



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

TEORÍA DE RAMSEY Y EL TEOREMA
DE ERDŐS-SZEKERES.

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

CÉSAR ALFONSO DÍAZ MIJANGOS

DIRECTORES DE TESIS:

M.C. MARIO LOMELÍ HARO
DR. RICARDO ROSAS RODRÍGUEZ

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, NOVIEMBRE DE 2013.

A mis padres.

Agradecimientos

A mi padres Flavio Díaz Randón† y Antonia Mijangos Rodríguez, que con su amor y apoyo constantes me alentaron a estudiar esta hermosa carrera.

A mis asesores M. C. Mario Lomelí Haro y Dr. Ricardo Rosas Rodríguez por el tiempo, apoyo y amistad otorgados en la realización de este trabajo.

A mis sinodales M.C. Jesus Alejandro Hernández Tello y Dra. Virginia Berrón Lara por el tiempo dedicado a las revisiones y por las oportunas correcciones y sugerencias realizadas durante el desarrollo de este trabajo de tesis.

Un agradecimiento especial a la M. C. Marisol López Cerino por el apoyo moral brindado en uno de los momentos más difíciles de mi carrera y de mi vida.

A mis hermanas y hermanos Teresa, Olivia, Bethzy, Justo, Mauro y Ezequiel por la confianza, apoyo y cariño que siempre me han demostrado. Este logro también les pertenece.

Por último deseo agradecer a mis compañeros y amigos que estuvieron presentes durante mi estancia en la UTM. Gracias por su sincera amistad y gratos momentos que pasamos juntos.

Prefacio

La Teoría de Ramsey es una de las herramientas matemáticas más importantes en el área de combinatoria. Esta teoría está inspirada en un teorema clásico de F.P. Ramsey, conocido como el Teorema de Ramsey, y su importancia se debe a que permite demostrar una gran cantidad de resultados sobre la existencia de ciertos números. Sin embargo en español no existe suficiente material para aquellos que se interesan en esta materia. El objetivo de este trabajo es tratar de satisfacer esta necesidad para los estudiantes de matemáticas de la UTM.

Como veremos más adelante, la Teoría de Ramsey tiene un alcance bastante amplio por lo que exponer todos los resultados obtenidos en ella requeriría una obra más larga. Por este motivo se ha decidido enfocarse en un problema en particular. El resultado que se ha decidido abordar es el famoso Teorema de Erdős-Szekeres, el cual afirma que: dado $n \in \mathbb{N}$ existe un entero positivo $ES(n)$ tal que cualquier colección con al menos $ES(n)$ puntos en el plano, en posición general, contiene n puntos siendo los vértices de un polígono convexo. Cabe resaltar aquí, que el motivo de esta elección no fue arbitraria, sino que estuvo motivada por el hecho de que este resultado fue el que impulsó el desarrollo de la Teoría de Ramsey. Lo anterior podría hacernos pensar que ya no queda mucho que decir acerca del Teorema de Erdős-Szekeres, pero como veremos más adelante aun existe una gran cantidad de trabajo por hacer.

Debido a que gran parte de la notación utilizada en la Teoría de Ramsey, y en general en el área de matemáticas discretas, no se halla estandarizada se ha decidido hacer mención de la notación utilizada en este trabajo. Esto se hace en el Capítulo 1 concerniente a la introducción.

Como es común en matemáticas muchos de los resultados más importantes son meras generalizaciones de hechos relativamente simples. En el Capítulo 2 veremos que este es el caso del Teorema de Ramsey, el cual puede ser considerado como una generalización del conocido Principio del Palomar. También en este capítulo se tratan algunos de los problemas con los que se enfrenta la Teoría de Ramsey.

Como ya se mencionó, en esta tesis nos centramos en estudiar el Teorema de Erdős-Szekeres, al estudio de este resultado están dedicados los Capítulos 3 y 4. En el Capítulo 3 se analiza la versión bidimensional del teorema y en el Capítulo 4 se generaliza a dimensiones superiores.

Como un último comentario respecto a este trabajo, deseamos hacer la aclaración respecto al uso de los siguientes símbolos, los cuales aparecen con frecuencia dentro de la tesis:

□ Denota el término de una demostración, y

■ Denota el fin de un ejemplo.

Esto se hizo con el fin de facilitar al lector el seguimiento de este trabajo.

Índice general

Prefacio	V
1. Introducción	1
1.1. Notación	1
1.2. Conceptos básicos de la Teoría de Gráficas	2
2. Teoría de Ramsey	9
2.1. Principio del Palomar	9
2.2. Teorema de Ramsey	12
2.3. Aplicaciones del Teorema de Ramsey	16
2.3.1. Teorema de I. Schur	16
2.3.2. Teorema de Ramsey en la Teoría de Gráficas	18
2.3.3. Números de Ramsey	18
3. Teorema de Erdős-Szekeres	27
3.1. Teorema de Erdős-Szekeres	28
3.1.1. Demostraciones usando el Teorema de Ramsey	30
3.1.2. Capas y Copas	33
3.2. Números de Erdős-Szekeres	37
3.2.1. Cota inferior	38
3.2.2. Cotas Superiores	39
4. El Teorema de Erdős-Szekeres en \mathbb{R}^d	43
4.1. Conceptos básicos de análisis convexo.	43
4.2. Teorema de Erdős-Szekeres en \mathbb{R}^d	49
5. Conclusión	51
A. Coloración de K_{13}	55

Capítulo 1

Introducción

La combinatoria es una rama de las matemáticas que en la actualidad goza de un gran interés, debido principalmente a que los problemas que se abordan en ella han resultado tener varias aplicaciones en diversas ramas del saber que son de interés práctico, como son: la computación, la física y la química. Sin olvidar que también algunos de sus resultados tienen aplicación en otras ramas de la matemática pura como: la teoría de números, el análisis y la topología, por mencionar algunas.

Aunque los resultados obtenidos en esta área tienen por derecho propio un gran valor teórico, tanto por su belleza como por la profundidad de los conceptos manejados, es sin duda el interés práctico de la materia lo que ha impulsado su desarrollo.

El atractivo de los problemas combinatorios reside en la simpleza de sus enunciados la cual muchas veces enmascara la dificultad de los mismos, pues no es raro hallarse con problemas sumamente complicados los cuales se esconden atrás de un enunciado sencillo y de apariencia inocente.

1.1. Notación

En el desarrollo del presente trabajo tratamos de apegarnos a la notación usual en matemáticas, sin embargo mucha de esta notación no se encuentra del todo estandarizada por lo cual decidimos exponer de manera precisa la notación que utilizaremos. La siguiente es notación usual de la teoría de conjuntos:

Definición 1.1. Dados los conjuntos A, B se tiene que:

- $A \subseteq B$ si para todo elemento $x \in A$ se cumple que $x \in B$.
- $A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$.
- $A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$.
- $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

Definición 1.2. Dado un conjunto finito A definimos el *cardinal* de A como el número de elementos que pertenecen a A . Denotamos con $|A|$ al cardinal del conjunto A .

