}$ a $a \in \mathcal{A}$; $\|a_n - a\| \to 0$ cuando $n \to \infty$
$a_n \xrightarrow{\nu} a$	la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathcal{A}$ converge en $\nu-$convergencia a $a \in \mathcal{A}$ si $\{\|a_n\|\}$ está acotada, $\|(a_n - a)a_n\| \to 0$ y $\|(a_n - a)a_n\| \to 0$
l^p	espacio de sucesiones que son $p \geq 1$ sumables; $l^p = \{\{\xi_n\} \subseteq \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^p < \infty\}$
$L^p([a,b])$	espacio de funciones de valores complejos definidas sobre $[a,b]$ que son $p \geq 1$ Lebesgue integrables sobre $[a,b]$; $L^p = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \| \|f(t)\|^p$ es Lebesgue integrable sobre $[a,b]\}$
$\delta_{i,k}$	función delta de Kronecker; $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ y $\delta_{i,k} = 0$ si $i \neq k$.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Álgebras de Banach

El concepto de álgebra de Banach es muy importante en matemáticas, pues pone a trabajar la topología y el álgebra juntas en un mismo conjunto. Este hecho permite considerar el análisis de series infinitas. Solo en este contexto se puede exhibir la intima relación entre propiedades topológicas y algebraicas del espacio. El estudio de estas álgebras es fundamental en física teórica ([12]). Sin embargo, ya que estudiar álgebras no es el tema principal de esta tesis, se limitará a enunciar resultados que serán de utilidad para nuestro trabajo.

Definición 1.1.1. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio lineal sobre el campo de los números complejos ([19, Capítulo 2]). Entonces $\mathcal{A}$ es una álgebra si existe una operación $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ llamado producto tal que*

i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

iii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,

iv) $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$,

para cada $a, b, c \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Por simplicidad ab denota al elemento $a \cdot b$ en $\mathcal{A}$. También, o representa al elemento neutro en $\mathcal{A}$, es decir, $o + a = a + o = a$, para cada $a \in \mathcal{A}$.

Definición 1.1.2. *Una norma $\| \cdot \|$ ([19, Capítulo 4]) sobre una álgebra $\mathcal{A}$ es submultiplicativa si*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \tag{1.1}$$

para cada $a, b \in \mathcal{A}$. En este caso se dice que $\mathcal{A}$ es una álgebra normada. Más aún, si existe $e \in \mathcal{A}$ tal que y $ae = a = ea$, para cada $a \in \mathcal{A}$ y $\|e\| = 1$ entonces $\mathcal{A}$ es una álgebra normada unitaria[1]*, en tal caso e es la unidad en $\mathcal{A}$.*

[1]Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Banach sin unidad. Se definen sobre el conjunto $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times \mathbb{K}$ las operaciones $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$, $\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$, $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. También se define la norma en $\mathcal{A}'$ como $\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$ para cada $a \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se tiene que, $\mathcal{A}'$ es una álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$ con unidad $e' = (o, 1)$. Con esto se concluye que dada una álgebra de Banach sin unidad se le puede adjuntar una que si tenga unidad

Una álgebra normada completa ([19, Sección 3.7]) se llama álgebra de Banach y una álgebra normada unitaria completa álgebra de Banach unitaria.

Note que en una álgebra normada unitaria, la existencia de la unidad es única. También los axiomas de norma garantizan la continuidad de las operaciones suma y producto por escalar en $\mathcal{A}$ y la condición en (1.1) la continuidad de la operación producto.

Ejemplo 1.1.3. *1. El campo ([19, Sección 2.1]) de los números reales o complejos con la norma usual son álgebras de Banach unitarias.*

2. [22, Ejemplo 3, pág. 35] Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ compacto y no vacío. Denote con $C(A, \mathbb{C})$ el espacio de las funciones continuas definidas sobre A de valores complejos. Entonces $C(A, \mathbb{C})$ es una álgebra de Banach unitaria donde la norma en $C(A, \mathbb{C})$ está dada por $\|f\| = \text{máx}\{|f(a)| : a \in A\}$ para todo $f \in C(A, \mathbb{C})$, el producto está determinado por la multiplicación usual de funciones y la unidad es la función constante uno sobre A.

Definición 1.1.4. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra. Un subespacio lineal ([19, Sección 2.2]) $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ es un ideal bilateral de $\mathcal{A}$, si para todo $i \in \mathcal{I}$ y para todo $a \in \mathcal{A}$ se verifica que $ia \in \mathcal{I}$ y $ai \in \mathcal{I}$.*

Ejemplo 1.1.5. *Considere la álgebra de Banach del Ejemplo 1.1.3 2. Sea $a_0 \in A$. Entonces el conjunto $\mathcal{I}(a_0) = \{f \in C(A, \mathbb{C}) : f(a_0) = 0\}$ es un ideal bilateral de $C(A, \mathbb{C})$. Más generalmente, sea $A_0 \subsetneq A$, entonces el conjunto $\mathcal{I}(A_0) = \{f \in C(A) : f(a_0) = 0 \, \text{para todo} \; a_0 \in A_0\}$ es un ideal bilateral de $C(A, \mathbb{C})$.*

En base a la Definición 1.1.1, todo ideal bilateral es una subálgebra. Posteriormente se mostrará un ejemplo particular de ideal bilateral de una álgebra.

Definición 1.1.6. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Banach unitaria. Se dice que $a \in \mathcal{A}$ tiene inversa por la izquierda (derecha) si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $ba = e$ ($ab = e$ respectivamente). En tal caso se dice que a es invertible por la izquierda (derecha) en $\mathcal{A}$ y que b es la inversa por la izquierda (derecha, respectivamente) de a. También, $a \in \mathcal{A}$ es invertible en $\mathcal{A}$ si tiene inversa por la izquierda y por la derecha en $\mathcal{A}$.*

Suponga que $a \in \mathcal{A}$ es invertible en $\mathcal{A}$. Entonces existen $b, c \in \mathcal{A}$ tales que $ba = e = ac$. Luego $b = b(ac) = (ba)c = c$. Por lo tanto, si $a \in \mathcal{A}$ es invertible en $\mathcal{A}$, existe un único $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab = ba = e$. En este caso decimos que b es la inversa de a, la cual se denota con a^{-1}.

Se definen $\mathcal{G}_l(\mathcal{A})$ como el conjunto de todos los elementos en $\mathcal{A}$ que son invertibles por la izquierda en $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}_r(\mathcal{A})$ como el conjunto de todos los elementos en $\mathcal{A}$ que son invertible por la derecha en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ el conjunto de los elementos en $\mathcal{A}$ que son invertibles en $\mathcal{A}$. Observe que

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \mathcal{G}_l(\mathcal{A}) \bigcap \mathcal{G}_r(\mathcal{A}).$$

En lo que resta de esta sección $\mathcal{A}$ denotará una álgebra de Banach unitaria. La topología ([25]) en $\mathcal{A}$ es la inducida por la norma en $\mathcal{A}$.

Un hecho interesante es que los conjuntos $\mathcal{G}_l(\mathcal{A})$, $\mathcal{G}_r(\mathcal{A})$ y $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ son abiertos en $\mathcal{A}$. Para probar esto, defina la operación *diamante* $\diamond$ en $\mathcal{A}$ por $a \diamond b = a + b - ab$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$. Esta operación es asociativa y cumple que $a \diamond o = o \diamond a = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Ahora, considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} Q_l &= \{a \in \mathcal{A} : b \diamond a = o, \text{ para algún } b \in \mathcal{A}\}, \\ Q_r &= \{a \in \mathcal{A} : a \diamond b = o, \text{ para algún } b \in \mathcal{A}\}, \end{aligned}$$

y ponga $Q = Q_l \bigcap Q_r$.

Sea $a \in Q$. Entonces existen $b_1, b_2 \in \mathcal{A}$ tales que $b_1 \diamond a = o = a \diamond b_2$. Luego, $b_1 = b_1 \diamond o = b_1 \diamond (a \diamond b_2) = (b_1 \diamond a) \diamond b_2 = o \diamond b_2 = b_2$. Por lo tanto, si $a \in Q$, entonces existe un único $a' \in \mathcal{A}$ tal que $a \diamond a' = o = a' \diamond a$. Con estas observaciones bastan para probar la siguiente proposición.

Proposición 1.1.7. *Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$. Entonces $a \in Q$ y $e - a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Además*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \quad \textit{donde } a^0 = e.$$

También, Q_l, Q_r y Q son abiertos en $\mathcal{A}$.

Demostración: Dado que la norma en $\mathcal{A}$ es submultiplicativa (1.1), la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ es absolutamente convergente. Como $\mathcal{A}$ es un espacio completo, $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge en $\mathcal{A}$. Así, sea $b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Luego

$$(e-a)b = (e-a) \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a^n = e - \lim_{m\to\infty} a^{m+1}.$$

Puesto que $\|a^{m+1}\| \leq \|a\|^{m+1}$ para todo $m \geq 0$, $\lim_{m\to\infty} a^{m+1} = 0$. Así, $(e-a)b = e$. De forma similar, se tiene que $b(e-a) = e$. Por lo tanto, $e - a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ y $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Haciendo $b_1 = e - b$ se tiene que: $a \diamond b_1 = e - (e-a)b = o$ y $b_1 \diamond a = e - b(e-a) = o$. Por lo tanto, $a \in Q$.

Sea $a \in Q_r$. Entonces existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a \diamond b = o$. Sea $\epsilon = \frac{1}{\|e\|+\|b\|} > 0$ y considere $z \in \mathcal{A}$ tal que $\|z - a\| < \epsilon$. Con esto, se cumple la siguiente identidad:

$$z \diamond b = (z - a + a) \diamond b = (z-a) - (z-a)b = (z-a)(e-b).$$

De esta forma $\|z \diamond b\| \leq \|z - a\|\|e - b\| < 1$. Por lo tanto $z \diamond b \in Q$. Así, existe $(z \diamond b)' \in \mathcal{A}$ tal que $z \diamond (b \diamond (z \diamond b)') = (z \diamond b) \diamond (z \diamond b)' = 0$. Por lo tanto, $z \in Q_r$ y por consiguiente Q_r es abierto en $\mathcal{A}$. De forma análoga, Q_l es abierto en $\mathcal{A}$. □

Teorema 1.1.8. *Los conjuntos $\mathcal{G}_l(\mathcal{A})$, $\mathcal{G}_r(\mathcal{A})$ y $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ son abiertos en $\mathcal{A}$.*

Demostración: Defina $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por $\phi(a) = e - a$, para todo $a \in \mathcal{A}$. Observe que ϕ es continua, inyectiva y para todo $a, b \in \mathcal{A}$, se cumple:

$$\phi(a \diamond b) = \phi(a)\phi(b). \tag{1.2}$$

Sea $a \in \phi^{-1}(Q_r)$. Luego, existe $\phi(a)' \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(a) \diamond \phi(a)' = o$. Así,

$$\phi(\phi(a))\phi(\phi(a)') = \phi(\phi(a) \diamond \phi(a)') = \phi(o) = e.$$

De esta manera, $a = \phi(\phi(a)) \in \mathcal{G}_r(\mathcal{A})$. De modo que $\phi^{-1}(Q_r) \subseteq \mathcal{G}_r(\mathcal{A})$.

Ahora suponga que $a \in \mathcal{G}_r(\mathcal{A})$. Sea $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab = e$. Luego,

$$\phi(a) \diamond \phi(b) = \phi(ab) = \phi(e) = o.$$

Así $\phi(a) \in Q_r$. De esta forma $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}) \subseteq Q_r$.

De todo lo anterior $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}) = \phi^{-1}(Q_r)$. Por otra parte, por la Proposición 1.1.7, Q_r es abierto en $\mathcal{A}$. Además, como ϕ es continua, $\phi^{-1}(Q_r)$ es abierto en $\mathcal{A}$. De esta manera $\mathcal{G}_r(\mathcal{A})$ es abierto en $\mathcal{A}$. El resto se prueba de forma análoga. □

Ahora se mostrara que la aplicación que a cada $a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ le asigna su inversa a^{-1} es continua.

Proposición 1.1.9. *La función $\varphi^{-1} : \mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ definida por $\varphi^{-1}(a) = a^{-1}$ para todo $a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $b \in \mathcal{A}$, sean $l_b, r_b : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ funciones definidas como $l_b(a) = ba$ y $r_b(a) = ab$, para todo $a \in \mathcal{A}$, respectivamente. Observe que l_b y r_b son continuas para todo $b \in \mathcal{A}$, pues la norma en $\mathcal{A}$ es submultiplicativa.

Ahora, dado que $\varphi^{-1}(a) = l_{a^{-1}}(\varphi^{-1}(r_{a^{-1}}(a)))$ para todo $a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, es suficiente probar que φ^{-1} es continua en e.

Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ es abierto en $\mathcal{A}$ y $e \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $\|e - b\| < \frac{\epsilon}{2n} < \frac{1}{2}$, entonces $b \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Además, por el Lema 1.1.7, $\|b^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|e - b\| = \frac{1}{1-\|e-a\|} < 2$. Luego,

$$\|\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(e)\| = \|b^{-1}(e - b)\| \leq \|b^{-1}\|\|e - b\| < \epsilon.$$

Esto prueba que φ^{-1} es continua en e y por lo tanto, φ^{-1} es continua sobre $\mathcal{G}(\mathcal{A})$. □

1.2. La álgebra $\mathcal{B}(X)$

Ha llegado el momento de presentar la álgebra de Banach unitaria de los operadores lineales acotados que será fundamental en este trabajo. La importancia de esta álgebra es remarcable en la diversidad de problemas que se formulan como problemas lineales tanto en matemáticas como en física y en muchas otras áreas [21]. Por ello el estudio de esta álgebra ha sido nombrado Teoría de operadores.

Definición 1.2.1. *Sean X, Y dos espacios normados sobre el campo de los números complejos. Una función $T : X \to Y$ es una transformación lineal de X en Y, si para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple que*

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

Ejemplo 1.2.2. 1. *Sea A un subconjunto abierto, conexo y acotado de $\mathbb{C}$. Considere $X = \{f : \overline{A} \to \mathbb{R} : f$ es continua sobre $\overline{A}$, dos veces diferenciable y armónica sobre $A\}$[2] y $Y = C(\partial A, \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas definidas sobre ∂A (vea el Ejemplo 1.1.3). Entonces, $T : X \to Y$ dado por $T(f) = f|_{\partial A}$ es una transformación lineal.*

El problema de Dirichlet[3] consiste en: dado $g \in Y$, encontrar $f \in X$ tal que $T(f) = g$. La solución de este problema por Ivar Fredholm[4], en 1900 en "On a new method for the solution of Dirichlet's problem" marcó el inicio del estudio del espacio de las funciones continuas y de la teoría espectral (vea [21] para la discusión de este problema).

[2]Una función es armónica sobre un dominio $A \subseteq \mathbb{C}$ si satisface la ecuación de Laplace $\Delta(f) = 0$, donde Δ denota el operador de Laplace [8, Capítulo X].

[3]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 –1859, Düren, Alemania.

[4]Erik Ivar Fredholm, 1866 – 1927, Estocolmo, Suecia.

2. *Sea $1 \leq p < \infty$. El conjunto $l^p(\mathbb{Z})$ consistente de todas las sucesiones $\{\xi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tales que*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty.$$

es un espacio lineal sobre el campo de los números complejos. Más aún, l^p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\| = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x = \{\xi_n\} \in l^p(\mathbb{Z})$ (vea [22, Sección 2.10, 2.11]). En el caso especial cuando $p = 2$, l^p es un espacio de Hilbert (vea [19, Capítulo 5]) con el producto interior definido como

$$\langle x, y\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n \overline{\zeta_n},$$

para todo $x = \{\xi_n\}, y = \{\zeta_n\} \in l^p(\mathbb{Z})$, donde $\overline{\zeta_n}$ denota el conjugado de ζ_n.

También, el conjunto $L^p([a, b])$ de todas las funciones f de valores complejos definidas sobre el intervalo $[a, b]$, con $b > a$, tales que $|f(t)|$ es Lebesgue integrable sobre $[a, b]$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $f \in L^p([a, b])$ (vea [22, Sección 2.10, 2.11]).

Más aún, cuando $p = 2$, $L^p([a, b])$ es un espacio de Hilbert con producto interior definido como

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt,$$

para todo $f, g \in L^p([a, b])$. Una importante relación entre los espacios $l^2(\mathbb{Z})$ y $L^2([0, 2\pi])$ es que cada $f \in L^2([0, 2\pi])$ define un elemento en $l^2(\mathbb{Z})$ por medio de una trasformación lineal de la siguiente manera: Sea $T : L^2([0, 2\pi]) \to l^2(\mathbb{Z})$ dado por $T(f) = \{\xi_n\}$ para todo $f \in L^2([0, 2\pi])$, donde

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Los números ξ_n son los coeficientes de Fourier para f (vea [19, Teorema de Series de Fourier 5.48, Ejemplo 5L]).

3. *Sea $k \in C([0, 1]^2, \mathbb{C})$. Se define $T : C([0, 1], \mathbb{C}) \to C([0, 1], \mathbb{C})$ dado por*

$$T(f)(t) = \int_0^1 k(s, t)f(s)ds, \;\; \forall\, f \in C([0, 1], \mathbb{C}). \tag{1.3}$$

La ecuación (1.3) se llama transformación integral de Fredholm de primer tipo. Con la introducción de un parámetro complejo en (1.3) se obtiene la transformación integral de Fredholm de segundo *tipo, el cual está definido de la siguiente manera: sea $L : C([0,1],\mathbb{C}) \to C([0,1],\mathbb{C})$ definido por*

$$L(f)(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 k(s,t)f(s)ds, \ \ \forall\, f \in C([0,1],\mathbb{C});$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Tanto T como L son transformaciones lineales. Posteriormente en la Sección 1.3, se hará un análisis de estas transformaciones.

De aquí en lo que resta del escrito, cuando se diga que X es un espacio normado se entenderá de antemano que X es un espacio normado sobre el campo de los números complejos.

Dado, X y Y espacios normados, denote con $\mathcal{L}(X,Y)$ al conjunto de transformaciones lineales de X en Y. Por simplicidad, cuando $X = Y$ solo se escribe $\mathcal{L}(X)$.

El conjunto $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio lineal complejo, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función. También, el neutro aditivo está dado por $O : X \to Y$ como $O(x) = 0$, para todo $x \in X$, el cual se llama *transformación nula*.

Definición 1.2.3. *Sean X, Y espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se definen el núcleo de T, denotado por $\mathcal{N}(T)$, como*

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X :\ T(x) = 0\},$$

y el rango de T, denotado por $\mathcal{R}(T)$, como

$$\mathcal{R}(T) = \{y \in Y :\ y = T(x) \text{ para algún } x \in X\}.$$

Tanto el núcleo como el rango de una tranformación lineal son subespacios lineales de X.

Definición 1.2.4. *Sean X, Y espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Entonces T está acotada si existe $\beta > 0$ tal que*

$$\|T(x)\| \leq \beta \|x\|, \ \ \forall\, x \in X. \tag{1.4}$$

La norma en el lado izquierdo de la desigualdad en (1.4) es la norma en Y y la norma en el lado derecho la norma en X.

Lema 1.2.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Entonces T está acotada si y solo si T transforma conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de Y.*

DEMOSTRACIÓN: Vea [19, Proposición 4.12]. □

El siguiente teorema muestra que continuidad, continuidad en un punto, continuidad uniforme y acotamiento son conceptos equivalentes.

Teorema 1.2.6. *Sean X, Y espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Los siguentes enunciados son equivalentes:*

(i) *T está acotada.*

(ii) *T es continua uniformemente.*

(iii) *T es continua.*

(iv) *T es continua en $0 \in X$.*

Demostración: Suponga que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ está acotada. Sea $\beta > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq \beta\|x\|$, para todo $x \in X$.

Sea $\epsilon > 0$ y haga $\delta = \frac{\epsilon}{\beta}$. Luego, $\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \beta\|x_1 - x_2\| < \epsilon$, para todo $x_1, x_2 \in X$ tales que $\|x_1 - x_2\| < \delta$. Por lo tanto (i) implica (ii).

Continuidad uniforme implica continuidad y esta a su vez continuidad en un punto. Así, (ii) implica (iii) y (iii) implica (iv).

Suponga que T es continua en $0 \in X$ y sea $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$, entonces $\|T(x)\| < 1$.

Sea $x \neq 0$. Entonces $\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\right\| = \frac{\delta}{2}$. Luego,

$$\frac{\delta}{2\|x\|}\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\| < 1.$$

Por lo tanto, $\|T(x)\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$, para todo $x \in X$, de donde (iv) implica (i). $\square$

Denote con $\mathcal{B}(X,Y)$ al conjunto de las transformaciones lineales de X en Y que están acotadas. Cuando $Y = X$ solo escriba $\mathcal{B}(X)$. Los elementos de $\mathcal{B}(X,Y)$ se llaman *transformaciones lineales acotadas* y los elementos de $\mathcal{B}(X)$, *operadores acotados*.

Se puede verificar que el conjunto $\mathcal{B}(X,Y)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(X,Y)$. Además, el espacio $\mathcal{B}(X,Y)$ es un espacio normado complejo como se muestra a continuación.

Teorema 1.2.7. *Sean X, Y espacios normados. La función $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por*

$$\|T\| = \text{ínf}\{\beta > 0 : \ \|T(x)\| \leq \beta\|x\|, \ \forall\, x \in X\}, \ \ \forall\, T \in \mathcal{B}(X,Y), \tag{1.5}$$

es una norma sobre $\mathcal{B}(X,Y)$.

Demostración: Sean $T, S \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Observe que para todo $\epsilon > 0$ se cumple que $\|T(x)\| \leq (\|T\| + \epsilon)\|x\|$, para todo $x \in X$. Así,

$$\|T(x)\| \leq \text{ínf}\{\|T\| + \epsilon : \ \epsilon > 0\}\|x\| = \|T\|\|x\|, \ \ \forall\, x \in X. \tag{1.6}$$

De (1.6), $\|T\| = 0$ si y solo si $T = O$. Ahora, usando (1.6) se tiene,

$$\|(\lambda T)(x)\| = |\lambda|\|T(x)\| \leq |\lambda|\|T\|\|x\|, \ \ \forall\, x \in X.$$

Por consiguiente, $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\|T\|$. Por otro lado,

$$\|T(x)\| = \frac{\|(\lambda T)(x)\|}{|\lambda|} \leq \frac{\|\lambda T\|}{|\lambda|}\|x\|, \ \ \forall\, x \in X, \ \lambda \neq 0.$$

De donde, $|\lambda|\|T\| \leq \|\lambda T\|$. Por lo tanto, $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$.

Nuevamente por (1.6),

$$\|(T+S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|, \ \ \forall\, x \in X.$$

Por lo tanto, $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$. De todo lo anterior, $\|\cdot\|$ es una norma para $\mathcal{B}(X,Y)$. $\square$

La norma para $\mathcal{B}(X,Y)$ definida en (1.5), se llama la *norma uniforme* en $\mathcal{B}(X,Y)$. Existen formas equivalentes para calcular la norma de $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, las cuales en muchas ocasiones son de gran utilidad.

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}; \tag{1.7}$$

Ejemplo 1.2.8. *Sea $X = l^p(\mathbb{N})$ con $p \geq 1$. Se denota con $x(k)$ la $k-$ésima componente de $x \in X$. Luego, dado $T \in \mathcal{L}(X)$ y $x \in X$, se denota con $T(x)(k)$ la $k-$ésima componente de $T(x) \in X$. Dicho lo anterior:*

1. *Defina $T_l : X \to X$ por $T_l(x)(k) = x(k+1)$, para todo $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$. Claramente T_l es una tranformación lineal de X en X. Entonces, por (1.7),*

$$\begin{aligned} \|T_l\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T_l(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ahora, sea $e_2 \in X$ definido por $e_2(k) = 1$ si $k = 2$ y $e_2(k) = 0$ si $k \neq 2$. Entonces $1 = \|T_l(e_2)\| \leq \|T_l\|$. Por lo tanto $\|T_l\| = 1$.

El operador T_l se llama operador desplazamiento hacia la izquierda.

2. *Defina $T_r : X \to X$ por $T_r(x)(1) = 0$ y $T_r(x)(k) = x(k-1)$, para todo $k \geq 2$ y todo $x \in X$. De forma directa se tiene que $\|T_r\| = 1$. Este operador se llama operador desplazamiento hacia la derecha.*

3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y defina $T_n : X \to X$ por $T_n(x)(k) = 0$ si $k < n$ y $T_n(x)(k) = x(k)$ si $k \geq n$, para todo $x \in X$. De forma similar como en 1., $\|T_n\| = 1$.*

Un resultado importante en la teoría de operadores es que el espacio de transformaciones lineales acotadas de X en Y es un espacio completo cuando Y es un espacio completo.

Teorema 1.2.9. *Sean X, Y espacios normados. Si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN: Asuma que Y es un espacio de Banach. Considere una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(X,Y)$, digamos $\{T_n\}$. Sea $x \in X$. Por la desigualdad (1.6), la sucesión $\{T_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Entonces existe $y_x \in Y$ tal que $\lim T_n(x) = y_x$.

Defina $T : X \to Y$ por $T(x) = y_x$, para todo $x \in X$. Por la unicidad del límite, T está bien definida. Además, por la continuidad y linealidad de T_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Sea $\epsilon > 0$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$, entonces $\|T_n - T_m\| < \epsilon$. Por lo que $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \epsilon\|x\|$, para todo $x \in X$. Así, por la continuidad de la norma en Y, se tiene que

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon\|x\|, \ \ \forall\, x \in X, \ \ \forall n > n_0. \tag{1.8}$$

Sea $n > n_0$. Por (1.8), $T_n - T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Por lo tanto, $T = T_n - (T_n - T) \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Por otro lado, para todo $n > n_0$,

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n(x) - T(x)\| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\{T_n\}$ converge a T. □

En este punto se puede definir una operación producto en $\mathcal{B}(X)$ por la composición usual de funciones. Dado que todo operador acotado de X en X es continuo, la composición de operadores lineales acotados es continuo. Esto hace que la operación producto así definida sea cerrada en el espacio de los operadores acotados. Este hecho se puede probar de una forma sencilla en el caso general de la composición de transformaciones lineales acotadas.

Proposición 1.2.10. *Sean X, Y, Z espacios normados. Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ entonces $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$. Más aún,*

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\|. \tag{1.9}$$

Demostración: Asuma que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Entonces

$$\|ST(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\|\|T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|, \ \ \forall\, x \in X.$$

Por lo tanto $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ y $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. □

Definición 1.2.11. *Sea X un espacio normado. Se define la transformación lineal identidad, $I : X \to X$ como*

$$I(x) = x, \ \ \forall\, x \in X. \tag{1.10}$$

Observe que I es una transformación lineal acotada con $\|I\| = 1$. Además, para todo $T \in \mathcal{B}(X)$, $TI = T = IT$. De esta manera, si X es un espacio normado. Por la desigualdad (1.9), el espacio de los operadores acotados $\mathcal{B}(X)$ es una álgebra normada unitaria, donde el operador identidad I es la unidad en $\mathcal{B}(X)$ y el producto la composición usual de funciones. Si en adición, se supone que X es un espacio completo, por el Teorema 1.2.9, $\mathcal{B}(X)$ es una álgebra de Banach unitaria. Este argumento prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.2.12. *Sea X un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{B}(X)$ es una álgebra de Banach unitaria.*

De aquí en adelante, cuando X sea un espacio de Banach, se dirá que $\mathcal{B}(X)$ es la álgebra de operadores acotados.

Invertibilidad

Asuma que X es un espacio de Banach y considere la álgebra de los operadores acotados definidos sobre X, $\mathcal{B}(X)$. De acuerdo con la Definición 1.1.6, $T \in \mathcal{B}(X)$ es invertible en $\mathcal{B}(X)$ si existe $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ tal que $T^{-1}T = TT^{-1} = I$. Equivalentemente, $T \in \mathcal{B}(X)$ tiene inversa en $\mathcal{B}(X)$ si y solo si T es inyectivo, sobreyectivo ($\mathcal{N}(T) = \{0\}$ y $\mathcal{R}(T) = X$ respectivamente [vea [19] pág. 57]) y con inversa continua.

Propiamente la continuidad de la inversa de un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ (asumiendo con anticipación que tiene inversa) depende en gran medida de la naturaleza de $T \in \mathcal{B}(X)$. Se verá qué condición tiene que cumplir T para asegurar la continuidad de su inversa.

Definición 1.2.13. *Sean X y Y espacios normados. Entonces $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tiene inversa si existe una función $T^{-1} : Y \to X$ tal que $T^{-1}T = I_X$ y $TT^{-1} = I_Y$, donde I_X e I_Y son los operadores identidad definidos sobre X y Y, respectivamente. En este caso, se dice que T^{-1} es la inversa de T.*

Con un rápido cálculo se verifica que si existe la inversa de una transformación lineal, entonces es única. Además, también es una trasformación lineal. Ahora, si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tiene inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ y además $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$, entonces se dice que T tiene inversa continua.

Definición 1.2.14. *Sean X, Y espacios normados. Entonces $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ está acotada por abajo si existe $k > 0$ tal que*

$$\|x\| \leq k\|T(x)\|,$$

para todo $x \in X$.

Note que si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ está acotada por abajo, entonces T es inyectiva. El siguiente resultado da condiciones equivalentes para que una transformación lineal que no esté acotada por abajo en términos de sucesiones.

Proposición 1.2.15. *Sean X y Y espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T no está acotada por abajo.

(ii) Existe una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $\|x_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim \|T(x_n)\| = 0$.

(iii) Para cada $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $\|x_\epsilon\| = 1$ y $\|T(x_\epsilon)\| < \epsilon$.

Demostración: Es claro que (iii) implica (ii). Suponga (ii). Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $\|T(x_n)\| < \epsilon = \epsilon\|x_n\|$. Por lo tanto, T no está acotada por abajo.

Por último, suponga que T no está acotada por abajo. Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $y_\epsilon \in X$ tal que $\epsilon\|y_\epsilon\| > \|T(y_\epsilon)\|$. Haciendo $x_\epsilon = \frac{y_\epsilon}{\|y_\epsilon\|}$ se tiene (iii). $\square$

Ahora se caracterizará una transformación lineal acotada por abajo. Para esto se hace uso del Teorema del Mapeo Inverso. El enunciado de este importante teorema en la teoría de operadores (así como lo es el Teorema del Mapeo Abierto, el Teorema de la Gráfica Cerrada y el Teorema de Banach-Steinhaus) lo puede consultar en el Apéndice y su demostración en [19].

Proposición 1.2.16. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Entonces T está acotada por abajo si y solo si T es inyectiva y $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en Y.*

Demostración: Suponga que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ está acotado por abajo. Sea $\{y_n\}$ una sucesión en $\mathcal{R}(T)$ que converge a $y \in Y$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $y_n = T(x_n)$. Dado que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy en Y y T está acotada por abajo, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X. De esta forma, existe $x \in X$ tal que $\lim x_n = x$. Ahora, como T es continua, $\lim T(x_n) = T(x)$. Así, $y = T(x)$ y por lo tanto $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en Y.

Recíprocamente, suponga que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es inyectivo y $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en Y. Dado que Y es un espacio de Banach, el rango de T también es un espacio de Banach. Por el Teorema del Mapeo Inverso A.17, existe $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), X)$ inversa de $T \in \mathcal{B}(X, \mathcal{R}(T))$. Entonces, existe $\beta > 0$ tal que $\|T^{-1}(y)\| \leq \beta\|y\|$, para todo $y \in \mathcal{R}(T)$. Así, $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \beta\|T(x)\|$, para todo $x \in X$. Por lo tanto, T está acotada por abajo. $\square$

Un punto importante que se desprende de la Proposición 1.2.16 es: si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ está acotado por abajo, donde X y Y son espacios de Banach complejos, entonces $T \in \mathcal{B}(X, \mathcal{R}(T))$ tiene inversa continua.

Dualidad

Muchos problemas de optimización pueden describirse por medio de transformaciones lineales. Para poder solucionar estos problemas se tiene que recurrir a las propiedades de una trasformación asociada a la transformación inicial. Esta es la tranformación adjunta (vea [22]).

Definición 1.2.17. *Sea X un espacio normado. Entonces toda $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ se llama funcional lineal sobre X. También, se define el espacio dual de X como el espacio de todas la funcionales lineales sobre X y el cual es denotado por X^*. Es decir, $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Denote con x^* a los elementos de X^*.*

Observe que X^* es un espacio de Banach, pues $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach. Se denota con X^{**} el espacio dual de X^*, y se le llama el doble dual de X.

Ejemplo 1.2.18.

1. *Sean $1 \leq p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para toda $f \in l^p(\mathbb{N})^*$ existe una única $y = \{\eta_n\} \in l^q(\mathbb{N})$ tal que*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \xi_n, \quad \forall\, x = \{\xi_n\} \in l^p(\mathbb{N}),$$

En este caso hay un isomorfismo isométrico entre el dual de $l^p(\mathbb{N})$ es $l^q(\mathbb{N})$ (vea [27, Proposición 45]).

2. *[Teorema de representación de Riesz] Sea $X = C([a, b], \mathbb{C})$ con $b > a$. Entonces para cada $f \in X^*$ existe una única función v de variación acotada (vea [2, Capítulo 6]) sobre $[a, b]$ tal que*

$$f(x) = \int_a^b x(t) d\, v(t), \quad \forall\, x \in X. \tag{1.11}$$

Además, la norma de f es igual a la variación total de v, donde la integral en (1.11), es la integral según Riemann Stieltjes (vea [2, Capítulo 7]).

3. *Sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para todo $F \in L^p([a, b])^*$ existe una única $g \in L^q([a, b])$ tal que*

$$F(f) = \int_a^b f(t) g(t)\, dt, \;\; \forall\, f \in L^p([a, b]).$$

En este sentido se dice que el espacio dual de $L^p([a, b])$ es $L^q([a, b])$ (vea [27, Proposición 46]).

4. *[Teorema de Riesz-Fréchet] Si X es un espacio de Hilbert, entonces para todo $f \in X^*$ existe un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$, donde $= \langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior en X (vea [27, Teorema 50]).*

Definición 1.2.19. *Sean X, Y espacios normados. Entonces $J \in \mathcal{L}(X,Y)$ es una isometría si*

$$\|J(x_1) - J(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|,$$

para todo $x_1, x_2 \in X$.

Observe que si $J \in \mathcal{L}(X,Y)$ es una isometría, entonces J es continua e inyectiva. Si además, J es sobreyectiva, entonces su inversa también es una isometría y por lo tanto continua. En efecto, suponga que $J \in \mathcal{L}(Y,X)$ es una isometría sobreyectiva. Sean $y_1, y_2 \in Y$, entonces existen únicos $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = J(x_1)$ y $y_2 = J(x_2)$. Luego, $\|y_1 - y_2\| = \|J(x_1) - J(x_2)\| = \|x_1 - x_2\| = \|J^{-1}(y_1) - J^{-1}(y_2)\|$. Con esto J^{-1} es una isometría y por lo tanto continua.

De lo anterior, si $J \in \mathcal{L}(X,Y)$ es una isometría sobreyectiva, entonces se dice que J es un *isomorfismo isométrico* y que X y Y son *isométricamente isomorfos*.

Definición 1.2.20. *Sea X un espacio lineal. Se denota con* $\dim(X)$ *la dimensión de X (número de elementos en X linealmente independientes que generan a X, vea [19, Capítulo 2]). Si X no tiene dimensión finita se escribe* $\dim(X) = \infty$.

En la siguiente observación se verá como está relacionado la dimensión de un espacio normado con la dimensión de su espacio dual.

Observación 1.2.21. *Sea X un espacio normado complejo.*

1. *Si* $\dim(X) < \infty$ *entonces* $\dim(X) = \dim(X^*) = \dim(X^{**})$.

   En efecto, sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de Hamel para X y $x \in X$. Entonces existe una única sucesión $\{\xi_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{C}$ tal que $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, defina $x_i^* : X \to \mathbb{C}$ por $x_i^*(x) = \xi_i$. Note que x_i^* es lineal para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, además, como toda transformación lineal entre espacios de dimensión finita es continua ([19, Corolario 4.31]), x_i^* es continua, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   Ahora, suponga que
   $$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^* = 0, \tag{1.12}$$
   donde $\alpha_i \in \mathbb{C}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Observe que $x_i^*(e_k) = \delta_{i,k}$, donde $\delta_{i,k}$ es la función delta de Kronecker. Al evaluar (1.12) en cada e_i, se obtiene que $\alpha_i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente.

   Si $x^* \in X^*$, entonces $x^* = \sum_{i=1}^n x^*(e_i) x_i^*$. En efecto, sea $x \in X$, entonces
   $$\left(\sum_{i=1}^n x^*(e_i) x_i^*\right)(x) = \sum_{i=1}^n x^*(e_i) x_i^*(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i x^*(e_i) = x^*(x).$$

   Así, $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ es una base de Hamel para X^*, de donde se concluye que $\dim(X^*) = \dim(X)$.

2. $\dim(X) = \infty$ *si y solo si* $\dim(X^*) = \infty$.

   Suponga que $\dim(X) = \infty$ *pero que* $\dim(X^*) < \infty$. *Entonces por el inciso anterior,* $\dim(X^{**}) = \dim(X^*)$. *Luego, como X es isométricamente isomorfo a un subespacio de X^{**} ([19, Teorema 4.66]), se tiene que,* $\dim(X) \leq \dim(X^{**}) = \dim(X^*) < \infty$, *lo cual es una contradicción. El recíproco se obtiene directamente del inciso anterior.*

Ahora se definirá la transformación lineal adjunta de una transformación lineal continua.

Definición 1.2.22. *Sean X, Y espacios normados y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Se define la transformación adjunta de T, $T^* : Y^* \to X^*$ como*

$$T^*(y^*) = x^*, \quad \forall\, y^* \in Y^*,$$

donde la regla de correspondencia para x^*, está dada por $x^*(x) = y^*(T(x))$, para todo $x \in X$. Cuando $Y = X$, se dice que T^* es el operador adjunto de T.

Proposición 1.2.23. *Sean X, Y, Z es espacios normados. Luego*

(i) Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, entonces $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ y $\|T^*\| = \|T\|$.

(ii) Si $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$, entonces $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

(iii) Si $T_1 \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $T_2 \in \mathcal{B}(Y,Z)$ entonces $(T_2T_1)^* \in \mathcal{B}(Z^*, X^*)$ y

$$(T_2T_1)^* = T_1^*T_2^*.$$

Demostración: Solo se probará (i). Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Entonces para todo $y^* \in Y^*$,

$$\|T^*(y^*)(x)\| = \|y^*(T(x))\| \leq \|y^*\|\|T(x)\| \leq \|y^*\|\|T\|\|x\|$$

para cada $x \in X$. Así, $\|T^*(y^*)\| \leq \|y^*\|\|T\|$. Por lo tanto, $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ y además $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Tome $y \in \mathcal{R}(T)$ con $y \neq 0$ y sea $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Luego, por el Teorema de Hahn-Banach A.20, existe $y^* \in Y^*$ tal que $\|y^*\| = 1$ y $y^*(y) = \|y\|$. Con esto,

$$\|T(x)\| = \|y^*(T(x))\| = \|T^*(y^*)(x)\| \leq \|T^*\|\|y^*\|\|x\| = \|T^*\|\|x\|,$$

y por consiguiente, $\|T\| \leq \|T^*\|$. Por lo tanto, $\|T\| = \|T^*\|$. □

Ejemplo 1.2.24. *1. Sea $X = \mathbb{C}^n$ y considere $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces T está representado por una matriz A de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$. Luego, T^* está representado por la matriz transpuesta conjugada de A (vea [22, pág. 152].*

2. Sea $X = L_2([0,1])$ y $k \in C([0,1]^2)$. Defina $T : X \to X$ por

$$T(x) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt, \quad \textit{con } s \in [0,1].$$

Entonces

$$T^*(y) = \int_0^1 k(t,s)y(t)\,dt,$$

(vea [22, pág. 153]).

1.3. La álgebra de Calkin

El estudio de los operadores compactos inicia con el trabajo de Ivar Fredholm en su artículo *"On a new method for the solution of Dirichlet‘s problem“* publicado en 1900. En este trabajo, Fredholm da solución al problema de Dirichlet, al encontrar un método que resuelve ecuaciones integrales del tipo:

$$y(t) = x(t) - \lambda \int_0^{2\pi} k(s,t)x(s)ds, \tag{1.13}$$

donde $x, y \in C([0,2\pi], \mathbb{C})$ con $x(t)$ desconocido, $k(s,t) \in C([0,2\pi]^2, \mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un parámetro desconocido. La ecuación 1.13 se llama *ecuación integral de Fredholm de segundo tipo* y $k(s,t)$ se llama el kernel de la ecuación integral (1.13). Nos referimos a [27] para una exposición detallada sobre la solución analítica de dicha ecuación.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio normado. Un subconjunto U de X está totalmente acotado, si para todo $\epsilon > 0$ existe $U_\epsilon \subseteq U$ finito tal que para todo $x \in U$, $\|x - u_x\| < \epsilon$ para algún $u_x \in U_\epsilon$.*

Algunos resultados que serán frecuentemente utilizados en adelante son los siguientes:

Observación 1.3.2. *Sea X un espacio normado y $U \subseteq X$.*

1. *Si U está totalmente acotado entonces U está acotado en X, [19, Corolario 3.71].*

2. *U está totalmente acotado si y solo si toda sucesión en U tiene una subsucesión de Cauchy, [19, Lema 3.73].*

3. *Sea Y es un espacio normado. Si $f : X \to Y$ es una función uniformemente continua, entonces $f(U)$ está totalmente acotado, si U está totalmente acotado, [19, Teorema 3.74].*

4. *U es compacto en X si y solo si U es completo y totalmente acotado, [19, Teorema 3.78].*

5. *U es compacto en X si y solo si toda sucesión en U tiene una subsucesión que converge en U, [19, Teorema 3.80].*

6. *Si X es un espacio de Banach, entonces U es compacto en X si y solo si U es cerrado y totalmente acotado, [19, Corolario 3.84].*

Definición 1.3.3. *Sean X, Y espacios normados complejos. Entonces $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto si para todo $U \subseteq X$ acotado, $\overline{T(U)}$ es compacto en Y.*

Observación 1.3.4. *Suponga que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto. Sea U subconjunto acotado de X. Entonces por la Observación 1.3.2, $\overline{T(U)}$ está totalmente acotado. Esto implica que $T(U)$ está acotado y por el Lema 1.2.5, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.*

El conjunto de operadores compactos de X en Y es denotado por $K(X,Y)$. Cuando tenemos $K(X,X)$ solo se escribe $K(X)$. Por la Observación 1.3.4 se tiene que $K(X,Y) \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$.

Veamos algunas expresiones equivalentes para una transformación lineal compacta.

Proposición 1.3.5. *Sean X, Y espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) T es compacto.

(ii) $\overline{T(B_X[0,1])}$ es un conjunto compacto en Y.

(iii) T mapea cada sucesión en $B_X[0,1]$ en una sucesión que tiene una subsucesión convergente.

(iv) *Para cada sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, $\{T(x_n)\}$ tiene una subsucesión convergente.*

Cada uno de los anteriores enunciados implica que

(v) *$T(U)$ está totalmente acotado para cada $U \subseteq X$ acotado.*

(vi) *$T(B_X[0,1])$ está totalmente acotado.*

Si Y es un espacio de Banach, todos los enunciados anteriores son equivalentes.