Definición 1.3. Dado un conjunto S , el *conjunto potencia* de S se define y se denota por:

$$\mathcal{P}(S) = \{A : A \subseteq S\}.$$

Definición 1.4. Sea S un conjunto finito y $n, r \in \mathbb{N}$. Entonces, si $|S| = n$ diremos que S es un n -conjunto. De manera análoga, si $A \subset S$ con $|A| = r$ diremos que A es un r -subconjunto de S . Con $P_r(S)$ denotaremos a la colección de todos los r -subconjuntos de S .

A los conjuntos S que satisfacen que $|S| = 1$ los llamaremos *conjuntos singulares*. Análogamente, dado un conjunto S los 1-subconjuntos de S los llamaremos *subconjuntos singulares* de S .

1.2. Conceptos básicos de la Teoría de Gráficas

Para el desarrollo de algunas ideas necesarias en el presente trabajo se requerirá de algunos conceptos de la teoría de gráficas, mismos que se exponen a continuación.

Definición 1.5. Sea V un conjunto finito no vacío. Una *gráfica* sobre V es un par $G = (V, E)$ donde $E \subseteq P_2(V)$. Los elementos de V y E son los *vértices* y *aristas* de G respectivamente.

Una gráfica $G = (V, E)$ admite una representación en el plano de la siguiente manera: a cada vértice $u \in V$ se le asigna un punto en el plano (puntos distintos se asignan a vértices distintos), y cada arista $\{u, v\} \in E$ se representa por una línea entre los puntos que le corresponden a los vértices u y v . La manera en la que los puntos y las líneas es dibujada es irrelevante, pues lo que interesa es saber cuáles vértices determinan una arista y cuáles no.

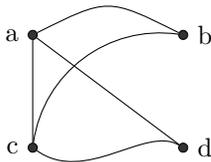


Figura 1.1: Gráfica sobre $V = \{a, b, c, d\}$ con conjunto de aristas $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.

Si las líneas que representan las aristas son todas líneas rectas, diremos que tenemos una *gráfica geométrica*. Al dibujar una gráfica es común omitir los nombres de las aristas y solo etiquetar los vértices. Una gráfica cuyos vértices son etiquetados pero cuyas aristas no lo son, es llamada *gráfica etiquetada*. Por el contrario, una gráfica en la cual ni las aristas ni los vértices son etiquetados es llamada *gráfica no etiquetada*. En el presente trabajo, salvo algunos ejemplos, se tratarán únicamente gráficas geométricas no etiquetadas, por lo que nos referiremos a ellas solamente como gráficas.

Dada una gráfica G , sus conjuntos de vértices y aristas se denotan por V_G y E_G respectivamente. Esta convención es independiente de los nombres asignados a estos conjuntos, así el conjunto de vértices W de una gráfica $H = (W, F)$ se seguirá denotando por V_H , no por W_H . No siempre se distinguirá estrictamente entre una gráfica y sus conjuntos de vértices y aristas. Por ejemplo, se puede hacer referencia a un vértice $v \in G$ (en lugar de $v \in V_G$), o a una arista $e \in G$ (en vez de $e \in E_G$).

Los cardinales $|V_G|$ y $|E_G|$ son llamados el *orden* y el *tamaño* de G respectivamente. Una gráfica es *trivial* si su orden es 0 o 1. Una arista $\{u, v\} \in E_G$ será escrita usualmente como uv , de este modo tenemos que $uv = vu$. Para una arista $e = uv \in E_G$ diremos que los vértices u y v son sus *extremos*. Si un vértice v es extremo de alguna arista e diremos que e *incide* con v , y viceversa.

Dos vértices $u, v \in G$ son *adyacentes*, si $uv \in E_G$. Dos aristas $e, f \in E_G$ son *adyacentes*, si tienen un extremo en común. Dos vértices o aristas no adyacentes serán llamados *independientes*. Más aun, un conjunto de vértices o aristas es independiente si no contiene algún par de elementos adyacentes.

Una gráfica G que satisface que todos sus pares de vértices son adyacentes es llamada una *gráfica completa*. Una gráfica completa de orden n se denota por K_n . De la definición de gráfica completa se sigue que $|E_{K_n}| = |P_2(V_{K_n})| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ejemplo 1.1. La siguiente figura muestra un conjunto de 4 vértices independientes, y una gráfica completa de orden 4.



a) Conjunto de 4 vértices independientes.

b) K_4 .

Figura 1.2: Un conjunto de 4 vértices independientes y un K_4 .

■

Dado un vértice $v \in G$, el *grado* de v , denotado por $\rho(v)$, se define como la cantidad de aristas que inciden con él.

Proposición 1.1. En cualquier gráfica $G = (V_G, E_G)$ el número de vértices con grado impar es par.

Demostración. Al sumar los grados de todos los vértices en G , cada arista de G es contada dos veces, una por cada uno de sus extremos. Luego

$$\sum_{v \in V_G} \rho(v) = 2|E_G|.$$

De esta igualdad se sigue que solo puede haber un número par de vértices con grado impar.

□

Definición 1.6. Dada una gráfica G , diremos que:

- Una gráfica H es una *subgráfica* de G , lo que denotaremos con $H \subseteq G$, si $V_H \subseteq V_G$ y $E_H \subseteq E_G$.
- $H = (V_H, E_H)$ es una *subgráfica generada* por U , si $V_H = U \subseteq V_G$ y $E_H = E_G \cap P_2(U)$. Nótese que las aristas de H son todas las aristas de G que tienen sus extremos en U .
- La gráfica \overline{G} es el complemento de G , si $V_{\overline{G}} = V_G$ y $E_{\overline{G}} = P_2(V_G) - E_G$. Observe que $uv \in E_{\overline{G}}$ si y sólo si los vértices u, v son independientes en G .

Ejemplo 1.2. La siguiente figura muestra una gráfica G y a su complemento \overline{G} .



Figura 1.3: Una gráfica G y su complemento \bar{G} .

En el inciso a) de la Figura 1.3 es fácil ver que la gráfica $H = (V_H, E_H)$ dada por $V_H = \{v_1, v_5, v_6\}$ y $E_H = \{v_1v_6, v_5v_6\}$, es una subgráfica de G . En el inciso b) tenemos que la gráfica $L = (V_L, E_L)$ dada por $V_L = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E_L = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$ es una subgráfica de \bar{G} , que además es generada por $\{v_1, v_2, v_3\}$.

■

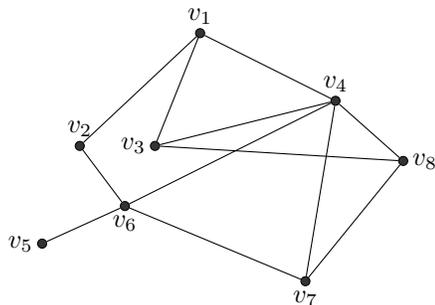
Definición 1.7. Dada una gráfica G , un *camino de longitud n* en G es una secuencia alternada de vértices y aristas: $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$, tal que $e_i = v_iv_{i+1}$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Un camino en G se representa por la secuencia de vértices que lo componen.

Si v_0, v_1, \dots, v_n es un camino en G , diremos que el camino *conecta* v_0 con v_n . Los vértices v_0 y v_n son llamados los *extremos* del camino, donde v_0 es el *vértice inicial* y v_n el *vértice final*; los vértices v_1, \dots, v_{n-1} son los *vértices internos*. En caso que $v_0 = v_n$, el camino es llamado *camino cerrado*.

Los caminos que satisfacen que todos sus vértices son distintos es llamado *camino simple*. Un camino cerrado $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0$ es llamado un *ciclo* si v_0, v_1, \dots, v_{n-1} es un camino simple.

Ejemplo 1.3. En la siguiente gráfica G se tiene que:

- $v_1, v_3, v_4, v_7, v_8, v_4, v_6, v_5$ es un camino de longitud 7 que conecta v_1 con v_5 .
- $v_2, v_6, v_4, v_7, v_8, v_4, v_1, v_2$ es un camino cerrado de longitud 7.
- v_1, v_4, v_6, v_5 es un camino simple de longitud 3.
- $v_1, v_3, v_4, v_7, v_6, v_2, v_1$ es un ciclo de longitud 6.





Definición 1.8. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas. Se dirá que G y G' son isomorfas, si existe una función biyectiva $\varphi : V \rightarrow V'$ tal que $uv \in E$ si y sólo si $\varphi(u)\varphi(v) \in E'$ para todo $u, v \in V$. Una función φ que satisface lo anterior es llamada un isomorfismo de gráficas. Y para denotar que G y G' son isomorfas se escribe $G \simeq G'$.

Ejemplo 1.4. La Figura 1.4 muestra dos gráficas isomorfas, G y G' . Un isomorfismo está dado por: $\varphi(v_1) = v'_3$, $\varphi(v_2) = v'_1$, $\varphi(v_3) = v'_4$, $\varphi(v_4) = v'_2$.

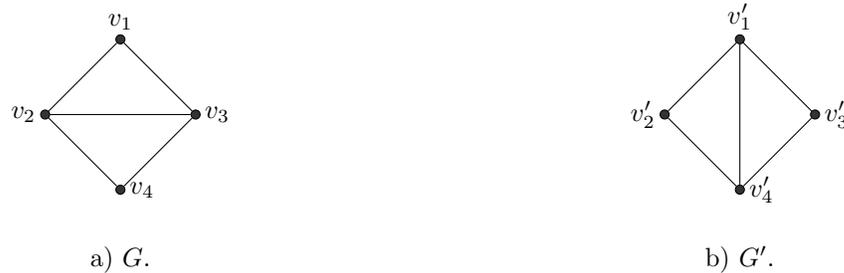


Figura 1.4: Dos gráficas isomorfas G y G' .



En este trabajo no se hará distinción entre gráficas isomorfas. Así, al hablar de gráficas completas diremos cosas como la gráfica completa sobre 6 vértices, etc.

Definición 1.9. Una k -coloración de las aristas de G es una función $c : E_G \rightarrow C$, donde C es un conjunto de k colores. Es común tomar al conjunto C como $\{1, 2, \dots, k\}$.

Una k -coloración de las aristas de una gráfica G puede pensarse como una partición $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de E_G , donde cada conjunto C_i está definido como $C_i = c^{-1}(i)$, para $i = 1, \dots, k$.¹ Los conjuntos C_i son llamados clases de coloración. Queda claro que una k -coloración está completamente definida si se conocen las k clases de coloración C_1, C_2, \dots, C_k . Por este motivo es común referirse a una k -coloración mediante sus clases de coloración.

Si en la Definición 1.9 el valor de k es pequeño, a veces se nombran los elementos del conjunto C con nombres de colores. Por ejemplo, si $k = 3$, el conjunto de colores C puede tomarse como $C = \{\text{azul}, \text{rojo}, \text{verde}\}$, en vez del usual $C = \{1, 2, 3\}$. Las clases de coloración se siguen indexando con los nombres de los colores, así siguiendo el ejemplo anterior tendríamos las siguientes clases: $C_{\text{azul}}, C_{\text{rojo}}, C_{\text{verde}}$.

Ejemplo 1.5. En la siguiente gráfica se ha definido una 3-coloración de aristas. El conjunto de colores es $C = \{\text{azul}, \text{rojo}, \text{verde}\}$. Las clases de coloración son:

$$C_{\text{azul}} = \{v_1v_2, v_2v_7, v_3v_4\}, C_{\text{rojo}} = \{v_1v_7, v_3v_7, v_4v_5, v_4v_7, v_5v_7\} \text{ y } C_{\text{verde}} = \{v_3v_5, v_6v_7\}.$$

¹Estrictamente no se trata de una partición pues es posible que algún C_i sea vacío.

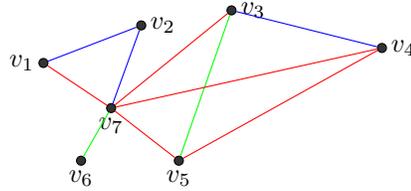


Figura 1.5: Una 3-coloración de una gráfica.

■

Dada una k -coloración de las aristas de la gráfica G , diremos que la subgráfica $H \subseteq G$ es *monocromática* si $E_H \subseteq C_i$, para algún i ($1 \leq i \leq k$). En este último caso se dice que H es de color i . Por ejemplo, considerando la gráfica de la Figura 1.5, la subgráfica H generada por $V_H = \{v_1, v_4, v_5, v_7\}$ es monocromática de color *rojo*.

Definición 1.10. Una *gráfica dirigida* (o digráfica) D sobre un conjunto finito no vacío V_D consiste de los elementos de V_D , llamados vértices de D , y un subconjunto E_D , de $V \times V$, que contiene las aristas dirigidas de D . Escribiremos $D = (V_G, E_D)$ para denotar a la gráfica dirigida.