Demostración: Por la Definición 1.3.3, (i) implica (ii). Por la Observación 1.3.2, (ii) implica (iii).

Suponga (iii). Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X. Entonces existe $\beta > 0$ tal que $\beta \geq \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Luego $\left\{\frac{x_n}{\beta}\right\}$ es una sucesión en $B_X[0,1]$. Por lo tanto, $\left\{\frac{T(x_n)}{\beta}\right\}$ tiene una subsucesión convergente, de esta forma $\{T(x_n)\}$ tiene una subsucesión convergente. Así, se ha probado que (iii) implica (iv).

Suponga (iv). Sea U un conjunto acotado de X. Entonces toda sucesión en $T(U)$ tiene una subsucesión convergente en Y. Como $\overline{T(U)}$ es cerrado, toda sucesión en $\overline{T(U)}$ tiene una subsucesión convergente en $\overline{T(U)}$. Así, por la Observación 1.3.2, $\overline{T(U)}$ es compacto en Y. Por lo tanto, (iv) implica (i).

Ahora, asuma que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto. Entonces $\overline{T(U)}$ es compacto. Por la Observación 1.3.2, $\overline{T(U)}$ está totalmente acotado y por lo tanto $T(U)$ está totalmente acotado. Entonces (i) implica (v). Claramente (v) implica (vi).

Por último, suponga que Y es un espacio de Banach y que $T(B_X[0,1])$ está totalmente acotado. Entonces $\overline{T(B_X[0,1])}$ es cerrado y totalmente acotado, así por la Observación 1.3.2, $\overline{T(B_X[0,1])}$ es compacto en Y. Por lo tanto, (vi) implica (ii). $\square$

Ejemplo 1.3.6. *1.- Sea $1 \leq p < \infty$ y $X = l^p(\mathbb{N})$. Sea $a = \{a_i\} \in l^{c_0}(\mathbb{N})$, donde $l^{c_0}(\mathbb{N})$ denota al espacio de sucesiones en $\mathbb{C}$ que convergen a 0. Se define el operador $D_a : X \to X$ por $D_a(x)(k) = a_k x_k$, para todo $x = \{x_i\} \in X$. Entonces el operador D_a es compacto. En efecto, observe que*

$$
\begin{aligned}
\|D_a\| &= \sup_{\|x\|=1} \|D_a(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \left(\sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|.
\end{aligned}
$$

Defina $e_i \in l^p(\mathbb{N})$ por $e_i(k) = \delta_{i,k}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, donde $\delta_{i,k}$ es la función delta de Kronecker. Luego, $D_a(e_i)(k) = \delta_{i,k} a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Con esto, $\|D_a\| \geq \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$. Por tanto, $\|D_a\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$.

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$ y defina el operador $D_n : X \to X$ como $D_n(x)(k) = a_i x_i$, para todo $k \leq n$ y $D_n(x)(k) = 0$, para todo $i \geq n+1$, para todo $x = \{x_i\} \in X$.

Se tiene que $\|D_n - D\| = \sup\{|a_i| : i \geq n+1\}$. Ahora, como $0 = \lim a_i = \limsup a_i$[5], $\lim D_n = D$.

Por el Teorema 1.3.11, D es un operador compacto, pues para cada $n \in \mathbb{N}$, D_n tiene rango de dimensión finita.

[5] $\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k| : k \geq n+1\}$, donde $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$

2.- Sea $k \in C([0,1]^2, \mathbb{C})$ y defina $K : C([0,1], \mathbb{C}) \to C([0,1], \mathbb{C})$ como

$$K(f)(t) = \int_0^1 k(s,t)f(s)ds, \ \forall \ f \in C([0,1], \mathbb{C}). \tag{1.14}$$

Entonces K es un operador compacto. En efecto, sea $f \in C([0,1], \mathbb{C})$ y considere $t, t' \in [0,1]$. Luego,

$$\begin{aligned} |K(f)(t) - K(f)(t')| &= \left| \int_0^1 [k(s,t) - k(s,t')] \, f(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |k(s,t) - k(s,t')| \, |f(s)|ds \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} |k(s,t) - k(s,t')| \sup_{s\in[0,1]} |f(s)| \\ &= \sup_{s\in[0,1]} |k(s,t) - k(s,t')| \|f\|. \end{aligned}$$

Puesto que $[0,1]^2$ es compacto en $\mathbb{R}^2$, la función k es uniformemente continua sobre $[0,1]^2$. Así, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|(s,t) - (s,t')\| = |t - t'| < \delta$, entonces $|k(s,t) - k(s,t')| < \epsilon$. De esta forma, si $|t - t'| < \delta$, se tiene

$$|K(f)(t) - K(f)(t')| \leq \epsilon \|f\|. \tag{1.15}$$

Por lo tanto, $K(f) \in C([0,1], \mathbb{C})$, para todo $f \in C([0,1], \mathbb{C})$. Ahora, sea $f \in C([0,1], \mathbb{C})$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|K(f)\| &= \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(s,t)f(s)ds \right| \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} [\sup_{s\in[0,1]} |k(s,t)| \sup_{s\in[0,1]} |f(s)|] \\ &= \|k\|\|f\|. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Esto muestra que $\|K\| \leq \|k\|$ y por lo tanto, K es continuo (vea Teorema 1.2.6).

Considere el conjunto $S = \{f \in C([0,1], \mathbb{C}) : \|f\| \leq 1\}$. Observe que por (1.16), el conjunto $K(S)$ está acotado. Sea $f \in S$ y $\epsilon > 0$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t'| < \delta$ se verifica (1.15). De donde,

$$|K(f)(t) - K(f)(t')| < \epsilon.$$

Por lo tanto, para cada $f \in S$, $K(f)$ es uniformemente continua sobre $[0,1]$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli A.21, cada sucesión en $K(S)$ tiene una subsucesión convergente y por la Proposición 1.3.5, K es un operador compacto.

3.- Si X es un espacio normado complejo con $\dim(X) = \infty$, entonces $I \in \mathcal{B}(X)$ no es compacto. En efecto, asuma que I es un operador compacto. Considere el conjunto $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Como I es compacto, $\overline{I(S_X)} = \overline{S_X} = S_X$ es compacto en X. Por la Proposición A.7, $\dim(X) < \infty$, lo cual es una contradicción.

De esta manera, si X no tiene dimensión finita, entonces el conjunto de los operadores compactos está propiamente contenido en el conjunto de los operadores acotados sobre X.

Proposición 1.3.7. *Sean X, Y espacios normados. Entonces*

(i) $K(X,Y)$ *es subespacio lineal de* $\mathcal{B}(X,Y)$.

(ii) Si Y *es un espacio de Banach, entonces* $K(X,Y)$ *es un subespacio lineal cerrado de* $\mathcal{B}(X,Y)$.

Demostración: Solo se probará (ii). Asuma que Y es un espacio de Banach y suponga que $\{T_n\}$ es una sucesión en $K(X,Y)$ que converge a $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(T - T_{n_0})(x)\| \leq \|T - T_{n_0}\|\|x\| \leq \frac{\epsilon}{2}\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{1.17}$$

Dado que T_{n_0} es compacto, por la Observación 1.3.2, $\overline{T_{n_0}(B_X[0,1])}$ está totalmente acotado. Por lo que, $T_{n_0}(B_X[0,1])$ está totalmente acotado. Así, existe $Y_0 \subseteq T_{n_0}(B_X[0,1])$ finito tal que para todo $y \in T_{n_0}(B_X[0,1])$, existe $y_0 \in Y_0$ tal que $\|y - y_0\| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $x \in B_X[0,1]$. Luego, existe $y_x \in Y_0$ tal que $\|T_{n_0}(x) - y_x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Tomando en cuenta (1.17), se tiene

$$\begin{aligned} \|T(x) - y_x\| &= \|T(x) - T_{n_0}(x) + T_{n_0}(x) - y_x\| \\ &\leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x) - y_x\| \\ &< \frac{\epsilon}{2}\|x\| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $T(B_X[0,1])$ está totalmente acotado y por la Proposición 1.3.5 (vi), T es compacto. De esta forma termina la prueba. □

Lema 1.3.8. *Sea X un espacio normado. Entonces $KT, TK \in K(X)$ para todo $K \in K(X)$ y todo $T \in \mathcal{B}(X)$.*

Demostración: Suponga que $K \in K(X)$ y $T \in \mathcal{B}(X)$. Sea U un subconjunto acotado de X. Por el Lema 1.2.5, $T(U)$ está acotado en X. Como K es compacto, $\overline{K(T(U))}$ es compacto. Por lo tanto, $KT \in K(X)$.

Por otro lado, como K es compacto, $\overline{K(U)}$ es compacto en X. Entonces $T(\overline{K(U)})$ es compacto en X, pues T es continuo. Ahora como

$$\overline{T(K(U))} \subseteq \overline{T(\overline{K(U)})} = T(\overline{K(U)}),$$

se sigue que $\overline{T(K(U))}$ es compacto en X. Por lo tanto, $TK \in K(X)$. □

Como consecuencia del Lema 1.3.8, si X es un espacio de normado, entonces el espacio lineal de los operadores compactos definidos sobre X es un ideal bilateral de la álgebra de los operadores acotados sobre X, más aún, si X es un espacio de Banach, entonces $K(X)$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{B}(X)$.

Teorema 1.3.9. *Sea X un espacio de Banach. Entonces $K(X)$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{B}(X)$.*

Demostración: Consecuencia inmediata de la Proposición 1.3.7 y del Lema 1.3.8. □

Ahora se mostrará una clase especial de operadores compactos.

Definición 1.3.10. *Sean X, Y espacios normados. Se define y se denota por $\mathcal{B}_0(X,Y)$ al conjunto de operadores lineales acotados de X en Y que tienen rango de dimensión finita, en decir,*

$$\mathcal{B}_0(X,Y) = \{T \in \mathcal{B}(X,Y) : \ \dim(\mathcal{R}(T)) < \infty\}.$$

Si $T \in \mathcal{B}_0(X,Y)$, entonces se dice que T es una trasformación de rango finito y cuando $Y = X$, se dice que T es un operador de rango finito.

Proposición 1.3.11. *Sean X, Y espacios normados. Si $T \in \mathcal{B}_0(X,Y)$ entonces $T \in K(X,Y)$.*

Demostración: Suponga que $T \in \mathcal{B}_0(X,Y)$ y sea $U \subseteq X$ acotado. Entonces $\overline{T(U)}$ es cerrado y acotado en $\mathcal{R}(T)$. Como todo conjunto cerrado y acotado en un espacio de dimensión finita es compacto, $\overline{T(U)}$ es compacto en $\mathcal{R}(T)$. Así, $\overline{T(U)}$ es compacto en Y. Por lo tanto, $T \in K(X,Y)$. $\square$

Corolario 1.3.12. *Sean X, Y espacios normados y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Si $\dim(X) < \infty$, entonces $T \in K(X,Y)$.*

Demostración: Consecuencia de la Proposición 1.3.11, tomando en cuenta que

$$\dim(\mathcal{N}(T)) + \dim(\mathcal{R}(T)) = \dim(X).$$

(Vea [19, Problema 2.17]). $\square$

Observe que si X, Y son espacios normados con Y completo, entonces $K(X,Y)$ es cerrado en $\mathcal{B}(X,Y)$ (Proposición 1.3.7). Por lo tanto toda sucesión convergente en $\mathcal{B}_0(X,Y)$ tiene límite en $K(X,Y)$. Este argumento prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.3.13. *Sean X y Y espacios normados complejos con Y completo. Entonces toda sucesión convergente en $\mathcal{B}_0(X,Y)$ tiene límite en $K(X,Y)$.*

Una álgebra muy importante en la teoría de operadores es la álgebra de Calkin, la cual surge al considerar el espacio cociente de los operadores acotados módulo el espacio de los operadores compactos.

Definición 1.3.14. *Sea X un espacio lineal y N un subespacio lineal de X. La clase de equivalencia de $x \in X$ módulo N se define y se denota como:*

$$x + N = \{y \in X : y = x + n \text{ para algún } n \in N\}. \tag{1.18}$$

Con esto, se define el espacio cociente de X módulo N, denotado por X/N, como

$$X/N = \{x + N : \ x \in X\},$$

donde la suma y el producto por escalar están definidos por

$$(x+N) + (y+N) = (x+y) + N \ \text{ y } \ \alpha(x+N) = \alpha x + N, \tag{1.19}$$

para cualquier $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{C}$. El neutro aditivo en este espacio lineal está dado por $0 + N$.

De forma inmediata surge una función entre el espacio lineal X y el espacio cociente de X módulo N. Esta es la función $\pi : X \to X/N$ dada por $\pi(x) = x + N$, para todo $x \in X$. Esta función satisface

$$\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Por esta razón, π es llamado el *homomorfismo natural* entre X y X/N. Además, π es sobreyectiva.

Si N un subespacio lineal cerrado de X, entonces el espacio X/N es un espacio normado con la norma

$$\|x + N\| = \text{ínf}\{\|x + n\| : n \in N\}, \quad \forall\, x + N \in X/N, \tag{1.20}$$

además, esta norma es submultiplicativa en X/N. En efecto, sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Luego,

- $\|x + N\| \geq 0$.
- Suponga que $\|x + N\| = 0$. Entonces $\text{ínf}\{\|x + n\| : n \in N\} = 0$. Lo cual implica que $x \in \overline{N} = N$, pues N es cerrado en X. Por lo tanto, $x + N = N$.

  Claramente $\|N\| = 0$. De todo esto, $\|x + N\| = 0$ si y solo si $x + N = N$.
- $\|\alpha(x + N)\| = \|\alpha x + N\| = \text{ínf}\{\|\alpha x + n\| : n \in N\} = \text{ínf}\{\|\alpha x + \alpha n\| : n \in N\} = |\alpha|\, \text{ínf}\{\|x + n\| : n \in N\} = |\alpha|\|x + N\|$.
- $\|(x+N) + (y+N)\| = \|(x+y) + N\| = \text{ínf}\{\|x+y+n\| : n \in N\} = \text{ínf}\{\|x+y+n+n\| : n \in N\} \leq \text{ínf}\{\|x+n\| + \|y+n\| : n \in N\} \leq \text{ínf}\{\|x+n\| : n \in N\} + \text{ínf}\{\|y+n\| : n \in N\} = \|x+N\| + \|y+N\|$.

También, el homomorfismo π cumple con

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\|,$$

para todo $x \in X$. De ésto se deduce que $\pi \in \mathcal{B}(X, X/N)$. Ahora, si se supone que X es una álgebra de Banach unitaria y N un ideal bilateral cerrado de X. Entonces se puede definir una operación producto en X/N como

$$(x + N)(y + N) = xy + N, \tag{1.21}$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Esto a su vez añade una propiedad más al homomorfismo π, la cual es,

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Pongamos todo lo anterior en un solo teorema.

Teorema 1.3.15. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Banach unitaria e $\mathcal{I}$ un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{A}$. Entonces el espacio cociente de $\mathcal{A}$ módulo $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, es una álgebra de Banach unitaria, la cual está dada por $e + \mathcal{I}$, con las operaciones definidas como en (1.19) y (1.21) y la norma como en (1.20).*

Demostración: Con un cálculo rápido se verifica que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es una álgebra con las operaciones definidas .

Se probará que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es una álgebra normada, para esto es suficiente probar que la norma en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es submultiplicativa. Sean $a_1 \in a + \mathcal{I}$ y $b_1 \in b + \mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ es un ideal bilateral de $\mathcal{A}$, entonces $a_1 b_1 - ab = a_1 b_1 - a_1 b + a_1 b - ab = a_1(b_1 - b) + (a_1 - a)b \in \mathcal{I}$. Por lo que, $a_1 b_1 \in ab + \mathcal{I}$. Así,

$\|(a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I})\| = \|ab+\mathcal{I}\| \leq \|a_1b_1\| \leq \|a_1\|\|b_1\|$. Dada la arbitrariedad de $a_1 \in a+\mathcal{I}$ y $b_1 \in b+\mathcal{I}$, se tiene que

$$\|(a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I})\| \leq \|a+\mathcal{I}\|\|b+\mathcal{I}\|.$$

Por lo tanto, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es una álgebra normada.

Sea $e \in \mathcal{A}$ la unidad en $\mathcal{A}$. Luego $(a+\mathcal{I})(e+\mathcal{I}) = ae+\mathcal{I} = a+\mathcal{I}$ y $(e+\mathcal{I})(a+\mathcal{I}) = ea+\mathcal{I} = a+\mathcal{I}$. Por lo tanto $e+\mathcal{I}$ es la unidad en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Así, se concluye que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es una álgebra normada con unidad $e+\mathcal{I}$.

Suponga que $\{a_n+\mathcal{I}\}$ es absolutamente sumable. Dado que en un espacio de Banach toda sucesión absolutamente sumable en este espacio es sumable[6] (vea [19, Proposición 4.4]), es suficiente probar que $\{a_n+\mathcal{I}\}$ es sumable.

Por la propiedad del ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $i_n \in \mathcal{I}$ tal que

$$\|\pi(a_n)\| \leq \|a_n+i_n\| \leq \|\pi(a_n)\| + \frac{1}{2^n}.$$

Entonces, $\{a_n+i_n\}$ es absolutamente sumable. Como $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach, $\{a_n+i_n\}$ es sumable, es decir, existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $\lim b_m = b$, donde $b_m = \sum_{n=1}^{m} a_n+i_n$. Luego, note que

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} \pi(a_n) - \pi(b)\right\| = \|\pi(b_m) - \pi(b)\| \leq \|b_m - b\|.$$

Como el homomorfismo π es continuo, entonces la sucesión $z_m = \sum_{n=1}^{m} \pi(a_n)$ converge a $\pi(b)$. De esta forma, $\{a_n+\mathcal{I}\}$ es sumable y por tanto, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un espacio de Banach. De todo lo anterior, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es una álgebra de Banach unitaria. □

Con los resultados anteriore se está en condiciones de definir la álgebra de Calkin.

Definición 1.3.16. *Sea X un espacio de Banach. Se define y denota la álgebra de Calkin sobre X, $C(X)$, como el espacio cociente de $\mathcal{B}(X)$ módulo $K(X)$. Es decir,*

$$C(X) = \mathcal{B}(X)/K(X) = \{T + K(X) : \ T \in \mathcal{B}(X)\}. \tag{1.22}$$

La Definición 1.3.16 es consistente, pues de acuerdo con el Teorema 1.2.12, $\mathcal{B}(X)$ es una álgebra de Banach unitaria, y por el Teorema 1.3.9, $K(X)$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{B}(X)$. Además, como I es el elemento unidad en $\mathcal{B}(X)$, entonces $I + K(X)$ representa la unidad en la álgebra de Calkin $C(X)$.

1.4. Funciones de valores en un espacio de Banach

La diferenciación e integración de funciones definidas sobre el campo de los números complejos con valores en un espacio de Banach resulta de una generalización de la teoría de funciones de una variable compleja. Este tema es demasiado amplio si se desea saber a cabalidad todos los elementos involucrados para poder integrar funciones entre espacios abstractos. Dada nuestra necesidad, nos basta con solo considerar funciones de $\mathbb{C}$ en un espacio de Banach.

Definición 1.4.1. *Un dominio en $\mathbb{C}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$ que es abierto y conexo.*

[6] Una sucesión $\{a_n\}$ en un espacio normado X es sumable si la sucesión de sumas parciales $y_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ converge en X y es absolutamente sumable si la sucesión $z_m = \sum_{n=1}^{m} \|a_n\|$ converge en $\mathbb{R}$.

Cuando hablamos de funciones de valores en un espacio lineal topológico en general, existen dos formas de definir diferenciabilidad. Una es utilizando la topología del espacio y la otra con la topología débil (vea [29]). En espacios de Banach, estas dos topologías resultan ser las mismas. Así tenemos la siguiente definición.

Definición 1.4.2. *Sea X un espacio de Banach y Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Una función $f : \Omega \to X$ es diferenciable en $\lambda_0 \in \Omega$ si existe $f'(\lambda_0) \in X$ tal que*

$$f'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}. \tag{1.23}$$

En este caso se dice que $f'(\lambda_0)$ es la derivada de f en λ_0 (el cociente en (1.23) en realidad expresa $(\lambda - \lambda_0)^{-1}(f(\lambda) - f(\lambda_0))$). Denotamos con $f^{(k)}(\lambda_0)$ a la k-ésima derivada de f en λ_0 para $k \in \mathbb{N}$.

Si f es diferenciable en λ_0, para todo $\lambda_0 \in \Omega$, entonces se dice que f es analítica en Ω.

Ejemplo 1.4.3. *1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ una álgebra de Banach con unidad e. Defina $p : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ por $p(\lambda) = \lambda^n e$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$f'(\lambda) = (n-1)\lambda^{n-1}e,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición 1.4.4. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, X un espacio normado y $f, g : \Omega \to X$. Si f y g son diferenciables en $\lambda_0 \in \Omega$, entonces*

$$(\alpha f + g)'(\lambda_0) = \alpha f'(\lambda_0) + g'(\lambda_0), \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Demostración: Aplicar propiedades del límite. □

Definición 1.4.5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b > a$. Una función $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es de variación acotada si*

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : \ P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \text{ es partición de } [a, b] \right\} < \infty, \tag{1.24}$$

El número del lado izquierdo de (1.24) es la variación total de γ y se denota por $Var(\gamma)$ (vea [2, Capítulo 6]).

Definición 1.4.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Una trayectoria en Ω es una función continua $\gamma : [a, b] \to \Omega$ para algún intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Una curva en Ω es la imagen de una trayectoria γ en Ω y se denota simplemente por γ.*

Si γ es una curva en Ω que es de variación acotada decimos que γ es una curva rectifcable. Una curva γ en Ω es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$, si además γ satisface que para todo $t, t_1 \in (a, b)$ si $\gamma(t) = \gamma(t_1)$, entonces $t = t_1$ (i.e γ es inyectiva sobre (a, b)). En este caso se dice que γ es una curva simple.

Una curva de Jordan es una curva simple y rectificable en Ω.

El Teorema de la curva de Jordan establece que si γ es una curva de Jordan en $\mathbb{C}$, entonces el conjunto $\mathbb{C} \backslash \gamma$ (se entiende que $\gamma = \gamma([a, b])$) tiene exactamente dos componentes conexas, una de las cuales está acotada y otra que no lo está, consulte [18] para un estudio detallado del Teorema de la curva de Jorda así como el tema de componentes conexas.

Definición 1.4.7. *Sea γ una curva de Jordan en $\mathbb{C}$. El interior de γ, denotado por* $\operatorname{int}(\gamma)$, *es la componente acotada de $\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$. El exterior de γ, denotado por* $\operatorname{ext}(\gamma)$ *es la componente no acotada de $\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$.*

Una curva de Jordan γ está positivamente orientada si al recorrer la curva, el interior de γ queda a la izquierda.

Ahora veamos como se define la integral de Riemann-Stieltjes (vea [2, Capítulo 7]) de funciones de valores en espacios de Banach.

Definición 1.4.8. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y X un espacio de Banach. Sean también $f : \Omega \to X$ y $\gamma : [a,b] \to \Omega$ funciones. Se define la norma de una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de $[a,b]$ como*

$$\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1} : i \in \{1,\ldots,n\}\}.$$

Se dice que f es integrable a lo largo de γ si existe $L \in X$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$, entonces

$$\|L - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))\| < \epsilon,$$

para cualquier elección de puntos $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. En este caso, L es la integral de f a lo largo de γ y se denota por

$$\int_a^b f(\gamma(\xi))d\gamma(\xi).$$

Si f es continua y γ una función de variación acotada, entonces la integral de f a lo largo de γ existe y es única. Para la demostración de este hecho consulte [15, Teorema 3.3.2, pág. 63]. Con base a esto, se define la integral de funciones continuas a lo largo de curvas.

Definición 1.4.9. *Sea Ω subconjunto de $\mathbb{C}$. Suponga que $\Gamma : [a,b] \to \Omega$ es una curva rectificable en Ω y que $f : \Omega \to X$ es continua. Se define y denota la integral de contorno de f a lo largo de la curva Γ como*

$$\int_\Gamma f(\lambda)\; d\lambda = \int_a^b f(\Gamma(\xi))\, d(\Gamma(\xi)). \tag{1.25}$$

En adelante X denota un espacio de Banach. Las operaciones con la integral de contorno en este caso son análogos al caso complejo.

Teorema 1.4.10. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y X un espacio de Banach. Suponga que $f, g : \Omega \to X$ son continuas sobre Ω y $\Gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva rectificable en Ω, entonces*

(i) Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\int_\Gamma (\alpha f + g)(\lambda)\, d\lambda = \alpha \int_\Gamma f(\lambda)\, d\lambda + \int_\Gamma g(\lambda)\, d\lambda.$$

(ii)

$$\left\|\int_\Gamma f(\lambda)\, d\lambda\right\| \leq \sup\{\|f(\lambda)\| : \lambda \in \Gamma\} Var(\gamma).$$

(iii) Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ con Y espacio de Banach. Entonces

$$T\left(\int_\Gamma f(\lambda)\,d\,\lambda\right) = \int_\Gamma T(f(\lambda))\,d\,\lambda.$$

(iv) Si $\{f_k : \Omega \to X\}$ es una sucesión de funciones continuas tal que la serie infinita $\sum_{k=1}^\infty f_k(\lambda)$ converge uniformemente[7] sobre Γ, entonces

$$\int_\Gamma \sum_{k=1}^\infty f_k(\lambda)\,d\,\lambda = \sum_{k=1}^\infty \int_\Gamma f_k(\lambda)\,d\,\lambda.$$

Demostración: Suponga las hipótesis del teorema. Los incisos (i) y (ii) se verifican directamante.

(iii) Asuma que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, donde Y es espacio de Banach. Se define la función $T(f) : \Omega \to Y$ como $T(f)(\lambda) = T(f(\lambda))$, para todo $\lambda \in \Omega$. Como T está acotada y la composición de funciones continuas es continua, $T(f)$ es continua sobre Ω.

Sea $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. Entonces para cualquier elección de puntos $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que

$$T\left(\sum_{i=1}^n f(\Gamma(\tau_i))(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}))\right) = \sum_{i=1}^n T\left(f(\Gamma(\tau_i))\right)(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) \tag{1.26}$$

Como T es continua, podemos tomar el límite en ambos lados de (1.26) cuando $n \to \infty$, de donde se obtiene

$$T\left(\int_\Gamma f(\lambda)\,d\,\lambda\right) = \int_\Gamma T(f(\lambda))\,d\,\lambda.$$

(iv) Suponga que $\{f_k : \Omega \to X\}$ es una sucesión de funciones continuas tal que la serie infinita $\sum_{k=1}^\infty f_k(\lambda)$ converge uniformemente sobre Γ. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $g_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n f_k(\lambda)$, $g(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty f_k(\lambda)$ para todo $\lambda \in \Gamma$ y $s_n = \sum_{k=1}^n \int_\Gamma f_k(\lambda)\,d\,\lambda$. Entonces la sucesión de funciones $\{g_n\}$ converge uniformemente a g sobre Γ.

Sea $\epsilon > 0$ y haga $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{Var(\Gamma)}$. Como $\{g_n\}$ converge uniformemente a g sobre Γ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, $\|g(\lambda) - g_n(\lambda)\| < \epsilon_1$, para todo $\lambda \in \Gamma$. Luego, por los incisos (i), (ii),

$$\begin{aligned}
\left\|\int_\Gamma g(\lambda)\,d\,\lambda - s_n\right\| &= \left\|\int_\Gamma (g(\lambda) - g_n(\lambda))\ d\,\lambda\right\| \\
&\leq \sup\{\|g(\lambda) - g_n(\lambda)\| :\ \lambda \in \Gamma\} Var(\Gamma) \\
&< \epsilon_1 Var(\Gamma) \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Por lo tanto la sucesión $\{s_n\}$ converge a $\int_\Gamma g(\lambda)\,d\,\lambda$. Con esto termina la demostración. □

Resultados clásicos de variable compleja pueden ser formulados en este contexto. Algunos que podemos enunciar son el Teorema de Cauchy, el Teorema de la fórmula integral de Cauchy y el Teorema de Liouville.

[7]Una sucesión de funciones $\{f_k : S \to X\}$ converge uniformemente a f sobre $S \subseteq \mathbb{C}$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k(\lambda) - f(\lambda)\| < \epsilon$, para todo $\lambda \in S$.

Una serie infinita de funciones continuas sobre S converge uniformemente sobre S, si las sumas parciales de la serie converge uniformemente sobre S (vea [2, Capítulo 9]).

Teorema 1.4.11 (Teorema de Cauchy)**.** *Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $f:\Omega\to X$ analítica sobre Ω. Entonces*

$$\int_\Gamma f(\lambda)\,d\,\lambda=0,$$

para cada curva de Jordan Γ en Ω orientada positivamente.

Demostración: Sea $x^*\in X^*$. Entonces $x^*(f):\Omega\to\mathbb{C}$ dada por $x^*(f)(\lambda)=x^*(f(\lambda))$, para todo $\lambda\in\Omega$ es diferenciable en Ω.

Por el Teorema 1.4.10 y el Teorema de Cauchy versión compleja [8, Teorema 6.6], se tiene que

$$x^*\left(\int_\Gamma f(\lambda)\,d\,\lambda\right)=\int_\Gamma x^*(f(\lambda))\,d\,\lambda=0, \tag{1.27}$$

para toda curva de Jordan Γ en Ω orientada positivamente. Dado que (1.27) se cumple para todo $x^*\in X^*$, el Teorema de Hahn-Banach A.20 implica que,

$$\int_\Gamma f(\lambda)\,d\,\lambda=0.$$

□

Teorema 1.4.12 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sean $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ un dominio en $\mathbb{C}$ y $f:\Omega\to X$ una función analítica sobre Ω. Entonces f tiene derivada de todos los ordenes sobre Ω, más aún, para cada $\lambda_0\in\Omega$ y $k\geq 0$, se cumple*

$$f^{(k)}(\lambda_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}}d\lambda \;\; \textit{con } f^{(0)}(\lambda_0)=f(\lambda_0), \tag{1.28}$$

donde Γ es una curva de Jordan en Ω orientada positivamente tal que $\lambda_0\in int(\Gamma)$.

Además, f tiene una representación en series de potencia en una vecindad de λ_0, esto es de la forma

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k,\;\; a_k=\frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!}, \tag{1.29}$$

para todo $\lambda\in D=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\lambda_0|<r\}\subseteq\Omega$, para algún $r>0$.

Demostración: Sea $x^*\in X^*$ y defina $F:\Omega\to\mathbb{C}$ por $F(\lambda)=x^*(f(\lambda))$, para todo $\lambda\in\Omega$. Como f es diferenciable en Ω, F es diferenciable en Ω, así, F es infinitamente diferenciable para cada $\lambda_0\in\Omega$ ([8, Corolario 2.12]), además por el Teorema de la Fórmula de Cauchy versión compleja ([8, Teorema 5.6]), se tiene que, para cada $\lambda_0\in\mathrm{int}(\Gamma)$ y $k\geq 0$,

$$F^{(k)}(\lambda_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}}\,d\,\lambda \;\text{ con } F^{(0)}=F(\lambda_0),$$

donde Γ es una curva de Jordan orientada positivamente.

Entonces F tiene una representación en series de Taylor en una vecindad de λ_0. Es decir,

$$x^*(f(\lambda_0))=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C}\frac{x^*(f(\zeta))}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}\,d\,\zeta\right](\lambda-\lambda_0)^k, \tag{1.30}$$

donde ∂C es la frontera de un disco C con centro en λ_0 contenido en Ω. Además, la serie en (1.30) converge en el interior del disco D. Luego, por el Teorema 1.4.10 (iii),

$$x^*\left(f(\lambda_0) - \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}\,d\zeta\right](\lambda-\lambda_0)^k\right) = 0. \tag{1.31}$$

Dado que (1.31) se cumple para todo $x^* \in X^*$, por el Teorema de Hahn-Banach A.20,

$$f(\lambda_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}\,d\zeta\right](\lambda-\lambda_0)^k. \tag{1.32}$$

Es decir, f tiene una representación en series de potencias sobre D. Por lo tanto, f tiene derivada de todos los ordenes sobre D (vea [17, Proposición 46.3]), más aún,

$$f^{(k)}(\lambda_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Como Ω es un dominio en $\mathbb{C}$, entonces

$$f^{(k)}(\lambda_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}\,d\zeta \ \text{ con } f^{(0)} = f(\lambda_0),$$

donde Γ es una curva de Jordan orientada positivamente con $\lambda_0 \in \operatorname{int}(\Gamma)$ incluida en Ω. $\square$

El Teorema 1.4.12 es muy importante, pues establece que la diferenciabilidad de f en un dominio en $\mathbb{C}$ es una condición suficiente para que f tenga derivadas de cualquier orden, además de admitir una representación en series de potencia.

La prueba de los siguientes teoremas siguen técnicas similares a las utilizadas en la demostración de los Teoremas anteriores, así que se omitiran.

Teorema 1.4.13 (Teorema de Liouville). *Si $f : \mathbb{C} \to X$ es analítica en $\mathbb{C}$ y acotada (existe $K \geq 0$ tal que $\|f(\lambda)\| \leq K$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$), entonces f es constante.*

Teorema 1.4.14 (Teorema de Cauchy para dominios multiplemente conexos). *Sean $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ curvas de Jordan en un dominio Ω de $\mathbb{C}$ orientadas positivamente tales que $\Gamma_i \subseteq \operatorname{int}(\Gamma)$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $\Gamma_i \subseteq \operatorname{ext}(\Gamma_j)$ y para todo $i \neq j$. Si*

$$\widehat{\Omega} = \operatorname{int}(\Gamma) \bigcap \left[\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{ext}(\Gamma_i)\right] \subseteq \Omega$$

y $f : \Omega \to X$ es continua en Ω y analítica en $\widehat{\Omega}$, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{r}\int_{\Gamma_i} f(z)\,dz.$$

Teorema 1.4.15 (Expansión en series de Laurent). *Sea $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < r_1 < |\lambda - \lambda_0| < r_2\}$ para algunos $r_2 > r_1 > 0$. Si $f : \Omega \to X$ es una función analítica sobre Ω, entonces f tiene una representación única en series de Laurent dada por*

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(\lambda-\lambda_0)^k}, \ \ a_k, b_k \in X, \tag{1.33}$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_0)^{k+1}}\,d\zeta, \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ b_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C} f(\zeta)(\zeta-\lambda_0)^{k-1}\,d\zeta, \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde ∂C *es la frontera (orientada positivamente) del disco* $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \rho\}$ *con* $r_1 < \rho < r_2$.

Definición 1.4.16. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.4.15, decimos que* λ_0 *es una singularidad removible si* $b_k = 0$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$, *un polo de orden* p *si* $b_p \neq 0$ *y* $b_k = 0$, *para todo* $k > p$ *(polo simple si* $p = 1$*) y una singularidad esencial si* $b_k \neq 0$, *para un número infinito de* $k \in \mathbb{N}$.

Capítulo 2

Teoría espectral

La teoría espectral es una rama de la matemática que se encarga del estudio de las transformaciones lineales definidas sobre espacios matemáticos abstractos. Más especificamente, en teoría espectral se trata de dar solución a la ecuación

$$(\lambda I - T)(x) = y, \tag{2.1}$$

donde $T \in \mathcal{B}(X)$, I es el operador identidad sobre X, $y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ es un parámetro desconocido y $x \in X$ es desconocido. Sorpresivamente los valores $\lambda \in \mathbb{C}$ que no satisfacen (2.1), determinan por completo al operador T. Como ejemplo de este hecho tenemos el teorema de descomposición espectral [23, Teorema 1.26].

En esta primera sección se hará un estudio de las propiedades más importantes del espectro sobre álgebras de Banach unitaria. A lo largo de este capítulo, $\mathcal{A}$ denotará una álgebra de Banach unitaria (sobre $\mathbb{C}$) con más de un elemento y unidad e.

2.1. El espectro

Definición 2.1.1. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Se define el resolvente de a, $\rho(a)$, como*

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})\},$$

y el espectro de a, como

$$\sigma(a) = \mathbb{C} \backslash \rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \notin \mathcal{G}(\mathcal{A})\}.$$

También, se define la función resolvente de a como $r_a : \rho(a) \to \mathcal{A}$ dada por

$$r_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1}, \tag{2.2}$$

para todo $\lambda \in \rho(a)$.

Por simplicidad, λe se reemplaza por λ cuando $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.1.2. *1. Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces $\sigma(e) = \{1\}$ y $\sigma(o) = \{0\}$.*

2. Sea $\mathcal{A} = C([0,1], \mathbb{C})$ (vea el Ejemplo 1.1.3) y $f \in \mathcal{A}$. Luego, si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda - f$ es invertible en $\mathcal{A}$ si y solo si $(\lambda - f)(t) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$. Por lo tanto $\sigma(f) = f([0,1])$.

3. *Sea* X *un espacio normado con* $\dim(X) < \infty$. *Entonces todo operador* $T \in \mathcal{L}(X)$ *está acotado (vea [19, Corolario 4.30]), es decir, todo operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita es continuo. También,* $T \in \mathcal{L}(X)$ *es inyectivo si y solo si es sobreyectivo. Por lo tanto, el espectro de* T *consta de los valores propios de la matriz cuadrada que representa a* T.

4. *Sea* $X = C([0,1],\mathbb{C})$ *y sea* $x_0 \in X$. *Defina* $T : X \to X$ *por* $T(x)(t) = x_0(t)x(t)$, *para todo* $x \in X$ *y todo* $t \in [0,1]$. *Luego,* $T \in \mathcal{B}(X)$ *con* $\|T\| = \|x_0\|$. *Se mostrará que* $\sigma(T) = x_0([0,1])$. *En efecto, sea* $\lambda \notin x_0([0,1])$ *y tome* $y \in X$. *Entonces la ecuación* $(\lambda - T)(x) = y$ *tiene solución única dada por* $x(t) = y(t)/(\lambda - x_0(t))$ *para todo* $t \in [0,1]$. *Así,* $\sigma(T) \subseteq x_0([0,1])$.

   Ahora, sea $\lambda \in x_0([0,1])$ *y suponga que* $\lambda - T$ *es sobreyectivo. Entonces existe* $x \in X$ *tal que* $(\lambda - T)(x)(t) = 1$ *para todo* $t \in [0,1]$. *Por otro lado, existe* $t_0 \in [0,1]$ *tal que* $\lambda = x_0(t_0)$. *De esta manera,* $0 = (\lambda - x_0(t_0))x(t_0) = 1$, *lo cual es una contradicción. Así,* $x_0([0,1]) \subseteq \sigma(T)$ *y por lo tanto* $\sigma(T) = x_0([0,1])$.

5. *Sea* $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ *donde* X *es un espacio de Banach con* $\dim(X) = \infty$. *Si* $T \in K(X)$ *(operador compacto), entonces* $0 \in \sigma(T)$. *Para probar esto, se debe probar el siguiente resultado: Si* $\mathcal{R}(T)$ *es cerrado entonces* $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$. *En efecto, como* $\mathcal{R}(T)$ *es cerrado, entonces* $\mathcal{R}(T)$ *es un espacio de Banach. Así, por el Teorema de Mapeo abierto A.17,* $T : X \to \mathcal{R}(T)$ *es un mapeo abierto. Así,* $T(B_X(0,1))$ *es abierto en* $\mathcal{R}(T)$, *es decir, existe* $\delta > 0$ *tal que* $B_{\mathcal{R}(T)}(0,\delta) \subseteq T(B_X(0,1))$. *Puesto que* $B_{\mathcal{R}(T)}[0,\delta] = \overline{B_{\mathcal{R}(T)}(0,\delta)} \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$ *y* T *es compacto se tiene que* $B_{\mathcal{R}(T)}[0,\delta]$ *es compacto en* $\mathcal{R}(T)$. *Por la Proposición A.7,* $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$.

   Suponga que $\dim(\mathcal{R}(T)) = \infty$ *pero que* $0 \notin \sigma(T)$. *Entonces* $\mathcal{R}(T) = X$. *El párrafo anterior implica que* X *no es cerrado, lo cual es una contradicción.*

Una propiedad topológica esencial del espectro es que es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$. Esto no siempre sucede cuando el campo sobre el cual se trabaja no es el de los números complejos. Para demostrar este resultado se hace uso de la teoría de funciones de valores en $\mathcal{A}$ definidas sobre el campo complejo.

Proposición 2.1.3. *Sea* $a \in \mathcal{A}$. *Si* $\|a\| < 1$, *entonces* $e - a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ *y*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Además, $\|(e-a)^{-1} - e - a\| \leq \frac{\|a\|^2}{1-\|a\|}$.

Demostración: Suponga que $\|a\| < 1$. La primera parte se ha demostrado en la Proposición 1.1.7. Ahora,

$$\|(e-a)^{-1} - e - a\| = \left\| \sum_{i=2}^{\infty} a^i \right\| = \left\| a^2 \sum_{i=0}^{\infty} a^i \right\| \leq \|a\|^2 \sum_{i=0}^{\infty} \|a\|^i = \frac{\|a\|^2}{1-\|a\|}.$$

□

Observe que si $a, b \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, entonces $ab \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ y además $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Proposición 2.1.4. *Sea* $a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. *Si* $h \in \mathcal{A}$ *es tal que* $\|h\| < \frac{\|a^{-1}\|^{-1}}{2}$, *entonces* $a + h \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. *Más aún,*

$$\|(a+h)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ha^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^3\|h\|^2.$$

Demostración: Sean $h \in \mathcal{A}$ tal que $\|h\| < \frac{\|a^{-1}\|^{-1}}{2}$. Luego, $a + h = a(e + a^{-1}h)$. Como $\|a^{-1}h\| \leq \|a^{-1}\|\|h\| < \frac{1}{2}$, por la Proposición 2.1.3, $e + a^{-1}h \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $a + h \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ con $(a + h)^{-1} = (e + a^{-1}h)^{-1}a^{-1}$. Nuevamente por la Proposición 2.1.3, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|(a+h)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ha^{-1}\| &= \|(e + a^{-1}h)^{-1}a^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ha^{-1}\| \\
&\leq \|((e + a^{-1}h)^{-1} - e + a^{-1}h)\|\|a^{-1}\|; \\
&\leq \frac{\|a^{-1}h\|^2}{1 - \|a^{-1}h\|}\|a^{-1}\| \\
&< 2\|a^{-1}\|^3\|h\|^2.
\end{aligned}
$$

□

Sea $a \in \mathcal{A}$. Observe que para todo $\lambda \in \rho(a)$ se satisface,

$$e + r_a(\lambda)a = \lambda r_a(\lambda) = e + ar_a(\lambda). \tag{2.3}$$

Esto implica que a y $r_a(\lambda)$ conmutan para todo $\lambda \in \rho(a)$. Ahora si $\lambda, \mu \in \rho(a)$, entonces

$$r_a(\lambda) - r_a(\mu) = (\mu - \lambda)r_a(\lambda)r_a(\mu). \tag{2.4}$$

De esto se deduce que $r_a(\lambda)$ y $r_a(\beta)$ conmutan para cualesquiera $\lambda \neq \mu$. La identidad expresada en (2.4) se llama *primera identidad del resolvente.*

Teorema 2.1.5. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

(i) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $|\lambda| > \|a\|$, entonces $\lambda \in \rho(a)$ y

$$r_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Además,

$$\|r_a(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}. \tag{2.6}$$

(ii) El resolvente de a es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y la función resolvente, r_a, es analítica sobre $\rho(a)$.