Si $u, v \in V_D$ y $(u, v) \in E_D$, entonces existe una arista de u a v , la cual denotaremos por \vec{uv} . El vértice u es llamado el origen de la arista, mientras que el vértice v será llamado destino de la misma. Además diremos que v es adyacente desde u , y que u es adyacente hacia v . Si $u \neq v$ entonces $\vec{uv} \neq \vec{vu}$, una arista de la forma \vec{uu} es llamada un lazo en u . En este trabajo se considerarán solo gráficas dirigidas sin lazos, por lo que cuando se haga referencia a una arista dirigida \vec{uv} se sobreentenderá que $u \neq v$.

Dada una gráfica dirigida D , se puede asociar con esta una gráfica G sobre el mismo conjunto de vértices, reemplazando cada arista $\vec{uv} \in E_D$ por la correspondiente arista $uv \in E_G$. La gráfica G así obtenida se llama *gráfica subyacente de D* , y se representa por $G(D)$. También se puede obtener una gráfica dirigida D a partir de una gráfica arbitraria G , para ello se toma $V_D = V_G$ y se reemplaza cada arista $uv \in E_G$ por exactamente una de las posibles aristas dirigidas: \vec{uv} o \vec{vu} . La gráfica dirigida D que se obtiene es llamada una *orientación de G* .

Las gráficas dirigidas, al igual que las gráficas, admiten una representación en el plano. Una gráfica dirigida D se representa por un dibujo de su gráfica subyacente $G(D)$, junto con flechas sobre las líneas que representan las aristas, cada flecha apuntando hacia el destino de dicha arista en D . Cuando las dos aristas \vec{uv} y \vec{vu} están en E_D , se dibujan dos líneas con flechas, una apuntando hacia v y la otra hacia u .

Ejemplo 1.6. La siguiente es una representación de la gráfica dirigida $D = (V_D, E_D)$, donde $V_D = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E_D = \{\vec{v_1v_2}, \vec{v_1v_4}, \vec{v_2v_3}, \vec{v_4v_1}, \vec{v_4v_3}\}$

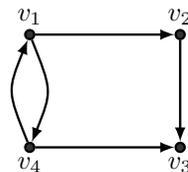


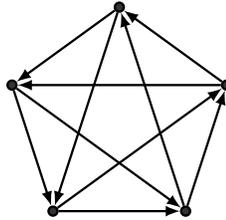
Figura 1.6: Una representación de la gráfica dirigida D .



Los términos establecidos para gráficas simples tienen su análogo en gráficas dirigidas, solo definiremos aquellos conceptos que se utilizarán en este trabajo.

Definición 1.11. Un *torneo* sobre n vértices, T_n , es una orientación de K_n . Es decir, T_n tiene n vértices y para cada par distinto u, v de vértices, exactamente una de las aristas \overrightarrow{uv} o \overrightarrow{vu} está en T_n .

Ejemplo 1.7. El siguiente es un ejemplo de un torneo sobre 5 vértices.



Definición 1.12. Dada una gráfica dirigida D , un *camino dirigido de longitud n* en D es una secuencia $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$ alternada de vértices y aristas tal que $e_i = \overrightarrow{v_i v_{i+1}}$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Un camino dirigido en D se representa por la secuencia de vértices que lo componen.

Un camino dirigido v_0, v_1, \dots, v_n en el que $v_0 = v_n$ se llama *camino dirigido cerrado*. Si el camino dirigido no repite vértices se llama *camino dirigido simple*. Un camino dirigido cerrado $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0$ es llamado un *ciclo dirigido* si v_0, v_1, \dots, v_{n-1} es un camino dirigido simple.

Definición 1.13. Dada una gráfica dirigida D , cualquier función $w : E_D \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *función de peso*. Si D es una gráfica dirigida en la cual se ha definido una función de peso w , diremos que D es una gráfica dirigida pesada.

Para tener una representación en el plano de una gráfica dirigida pesada, se procede del mismo modo que con las gráficas dirigidas no pesadas solo que esta vez cada arista dirigida $e \in E_D$ se etiqueta con el valor que le asigna la función w .

Ejemplo 1.8. La siguiente representación corresponde a la gráfica dirigida pesada D , dada por $V_D = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E_D = \{\overrightarrow{v_1 v_2}, \overrightarrow{v_3 v_2}, \overrightarrow{v_3 v_1}, \overrightarrow{v_4 v_1}, \overrightarrow{v_4 v_5}, \overrightarrow{v_5 v_3}\}$, donde la función de peso w está dada como: $w(\overrightarrow{v_1 v_2}) = 3.5$, $w(\overrightarrow{v_3 v_2}) = \sqrt{3}$, $w(\overrightarrow{v_3 v_1}) = -1$, $w(\overrightarrow{v_4 v_1}) = \sqrt{2}$, $w(\overrightarrow{v_4 v_5}) = 2.7$ y $w(\overrightarrow{v_5 v_3}) = \pi$.

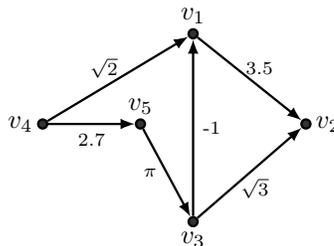


Figura 1.7: Representación de la gráfica dirigida pesada D .



Capítulo 2

Teoría de Ramsey

Bajo el nombre de Teoría de Ramsey se agrupa una clase especial de resultados que tratan con el estudio de particiones finitas de estructuras discretas, tales como: gráficas, colecciones finitas de puntos, subconjuntos de enteros, etc. En términos generales, los resultados de la Teoría de Ramsey determinan bajo qué condiciones se garantiza que alguna configuración de interés aparezca en alguna de las clases de la partición. Así, dichos resultados tienen la siguiente forma típica: *Dada una estructura discreta suficientemente grande y una partición finita de ésta, se asegura que cierta configuración está contenida en alguna de las clases de la partición.* Los resultados que adoptan esta forma son conocidos como resultados tipo Ramsey.

La Teoría de Ramsey es nombrada así en referencia al matemático inglés Frank Plumpton Ramsey, quien demostró un importante resultado conocido como el Teorema de Ramsey, el cual constituye una de las piedras angulares en la que descansa la teoría. El Teorema de Ramsey constituye una generalización a un resultado bastante simple, conocido como el Principio del Palomar o Principio de las Casillas de Dirichlet, mismo que se trata en la siguiente sección.

2.1. Principio del Palomar

El Principio del Palomar admite varias formulaciones, siendo una de las más comunes la siguiente:

Teorema 2.1 (Principio del Palomar Forma Simple). Si $n+1$ objetos se distribuyen sobre n contenedores entonces algún contenedor contiene por lo menos dos objetos.

Demostración. En efecto, si suponemos que no hay un contenedor con al menos dos objetos, entonces cada contenedor tiene como máximo un objeto, luego el número total de objetos distribuidos será a lo más tantos como la cantidad de contenedores, es decir, n . Lo que es una contradicción.