Demostración: (i) Suponga que $|\lambda| > \|a\|$. Entonces $\frac{\|a\|}{|\lambda|} < 1$, así, por la Proposición 2.1.3,

$$r_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Luego,

$$\|r_a(\lambda)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{a}{\lambda} \right\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \left\| \frac{a}{\lambda} \right\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

(ii) Defina $g : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ por $g(\lambda) = \lambda - a$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Note que g es continua sobre $\mathbb{C}$. También, $g^{-1}(\mathcal{G}(\mathcal{A})) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})\} = \rho(a)$. Puesto que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ es abierto en $\mathbb{C}$ (Teorema 1.1.8), $\rho(a)$ es abierto an $\mathbb{C}$.

Sea $\lambda \in \rho(a)$ y considere $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\|(\mu - \lambda)\| < \frac{\|r_a(\lambda)\|^{-1}}{2}$. Por la Proposición 2.1.4, $\mu - a =$

$(\lambda - a) + (\mu - \lambda) \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ y

$$\|r_a(\mu) - r_a(\lambda) + r_a(\lambda)(\mu - \lambda)r_a(\lambda)\| \leq 2\|r_a(\lambda)\|^3|\mu - \lambda|^2.$$

Por consiguiente,

$$\left\| \frac{r_a(\mu) - r_a(\lambda)}{(\mu - \lambda)} + (r_a(\lambda))^2 \right\| \leq 2\|r_a(\lambda)\|^3|\mu - \lambda|.$$

Tomando el límite cuando $\mu \to \lambda$, se tiene que $r_a'(\lambda) = -r_a(\lambda)^2$. Por lo tanto, r_a es analítica sobre $\rho(a)$. □

Teorema 2.1.6 (Gelfand-Mazur). *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces $\sigma(a)$ es compacto y no vacío en $\mathbb{C}$, además,*

$$\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}.$$

Demostración: Por el Teorema 2.1.5, si $|\lambda| > \|a\|$, entonces $\lambda \in \rho(a)$. Por lo que,

$$\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}.$$

Nuevamente, puesto que $\sigma(a) = \mathbb{C}\backslash\rho(a)$ y $\rho(a)$ es abierto en $\mathbb{C}$ (Teorema 2.1.5), entonces $\sigma(a)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. Así, $\sigma(a)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{C}$ y por tanto compacto en $\mathbb{C}$.

Ahora, asuma que $\sigma(a) = \emptyset$. Por el Teorema 2.1.5, r_a es analítica y acotada sobre $\mathbb{C}$, así, por el Teorema de Liouville 1.4.13, r_a es constante. Como $\|r_a(\lambda)\| \to 0$ cuando $|\lambda| \to 0$ (vea ecu. (2.6)), $r_a(\lambda) = o$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Pero esto es una contradicción, pues $o \notin \mathcal{G}(\mathcal{A})$. □

Definición 2.1.7. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Se define y se denota el radio espectral de a por*

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}. \tag{2.7}$$

Por el Teorema 2.1.6, $r(a)$ siempre existe, para cada $a \in \mathcal{A}$. Existe una fórmula explícita la cual permite el cálculo del radio espectral, la cual se llama *Fórmula del Radio Espectral*, y esta dada por

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.8}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Por el momento, se tomará como verdadera esta fórmula. En líneas posteriores se dará su demostración.

Observación 2.1.8. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

1. *La expansión en series de potencia para r_a en el Teorema 2.1.5 funciona $|\lambda| > r(a)$. En efecto, si $r(a) = \|a\|$ no hay nada que probar. Suponga que $r(a) < \|a\|$ y considere el conjunto $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : r(a) < |\lambda| < r_1\}$, donde $r_1 > \|a\|$. Observe que $D \subseteq \rho(a)$, así, por el Teorema 2.1.5, la función resolvente, r_a, es analítica sobre D. Sea $\lambda \in D$ con $|\lambda| > \|a\|$. Nuevamente por el Teorema 2.1.5, $r_a(\lambda)$ tiene la siguiente representación en series de potencia:*

$$r_a(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\lambda^{k+1}}. \tag{2.9}$$

Por el Teorema 1.4.15, r_a tiene una única expansión en series de Laurent sobre D. Por lo tanto, la expresión en (2.9) es válida para todo $\lambda \in D$.

2. *Si $\lambda_0 \in \mathrm{iso}(\sigma(a))$ (un punto aislado del espectro), entonces λ_0 es un polo o una singularidad esencial de r_a (vea la Definición 1.4.16). Sea $\lambda_0 \in \mathrm{iso}(\sigma(a))$ y suponga que λ_0 es una singularidad removible de r_a. Entonces por el Teorema 1.4.15,*

$$r_a(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda - \lambda_0)^k, \ \ a_k \in \mathcal{A},$$

en una vecindad de λ_0 contenida en $\rho(a)$, digamos $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < r\} \subseteq \rho(a)$. Ahora, tome una sucesión $\{\lambda_n\}$ en D que converja a λ_0. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$r_a(\lambda_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda_n - \lambda_0)^k.$$

Esto muestra que $r_a(\lambda_n) \to a_0$ cuando $n \to \infty$ y por tanto $r_a(\lambda_n)(\lambda_0 - a) \to a_0(\lambda_0 - a)$ cuando $n \to \infty$. Pero

$$r_a(\lambda_n)(\lambda_0 - a) = r_a(\lambda_n)((\lambda_n - a) - (\lambda_n - \lambda_0)) = e - r_a(\lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0),$$

entonces $a_0(\lambda_0 e - a) = e$. Con argumentos similares se prueba que $(\lambda_0 e - a)a_0 = e$. De todo lo anterior, $\lambda_0 \in \rho(a)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto λ_0 es un polo o una singularidad esencial de r_a.

Definición 2.1.9. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces a es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = o$ y es cuasi-nilpotente si $r(a) = 0$.*

Observe que todo elemento en $\mathcal{A}$ nilpotente es cuasi-nilpotente. El recíproco no siempre se cumple.

En el caso de la álgebra de los operadores acotados $\mathcal{B}(X)$, calcular el espectro de un operador no es sencillo en la mayoría de los casos. Ahora se mostrará lo útil del Teorema 2.1.6 y de la Fórmula del Radio Espectral para el cálculo del espectro.

Ejemplo 2.1.10. 1. *Sea $a \in \mathcal{A}$ nilpotente o cuasi-nilpotente. En ambos casos $r(a) = 0$. Como el espectro de a no es vacío, $\sigma(a) = \{0\}$.*

2. *Considere el operador desplazamiento a la izquierda $T_l \in \mathcal{B}\left(l^p(\mathbb{N})\right)$ del Ejemplo 1.2.8. Observe que $\|T_l^n\| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, por la Fórmula del Radio Espectral, $\sigma(T_l) \subseteq B[0,1]$.*

   Ahora, la ecuación $T_l(x) = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x = (x_1, x_2, \cdots,) \in l^2(\mathbb{N})$ implica que $x_{n+1} = \lambda x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $x_1 = 1$, se tiene que $x = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$ si y solo si $|\lambda| < 1$. Es decir, si $|\lambda| < 1$, entonces λ es un eigenvalor de T_l. Así, $B(0,1) \subset \sigma(T_l)$. Puesto que el espectro es cerrado en $\mathbb{C}$, $\sigma(T_l) = B[0,1]$.

2.2. Cálculo funcional

Un teorema muy importante en la teoría espectral es el denominado *Teorema Espectral* para funciones analíticas. Y no es para menos, pues este resultado además de ayudar a calcular el espectro también sirve como argumento en la demostración de numerosos teoremas. La idea es definir elementos en $\mathcal{A}$ por medio de una integral de contorno de funciones analíticas. El objetivo de las siguientes líneas es describir este procedimiento, pues algunos resultados planteados aquí son fundamentales para el desarrollo de nuestro trabajo en el Capítulo 4.

Definición 2.2.1. *Sea D un dominio acotado en $\mathbb{C}$. Si ∂D (frontera de D) es la unión de un número finito de curvas de Jordan que son ajenas entre sí, entonces se dice que D es un dominio elemental de Cauchy. La unión de un número finito de dominios elementales de Cauchy con clausuras ajenas se llama dominio de Cauchy.*

Ejemplo 2.2.2.

1. *Sean $r_2 > r_1 \geq 0$. El conjunto $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : r_1 < \|\lambda\| < r_2\}$ es un dominio de Cauchy.*

El siguiente teorema establece bajo qué condiciones existen dominios de Cauchy.

Teorema 2.2.3. *Sean E compacto y Ω abierto en $\mathbb{C}$ tales que $E \subseteq \Omega$. Entonces existe D dominio de Cauchy tal que $E \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$.*

Demostración: Observe que E y $(\mathbb{C}\backslash\Omega)$ son subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ ajenos entre sí, entonces $\mathrm{dist}(\mathbb{C}\backslash\Omega, E) > 0$. Así, sea $\epsilon = \mathrm{dist}(\mathbb{C}\backslash\Omega, E)$[1].

Para cualesquiera $k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, defina $z_{k,j} \in \mathbb{C}$ dados por $z_{k,j} = \frac{(k+ji)\epsilon}{2}$ y $B_{k,j} = B(z_{k,j}, \tau)$, donde $\tau \in \left(\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Luego, la colección $\{B_{k,j} : k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una cubierta abierta de E. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{l=1}^{n} B_{k_l,j_l}$ y $E \cap B_{k_l,j_l} \neq \emptyset$ con $k_l, j_l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para todo $l = \{1, \ldots, n\}$.

Ponga $D = \bigcup_{l=1}^{n} B_{k_l,j_l}$. Entonces D es abierto y acotado tal que $E \subseteq D$. Se probará que D es un dominio de Cauchy tal que $\overline{D} \subseteq \Omega$. Suponga que $\overline{D} \nsubseteq \Omega$ y tome $d \in \overline{D}\backslash\Omega$. Luego, existe $l \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $d \in \overline{B_{k_l,j_l}}$. Además, como $E \cap B_{k_l,j_l} \neq \emptyset$, $\mathrm{dist}(d, E) \leq 2\tau < \epsilon$. Pero

$$\epsilon = \mathrm{dist}(\mathbb{C}\backslash\Omega, E) \leq \mathrm{dist}(d, E) < \epsilon,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\overline{D} \subseteq \Omega$.

Para cada $l \in \{1, \ldots, n\}$ haga $B_l = B_{k_l,j_l}$ y defina $\chi_l = \{k \in \{1, \ldots, n\} : B_l \cap B_k \neq \emptyset\}$. Por último, para todo $l \in \{1, \ldots, n\}$ ponga $D_l = \bigcup_{k \in \chi_l} B_k$. Sea $l \in \{1, \ldots, n\}$, entonces D_l es abierto, conexo y acotado en $\mathbb{C}$. También, $\mathbb{C}\backslash(D_l \cup \partial D_l)$ es conexo y abierto en $\mathbb{C}$, además $\partial D_l = \partial[\mathbb{C}\backslash(D_l \cup \partial D_l)]$. Note también que $\mathbb{C} = D_l \cup \partial D_l \cup (\mathbb{C}\backslash(D_l \cup \partial D_l))$. Así, ∂D_l es una curva de Jordan en $\mathbb{C}$ (vea [18, Proposición XII.14.20]) y por lo tanto, D_l es un dominio elemental de Cauchy.

Sean $i, l \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $i \notin \chi_l$ y $l \notin \chi_i$. Suponga que $\overline{D_i} \cap \overline{D_l} \neq \emptyset$ y tome $z \in \overline{D_i} \cap \overline{D_l}$. Luego, existen $m \in \chi_i$ y $p \in \chi_l$ tales que $z \in \overline{B_m}$ y $z \in \overline{B_p}$. Así, $|z - z_{k_m,j_m}| \leq \tau$ y $|z - z_{k_p,j_p}| \leq \tau$. Además, note que $z_{k_m,j_m} \neq z_{k_p,j_p}$, pues $D_m \cap D_p = \emptyset$. De esta forma, $\epsilon \leq |z_{k_m,j_m} - z_{k_p,j_p}| \leq 2\tau < \epsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\overline{D_i} \cap \overline{D_l} = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Por lo tanto D es un dominio de Cauchy tal que $E \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$. □

Con el Teorema 2.2.3, se puede encerrar el espectro en un dominio de Cauchy.

Definición 2.2.4. *Sea $a \in \mathcal{A}$ y f una función compleja de variable compleja. Se define el conjunto*

$$\mathcal{H}(a) = \{f : \Delta(f) \to \mathbb{C} : \Delta(f) \text{ es abierto y acotado en } \mathbb{C},\ \sigma(a) \subseteq \Delta(f) \text{ y } f \text{ diferenciable en } \Delta(f)\},$$

[1] Si $E \subset \mathbb{C}$ cerrado y $\lambda \in \mathbb{C}$ se define y denota la distancia de λ a E como $\mathrm{dist}(\lambda, E) = \inf\{|\lambda - e| : e \in E\}$. Si E, A son conjuntos cerrados de $\mathbb{C}$ entonces la distancia de A a E se define y denota por $\mathrm{dist}(A, E) = \inf\{\mathrm{dist}(a, E) : a \in A\}$.

donde $\Delta(f)$ denota el dominio f.

Por el Teorema 2.2.3 es plausible considerar el siguiente conjunto para cada $f \in \mathcal{H}(a)$:

$$F(f,a) = \{\partial B : B \text{ es un dominio de Cauchy tal que } \sigma(a) \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq \Delta(f)\}.$$

Definición 2.2.5. *Sea $a \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{H}(a)$ y $C \in F(f,a)$. Se define $f(a) \in \mathcal{A}$ como*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\,\lambda, \tag{2.10}$$

donde todas las curvas de Jordan en C están orientadas positivamente.

Cabe aclarar que $f(a)$ solo denota a la integral en (2.10), pues es fácil pensar que se trata de la evaluación de f en a, aunque esto sea así en algunos casos como se mostrará en unos momentos.

Observación 2.2.6. *La integral en (2.10) no depende de la elección de $C \in F(f,a)$. En efecto, sea $C' \in F(f,a)$ distinto de C. Entonces $C = \partial B$ y $C' = \partial B'$ para algunos B y B' dominios de Cauchy tales que $\sigma(a) \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq \Delta(f)$ y $\sigma(a) \subseteq B' \subseteq \overline{B'} \subseteq \Delta(f)$. Sea $B'' = B \cap B'$. Note que B'' es abierto en $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(a) \subseteq B''$, entonces por el Teorema 2.2.3, existe D dominio de Cauchy tal que $\sigma(a) \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq B''$. Además, como $\sigma(a) \subseteq D \subseteq \overline{D} \subset \Delta(f)$ se tiene que $\partial D \in F(f,a)$.*

Ahora, dado que ∂D está propiamente contenida en B, por el Teorema de Cauchy para Dominios Multiplemente Conexos 1.4.14, se tiene que

$$\int_{\partial D} f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\,\lambda = \int_C f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\,\lambda.$$

Con argumentos similares se tiene que

$$\int_{\partial D} f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\,\lambda = \int_{C'} f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\,\lambda.$$

Así,

$$\int_C f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\,\lambda = \int_{C'} f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\,\lambda.$$

Denote con $B_\epsilon(\lambda)$ la bola abierta en $\mathbb{C}$ centrada en $\lambda \in \mathbb{C}$ y radio $\epsilon > 0$ y con $B_\epsilon[\lambda]$ la bola cerrada en $\mathbb{C}$ centrada en $\lambda \in \mathbb{C}$ y radio $\epsilon > 0$.

Ejemplo 2.2.7. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

1. *Si $f(\lambda) = \lambda^n$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $n \geq 0$, entonces $f(a) = a^n$.*

   Sean $r, r_1 \in \mathbb{R}$ tales que $r_1 > r > r(a)$ y considere los conjuntos $\Delta(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r_1\}$ y $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$. Observe que f es analítica en $\Delta(f)$ y D es un dominio de Cauchy tal que $\sigma(a) \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \Delta(f)$, de esta forma $\partial D \subseteq F(f,a)$. Ahora, sea $\lambda \in \partial D$. Por la Observación 2.1.8 1., se tiene que

   $$r_a(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{k+1}}. \tag{2.11}$$

   Entonces

   $$f(\lambda) r_a(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{k-n+1}}. \tag{2.12}$$

Como la serie en (2.11) converge uniformemente para todo $\lambda \in \partial D$, la serie en (2.12) se puede integrar término a término a lo largo de la curva ∂D (vea Teorema 1.4.10 (iv)). Pero observe que para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que

$$\int_{\partial D} \frac{a^k}{\lambda^{k-n+1}}\, d\,\lambda = \begin{cases} 0 & si\ k \neq n \\ \\ 2\pi i a^n & si\ k = n \end{cases}$$

Por lo tanto, $f(a) = a^n$.

2. *Si $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda \neq 0$ y $0 \notin \sigma(a)$ entonces $f(a) = a^{-1}$.*

   En efecto, por un lado existe $\epsilon > 0$ tal que $(\sigma(a))_\epsilon \cap B_\epsilon(0) = \emptyset$, donde $(\sigma(a))_\epsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(a)) < \epsilon\}$. Ahora sean $r, r_1 \in \mathbb{R}$ tales que $r_1 > r > r(a)$ y considere $\Delta(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\epsilon}{2} < |\lambda| < r_1\}$ y $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : \epsilon < |\lambda| < r\}$. Entonces f es analítica sobre $\Delta(f)$ y D es un dominio de Cauchy tal que $\sigma(a) \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \Delta(f)$, así, $\partial D \in F(f, a)$. Luego

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{r_a(\lambda)}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\partial D_1} \frac{r_a(\lambda)}{\lambda} d\lambda + \int_{\partial D_2} \frac{r_a(\lambda)}{\lambda} d\lambda \right],$$

   donde $D_1 = B_r(0)$ y $D_2 = B_\epsilon(0)$. Siguiendo las mismas ideas del inciso 1., se cumple que

$$\int_{\partial D_1} \frac{r_a(\lambda)}{\lambda} d\lambda = 0.$$

   Ahora, puesto que $r_a(\lambda)$ es analítica en D_2 y $r_a(0) \neq o$, $\frac{r_a(\lambda)}{\lambda}$ tiene un polo simple en 0 (vea la Definición 1.4.16). Así,

$$\int_{\partial D_1} \frac{r_a(\lambda)}{\lambda} d\lambda = 2\pi i r_a(0) = 2\pi i a^{-1},$$

   y por lo tanto, $f(a) = a^{-1}$.

Se definen las operaciones algebraicas en $\mathcal{H}(a)$ como: para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathcal{H}(a)$ sean

1. $(\alpha f)(\lambda) = \alpha f(\lambda)$, para cada $\lambda \in \Delta(f)$.
2. $(f + g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$, para todo $\lambda \in \Delta(fg) = \Delta(f) \cap \Delta(g)$.
3. $(fg)(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, para todo $\lambda \in \Delta(fg) = \Delta(f) \cap \Delta(g)$.

Estas operaciones inducen operaciones algebraicas sobre el conjunto $\{f(a) : f \in \mathcal{H}(a)\}$.

Proposición 2.2.8. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces para todo $f, g \in \mathcal{H}(a)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple:*

(i) $(\alpha f)(a) = \alpha f(a)$.

(ii) $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$.

(iii) $(fg)(a) = f(a)g(a)$.

(iv) *Si $f(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $(f(a))^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(a)$.*

DEMOSTRACIÓN: Los incisos (i) y (ii) se verifican directamente.

(iii) Sea $C \in F(fg, a)$. Entonces $C = \partial D$ para algún D domonio de Cauchy tal que $\sigma(a) \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \Delta(fg)$. Ahora, por el Teorema 2.2.3, existe D_1 dominio de Cauchy tal que $\sigma(a) \subseteq D_1 \subseteq \overline{D_1} \subseteq D$. Así, $\partial D_1 \in F(fg, a)$. Ponga $C_1 = \partial D_1$ y note que $C, C_1 \in C(f, a)$ y $C, C_1 \in C(g, a)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(a)g(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)r_a(\lambda)\,d\,\lambda \frac{1}{2\pi i}\int_C g(\mu)r_a(\mu)\,d\,\mu \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C \left[\int_{C_1} f(\lambda)g(\mu)r_a(\lambda)r_a(\mu)\,d\,\mu\right] d\,\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_C \left[\int_{C_1} f(\lambda)g(\mu)\frac{r_a(\lambda)-r_a(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\,\mu\right] d\,\lambda, \text{ (ecu. (2.4))} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\int_C f(\lambda)r_a(\lambda)\left[\int_{C_1} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\,\mu\right] d\,\lambda - \int_C f(\lambda)\left[\int_{C_1} \frac{g(\mu)r_a(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\,\mu\right] d\,\lambda\right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\int_C f(\lambda)r_a(\lambda)\left[\int_{C_1} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\,\mu\right] d\,\lambda - \int_{C_1} g(\mu)r_a(\mu)\left[\int_C \frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\,\lambda\right] d\,\mu\right] \end{aligned}$$

Como $C \subseteq \text{ext}(C_1)$, $\int_{C_1} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\,\lambda = 0$. También, como $C_1 \subseteq \text{int}(C)$, $\int_C \frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\,\lambda = -2\pi i f(\mu)$ (Teorema de Cauchy versión compleja [8]). Así,

$$f(a)g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} g(\mu)r_a(\mu)f(\mu)\,d\,\mu = (fg)(a),$$

y por lo tanto, $f(a)g(a) = (fg)(a)$.

(iv) Suponga que $f(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in \sigma(a)$, entonces existe $\Delta \subseteq \Delta(f)$ abierto en $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(a) \subseteq \Delta$ y $f(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in \Delta$. En efecto, sean $\lambda \in \sigma(a)$ y $\epsilon = \frac{|f(\lambda)|}{2} > 0$. Por la continuidad de f en λ, existe $\delta_\lambda > 0$ tal que si $\beta \in B_{\delta_\lambda}(\lambda) \subseteq \Delta(f)$, entonces $|f(\beta) - f(\lambda)| < \epsilon$. Luego,

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\leq |f(\lambda) - f(\beta)| + |f(\beta)| \\ &< \epsilon + |f(\beta)|. \end{aligned}$$

Así, $|f(\beta)| > 0$, para todo $\beta \in B_{\delta_\lambda}(\lambda)$. Haciendo $\Delta = \bigcup_{\lambda\in\sigma(a)} B_{\delta_\lambda}(\lambda)$ se obtiene el resultado.

Ahora, la función $\frac{1}{f} : \Delta \to \mathbb{C}$ dada por $\frac{1}{f}(\lambda) = (f(\lambda))^{-1}$, para todo $\lambda \in \Delta$ es analítica sobre Δ. Con esto, $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(a)$. Luego, por el inciso (iii),

$$f(a)\left(\frac{1}{f}(a)\right) = \left(f\frac{1}{f}\right)(a) = e = \left(\frac{1}{f}f\right)(a)\left(\frac{1}{f}\right)(a)f(a).$$

Por lo tanto, $(f(a))^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(a)$. □

Observación 2.2.9. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Se ha definido las operaciones multiplicación por escalar, suma y producto en $\mathcal{H}(a)$. Ahora defina el conjunto*

$$\mathcal{A}_a = \{f(a) : \, f \in \mathcal{H}(a)\}.$$

Por la Proposición 2.2.8, $\mathcal{A}_a$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$, más aún, $ab = ba$ para todo $a, b \in \mathcal{A}_a$ (i.e $\mathcal{A}$ es una álgebra conmutativa).

Existe una forma fácil de calcular el espectro de $f(a)$ cuando se sabe apriori quién es el espectro de a. Este es el Teorema Espectral para funciones analíticas. Este teorema es uno de los más importantes en Teoría Espectral.

Teorema 2.2.10 (Teorema Espectral)**.** *Sea $a \in \mathcal{A}$ y $f \in \mathcal{H}(a)$. Entonces $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.*

Demostración: Sea $\mu \in \sigma(f(a))$ y suponga que $\mu \notin f(\sigma(a))$. Entonces la función $g : \Delta(f) \to \mathbb{C}$ dada por $g(\lambda) = \mu - f(\lambda)$, para todo $\lambda \in \Delta(f)$, cumple con $g(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in \sigma(a)$. Por la Proposición 2.2.8 (iv), $g(a) \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Pero nuevamente por la Proposición 2.2.8 (ii) y por el Ejemplo 2.2.7 1., $\mu e - f(a) = g(a) \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, sea $\mu \in f(\sigma(a))$ pero suponga que $\mu \in \rho(f(a))$. Por una parte, existe $\beta \in \sigma(a)$ tal que $\mu = f(\beta)$. Así, defina la función $g : \Delta(f) \to \mathbb{C}$ como

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{f(\lambda)-f(\beta)}{\lambda-\beta} & \text{si } \lambda \neq \beta \\ \\ f'(\beta) & \text{si } \lambda = \beta \end{cases}$$

Note que g es analítica sobre $\Delta(g)$, además, $g(\lambda)(\beta - \lambda) = f(\beta) - f(\lambda)$, para todo $\lambda \in \Delta(f)$. Así, por la Proposición 2.2.8, $g(a)(\beta e - a) = f(\beta)e - f(a) = \mu e - f(a)$.

Luego, como $\mu \in \rho(f(a))$ se tiene que

$$e = (\mu e - f(a))^{-1}(\mu e - f(a)) = [(\mu e - f(a))^{-1} g(a)](\beta e - a),$$

y por la Proposición 2.2.8,

$$e = (\mu e - f(a))(\mu e - f(a))^{-1} = g(a)(\beta e - a)(\mu e - f(a))^{-1} = (\beta e - a)g(a)(\mu e - f(a))^{-1}.$$

Esto anterior muestra que $\beta \in \rho(a)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mu \in \sigma(f(a))$. $\square$

Ejemplo 2.2.11. *Sea $a \in \mathcal{A}$.*

1. *[Teorema Espectral para polinomios] Sea $n \in \mathbb{N}$ y $p(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \ldots + \beta_n\lambda^n$ un polinomio con coeficientes en complejos. Por el Ejemplo 2.2.7 1.,*

$$p(a) = \beta_0 e + \beta_1 a + \ldots + \beta_n a^n.$$

Así, por el Teorema espectral 2.2.10, $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$, es decir, el espectro de $p(a)$ es la imagen de $\sigma(a)$ bajo el polinomio p.

2. *Suponga que $0 \notin \sigma(a)$ y sea $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda \neq 0$. Del Ejemplo 2.2.7 2., $f(a) = a^{-1}$. Por el Teorema Espectral 2.2.10, $\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Ahora, se esta en condiciones de demostrar la Fórmula del Radio Espectral, para esto se necesita del siguiente lema.

Lema 2.2.12. *Sea $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$. Entonces $\varphi : \mathcal{A}^* \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(\phi) = \phi(a)$ para todo $\phi \in \mathcal{A}^*$ cumple con $\varphi \in \mathcal{A}^{**}$ y $\|\varphi\| = \|a\|$.*

Demostración: De forma directa se tiene que φ es lineal. Luego,

$$|\varphi(\phi)| = |\phi(a)| \leq \|a\|\|\phi\|.$$

Así, $\|\varphi\| \leq \|a\|$ y por tanto $\varphi \in \mathcal{A}^{**}$. Ahora, por el Teorema de Hahn-Banach A.20, existe $\phi_1 \in \mathcal{A}^*$ tal que $\|\phi_1\| = 1$ y $\phi_1(a) = \|a\|$. De esta manera, $\|a\| = |\phi_1(a)| \leq \|\varphi\|$. Por tanto $\|\varphi\| = \|a\|$. □

Teorema 2.2.13 (Beurling)**.** *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.13}$$

Demostración: Sea $\lambda \in \sigma(a)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema espectral para polinomios (Ejemplo 2.2.11 1.), se tiene que $\lambda^n \in \sigma(a^n)$. Entonces $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$r(a) \leq \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sea $G = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < \frac{1}{r(a)}\}$ haciendo $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ cuando $r(a) = 0$. Note que si $\lambda \in G$, entonces $\lambda^{-1} \in \rho(a)$. Así, sea $\phi \in \mathcal{A}^*$ y defina $f : G \to \mathbb{C}$ como $f(\lambda) = \phi((e - \lambda a)^{-1})$ para todo $\lambda \in G$. La función f es analítica en G. En efecto, la función $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ dada por $g(\lambda) = \lambda^{-1}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ es analítica. También, $h : \rho(a) \to \mathbb{C}$ definida por $h(\lambda) = \phi(r_a(\lambda))$ para todo $\lambda \in \rho(a)$ es analítica en $\rho(a)$. Luego, $f(\lambda) = g(\lambda)h(g(\lambda))$ para todo $\lambda \in G$. Así, f es analítica en G. Sea $r < \frac{1}{r(a)}$ y $\lambda \in B(0, r)\backslash\{0\}$. Entonces $\|g(\lambda)\| > r(a)$. Utilizando (2.6) se tiene que

$$|f(\lambda)| \leq \frac{\|\phi\||g(\lambda)|}{|g(\lambda)| - \|a\|} < \frac{\|\phi\|}{1 - r\|a\|}.$$

Así f está acotada en $B(0, r)\backslash\{0\}$ y por tanto f es analítica en $B_{\frac{1}{r(a)}}(0)$ (vea [28, Teorema 10.20]). De esta forma, f tiene una única representación en series de potencias digamos

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda_n,$$

para todo $\lambda \in B_{\frac{1}{r(a)}}(0)$ donde $c_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \geq 0$. Sea $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|} \leq \frac{1}{r(a)}$. Entonces $\|\lambda a\| < 1$. Por la Proposición 2.1.3,

$$(e - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n.$$

Así,

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(a^n)\lambda^n. \tag{2.14}$$

Por lo tanto, (2.14) es la representación de f en series de potencias para todo $\lambda \in B_{\frac{1}{r(a)}}(0)$. Cabe notar que la serie en (2.14) converge absolutamente a $f(\lambda)$ para todo $\lambda \in B_{\frac{1}{r(a)}}(0)$. De esta forma para cada $\lambda \in B_{\frac{1}{r(a)}}(0)$, existe $M_\phi \geq 0$ tal que $\sup_{n\geq 0} |\lambda|^n\|\phi(a^n)\| \leq M_\phi$.

Ahora, sea $\lambda \in G$ y defina para cada $n \geq 0$, $\varphi_n : \mathcal{A}^* \to \mathbb{C}$ como $\varphi_n(\phi) = \phi(\lambda^n a^n)$ para todo $\phi \in \mathcal{A}^*$. Por el Lema 2.2.12, $\phi_n \in \mathcal{A}^{**}$ y $\|\varphi_n\| = |\lambda|^n \|a^n\|$ para cada $n \geq 0$. Por otro lado, para cada $\phi \in \mathcal{A}^*$,

$$\sup_{n\geq 0} \|\varphi_n(\phi)\| = \sup_{n\geq 0} \|\phi(\lambda^n a^n)\| \leq M_\phi.$$

Por tanto, por el Principio de Acotamiento Uniforme de Banach-Steinhaus A.19, existe $C_\lambda \geq 0$ tan que $\|\varphi_n\| \leq C_\lambda$ para todo $n \geq 0$. De esta forma

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(C_\lambda)^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|},$$

para todo $n \geq 0$. Así,

$$\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

De donde se concluye que

$$\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |z|$$

para todo $|z| > r(a)$. Por tanto $\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$. Con esto se concluye la prueba. □

Considere la álgebra de los operadores acotados $\mathcal{B}(X)$. Dado $T \in \mathcal{B}(X)$, el Teorema de descomposición espectral ([23, Teorema 1.26]) establece bajo qué condicionesel espectro de T es la unión ajena de los espectros de operadores más simples. Para este resultado se hace el estudio de los llamados conjuntos espectrales, los cuales son subconjuntos especiales del espectro. Ahora se hará un estudio de estos conjuntos los cuales ayudarán a establecer resultados importantes para este trabajo en el Capítulo 4.

Definición 2.2.14. *Sea $a \in \mathcal{A}$ y $\Lambda \subseteq \sigma(a)$. Entonces Λ es un conjunto espectral para a si Λ y $\sigma(a)\backslash\Lambda$ son conjuntos cerrados de $\mathbb{C}$.*

Se puede describir a un conjunto espectral por sus propiedades topológicas. Para esto, $\sigma(a)$ se dota de la topología relativa generada por $\sigma(a)$ (vea [25]).

Proposición 2.2.15. *Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces $\Lambda \subseteq \sigma(a)$ es conjunto espectral para a si y solo si Λ es abierto y cerrado en $\sigma(a)$.*

Demostración: Sea $a \in \mathcal{A}$ y $\Lambda \subseteq \sigma(a)$. Suponga que Λ es conjunto espectral para a. Por un lado, observe que $\Lambda = \Lambda \cap \sigma(a)$. Por hipótesis Λ es cerrado en $\mathbb{C}$. Así, Λ es cerrado en $\sigma(a)$. Por otro lado, $\Lambda = \sigma(a)\backslash (\sigma(a)\backslash\Lambda))$. Como $\sigma(a)\backslash\Lambda$ es cerrado en $\mathbb{C}$, Λ es abierto en $\sigma(a)$.

Recíprocamente, asuma que Λ es cerrado y abierto en $\sigma(a)$. Entonces $\Lambda = \sigma(a) \cap U = \sigma(a) \cap V$, con U cerrado y V abierto en $\mathbb{C}$, respectivamente. Por el Teorema de Gelfand-Mazur 2.1.6, $\sigma(a)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. Así, Λ es cerrado en $\mathbb{C}$. Luego, note que $\sigma(a)\backslash\Lambda = \sigma(a) \cap (\mathbb{C}\backslash V)$. Como V es abierto en $\mathbb{C}$ y por el Teorema de Gelfand-Mazur 2.1.6, $\sigma(a)\backslash\Lambda$ es cerrado en $\mathbb{C}$. □

Ejemplo 2.2.16. *Sea $a \in \sigma(a)$.*

1. *$\lambda \in iso(\sigma(a))$ si y solo si $\{\lambda\}$ es un conjunto espectral para a. En efecto, asuma que $\lambda \in iso(\sigma(a))$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\lambda) \cap \sigma(a) = \{\lambda\}$. Así, $\{\lambda\}$ es abierto en $\sigma(a)$. Observe también que $B_{\frac{\epsilon}{2}}[\lambda] \cap \sigma(a) = \{\lambda\}$. Entonces $\{\lambda\}$ es cerrado en $\sigma(a)$. Por la Proposición 2.2.15, $\{\lambda\}$ es un conjunto espectral para a. El recíproco se prueba de forma directa.*

2. *Sea $T_l \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ el operador desplazamiento hacia la izquierda del Ejemplo 1.2.8. En el Ejemplo 2.1.10 se mostró que $\sigma(T_l) = B[0,1]$. Entonces los únicos conjuntos espectrales para T_l son el conjunto vacío y $\sigma(T_l)$.*

3. *[23, Ejemplo 1.20] Sea $\{\theta_1, \theta_2, \dots,\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y defina $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ como*

$$T(x)(k) = \begin{cases} 0 & si\ k = 1 \\ 2x(2) & si\ k = 2 \\ \exp(2\pi\theta_k)x_{k+2} & si\ k > 2. \end{cases}$$

Se tiene que $T \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ y que $\sigma(T) = \{0,2\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Entonces $iso(\sigma(T)) = \{0,2\}$. Por el inciso 1. los conjuntos $\{0\}$ y $\{2\}$ son conjuntos espectrales para T. También los conjuntos $\{0,2\}$ y $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ son conjuntos espectrales para T.

Definición 2.2.17. *Sea D un dominio de Cauchy. Si cada curva de Jordan en la frontera de D está positivamente orientada decimos que ∂D es un contorno de Cauchy. Si C un contorno de Cauchy, se define el interior de C, denotado por $\operatorname{int}(C)$, como $\operatorname{int}(C) = D$ y el exterior de C, denotado por $\operatorname{ext}(C)$, como $\operatorname{ext}(C) = \mathbb{C}\backslash\overline{D}$, donde D es el dominio de Cauchy determinado por C.*

Proposición 2.2.18. *Sean $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{C}$ con E_1 compacto y E_2 cerrado en $\mathbb{C}$. Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, entonces existe C contorno de Cauchy tal que $E_1 \subseteq \operatorname{int}(C)$ y $E_2 \subseteq \operatorname{ext}(C)$.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y sea $\Omega = \mathbb{C}\backslash E_2$. Luego, $E_1 \subseteq \Omega$, así por el Teorema 2.2.3, existe un dominio de Cauchy D tal que $E_1 \subseteq D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$. Orientando positivamente las curvas de Jordan en ∂D se tiene que ∂D es un contorno de Cauchy. Observe que $E_1 \subseteq \operatorname{int}(\partial D)$ y $E_2 = \mathbb{C}\backslash\Omega \subseteq \mathbb{C}\backslash\overline{D} = \operatorname{ext}(\partial D)$. ☐

Observación 2.2.19. *Sea $a \in \mathcal{A}$.*

1. *Sea $\Lambda \subseteq \sigma(a)$ conjunto espectral para a. Entonces existe C contorno de Cauchy tal que $\Lambda \subset \operatorname{int}(C)$ y $\sigma(a)\backslash\Lambda \subseteq \operatorname{ext}(C)$, más aún, $C \subseteq \rho(a)$. En efecto, suponga que $\Lambda \subseteq \sigma(a)$ es un conjunto espectral para a. Entonces Λ es compacto en $\mathbb{C}$. Además $\Lambda \cap (\sigma(a)\backslash\Lambda) = \emptyset$. Por la Proposición 2.2.18, existe un contorno de Cauchy C tal que $\Lambda \subseteq \operatorname{int}(C)$ y $\sigma(a)\backslash\Lambda \subseteq \operatorname{ext}(C)$. Dado que $\mathbb{C}$ es la unión ajena de los conjuntos $\operatorname{int}(C)$, C y $\operatorname{ext}(C)$ se tiene que $C \subseteq \rho(a)$.*

2. *Sea Λ conjunto espectral para a. Entonces existen U_1, U_2 conjuntos abiertos y acotados en $\mathbb{C}$ tales que $\Lambda \subseteq U_1$, $\sigma(a)\backslash\Lambda \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Puesto que Λ y $\sigma(a)\backslash\Lambda$ son conjuntos compactos en $\mathbb{C}$ y ajenos entre sí, el resultado se sigue de inmediato.*

De la Observación 2.2.19 1. considere la siguiente definición .

Definición 2.2.20. *Sea $a \in \mathcal{A}$ y Λ conjunto espectral para a. Defina el conjunto $\mathcal{C}(a,\Lambda)$ como*

$$\mathcal{C}(a,\Lambda) = \{C \subseteq \rho(a) : C \text{ es un contorno de Cauchy tal que } \Lambda \subseteq \operatorname{int}(C) \text{ y } \sigma(a)\backslash\Lambda \subseteq \operatorname{ext}(C)\}.$$

También, se define la proyección espectral asociado a a y Λ, denotado por $p(a,\Lambda) \in \mathcal{A}$, como

$$p(a,\Lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C r_a(\lambda)\, d\,\lambda, \tag{2.15}$$

donde $C \in \mathcal{C}(a,\Lambda)$.

Observación 2.2.21. *Sea $a \in \mathcal{A}$, Λ es un conjunto espectral para a y $C \in \mathcal{C}(a,\Lambda)$. Se puede probar de forma similar como a la prueba de la Observación 2.2.6, que $p(a,\Lambda)$ no depende de la elección de C en $\mathcal{C}(a,\Lambda)$, por lo tanto $p(a,\Lambda)$ está determinada de forma única.*

Por otro lado, por la Observación 2.2.19, existen U_1, U_2 conjuntos abiertos y acotados en $\mathbb{C}$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $\Lambda \subseteq U_1$ y $\sigma(a)\backslash\Lambda \subseteq U_2$. Con esto defina $f : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}$ como

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1 & si\ \lambda \in U_1 \\ \\ 0 & si\ \lambda \in U_2 \end{cases} \tag{2.16}$$

Claramente $f \in \mathcal{H}(a)$. Así, sea $\hat{C} \in F(f,a)$. Como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, entonces $\hat{C} = C_1 \cup C_2$, donde C_1 y C_2 son contornos de Cauchy tales que $C_1 \subseteq U_1$ y $C_2 \subseteq U_2$. Luego,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_1} f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\lambda + \int_{C_2} f(\lambda) r_a(\lambda)\, d\lambda\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} r_a(\lambda)\, d\lambda = p(a,\Lambda).$$

Esto muestra una forma alternativa de ver la proyección espectral.

Teorema 2.2.22. *Sean $a \in \mathcal{A}$ y Λ conjunto espectral para a. Entonces $(p(a,\Lambda))^2 = p(a,\Lambda)$ y $p(a,\Lambda)$ conmuta con $r_a(\mu)$, para todo $\mu \in \rho(a)$.*

Demostración: Por la Observación 2.2.19 2., existen U_1, U_2 conjuntos abiertos y acotados en $\mathbb{C}$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $\Lambda \subseteq U_1$ y $\sigma(a)\backslash\Lambda \subseteq U_2$. Defina $f : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}$ como en 2.16. Entonces $f \in \mathcal{H}(a)$ y $f(a) = p(a,\Lambda)$. Luego, por la Proposición 2.2.8 (iii), $(p(a,\Lambda))^2 = f(a)f(a) = (ff)(a) = f(a) = p(a,\Lambda)$.

Ahora, sea $C \in \mathcal{C}(a,\Lambda)$ y $\mu \in \rho(a)$. Por la Primera Identidad del Resolvente (2.4), $r_a(\mu)$ conmuta con $r_a(\lambda)$, para todo $\lambda \in C$. Así,

$$\begin{aligned} p(a,\Lambda) &= \left[\frac{1}{2\pi i}\int_C r_a(\lambda)\, d\,\lambda\right] r_a(\mu) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C r_a(\lambda) r_a(\mu)\, d\,\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C r_a(\mu) r_a(\lambda)\, d\,\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} r_a(\mu)\int_C r_a(\lambda)\, d\,\lambda \\ &= r_a(\mu) p(a,\Lambda). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(a,\Lambda)$ conmuta con $r_a(\beta)$, para todo $\beta \in \rho(a)$. □

Por último, un resultado que será de utilidad en el cuarto capítulo.

Teorema 2.2.23. *Sea $a \in \mathcal{A}$ y Λ conjunto espectral para a. Entonces $p(a,\Lambda) = o$ si y solo si $\Lambda = \emptyset$.*

Demostración: Suponga que $p(a,\Lambda) = o$, pero que $\Lambda \neq \emptyset$. Considere la función f de la Observación 2.2.21. Entonces $f(a) = p(a,\Lambda)$. Por el Teorema espectral 2.2.10, $\sigma(p(a,\Lambda)) = f(\sigma(a))$. Pero, por un parte, $\sigma(p(a,\Lambda)) = \{0\}$ y por otra parte $f(\sigma(a)) = \{1\}$ o $f(\sigma(a)) = \{0,1\}$, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, suponga que $\Lambda = \emptyset$. Entonces $p(a,\Lambda) = f(a) = o$. $\square$

Capítulo 3

Teoría de Fredholm

La teoría de Fredholm es de suma importancia en la teoría de operadores debido a que permite considerar ciertas clases de operadores los cuales se pueden caracterizar por medio de los elementos invertibles de la álgebra de Calkin $C(X)$. Esta relación nos permitirá en el cuarto capítulo estudiar ciertas partes del espectro.