□

Obsérvese que el Principio del Palomar es un resultado tipo Ramsey, donde la estructura discreta es un conjunto finito de tamaño $n+1$ el cual es particionado en n clases (los contenedores), y la configuración cuya existencia se asegura en alguna de las clases de la partición, es un subconjunto de tamaño al menos igual a 2.

Ahora veremos algunos resultados que se valen del Principio del Palomar para su demostración.

Proposición 2.1. Sea $N > 1$ un entero primo relativo con 10, es decir, $\text{mcd}(N, 10) = 1$. Entonces si $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ se cumple que N divide a alguno de los elementos de la sucesión dada por

$$x_1 = a, \quad x_2 = aa, \quad \dots, \quad x_n = \underbrace{aa \dots a}_{n\text{-dígitos}}, \quad \dots$$

Demostración. Basta con mostrar que uno de los primeros N elementos de la sucesión es divisible por N . Para esto consideremos los residuos que resultan al dividir los primeros N elementos de la sucesión por N . Si uno de estos residuos es 0 hemos terminado. Supongamos pues que todos estos residuos son distintos de 0, es decir, que solo toman valores entre 1 y $N-1$. Como tenemos N residuos, por el Principio del Palomar debe haber al menos dos términos que dejan el mismo residuo al dividirlos por N . Sean x_i y x_j los términos que cumplen lo anterior, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$.

Como x_i y x_j tienen el mismo residuo cuando se dividen por N , por el algoritmo de la división tenemos que existen enteros positivos q_i, q_j y r con $r \leq N$ tales que:

$$x_i = q_i N + r$$

$$x_j = q_j N + r.$$

De aquí se sigue que

$$x_j - x_i = (q_j - q_i)N, \tag{2.1}$$

luego $(x_j - x_i)$ es divisible por N .

Observe que si bien hemos logrado probar que $x_j - x_i$ es divisible por N , este entero no forma parte de nuestra sucesión. Para obtener un elemento de la sucesión que sea divisible por N , basta con fijarse que el entero $x_j - x_i$ está formado por $j - i$ dígitos iguales a a e i dígitos iguales a 0. Esto es:

$$x_j - x_i = \underbrace{a \dots a}_{(j-i)} \underbrace{0 \dots 0}_i = x_{j-i} 10^i. \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) tenemos que

$$x_{j-i} 10^i = (q_j - q_i)N.$$

Ahora como $\text{mcd}(N, 10) = 1$, se sigue que también $\text{mcd}(N, 10^i) = 1$ y así N debe dividir a x_{j-i} .

□

Ejemplo 2.1. Como una consecuencia del ejemplo anterior tenemos que entre los miembros de la sucesión: $\{3, 33, 333, 3333, \dots\}$ existe uno que es divisible por 10001. Por métodos aritméticos puede hallarse que el menor elemento de la sucesión que es divisible por 10001 es 33333333.

■

Otra formulación de la forma simple del Principio del Palomar es la siguiente.

Teorema 2.2 (Principio del Palomar Forma Simple). Si n objetos son colocados en n contenedores y ningún contenedor tiene más de un objeto, entonces cada contenedor tiene exactamente un objeto.

Esta formulación será útil para probar el siguiente resultado.

Teorema 2.3 (Teorema Chino del Residuo). Si m y n son enteros positivos tales que $\text{mcd}(m, n) = 1$, entonces el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

tiene solución.

Demostración. Ya que a es congruente módulo m con alguno de $\{0, \dots, m-1\}$ y b es congruente módulo n con alguno de $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, podemos asumir que $0 \leq a < m$ y $0 \leq b < n$. Considérense los siguientes enteros:

$$a, a + m, a + 2m, \dots, a + (n-1)m.$$

Claramente cada uno de estos enteros deja un residuo de a cuando es dividido por m . Analicemos ahora los residuos que dejan al ser divididos por n . Supongamos que hay dos que dejan el mismo residuo r al ser divididos por n , digamos $(a + im)$ y $(a + jm)$ donde $0 \leq i < j \leq n-1$. Luego por el algoritmo de la división existen enteros q_i y q_j tales que:

$$a + im = q_i n + r \quad \text{y} \quad a + jm = q_j n + r.$$

Restando la primera igualdad de la segunda obtenemos:

$$(j - i)m = (q_j - q_i)n.$$

Ya que $\text{mcd}(m, n) = 1$, tenemos que $n | (j - i)$. Pero $0 < j - i \leq n - 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, los n enteros: $a, a + m, \dots, a + (n-1)m$, dejan residuos diferentes al dividirlos por n . Así, por el Principio del Palomar, tenemos que cada uno de los números: $0, 1, \dots, n-1$, aparece como residuo exactamente una vez. En particular el número b debe aparecer como residuo. Sea $a + km$ con $0 \leq k \leq n-1$ el número que deja el residuo b cuando es dividido por n . Entonces por el algoritmo de la división, existe un entero q tal que $a + km = qn + b$. De aquí se sigue que el entero $x = a + km = qn + b$ es solución del sistema.

□

Presentaremos ahora la versión general del Principio del Palomar, llamada así debido al hecho que la forma simple no es más que un caso particular de esta.

Teorema 2.4 (Principio del Palomar Forma General). Sean q_1, q_2, \dots, q_n enteros positivos. Si $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ objetos son distribuidos en n contenedores, entonces se cumple que el primer contenedor tiene al menos q_1 objetos, o el segundo contenedor tiene al menos q_2 objetos, \dots , o el n -ésimo contenedor tiene al menos q_n objetos.

Demostración. Supongamos que no es posible distribuir los objetos como lo enuncia el teorema, entonces debemos tener que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ el i -ésimo contenedor tiene a lo más $q_i - 1$ objetos. Luego el número total de objetos contenidos en los n contenedores es a lo más:

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \dots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_n - n.$$

Lo que es una contradicción.

□

El caso en que $q_1 = q_2 = \dots = q_n = r$ tiene importantes aplicaciones, por este motivo merece mención aparte como corolario al teorema anterior.

Corolario 2.1. Si $n(r - 1) + 1$ objetos se distribuyen en n contenedores, entonces al menos uno de los contenedores contiene r o más objetos.

Demostración. Basta hacer $q_1 = q_2 = \dots = q_n = r$ en el enunciado del teorema anterior. □

Como una primer aplicación del Corolario 2.1 obsérvese que si se toma $r = 2$ se obtiene la forma simple del Principio del Palomar. Otra aplicación se da en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.5 (Erdős-Szekeres). En cada sucesión de $n^2 + 1$ números reales, siempre es posible hallar una subsucesión monótona de al menos $n + 1$ elementos.