Aunque la teoría de Fredholm se desarrolla en general sobre el espacio $\mathcal{B}(X,Y)$, donde X es un espacio normado y Y un espacio de Banach, en este apartado se hará solo sobre la álgebra de operadores acotados $\mathcal{B}(X)$ cuando X es un espacio de Banach. Cuando se ponga $\mathcal{B}(X)$ se entenderá que es la álgebra de los operadores acotados, donde X es un espacio de Banach. También, dado un espacio normado X, $B_X(x,\epsilon)$ denotará la bola abierta en X centrada en x con radio $\epsilon > 0$ y $B_X[x,\epsilon]$ la bola cerrada en X centrada en x con radio $\epsilon > 0$.

Definición 3.0.24. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Las dimensiones de los subespacios $\mathcal{N}(T)$ y $X/\mathcal{R}(T)$ (espacio cociente de X módulo $\mathcal{R}(T)$) se denotan con $\alpha(T)$ y $\beta(T)$, respectivamente. Cuando la dimensión de $\mathcal{N}(T)$ no es finita hacemos $\alpha(T) = \infty$. Similarmente, si $X/\mathcal{R}(T)$ no tiene dimensión finita se hace $\beta(T) = \infty$.*

Si $\beta(T) < \infty$ entonces $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en X (Corolario A.14). Este resultado es atribuido a Kato y puede consultar su demostración en el Apéndice. En base a este hecho, se definen los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}\Phi_+(X) &= \{T \in \mathcal{B}(X) : \alpha(T) < \infty \text{ y } \mathcal{R}(T) \text{ es cerrado}\}\\ \Phi_-(X) &= \{T \in \mathcal{B}(X) : \beta(T) < \infty\}.\end{aligned}$$

Los elementos de $\Phi_+(X)$ se llaman *operadores semi-Fredholm superior* y los elementos de $\Phi_-(X)$ *operadores semi-Fredholm inferior.*

También, se definen los *operadores semi-Fredholm* como el conjunto

$$\Phi_\pm(X) = \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X),$$

y los *operadores Fredholm* como

$$\Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X).$$

Por último, se define la *función índice* $i : \Phi_\pm(X) \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ como

$$i(T) = \alpha(T) - \beta(T), \tag{3.1}$$

para todo $T \in \Phi_{\pm}(X)$ y se dice que $i(T)$ es el *índice* de T.

Ejemplo 3.0.25. *1. Sea $T \in \mathcal{G}(\mathcal{B}(X))$. Entonces $\alpha(T) = 0$ y $\beta(T) = 0$. Así, $T \in \Phi(X)$ con $i(T) = 0$.*

2. Sea P una proyección acotada no cero con $\dim(\mathcal{R}(P)) < \infty$ (Definición A.9). Entonces $X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(I - P)$ (Proposición A.11). De esta forma

$$\beta(I - P) = \dim(\mathcal{R}(P)) = \alpha(I - P).$$

Por tanto $i(P) = 0$. Como $P \neq O$, entonces $I - P$ no es sobreyectiva y por tanto $I - P$ no es invertible en $\mathcal{B}(X)$. Este es un ejemplo de un operador con índice cero pero que no es invertible.

3. Sea $X = l^p(\mathbb{N})$ con $p \geq 1$. Considere el operador desplazamiento hacia la izquierda T_l del Ejemplo 1.2.8. Entonces $\alpha(T_l) = 1$ y $\beta(T_l) = 0$. Así, $T_l \in \Phi(X)$ e $i(T_l) = 1$.

Ahora considere el operador desplazamiento hacia la derecha T_r del Ejemplo 1.2.8. Entonces $\alpha(T_r) = 0$ y $\beta(T_r) = 1$. Así, $T_r \in \Phi(X)$ e $i(T_r) = -1$.

Se puede hacer una generalización de este inciso de la siguiente manera: Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $T_{l,n} = T_l^n$ (composición de T_l consigo mismo n veces), entonces $\alpha(T_{l,n}) = n$ y $\beta(T_{l,n}) = 0$. Así, $T \in \Phi(X)$ con $i(T_{l,n}) = n$.

Si $T_{r,n} = T_r^n$, entonces $\alpha(T_{r,n}) = 0$ y $\beta(T_{r,n}) = n$. De esta forma, $T \in \Phi(X)$ con $i(T_{r,n}) = -n$.

4. Sea $X = l^p(\mathbb{N})$ con $p \geq 1$. Defina $T : X \to X$ como $T(x)(k) = 0$ si k es par y $T(x)(k) = x(k_1 + 1)$ si $k = 2k_1 + 1$ con $k_1 \geq 0$, para todo $x \in X$. Entonces T es inyectivo con rango cerrado. Pero $\beta(T) = \infty$. Así, $T \in \Phi_+(X)$ pero $T \notin \Phi_-(X)$.

5. Sea $X = l^p(\mathbb{N})$ con $p \geq 1$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Defina $T_n : X \to X$ por $T_n(x)(k) = x(k)$ si $k \leq n$ y $T_n(x)(k) = 0$ si $k > n$, para todo $x \in X$. Entonces $\alpha(T_n) = \infty$ y $\beta(T) = \infty$ y por tanto, $T \notin \Phi_{\pm}(X)$.

3.1. Dualidad de los operadores semi-Fredholm

Como se ha mencionado en la Sección 1.2, el adjunto de un operador puede dar información útil acerca del operador considerado. Con los operadores semi-Fredholm no se puede esperar menos. Ahora se verá como se relaciona un operador semi-Fredholm con su adjunto.

Definición 3.1.1. *Sean X un espacio normado y E, F subespacios lineales de X y X^*, respectivamente. Los aniquiladores de E y F están definidos como*

$$E^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0,\ x \in E\}$$

y

$$^{\perp}F = \{x \in X : x^*(x) = 0,\ x^* \in F\},$$

respectivamente.

Observación 3.1.2. *Los conjuntos $E^{\perp}$ y ${}^{\perp}F$ son cerrados en X^* y X, repectivamente. En efecto, observe que*

$$^{\perp}F = \bigcap_{x^* \in F} \mathcal{N}(x^*).$$

Dado que x^* es continua para todo $x^* \in F$, $\mathcal{N}(x^*)$ es cerrado, para todo $x^* \in F$. Por lo tanto, ${}^{\perp}F$ es cerrado en X.

Ahora, sea $x \in E$ y considere $f_x : X^* \to \mathbb{C}$ definida como $f_x(x^*) = x^*(x)$, para todo $x^* \in X^*$. Luego, $f_x \in X^{**}$ y por tanto, $\mathcal{N}(f_x)$ es cerrado en X^*. Además, como

$$E^{\perp} = \bigcap_{x \in E} \mathcal{N}(f_x),$$

se tiene que $E^{\perp}$ es cerrado en X^*.

Lema 3.1.3. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado, entonces existe $K > 0$ tal que para cada $y \in \mathcal{R}(T)$ existe $x \in X$ con $y = T(x)$ y $\|x\| \leq K\|y\|$.*

Demostración: Suponga que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en Y. Luego, $T \in \mathcal{B}(X, \mathcal{R}(T))$ es sobreyectiva, donde X y $\mathcal{R}(T)$ espacios de Banach. Por el Teorema del Mapeo Abierto A.16, $T(B_X(0, 1))$ es abierto en $\mathcal{R}(T)$. Así, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\mathcal{R}(T)}(0, \delta) \subseteq T(B_X(0, 1))$.

Haga $K = \frac{2}{\delta}$ y sea $y \in \mathcal{R}(T)$. Si $y = 0$, basta tomar $x = 0$, así, asuma que $y \neq 0$. Luego, existe $z \in B_X(0, 1)$ tal que $T(z) = \frac{\delta y}{2\|y\|}$. Haciendo $x = \frac{2\|y\|z}{\delta}$ se tiene que

$$y = \frac{2\|y\|}{\delta} T(z) = T(x)$$

y

$$\|x\| = \frac{2\|y\|\|z\|}{\delta} \leq \frac{2}{\delta}\|y\| = K\|y\|.$$

□

Proposición 3.1.4. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado, entonces $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado en X^* y $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^{\perp}$.*

Demostración: Suponga que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en Y y sea $x^* \in \mathcal{R}(T^*)$. Entonces existe $y^* \in Y^*$ tal que $x^* = T^*(y^*)$. Luego, $x^*(x) = y^*(T(x)) = y^*(0) = 0$, para todo $x \in \mathcal{N}(T)$. Así, $x^* \in \mathcal{N}(T)^{\perp}$ y por tanto $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T)^{\perp}$.

Ahora, sea $x^* \in \mathcal{N}(T)^{\perp}$ y defina $y_0^* : \mathcal{R}(T) \to \mathbb{C}$ como $y_0^*(T(x)) = x^*(x)$, para todo $x \in X$. Observe que dado que $x^*(\mathcal{N}(T)) = \{0\}$, y_0^* está bien definida . Luego, por el Lema 3.1.3, existe $K > 0$ tal que para todo $y \in \mathcal{R}(T)$ existe $x \in X$ tal que $y = T(x)$ y $\|x\| \leq K\|y\|$. Con esto,

$$\|y_0^*(y)\| = \|y_0^*(T(x))\| = \|x^*(x)\| \leq \|x^*\|\|x\| \leq K\|x^*\|\|y\|,$$

para todo $y \in \mathcal{R}(T)$. Es decir, y_0^* está acotada. Por el Teorema de Hahn-Banach A.20, existe $y^* \in Y^*$ extensión de y_0^* tal que $y^*(T(x)) = x^*(x)$, para todo $x \in X$. Así, $x^* \in \mathcal{R}(T^*)$ (vea Definición 1.2.22) y por lo tanto, $\mathcal{N}(T)^{\perp} \subseteq \mathcal{R}(T^*)$.

De todo lo anterior, $\mathcal{N}(T)^{\perp} = \mathcal{R}(T^*)$ y por consiguiente $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado en X^* (vea la Observación 3.1.2). □

Proposición 3.1.5. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Si $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado, entonces $\mathcal{R}(T)$ es cerrado y $\mathcal{R}(T) = ^\perp \mathcal{N}(T^*)$.*

Demostración: Suponga que $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado en X^*. Sea $y^* \in \mathcal{N}(T^*)$. Entonces $y^*(T(x)) = 0$, para todo $x \in X$. Así, $\mathcal{R}(T) \subseteq ^\perp \mathcal{N}(T^*)$.

Ahora, suponga que $^\perp\mathcal{N}(T^*) \nsubseteq \mathcal{R}(T)$ y tome $y \in ^\perp \mathcal{N}(T^*) \backslash \mathcal{R}(T)$. Por el Teorema de Hahn-Banach [19, Corolario 4.63], existe $y_0^* \in Y^*$ tal que $y_0^*(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{R}(T)$ y $y_0^*(y) = 1$. Así, $y_0^* \in \mathcal{N}(T^*)$ y $y_0^*(y) \neq 0$, lo cual es una contradicción, pues $y \in ^\perp \mathcal{N}(T^*)$. Por lo tanto, $^\perp\mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(T)$ y por consiguiente, $\mathcal{R}(T) = ^\perp \mathcal{N}(T^*)$. De la Observación 3.1.2 se concluye que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en X. □

Lema 3.1.6. *Sea X un espacio de Banach. Si E es un subespacio lineal cerrado de X, entonces*

(i) E^* es isométricamente isomorfo a $X^*/E^\perp$.

(ii) $(X/E)^*$ es isométricamente isomorfo a $E^\perp$.

Demostración: Sea E un subespacio lineal cerrado de X. Entonces

(i) Defina $\phi : X^*/E^\perp \to E^*$ por $\phi(x^* + E^\perp) = x^*|_E$, para todo $x^* + E^\perp \in X^*/E^\perp$. Observe que ϕ está bien definida , pues $x^* + E^\perp = y^* + E^\perp$ si y solo si $x^* - y^* \in E^\perp$ esto a su vez si y solo si $x^*|_E = y^*|_E$. Además, ϕ es una isometría sobreyectiva (vea Definición 1.2.19). En efecto, la linealidad de ϕ es inmediata. Sea $y^* \in E^*$. Como E es subespacio cerrado de X, por el Teorema de Hahn-Banach A.20, existe $z^* \in X^*$ tal que $z^*(e) = y^*(e)$, para todo $e \in E$ y así $\phi(z^*) = y^*$. Por lo tanto, ϕ es sobreyectiva.

Ahora, sea $x^* \in X^*$ y considere $y^* \in x^* + E^\perp$. Entonces y^* es una extensión de $x^*|_E = \phi(x^* + E^\perp)$ y $\|\phi(x^* + E^\perp)\| \leq \|y^*\|$. Así, se tiene que

$$\|\phi(x^* + E^\perp)\| \leq \text{ínf}\{\|y^*\| : y^* \in x^* + E^\perp\} = \|x^* + E^\perp\|.$$

Por otro lado, sea $x^* \in X^*$. Nuevamente, por el Teorema de Hann-Banach A.20, existe $y^* \in X^*$ tal que $y^*(e) = x^*(e)$, para todo $e \in E$ y $\|y^*\| = \|\phi(x^* + E^\perp)\|$. Luego, $y^* - x^* \in E^\perp$ y por consiguiente

$$\|x^* + E^\perp\| = \text{ínf}\{\|x^* + e^*\| : e^* \in E^\perp\} \leq \|x^* + y^* - x^*\| = \|\phi(x^* + E^\perp)\|.$$

De la discusión anterior, $\|\phi(x^* + E^\perp)\| = \|x^* + E^\perp\|$, para todo $x^* \in X^*$. Así, ϕ es una isometría sobreyectiva entre $X^*/E^\perp$ y E^*. Por tanto E^* es isométricamente isomorfo a $X^*/E^\perp$.

(ii) Sean π el homomorfismo natural entre X y X/E (vea la Definición 1.3.14). Luego, como E es subespacio cerrado de X, $X/E = \mathcal{R}(\pi)$ es un espacio de Banach y por tanto cerrado en X (vea demostración del Teorema 1.3.15). Así, por la Proposición 3.1.4, $\mathcal{R}(\pi^*) = \mathcal{N}(\pi)^\perp = E^\perp$. De esta forma, $\pi^* : (X/E)^* \to E^\perp$ es sobreyectiva.

Sea $x^* \in (X/E)^*$. Entonces

$$\|\pi^*(x^*)(x)\| = \|x^*(\pi(x))\| \leq \|x^*\|\|\pi(x)\| \leq \|x^*\|\|x\|,$$

para todo $x \in X$, pues $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ (vea el Teorema 1.3.15). Así $\|\pi^*(x^*)\| \leq \|x^*\|$.

Por otro lado, sea $y \in X/E$ tal que $\|y\| = 1$. Luego, existe $y_0 \in X$ tal que $y = y_0 + E$, además por la propiedad del ínfinmo, para cada $\epsilon > 0$, existe $e_\epsilon \in E$ tal que $\|y_0 + e_\epsilon\| \leq \|y\| + \epsilon = 1 + \epsilon$. Sea

$x^* \in (X/E)^*$, entonces

$$\|x^*(y)\| = \|x^*(\pi(y_0))\| = \|x^*(\pi(y_0+e_r))\| = \|\pi^*(x^*)(y_0+e_r)\| \leq \|\pi^*(x^*)\|\|y_0+e_r\| \leq \|\pi^*(x^*)\|(1+r).$$

De lo anterior,

$$\|x^*\| = \sup_{\|y\|=1} \|x^*(y)\| \leq \lim_{r\to 0} \|\pi^*(x^*)\|(1+r) = \|\pi^*(x^*)\|.$$

Así, $\|x^*\| \leq \|\pi^*(x^*)\|$ y por lo tanto, $\|x^*\| = \|\pi^*(x^*)\|$. De todo lo anterior, π^* es un isomorfismo isométrico entre $(X/E)^*$ y $E^\perp$ y por tanto X/E^* es isométricamente isomorfo a $E^\perp$. □

Teorema 3.1.7. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en X, entonces $\alpha(T) = \beta(T^*)$, $\beta(T) = \alpha(T^*)$.*

Demostración: Suponga que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en X. Entonces, por la Observación 1.2.21, $\alpha(T) = \dim((\mathcal{N}(T))^*)$. Por el Lema 3.1.6 (i), $(\mathcal{N}(T))^*$ es isométricamente isomorfo a $X^*/\mathcal{N}(T)^\perp$, entonces $\alpha(T) = \dim\left(X^*/\mathcal{N}(T)^\perp\right)$. Por hipótesis $\mathcal{R}(T)$ es cerrado, entonces por la Proposición 3.1.4, $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$. Así, $\alpha(T) = \dim(X^*/\mathcal{R}(T^*)) = \beta(T^*)$.

Observe que $x^* \in \mathcal{N}(T^*)$ es equivalente a que $x^*(T(x)) = 0$, para todo $x \in X$. Entonces $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$. Luego, por la Observación 1.2.21, $\beta(T) = \dim((X/\mathcal{R}(T))^*)$. Por el Lema 3.1.6 (ii), $\beta(T) = \mathcal{R}(T)^\perp$. Por lo tanto, $\beta(T) = \dim(\mathcal{N}(T^*)) = \alpha(T^*)$. □

Utilizando el Teorema 3.1.7 se tienen las siguientes relaciones de dualidad de los operadore semi-Fredholm.

Teorema 3.1.8.

$$T \in \Phi_+(X) \quad \textit{si y solo si} \quad T^* \in \Phi_-(X^*). \tag{3.2}$$

$$T \in \Phi_-(X) \quad \textit{si y solo si} \quad T^* \in \Phi_+(X^*). \tag{3.3}$$

Demostración: Por las proposiciones 3.1.4 y 3.1.5, $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en X si y solo si $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado en X^*. De esta forma este teorema se deduce inmediatamente del Teorema 3.1.7. □

Del Teorema 3.1.8 se puede concluir que $T \in \mathcal{B}(X)$ es operador semi-Fredholm si y solamente si T^* es operador semi-Fredholm. Esta es una afirmación importante que relaciona a todo operador con su operador adjunto. Ahora se verá algunas consecuencias del Teorema 3.1.8, para esto se demostrará un teorema preliminar.

Teorema 3.1.9. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $T \in \Phi_+(X)$ si y solo si $T(E)$ no está totalmente acotado para todo $E \subset X$ acotado que no está totalmente acotado (vea la Definición 1.3.1).*

Demostración: Suponga que para cada subconjunto acotado E de X que no está totalmente acotado se tiene que $T(E)$ no está totalmente acotado pero que $\alpha(T) = \infty$. Luego, por la Proposición A.7 el cojunto $S_{\mathcal{N}(T)} = \{x \in \mathcal{N}(T) : \|x\| = 1\}$ no está totalmete acotado. Pero, por hipótesis, $\{0\} = T(S_{\mathcal{N}(T)})$ no está totalmente acotado, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\alpha(T) < \infty$.

Por lo probado anteriormente y la Proposición A.12, existe W subespacio cerrado de X tal que $X = \mathcal{N}(T) \oplus W$. Suponga que $T|_W$ no está acotada por abajo. Entonces, por la Proposición 1.2.15, existe una sucesión $\{w_n\}$ en W con $\|w_n\| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T(w_n)\| \to 0$. Luego, $T(\{w_n\})$ está acotado y por consiguiente está totalmente acotado. Así, por hipótesis, $\{w_n\}$ está totalmente acotado. Ahora, por la Observación 1.3.2, $\{w_n\}$ tiene una subsucesión de Cauchy, digamos $\{w_{n_k}\}$. Como X

es un espacio de Banach, W es un espacio de Banach, de esta manera, existe $w \in W$ tal que $w_{n_k} \to w$. Pero por la continuidad de T, $T(w_{n_k}) \to T(y)$, y así, $T(y) = 0$. Esto demuestra que, $y \in \mathcal{N}(T) \cap W$, lo cual implica que $y = 0$. Esto es una contradicción, ya que $\|w_{n_k}\| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $T|_W$ está acotada por abajo. Por la Proposición 1.2.16, $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T|_W)$ es cerrado en X.

Recíprocamente, suponga que $T \in \Phi_+(X)$ pero que existe $E \subseteq X$ acotado que no está totalmente acotado tal que $T(E)$ está totalmente acotado. Por una parte, por la Proposición A.12, existe W subespacio cerrado de X tal que $X = \mathcal{N}(T) \oplus W$.

Por otro lado, por la Observación 1.3.2, existe una sucesión $\{x_n\}$ en E que no tiene ninguna subsucesión de Cauchy. Además, $\{T(x_n)\}$ está totalmente acotado.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen únicos $v_n \in \mathcal{N}(T)$ y $w_n \in W$ tales que $x_n = v_n + w_n$, y así, $T(x_n) = T(w_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Nuevamente por la Observación 1.3.2, $\{T(w_n)\}$ tiene una subsucesión de Cauchy, digamos $\{T(w_{n_k})\}$.

Observe que $T|_W \in \mathcal{B}(W, \mathcal{R}(T))$ es biyectiva, donde W y $\mathcal{R}(T)$ son espacios de Banach. Entonces, por el Teorema del Mapeo Inverso A.17, existe $T|_W^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), W)$ inversa de $T|_W$ y así $\{w_{n_k}\} = \{T|_W^{-1}(T(w_{n_k}))\}$ es una sucesión de Cauchy, pues $T|_W^{-1}$ está acotada.

Como $\{x_{n_k}\}$ y $\{w_{n_k}\}$ son sucesiones acotadas, $\{v_{n_k}\}$ está acotada. Dado que todo conjunto acotado en un espacio de dimensión finita está totalmente acotado (vea demostración de [19, Teorema 3.83]), $\{v_{n_k}\}$ tiene una subsucesión de Cauchy, digamos que es $\{v_{n_{k_l}}\}$. Por tanto $\{x_{n_{k_l}}\} = \{v_{n_{k_l}} + w_{n_{k_l}}\}$ es una subsucesión de Cauchy de $\{x_n\}$, lo cual no puede ser. □

Con el Teorema 3.1.9 se puede demostrar que el conjunto de los operadores semi-Fredholm superior e inferior son cerrados bajo la composición.

Corolario 3.1.10. *Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X)$. Si $T_1, T_2 \in \Phi_+(X)$, entonces $T_1T_2 \in \Phi_+(X)$. También, si $T_1, T_2 \in \Phi_-(X)$, entonces $T_1T_2 \in \Phi_-(X)$.*

Demostración: Suponga que $T_1, T_2 \in \Phi_+(X)$. Sea $E \subseteq X$ acotado tal que no está totalmente acotado. Por el Teorema 3.1.9, $T_2(E)$ no está totalmente acotado. Aplicando nuevamente el Teorema 3.1.9, $T_1(T_2(E))$ no está totalmente acotado. Por lo tanto, $T_1T_2 \in \Phi_+(X)$.

Ahora suponga que $T_1, T_2 \in \Phi_-(X)$. Entonces, por el Teorema 3.1.8, $T_1^*, T_2^* \in \Phi_+(X^*)$. Así, de la primera parte se tiene que, $T_2^*T_1^* \in \Phi_+(X^*)$. Por tanto, aplicando nuevamente el Teorema 3.1.8, $T_1T_2 \in \Phi_-(X)$ (pues $T_2^*T_1^* = (T_1T_2)^*$). □

Corolario 3.1.11. *Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X)$. Luego, se tiene que:*

(i) Si $T_1T_2 \in \Phi_+(X)$, entonces $T_2 \in \Phi_+(X)$.

(ii) Si $T_1T_2 \in \Phi_-(X)$, entonces $T_1 \in \Phi_-(X)$.

(iii) Si $T_1T_2 \in \Phi(X)$, entonces $T_1 \in \Phi_-(X)$ y $T_2 \in \Phi_+(X)$.

Demostración: (i) Suponga que $T_1T_2 \in \Phi_+(X)$ pero que $T_2 \notin \Phi_+(X)$. Por el Teorema 3.1.9, existe $E \subseteq X$ acotado que no está totalmente acotado tal que $T_2(E)$ está totalmente acotado. Entonces $T_1(T_2(E))$ está totalmente acotado, así, por el Teorema 3.1.9, $T_1T_2 \notin \Phi_+(X)$, lo cual es una contradicción.

(ii) Suponga que $T_1T_2 \in \Phi_1(X)$. Por el Teorema 3.1.8, $(T_1T_2)^* \in \Phi_+(X^*)$. Entonces, por el inciso (i), $T_1^* \in \Phi_+(X^*)$. Nuevamente por el Teorema 3.1.8, $T_1 \in \Phi_-(X)$.

(iii) Consecuencia inmediata de (i) y (ii). □

Corolario 3.1.12. *Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X)$. Se cumple que:*

(i) Si $T_1 \in \Phi_+(X)$ y $T_2 \in K(X)$, entonces $T_1 + T_2 \in \Phi_+(X)$.

(ii) Si $T_1 \in \Phi_-(X)$ y $T_2 \in K(X)$, entonces $T_1 + T_2 \in \Phi_-(X)$.

(iii) Si $T_1 \in \Phi(X)$ y $T_2 \in K(X)$, entonces $T_1 + T_2 \in \Phi(X)$.

Demostración: Observe que si $E_1, E_2 \subseteq X$ están totalmente acotados, entonces $E_1 - E_2 = \{e_1 - e_2;\ e_1 \in E_1,\ e_2 \in E_2\}$ está totalmente acotado.

(i) Suponga que $T_1 \in \Phi_+(X)$ y $T_2 \in K(X)$ pero que $T_1 + T_2 \notin \Phi_+(X)$. Entonces existe $E \subseteq X$ acotado que no está totalmente acotado tal que $(T_1 + T_2)(E)$ está totalmente acotado. Como $T_2 \in K(X)$ y E está acotado, por la Proposición 1.3.5 (v), $T_2(E)$ está totalmente acotado. De donde, $(T_1 + T_2)(E) - T_2(E)$ y así $T_1(E)$ está totalmente acotado. Por el Teorema 3.1.9, $T_1 \notin \Phi_+(X)$, lo cual es una contradicción.

(ii) Suponga que $T_1 \in \Phi_-(X)$ y $T_2 \in K(X)$. Por los teoremas 3.1.8 y A.15, $T_1^* \in \Phi_+(X^*)$ y $T_2^* \in K(X^*)$, respectivamente. Por inciso (i), $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^* \in \Phi_+(X^*)$. Nuevamente por el Teorema 3.1.8 $T_1 + T_2 \in \Phi_-(X)$.

(iii) Consecuencia inmediata de (i) y (ii). □

Se termina esta sección con una importante observación.

Observación 3.1.13. *Si $T \in K(X)$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda - T \in \Phi(X)$. En efecto, en este caso $I \in \Phi(X)$, pues es inyectivo y sobreyectivo, así por el Corolario 3.1.12 (iii), $\lambda - T$ es un operador Fredholm.*

3.2. Operadores Fredholm

Los operadores Fredholm se pueden caracterizar por medio de los elementos invertibles en la álgebra de Calkin $C(X)$. Este es un resultado importante que relaciona la álgebra de los operadores acotados con la álgebra de Calkin.

Proposición 3.2.1. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $T \in \Phi(X)$ si y solo si existen $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X)$ y $K_1, K_2 \in K(X)$ tales que*

$$\begin{aligned} T_1T &= I + K_1 \\ TT_2 &= I + K_2. \end{aligned}$$

Más aún, T_1 y T_2 pueden ser escogidos de tal forma que sean operadores Fredholm.

Demostración: Suponga que $T \in \Phi(X)$. Entonces, por la Proposición A.12 (i) y (ii), existen X_1, X_2 subespacios lineales cerrados de X tales que

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus X_1 = \mathcal{R}(T) \oplus X_2,$$

con $\dim(X_2) = \dim(X/\mathcal{R}(T)) < \infty$. Por un lado, observe que $T|_{X_1} : X_1 \to \mathcal{R}(T)$ (la restricción de T a X_1) es biyectiva, donde X_1 y $\mathcal{R}(T)$ son espacios de Banach, así por el Teorema del Mapeo Inverso A.17, existe $T|_{X_1}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), X_1)$ inversa de $T|_{X_1}$.

Por otro lado, por la Proposición A.11, exsiten P_1, P_2 proyecciones acotadas de X sobre $\mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$, respectivamente. Con todo lo anterior, defina $T_1 = T_2 = T|_{X_1}^{-1} P_2$, $K_1 = -P_1$ y $K_2 = -(I - P_2)$. Observe que T_1, T_2 son operadores Fredholm, pues $\mathcal{N}(T_1) = X_2 = \mathcal{N}(T_2)$ y $\mathcal{R}(T_1) = X_1 = \mathcal{R}(T_2)$. También, note que $\mathcal{R}(K_1) = \mathcal{N}(T)$ y $\mathcal{R}(K_2) = X_2$, los cuales tienen dimensión finita, así por la Proposición 1.3.11, $K_1, K_2 \in K(X)$.

Ahora, sea $x \in X$. Entonces, existen únicos $n \in \mathcal{N}(T)$ y $x_1 \in X_1$ tales que $x = n + x_1$. Luego,

$$T_1T(x) = T_1T(n + x_1) = T_1(T(n) + T(x_1)) = T_1(T(x_1)) = T|_{X_1}^{-1} P_2(T(x_1)) = T|_{X_1}^{-1}(T(x_1)) = x_1$$

e

$$(I + K_1)(x) = (I + K_1)(n + x_1) = n + x_1 - n = x_1.$$

Por lo tanto, $T_1T = I + K_1$. De forma similar se prueba que $TT_2 = I + K_2$ utilizando la descomposición $X = \mathcal{R}(T) \oplus X_2$.

Recíprocamente, suponga que existen $T_1, T_2 \in \Phi(X)$ y $K_1, K_2 \in K(X)$ tales que $T_1T = I + K_1$ y $TT_2 = I + K_2$. Entonces, se tiene que $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(I + K_1)$ y $\mathcal{R}(I + K_2) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Por consiguiente, $\alpha(T) \leq \alpha(I + K_1)$ y $\beta(T) \leq \beta(I + K_2)$ (vea el Lema A.10). Puesto que K_1 y K_2 son operadores compactos, por la Observación 3.1.13, $I + K_1$ y $I + K_2$ son operadores Fredholm, de esta forma $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ son finitos y por lo tanto T es un operador Fredholm. □

Es el momento de caracterizar a los operadores Fredholm por medio de los elementos invertibles de la álgebra de Calkin.

Teorema 3.2.2. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $T \in \Phi(X)$ si y solo si $\pi(T) \in \mathcal{G}(C(X))$.*

Demostración: Suponga que $T \in \Phi(X)$. Por la Proposición 3.2.1, existen $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X)$ y $K_1, K_2 \in K(X)$ tales que $T_1T = I + K_1$ y $TT_2 = I + K_2$. Aplicando el homomorfismo natural π entre $\mathcal{B}(X)$ y $C(X)$, se tiene que $\pi(T_1)\pi(T) = \pi(I)$ y $\pi(T)\pi(T_2) = \pi(I)$. Es decir, $\pi(T)$ es invertible por la izquierda y por la derecha en la álgebra de Calkin $C(X)$ y por lo tanto, $\pi(T)$ es invertible en $C(X)$.

Recíprocamente, suponga que $\pi(T)$ es invertible en $C(X)$. Entonces $\pi(T)$ tiene inversa por la izquierda y por la derecha en $C(X)$. Es decir, existen $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X)$ tales que $\pi(T_1)\pi(T) = \pi(I)$ y $\pi(T)\pi(T_2) = \pi(I)$. Así, existen $K_1, K_2 \in K(X)$ tales que $T_1T - I = K_1$ y $TT_2 - I = K_2$. Por la Proposición 3.2.1, $T \in \Phi(X)$. □

En el siguiente teorema se muestra que la composición de operadores Fredholm es un operador Fredholm (cerrado bajo el producto en $\mathcal{B}(X)$), además, el índice de tal composición es la suma de los índices individuales de los operadores.

Teorema 3.2.3. *Sean $S, T \in \Phi(X)$. Entonces $TS \in \Phi(X)$. Además,*

$$i(TS) = i(T) + i(S).$$

Demostración: Sea $X_0 = \mathcal{R}(S) \cap \mathcal{N}(T)$. Luego, dado que $\alpha(T) < \infty$, entonces $\dim(X_0) < \infty$. Por la Proposición A.12 (i), existen X_1 y X_2 subespacios cerrados de $\mathcal{R}(S)$ y $\mathcal{N}(T)$, respectivamente, tales que

$$\mathcal{R}(S) = X_0 \oplus X_1 \tag{3.4}$$
$$\mathcal{N}(T) = X_0 \oplus X_2. \tag{3.5}$$

Puesto que $\beta(S) < \infty$ y $\mathcal{R}(S) \cap X_2 = \{0\}$, por la Proposición A.12 (ii), existe X_3 subespacio cerrado de dimensión finita de X tal que

$$X = \mathcal{R}(S) \oplus X_2 \oplus X_3. \tag{3.6}$$

Se afirma que:

$$\alpha(T) = \dim(X_0) + \dim(X_2) \tag{3.7}$$
$$\beta(S) = \dim(X_2) + \dim(X_3) \tag{3.8}$$
$$\alpha(TS) = \alpha(S) + \dim(X_0) \tag{3.9}$$
$$\beta(TS) = \beta(T) + \dim(X_3). \tag{3.10}$$

La ecuación (3.7) se sigue de (3.5) y la ecuación (3.8) de (3.6). Para probar (3.9) defina $f : \mathcal{N}(TS) \to X_0$ como $f(x) = S(x)$, para todo $x \in \mathcal{N}(TS)$. Si $x_0 \in X_0$, entonces existe $x \in X$ tal que $x_0 = S(x)$ y $T(x_0) = T(S(x)) = 0$, de modo que f es sobreyectiva. Luego, como $\alpha(S) < \infty$ con $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(TS)$, Por la Proposición A.12 (i), existe X_4 subespacio cerrado de $\mathcal{N}(TS)$ tal que $\mathcal{N}(TS) = \mathcal{N}(S) \oplus X_4$. Note que $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(S)$, de esta forma $\mathcal{N}(TS) = \mathcal{N}(f) \oplus X_4$. Por consiguiente, $f|_{X_4}$ es inyectiva y sobreyectiva y así, $\dim(X_4) = \dim(X_0) < \infty$ y por lo tanto $\dim(\mathcal{N}(TS)) = \alpha(S) + \dim(X_4) = \dim(\mathcal{N}(f)) + \dim(X_0) < \infty$.

Para probar (3.10), observe que $X = \mathcal{R}(S) \oplus X_2 \oplus X_3 = \mathcal{N}(T) \oplus X_1 \oplus X_3$. Dado que $\mathcal{N}(T) \cap (X_1 \oplus X_3) = \{0\}$, $\mathcal{R}(T) = T(X_1) \oplus T(X_3)$. Así, dado que $\mathcal{R}(TS) = T(X_0) + T(X_1) = T(X_1)$ se tiene que

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(TS) \oplus T(X_3).$$

Puesto que $\beta(T) < \infty$, por la Proposición A.12 (ii), existe Z subespacio cerrado de X de dimensión finita tal que $X = \mathcal{R}(T) \oplus Z$. Así,

$$X = \mathcal{R}(TS) \oplus T(X_3) \oplus Z.$$

Ahora considere $g : X_3 \to T(X_3)$ dada por $g(x_3) = T(x_3)$, para todo $x_3 \in X_3$. Claramente g es sobreyectiva. Además, g es inyectiva, pues $\mathcal{N}(T) \cap X_3 = \{0\}$. De esta manera, $\dim(T(X_3)) = \dim(X_3) < \infty$. Por lo tanto, $\dim(X/\mathcal{R}(TS)) = \dim(T(X_3)) + \dim(Z) = \dim(X_3) + \beta(T) < \infty$.

De la discusión anterior, TS es un operador Fredholm con $i(TS) = i(T) + i(S)$. □

Corolario 3.2.4. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $T \in \Phi(X)$, entonces $T^n \in \Phi(X)$ e $i(T^n) = ni(T)$.*

Demostración: Aplicar directamente el Teorema 3.2.3. □

Por último, se tiene una generalización de los argumentos utilizados en el Teorema 3.2.3, el cual será de gran utilidad en el trabajo desarrollado del cuarto capítulo.

Teorema 3.2.5. *Sean $T, S \in \mathcal{B}(X)$. Entonces*

(i) Si $\beta(S) < \infty$ y $\alpha(T) = \infty$, entonces $\alpha(TS) = \infty$.

(ii) Si $\beta(T) = \infty$, entonces $\beta(TS) = \infty$.

(iii) Si $\alpha(T) < \infty$ y $\alpha(S) < \infty$, entonces $\alpha(TS) < \infty$.

Demostración: (i) Sea $X_0 = \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(S)$ y defina $V : \mathcal{N}(TS) \to X_0$ como $V(x) = S(x)$, para todo $x \in \mathcal{N}(TS)$. Sea $y \in X_0$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = S(x)$ y $T(y) = T(S(x)) = 0$, así, V es sobreyectiva. Luego, observe que $\mathcal{N}(V) \subseteq \mathcal{N}(S)$, además como $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(TS)$, entonces $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(V)$. Por lo tanto $\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(S)$.

Entonces
$$\dim \mathcal{N}(TS) = \dim(\mathcal{N}(V)) + \dim(X_0) = \dim \mathcal{N}(S) + \dim(X_0).$$

Asuma que $\dim(X_0) < \infty$. Por la Proposición A.12 (i), existe X_1 subespacio cerrado de $\mathcal{N}(T)$ tal que $\mathcal{N}(T) = X_0 \oplus X_1$. También, como $\beta(S) < \infty$, por la Proposición A.12 (ii), existe X_2 subespacio cerrado de dimensión finita de X tal que $X = \mathcal{R}(S) \oplus X_2$.

Ahora, sea $\{x_k\}_{k\in J}$ una base de Hamel para X_1, donde J es un conjunto de índices. Entonces para cada $k \in J$, existen $r_k \in \mathcal{R}(S)$ y $y_k \in X_2$ tales que $x_k = r_k + y_k$. Suponga que $\sum_{k\in J} a_k y_k = 0$ con $a_k \in \mathbb{C}$, para todo $k \in J$. Entonces $\sum_{k\in J} a_k x_k = \sum_{k\in J} a_k r_k \in \mathcal{R}(S)$. También, $\sum_{k\in J} a_k x_k \in \mathcal{N}(T)$. Así, $\sum_{k\in J} a_k x_k \in X_0 \cap X_1 = \{0\}$. Lo cual implica que $a_k = 0$, para todo $k \in J$. Es decir, $\{y_k\}_{k\in J}$ es linealmente indepenciente en X_2. Así, $\dim(X_1) \leq \dim(X_2) < \infty$, de donde $\dim(\mathcal{N}(T)) < \infty$, lo cual es una contradicción. Así, $\dim(X_0) = \infty$ y por lo tanto, $\alpha(TS) = \dim(\mathcal{N}(TS)) = \infty$.

(ii) Suponga que $\beta(T) = \infty$. Dado que $\mathcal{R}(TS) \subseteq \mathcal{R}(T)$, por el Lema A.10 se concluye que $\beta(TS) = \infty$.

(iii) Vea demostración del Teorema 3.2.3. □

3.3. El ascenso y descenso de un operador

Sean $T, S \in \mathcal{B}(X)$. Observe que $\mathcal{N}(S) \subseteq \mathcal{N}(TS)$ y $\mathcal{R}(TS) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T^n) &\subseteq \mathcal{N}(T^{n+1}), \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \mathcal{R}(T^{n+1}) &\subseteq \mathcal{R}(T^n), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

donde $T^0 = I$. De este hecho se tiene la siguiente definición .

Definición 3.3.1. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Se define el ascenso de $T \in \mathcal{B}(X)$ como*

$$p(T) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{n+1})\} \tag{3.11}$$

y el descenso de T como

$$q(T) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathcal{R}(T^n) = \mathcal{R}(T^{n+1})\}, \tag{3.12}$$

haciendo $p(T) = \text{mín}\,\emptyset = \infty$ y $q(T) = \text{mín}\,\emptyset = \infty$.

Se dice que el ascenso de T, $p(T)$, es finito si $p(T) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e infinito cuando $p(T) = \infty$. De igual manera se hace para el descenso de T.

Definición 3.3.2. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Se define el hiper-núcleo de $T \in \mathcal{B}(X)$ por*

$$\mathcal{N}^\infty(T) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(T^n),$$

y el hiper-rango de T por

$$\mathcal{R}^\infty(T) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}(T^n).$$

Definición 3.3.3. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ y E subespacio lineal de X. Entonces se dice que E es T-invariante si $T(E) \subseteq E$.*

Observación 3.3.4. *Si $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces*

(i) Los conjuntos $\mathcal{N}^\infty(T)$ y $\mathcal{R}^\infty(T)$ son subespacios $T-$invariantes.

(ii) $p(T) = 0$ si y solo si T es inyectivo y $q(T) = 0$ si y solo si T es sobreyectivo.

El ascenso y descenso de un operador acotado $T \in \mathcal{B}(X)$ da información importante sobre la relación entre los números $\alpha(T)$ y $\beta(T)$. Para dejar ver esta relación se tiene que iniciar con la siguiente proposición.

Proposición 3.3.5. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces*

(i) Si $p(T) < \infty$, entonces $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^m)$, para todo $m, n \geq p(T)$.

(ii) Si $q(T) < \infty$, entonces $\mathcal{R}(T^n) = \mathcal{R}(T^m)$, para todo $m, n \geq q(T)$.

Demostración: (i) Suponga que $p = p(T) < \infty$ y sea $x \in \mathcal{N}(T^{p+m})$ con $m \in \mathbb{N}$. Entonces $T^{p+m}(x) = 0$, es decir, $T^{p+1}(T^{m-1}(x)) = 0$. De esto, $T^{m-1}(x) \in \mathcal{N}(T^{p+1}) = \mathcal{N}(T^p)$. Entonces $T^{p+m-1}(x) = 0$ y así, $x \in \mathcal{N}(T^{p+m-1})$. Asi, se ha mostrado que

$$\mathcal{N}(T^{p+m}) \subseteq \mathcal{N}(T^{p+m-1}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{N}(T^p).$$

De (3.11), se obtiene el resultado.

(ii) Suponga que $q = q(T) < \infty$ y sea $y \in \mathcal{R}(T^{q+m})$ con $m \in \mathbb{N}$. Entonces existe $x \in X$ tal que $y = T^{q+m}(x) = T^m(T^q(x))$. Dado que $\mathcal{R}(T^p) = \mathcal{R}(T^{p+1})$, existe $z \in X$ tal que $T^q(x) = T^{q+1}(z)$, y así, $y = T^m(T^{q+1}(z)) = T^{m+q+1}(z) \in \mathcal{R}(T^{m+q+1})$. Lo anterior muestra que

$$\mathcal{R}(T^{q+1}) \subseteq \mathcal{R}(T^{q+2}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{R}(T^{q+m}).$$

Con esta cadena de inclusiones y (3.11) termina la prueba. □

Lema 3.3.6. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $q(T) = 0$ y $p(T) < \infty$, entonces $p(T) = 0$.*

Demostración: Suponga que $q(T) = 0$ y que $p(T) < \infty$ pero que $p(T) \neq 0$. Entonces T es sobreyectivo y $\{0\} \subsetneq \mathcal{N}(T)$. Sea $x_1 \in \mathcal{N}(T)\backslash\{0\}$. Luego, existe $x_2 \in X$ tal que $T(x_2) = x_1$ y $T^2(x_2) = 0$. Procediendo inductivamente, para cada $n \geq 2$ existe $x_{n+1} \in X$ tal que $T(x_{n+1}) = x_n$ y $T^{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Entonces,

$x_{n+1} \in \mathcal{N}(T^{n+1}) \backslash \mathcal{N}(T^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $p(T) = \infty$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p(T) = 0$. $\square$

Proposición 3.3.7. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $p(T) < \infty$ y $q(T) < \infty$, entonces $p(T) = q(T)$.*

Demostración: Suponga que $p = p(T) < \infty$ y $q = q(T) < \infty$. Sea $T_0 = T|_{\mathcal{R}(T^q)}$. Luego, por la Proposición 3.3.5, $\mathcal{R}(T^q) = \mathcal{R}^\infty(T)$, así, $T_0(\mathcal{R}(T^q)) \subseteq \mathcal{R}(T^q)$, pues $\mathcal{R}^\infty(T)$ es subespacio $T-$invariante. Más aún, como $T(\mathcal{R}(T^q)) = \mathcal{R}(T^{q+1}) = \mathcal{R}(T^d)$. Por tanto, T_0 es sobreyectivo y por tanto $q(T_0) = 0$. Además, como $p < \infty$, $p(T_0) < \infty$. Así, por el Lema 3.3.6, $p(T_0) = 0$ y por la Observación 3.3.4, T_0 es biyectivo.

Sea $x \in \mathcal{N}(T^{q+1})$ y haga $y = T^q(x)$. Luego, $T_0(y) = T^{q+1}(x) = 0$. Dado que T_0 es biyectivo, $y = 0$ y lo por tanto, $x \in \mathcal{N}(T^q)$. así, $p \leq q$.

Ahora, si $q = 0$, por el parrafo anterior $p \leq 0$ y por tanto, $p = 0$. Suponga que $q \geq 1$ y sea $y \in \mathcal{R}(T^{q-1}) \backslash \mathcal{R}(T^q)$. Entonces existe $x \in X$ tal que $y = T^{q-1}(x)$. Ponga $z = T(y) = T^q(x) \in \mathcal{R}(T^q)$. Como T_0 es biyectivo, existe $w \in \mathcal{R}(T^q)$ tal que $z = T^q(w)$. Luego, haga $u = x - w$. Así, se tiene que $T^q u = T^q(x) - T^q(w) = 0$ y $T^{q-1}(u) = y - T^{q-1}(w)$. Como $y \in \mathcal{R}(T^{q-1}) \backslash \mathcal{R}(T^q)$ y $T^{q-1}(w) \in \mathcal{R}(T^q)$, $T^{q-1}(u) \neq 0$. Por lo tanto, $\mathcal{N}(T^{q-1}) \subsetneq \mathcal{N}(T^q)$ y así, $p \geq q$. De todo lo anterior, se concluye que $p(T) = q(T)$. $\square$

Lema 3.3.8. *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces:*

(i) $p(T) \leq m < \infty$ si y solo si $\mathcal{R}(T^m) \cap \mathcal{N}(T^n) = \{0\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $q(T) \leq m < \infty$ si y solo si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe Y_n subespacio de $\mathcal{N}(T^m)$ tal que $X = Y_n \oplus \mathcal{R}(T^n)$.

Demostración: (i) Suponga que $p(T) \leq m < \infty$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $y \in \mathcal{R}(T^m) \cap \mathcal{N}(T^n)$. Entonces existe $x \in X$ tal que $y = T^m(x)$ y $T^n(y) = T^n(T^m(x)) = 0$. Con esto $x \in \mathcal{N}(T^{m+n}) = \mathcal{N}(T^m)$ (Proposición 3.3.5) y así $y = 0$. Por tanto $\mathcal{R}(T^m) \cap \mathcal{N}(T^n) = \{0\}$.

Recíprocamente, suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(T^m) \cap \mathcal{N}(T^n) = \{0\}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathcal{N}(T^{m+n})$. Entonces $T^m(x) \in \mathcal{N}(T^n)$ y $T^m(x) \in \mathcal{R}(T^m)$. Por hipótesis, $T^m(x) = 0$ y por tanto $x \in \mathcal{N}(T^m)$. Es decir, $\mathcal{N}(T^{m+n}) \subseteq \mathcal{N}(T^m)$. Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, $p(T) \leq m < \infty$.

(ii) Suponga que $q(T) \leq m < \infty$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y Y subespacio de X tal que $X = Y \oplus \mathcal{R}(T^n)$ (véase [19]). Sea $\{y_j\}_{j \in J}$ una base de Hamel para Y, donde J es un conjunto de índices. Por la Proposición 3.3.5 (ii), para cada $j \in J$, existe $x_j \in X$ tal que $T^m(y_j) = T^{m+n}(x_j)$. Así, para cada $j \in J$ sea $z_j = y_j - T^n(x_j)$. Observe que $\{z_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{N}(T^m)$. Luego, ponga $Y_n = \langle \{z_j\}_{j \in J} \rangle$ (espacio generado por $\{z_j\}_{j \in J}$).

Sea $x \in X$. Entonces existe $y \in X$ tal que $x = \sum_{j \in J} a_j y_j + T^n(y)$, para algún $y \in X$ y $a_j \in \mathbb{C}$, para todo $j \in J$. Luego,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j \in J} a_j (z_j + T^n(x_j)) + T^n(y) \\ &= \sum_{j \in J} a_j z_j + T^n \left(\sum_{j \in J} a_j x_j + y \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X = Y_n + \mathcal{R}(T^n)$. Ahora, sea $x \in Y_n \cap \mathcal{R}(T^n)$. Entonces existe $y \in X$ tal que $x = T^n(y)$ y para todo $j \in J$, existe $a_j \in \mathbb{C}$ tal que $x = \sum_{j\in J} a_j z_j$. Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J} a_j y_j &= \sum_{j\in J} a_j(z_j + T^n(x_j)) \\ &= T^n\left(y + \sum_{j\in J} a_j x_j\right).\end{aligned}$$

Entonces $\sum_{j\in J} a_j y_j \in \mathcal{R}(T^n) \cap Y = \{0\}$. Luego, dado $\{y_j\}_{j\in J}$ es linealmente independiente se tiene que $a_j = 0$, para todo $j \in J$. Así, $x = 0$ y por consiguiente $Y_n \cap \mathcal{R}(T^n) = \{0\}$. De todo lo anterior, $X = Y_n \oplus \mathcal{R}(T^n)$.

Recíprocamente, suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe Y_n subespacio de $\mathcal{N}(T^m)$ tal que $X = Y_n \oplus \mathcal{R}(T^n)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $T^m(X) = T^m(Y_n) + T^m(T^n(X)) = T^{m+n}(X)$. Por lo tanto, $q(T) \leq m < \infty$. □

Teorema 3.3.9. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces:*

(i) Si $p(T) < \infty$, entonces $\alpha(T) \leq \beta(T)$.

(ii) Si $q(T) < \infty$, entonces $\beta(T) \leq \alpha(T)$.

(iii) Si $p(T) = q(T) < \infty$, entonces $\alpha(T) = \beta(T)$ (posiblemente infinito).

(iv) Si $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y $p(T) < \infty$ o $\beta(T) < \infty$, entonces $p(T) = q(T)$.

Demostración: (i) Suponga que $p = p(T) < \infty$. Si $\beta(T) = \infty$ no hay nada que probar. Asuma que $\beta(T) < \infty$. Entonces por el Corolario 3.1.10 (ii), $T^p \in \Phi_-(X)$ y así $\beta(T^p) < \infty$. Por otra parte, por el Lema 3.3.8, $\mathcal{R}(T^p) \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}$. Sea $Y = \mathcal{R}(T^p) \oplus \mathcal{N}(T)$, entonces, por el Corolario 3.2.4 y la Proposición 3.3.5 (i)

$$\alpha(T) = \dim(\mathcal{N}(T)) = \dim(Y/\mathcal{R}(T^p)) \leq \dim(X/\mathcal{R}(T^p)) = \beta(T^p) < \infty.$$

Por lo tanto, $T \in \Phi(X)$.

Ahora, sea $n \geq p$. Entonces

$$ni(T) = i(T^n) = \alpha(T^n) - \beta(T^n) = \alpha(T^p) - \beta(T^n). \tag{3.13}$$

Luego, si $q = q(T) < \infty$, por el Corolario 3.3.7, $p(T) = q(T)$. Así, por la Proposición 3.3.5, $ni(T) = \alpha(T^p) - \beta(T^p)$. Cuando $n \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande, $i(T) = 0$ y por lo tanto $\alpha(T) = \beta(T)$.

Si $q(T) = \infty$, entonces $\mathcal{R}(T^{n+1}) \subsetneq \mathcal{R}(T^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y por consiguiente $\beta(T^n) < \beta(T^{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, $\beta(T^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Así, existe $r \geq p$ tal que $\alpha(T^p) < \beta(T^r)$. Por lo tanto, de (3.13) se concluye que $\alpha(T) < \beta(T)$.

(ii) Suponga que $q = q(T) < \infty$. Si $\alpha(T) = \infty$ termina la prueba. Asuma que $\alpha(T) < \infty$. Por el Teorema 3.2.5 (iii), $\alpha(T^q) < \infty$. Por otro lado, por el Lema 3.3.8, existe Y_q subespacio de $\mathcal{N}(T^q)$ tal que $X = Y_q \oplus \mathcal{R}(T)$. Así, $\beta(T) = \dim(Y_q) \leq \alpha(T^q) < \infty$ y por lo tanto $T \in \Phi(X)$.

Sea $n \geq q$. Por el Corolario 3.2.4 y la Proposición 3.3.5 (ii),

$$ni(T) = i(T^n) = \alpha(T^n) - \beta(T^n) = \alpha(T^n) - \beta(T^q). \tag{3.14}$$

Si $p = p(T) < \infty$. Entonces $p = q$ y por tanto, $ni(T) = \alpha(T^q) - \beta(T^q)$. Cuando $n \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande, $i(T) = 0$. Por lo tanto $\alpha(T) = \beta(T)$.

Si $p = p(T) = \infty$. Entonces $\mathcal{N}(T^n) \subsetneq \mathcal{N}(T^{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, $\alpha(T^n) < \alpha(T^{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, $\alpha(T^n) \to \infty$, cuando $n \to \infty$. De lo anterior, existe $r \geq q$ tal que $\alpha(T^r) > \beta(T^q)$. De esto y de (3.14), se tiene que $i(T) > 0$ y por lo tanto $\alpha(T) > \beta(T)$.

(iii) Aplicar directamente incisos (i) y (ii) de este teorema.

(iv) Suponga que $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y $p = p(T) < \infty$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\alpha(T^n) = \beta(T^n)$, pues $i(T^n) = ni(T) = 0$. Por la Proposición 3.3.5 (i), se tiene que,

$$\dim(X/\mathcal{R}(T^p)) = \dim(\mathcal{N}(T^p)) = \dim(\mathcal{N}(T^{p+n})) = \dim(X/\mathcal{R}(T^{p+n})).$$

Así, $\mathcal{R}(T^p) = \mathcal{R}(T^{p+n})$. Por lo tanto, $q(T) < \infty$ y así $p(T) = q(T)$ (Proposición 3.3.7). De forma análoga se prueba el resultado cuando $q(T) < \infty$. □

El ascenso y descenso de un operador Fredholm, da información acerca de su índice.

Corolario 3.3.10. *Sea $T \in \Phi(X)$. Si $p(T) < \infty$ y $q(T) < \infty$ entonces $i(T) = 0$.*

Los operadores Fredholm con ascenso y descenso finito, son llamados en la literatura operadores Riesz-Schauder.

Corolario 3.3.11. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $T \in \Phi(X)$ y $p(T) < \infty$ y $q(T) < \infty$ entonces T es inyectivo si y solo si T es sobreyectivo.*

Por último, en la Observación 3.1.13 se mencionó que si $\lambda \neq 0$ y $T \in K(X)$, entonces $\lambda - T$ es un operador Fredholm. Pero se puede decir algo más acerca de este operador.

Teorema 3.3.12. *Si $T \in K(X)$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda - T \in \Phi(X)$ e $i(\lambda - T) = 0$.*

Demostración: Sea $T \in K(X)$ y $\lambda \neq 0$. Observar que por el Corolario 3.3.10, es suficiente probar que $p(\lambda - T) < \infty$ y $q(\lambda - T) < \infty$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $N_n = \mathcal{N}((\lambda - T)^n)$ y suponga que $p(\lambda - T) = \infty$. Entonces $N_n \subsetneq N_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el Lema de Riesz A.6, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in N_n$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n + N_{n-1}\| \geq \frac{1}{2}$. Así, $\{x_n\}$ está acotado en X. Ahora, si $m > n$, entonces

$$T(x_m) - T(x_n) = \lambda x_m - (\lambda - T)(x_m) - \lambda x_n + (\lambda - T)(x_n) = \lambda x_m - z,$$

donde $z = (\lambda - T)(x_m) + \lambda x_n - (\lambda - T)(x_n) \in N_{m-1}$.

Luego,

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| = \|\lambda x_m - z\| = |\lambda| \|x_m - \frac{z}{\lambda}\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{T(x_n)\}$ no está totalmente acotada. Así, por la Proposición 1.3.5, T no es compacto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p(\lambda - T)$ es finito.

Como T es compacto, por el Teorema de Schauder A.15, T^* es compacto, además $\lambda - T^* \in \Phi(X^*)$ (Observación 3.1.13). De la primera parte de este teorema, $p(\lambda - T^*) < \infty$. Ahora como $(\lambda - T^*)^{p+n}$ es un operador Fredholm, $\mathcal{R}((\lambda - T^*)^{p+n})$ es cerrado en X^*, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por la Proposición 3.1.5,

$$\mathcal{R}((\lambda - T)^p) =^{\perp} \mathcal{N}((\lambda - T^*)^p) =^{\perp} \mathcal{N}((\lambda - T^*)^{p+n}) = \mathcal{R}((\lambda - T)^{p+n}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $q(\lambda - T)$ es finito. □

3.4. Caracterización de los Operadores semi-Fredholm

Los elementos invertibles por la izquierda y por la derecha de la álgebra de Calkin están intimamente relacionados con los operadores semi-Fredholm superior e inferior, respectivamente. Establecer tal relación es el objetivo de esta sección.

En espacios de dimensión finita todo conjunto acotado está totalmente acotado ([19, Teorema 3.83]). Recíprocamente, todo conjunto totalmente acotado está acotado. Con esta observación se enuncia el primer lema.

Lema 3.4.1. *Sean X un espacio normado, X_1 y X_2 subespacio de X tales que X_1 es cerrado y $\dim(X_2) < \infty$. Si $X' = X_1 \oplus X_2$, entonces X' es cerrado en X.*

Demostración: Suponga que $X' = X_1 \oplus X_2$ y defina $P : X' \to X_2$ como $P(x) = x_2$, para todo $x \in X'$, donde $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$. Observe que $P \in \mathcal{L}(X', X_2)$.

Asuma que P no está acotada. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a cero con $\|P(x_n)\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{P(x_n)\}$ es una sucesión acotada en X_2 y por tanto totalmente acotada, pues X_2 tiene dimensión finita. Luego, por la Observación 1.3.2 (ii), $\{P(x_n)\}$ tiene una subsucesión de Cauchy, digamos $\{P(x_{n_k})\}$. Nuevamente, como $\dim(X_2) < \infty$, entonces X_2 es un espacio de Banach, así, existe $x_2 \in X_2$ tal que $P(x_{n_k}) \to x_2$. De donde, $(I - P)(x_{n_k}) \to -x_2$, luego, puesto que $\{(I - P)(x_{n_k})\} \subseteq X_1$ y X_1 es cerrado en X, entonces $x_2 \in X_1$. Así, $x_2 = 0$, pues $x_2 \in X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Pero esto es una contradicción ya que $1 = \|x_{n_k}\|$, para todo $k \in \mathbb{C}$. Por lo tanto P está acotada.

Ahora, sea $\{x_n\}$ una sucesión en X' tal que $x_n \to x$. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X. Dado que P está acotada, $\{P(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en X_2. Así, existe $x_2 \in X_2$ tal que $P(x_n) \to x_2$. Luego, note que $(I - P)(x_n) \to x - x_2 \in X_1$, pues X_1 es cerrado. De esta forma, $x \in X'$. Por lo tanto, X' es cerrado en X. □

Teorema 3.4.2. *Sea $T \in \Phi_+(X)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $U \in \mathcal{B}(X)$ con $\|U\| < \epsilon$, $T + U \in \Phi_+(X)$. Además*

$$\alpha(T + U) \leq \alpha(T) \text{ más aún, si } \beta(T) = \infty \text{ entonces } \beta(T + U) = \infty.$$

Demostración: Por la Proposición A.12 existe Q subespacio cerrado de X tal que

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus Q.$$

Luego, note que $T|_Q \in \mathcal{B}(Q, \mathcal{R}(T))$ es biyectiva, donde Q y $\mathcal{R}(T)$ son espacios de Banach, así, por el Teorema del Mapeo Inverso A.17, existe $T|_Q^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), Q)$ inversa de $T|_Q$. Por la Proposición 1.2.16, $T|_Q$ está acotado por abajo, es decir, existe $K > 0$ tal que $\|T(q)\| \geq K\|q\|$, para todo $q \in Q$.

Sea $\epsilon = \frac{K}{3}$ y considere $U \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|U\| < \epsilon$. Entonces

$$0 \leq \|U(q)\| < \epsilon\|q\| = \frac{K}{3}\|q\| \tag{3.15}$$

y

$$\|(T+U)(q)\| \geq |\|T(q)\| - \|U(q)\|| \geq |K\|q\| - \frac{K}{3}\|q\|| = \frac{2K}{3}\|q\|, \tag{3.16}$$

para todo $q \in Q$. De (3.16), $(T+U)|_Q$ está acotado por abajo. Nuevamente por la Proposición 1.2.16, $\mathcal{R}((T+U)|_Q) = (T+U)(Q)$ es cerrado en X.

Sea $p = \alpha(T)$ y suponga que $\mathcal{N}(T+U)$ tiene $p+1$ elementos linealmente independientes, digamos $\{x_n\}_{n=1}^{p+1}$. Como $(T+U)|_Q$ está acotada por abajo, $(T+U)|_Q$ es invertible sobre su rango, así, $\mathcal{N}(T+U) \cap Q = \{0\}$ y por consiguiente, $\{x_n + Q\}_{n=1}^{p+1}$ es linealmente independiente en X/Q. Pero esto no puede ser, pues $\dim(X/Q) = p$ (vea el Lema A.10 (i)). Por tanto, $\alpha(T+U) \leq \alpha(T)$.

Ahora, observe que $Q \subseteq Q \oplus \mathcal{N}(T+U)$. Por el Lema A.10 (ii), $\dim(X/(Q \oplus \mathcal{N}(T+U))) \leq \dim(X/Q) = \alpha(T) < \infty$. Así, por la Proposición A.12 (ii), existe Z subespacio cerrado de X de dimensión finita tal que

$$X = Q \oplus \mathcal{N}(T+U) \oplus Z.$$

De lo anterior, y dado que $(T+U)(Q) \cap (T+U)(Z) = \{0\}$ se tiene que

$$\mathcal{R}(T+U) = (T+U)(Q) \oplus (T+U)(Z). \tag{3.17}$$

Luego, como $\dim(Z) < \infty$, $\dim((T+U)(Z)) < \infty$. También, $(T+U)(Q)$ es cerrado en X, de esta manera por el Lema 3.4.1, $\mathcal{R}(T+U)$ es cerrado en X.

Ahora suponga que $\beta(T) = \infty$. De (3.15) y (3.16),

$$\|T(q) - (T+U)(q)\| = \|U(q)\| < \frac{K}{3}\|q\| \leq \frac{\|T(q)\|}{3}$$

y

$$\|(T+U)(q) - T(q)\| = \|U(q)\| \leq \|U\|\|q\| \leq \frac{3\|U\|}{2K}\|(T+U)(q)\| < \frac{\|(T+U)(q)\|}{2},$$

para todo $q \in Q$.

Ponga, $R_1 = \mathcal{R}(T|_Q)$, $R_2 = \mathcal{R}((T+U)|_Q)$ y sea $q \in Q$, entonces

$$\|T(q) + R_2\| \leq \|T(q) - (T+U)(q)\| < \frac{\|T(q)\|}{3} \tag{3.18}$$

y

$$\|(T+U)(q) + R_1\| \leq \|(T+U)(q) - T(q)\| < \frac{\|(T+U)(q)\|}{2}. \tag{3.19}$$

De (3.18) y (3.19) se tiene

$$\begin{aligned}
\zeta(R_1, R_2) &= \sup_{q \in Q}\{\|T(q) + R_2\| : \|T(q)\| = 1\} \leq \frac{1}{3} \\
\zeta(R_2, R_1) &= \sup_{q \in Q}\{\|(T+U)(q) + R_1\| : \|(T+U)(q)\| = 1\} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\theta(R_1, R_2) = \text{máx}\{\zeta(R_1, R_2), \zeta(R_2, R_1)\} \leq \frac{1}{2}$. Como R_1 y R_2 son subespacios cerrados de X, entonces $\theta(R_1^\perp, R_2^\perp) = \theta(R_1, R_2) \leq \frac{1}{2} < 1$. Entonces $R_1^\perp$ y $R_2^\perp$ tienen ambos dimensión infinita o ambos tienen la misma dimensión finita[1] (vea [30, Apéndice]).

Note que $R_1 \subseteq \mathcal{R}(T)$. Entonces $\dim(X/\mathcal{R}(T)) \leq \dim(X/R_1)$. Como $\beta(T) = \infty$, entonces $\dim(X/R_1) = \infty$. Así, por la Observación 1.2.21 2., $\dim((X/R_1)^*) = \infty$. Por el Lema 3.1.6 (ii), $\dim(R_1^\perp) = \infty$ y por lo dicho en el parrafo anterior, $\dim(R_2^\perp) = \infty$. Procediendo inversamente, $\dim(X/R_2) = \infty$.

Se concluye que $\dim(X/\mathcal{R}(T+U))$ no es finita, pues de lo contrario, por la Proposición A.12 (ii), existe W subespacio de X de dimensión finita tal que $X = \mathcal{R}(T+U) \oplus W = (T+U)(Q) \oplus (T+U)(Z) \oplus W = R_2 \oplus (T+U)(Z) \oplus W$, donde Z es subespacio de X de dimensión finita. Entonces $\dim(X/R_2) = \dim((T+U)(Z) \oplus W) < \infty$. Pero esto no es posible pues se había dicho que $\dim(X/R_2) = \infty$. Por lo tanto, $\beta(T+U) = \infty$. $\square$

Teorema 3.4.3. *Sea $T \in \Phi_-(X)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $U \in \mathcal{B}(X)$ con $\|U\| < \epsilon$, $T+U \in \Phi_-(X)$. Además*

$$\beta(T+U) \leq \beta(T) \text{ más aún, si } \alpha(T) = \infty \text{ entonces } \alpha(T+U) = \infty.$$

Demostración: Consecuencia de las relaciones de dualidad del Teorema 3.4.2 y el Teorema 3.1.8. $\square$

Corolario 3.4.4. *Los conjuntos $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$, $\Phi_\pm(X)$ y $\Phi(X)$ son abiertos en $\mathcal{B}(X)$.*

Demostración: Resulta de los Teoremas 3.4.2, 3.4.3. $\square$

Al inicio de este capítulo se definió la función índice $i : \Phi_\pm(X) \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ por $i(T) = \alpha(T) - \beta(T)$, para todo $T \in \Phi_\pm(X)$. Con esto en mente, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.4.5 (Continuidad del índice)**.** *Sea $T \in \Phi_\pm(X)$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $V \in \mathcal{B}(X)$ con $\|V - T\| < \delta$ se tiene que $V \in \Phi_\pm(X)$ e $i(V) = i(T)$.*

Demostración: Suponga que $T \in \Phi(X)$. Por el Corolario 3.4.4, $\Phi(X)$ es abierto en $\mathcal{B}(X)$, así, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $V \in \mathcal{B}(X)$ si $\|V - T\| < \delta_1$ entonces $V \in \Phi(X)$. Por otro lado, por la Proposición 3.2.1, existen $T_0 \in \Phi(X)$ y $K \in K(X)$ tales que $TT_0 = I + K$, de aquí, por los teoremas 3.3.12 y 3.2.3, $i(T) = -i(T_0)$. Sean $\delta = \text{mín}\{\frac{1}{\|T_0\|}, \delta_1\}$ y $V \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|V - T\| < \delta$. Entonces $V \in \Phi(X)$ y además si se pone $U = V - T$ se tiene que,

$$(T+U)T_0 = TT_0 + UT_0 = I + K + UT_0. \tag{3.20}$$

Observe que $\|UT_0\| < 1$. Por la Proposición 1.1.7, $I + UT_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$. De (3.20), $(I+UT_0)^{-1}(T+U)T_0 = (I+UT_0)^{-1}K + I$. Como $K(X)$ es un ideal bilateral de $\mathcal{B}(X)$, $(I+UT_0)^{-1}K \in K(X)$. Nuevamente por los teoremas 3.3.12 y 3.2.3, $i((I+UT_0)^{-1}) + i(T+U) + i(T_0) = 0$. Por lo tanto, $i(V) = i(T+U) = -i(T_0) = i(T)$.

El resto de la prueba se sigue de los teoremas 3.4.2 y 3.4.3. $\square$

El Teorema 3.4.5, que se llama *Teorema de la continuidad del índice*, no está enunciado propiamente de acuerdo a la definición de continuidad de una función, aunque sí es muy similar en el sentido que:

[1] Sean E, F subespacios cerrados de X. Sea $\zeta(E,F) = \sup\{\|x + F\| : x \in E,\ \|x\| = 1\}$, donde $\zeta(E,F) = 0$ si $E = \{0\}$. Se define la abertura entre E y F como el máximo entre $\zeta(E,F)$ y $\zeta(F,E)$, el cual se denota con $\theta(E,F)$.

Si E, F son subespacios cerrados de un espacio de Banach X entonces $\theta(E,F) = \theta(E^\perp, F^\perp)$. También, si $\theta(E,F) < 1$ entonces E y F ambos tienen dimensión infinita o ambos tienen la misma dimensión finita. Para ver los detalles de estos resultados vea [30, Apéndice] .

dado un operador semi-Fredholm T, existe una vecindad de T tal que el índice de cualquier elemento en esta vecindad es el mismo que el de T.

Antes de ver la relación entre los elementos invertibles por la izquierda y por la derecha de la álgebra de Calkin $C(X)$ y los operadores semi-Fredholm superior e inferior se necesitan de algunos lemas previos.

Lema 3.4.6. *Sean X un espacio normado, X_1, X_2 subespacios de X tales que X_1 es cerrado de X y $\dim(X_2) < \infty$. Si $X' = X_1 + X_2$, entonces X' es subespacio cerrado de X.*

Demostración: Suponga que $X' = X_1 + X_2$ y ponga $X_3 = X_1 \cap X_2$. Observe que $\dim(X_3) < \infty$. Por la Proposición A.12 (i), existe X_4 subespacio cerrado de X tal que $X_1 = X_3 \oplus X_4$. Con esto, $X' = X_3 \oplus X_4 + X_2 = X_4 \oplus X_2$. Por el Lema 3.4.1, X' es cerrado en X. $\square$

El Lema 3.4.6 es más débil que el Lema 3.4.1.

Lema 3.4.7. *Si $T \in \Phi_+(X)$ y E es un subespacio cerrado de X entonces $T(E)$ es cerrado.*

Demostración: Sean $T \in \Phi_+(X)$ y E un subespacio cerrado de X. Como $\alpha(T) < \infty$, por el Lema A.10 (i), existe N subespacio cerrado de X tal que $X = \mathcal{N}(T) \oplus N$. Ahora, como $T|_N$ es biyectivo, por el Teorema del Mapeo Inverso A.17, $T|_N$ tiene inversa sobre su rango.

Ahora, sea $\{e_j + E \cap N\}_{j \in J}$ base de Hamel para $E/E \cap N$, donde J es un conjunto de índices. Luego haga $\sum_{j \in J} \alpha_j(e_j + N) = N$. Esto implica que $\sum_{j \in J} \alpha_j e_j \in N$. Además, observe que $\sum_{j \in J} \alpha_j e_j \in E$. Entonces $\sum_{j \in J} \alpha_j(e_j + E \cap N) = E \cap N$. Esto implica que $\alpha_j = 0$ para todo $j \in J$. Así, $\{e_j + N\}_{j \in J}$ es linealmente independiente en X/N. Luego, como $\dim(X/N) = \alpha(T) < \infty$, $\dim(E/E \cap N) < \infty$. Nuevamente por el Lema A.10 (ii), existe M subespacio cerrado de dimensión finita tal que $E = (E \cap N) \oplus M$, de esta forma, $T(E) = T(E \cap N) + T(M)$. Dado que $\dim(M) < \infty$, $\dim(T(M)) < \infty$. Además, como $T|_N$ es invertible sobre su rango y $E \cap N$ es cerrado en X, $T(E \cap N)$ es cerrado en X. Por el Lema 3.4.6, $T(E)$ es cerrado. $\square$

Teorema 3.4.8. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $\pi(T) \in \mathcal{G}_r(C(X))$ si y solo si $T \in \Phi_-(X)$ y $\mathcal{N}(T)$ es complementado en X (vea la Definición 8), donde π es el homomorfismo natural entre $\mathcal{B}(X)$ y $C(X)$.*

Demostración: Suponga que $\pi(T) \in \mathcal{G}_r(C(X))$. Entonces existen $U \in \mathcal{B}(X)$ y $K \in K(X)$ tales que $TU = I + K$. Luego, por el Teorema 3.3.12, $I + K \in \Phi(X)$ y así, por el Corolario 3.1.11 (iii), $T \in \Phi_-(X)$ y $U \in \Phi_+(X)$.

Ahora, por el Lema A.10, existe W subespacio cerrado de X tal que $X = \mathcal{N}(TU) \oplus W$ y por el Lema 3.4.7, $U(W)$ es cerrado en X.

Sea $y \in \mathcal{N}(T) \cap U(W)$. Entonces existe $w \in W$ tal que $y = U(w)$ y $0 = T(y) = T(U(w))$. Así, $w \in \mathcal{N}(TU) \cap W$. Esto implica que $w = 0$ y por consiguiente $y = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{N}(T) \cap U(W) = \{0\}$.

Luego, $\mathcal{N}(T) \oplus U(W)$ es cerrado en X. En efecto, observe que $T(\mathcal{N}(T) \oplus U(W)) = TU(W)$ es cerrado, pues $TU \in \Phi(X)$. Por otro lado, $T^{-1}(T(\mathcal{N}(T) \oplus U(W))) = \mathcal{N}(T) \oplus U(W)$. Sea $x \in T^{-1}(T(\mathcal{N}(T) \oplus U(W)))$. Entonces $T(x) \in T(\mathcal{N}(T) \oplus U(W))$. Luego, existen únicos $n \in \mathcal{N}(T)$ y $w \in U(W)$ tales que $T(x) = T(n + w) = T(w)$. Esto implica que $x - w \in \mathcal{N}(T)$. Así, $x = w + n$, para algún $n \in \mathcal{N}(T)$ y por tanto $x \in \mathcal{N}(T) \oplus U(W)$. La otra contención es directa. Como T es continua, $\mathcal{N}(T) \oplus U(W)$ es cerrado en X.

También se cumple que $\dim(X/[\mathcal{N}(T) \oplus U(W)]) < \infty$. En efecto, sea $\{x_n + \mathcal{N}(T) \oplus U(W)\}_{n=1}^p$ linealmente independiente en $X/[\mathcal{N}(T) \oplus U(W)]$. Luego, se cumple que $\{T(x_n) + TU(W)\}_{n=1}^p$ es linealmente independiente en $X/TU(W)$. Pero $TU(W) = \mathcal{R}(TU)$ y $\beta(TU) < \infty$, así, $p \leq \beta(TU) < \infty$. Por lo tanto, $\dim(X/[\mathcal{N}(T) \oplus U(W)]) < \infty$. Luego, por la Proposición A.12 (ii), existe Z subespacio cerrado de X

de dimensión finita tal que $X = \mathcal{N}(T) \oplus U(W) \oplus Z$. Como $U(W)$ es subespacio cerrado de X y Z es subespacio de dimensión finita, por el Lema 3.4.1, se tiene que $U(W) \oplus Z$ es cerrado en X, de donde se concluye que $\mathcal{N}(T)$ es complementado en X.

Recíprocamente, suponga que $T \in \Phi_-(X)$ y que $\mathcal{N}(T)$ es complementado en X. Entonces existe W subespacio cerrado de X tal que $X = \mathcal{N}(T) \oplus W$. También como $\beta(T)$ es finito, existe F subespacio cerrado de X de dimensión finita tal que $X = \mathcal{R}(T) \oplus F$. Por la Proposición A.11, existe $P \in \mathcal{B}(X)$ proyección acotada de X sobre $\mathcal{R}(T)$. Note que $T|_W$ es biyectiva. Por el Teorema del Mapeo Inverso A.17, existe $T|_W^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), W)$.

Entonces $T|_W^{-1}P \in \mathcal{B}(X)$. Además, $\mathcal{R}(TT|_W^{-1}P) = T(W) = \mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{N}(TT|_W^{-1}P) = F$. Así, $\alpha(TT|_W^{-1}P) = \dim(F) < \infty$ y $\beta(TT|_W^{-1}P) = \dim(F) < \infty$. Así, $TT|_W^{-1}P \in \Phi(X)$. Por el Teorema 3.2.2, existe $U \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\pi(TT|_W^{-1}P)\pi(U) = \pi(I)$. Pero, $\pi(TT|_W^{-1}P)\pi(U) = \pi(T)\pi(T|_W^{-1}PU) = \pi(I)$. Por tanto $\pi(T) \in \mathcal{G}_r(\mathcal{A})$. □

Teorema 3.4.9. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $\pi(T) \in \mathcal{G}_l(C(X))$ si y solo si $T \in \Phi_+(X)$ y $\mathcal{R}(T)$ es complementado en X.*

Demostración: Suponga que $\pi(T) \in \mathcal{G}_l(\mathcal{A})$. Entonces existen $U \in \mathcal{B}(X)$ y $K \in K(X)$ tales que $UT = I + K$. Por el Teorema 3.3.12, $I + K \in \Phi(X)$. Así, por el Corolario 3.1.11, $U \in \Phi_-(X)$ y $T \in \Phi_+(X)$. Así, existe W subespacio cerrado de X tal que $X = \mathcal{N}(UT) \oplus W$. Procediendo como en la primera parte de la demostración del Teorema 3.4.8, $T(W)$ y $\mathcal{N}(U) \oplus T(W)$ son subespacios cerrados de X y $X/[\mathcal{N}(U) \oplus T(W)]$ tiene dimensión finita.

Sea $y \in T(\mathcal{N}(UT)) \cap T(W)$. Entonces existen $u \in \mathcal{N}(UT)$ y $w \in W$ tales que $y = T(u) = T(w)$. Luego, $u - w \in \mathcal{N}(T)$. Pero $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(UT)$, entonces $u - w \in \mathcal{N}(UT)$. Esto implica que $w \in \mathcal{N}(UT) \cap W$ y por consiguiente $w = 0$ y así, $y = 0$. Lo anterior muestra que $T(\mathcal{N}(UT)) \cap T(W) = \{0\}$. De esta forma $\mathcal{R}(T) = T(\mathcal{N}(UT)) \oplus T(W)$.

Luego $\mathcal{N}(U) + \mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(U) + [T(\mathcal{N}(UT) \oplus T(W))] = [\mathcal{N}(U) \oplus T(W)] + T(\mathcal{N}(UT))$. Como $\mathcal{N}(U) \oplus T(W)$ es cerrado y $T(\mathcal{N}(UT))$ tiene dimensión finita, por el Lema 3.4.6, $\mathcal{N}(U) + \mathcal{R}(T)$ es cerrado en X.

Ahora, haga $Z_1 = \mathcal{N}(U) \cap T(\mathcal{N}(UT))$. Como $\alpha(UT) < \infty$, $\dim(Z_1) < \infty$, así por la Proposición A.12, existe Z subespacio cerrado de X tal que $\mathcal{N}(U) = Z_1 \oplus Z$. Como $Z_1 \subseteq \mathcal{R}(T)$, $\mathcal{N}(U) + \mathcal{R}(T) = Z + \mathcal{R}(T)$. Se cumple que $Z \cap \mathcal{R}(T) = \{0\}$. En efecto, sea $y \in Z \cap \mathcal{R}(T)$ y sea $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Luego, como $y \in \mathcal{N}(U)$, $0 = U(y) = U(T(x))$. Así, $x \in \mathcal{N}(UT)$ y por tanto $y \in T(\mathcal{N}(UT))$, es decir, $y \in Z_1 \cap Z$, lo cual implica que $y = 0$. Por lo tanto, $Z \cap \mathcal{R}(T) = \{0\}$.

Observe que $\mathcal{N}(U) \oplus T(W) \subseteq \mathcal{N}(U) + \mathcal{R}(T) = Z \oplus \mathcal{R}(T)$. Por el Lema A.10 (ii), $\dim(X/[Z \oplus \mathcal{R}(T)]) \leq \dim(X/[\mathcal{N}(U) \oplus T(W)]) < \infty$ y por la Proposición A.12 (ii), existe M subespacio de X de dimensión finita tal que $X = Z \oplus \mathcal{R}(T) \oplus M = \mathcal{R}(T) \oplus [Z \oplus M]$. Como Z es cerrado en X y M tiene dimensión finita, $Z \oplus M$ es cerrado en X. De la discusión anterior, $\mathcal{R}(T)$ es complementado en X.

El recípro se prueba de forma análoga a la demostración del recíproco del Teorema 3.4.8. □

3.5. Descomposición del espectro

Las diferentes condiciones de invertibilidad de un operador acotado inducen subconjuntos del espectro. Estas son las siguientes:

Definición 3.5.1. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Se define el espectro punto, $\sigma_p(T)$, como*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda - T) \neq \{0\}\}$$

y el espectro punto aproximado, $\sigma_{ap}(T)$, como

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda - T \text{ no está acotado por abajo}\}.$$

Los elementos de $\sigma_p(T)$ se llaman eigenvalores de T.

Puesto que todo operador invertible es un operador Fredholm, el conjunto de los operadores Fredholm y semi-Fredholm también inducen subconjuntos del espectro.

Definición 3.5.2. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. El espectro Fredholm de T, $\sigma_e(T)$, se define como*

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda - T \notin \Phi(X)\},$$

el espectro semi-Fredholm de T, $\sigma_{s-F}(T)$, como

$$\sigma_{s-F}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda - T \notin \Phi_{\pm}(T)\}.$$

También se define el espectro esencial izquierdo de T, $\sigma_{le}(T)$, como

$$\sigma_{le}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \pi(\lambda - T) \notin \mathcal{G}_l(C(X))\}$$

y el espectro esencial derecho de T, $\sigma_{re}(T)$, por

$$\sigma_{re}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \pi(\lambda - T) \notin \mathcal{G}_r(C(X))\}$$

respectivamente. Y por último, se hace

$$\sigma_{lre}(T) = \sigma_l(T) \cap \sigma_r(T).$$

Proposición 3.5.3. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces*

(i) Los conjuntos $\sigma_{s-F}(T)$, $\sigma_{le}(T)$ y $\sigma_{re}(T)$ son cerrados en $\mathbb{C}$.

(ii) $\sigma_e(T)$ es compacto y no vacío en $\mathbb{C}$. Además, $\sigma_e(T) = \sigma_{le}(T) \cup \sigma_{re}(T)$.

Demostración: (i) Por el Corolario 3.4.4, $\Phi_{\pm}(X)$ es abierto en $\mathcal{B}(X)$, entonces $\mathbb{C}\backslash\sigma_{s-F}(T)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Así $\sigma_{s-F}(T)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. También, por el Teorema 1.1.8, $\mathcal{G}_l(C(X))$ y $\mathcal{G}_r(C(X))$ son abiertos en $\mathcal{B}(X)$. Entonces $\mathbb{C}\backslash\sigma_{le}(T)$ y $\mathbb{C}\backslash\sigma_{re}(T)$ son abiertos son abiertos en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, $\sigma_{le}(T)$ y $\sigma_{re}(T)$ son cerrados en $\mathbb{C}$.

(ii) Por el Teorema 3.2.2,

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi(\lambda - T) \notin \mathcal{G}(\mathcal{C}(\mathcal{X}))\} = \sigma(\pi(T)) = \sigma_{le}(T) \cup \sigma_{re}(T).$$

Así, por el Teorema 2.1.6, $\sigma_e(T) \neq \emptyset$. $\square$

Capítulo 4

Continuidad del espectro

En el Capítulo 2 se ha demostrado que en una álgebra de Banach unitaria $\mathcal{A}$, el espectro es un conjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$. Así, si se denota con $S(\mathbb{C})$ la colección de subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{C}$, el espectro induce una aplicación $\sigma : \mathcal{A} \to S(\mathbb{C})$ que a cada $a \in \mathcal{A}$ le asigna su espectro $\sigma(a)$ en $S(\mathbb{C})$.

Cuando $\mathcal{A}$ es la álgebra de los operadores acotados $\mathcal{B}(X)$, conocer el espectro de un operador $T \in \mathcal{B}(X)$, donde X es un espacio de Banach de dimensión no finita implica una ardua tarea. Por esta razón se busca hallar el espectro de un operador de forma aproximada. Esto quiere decir que se trata de conocer de manera aproximada el espectro de un operador T por medio del espectro de operadores que se aproximan a T. Es en este contexto donde la continuidad de σ toma un rol esencial. Formalmente, el problema se plantea de la siguiente manera: Sean $\mathcal{A}$ una álgebra de Banach unitaria, $a \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tales que

$$a_n \to a, \tag{4.1}$$

bajo algún criterio de convergencia, ¿qué condiciones se requieren para que

$$\sigma(a_n) \to \sigma(a)?, \tag{4.2}$$

usando la métrica de Hausdorff en (4.2). Este problema, así como problemas afines derivados al trabajar sobre álgebras de Banach unitarias en específico y elementos particulares de tal álgebra, han sido tratados por diversos autores utilizando diversos criterios de convergencia en (4.1). Por ejemplo, cuando $\mathcal{A}$ es la álgebra de los operadores acotados, los criterios de convergencia utilizados en (4.1) han sido en convergencia puntual, colectivamente compacta [7, 3], regular [1], estable y fuertemente estable [6], en resolvente [20], en norma (la norma en $\mathcal{B}(X)$) y en ν-convergencia.

J. D. Newburgh en [26] fue pionero en hacer una investigación sistemática sobre este problema usando convergencia en norma en (4.1). J. B. Conway y B. B. Morrel en [8, 9, 10] caracterizaron los puntos de continuidad de σ usando convergencia en norma en (4.1) cuando $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, donde X es un espacio de Hilbert. Recientemente S. Sánchez-Perales en [31] estableció condiciones suficientes para la continuidad de σ cuando $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, donde X es un espacio de Banach usando convergencia en norma en (4.1). También podemos citar los siguientes artículos relacionados con este tema: [9, 10, 26, 33, 32, 31, 5, 13, 14, 4].