Demostración. Sea $\{a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}\}$ una sucesión de $n^2 + 1$ números reales. Supongamos que no existe una subsucesión creciente de longitud $n + 1$ y veamos que entonces debe de existir una subsucesión decreciente de longitud $n + 1$.

En efecto, sea L_i la longitud de la subsucesión creciente más larga que comienza con el término a_i , $1 \leq i \leq n^2 + 1$. Como estamos suponiendo que no hay subsucesiones crecientes de longitud al menos $n + 1$, entonces debemos tener que $1 \leq L_i \leq n$ para toda i . Haciendo $r = n + 1$ en el Corolario 2.1, tenemos que al menos $n + 1$ de los enteros $L_1, L_2, \dots, L_{n^2+1}$ son iguales, sean dichos enteros los siguientes:

$$L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_{n+1}},$$

donde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1} \leq n^2 + 1$. Observe que si hay un i_j con $1 \leq j \leq n$ tal que $a_{i_j} < a_{i_{j+1}}$, entonces la subsucesión creciente de longitud $L_{i_{j+1}}$ que comienza en $a_{i_{j+1}}$ da lugar a una subsucesión creciente de longitud $L_{i_{j+1}} + 1$ que comienza en a_{i_j} , con lo que $L_{i_j} > L_{i_{j+1}}$, lo que contradice que $L_{i_j} = L_{i_{j+1}}$. Por tanto lo que se debe cumplir es:

$$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \dots \geq a_{i_{n+1}},$$

y obtenemos una subsucesión decreciente de longitud $n + 1$. □

El resultado del ejemplo anterior es el mejor posible, en el sentido de que existen sucesiones de n^2 números reales las cuales no contienen subsucesiones monótonas de longitud $n + 1$. Un ejemplo de una sucesión así es el siguiente:

$$(n, n - 1, \dots, 1, 2n, 2n - 1, \dots, n + 1, \dots, n^2, n^2 - 1, \dots, n^2 - n + 1).$$

Esta sucesión consta de n^2 elementos, los cuales han sido arreglados para no hallar subsucesiones monótonas de longitud $n + 1$.

2.2. Teorema de Ramsey

En [17] F. P. Ramsey prueba un teorema combinatorio que posteriormente se convertiría en un resultado fundamental para el desarrollo de la Teoría de Ramsey. Más adelante veremos que este teorema es

en cierto sentido una generalización del Principio del Palomar.

La siguiente definición es una generalización de la de coloración de las aristas de una gráfica, y será de utilidad para enunciar el Teorema de Ramsey.

Definición 2.1. Sean $r, k \in \mathbb{N}$, S un conjunto finito y $P_r(S)$ la colección de r -subconjuntos de S . Una k -coloración de $P_r(S)$ es cualquier función $c : P_r(S) \rightarrow C$, donde C es un conjunto de k colores. Es común tomar al conjunto C como $\{1, 2, \dots, k\}$.

Si S es el conjunto de vértices de alguna gráfica G , entonces haciendo $r = 2$ en la definición anterior obtenemos la definición de k -coloración de las aristas de G . Al igual que en el caso de la coloración de aristas de una gráfica, una k -coloración de $P_r(S)$ puede considerarse como una partición¹ $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $P_r(S)$, donde cada clase C_i está dada por el conjunto de los r -subconjuntos a los que se les asigna el color i , esto es, $C_i = c^{-1}(i)$. Es claro que toda k -coloración queda totalmente determinada si se conocen las k clases de coloración, por tanto las k -coloraciones de $P_r(S)$ no se denotarán por la función de coloración, sino por la partición formada por las clases de coloración.

Sea S un conjunto finito, $r \in \mathbb{N}$, $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ una k -coloración de $P_r(S)$, y $A \subseteq S$ con $|A| \geq r$. Si se cumple que $P_r(A) \subseteq C_i$, para algún i ($1 \leq i \leq k$), se dice que $P_r(A)$ es *monocromático* de color i .

Teorema 2.6 (Ramsey). Para cualesquier enteros positivos $k \geq 1$, $r \geq 1$, y $q_1, q_2, \dots, q_k \geq r$, existe un entero positivo N tal que para todo conjunto finito S con $|S| \geq N$ se cumple lo siguiente. Para cada k -coloración $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $P_r(S)$ existe al menos un $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y un q_i -subconjunto S_i de S tal que $P_r(S_i) \subseteq C_i$.

El menor entero N_0 que satisface el Teorema 2.6 se llama número de Ramsey y se denota como² $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$.

Antes de dar una de demostración de este resultado, se probará primero el caso en que $k = 2$, el cual puede ser enunciado como sigue:

Teorema 2.7. Para cualesquier enteros positivos p, q, r tales que $p, q \geq r$, existe un entero positivo N tal que para todo conjunto finito S con $|S| \geq N$ se cumple lo siguiente. En cualquier 2-coloración $\{C_1, C_2\}$ de $P_r(S)$, existe un p -subconjunto S_1 de S tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ o bien existe un q -subconjunto S_2 de S tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$.

Demostración. Basta con demostrar que $R(p, q; r)$ existe para cualesquier enteros positivos p, q, r . La demostración será por inducción sobre p, q y r .

1).- Si $r = 1$ el teorema se cumple para cada p y q , en este caso se tiene $R(p, q; 1) = p + q - 1$. En efecto, note que los elementos de $P_1(S)$ son los subconjuntos singulares de S , luego se tiene que $|P_1(S)| = |S|$. Sea $n = |S|$, ahora haciendo $q_1 = p$ y $q_2 = q$ en la forma fuerte del Principio del Palomar, y tomando las clases de coloración C_1 y C_2 como los contenedores se sigue que con $n = p + q - 1$ se garantiza la existencia de p subconjuntos singulares: $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_p\} \in P_1(S)$ perteneciendo a C_1 , o q subconjuntos singulares: $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_q\} \in P_1(S)$ perteneciendo a C_2 . Tenemos pues dos casos:

- En el primer caso basta tomar $S_1 = \bigcup_{i=1}^p \{x_i\}$ para tener que $P_1(S_1) \subseteq C_1$.

- Para el segundo se toma $S_2 = \bigcup_{i=1}^q \{y_i\}$, con esto se garantiza que $P_1(S) \subseteq C_2$.

¹Estrictamente no se trata de una partición en el sentido usual, pues se permite que alguna clase C_i sea vacía.

²Otra notación usual para el número de Ramsey es $R_r(q_1, q_2, \dots, q_k)$.

De lo anterior se deduce que $R(p, q; 1) \leq p + q - 1$.

Además de la demostración de la forma fuerte del Principio del Palomar se sigue que $n = p + q - 1$ es el menor entero con el que se asegura que habrá al menos p subconjuntos singulares en C_1 o q subconjuntos singulares en C_2 . Por lo tanto $R(p, q; 1) \geq p + q - 1$ y así $R(p, q; 1) = p + q - 1$.