Recientemente, M. Ahues *et al.* en su libro *"Spectral computations of bounded operators"* [23], presenta un nuevo criterio de convergencia sobre $\mathcal{B}(X)$ llamado $\nu-$convergencia ([23, pág. 72]), el cual está definido como (generalizado a álgebras de Banach unitarias): la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathcal{A}$ converge en $\nu-$convergencia a $a \in \mathcal{A}$ si

$$\{\|a_n\|\} \text{ está acotada}, \quad \|(a_n - a)a_n\| \to 0 \quad \text{y} \quad \|(a_n - a)a_n\| \to 0.$$

La virtud principal de este criterio de convergencia es que se pueden aproximar operadores acotados no necesariamente compactos por medio de sucesiones de operadores de rango finito (vea [19, Ejemplo 2.3]) (esto no se puede hacer cuando se usa la norma en 4.1), vea el Teorema 1.3.13). Este hecho es verdaderamente útil para el cálculo del espectro computacionalmente, pues, si $T_0 \in \mathcal{B}_0(X)$ es una aproximación de $T \in \mathcal{B}(X)$ (no necesariamente compacto) bajo $\nu-$convergencia y si $\sigma(T_0)$ aproxima $\sigma(T)$, entonces los valores propios de T_0 serán una aproximación del espectro de T, los cuales se pueden calcular computacionalmente de manera eficiente.

Por esta razón, surge la necesidad de realizar un estudio sistemático acerca de la continuidad (en el sentido que se ha planteado el problema) del espectro utilizando $\nu-$convergencia en (4.1). Hasta el momento solo existen resultados para el espectro punto (conjunto de valores propios) obtenidos por M. Ahues en [23] en la álgebra de los operadores acotados.

4.1. Métrica de Hausdorff

En esta sección, X denotará un espacio métrico con métrica d. También, dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x)$ denotará la bola abierta centrada en x de radio ϵ y $B_\epsilon[x]$ la bola cerrada centrada en x de radio ϵ.

Definición 4.1.1. *Sean $E \subseteq X$ y $\epsilon > 0$. Se define la nube de E con radio ϵ como*

$$(E)_\epsilon = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, E) < \epsilon\},$$

donde $\operatorname{dist}(x, E) = \inf\{d(x, e) : e \in E\}$ *es la distancia de x a E.*

Se ilustra este concepto con algunos ejemplos.

Ejemplo 4.1.2.

1. *Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. La nube de $E = \{x\}$ con radio ϵ es $(E)_\epsilon = B_\epsilon(x)$.*
2. *Considere el conjunto $E = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ en $\mathbb{C}$. Sea $\epsilon = \frac{1}{2}$. Entonces $(E)_\epsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |\lambda| < \frac{3}{2}\}$.*

Observe que $(E)_\epsilon$ es un conjunto abierto que contiene a E, pues

$$(E)_\epsilon = \bigcup_{e \in E} B_\epsilon(e).$$

Definición 4.1.3. *Sea $\hat{S}(X)$ la colección de conjuntos cerrados, acotados y no vacíos de X. La función $h : \hat{S}(X) \times \hat{S}(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por*

$$h(E, F) = \inf\{\epsilon > 0 : E \subseteq (F)_\epsilon \ \text{ y } \ F \subseteq (E)_\epsilon\}, \quad \forall\, E, F \in \hat{S}(X),$$

es una métrica sobre $\hat{S}(X)$ (vea [16]). Esta métrica se conoce como métrica de Hausdorff.

Observación 4.1.4. *Dado que todo conjunto compacto en X es cerrado y acotado en X, se puede considerar la colección:*

$$S(X) = \{E \subseteq X : E \text{ es compacto y no vacío en} X\}. \tag{4.3}$$

Entonces $\mathcal{S}(X) \subseteq \hat{\mathcal{S}}(X)$. Luego, se puede restringir la métrica de Hausdorff a este espacio y considerar a $S(X)$ como un espacio métrico. Ahora, cuando X es un espacio normado de dimensión finita un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado ([19, Corolario 4.32]). En este caso $S(X) = \hat{S}(X)$.

Ejemplo 4.1.5. *Considere los conjuntos $E_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda + 2| = 2\}$ y $E_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| = 1\}$ en $\mathbb{C}$. Entonces $E_1, E_2 \in S(\mathbb{C})$. Observe que $E_1 \subseteq (E_2)_{4+\epsilon}$ y $E_2 \subset (E_1)_{2+\epsilon}$ con $\epsilon > 0$, pero $E_1 \nsubseteq (E_2)_a$ si $a < 4$. Pero sucede que $E_1 \subset (E_2)_{4+\epsilon}$ y $E_2 \subset (E_1)_{4+\epsilon}$, para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto $h(E_1, E_2) = 4$.*

Es de nuestro interés saber cómo se comporta la convergencia en $\mathcal{S}(X)$ con la métrica de Hausdorff. Para nuestro objetivo, verificar directamente si una sucesión $\{E_n\}$ en $\mathcal{S}(X)$ converge a $E \in \mathcal{S}(X)$ resulta complicado; así, conviene verificar la convergencia en $\mathcal{S}(X)$ de un modo más sencillo. Esto se logra a través de los conceptos de límite superior y límite inferior de una sucesión de elementos en $S(X)$.

Definición 4.1.6. *Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos en X. Se define respectivamente, el límite inferior y el límite superior de la sucesión $\{E_n\}$ como:*

$$\begin{aligned}
\liminf E_n &= \{x \in X : \text{para cada } \epsilon > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } B_\epsilon(x) \cap E_n \neq \emptyset \text{ para cualquier } n > n_0\}, \\
\limsup E_n &= \{x \in X : \text{para cada } \epsilon > 0 \text{ existe } J \subseteq \mathbb{N} \text{ infinito tal que } B_\epsilon(x) \cap E_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \in J\}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.7.

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \{(x, nx) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$. Entonces $\liminf E_n = \{0\} \times [0, \infty) = \limsup E_n$.*

2. *Considere $\{x_n\}$ una sucesión de puntos en X y para cada $n \in \mathbb{N}$, haga $E_n = \{x_n\}$. Suponga que $\{x_n\}$ converge a $x \in X$. Dado que el límite de $\{x_n\}$ es único, $\liminf E_n = \{x\}$. También, como toda subsucesión infinita de $\{x_n\}$ tiene como límite a x, $\limsup E_n = \{x\}$.*

   Ahora, suponga que $\{x_n\}$ no converge. Entonces $\liminf E_n = \emptyset$. Si en adición se supone que $\{x_n\}$ no tiene una subsucesión convergente, entonces $\limsup E_n = \emptyset$.

3. *Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la métrica usual en $\mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ impar sea $E_n = [0, \frac{2}{3}] \times \{\frac{1}{n}\}$ y para $n \in \mathbb{N}$ par sea $E_n = [\frac{1}{3}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$. Entonces $\limsup E_n = [0, 1] \times \{0\}$ y $\liminf E_n = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \{0\}$.*

Los ejemplos anteriores muestran que el límite inferior y el límite superior de una sucesión de subconjuntos de X pueden ser iguales al vacío, ser no acotados y posiblemente distintos, no obstante, todos ellos son cerrados.

Proposición 4.1.8. *Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos en X. Entonces*

(i) $\liminf E_n \subseteq \limsup E_n$.

(ii) Los conjuntos $\liminf E_n$ y $\limsup E_n$ son cerrados en X.

Demostración: (i) Se obtiene directamente de la Definición 4.1.6.

(ii) Se probará que $\overline{\liminf E_n} \subseteq \liminf E_n$. Sean $x \in \overline{\liminf E_n}$ y $\epsilon > 0$. Luego $B_\epsilon(x) \cap \liminf E_n \neq \emptyset$. Tome $y \in B_\epsilon(x) \cap \liminf E_n$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(y) \subseteq B_\epsilon(x)$ y, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, $B_r(y) \cap E_n \neq \emptyset$. Así, para todo $n \geq n_0$, $B_\epsilon(x) \cap E_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \liminf E_n$. De forma similar se prueba que $\limsup E_n$ es cerrado en X. □

A continuación se caracterizan los elementos de los conjuntos límite superior y límite inferior de una sucesión $\{E_n\}$ por medio de sucesiones de puntos.

Proposición 4.1.9. *Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos en X. Luego*

(i) $x \in \limsup E_n$ si y solo si existen una sucesión creciente de números naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in E_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que $\lim x_{n_k} = x$.

(ii) $x \in \liminf E_n$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in E_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim x_n = x$.

Demostración: (i) Sea $x \in \limsup E_n$. Luego existe $J_1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que J_1 es infinito y $E_n \cap B_1(x) \neq \emptyset$ para cada $n \in J_1$. Elijamos $n_1 \in J_1$ y $x_{n_1} \in E_{n_1} \cap B_1(x)$. Análogamente, existe $J_2 \subseteq \mathbb{N}$ tal que J_2 es infinito y $E_n \cap B_{\frac{1}{2}}(x) \neq \emptyset$ para cada $n \in J_2$. Elijamos $n_2 \in J_2$ tal que $n_1 < n_2$ y $x_{n_2} \in E_{n_2} \cap B_{\frac{1}{2}}(x)$. Siguiendo con este procedimiento, de forma inductiva, se construye una sucesión creciente de números naturales $n_1 < n_2 \cdots$ y una sucesión de puntos $x_{n_k} \in E_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Por tanto, $\lim x_{n_k} = x$. La recíproca es inmediata.

(ii) Considere $x \in \liminf E_n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $J_k = \{j \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{k}}(x) \cap E_n \neq \emptyset, \forall n \geq j\}$. Por hipótesis, cada J_k es diferente del $\emptyset$. Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, se define $N_k = \min J_k$. Note que $N_k \leq N_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ya que $J_{k+1} \subseteq J_k$.

Si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $N_k = N_p$ para todo $k \geq p$. Entonces para cada $n \geq N_p$, $B_{\frac{1}{k}}(x) \cap E_n \neq \emptyset$ para cualquier $k \geq p$. Para cada $n < N_p$ tome $x_n \in E_n$ y para cada $n \geq N_p$ considere $x_n \in B_{\frac{1}{p+n}}(x) \cap E_n$. Luego la sucesión $\{x_n\}$ cumple las condiciones requeridas, esto es, $x_n \in E_n$ para todo n y, $\lim x_n = x$.

Suponga ahora que para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $k > p$ tal que $N_k > N_p$. Con esto es posible construir una sucesión creciente de números naturales $1 = n_1 < n_2 < n_3 \cdots$ tal que $N_{n_1} < N_{n_2} < N_{n_3} \cdots$. Defina la sucesión $\{x_n\}$ como sigue:

- $\forall n < N_{n_1}$, sea $x_n \in E_n$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall N_{n_k} \leq n < N_{n_{k+1}}$, sea $x_n \in E_n \cap B_{\frac{1}{n_k}}(x)$.

Claramente $x_n \in E_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. También $\lim x_n = x$. En efecto, sea $\epsilon > 0$. Puesto que $\lim \frac{1}{n_k} = 0$, existe $k^* \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k^*$, $\frac{1}{n_k} < \epsilon$. Sea $n \geq N_{n_{k^*}}$, luego existe $k \geq k^*$ tal que $N_{n_k} \leq n < N_{n_{k+1}}$. Así

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n_k} < \epsilon.$$

□

Lema 4.1.10. *Sean $E \subset X$ es cerrado en X y $x \notin E$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap (E)_\epsilon = \emptyset$.*

Demostración: Sea $\epsilon = \frac{\operatorname{dist}(x,E)}{2}$. Luego $\epsilon > 0$, de lo contrario $x \in E$. Suponga que $B_\epsilon(x) \cap (E)_\epsilon \neq \emptyset$ y tome $y \in B_\epsilon(x) \cap (E)_\epsilon$. Entonces $d(x, y) < \epsilon$ y $d(x, z) < \epsilon$, para algún $z \in E$. Así,

$$\operatorname{dist}(x, E) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < 2\epsilon = d(x, E),$$

lo cual es una contradicción. □

Lema 4.1.11. *Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X. Si E es un subconjunto cerrado y no vacío de X y existe K subconjunto compacto de X tal que $E_n \subseteq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$[\forall\, \epsilon > 0,\, \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n > N_\epsilon,\, E_n \subseteq (E)_\epsilon] \Longleftrightarrow \limsup E_n \subseteq E. \tag{4.4}$$

DEMOSTRACIÓN: Suponga que la parte izquierda de (4.4) se cumple pero que $\limsup E_n \nsubseteq E$. Tome $x \in \limsup E_n \backslash E$. Por una parte, por el Lema 4.1.10, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap (E)_\epsilon = \emptyset$. Así, por hipótesis existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \subseteq (E)_\epsilon$ para todo $n > N_\epsilon$. Por otro lado, por la Proposición 4.1.9, existen una sucesión creciente de números naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in E_{n_k}$ tales que $\lim x_{n_k} = x$. Sea $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k^*} > N_\epsilon$ y $d(x_{n_{k^*}}, x) < \epsilon$. Entonces $x_{n_{k^*}} \in B_\epsilon(x) \cap E_{n_{k^*}} \subseteq B_\epsilon(x) \cap (E)_\epsilon$, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, suponga que $\limsup E_n \subseteq E$ pero que la parte izquierda de (4.4) es falso. Entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión creciente de números naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ tales que $E_{n_k} \nsubseteq (E)_\epsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, sea $x_{n_k} \in E_{n_k} \backslash (E)_\epsilon$. Observe que $\{x_{n_k}\} \subseteq K$. Por la Observación 1.3.2, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{x_{n_{k_l}}\}$ tal que $\lim x_{n_{k_l}} = x$, para algún $x \in K$. Así, por la Proposición 4.1.9 (ii), $x \in \limsup E_n \subseteq E$. Pero, dado que $\{x_{n_{k_l}}\} \subseteq X \backslash (E)_\epsilon$ y $X \backslash (E)_\epsilon$ es cerrado en X, $x \in X \backslash (E)_\epsilon$ y así $x \notin E$, lo cual es una contradicción. □

Lema 4.1.12. *Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos en X y E subconjunto compacto de X. Entonces*

$$[\forall\, \epsilon > 0,\, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n > N_\epsilon,\, E \subseteq (E_n)_\epsilon] \Longleftrightarrow E \subseteq \liminf E_n. \tag{4.5}$$

DEMOSTRACIÓN: Suponga que la parte izquierda de (4.5) se cumple. Sean $x \in E$ y $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{dist}(x, E_n) < \epsilon$, para cualquier $n > N_\epsilon$. Esto implica que existe $x_n \in E_n$ tal que $d(x, x_n) < \epsilon$, para todo $n > N_\epsilon$. Así, $B_\epsilon(x) \cap E_n \neq \emptyset$, para todo $n > N_\epsilon$ y por lo tanto $x \in \liminf E_n$.

Recíprocamente, suponga que $E \subseteq \liminf E_n$. Sea $\epsilon > 0$. Como E es compacto existen $y_1, \ldots, y_m \in E$ tales que $E \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_j)$. Luego, por hipótesis, para cada $j = 1, \ldots, m$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_j) \cap E_n \neq \emptyset$, para todo $n > N_j$. Considere $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$ y sean $x \in E$ y $n > N$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_j)$. También, puesto que $B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_j) \cap E_n \neq \emptyset$, existe $z \in E_n$ tal que $d(y_j, z) < \frac{\epsilon}{2}$. Así, $d(x, z) \leq d(x, y_j) + d(y_j, z) < \epsilon$ y por tanto $x \in (E_n)_\epsilon$. Por lo tanto $E \subseteq (E_n)_\epsilon$, para todo $n > N$. □

Teorema 4.1.13. *Sea $\{E_n\}$ una sucesión en $S(X)$ y $E \in S(X)$. Si existe $K \in S(X)$ para el cual $E_n \subseteq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $E_n \to E$ con la métrica de Hausdorff si y solo si* $\limsup E_n = \liminf E_n = E$.

DEMOSTRACIÓN: Consecuencia inmediata de los lemas 4.1.11, 4.1.12 y la Proposición 4.1.8 (i). □

Ahora unas aplicaciones del teorema 4.1.13.

Ejemplo 4.1.14.

1. *Considere la sucesión $\{E_n\}$ del Ejemplo 4.1.7 inciso 3. En este caso* $\liminf E_n \neq \limsup E_n$. *Por tanto la sucesión $\{E_n\}$ no converge con la métrica de Hausdorff.*

2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n}\}$. Note que $E_n \in S(\mathbb{C})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. También, observe que $0 \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\{0\} \subseteq$* $\liminf E_n \subseteq \limsup E_n$. *Pero se tiene que* $\liminf E_n = \limsup E_n = \{0\}$. *En efecto, suponga que existe $z \in \limsup E_n$ tal que $z \neq 0$. Luego,*

existe $\epsilon > 0$ tal que $0 \notin B_\epsilon[z]$. Así, existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $B_\epsilon(z) \cap E_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J$. Ponga $A_n = B[z,\epsilon] \cap B_{\frac{1}{n}}[\frac{1}{n}]$ para cada $n \in J$. Luego, para cada $n \in J$, A_n es distinto del vacío, cerrado, acotado y además, $A_{n+1} \subseteq A_n$. Por el Teorema de encaje de Cantor (vea [2, Teorema 3.25]), existe $y \in \bigcap_{n\in J} A_n = B_\epsilon[z] \cap \left(\bigcap B_{\frac{1}{n}}[\frac{1}{n}]\right)$. Entonces $y = 0$ y, por tanto, $0 \in B_\epsilon[z]$, lo cual es una contradicción. En consecuencia $\limsup E_n = \{0\}$.

Por el Teorema 4.1.13, la sucesión $\{E_n\}$ converge a $\{0\}$ con la métrica de Hausdorff.

4.2. $\nu-$convergencia

En esta sección $\mathcal{A}$ denota una álgebra de Banach unitaria con unidad e.

Definición 4.2.1. *Sean $a \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}$. Se dice que $\{a_n\}$ converge en norma hacia a, denotado con $a_n \overset{n}{\to} a$, si*

$$\|a_n - a\| \to 0.$$

Se denota con $a_n \overset{n}{\nrightarrow} a$ si $\{a_n\}$ no converge en norma a a.

Observación 4.2.2. *Considere la álgebra de los operadores acotados $\mathcal{B}(X)$. En este espacio se pueden definir dos formas de convergencia aparte de la convergencia en norma: convergencia puntual y convergencia débil. Estas se definen como: Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\{T_n\}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X)$. Se dice que $\{T_n\}$ converge puntualmente a T si*

$$\|T_n(x) - T(x)\| \to 0,$$

para todo $x \in X$ y que converge débilmente a T si

$$|x^*(T_n) - x^*(T)| \to 0,$$

para todo $x^* \in (\mathcal{B}(X))^*$. En general, convergencia en norma implica convergencia puntual y convergencia débil. Aunque el recíproco no siempre es cierto (vea [19]).

Ahora se define $\nu-$convergencia en $\mathcal{A}$.

Definición 4.2.3. *Sean $a \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge en $\nu-$convergencia a a, denotado por $a_n \overset{\nu}{\to} a$, si:*

$$\{\|a_n\|\} \text{ está acotada}, \quad \|(a_n - a)a_n\| \to 0 \quad y \quad \|(a_n - a)a_n\| \to 0. \tag{4.6}$$

Se denota con $a_n \overset{\nu}{\nrightarrow} a$ si $\{a_n\}$ no converge en $\nu-$convergencia a a.

ν-convergencia es más general que convergencia en norma, pues convergencia en norma implica $\nu-$convergencia, mientras que $\nu-$convergencia no necesariamente implica convergencia en norma, como se verá en el Ejemplo 4.2.5.

Proposición 4.2.4. *Sean $a, b \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones en $\mathcal{A}$. Luego*

(i) Si $a_n \overset{n}{\to} a$, entonces $a_n \overset{\nu}{\to} a$. Recíprocamente, si $a \in \mathcal{G}_r(\mathcal{A})$ y $a_n \overset{\nu}{\to} a$, entonces $a_n \overset{n}{\to} a$.

(ii) Si $a_n \overset{\nu}{\to} a$ y $b_n \overset{n}{\to} b$, entonces $(a_n + b_n) \overset{\nu}{\to} (a + b)$ si y solo si $(a_n - a)b \overset{n}{\to} o$.

DEMOSTRACIÓN: (i) Suponga que $a_n \overset{n}{\to} a$. Luego, $\{\|a_n\|\}$ está acotada. Note que

$$\|(a_n - a)a\| \leq \|a_n - a\|\|a\|$$

y

$$\|(a_n - a)a_n\| \leq \|a_n - a\| \sup\{\|a_n\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Puesto que $\|a_n - a\| \to 0$, $\|(a_n - a)a\| \to 0$ y $\|(a_n - a)a_n\| \to 0$. Por lo tanto, $a_n \overset{\nu}{\to} a$.

Recíprocamente, suponga que $a_n \overset{\nu}{\to} a$ con $a \in \mathcal{G}_r(\mathcal{A})$. Entonces, existe $a_1 \in \mathcal{A}$ tal que $aa_1 = e$. Luego,

$$\|a_n - a\| = \|(a_n - a)aa_1\| \leq \|(a_n - a)a\|\|a_1\|.$$

Como $\|(a_n - a)a\| \to 0$, $a_n \overset{n}{\to} a$.

(ii) Suponga que $a_n \overset{\nu}{\to} a$ y $b_n \overset{n}{\to} b$. Asuma que $a_n + b_n \overset{\nu}{\to} a + b$. Luego, note que

$$(a_n - a)b = ((a_n + b_n) - (b + a) - (b_n - b))(b + a - a) = ((a_n + b_n) - (a + b))(b + a) - (a_n - a)a - (b_n - b)(b + a).$$

Por hipótesis, $\|((a_n + b_n) - (a + b))(b + a)\| \to 0$, $\|(a_n - a)a\| \to 0$ y $\|b_n - b\| \to 0$ y por lo tanto $(a_n - a)b \overset{n}{\to} o$.

Recíprocamente, suponga que $(a_n - a)b \overset{n}{\to} o$. Luego, como $\|a_n + b_n\| \leq \|a_n\| + \|b_n\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\|b_n\|\}$ y $\{\|a_n\|\}$ están acotadas, $\{\|a_n + b_n\|\}$ está acotada. Por otra parte se tiene que

$$((a_n + b_n) - (a + b))(a + b) = (a_n - a)a + (a_n - a)b + (b_n - b)(a + b).$$

Entonces, $\|((a_n + b_n) - (a + b))(a + b)\| \to 0$, pues $\|(a_n - a)a\| \to 0$, $\|(a_n - a)b\| \to 0$ y $\|b_n - b\| \to 0$.

También,

$$((a_n + b_n) - (a + b))(a_n + b_n) = (a_n - a)a_n + (a_n - a)b_n + (b_n - b)(a_n + b_n).$$

Pero $(a_n - a)b_n = (a_n - a)(b_n - b + b) = (a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b$, entonces $\|((a_n + b_n) - (a + b))(a_n + b_n)\| \to 0$. Por lo tanto, $(a_n + b_n) \overset{\nu}{\to} (a + b)$. □

A continuación se presenta un ejemplo de un operador no compacto que se puede aproximar por medio de operadores de rango finito bajo $\nu-$convergencia, pero que no converge en norma.

Ejemplo 4.2.5. *[23, Ejemplo 2.3] Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, donde $X = l^p(\mathbb{N})$. Defina $T : X \to X$ por*

$$T(x)(k) = \begin{cases} x(k+1), & k \text{ impar} \\ \\ 0, & k \text{ par} \end{cases}$$

para todo $x \in X$. También, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $T_n : X \to X$ como

$$T_n(x)(k) = \begin{cases} x(k+1) & k \text{ impar y } k \leq 2n-1 \\ \\ 0 & k \text{ par o } k > 2n-1 \end{cases}$$

para todo $x \in X$. En este caso, $\|T_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{\|T_n\|\}$ está acotada. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$(T_n - T)(x)(k) = \begin{cases} -x(k+1) & k \text{ impar y } k \geq 2n+1 \\ \\ 0 & k \text{ par o } k < 2n+1 \end{cases}$$

Luego, $\|T_n - T\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, $T_n \overset{n}{\nrightarrow} T$. Por otro lado, se tiene que $(T_n - T)T = O = (T_n - T)T_n$. Por lo tanto, $T_n \overset{\nu}{\to} T$. De todo lo anterior, $T_n \overset{\nu}{\to} T$, pero $T_n \overset{n}{\nrightarrow} T$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $e_{2n} \in X$ dado por $e_{2n}(k) = 1$ si $k = 2n$ y $e_{2n}(k) = 0$ si $k \neq 2n$. Como $\|e_{2n}\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{e_{2n}\}$ está acotada en X. Pero, $\{T(e_{2n})\}$ no está totalmente acotada en X. Así, por la Proposición 1.3.5, T no es compacto. También observe que $\dim(\mathcal{R}(T_n)) \leq n$, *para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $T_n \in \mathcal{B}_0(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por lo tanto, $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores de rango finito que converge en $\nu-$convergencia a un operador T que no es compacto.

Una desventaja de trabajar con $\nu-$convergencia es que no es cerrada bajo la suma y el producto en la álgebra de operadores $\mathcal{B}(X)$. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.6. *Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, donde $X = l^p(\mathbb{N})$ y considere T y la sucesión $\{T_n\}$ del Ejemplo 4.2.5.*

1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $x \in X$,*

$$(T + I)(x)(k) = \begin{cases} x(k) + x(k+1), & k \text{ impar} \\ \\ x(k), & k \text{ par} \end{cases}$$

y

$$(T_n + I)(x)(k) = \begin{cases} x(k) + x(k+1), & k \text{ impar y } k \leq 2n-1 \\ \\ x(k), & k \text{ par o } k > 2n-1 \end{cases}$$

Observe que $((T_n+I)-(T+I))(T+I) = (T_n-T)(T+I) = (T_n-T)$. Luego, como $\{T_n\}$ no converge en norma a T, $\{T_n+I\}$ no converge en $\nu-$convergencia a $T+I$. Pero $T_n \overset{\nu}{\to} T$ e igualmente $I_n \overset{\nu}{\to} I$, donde $I_n = I$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\nu-$convergencia no es cerrado bajo la suma.

2. *Sea T_r el operador desplazamiento hacia la derecha (vea Ejemplo 1.2.8). Entonces, para todo $x \in X$,*

$$T_rTT_r(x)(k) = \begin{cases} x(k-1), & k \text{ par} \\ \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

Luego, observe que $(T_nT_r - TT_r)TT_r = (T_n - T)T_rTT_r$. Entonces, para todo $x \in X$,

$$(T_n - T)T_rTT_r(x)(k) = \begin{cases} x(k), & k \text{ impar y } k \geq 2n+1 \\ \\ 0, & k \text{ par o } k < 2n+1 \end{cases}$$

De lo anterior se tiene que $\|(T_n - T)T_rTT_r\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $\{T_nT_r\}$ no converge en $\nu-$convergencia a TT_r. Por lo tanto, $\nu-$convergencia no es cerrada bajo la composición.

Otra desventaja de $\nu-$convergencia es que con este modo de convergencia existe pseudo-convergencia, es decir, puede que una sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathcal{A}$ converja a $a \in \mathcal{A}$ y a $b \in \mathcal{A}$ en $\nu-$convergencia sin que a y b sean iguales.

Proposición 4.2.7. *Sean $a, b \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tales que $a_n \overset{n}{\to} a$. Entonces $a_n \overset{\nu}{\to} b$ si y solo si $(a-b)b = (a-b)a = o$.*

Demostración: Suponga que $(a-b)b = (a-b)a = o$. Como $a_n \overset{n}{\to} a$, la sucesión $\{\|a_n\|\}$ está acotada. Ahora, observe que,

$$(a_n - b)b = ((a_n - a) + (a - b))b = (a_n - a)b + (a-b)b = (a_n - a)b. \tag{4.7}$$

Puesto que $\|a_n - a\| \to 0$, $\|(a_n - b)b\| \to 0$. Por otro parte,

$$(a_n - b)a_n = ((a_n - a) + (a - b))a_n = (a_n - a)a_n + (a-b)a_n. \tag{4.8}$$

Luego, como $(a-b)a_n \overset{n}{\to} (a-b)a = o$ y $\|a_n - a\| \to 0$, $\|(a_n - b)a_n\| \to 0$. Por lo tanto, $a_n \overset{\nu}{\to} b$. La condición necesaria se prueba utilizando (4.7) y (4.8). $\square$

Afortunadamente para nuestro trabajo, si $a, b \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tales que $a_n \overset{\nu}{\to} a$ y $a_n \overset{\nu}{\to} b$, entonces $\sigma(a) = \sigma(b)$. En el teorema 4.2.11 se prueba este hecho, pero antes de eso se necesita la siguiente proposición.

Proposición 4.2.8. *Sean $a, b \in \mathcal{A}$. Luego*

(i) [Segunda Identidad del Resolvente] Si $\lambda \in \rho(a) \cap \rho(b)$, entonces

$$r_a(\lambda) - r_b(\lambda) = r_a(\lambda)(a-b)r_b(\lambda) = r_b(\lambda)(a-b)r_a(\lambda).$$

(ii) [Segunda expansión de Neumann] Si $\lambda \in \rho(a)$ y $r((b-a)r_a(\lambda)) < 1$, entonces $\lambda \in \rho(b)$ y

$$r_b(\lambda) = r_a(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}((b-a)r_a(\lambda))^k.$$

Si $\lambda \in \rho(a)$ *y* $\|(b-a)r_a(\lambda)\| < 1$, *entonces*

$$\|r_b(\lambda)\| \leq \frac{\|r_a(\lambda)\|}{1 - \|(b-a)r_a(\lambda)\|}.$$

Si $\lambda \in \rho(a)$ *y* $\|[(b-a)r_a(\lambda)]^2\| < 1$, *entonces* $\lambda \in \rho(b)$ *y*

$$\|r_b(\lambda)\| \leq \frac{\|r_a(\lambda)\|\|e + (b-a)r_a(\lambda)\|}{1 - \|[(b-a)r_a(\lambda)]^2\|}.$$

Demostración: (i) Sea $\lambda \in \rho(a) \cap \rho(b)$. Entonces

$$r_a(\lambda)(a-b)r_b(\lambda) = r_a(\lambda)((\lambda - b) - (\lambda e - a))r_b(\lambda) = r_a(\lambda) - r_b(\lambda).$$

De manera similar, $r_b(\lambda)(a-b)r_a(\lambda) = r_a(\lambda) - r_b(\lambda)$.

(ii) Sea $\lambda \in \rho(a)$ y suponga que $r((a-b)r_a(\lambda)) < 1$. Luego,

$$\lambda - b = (\lambda - a) - (b - a) = [e - (b-a)r_a(\lambda)](\lambda - a).$$

Como $r((b-a)r_a(\lambda)) < 1$, $1 \in \rho((b-a)r_a(\lambda))$ y por tanto $e - (b-a)r_a(\lambda) \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Así, $\lambda \in \rho(b)$ y $r_b(\lambda) = r_a(\lambda)(e - (b-a)r_a(\lambda))^{-1}$. Por otro parte, por la Observación 2.1.8 inciso 1.,

$$(e - (b-a)r_a(\lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}((b-a)r_a(\lambda))^k.$$

Por lo tanto,

$$r_b(\lambda) = r_a(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}((b-a)r_a(\lambda))^k. \tag{4.9}$$

Ahora, asuma que $\lambda \in \rho(a)$ y que $\|(b-a)r_a(\lambda)\| < 1$. Por el Teorema del Radio Espectral 2.2.13 (radio espectral), $r((b-a)r_a(\lambda)) \leq \|(b-a)r_a(\lambda)\| < 1$. Así, $\lambda \in \rho(b)$ y $r_b(\lambda)$ está representada en series de potencia como en (4.9). Luego,

$$\|r_b(\lambda)\| \leq \|r_a(\lambda)\| \sum_{k=0}^{\infty} \|(b-a)r_a(\lambda)\|^k = \frac{\|r_a(\lambda)\|}{1 - \|(b-a)r_a(\lambda)\|}.$$

Por último, suponga que $\lambda \in \rho(a)$ con $\|((b-a)r_a(\lambda))^2\| < 1$. Nuevamente, por el Teorema del Radio Espectral 2.2.13, $r((b-a)r_a(\lambda)) \leq \|((b-a)r_a(\lambda))^2\|^{\frac{1}{2}} < 1$. Así, $\lambda \in \rho(b)$ y

$$\begin{aligned} r_b(\lambda) &= r_a(\lambda)\left[\sum_{k=0}^{\infty}((b-a)r_a(\lambda))^{2k}\right] \\ &\quad + r_a(\lambda)\left[\sum_{k=0}^{\infty}((b-a)r_a(\lambda))^{2k+1}\right] \\ &= r_a(\lambda)\left[e + (b-a)r_a(\lambda)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left[((b-a)r_a(\lambda))^2\right]^k. \end{aligned}$$

Así,

$$\|r_b(\lambda)\| \leq \|r_a(\lambda)\|\|e+(b-a)r_a(\lambda)\| \sum_{k=0}^{\infty} \|((b-a)r_a(\lambda))^2\|^k = \frac{\|r_a(\lambda)\|\|e+(b-a)r_a(\lambda)\|}{1-\|((b-a)r_a(\lambda))^2\|}.$$

□

Lema 4.2.9. *Sean $a, b \in \mathcal{A}$. Si $\lambda \in \rho(a)$ con $\lambda \neq 0$, entonces*

$$((b-a)r_a(\lambda))^2 = \frac{1}{\lambda}[(b-a)b-(b-a)a+(b-a)ar_a(\lambda)(b-a)]r_a(\lambda).$$

Demostración: Suponga que $\lambda \in \rho(a)$ con $\lambda \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} ((b-a)r_a(\lambda))^2 &= (b-a)\frac{e+ar_a(\lambda)}{\lambda}(b-a)r_a(\lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda}[(b-a)b-(b-a)a+(b-a)ar_a(\lambda)(b-a)]r_a(\lambda). \end{aligned}$$

□

Proposición 4.2.10. *Sean $a \in \mathcal{A}$ y $E \subseteq \rho(a)$ cerrado y no vacío en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$\delta_1(E) = \sup\{\|r_a(\lambda)\| : \lambda \in E\} < \infty.$$

Además, si $\{a_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $a_n \xrightarrow{\nu} a$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E \subseteq \rho(a_n)$, para todo $n > n_0$ y

$$\delta_2(E) = \{\|r_{a_n}(\lambda)\| : \lambda \in E,\ n > n_0\} < \infty.$$

Demostración: Si $|\lambda| > \|a\|$, entonces por el Teorema 2.1.5 (i), $\|r_a(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|-\|a\|}$. Así,

$$\lim_{\|a\|<|\lambda|\to\infty} \|r_a(\lambda)\| = 0.$$

Por tanto, existe $\beta_0 > \|a\|$ tal que $\|r_a(\lambda)\| < 1$, para todo $|\lambda| > \beta_0$. Entonces, $\|r_a(\lambda)\| < 1$, para todo $\lambda \in E$ con $|\lambda| > \beta_0$. Por otra lado, sea $E_0 = B[0, \beta_0] \cap E$ y defina $R : E_0 \to \mathbb{R}$ por $R(\lambda) = \|r_a(\lambda)\|$, para todo $\lambda \in E_0$. Luego, como r_a es continua sobre E_0 (Teorema 2.1.5) al igual que la norma en $\mathcal{A}$, R es continua. Dado que E_0 es compacto en $\mathbb{C}$, por el Teorema de Weiertrass ([19, Teorema 3.86]), existe $\beta_1 \geq 0$ tal que $R(\lambda) = \|r_a(\lambda)\| \leq \beta$, para todo $\lambda \in E_0$. Por lo tanto, $\delta_1(E) \leq \max\{1, \beta_1\} < \infty$.

Ahora, suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $a_n \xrightarrow{\nu} a$. Se identifican dos casos:
Caso 1: $0 \in \rho(a)$.

Por la Proposición 4.2.4 (ii), $a_n \xrightarrow{n} a$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a_n - a\| < \frac{1}{2\delta_1(E)}$, para cualquier $n > n_0$. Sea $\lambda \in E$ y $n > n_0$. Luego

$$\|(a_n-a)r_a(\lambda)\| \leq \|a_n-a\|\|r_a(\lambda)\| < \frac{1}{2}.$$

Por la Proposición 4.2.8, $\lambda \in \rho(a_n)$ y $\|r_{a_n}(\lambda)\| \leq \frac{\|r_a(\lambda)\|}{1-\|(a_n-a)r_a(\lambda)\|} < 2\delta_1(E)$. De donde, $\delta_2(E) \leq 2\delta_1(E) < \infty$.

Caso 2: $0 \in \sigma(a)$.

Esto implica que $0 \notin E$. Por el Lema 4.1.10, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \cap E = \emptyset$. Con esto $|\lambda| > \epsilon > 0$, para todo $\lambda \in E$. Sea $\lambda \in E$. Luego, por el Lema 4.2.9,

$$((a_n - a)r_a(\lambda))^2 = \frac{1}{\lambda}[(a_n - a)a_n - (a_n - a)a + (a_n - a)ar_a(\lambda)(a_n - a)]r_a(\lambda).$$

Así,

$$\begin{aligned} \|((a_n - a)r_a(\lambda))^2\| &< \frac{\|r_a(\lambda)\|}{\epsilon}[\|(a_n - a)a_n\| + \|(a_n - a)a\| + \|(a_n - a)a\|\|r_a(\lambda)\|\|(a_n - a)\|] \\ &\leq \frac{\delta_1(E)}{\epsilon}[\|(a_n - a)a_n\| + \|(a_n - a)a\| + \delta_1(E)M\|(a_n - a)a\|], \end{aligned}$$

donde $M = \sup\{\|a_n - a\| : n \in \mathbb{N}\}$. Como $a_n \xrightarrow{\nu} a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, $\|((a_n - a)r_a(\lambda))^2\| < \frac{1}{2}$. Así, por la Proposición 4.2.8, $\lambda \in \rho(a_n)$, para todo $n > n_0$ y

$$\|r_{a_n}(\lambda)\| \leq \frac{\|r_a(\lambda)\|\|e + (a_n - a)r_a(\lambda)\|}{1 - \|((a_n - a)r_a(\lambda))^2\|} < 2\delta_1(E)(\|e\| + M\delta_1(E)).$$

Por lo tanto, $\delta_2(E) < \infty$.

De todo lo anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $E \subseteq \rho(a_n)$ y $\delta_2(E) < \infty$. □

Teorema 4.2.11. *Sean $a, b \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}$. Si $a_n \xrightarrow{\nu} a$ y $a_n \xrightarrow{\nu} b$ entonces $\sigma(a) = \sigma(b)$.*

Demostración: Sea $\lambda \in \rho(a)$. Si $\lambda = 0$, entonces por la Proposición 4.2.4 (ii), $a_n \xrightarrow{n} a$. Así, por la Proposición 4.2.7, $(a - b)a = o = (b - a)b$. Entonces $e = ba^{-1}$ y $e = (a^{-2}b)b$ y por lo tanto $0 \in \rho(b)$. Suponga que $\lambda \neq 0$ y haga $E = \{\lambda\}$. Por la Proposición 4.2.10, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E \subseteq \rho(a_n)$, para todo $n > n_0$, más aún, $\delta_2(E) < \infty$. Luego, se identifican dos casos:

Caso 1: $0 \in \rho(b)$.

Por la Proposición 4.2.4 (ii), $a_n \xrightarrow{n} b$. Así, existe $n_1 > n_0$ tal que $\|a_n - b\| < \frac{1}{2\delta_2(E)}$, para todo $n > n_1$. Luego,

$$\|(b - a_n)r_{a_n}(\lambda)\| \leq \|(b - a_n)\|\|r_{a_n}(\lambda)\| < \frac{1}{2\delta_2(E)}\delta_2(E) = \frac{1}{2}.$$

Por la Proposición 4.2.8, $\lambda \in \rho(b)$.

Caso 2: $0 \in \sigma(b)$.

Como $\lambda \neq 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda| > \epsilon$. Sea $n > n_0$. Luego, por el Lema 4.2.9,

$$((b - a_n)r_{a_n}(\lambda))^2 = \frac{1}{\lambda}[(b - a_n)b - (b - a_n)a_n + (b - a_n)a_n r_{a_n}(\lambda)(b - a_n)]r_{a_n}(\lambda).$$

Así, $\|((b - a_n)r_{a_n}(\lambda))^2\| \leq \frac{1}{\epsilon}[\|(b - a_n)b\| + \|(b - a_n)a_n\| + \delta_2(E)M\|(b - a_n)a_n\|]\delta_2(E)$, donde $M = \sup\{\|b - a_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Como $a_n \xrightarrow{\nu} b$, existe $n_1 \geq n_0$ tal que $\|((b - a_n)r_{a_n}(\lambda))^2\| < \frac{1}{2}$, para todo $n > n_1$. De esta manera, por la Proposición 4.2.8, $\lambda \in \rho(b)$.

De todo lo anterior se concluye que $\rho(a) \subseteq \rho(b)$. De forma análoga se tiene que $\rho(b) \subseteq \rho(a)$ y por lo tanto, $\rho(a) = \rho(b)$. □

El Teorema 4.2.11, permite el estudio de la aproximación del espectro de $a \in \mathcal{A}$ por medio de sucesiones que convergen en $\nu-$convergencia a a. Esto gracias a que no existe ambigüedad en el límite de los espectros de la sucesión.

4.3. Aproximación de espectros totalmente disconexos

En estos momentos se define la función espectro.

Definición 4.3.1. *Se define la función espectro* $\sigma : \mathcal{A} \to S(\mathbb{C})$, *como la aplicación que a cada* $a \in \mathcal{A}$ *le asigna su espectro* $\sigma(a)$ *en* $S(\mathbb{C})$.

Si se tiene $a \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tales que $a_n \xrightarrow{\nu} a$, entonces $\{\sigma(a_n)\}$ define una sucesión en $S(\mathbb{C})$. La pregunta es:

¿La sucesión $\{\sigma(a_n)\}$ converge a $\sigma(a)$ con la métrica de Hausdorff?

En las siguientes líneas se buscarán condiciones bajo las cuales se responde de manera afirmativa a esta pregunta. En la Sección 4.1 se caracterizó la convergencia en $S(\mathbb{C})$ en términos del límite inferior y el límite superior de una sucesión de suconjuntos en un espacio métrico. Ahora se establecerá la convergencia del espectro en términos de estos dos conceptos.

Proposición 4.3.2. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión acotada en* $\mathcal{A}$. *Entonces existe* $K \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ *tal que* $\sigma(a_n) \subseteq K$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Puesto que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada, existe $M > 0$ tal que $\|a_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sigma(a_n) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a_n\|\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}.$$

Haciendo $K = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}$ se tiene lo requerido. □

Sea $a \in \mathcal{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión que converge en $\nu-$convergencia a a. De la Proposición 4.3.2 y del Teorema 4.1.13, es suficiente verificar que $\liminf \sigma(a_n) = \sigma(a) = \limsup \sigma(a_n)$ para concluir que $\sigma(a_n)$ converge a $\sigma(a)$ con la métrica de Hausdorff. En general se cumple que $\limsup \sigma(a_n) \subseteq \sigma(a)$ (vea el Teorema 4.3.3). Pero para que $\sigma(a) \subseteq \liminf \sigma(a_n)$ se requieren condiciones sobre las propiedades topológicas del espectro (vea el Teorema 4.3.11).