2).- Para cualquier entero $r \geq 1$ se verifica que

$$R(r, q; r) = q \quad y \quad R(p, r; r) = p.$$

En efecto, probaremos el caso en que $p = r$, cuando $q = r$ la demostración es análoga. Sea pues S un conjunto tal que $|S| = q$ y $\{C_1, C_2\}$ una 2-coloración de $P_r(S)$. Si $C_1 = \emptyset$, entonces $P_r(S) = C_2$ y tomando $S_2 = S$ tendríamos un q -subconjunto de S con $P_r(S_2) \subseteq C_2$. Si $C_1 \neq \emptyset$, entonces tomando un r -subconjunto $S_1 \in C_1$, se satisface que $P_r(S_1) = \{S_1\} \subseteq C_1$. De lo anterior se deduce que $R(r, q; r) \leq q$. Ahora supongamos que $|S| \leq q - 1$. Considerando la coloración $\{C_1 = \emptyset, C_2 = P_r(S)\}$ es claro que no existe un r -subconjunto $S_1 \subseteq S$ con $P_r(S) \subseteq C_1$ ni un q -subconjunto $S_2 \subseteq S$ con $S_2 \subseteq C_2$. Luego $R(r, q; r) \geq q$ y por tanto $R(r, q; r) = q$.

3).-Supongamos que $p, q > r$ y que el teorema se verifica en los siguientes casos:

- i) Para $(r - 1)$ y cada p, q .
- ii) Para r, p y $(q - 1)$.
- iii) Para $r, (p - 1)$ y q .

Probaremos que también se cumple para r, p y q , y en virtud de 1) y 2) se tendrá que el teorema ha quedado demostrado.

Procedamos por contradicción y supongamos que no es posible hallar el número $R(p, q; r)$. Elijamos un entero p_1 tan grande que si $|S| = p_1$ entonces existe un $(p - 1)$ -subconjunto $S_1 \subseteq S$ tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ o un q -subconjunto $S_2 \subseteq S$ tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$. Esta elección de p_1 queda justificada por la hipótesis de inducción iii), pues basta tomar $p_1 = R(p - 1, q; r)$.

Similarmente, por la hipótesis de inducción ii) podemos elegir un valor q_1 tan grande que si $|S| = q_1$ entonces existe un p -subconjunto $S_1 \subseteq S$ tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ o un $(q - 1)$ -subconjunto $S_2 \subseteq S$ tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$, basta tomar $q_1 = R(p, q - 1; r)$.

Sea $N \geq R(p_1, q_1; r - 1) + 1$ y $|S| = N$. Tómese un elemento $x \in S$ y consideremos el conjunto $S_1 = S \setminus \{x\}$. Es claro que $|S_1| = N - 1 \geq R(p_1, q_1; r - 1)$. Si $\{C, D\}$ es una 2-coloración de $P_r(S)$ definamos:

$$C_1 = \{A \in C : x \notin A\} \quad y \quad D_1 = \{A \in D : x \notin A\}.$$

Obsérvese que $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$. Ahora consideremos los siguientes conjuntos:

$$C_x = \{A \in P_{r-1}(S_1) : A \cup \{x\} \in C\} \quad y \quad D_x = \{A \in P_{r-1}(S_1) : A \cup \{x\} \in D\}.$$

Para cualquier $A \in P_{r-1}(S_1)$, se tiene que $A \cup \{x\} \in P_r(S)$, luego $A \cup \{x\} \in C$ o $A \cup \{x\} \in D$, esto último implica que $A \in C_x$ o $A \in D_x$. Luego $\{C_x, D_x\}$ es una 2-coloración de $P_{r-1}(S_1)$. Ya que $|S_1| \geq R(p_1, q_1; r - 1)$ y aplicando la hipótesis de inducción i), se debe cumplir alguna de las siguientes opciones:

- a) Existe un p_1 -subconjunto $U \subseteq S_1$ tal que $P_{r-1}(U) \subseteq C_x$.

b) Existe un q_1 -subconjunto $V \subseteq S_1$ tal que $P_{r-1}(V) \subseteq D_x$.

En el caso a), dado que $p_1 = R(p-1, q; r)$ y $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$, por la hipótesis de inducción iii) existe ya sea un $(p-1)$ -subconjunto $U_1 \subseteq U$ tal que $P_r(U_1) \subseteq C_1 \subseteq C$ o un q -subconjunto $U_2 \subseteq U$ tal que $P_r(U_2) \subseteq D_1 \subseteq D$. Si lo que se tiene es el $(p-1)$ -subconjunto U_1 , entonces $U_1 \cup \{x\}$ es un p -subconjunto de S . Si $A \subseteq U_1 \cup \{x\}$ es un r -subconjunto, tenemos que si $x \notin A$, entonces $A \subseteq U_1$, luego $A \in C$; si ocurre que $x \in A$, entonces $A \setminus \{x\}$ es un $(r-1)$ -subconjunto de U , así $A \setminus \{x\} \in C_x$, y por tanto $A = (A \setminus \{x\}) \cup \{x\} \in C$. Lo anterior nos muestra que $U_1 \cup \{x\}$ es un r -subconjunto de S para el que $P_r(U_1 \cup \{x\}) \subseteq C$. Por otro lado, si lo que se tiene es un q -subconjunto $U_2 \subseteq U$, entonces el propio U_2 es un q -subconjunto $U_2 \subseteq S$ tal que $P_r(U_2) \subseteq D$.

Para el caso b), como $q_1 = R(p, q-1; r)$ y C_1, D_1 es una 2-coloración de $P_r(S_1)$, luego por la hipótesis de inducción ii), existe ya sea un p -subconjunto $U_1 \subseteq U$ tal que $P_r(U_1) \subseteq C_1 \subseteq C$ o un $(q-1)$ -subconjunto $U_2 \subseteq U$ tal que $P_r(U_2) \subseteq D_1 \subseteq D$. Obsérvese que en el primer caso ya tenemos un p -subconjunto $U_1 \subseteq S$ con $P_r(U_1) \subseteq C$. En el último caso, tenemos que $U_2 \cup \{x\} \subseteq S$ es un q -subconjunto para el cual $P_r(U_2 \cup \{x\}) \subseteq D$.

De lo anterior se sigue que:

$$R(p, q; r) \leq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1.$$

Por las hipótesis de inducción se tiene que el lado derecho de la desigualdad existe y es finito, por lo tanto $R(p, q; r)$ existe para cada $p, q, r \in \mathbb{N}$ con $p, q \geq r$.

□

Ahora que la existencia del número de Ramsey $R(p, q; r)$ ha quedado establecida procederemos a exponer la demostración del caso general.