Teorema 4.3.3. *Sean* $a \in \mathcal{A}$ *y* $\{a_n\}$ *una sucesión en* $\mathcal{A}$ *tales que* $a_n \xrightarrow{\nu} a$. *Entonces* $\limsup \sigma(a_n) \subseteq \sigma(a)$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Luego, $\mathbb{C}\backslash(\sigma(a))_\epsilon$ es cerrado y no vacío en $\mathbb{C}$, además $\mathbb{C}\backslash(\sigma(a))_\epsilon \subseteq \rho(a)$. Por la Proposición 4.2.10, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{C}\backslash(\sigma(a))_\epsilon \subseteq \rho(a_n)$, para todo $n > n_0$. Es decir, $\sigma(a_n) \subseteq (\sigma(a))_\epsilon$, para todo $n > n_0$. Por el Lema 4.1.11, $\limsup \sigma(a_n) \subseteq \sigma(a)$. □

Observación 4.3.4. *Suponga que* $a \in \mathcal{A}$ *y* $\{a_n\}$ *es una sucesión en* $\mathcal{A}$ *tales que* $a_n \xrightarrow{\nu} a$. *Sea* $\{\lambda_n\}$ *una sucesión de números complejos tales que* $\lambda_n \in \sigma(a_n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $\{\lambda_{n_k}\}$ *es una subsucesión de* $\{a_n\}$ *tal que* $\lambda_{n_k} \to \lambda \in \mathbb{C}$, *entonces por la Proposición 4.1.9,* $\lambda \in \limsup \sigma(a_n)$ *y el Teorema 4.3.3 implica que* $\lambda \in \sigma(a)$.

Hasta este momento solo queda verificar que $\sigma(a) \subseteq \liminf \sigma(a_n)$ para que el espectro de a_n converja con la métrica de Haudorff a al espectro de a. El primer paso es construir conjuntos espectrales para a_n a partir de un conjunto espectral para a cuando $a_n \xrightarrow{\nu} a$.

Proposición 4.3.5. *Sean* $a \in \mathcal{A}$, $\Lambda \subseteq \sigma(a)$ *conjunto espectral para* a *(vea la Definición 2.2.14) y* $C \in \mathcal{C}(a, \lambda)$ *(vea la Definición 2.2.20). Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión en* $\mathcal{A}$ *tal que* $a_n \xrightarrow{\nu} a$, *entonces existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $n > n_0$, $\Lambda_n = \sigma(a_n) \cap \operatorname{int}(C)$ *es conjunto espectral para* a_n *y* $C \in \mathcal{C}(a_n, \Lambda_n)$. *Más aún, si para todo* $n > n_0$, $p = p(a, \Lambda)$ *y* $p_n = p(a_n, \Lambda)$, *entonces*

- $\|p\| \leq \frac{Var(C)\delta_1(C)}{2\pi}$.
- $\|p_n\| \leq \frac{Var(C)\delta_2(C)}{2\pi}$.
- $\|p_n - p\| \leq \frac{Var(C)\delta_1(C)\delta_2(C)}{2\pi}\|a_n - a\|$.
- $\|(p_n - p)p\| \leq \frac{Var(C)\delta_1(C)\delta_2(C)}{2\pi}\|(a_n - a)p\|$.
- $\|(p_n - p)p_n\| \leq \frac{Var(C)\delta_1(C)\delta_2(C)}{2\pi}\|(a_n - a)p_n\|$.

Si además, $0 \in \operatorname{ext}(C)$, *entonces*

- $\|(a_n - a)p\| \leq \frac{Var(C)\delta_1(C)}{2\pi M}\|(a_n - a)a\|$.
- $\|(a_n - a)p_n\| \leq \frac{Var(C)\delta_2(C)}{2\pi M}\|(a_n - a)a_n\|$.

Donde $M = \min\left\{\frac{1}{|\lambda|} : \lambda \in C\right\}$.

Demostración: Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $a_n \xrightarrow{\nu} a$. Observe que C es compacto y no vacío en $\mathbb{C}$ tal que $C \subseteq \rho(a)$, así, por la Proposición 4.2.10, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C \subseteq \rho(a_n)$, para todo $n > n_0$, más aún, $\delta_1(C) < \infty$ y $\delta_2(C) < \infty$. Para cada $n > n_0$, defina $\Lambda_n = \sigma(a_n) \cap \operatorname{int}(C)$. Puesto que $C \subseteq \rho(a_n)$, entonces $\Lambda_n = \sigma(a_n) \cap (\operatorname{int}(C) \cup C)$, de esta manera λ_n es abierto y cerrado en $\sigma(a)$. Así, por la Proposición 2.2.15, Λ_n es conjunto espectral para a_n. También, note que $\Delta_n \subseteq \operatorname{int}(C)$ y $\sigma(a_n)\backslash\Lambda_n \subseteq \operatorname{ext}(C)$ y por tanto, $C \in \mathcal{C}(a_n, \Lambda_n)$.

Ahora, para cada $n > n_0$, sea $p_n = p(a_n, \Lambda)$ y $p = p(a, \Lambda)$, es decir,

$$p_n = p(a_n, \Lambda_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C r_{a_n}(\lambda)\, d\,\lambda \quad \text{y} \quad p = p(a, \Lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C r_a(\lambda)\, d\,\lambda.$$

Luego, por el Teorema 1.4.10 (ii), se tiene que

$$\|p\| \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{\lambda\in C}\{\|r_a(\lambda)\|\}Var(C) = \frac{\delta_1(C)Var(C)}{2\pi},$$

$$\|p_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{\lambda\in C}\{\|r_{a_n}(\lambda)\| : \lambda \in C\}Var(C) = \frac{\delta_2(C)Var(C)}{2\pi}$$

y

$$\|p_n - p\| \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{\lambda\in C}\{\|r_{a_n}(\lambda) - r_a(\lambda)\|\}Var(C)$$

Dado que $\lambda \in \rho(a) \cap \rho(a_n)$, para todo $\lambda \in C$, de la Segunda Identidad del Resolvente (Proposición 4.2.8 (i)) se tiene que,

$$r_{a_n}(\lambda) - r_a(\lambda) = r_{a_n}(\lambda)(a_n - a)r_a(\lambda),$$

para cualquier $\lambda \in C$. De esta forma

$$\|p_n - p\| \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{\lambda\in C}\{\|r_{a_n}(\lambda)\|\|a_n - a\|\|r_a(\lambda)\|\}Var(C) \leq \frac{\delta_1(C)\delta_2(C)Var(C)}{2\pi}\|a_n - a\|.$$

Teniendo en cuenta que p conmuta con $r_a(\lambda)$ y p_n conmuta con $r_{a_n}(\lambda)$, para todo $\lambda \in C$ (vea la Proposición 2.15). Usando nuevamente el Teorema 1.4.10 (ii), se tiene que

$$\|(p_n - p)p\| \leq \frac{Var(C)\delta_1(C)\delta_2(C)}{2\pi}\|(a_n - a)p\|$$

y

$$\|(p_n - p)p\| \leq \frac{Var(C)\delta_1(C)\delta_2(C)}{2\pi}\|(a_n - a)p_n\|.$$

Ahora, asuma que $0 \in \text{ext}(C)$. De la identidad $r_a(\lambda) = \frac{ar_a(\lambda)+e}{\lambda}$, para cada $\lambda \in \rho(a)$, se tiene que,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi i}\int_C r_a(\lambda)\, d\,\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ar_a(\lambda)+e}{\lambda}\, d\,\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_C \frac{ar_a(\lambda)}{\lambda}\, d\,\lambda + e\int_C \frac{d\,\lambda}{\lambda}\right]. \end{aligned}$$

Puesto que $0 \in \text{ext}(C)$, $\int_C \frac{d\,\lambda}{\lambda} = 0$. Por tanto,

$$p = \frac{a}{2\pi i}\int_C \frac{r_a(\lambda)}{\lambda}\, d\,\lambda. \tag{4.10}$$

Similarmente, se obtiene que

$$p_n = \frac{a_n}{2\pi i}\int_C \frac{r_{a_n}(\lambda)}{\lambda}\, d\,\lambda. \tag{4.11}$$

Luego, poniendo $M = \text{mín}\{\frac{1}{|\lambda|} : \lambda \in C\} > 0$, de (4.10) y (4.10), se obtiene que,

$$\|(a_n - a)p\| \leq \frac{1}{2\pi}\|(a_n - a)a\| \sup_{\lambda\in C}\left\{\frac{\|r_a(\lambda)\|}{|\lambda|}\right\} Var(C) \leq \frac{\delta_1(C)Var(C)}{2\pi M}\|(a_n - a)a\|$$

y

$$\|(a_n - a)p_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\|(a_n - a)a_n\| \sup_{\lambda\in C}\left\{\frac{\|r_{a_n}\|(\lambda)}{|\lambda|}\right\} Var(C) \leq \frac{\delta_2(C)Var(C)}{2\pi M}\|(a_n - a)a_n\|.$$

□

Corolario 4.3.6. *Con la notación y las hipótesis de la Proposición 4.3.5, si* $0 \notin \Lambda$*, entonces* $p_n \xrightarrow{\nu} p$.

Demostración: Suponga que $0 \notin \Lambda$. Si $0 \notin \sigma(a)$ la conclusión se sigue de las Proposiciones 4.2.4 y 4.3.5.

Si $0 \in \sigma(a)$, entonces $0 \in \text{ext}(C)$. Así, por la proposición 4.3.5, $\|(p_n - p)p\| \to 0$, $\|(p_n - p)p_n\| \to 0$ y $\{\|p_n\|\}$ está acotada. Por lo tanto $p_n \xrightarrow{\nu} p$. □

Corolario 4.3.7. *Con la notación y las hipótesis de la Proposición 4.3.5 se cumple que,*

(i) Si $\Lambda = \emptyset$*, entonces existe* $n_1 \geq n_0$ *tal que* $\Lambda_n = \emptyset$*, para todo* $n > n_1$.

(ii) Si $0 \notin \Lambda$*, entonces* $\Lambda \neq \emptyset$ *si y solo si existe* $n_1 \geq n_0$ *tal que* $\Lambda_n \neq \emptyset$*, para todo* $n > n_1$.

(iii) Si $0 \notin \Lambda$*, entonces para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n_1 \geq n_0$ *tal que* $\Lambda_n \subseteq (\Lambda)_\epsilon$*, para todo* $n > n_1$.

Demostración: (i) Suponga que $\Lambda = \emptyset$. Esto implica que $\sigma(a) \subseteq \mathrm{ext}(C)$. Como $\sigma(a)$ es compacto y $\mathrm{ext}(C)$ es abierto en $\mathbb{C}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(\sigma(a))_\epsilon \subseteq \mathrm{ext}(C)$. Luego, por el Teorema 4.3.3, $\limsup \sigma(a_n) \subseteq \sigma(a)$, así, por el Lema 4.1.11 y la Proposición 4.3.2, existe $n_1 \geq n_0$ tal que $\sigma(a_n) \subseteq (\sigma(a))_\epsilon \subseteq \mathrm{ext}(C)$, para todo $n > n_1$. Por lo tanto $\Lambda_n = \sigma(a_n) \cap \mathrm{int}(C) = \emptyset$, para todo $n > n_1$.

(ii) Asuma que $0 \notin \Lambda$. Suponga que $\Lambda \neq \emptyset$, pero que para todo $m \geq n_0$ existe $n > m$ tal que $\Lambda_n = \emptyset$. Entonces, se construye una sucesión creciente $n_1 < n_2 < \ldots <$ de números naturales tales que $\Delta_{n_k} = \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema 2.2.23, $p_{n_k} = o$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, por el Corolario 4.3.6, $p_{n_k} \xrightarrow{\nu} p$ y así, $p_{n_k} p \xrightarrow{n} p^2 = p$ (vea el Teorema 2.2.22). Entonces, $p = o$, pero esto es una contradicción, pues, nuevamente por el Teorema 2.2.23, $p \neq o$.

Recíprocamente, suponga que existe $n_1 \geq n_0$ tal que $\Lambda_n \neq \emptyset$, para todo $n > n_1$ pero que $\Lambda = \emptyset$. Dado que $p_n \xrightarrow{\nu} p$ (Corolario 4.3.6), $p_n^2 - pp_n \xrightarrow{n} o$. Nuevamente por los teoremas 2.2.22 y 2.2.23, $p_n \xrightarrow{n} o$. Luego, como $\limsup \sigma(p_n) \subseteq \sigma(p)$ (Teorema 4.3.3), por el Lema 4.1.11 y la Proposición 4.3.2, existe $m \geq n_1$ tal que $\sigma(p_n) \subseteq (\sigma(o))_{\frac{1}{2}} = B_{\frac{1}{2}}(0)$, para todo $n > m$. Pero dado que $\Lambda_n \neq \emptyset$, por el Teorema 2.2.23, $p_n \neq o$, para todo $n > m$. Así, $\sigma(p_n) = \{0, 1\} \subseteq B_{\frac{1}{2}}(0)$ o $\sigma(p_n) = \{1\} \subseteq B_{\frac{1}{2}}(0)$, para todo $n > m$, lo cual es una contradicción.

(iii) Suponga que $0 \notin \Lambda$. Si $\Lambda = \emptyset$, por inciso (i), se sigue inmediatamente el resultado. Suponga que $\Lambda \neq \emptyset$ pero que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $m \geq n_0$ existe $n > m$ tal que $\Lambda_n \nsubseteq (\Lambda)_{\epsilon_1}$. Con esto, se construye una sucesión creciente de números naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ tales que $\Lambda_{n_k} \nsubseteq (\Lambda)_{\epsilon_1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte, por el inciso (ii), existe $m \geq n_0$ tal que $\Lambda_{n_k} \neq \emptyset$, para todo $n_k > m$. Así, para cada $n_k > m$, sea $\lambda_{n_k} \in \Lambda_{n_k} \backslash (\Lambda)_{\epsilon_1}$. Luego, como $\mathrm{int}(C) \cup C$ e compacto en $\mathbb{C}$ y $\{\lambda_{n_k}\} \subseteq \mathrm{int}(C) \cup C$, existe $\{\lambda_{n_{k_l}}\}$ subsucesión de $\{\lambda_{n_k}\}$ tal que $\lambda_{n_{k_l}} \to \lambda$, para algún $\lambda \in \mathrm{int}(C) \cup C$. Así, por la Observación 4.3.4, $\lambda \in \sigma(a)$ y por lo tanto, $\lambda \in \Lambda$. De esta forma, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{n_k} \in B_{\epsilon_1}(\lambda) \subseteq (\Lambda)_{\epsilon_1}$, para todo $k > l$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 4.3.8. *Sean $a \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathrm{iso}(\sigma(a))$ con $\lambda \neq 0$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $a_n \xrightarrow{\nu} a$, entonces $\lambda \in \liminf \sigma(a_n)$.*

Demostración: Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $a_n \xrightarrow{\nu} a$ y suponga que $\lambda \notin \liminf \sigma(a_n)$. Entonces, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $n_1 \in \mathbb{N}$ existe $n > n_1$ tal que $B_{\epsilon_1}(\lambda) \cap (\sigma(a_n))_{\epsilon_1} = \emptyset$. Luego, existe una sucesión creciente $n_1 < n_2 < \ldots$ de números naturales tales que $B_{\epsilon_1}(\lambda) \cap (\sigma(a_{n_k}))_{\epsilon_1} = \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\lambda \in \mathrm{iso}(\sigma(a))$, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $B_{\epsilon_2}[\lambda] \cap (\sigma(a) \backslash \{\lambda\}) = \emptyset$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ y haga $\Lambda = \{\lambda\}$. Entonces Λ es un conjunto espectral para a (vea el Ejemplo 2.2.16) y $\partial B_\epsilon[\lambda] \in \mathcal{C}(a, \Lambda)$ cuando se orienta positivamente. Ahora, como $a_{n_k} \xrightarrow{\nu} a$, por el Corolario 4.3.7, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda_n = \sigma(a_{n_k}) \cap B_\epsilon(\lambda) \neq \emptyset$, para todo $k > k_0$ y así $B_{\epsilon_1}(\lambda) \cap (\sigma(a_n))_{\epsilon_1} \neq \emptyset$, para todo $k > k_0$, lo cual es una contradicción. □

Observación 4.3.9. *De la Proposición 4.3.8 se deduce que si $0 \notin \mathrm{iso}(\sigma(a))$ entonces $\overline{\mathrm{iso}(\sigma(a))} \subseteq \liminf \sigma(a_n)$, pues $\liminf \sigma(a_n)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{C}$.*

Definición 4.3.10. *Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Se dice que A es totalmente disconexo si $A = \mathrm{iso}(A)$, es decir, todos los puntos de A son puntos aislados.*

Corolario 4.3.11. *Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $\sigma(a) \backslash \{0\}$ es totalmente disconexo. Si $0 \in acc(\sigma(a))$ y $\{a_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $a_n \xrightarrow{\nu} a$, entonces $\sigma(a_n) \to \sigma(a)$ con la métrica de Hausdorff.*

Hasta el momento solo se ha encontrado cierta clase de elementos de $\mathcal{A}$ donde la función espectro σ es continua utilizando $\nu-$convergencia en $\mathcal{A}$. En la siguiente sección se estudiará la continuidad de σ usando $\nu-$convergencia sobre la álgebra de los operadores acotados $\mathcal{B}(X)$.

4.4. Aproximación en $\mathcal{B}(X)$

En esta sección X denota un espacio de Banach. Se había mencionado en el Capítulo 2, que una de las aplicaciones del estudio de los conjuntos espectrales es la descomposición del espectro por medio de operadores más simples. Se enuncia este teorema sin demostración.

Teorema 4.4.1 (Teorema de Descomposición Espectral). *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ y Λ un conjunto espectral para T con $P = P(T, \Lambda)$ (proyección asociada a T y a Λ). Entonces $\mathcal{R}(P)$ y $\mathcal{N}(P)$ son subespacios $T-$invariantes (Definición 3.3.3) que satisfacen,*

$$\sigma(T|_{\mathcal{R}(P)}) = \Lambda, \quad \sigma(T|_{\mathcal{N}(P)}) = \sigma(T)\backslash\Lambda \quad y \quad X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P).$$

DEMOSTRACIÓN: [23, Teorema 1.26] □

Proposición 4.4.2. *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\lambda \in \operatorname{iso}(\sigma(T))$ con $P = P(T, \{\lambda\})$. Entonces*

(i) $\mathcal{N}^\infty(\lambda - T) \subseteq \mathcal{R}(P)$ *y* $\mathcal{N}(P) \subseteq \mathcal{R}^\infty(\lambda - T)$.

(ii) Si $m = \dim(\mathcal{R}(P)) < \infty$ entonces $\mathcal{N}((\lambda - T)^m) = \mathcal{R}(P)$, $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}((\lambda - T)^m)$ y $X = \mathcal{N}((\lambda - T)^m) \oplus \mathcal{R}((\lambda - T)^m)$. Además, λ es un eigenvalor de T.

DEMOSTRACIÓN: [23, Proposición 1.31] □

Proposición 4.4.3. *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\Lambda \subseteq \sigma(T)$ conjunto espectral para T con $P = P(T, \Lambda)$. Entonces $\dim(\mathcal{R}(P)) < \infty$ si y solo si $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ con $m_j = \dim(\mathcal{R}(P_j)) < \infty$ ($P_j = P(T, \{\lambda_j\})$), para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Además,*

$$P = \sum_{j=1}^{r} P_j, \quad m = \sum_{j=1}^{r} m_j, \quad y \quad P_j P_i = O, \ \forall\, j \neq i,$$

DEMOSTRACIÓN: [23, Teorema 1.32] □

Lema 4.4.4. *Sea $T \in$ operador tal que $T \notin \mathcal{G}(\mathcal{B}(X))$. Si $p = p(T) = q(T) < \infty$, con $p \neq 0$, entonces*

(i)

$$X = \mathcal{N}(T^p) \oplus \mathcal{R}(T^p).$$

(ii) Los subespacios $\mathcal{N}(T^p)$ y $\mathcal{R}(T^p)$ son $T-$invariantes.

(iii) Sean $T_1 : \mathcal{R}(T^p) \to \mathcal{R}(T^p)$ y $T_2 : \mathcal{N}(T^p) \to \mathcal{N}(T^p)$ dados por $T_1 = T|_{\mathcal{R}(T^p)}$ y $T_2 = T|_{\mathcal{N}(T^p)}$, respectivamente. Entonces T_1 es biyectivo y T_2 es nilpotente.

(iv) Si $\mathcal{R}(T^p)$ es cerrado, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $p(\lambda - T) = 0$, para todo $0 < |\lambda| < \epsilon$.

(v) Si $\alpha(T) < \infty$, entonces $0 \in \operatorname{iso}(\sigma(T))$ y $P = P(T, \{0\})$ satisface que $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(T^p)$ y $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(T^p)$.

DEMOSTRACIÓN: Suponga las hipótesis del Lemma. Luego

(i) Por el Lema 3.3.8, existe Y_p subespacio de $\mathcal{N}(T^p)$ tal que $X = Y_p \oplus \mathcal{R}(T^p)$ y $\mathcal{R}(T^p) \cap \mathcal{N}(T^p) = \{0\}$. Por lo tanto, $X = \mathcal{N}(T^p) \oplus \mathcal{R}(T^p)$.

(ii) Consecuencia de la Observación 3.3.4) y la Proposición 3.3.5.

(iii) Por la Proposición 3.3.5 se tiene que $T_1(\mathcal{R}(T^p)) = T(\mathcal{R}(T^p)) = \mathcal{R}(T^{p+1}) = \mathcal{R}(T^p)$, así, T_1 es sobreyectivo. También, T_1 es inyectivo, pues por el Lema 3.3.8, $\mathcal{R}(T^p) \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}$. Por otra parte, como $T^p(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{N}(T^p)$, T_2 es nilpotente.

(iv) Suponga que $\mathcal{R}(T^p)$ es cerrado pero que para todo $\epsilon > 0$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $0 < |\lambda| < \epsilon$ tal que $p(\lambda - T) > 0$. Así, se contruye una sucesión $\{\lambda_n\}$ de números complejos tal que $\lambda_n \to 0$ y $p(\lambda_n - T) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{0\} \subsetneq \mathcal{N}(\lambda_n - T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in \mathcal{N}(\lambda_n - T)$ con $\|x_n\| = 1$.

Ahora, sean $n \in \mathbb{N}$ y $y \in \mathcal{N}(\lambda_n - T)$. Entonces $T^p(y) = (\lambda_n)^p y$. Así, $y \in \mathcal{R}(T^p)$ y por tanto, $\{x_n\} \subseteq \mathcal{R}(T^p)$. Por otro lado, por el Teorema del Mapeo Inverso A.17, existe $T_1^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T^p))$ inversa de T_1 (vea inciso (iii)). Luego, dado que $\{x_n\}$ está acotada, $\|T(x_n)\| \leq |\lambda_n| \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $T(x_n) \to 0$. Así, $x_n = T_1^{-1}(T(x_n)) \to T_1^{-1}(0) = 0$. Pero esto es una contradicción, pues $\|x_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(v) Suponga que $\alpha(T) < \infty$. Por el Teorema 3.3.9 (iii), $T \in \Phi(X)$ e $i(T) = 0$. Como $\Phi(X)$ es abierto, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que si $|\lambda| < \epsilon_1$, $\lambda - T \in \Phi(X)$ e $i(\lambda - T) = 0$. También, por el inciso (iv), existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $p(\lambda - T) = 0$, para todo $0 < |\lambda| < \epsilon_2$. Sean $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ y $\lambda \in B(0, \epsilon)\backslash\{0\}$. Entonces $p(\lambda - T) = 0$ y $\lambda - T \in \Phi(X)$ con $i(\lambda - T) = 0$. Esto implica que $\lambda - T$ es biyectivo con $\mathcal{R}(\lambda - T)$ cerrado en X (Observación 3.3.4 (ii)). Así, por el por Teorema del Mapeo inverso A.17, existe $(\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ inversa de $(\lambda - T)$. Así, $B(0, \epsilon)\backslash\{0\} \subseteq \rho(T)$ y en consecuencia $0 \in \operatorname{iso}(\sigma(T))$, pues $T \notin \mathcal{G}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

Por la Proposición 4.4.2, $\mathcal{N}(T^p) = \mathcal{N}^\infty(T) \subseteq \mathcal{R}(P)$. Suponga que $\mathcal{N}(T^p) \subsetneq \mathcal{R}(P)$ y defina $U : \mathcal{R}(P)/\mathcal{N}(T^p) \to \mathcal{R}(P)/\mathcal{N}(T^p)$ por $U(x + \mathcal{N}(T^p)) = T(x) + \mathcal{N}(T^p)$ para todo $x \in \mathcal{R}(P)$. Como $\mathcal{R}(P)$ es $T-$invariante, U está bien definida . Además, como $\mathcal{N}(T^p) = \mathcal{N}(T^{p+1})$, U es inyectiva.

Por el momento suponga que $\mathcal{R}(U)$ es cerrado. Por la Proposición 1.2.16, U está acotada por abajo. Así, existe $c > 0$ tal que $c\|x + \mathcal{N}(T^p)\| \leq \|U(x + \mathcal{N}(T^p))\|$, para todo $x \in \mathcal{R}(P)$. Entonces, observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathcal{R}(P)$, $c^n\|x + \mathcal{N}(T^p)\| \leq \|U^n(x + \mathcal{N}(T^p))\|$. Sean $L = T|_{\mathcal{R}(P)}$ y $x_0 \in \mathcal{R}(P)\backslash\mathcal{N}(T^p)$ con $\|x_0\| = 1$. Se tiene que,

$$c^n\|x_0 + \mathcal{N}(T^p)\| \leq \|U^n(x_0 + \mathcal{N}(T^p))\| = \|T^n(x_0) + \mathcal{N}(T^p)\| \leq \|T^n(x_0)\| \leq \|L^n\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $0 < c \leq \lim(\|L^n\|)^{\frac{1}{n}} = r(L)$. Por esto no puede ser, pues, $\sigma(L) = \{0\}$. Por lo tanto $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(T^p)$.

Ahora se verá que $\mathcal{R}(U)$ es cerrado. Observe que $\mathcal{R}(U) = (\mathcal{R}(L) + \mathcal{N}(T^p))/\mathcal{N}(T^p)$. Como P es una proyección acotada, $\mathcal{R}(P)$ es cerrado y con ello $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{R}(P)$ es cerrado en X (vea la Proposición A.11). Luego, como $\mathcal{N}(T^p)$ tiene dimensión finita, por el Lema 3.4.6, $\mathcal{R}(L) + \mathcal{N}(T^p)$ es cerrado en X.

Por último, por Teorema 1.3.15, $\mathcal{R}(U)$ es cerrado.

Por otra parte, por el Teorema 4.4.1, $\sigma(T|_{\mathcal{N}(P)}) = \sigma(T)\backslash\{0\}$. Entonces por el Teorema espectral 2.2.10, $\sigma(T|^p_{\mathcal{N}(P)}) = (\sigma(T))^p\backslash\{0\}$ y por tanto $T|^p_{\mathcal{N}(P)} \in \mathcal{G}(\mathcal{B}(\mathcal{N}(P)))$. Así, para cada $x \in \mathcal{N}(P)$ existe $y \in \mathcal{N}(P)$ tal que $x = T^p(y)$. Por lo tanto, $\mathcal{N}(P) \subseteq \mathcal{R}(T^p)$.

Sea $y \in \mathcal{R}(T^p)$. Entonces, existe $x \in X$ tal que $y = T^p(x)$. Dado que $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(T^p)$, $P(x) \in \mathcal{N}(T^p)$. Luego como P y T conmutan (pues P es una proyección acotada sobre $\mathcal{R}(T)$), se tiene que $P(y) = P(T^p(x)) = T^p(P(x)) = 0$. Así, $\mathcal{R}(T^p) \subseteq \mathcal{N}(P)$ y por lo tanto, $\mathcal{R}(T^p) = \mathcal{N}(P)$. □

Teorema 4.4.5. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Luego, $\alpha(\lambda_0 - T) < \infty$ y $p(\lambda_0 - T) = q(\lambda_0 - T) < \infty$ si y solo si $\lambda_0 \in \operatorname{iso}(\sigma(T))$ y $\dim(\mathcal{R}(P)) < \infty$, donde $P = P(T, \{\lambda_0\})$*

Demostración: Suponga que $\lambda_0 \in \operatorname{iso}(\sigma(T))$ con $m = \dim(\mathcal{R}(P)) < \infty$. Por la Proposición 4.4.2, $\mathcal{N}^\infty(\lambda_0 - T) \subseteq \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}((\lambda_0 - T)^m)$ y $\mathcal{R}((\lambda_0 - T)^m) = \mathcal{N}(P) \subseteq \mathcal{R}^\infty(\lambda_0 - T)$. Por lo tanto, $p(\lambda_0 - T) = q(\lambda_0 - T) < \infty$ (vea la Proposición 3.3.7).

Nuevamente, por la Proposición 4.4.2 $\beta((\lambda_0 - T)^m) = \dim(X/\mathcal{R}((\lambda_0 - T)^m)) = \dim(\mathcal{N}((\lambda_0 - T)^m)) = \dim(\mathcal{R}(P)) = m < \infty$. Es decir, $(\lambda_0 - T)^m \in \Phi(X)$. Por el Corolario 3.1.11 (iii), $\lambda_0 - T \in \Phi(X)$ y por lo tanto, $\alpha(\lambda_0 - T) < \infty$.

Recíprocamente, suponga que $\lambda_0 \in \sigma(T)$ con $\alpha(\lambda_0 - T) < \infty$ y $p = p(\lambda_0 - T) = q(\lambda_0 - T) < \infty$. Ya que $\lambda_0 - T$ no es invertible en $\mathcal{B}(X)$, por el Lema 4.4.4, $0 \in \operatorname{iso}(\sigma(\lambda_0 - T))$ con $\mathcal{N}((\lambda_0 - T)^p) = \mathcal{R}(P_1)$ y $\mathcal{R}((\lambda_0 - T)^p) = \mathcal{N}(P_1)$, donde $P_1 = P(\lambda_0 - T, \{0\})$. Dado que $0 \in \operatorname{iso}(\sigma(\lambda_0 - T))$, $\lambda_0 \in \operatorname{iso}(\sigma(T))$ y $P = P(T, \{\lambda_0\}) = P(\lambda_0 - T, \{0\}) = P_1$. Luego, como $\alpha(\lambda_0 - T) < \infty$, $\alpha((\lambda_0 - T)^p) < \infty$ (vea el Teorema 3.2.5). Por lo tanto, $\dim(\mathcal{R}(P)) = \dim(\mathcal{R}(P_1)) = \alpha((\lambda_0 - T)^p) < \infty$. □

A continuación se definen partes del espectro usando los operadores Fredholm y semi-Fredholm.

Definición 4.4.6. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Para cada $k \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sea*

$$\rho^k_{s-F}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda - T \in \Phi_\pm(X) \ e \ i(\lambda - T) = k\}.$$

También, se define

$$\begin{aligned}
\rho^+_{s-F}(T) &= \bigcup_{k=1}^{+\infty} \rho^k_{s-F}(T) \\
\rho^-_{s-F}(T) &= \bigcup_{k=-\infty}^{-1} \rho^k_{s-F}(T) \\
\rho^\pm_{s-F}(T) &= \rho^+_{s-F}(T) \cup \rho^-_{s-F}(T) \\
\rho^{\pm\infty}_{s-F}(T) &= \rho^{+\infty}_{s-F}(T) \cup \rho^{-\infty}_{s-F}(T).
\end{aligned}$$

Los teoremas 3.4.8 y 3.4.9 motivan las siguientes definiciones.

Definición 4.4.7. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Se definen*

$$\begin{aligned}
\phi_{+\infty}(T) &= \{\lambda \in \rho^{+\infty}_{s-F}(T) : \ \mathcal{N}(\lambda - T) \text{ es complementado en } X\} \\
\phi_{+}(T) &= \{\lambda \in \rho^{+}_{s-F}(T) : \ \mathcal{N}(\lambda - T) \text{ es complementado en } X\} \\
\phi_{-}(T) &= \{\lambda \in \rho^{-}_{s-F}(T) : \ \mathcal{R}(\lambda - T) \text{ es complementado en } X\} \\
\phi_{-\infty}(T) &= \{\lambda \in \rho^{-\infty}_{s-F}(T) : \ \mathcal{R}(\lambda - T) \text{ es complementado en } X\}.
\end{aligned}$$

Y por último se hace, $\phi_{\pm\infty}(T) = \phi_{-\infty}(T) \cup \phi_{+\infty}(T)$.

Proposición 4.4.8. *Sea* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Entonces los conjuntos* $\phi_{-\infty}(T)$*,* $\phi_{+\infty}(T)$ *y* $\rho^k_{s-F}(T)$*, para cada* $k \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *son conjuntos abiertos de* $\mathbb{C}$.

Demostración: Considere $\lambda \in \rho^k_{s-F}(T)$ con $k \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Por la continuidad del índice (vea Teorema 3.4.5), existe $\epsilon > 0$ tal que si $|\beta - \lambda| < \epsilon$, entonces $\beta - T \in \Phi_{\pm}(X)$ e $i(\beta - T) = i(\lambda - T) = k$. Por lo tanto, $\rho^k_{s-F}(T)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Utilizando este resultado y el hecho que $\mathcal{G}_l(C(X))$ y $\mathcal{G}_r(C(X))$ son abiertos en $C(X)$ se prueba que los conjuntos restantes son abiertos en $\mathbb{C}$. $\square$

Teorema 4.4.9. *Sean* $T \in \Phi(X)$ *y* $\{T_n\}$ *una sucesión en* $\mathcal{B}(X)$ *tales que* $T_n \xrightarrow{\nu} T$*. Para todo* $k \in (-\infty, \infty]$*, si* $\lambda \in \rho^k_{s-F}(T)$*, entonces existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\lambda \in \rho^k_{s-F}(T_n)$*, para todo* $n > n_0$*. Si además,* $\mathcal{R}(\lambda - T_n)$ *es cerrado en* X*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *la conclusión también es cierta para* $k = -\infty$.

Demostración: Como $T_n \xrightarrow{\nu} T$, $((\lambda - T_n)T) \xrightarrow{n} ((\lambda - T)T)$. Sea $\lambda \in \rho^k_{s-F}(T)$, donde $k \in (-\infty, \infty]$.

Si $k \in \mathbb{Z}$, entonces, por el Teorema 3.2.3, $(\lambda - T)T \in \Phi(X)$. Así, por el Teorema de la continuidad del índice 3.4.5, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\lambda - T_n)T \in \Phi(X)$ e $i((\lambda - T_n)T) = i((\lambda - T)T) = k + i(T)$, para todo $n > n_0$. Sea $n > n_0$. Luego, por el Teorema 3.2.5 (i), $\beta(T) = \infty$ o $\alpha(\lambda - T_n) < \infty$. Dado que $\beta(T) < \infty$, entonces $\alpha(\lambda - T_n) < \infty$. Por otro lado, por Corolario 3.1.11, $\beta(\lambda - T_n) < \infty$ y por lo tanto, $\lambda - T_n \in \Phi(X)$.

Nuevamente por el Teorema 3.2.3, se concluye que $i(\lambda - T_n) = k$. Por lo tanto, $\lambda \in \rho^k_{s-F}(T_n)$, para todo $n > n_0$.

Si $k = \infty$, entonces $\lambda - T \in \Phi_-(X)$ e $i(\lambda - T) = \infty$. Por el Corolario 3.1.10, $(\lambda - T)T \in \Phi_-(X)$ y por el Teorema 3.2.5 (i), $i((\lambda - T)T) = \infty$. Así por el Teorema 3.4.5, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\lambda - T_n)T \in \Phi_-(X)$ e $i((\lambda - T_n)T) = \infty$, para todo $n > n_0$. Sea $n > n_0$, entonces $\alpha(\lambda - T_n) = \infty$, de lo contrario $i((\lambda - T_n)T) < \infty$, lo cual es una contradición (Teorema 3.2.5 (iii)). También, por el Corolario 3.1.11 (ii), $\beta(\lambda - T_n) < \infty$. Así, $i(\lambda - T_n) = \infty$. Por consiguiente, $\lambda \in \rho^{+\infty}_{s-F}(T)$, para todo $n > n_0$.

Sea $\lambda \in \rho^{-\infty}_{s-F}(T)$ y suponga que $\mathcal{R}(\lambda - T_n)$ es cerrado en X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\lambda - T \in \Phi_+(X)$ e $i(\lambda - T) = -\infty$. Por el Teorema 3.2.5 (ii), $\beta((\lambda - T)T) = \infty$. Así, por el Corolario 3.1.10, $(\lambda - T)T \in \Phi_+(X)$ e $i((\lambda - T)T) = -\infty$. Por la continuidad del índice 3.4.5, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\lambda - T_n)T \in \Phi_+(X)$ e $i((\lambda - T_n)T) = -\infty$, para todo $n > n_0$. Sea $n > n_0$, entonces, $\alpha((\lambda - T_n)T) < \infty$. Nuevamente por Teorema 3.2.5 (i), $\beta(\lambda - T_n) < \infty$ o $\beta(T) = \infty$. Como $\beta(T) < \infty$, $\alpha(\lambda - T_n) < \infty$. Ahora, observe que $\beta(\lambda - T_n) = \infty$, de lo contrario $i((\lambda - T_n)T) < \infty$, lo cual es una contradicción. Puesto que $\mathcal{R}(\lambda - T_n)$ es cerrado en X, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \rho^{-\infty}_{s-F}(T)$, para todo $n > n_0$. $\square$

Teorema 4.4.10. *Sea* $T \in \Phi(X)$*. Si* $\{T_n\}$ *es una sucesión en* $\mathcal{B}(X)$ *tal que* $T_n \xrightarrow{\nu} T$*, entonces*

$$\bigcup_{k \in \left(\mathbb{Z} \setminus \{0\}\right) \cup \{-\infty, \infty\}} \rho^k_{s-F}(T) \subseteq \liminf \sigma(T_n).$$

Demostración: Sean $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cup \{-\infty, \infty\}$ y $\lambda \in \rho^k_{s-F}(T)$ y suponga que $\lambda \notin \liminf \sigma(T_n)$. Entonces, existe una sucesión creciente $\{n_k\}$ de números naturales tales que $\lambda \notin \sigma(T_{n_k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $\lambda \in \rho^0_{s-F}(T_{n_k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto último implica que $\mathcal{R}(\lambda - T_{n_k})$ es cerrado en X para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora, como $T_{n_k} \xrightarrow{\nu} T$, por el Lema 4.4.9, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \in \rho^k_{s-F}(T_{n_k})$, para todo $k > k_0$. Así, $\lambda \in \rho^k_{s-F}(T_{n_k}) \cap \rho^0_{s-F}(T_{n_k})$, para todo $k > k_0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Ahora se inicia la parte final de este trabajo. En esta parte se hará un análisis de las componentes conexas del espectro y se establecerán condiciones suficientes para que un elemento en $\mathcal{B}(X)$ sea punto de continuidad de la función espectro σ cuando se usa $\nu-$convergencia en $\mathcal{B}(X)$.

Proposición 4.4.11. *[31, Proposición 3.3] Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces*

(i) $\sigma_e(T) = \sigma_{s-F}(T) \cup \rho_{s-F}^{\pm\infty}(T)$.

(ii) $\sigma_e(T) = \sigma_{lre}(T) \cup \phi_{\pm\infty}(T)$.

(iii) $\partial\sigma_e(T) \subseteq \sigma_{s-F}(T)$.

Demostración: (i) Se verifica directamente.

(ii) Sea $\lambda \in \sigma_e(T)$. Por la Proposición 3.5.3, $\pi(\lambda - T) \notin \mathcal{G}_l(C(X))$ o $\pi(\lambda - T) \notin \mathcal{G}_r(C(X))$. Suponga que $\pi(\lambda - T) \in \mathcal{G}_r(C(X))$. Por el Teorema 3.4.8, $\lambda - T \in \Phi_-(X)$ y $\mathcal{N}(\lambda - T)$ es complementado en X. Pero como $\lambda \in \sigma_e(T)$, $\alpha(\lambda - T) = \infty$. Por lo tanto, $\lambda \in \phi_{+\infty}(T)$.

De forma similar, si $\pi(\lambda - T) \in \mathcal{G}_l(C(X))$ entonces $\lambda \in \phi_{-\infty}(T)$. De todo lo anterior

$$\sigma_e(T) \subseteq \sigma_{lre}(T) \cup \phi_{\pm\infty}(T).$$

Ahora, observe que $\sigma_{lre}(T) \subseteq \sigma_e(T)$, así, sea $\lambda \in \phi_{\pm\infty}(T)$. Entonces $i(\lambda - T)$ no es finito y por tanto $\lambda - T \notin \Phi(X)$. De esta forma, $\phi_{\pm\infty}(T) \subseteq \sigma_e(T)$. Por lo tanto, $\sigma_e(T) = \sigma_{lre}(T) \cup \phi_{\pm\infty}(T)$.

(iii) Se satisface que $\rho_{s-F}^{\pm\infty}(T) \subseteq \text{int}(\sigma_e(T))$. En efecto, sea $\lambda \in \rho_{s-F}^{+\infty}(T)$. Entonces $i(\lambda - T) = \infty$. Por el Teorema de continuidad del índice, existe $\epsilon > 0$ tal que si $|\beta - \lambda| < \epsilon$, entonces $\beta - T \in \Phi_\pm(X)$ e $i(\beta - T) = \infty$. Así, $B(\lambda, \epsilon) \subseteq \sigma_e(T)$ y por tanto, $\rho_{s-F}^{+\infty} \subseteq \text{int}(\sigma_e(T))$. De manera análoga, $\rho_{s-F}^{-\infty} \subseteq \text{int}(\sigma_e(T))$.

Por la Proposición 3.5.3 (i), $\sigma_e(T)$ es cerrado en $\mathbb{C}$, entonces

$$\partial\sigma_e(T) = \overline{\sigma_e(T)} \backslash \text{int}(\sigma_e(T)) \subseteq \sigma_e(T) \backslash \rho_{s-F}^{\pm\infty}(T).$$

Por el inciso (i), $\partial\sigma_e(T) \subseteq \sigma_{s-F}(T)$. □

Proposición 4.4.12. *[31, Teorema 3.4] Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Si C es una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$ y $C \cap \overline{\phi_{\pm\infty}(T)} = \emptyset$, entonces C es una componente conexa de $\sigma_e(T)$.*

Demostración: Por la Proposición 4.4.11,

$$\sigma_e(T) = [\sigma_{lre}(T) \backslash \partial\phi_{\pm\infty}(T)] \cup \overline{\phi_{\pm\infty}(T)}. \tag{4.12}$$

Suponga que $[\sigma_{lre}(T) \backslash \partial\phi_{\pm\infty}(T)] \cap \overline{\phi_{\pm\infty}(T)} \neq \emptyset$ y tome $\lambda \in [\sigma_{lre}(T) \backslash \partial\phi_{\pm\infty}(T)] \cap \overline{\phi_{\pm\infty}(T)}$. Como $\overline{\phi_{\pm\infty}(T)} = \phi_{\pm\infty}(T) \cup \partial\phi_{\pm\infty}(T)$, se tiene que $\lambda \in \phi_{\pm\infty}(T)$. Asuma que $\lambda \in \phi_{+\infty}$. Por el Teorema 3.4.8, $\pi(\lambda I - T) \in \mathcal{G}_r(C(X))$. Así, $\lambda \notin \sigma_{re}(T)$, lo cual contradice que $\lambda \in \sigma_{lre}(T) = \sigma_{le}(T) \cap \sigma_{re}(T)$. Similarmente, si se supone que $\lambda \in \phi_{-\infty}(T)$ también se llega a una contradicción. Por lo tanto:

$$[\sigma_{lre}(T) \backslash \partial\phi_{\pm\infty}(T)] \cap \overline{\phi_{\pm\infty}(T)} = \emptyset \tag{4.13}$$

Ahora, sea C una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$ tal que $C\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}=\emptyset$. También, sea D una componente conexa de $\sigma_e(T)$ tal que $C\subseteq D$. Luego, por (4.12),

$$D=[D\cap[\sigma_{lre}(T)\backslash\partial\phi_{\pm\infty}(T)]]\cup[D\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}].$$

Sea $E=D\cap[\sigma_{lre}(T)\backslash\partial\phi_{\pm\infty}(T)]$. Como $C\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}=\emptyset$, $C\subseteq E$. Suponga que E es separable en $\sigma_{lre}(T)$ (Definición A.1). Entonces, existen E_1,E_2 subconjuntos compactos de $\sigma_{lre}(T)$ tales que $E_1\neq\emptyset$, $E_2\neq\emptyset$, $E_1\cap E_2=\emptyset$ y $E=E_1\cup E_2$. Así,

$$D=E_1\cup[E_2\cup[D\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}]].$$

Luego, por (4.13), $\overline{E_1}\cap[E_2\cup[D\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}]]=\emptyset$ y $E_1\cap\overline{E_2\cup[D\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}]}=\emptyset$. Por lo tanto, D es separable, lo cual es una contradicción. Así, E es conexo en $\sigma_{lre}(T)$ y puesto que $C\subseteq E$, se tiene que $E=C$. Así,

$$D=C\cup[D\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}].$$

Como, $C\cap D\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}=\emptyset$ y D es conexo, $D\cap\overline{\phi_{\pm\infty}(T)}=\emptyset$. De esta manera, $D=C$ y por lo tanto, C es componente conexa de $\sigma_e(T)$. $\square$

Observe que se cumple $\mathbb{C}\backslash\sigma_{lre}(T)=(\mathbb{C}\backslash\sigma_e(T))\cup\phi_{\pm\infty}(T)$. Luego, por el Teorema 3.3.9, si $q(\beta-T)<\infty$, para todo $\beta\notin\sigma_{lre}(T)$, entonces $i(\beta-T)\geq 0$, para todo $\beta\notin\sigma_{lre}(T)$ y por lo tanto $\phi_{-\infty}(T)=\emptyset$. Utilizando la Proposición 4.4.12 se ha probado el siguiente enunciado:

Corolario 4.4.13. *Sea $T\in\mathcal{B}(X)$ tal que $q(\beta-T)<\infty$, para todo $\beta\notin\sigma_{lre}(T)$. Si C es una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$ y $C\cap\overline{\phi_{+\infty}(T)}=\emptyset$, entonces C es una componente conexa de $\sigma_e(T)$.*

De forma análoga, por el Teorema 3.3.9, si $p(\beta-T)<\infty$, para todo $\beta\notin\sigma_{lre}(T)$, entonces $\phi_{+\infty}(T)=\emptyset$. Así, por la proposición 4.4.12 se ha probado el siguiente corolario:

Corolario 4.4.14. *Sea $T\in\mathcal{B}(X)$ tal que $p(\beta-T)<\infty$, para todo $\beta\notin\sigma_{lre}(T)$. Si C es una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$ y $C\cap\overline{\phi_{-\infty}(T)}=\emptyset$, entonces C es una componente conexa de $\sigma_e(T)$.*

Teorema 4.4.15. *Sean $\mathcal{A}$ una álgebra de Banach unitaria y $a\in\mathcal{A}$. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $a_n\overset{\nu}{\to}a$, entonces*

- *Si U es abierto en $\mathbb{C}$ que contiene una componente conexa de $\sigma(a)$ y $0\notin U$, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_0$, U contiene una componente de $\sigma(a_n)$.*

Demostración: Sea U subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ tal que tiene una componente conexa C de $\sigma(a)$ con $0\notin U$. Observe que $\sigma(a)\backslash U$ es cerrado en $\sigma(a)$ y $C\cap(\sigma(a)\backslash U)=\emptyset$. Por el Lema A.5, existe Λ abierto y cerrado en $\sigma(a)$ tal que $C\subseteq\Lambda$ y $\Lambda\cap[\sigma(a)\backslash U]=\emptyset$. Así, $C\subseteq\Lambda\subseteq U$, además, como $C\neq\emptyset$, $\Lambda\neq\emptyset$. Por la Proposición 2.2.15, Λ es conjunto espectral para a. También, note que $\Lambda\subseteq U\cap[\mathbb{C}\backslash(\sigma(a)\backslash\Lambda)]$, donde $U\cap\mathbb{C}\backslash(\sigma(a)\backslash\Lambda)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Por el Teorema 2.2.3, existe D dominio de Cauchy tal que $\Lambda\subseteq D\subseteq\overline{D}\subseteq U\cap[\mathbb{C}\backslash(\sigma(a)\backslash\Lambda)]$.

Orientando positivamente las curvas de Jordan en la frontera de D, se tiene que $\partial D\in\mathcal{C}(a,\Lambda)$. Luego, por la Proposición 4.3.5, existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $\Lambda_n=\sigma(a_n)\cap D$ es conjunto espectral para a_n y $\partial D\in\mathcal{C}(a_n,\Lambda)$, para todo $n>n_1$. Para cada $n>n_1$, sea $p=p(a,\Lambda)$ y $p_n=p(a_n,\Lambda_n)$, es decir,

$$p_n=p(a_n,\Lambda_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}r_{a_n}(\lambda)\,d\lambda \quad\text{y}\quad p=p(a,\Lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}r_a(\lambda)\,d\lambda.$$

Dado que $0 \notin U$, $0 \notin \Lambda$, así, por el Corolario 4.3.7 (ii), existe $n_0 \geq n_1$ tal que $\Lambda_n \neq \emptyset$, para todo $n > n_0$. Sean $n > n_0$ y $\beta \in \Lambda_n$. Considere C_β la componente conexa de $\sigma(a_n)$ que contiene a β. Como Λ_n es abierto y cerrado en $\sigma(a_n)$, entonces $C_\beta \subseteq \Lambda_n \subseteq D \subseteq U$ (Proposición A.4). Así, U contiene una componente conexa de $\sigma(a_n)$, para cada $n > n_0$. □

Corolario 4.4.16. *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\{T_n\}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X)$ tal que $T_n \overset{\nu}{\to} T$. Luego*

- *Si U es abierto en $\mathbb{C}$ que contiene una componente conexa de $\sigma_e(T)$ y $0 \notin U$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, U contiene una componente conexa de $\sigma_e(T_n)$.*

Demostración: Por la Proposición 3.5.3, $\sigma_e(T) = \sigma(\pi(T))$, además, como $T_n \overset{\nu}{\to} T$ y el homomorfismo π entre $\mathcal{B}(X)$ y $C(X)$ es continuo, $\pi(T_n) \overset{\nu}{\to} \pi(T)$. Luego, dado que $C(X)$ es una álgebra de Banach, por el Teorema 4.4.15, se obtiene el resultado. □

Lema 4.4.17. *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\{T_n\}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X)$ tal que $T_n \overset{\nu}{\to} T$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $\lambda \notin \overline{\phi_{\pm\infty}(T)}$ con $\lambda \neq 0$ y para todo $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(\lambda)$ contiene una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$, entonces $\lambda \in \liminf \sigma_{s-F}(T_n)$.*

Demostración: Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \notin \overline{\phi_{\pm\infty}(T)}$ con $\lambda \neq 0$ y suponga que para todo $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(\lambda)$ contiene una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$. Sea $\epsilon > 0$. Por una parte, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $0 \notin B_{\epsilon_1}(\lambda)$ y $B_{\epsilon_1}(\lambda) \cap \overline{\phi_{\pm\infty}(T)} = \emptyset$. Haga $\epsilon_0 = \text{mín}\{\epsilon, \epsilon_1\}$. Entonces, existe C componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$ tal que $C \subseteq B_{\epsilon_0}(\lambda)$. Así, $C \cap \overline{\phi_{\pm\infty}(T)} = \emptyset$, así, por la Proposición 4.4.12, C es componente conexa de $\sigma_e(T)$. Luego, por el Corolario 4.4.16, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$, existe C_n componente conexa de $\sigma_e(T_n)$ tal que $C_n \subseteq B_{\epsilon_0}(\lambda)$.

Sea $n > n_0$ y asuma que $\partial C_n = \emptyset$. Como C_n es cerrado en $\sigma_e(T_n)$, entonces C_n es compacto en $\mathbb{C}$. Luego, $\partial C_n = \overline{C_n} \backslash \text{int}(C_n)$. Así, $C_n = \text{int}(C_n)$. De esta manera C_n es abierto y cerrado en $\mathbb{C}$. Puesto que $\mathbb{C}$ es conexo, entonces $C_n = \emptyset$ o $C_n = \mathbb{C}$. Pero $C_n \neq \emptyset$ y C_n está acotado, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\partial C_n \neq \emptyset$.

Ahora, por la Proposición 4.4.11 (iii)

$$\emptyset \neq \partial C_n \subseteq \partial \sigma_e(T_n) \subset \sigma_{s-F}(T_n).$$

Así, $B_\epsilon(\lambda) \cap \sigma_{s-F}(T_n) \neq \emptyset$, para todo $n > n_0$. Por tanto, $\lambda \in \liminf \sigma_{s-F}(T_n)$ (Definición 4.1.6). □

Observación 4.4.18. *En el Lema 4.4.17 el conjunto $\phi_{\pm\infty}(T)$ se puede reemplazar por $\phi_{+\infty}(T)$ bajo la condición $q(\beta - T) < \infty$, para todo $\beta \notin \sigma_{lre}(T)$ y por $\phi_{-\infty}(T)$ bajo la condición $p(\beta - T) < \infty$, para todo $\beta \notin \sigma_{lre}(T)$ (vea los corolarios 4.4.13 y 4.4.14).*

Teorema 4.4.19. *Sean $T \in \Phi(X)$ tal que $q(\beta - T) < \infty$, para todo $\beta \notin \sigma_{lre}(T)$ y $\{T_n\}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X)$ tal que $T_n \overset{\nu}{\to} T$. Si para todo $\lambda \in \sigma(T) \backslash \overline{\phi_{+\infty}(T)}$ con $\lambda \neq 0$ y $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(\lambda)$ contiene una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$, entonces $\sigma(T) \backslash \{0\} \subseteq \liminf \sigma(T_n)$.*

Demostración: Por el Teorema 4.4.10 y la Proposición 4.1.8 (ii), se tiene que

$$\overline{\phi_{+\infty}(T)} \subseteq \overline{\rho_{s-F}^{+\infty}(T)} \subseteq \overline{\liminf \sigma(T_n)} \subseteq \liminf \sigma(T_n).$$

Ahora, sea $\lambda \in \sigma(T) \backslash \overline{\phi_{+\infty}(T)}$ con $\lambda \neq 0$. Considere dos casos:

Caso 1: $\lambda \notin \sigma_{lre}(T)$. Por hipótesis, $q(\lambda - T) < \infty$, así, por el Teorema 3.3.9, $i(\lambda - T) \geq 0$. Ahora, si $i(\lambda - T) > 0$, entonces $\lambda \in \rho^{+}_{s-F}(T)$ y por el Teorema 4.4.10, $\lambda \in \liminf \sigma(T_n)$. Si $i(\lambda - T) = 0$, por el Teorema 3.3.9 (iv), $p(\lambda - T) = q(\lambda - T) < \infty$. Luego, por el Teorema 4.4.5, $\lambda \in \mathrm{iso}(\sigma(T))$. Como $\lambda \neq 0$, por la Proposición 4.3.8, $\lambda \in \liminf \sigma(T_n)$.
Caso 2: $\lambda \in \sigma_{lre}(T)$. Entonces, por el Lema 4.4.17, $\lambda \in \liminf \sigma_{s-F}(T_n) \subseteq \liminf \sigma(T_n)$.

Por lo tanto, $\sigma(T)\backslash\{0\} \subseteq \liminf \sigma(T_n)$. □

Corolario 4.4.20. *Sean $T \in \Phi(X)$ tal que $0 \in \mathrm{acc}(\sigma(T))$ y $q(\beta - T) < \infty$, para todo $\beta \notin \sigma_{lre}(T)$ y $\{T_n\}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X)$ tal que $T_n \xrightarrow{\nu} T$. Si para todo $\lambda \in \sigma(T)\backslash\overline{\phi_{+\infty}(T)}$ y $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(\lambda)$ contiene una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$, entonces $\sigma(T_n) \to \sigma(T)$ con la métrica de Hausdorff.*

Demostración: Consecuencia del Teorema 4.3.3, Proposición 4.3.2, Teorema 4.4.19 y Teorema 4.1.13. □

De forma análoga como el Teorema 4.4.19, se prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.4.21. *Sean $T \in \Phi(X)$ tal que $p(\beta - T) < \infty$, para todo $\beta \notin \sigma_{lre}(T)$ y $\{T_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{B}(X)$ tal que $T_n \xrightarrow{\nu} T$. Si para todo $\lambda \in \sigma(T)\backslash\overline{\phi_{-\infty}(T)}$ con $\lambda \neq 0$ y $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(\lambda)$ contiene una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$, entonces $\sigma(T)\backslash\{0\} \subseteq \liminf \sigma(T_n)$.*

Corolario 4.4.22. *Sean $T \in \Phi(X)$ tal que $0 \in \mathrm{acc}(\sigma(T))$ y $p(\beta - T) < \infty$, para todo $\beta \notin \sigma_{lre}(T)$ y $\{T_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{B}(X)$ tal que $T_n \xrightarrow{\nu} T$. Si para todo $\lambda \in \sigma(T)\backslash\overline{\phi_{-\infty}(T)}$ y $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(\lambda)$ contiene una componente conexa de $\sigma_{lre}(T)$, entonces $\sigma(T_n) \to \sigma(T)$ con la métrica de Hausdorff.*

Demostración: Consecuencia del Teorema 4.3.3, Proposición 4.3.2, Teorema 4.4.21 y Teorema 4.1.13. □

Conclusión

Los primeros dos capítulos de esta tesis son inovadores dentro de la teoría espectral, pues, se realizó un estudio a detalle del espectro en álgebras de Banach conectándolo con la teoría de funciones complejas de valores en álgebras de Banach. Así mismo, un punto importante es que se muestra lo fundamental que es el cálculo funcional de funciones de valores en álgebras de Banach como herramienta para el estudio del espectro.

Particularmente, en el Capítulo 1 se demostró que el espacio de los operadores acotados $\mathcal{B}(X)$ es una álgebra de Banach unitaria cuando X es un espacio de Banach. También se mostró que el espacio cociente de $\mathcal{B}(X)$ módulo $K(X)$, $C(X) = \mathcal{B}(X)/K(X)$, es una álgebra de Banach unitaria, la cual usualmente se llama álgebra de Calkin. En la última sección de ese capítulo mostramos que algunos resultados clásicos de la teoría de funciones de variable compleja son válidos también en el caso de funciones definidas sobre los números complejos con valores en un espacio de Banach.

En el Capítulo 2 se demostró que el espectro $\sigma(a)$ de $a \in \mathcal{A}$ es un conjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$ (Teorema de Gelfand- Mazur 2.1.6). En la segunda sección se definieron elementos en una álgebra de Banach unitaria $\mathcal{A}$ a partir de un elemento fijo $a \in \mathcal{A}$ y de funciones analíticas de variable compleja que contienen en su dominio al espectro de a (vea Definición 2.2.5). Con ayuda de esto se demostró el Teorema Espectral (Teorema 2.2.10). Posteriormente con el uso de conjuntos espectrales para a se definieron las proyecciones espectrales asociadas a a y a Λ, donde Λ es un conjunto espectral para a (vea definiciones 2.2.14 y 2.2.20). La utilidad de las proyecciones espectrales se ven reflejadas en el Teorema 4.4.1 y las proposiciones 4.4.2 y 4.4.3.

Con respecto al tercer capítulo, se puede decir que se abordó la teoría de Fredholm a gran detalle, demostrando cada uno de los resultados involucrados. Para lograr esto, se realizó una revisión bibliográfica extensa, de tal forma que este capítulo fuera lo suficientemente autocontenido. Los resultados que se pueden resaltar de este capítulo son los que muestran la estrecha relación entre los operadores Fredholm y semi-Fredholm con los elementos invertibles del álgebra de Calkin. Estos son:

- $T \in \mathcal{B}(X)$ es Fredholm si y solo si $\pi(T)$ es invertible en la álgebra de Calkin (Teorema 3.2.2).
- Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $\pi(T)$ es invertible por la derecha en la álgebra de Calkin si y solo si T es semi-Fredholm inferior y $\mathcal{N}(T)$ está complementado en X (Teorema 3.4.8).
- Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces $\pi(T)$ es invertible por la izquierda en la álgebra de Calkin si y solo si T es semi-Fredholm superior y $\mathcal{R}(T)$ está complementado en X (Teorema 3.4.9).

En el Capítulo 4 es donde se encuentra el aporte principal de esta tesis a la teoría espectral. En la primera sección de este capítulo estudiamos la convergencia en $S(X)$ con la métrica de Hausdorff. En la literatura clásica [16] se sabe que existe una caracterización de esta convergencia a través de los conceptos de límite inferior y el límite superior de una sucesión de subconjuntos de X, cuando X es un espacio métrico compacto. En esta parte se logran dar condiciones para que se cumpla esta caracterización sin la necesidad de que el espacio total X sea compacto.

En la segunda sección, se toma de [23] el concepto de $\nu-$convergencia definida sobre $\mathcal{B}(X)$ y se extiende a álgebras de Banach unitarias, haciendo ver las ventajas y desventajas de trabajar con este criterio de convergencia. En la tercera sección se logran obtener generalizaciones a álgebras de Banach unitarias de resultados de la sección dos de [23] respecto a la aproximación de espectros totalmente disconexos sobre la álgebra de los operadores acotados.

Por último, en la tercera sección se logra el objetivo de esta tesis que es generalizar los resultados obtenidos en el artículo [31] utilizando ahora $\nu-$convergencia en $\mathcal{B}(X)$.

Cabe mencionar que, al no ser $\nu-$convergencia cerrada bajo sumas y composiciones se tuvieron que crear nuevas técnicas para establecer dichos resultados.

Gran parte de este capítulo de la tesis es una aportacion original que se hace a la literatura de la Teoría Espectral. Los resultados obtenidos abrieron la oportunidad de participar con un cartel titulado "spectral continuity using $\nu-$convergence" en el "Eleventh Intenational Conference Approximation and Optimization in the Caribbean, APPOPT XI" celebrado en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) del 13 al 18 de Octubre del 2013.

Existen tareas e interrogantes abiertas acerca de la aproximación del espectro utlizando $\nu-$convergencia, dentro de las cuales se pueden enunciar las siguientes:

1. Encontrar un ejemplo en el que corrobore el Teorema 4.4.19.

2. En la tesis se ha dado ejemplos de operadores no compactos que se pueden aproximar bajo ν-convergencia por medio de operadores de rango finito. Dado $T \in \mathcal{B}(X)$ no necesariamente compacto ¿será posible aproximar T con ν-convergencia por una sucesión de operadores de rango finito?

3. Estudiar la continuidad del espectro sobre otras partes del espectro. Es decir, ver si $\sigma_{ap}, \sigma_e, \sigma_p, \sigma_{s-F}$, $\sigma_{le}, \sigma_{re}, \sigma_{lre}$ son continuas usando $\nu-$convergencia en $\mathcal{B}(X)$.

4. En los Teoremas 4.4.19 y 4.4.21 se dan condiciones suficientes para que un punto del álgebra $\mathcal{B}(X)$ sea punto de continuidad del espectro utilizando $\nu-$convergencia. La pregunta es ¿son estas condiciones necesarias?

Apéndice

Componentes conexas

Definición A. 1. *[18] Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces X es conexo si para todo par $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $X = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ implica que $U_1 = \emptyset$ ó $U_2 = \emptyset$. X es separable si no es conexo. Un subconjunto M de X es conexo en X, si M es conexo en $(M, \tau|_M)$, donde $\tau|_M$ denota la topología relativa a M. M es separable si no es conexo en X.*

Proposición 4.4.23. *[18, Proposición XII 1.4] Sea (X, τ) un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *X es conexo.*

(ii) *Para todo par de cerrados U_1, U_2 en X tales que $X = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ se tiene que $U_1 = \emptyset$ ó $U_2 = \emptyset$.*

(iii) *Para todo subconjunto propio y no vacío M de X, $\partial M \neq \emptyset$.*

Definición A. 2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto C de X es una componente conexa de X, si C es conexo y no existe $K \subseteq X$ conexo tal que $C \subseteq K$ y $C \neq K$.*

Definición A. 3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Defina el conjunto*

$$C_x = \bigcup \{C \subseteq X : x \in C \text{ y } C \text{ es conexo }\}.$$

El conjunto C_x es conexo, más aún, es el máximo conjunto conexo que contiene a x. Así, se dice que C_x es la componente conexa en $x \in X$.

Proposición A. 4. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Entonces*

(i) *C_x es cerrado en X.*

(ii) *Si U es abierto y cerrado en X con $x \in U$, entonces $C_x \subseteq U$.*

Demostración: (i) Como C_x es conexo, $\overline{C_x}$ también es conexo. Por lo tanto, $\overline{C_x} = C_x$.

(ii) Sea U abierto y cerrado en X con $x \in U$. Observe que $U \cap C_x \neq \emptyset$ es abierto y cerrado en C_x. Como en un espacio conexo, los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados son el vacío y el propio conjunto, entonces $U \cap C_x = C_x$ y por lo tanto $C_x \subseteq U$. $\square$

Lema A. 5. *Sean X un espacio métrico compacto, C_x componente conexa de $x \in X$ y F subconjunto cerrado de X tal que $CK \cap C = \emptyset$. Entonces, existe $\Lambda \subseteq X$ abierto y cerrado en X tal que $C_x \subseteq \Lambda$ y $\Lambda \cap F = \emptyset$.*

Demostración: Como X es un espacio métrico, existen U_1, U_2 subconjuntos abiertos de X tales que $C_x \subseteq U_1$, $F \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Luego, dado que X es compacto y $X \backslash U_1$ es cerrado en X, entonces $X \backslash U_1$ es compacto en X. Ahora, observe que la colección

$$\mathcal{U} = \{X \backslash A \subseteq X : x \in A \text{ y } A \text{ es cerrado y abierto en } X\}$$

es una cubierta abierta de $X \backslash U_1$. Así, existen $X \backslash A_1, \ldots, X \backslash A_n$ tales que

$$X \backslash U_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} X \backslash A_j = X \backslash \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Haga $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Entonces Λ es abierto y cerrado en X tal que $x \in \Lambda$ y $\Lambda \subseteq U_2$. Así, $\Lambda \cap F = \emptyset$ y además, por el Lema A.4 (ii), $C_x \subseteq \Lambda$. □

Álgebra lineal

Lema A. 6 (Lema de Riesz)**.** *Sean X un espacio normado, E un subespacio cerrado propiamente contenido en X y $0 < \epsilon < 1$. Entonces existe $x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$ tal que $\|x_0 + E\| \geq 1 - \epsilon$.*

Demostración: Sea $y \in X$ tal que $y \notin E$. Entonces $d = \|y + E\| > 0$ pues E es cerrado en X. Luego, como $\frac{d}{1-\epsilon} > d$, existe $u \in E$ tal que $0 < d \leq \|y - u\| < \frac{d}{1-\epsilon}$. Haga $x_0 = \frac{y-u}{\|y-u\|}$. Entonces

$$\|x_0 + E\| = \left\| \frac{y-u}{\|y-u\|} + E \right\| = \frac{1}{\|y-u\|} \|y - u + \|y-u\| E\| = \frac{1}{\|y-u\|} \|y + E\| = \frac{d}{\|y-u\|} > 1 - \epsilon.$$

□

El siguiente resultado da una caracterización de los espacios normados de dimensión finita con respecto a propiedades topológicas del espacio.

Proposición A. 7. *Sea X un espacio normado. Los siguentes enunciados son equivalentes*

(i) $\dim(X) < \infty$.

(ii) S_X *es compacto.*

(iii) S_X *está totalmente acotado,*

donde $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Demostración: Dado que todo conjunto cerrado y acotado en un espacio de dimensión finita es compacto ([19, Corolario 4.32]), (i) implica (ii). Por la Observación 1.3.2 (iv), todo conjunto compacto está totalmente acotado, así, (ii) implica (iii).

Suponga que S_X está totalmente acotado pero que X no tiene dimensión finita. Entonces, existe $E \subseteq S_X$ finito tal que para todo $x \in S_X$, $\|x - e\| < \frac{1}{2}$, para algún $e \in E$. Como $\dim(X) = \infty$, entonces el espacio $\hat{E} = \langle E \rangle$ (conjunto generado por E) está propiamente contenido en X. Así, por el Lema de Riesz A.6, existe $x_0 \in S_X$ tal que $\|x_0 + E\| \geq \frac{1}{2}$. En particular, $\|x_0 - e\| \geq \frac{1}{2}$, para todo $e \in E$, lo cual es una contradicción. □

Definición A. 8. *Sean X un espacio normado y M subespacio cerrado de X. Se dice que M está complementado en X si existe N subespacio cerrado de X tal que*

$$M \cap N = \{0\} \ \ y \ \ X = M + N. \tag{4.14}$$

Si M y N son subespacios de X tales que se satisface 4.14, se dice que X es suma directa de M y N y es denotado con $X = M \oplus N$.

Definición A. 9. *Sean X un espacio normado, E subespacio de X y $P \in \mathcal{L}(X)$. Entonces P es una proyección acotada de X sobre E si $P \in \mathcal{B}(X)$, $P^2 = P$ y $\mathcal{R}(P) = E$.*

Lema A. 10. *Sean X un espacio normado y M, N subespacios de X. Entonces*

(i) Si $X = M \oplus N$, entonces $\dim(X/M) = \dim(N)$.

(ii) Si $M \subseteq N$, entonces $\dim(X/N) \leq \dim(X/M)$.

Demostración: (i) Suponga que $X = M \oplus N$. Entonces $\pi|_N$ es inyectiva y sobreyectiva, donde π es el homomorfismo natural entre X y X/M. Por lo tanto, $\dim(N) = \dim(X/M)$ ([19, Toerema 2.12]).

(ii) Suponga que $M \subseteq N$. Sea $\{x_j + N\}_{j \in J}$ una base de Hamel para X/N, donde J es un conjunto de índices y haga $\sum_{j \in J} \alpha_j (x_j + M) = M$ (suma finita), donde $\alpha_j \in \mathbb{C}$, para todo $j \in J$. Como $M \subseteq N$, lo anterior implica que, $\sum_{j \in J} \alpha_j (x_j + N) = N$. Puesto que $\{x_j + N\}_{j \in J}$ es linealmente independiente en X/N, $\{x_j + M\}_{j \in J}$ es linealmente independiente en X/M. Por lo tanto, $\dim(X/N) \leq \dim(X/M)$. □

Proposición A. 11. *Sean X un espacio normado y M subespacio cerrado X. Entonces M es complementado en X si y solo si existe una proyección acotada de X sobre M.*

Demostración: Suponga que $P \in \mathcal{B}(X)$ es una proyección acotada de X sobre M. Como P es continua, $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$ es cerrado en X. Por otro lado, $x = P(x) + (I - P)(x)$, para todo $x \in X$. Así, $X = \mathcal{R}(P) + \mathcal{N}(P)$. Sea $x \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P)$. Entonces, existen $y, z \in X$ tales que $x = P(y)$ y $x = (I - P)(z)$, así $P(y) + P(z) = z$. Como $P^2 = P$, $P(y) + P(z) = P(z)$, de donde $x = 0$. Así, $P(X) \cap \mathcal{N}(P) = \emptyset$ y por lo tanto $X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

Recíprocamente, suponga que $X = M \oplus N$ con N subespacio cerado de X. Dado que para todo $x \in X$ existen únicos $m \in M$ y $n \in N$ tales que $x = m + n$, defina $P : X \to X$ como $P(x) = m$ para todo $x \in X$. Luego, se tiene que $P \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{R}(P) = M$ y $P^2 = P$.

Ahora, considere el conjunto $G = \{(x, P(x)) : x \in X\}$. Sea $\{(x_n, P(x_n))\}$ una sucesión en G tal que converge a $(x, m) \in X \times X$. Puesto que $\{P(x_n)\} \subseteq M$ converge a m y M es cerrado en X, se tiene que $m \in M$. De igual manera, como $\{x_n - P(x_n)\} \subseteq N$ converge e $x - m$ y N es cerrado en X, $x - m \in N$. Así, $(x, m) \in G$. Esto muestra que G es cerrado en $X \times X$. Por el Teorema de la Gráfica cerrada ([19, Teorema 4.25]), P es continua. □

Proposición A. 12. *Sea X un espacio de Banach y M subespacio de X. Entonces*

(i) Si $\dim(M) < \infty$, entonces M es complementado en X.

(ii) Si $\dim(X/M) < \infty$, entonces existe N subespacio de X tal que $X = M \oplus N$.

Demostración: (i) Si $M = X$, no hay nada que probar. Suponga que $M \nsubseteq X$ tal que $n = \dim(M) < \infty$. Sea $\{x_k\}_{k=1}^n$ base de Hamel para M y para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, defina $M_k = \langle M \backslash \{x_k\} \rangle$[1]. Observe que M_k es un subespacio cerrado de X, pues M_k tiene dimensión finita ([19, Corolario 4.29]), así, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, existe $x_k^* \in X^*$ tal que $x_k^*(x_k) = 1$ y $x_k^*(x) = 0$, para todo $x \in M_k$ ([19, Corolario 4.63]). Con esto, defina $P : X \to X$ como $P(x) = \sum_{k=1}^n x_k^*(x)x_k$, para todo $x \in X$. Entonces $P \in \mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{R}(P) \subseteq M$. También, observe que $P(x_k) = x_k$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea $x \in M$, entonces existen $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tales que $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$. Luego, $P(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(x_k) = x$, así, $x \in \mathcal{R}(P)$ y por lo tanto, $\mathcal{R}(P) = M$. Ahora, tome $x \in X$. Entonces $P(P(x)) = P(\sum_{k=1}^n x_k^*(x)x_k = \sum_{k=1}^n x_k^*(x)P(x_k) = \sum_{k=1}^n x_k^*(x)x_k = P(x)$. Por tanto $P^2 = P$. De todo lo anterior, P es una proyección acotada sobre M y por la Proposición A.11, M es complementado en X.

(ii) Suponga que $n = \dim(X/M) < \infty$. Sea $\{x_k + M\}_{k=1}^n$ una base de Hamel para X/M y ponga $N = \langle \{x_k\}_{k=1}^n \rangle$. Como $\{x_k + M\}_{k=1}^n$ es linealmente independiente en X/M, $\{x_k\}_{k=1}^n$ es linealmente independiente en X. Así, $\dim(N) = n$.

Sea $x \in X$, entonces existen $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tales que $x + M = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x_k + M) = (\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k) + M$. Haciendo $z = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in N$ se tiene $y = x - z \in M$. Por tanto $X = M + N$.

Sea $x \in M \cap N$, entonces existen $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tales que $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ y $x + M = M$. Luego, como $\{x_k + M\}_{k=1}^n$ es linealmente independiente en X/M y $\sum_{k=1}^n \alpha_k(x_k + M) = x + M = M$, se tiene que $\alpha_k = 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, de donde $x = 0$. Así, $M \cap N = \{0\}$ y por lo tanto $X = M \oplus N$. □

Sean X, Y espacios de Banach. El producto cartesiano de X y Y, $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ es un espacio lineal normado con las operaciones $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$, para cualesquiera $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con la norma $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, para todo $(x, y) \in X \times Y$. Más aún, $X \times Y$ es un espacio de Banach.

Proposición A. 13. *Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(X)$. Si existe Z subespacio cerrado de X tal que $X = \mathcal{R}(T) \oplus Z$, entonces $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en X.*

Demostración: Suponga que Z es un subespacio cerrado de X tal que $X = \mathcal{R}(T) \oplus Z$. Observe que si $T \in \mathcal{B}(X)$ entonces $T' : X/\mathcal{N}(T) \to \mathcal{R}(T)$ definida como $T'(x + \mathcal{N}(T)) = T(x)$, para todo $x \in X$ es continua e inyectiva, donde $X/\mathcal{N}(T)$ es un espacio de Banach. Por esta razón, suponga sin pérdida de generalidad que $T \in \mathcal{B}(X)$ es inyectiva. Luego, defina $S : X \times Z \to X$ como $S(x, z) = T(x) + z$, para todo $x \in X$ y todo $z \in Z$. Luego, $S \in \mathcal{B}(X \times Z, X)$ y también, como $S(X, Z) = \mathcal{R}(T) + Z = X$, S es sobreyectiva. Ahora, puesto que $\mathcal{R}(T) \cap Z = \{0\}$, S es inyectiva. Así, por el Teorema del Mapeo Abierto A.17, $S^{-1} \in \mathcal{B}(X, X \times Z)$.

Sea $x \in X$. Entonces $\|x\| = \|(x, 0)\| = \|S^{-1}(T(x))\| \leq \|S^{-1}\| \|T(x)\|$. Así, T está acotada por abajo y por la Proposición 1.2.16, $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en X. □

[1] $\langle A \rangle$ denota el conjunto de combinaciones lineales de elementos en A, usualmente éste conjunto es llamado el generado por A.

Corolario A. 14. *Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $X/\mathcal{R}(P)$ tiene dimensión finita, entonces $\mathcal{R}(P)$ es cerrado en X.*

DEMOSTRACIÓN: Consecuencia de las Proposiciones A.12 y A.13. □

Sean X, Y espacios normados y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Entonces las funciones $J_X : X \to X^{**}$ y $J_Y : Y \to Y^{**}$ deifnidas como para cada $x \in X$, $J_X(x)(x^*) = x^*(x)$, para todo $x^* \in X^*$ y para cada $y \in Y$, $J_Y(y)(y^*) = y^*(y)$, para todo $y^* \in X^*$ son isométrias de X sobre X^{**} y de Y sobre Y^{**}, respectivamente (vea [19, Teorema 4.66]). Estas dos isométrias estás relacionadas por la siguiente expresión:

$$T^{**}J_X = J_Y T. \tag{4.15}$$

En efecto, sea $x \in X$ entonces,

$$T^{**}J_X(x)(y^*) = J_X(x)(T^*(y^*)) = T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)) = J_Y(T(x))(y^*),$$

para todo $y^* \in Y^*$. Por esta razón, se dice que T^{**} es una extensión de T bajo las isometrías J_X y J_Y.

Teorema A. 15 (Teorema de Schauder)**.** *Sean X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Entonces $T \in K(X,Y)$ si y solo si $T^* \in K(Y^*, X^*)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $T \in K(X,Y)$ y $\epsilon > 0$. Entonces, por la Proposición 1.3.5, $T(B_X[0,1])$ está totalmente acotado, es decir, existe $\{x_k\}_{k=1}^n \subseteq B_X[0,1]$ tal que para todo $x \in B_X[0,1]$, $\|T(x) - T(x_k)\| < \frac{\epsilon}{3}$, para algún $k \in \{1,\ldots,n\}$.

Defina $U : Y^* \to \mathbb{C}^n$ como $U(y^*) = (y^*(T(x_1)),\ldots,y^*(T(x_n)))$, para todo $y^* \in Y^*$. La linealidad y continuidad de cada $y^* \in Y^*$ implica que $U \in \mathcal{B}(Y^*, \mathbb{C}^n)$. Luego, por la Proposición 1.3.11, U es compacto, pues U tiene rango de dimensión finta. Así, existe $\{y_j^*\}_{j=1}^p \subseteq B_{Y^*}[o^*,1]$ tal que para todo $y^* \in B_{Y^*}[o^*,1]$, $\|U(y^*) - U(y_j^*)\| < \frac{\epsilon}{3}$, para algún $j \in \{1,\ldots,p\}$.

Considere la norma del máximo en $\mathbb{C}^n$ y sea $y^* \in B_{Y^*}[o^*,1]$. Entonces existe $j \in \{1,\ldots,p\}$ tal que

$$\begin{aligned}
\|U(y^*) - U(y_j^*)\| &= \|((y^* - y_j^*)(T(x_1)),\ldots,(y^* - y_j^*)(T(x_n)))\| \\
&= \text{máx}\{|(y^* - y_j^*)(T(x_j))| : j \in \{1,\ldots,n\}\} \\
&< \frac{\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

De donde se deduce que, $|(y^* - y_j^*)(T(x_k))| < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$. Por otro parte, sea $x \in B_X[0,1]$, entonces $\|T(x) - T(x_k)\| < \frac{\epsilon}{3}$, para algún $k \in \{1,\ldots,n\}$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
|T^*(y^*)(x) - T^*(y_j^*)(x)| &= |y^*(T(x)) - y_j^*(T(x))| \\
&\leq |y^*(T(x) - T(x_k))| + |(y^* - y_j^*(T(x_k))| + |y_j^*(T(x_k) - T(x))| \\
&< \|y^*\|\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \|y_j^*\|\frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Así, $T^*(B_{Y^*}[o^*,1])$ está totalmente acotado y por lo tanto, T^* es compacto (Teorema 1.3.5).

Suponga que T^* es compacto. De la primera parte, T^{**} es compacto. Dado que T^{**} es una extención de T bajo las isometrías J_X y J_Y, T es compacto. □

Teoremas importantes

Teorema A. 16 (Teorema del Mapeo Abierto)**.** *Sean X, Y espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es sobreyectivo, entonces T es un mapeo abierto.*

Teorema A. 17 (Teorema del Mapeo Inverso)**.** *Sean X, Y espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es inyectivo y sobreyectivo, entonces $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.*

Teorema A. 18 (Principio de Acotamiento Uniforme)**.** *Sean X un espacio normado y F subconjunto no vacío de X. Si para cada $x \in F$, $\sup_{x^* \in X^*} \|x^*(x)\| < \infty$, entonces $\sup_{x \in F} \|x\| < \infty$.*

Teorema A. 19 (Teorema de Banach-Steinhaus o Principio de Acotamiento Uniforme)**.** *Sean F subconjunto no vacío de $\mathcal{B}(X)$. Si para cada $x \in X$, $\sup_{T \in F} \|T(x)\| < \infty$, entonces $\sup_{T \in F} \|T\| < \infty$.*

Teorema A. 20 (Teorema de Hahn-Banach para espacios normados)**.** *Sean X un espacio normado y M subespacio lineal de X. Entonces cada funcional lineal acotada $f : M \to \mathbb{C}$ tiene una extensión lineal acotada $\widehat{f} : X \to \mathbb{C}$ tal que $\|\widehat{f}\| = \|f\|$.*

Teorema A. 21 (Teorema de Arzela-Ascoli)**.** *Sea X un espacio métrico separable. Suponga que $\mathcal{F}$ es una colección acotada de funciones de valores complejos definidos sobre X uniformemente continuas. Entonces cada sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión convergente sobre cada conjunto compacto de X.*

Bibliografía

[1] P. M. Anselone and R. Ansorge. Compactness principle in nonlinear operator approximation theory. *Numer. Funct. Anal. Optimiz*, 1:589–618, 1979.

[2] T. M. Apostol. *Análisis Matemático*. Editorial Reverté, S. A, 2 edition, 2006.

[3] K. E. Atkinson. The numerical solutions of eigenvalue problem for compact integral operators. *Trans. Ame. Math. Soc*, 129:458–165, 1967.

[4] I. H. Jeon B. P. Duggal and I. H. Kim. Continuity of the spectrum on a class of upper triangular operators matrices. *J. Math. Anal. Appl*, 370:584–587, 2010.

[5] L. Burlando. Continuity of spectrum and spectral radius in algebras of operators. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Soc*, 169:5–54, 1967.

[6] F. Chatelin. *Spectral Approximation of Linear Operators*. Academic Press, New York.

[7] E. Cliffs. *Collectively Compact Operators Approximation Theory and Applications to Integral Equations*. Prentice-Hall, 1971.

[8] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Springer International Student Edition, 2 edition, 2002.

[9] J. B. Conway and B. B Morrel. Operators that are points of spectral continuity. *Integral Equations and Operator Theory*, 2:174–198, 1979.

[10] J. B. Conway and B. B Morrel. Operators that are points of spectral continuity II. *Integral Equations and Operator Theory*, 4:479–503, 1981.

[11] A. Fraguela A. Alvarez D. Hinrichsen, J. L. Fernández. *Topología General*. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[12] C. R. de Oliveira. *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Birkhäuser Verlang AG, 2009.

[13] S. V. Djordjević. The continuity of the essencial approximate point spectrum. *Facta Univ. Ser. Math. Inform*, 10:97–104, 1995.

[14] S. V. Djordjević and Y. M Han. Browder's theorems and spectral continuity. *Glasgow Math. J*, 42:479–486, 2000.

[15] R. S. Phillips E. Hile. *Functional Analysis and Semi-Groups*. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 2000.

[16] J. Henrikson. Completeness and total boundeness of the hausdorff metric. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, 1999.

[17] H. B. Heuser. *Functional Analysis*. John Wiley & Sons, Inc, 1982.

[18] J. L. P. Fernando J. M. Roig, E. O. Dominguez. *Topología*. Alhambra, S. A, Madrid, España, 1982.

[19] C. S. Kubrusly. *Elements of Operator Theory*. Birkhäuser Boston, 2001.

[20] B. V. Limaye. Spectral perturbations and approximation with numerical experiments. *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis*, 13, 1987.

[21] J. Lindström. *On the Origin and Early History of Functional Analysis*. PhD thesis, Deparment of Mathematics Uppsala University, Enero 2008.

[22] D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Spaces Methods*. Jonh Wiley & Sons, Inc, New York, 1969.

[23] A. Largillier M. Ahues and B. V. Limaye. *Spectral Computations of Bounded Operators*. Chapman & Hall/CRC, 2001.

[24] G. K. Montiel. *Operadores de Fredholm y sus Generalizaciones*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, BUAP, Puebla, Puebla, Junio 2007.

[25] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall, Inc, 2 edition, 2000.

[26] J. D. Newburgh. The variation of spectra. *Duke Math. J*, 18:165–176, 1951.

[27] P. Hájek P. Habala and V. Zizler. *Introduction to Banach Spaces I*. Matfyzpress, 1996.

[28] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co, New York, 3 edition, 1987.

[29] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc, New York, 2 edition, 1991.

[30] W. E. Pfaffenberger S. R. Caradus and B. Yood. *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*. Marcel Dekker, Inc, 1971.

[31] S. Sánchez-Perales and V. C. Cruz-Barriguete. Continuity of approximate point spectrum on the algebra $\mathcal{B}(X)$. *Commun. Korean Math. Soc 28*, 3:487–500, 2013.

[32] S. Sánchez-Perales and S. V. Djordjević. Continuity of spectra and compact perturbations. *Bull. Corea Math. Soc*, 48:1261–1270, 2011.

[33] S. Sánchez-Perales and S. V. Djordjević. Continuity of spectrum and approximate point spectrum on operators matrices. *J. Math. Anal. Appl*, 378:289–294, 2011.

[34] Salvador Sanchéz-Perales. *Continuidad Espectral*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, BUAP, 2011.

[35] A. E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley & Sons, Inc, New York, EU, 1958.

[36] J. A. Virtanen. *Operator Theory*. Fall, 2007.