Demostración (Teorema de Ramsey). De manera análoga a la prueba del teorema anterior, basta con demostrar que el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$ existe. La demostración se hará por inducción el número de colores: k .

Si $k = 1$, el teorema se verifica trivialmente pues $P_r(S)$ es una 1-coloración de $P_r(S)$ mismo. Si $k = 2$ estamos en el caso del teorema recién demostrado.

Supongamos que el teorema se verifica para $(k-1)$ colores, es decir, para cualesquier enteros positivos $r \geq 1$ y q_1, q_2, \dots, q_{k-1} tales que $q_i \geq r$ ($1 \leq i \leq k-1$) el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}; r)$ existe. Veamos que también se cumple para k colores.

En efecto, para $k \geq 3$, sean $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ k clases de coloración. A partir de éstas formemos $k-1$ clases de coloración de la siguiente manera: $\{C_1, C_2, \dots, C_{k-2}, D_{k-1}\}$, donde $D_{k-1} = C_{k-1} \cup C_k$. Del teorema anterior tenemos que $p_{k-1} = R(q_{k-1}, q_k; r)$ existe, y por hipótesis de inducción tenemos que $R(q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r)$ también existe.

Ahora si $|S| \geq R(q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r)$, dado que $\{C_1, C_2, \dots, C_{k-2}, D_{k-1}\}$ es una $(k-1)$ -coloración de $P_r(S)$, entonces existe al menos un q_i -subconjunto $S_i \subseteq S$ tal que $P_r(S_i) \subseteq C_i$ donde $1 \leq i \leq k-2$ o un p_{k-1} -subconjunto $U_{k-1} \subseteq S$ tal que $P_r(U_{k-1}) \subseteq D_{k-1}$. En el primer caso no hay nada que hacer, pues el teorema se seguiría de inmediato. Para el segundo caso, consideremos las siguientes clases:

$$E_{k-1} = \{A \in P_r(U_{k-1}) : A \in C_{k-1}\} \quad y \quad E_k = \{A \in P_r(U_{k-1}) : A \in C_k\}.$$

Obsérvese que $\{E_{k-1}, E_k\}$ es una 2-coloración de $P_r(U_{k-1})$. Como $|U_{k-1}| = p_{k-1} = R(q_{k-1}, q_k; r)$, entonces existe un q_{k-1} -subconjunto $S_{k-1} \subseteq U_{k-1}$ tal que $P_r(S_{k-1}) \subseteq E_{k-1}$ o un q_k -subconjunto $S_k \subseteq U_{k-1}$ tal que $P_r(S_k) \subseteq E_k$. Ahora note que por construcción se tiene que $E_{k-1} \subseteq C_{k-1}$ y $E_k \subseteq C_k$. Esto implica que existe ya sea un q_{k-1} -subconjunto $S_{k-1} \subseteq S$ tal que $P_r(S_{k-1}) \subseteq C_{k-1}$ o un q_k -subconjunto $S_k \subseteq S$ tal que $P_r(S_k) \subseteq C_k$.

De lo anterior se sigue que:

$$R(q_1, q_2, \dots, q_k; r) \leq R(q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r).$$

El número de la parte derecha de la desigualdad existe en virtud de la hipótesis de inducción. Por tanto, $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$ existe para cualesquier enteros positivos q_1, q_2, \dots, q_k, r para los que se verifique que $q_1, q_2, \dots, q_k \geq r$.

□

Debemos resaltar que en la prueba del Teorema de Ramsey no se obtiene el valor exacto del número $R(q_1, \dots, q_k; r)$. Esto ocurre frecuentemente dentro de la Teoría de Ramsey, pues la mayoría de las demostraciones solo proporcionan cotas superiores para el tamaño de las estructuras combinatorias de interés, lo cual es suficiente para asegurar la existencia de la configuración deseada en alguna de las clases de la partición. La determinación de los valores mínimos con los que se cumplen los resultados tipo Ramsey es uno de los problemas más importantes en esta teoría.

Recordemos que al principio de este apartado se mencionó que el Teorema de Ramsey era en cierto sentido una generalización del Principio del Palomar, nuestro siguiente objetivo es justificar dicha afirmación.

Teorema 2.8. Si $r = 1$, entonces el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_k; 1)$ es el entero más pequeño, n , tal que si los elementos de un n -conjunto son coloreados con k -colores $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, entonces se cumple que hay q_1 elementos en la clase C_1 , o hay q_2 elementos en la clase C_2, \dots , o hay q_k elementos en la clase C_k . Además se tiene que:

$$R(q_1, q_2, \dots, q_k; 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_k - k + 1.$$

Demostración. Basta con observar que este teorema no es otra cosa que el Principio del Palomar en su forma general, donde las clases de coloración hacen el papel de los contenedores.

□

2.3. Aplicaciones del Teorema de Ramsey

En esta sección se presentan algunos resultados tipo Ramsey, así como algunos problemas que permanecen abiertos y que son parte importante dentro del desarrollo de la teoría.

2.3.1. Teorema de I. Schur

Ahora presentamos el primer teorema de tipo Ramsey, debido a I. Schur, el cual afirma que para cualquier coloración de los naturales siempre es posible hallar subsucesiones monocromáticas arbitraria-

mente largas con la propiedad que el término mayor de la subsucesión es la suma de los que le preceden. El enunciado preciso del teorema es el siguiente:

Teorema 2.9 (Teorema de I. Schur). Para cualesquiera enteros positivos k, l con $l \geq 2$ existe $N(k, l) \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N(k, l)$ y $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ es una k -coloración de $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces existe una clase de coloración C_t , y $x_1, x_2, \dots, x_l \in \{1, 2, \dots, n\}$ (no necesariamente distintos), tales que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \subset C_t \quad \text{y} \quad x_l = \sum_{i=1}^{l-1} x_i.$$

Demostración. Veamos que con $N(k, l) = R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k\text{-veces}}; 2)$ se cumple lo especificado en el teorema. En efecto, sea $n \geq R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k\text{-veces}}; 2)$ y $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ una k -coloración de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ahora defínase una k -coloración $\{A_1, \dots, A_k\}$ de $P_2(\{1, 2, \dots, n\})$ como: $\{x, y\} \in A_i$ si y sólo si $|x - y| \in C_i$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Esta k -coloración de $P_2(\{1, 2, \dots, n\})$ es válida, pues si se tiene que $\{x, y\} \in A_i \cap A_j$ entonces, por definición, $|x - y| \in C_i$ y $|x - y| \in C_j$, como $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ es una k -coloración se tiene que $i = j$, luego $A_i = A_j$.

Por el Teorema de Ramsey, existe un $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ y un l -subconjunto $U = \{u_1, u_2, \dots, u_l\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $P_2(U) \subset A_t$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_1 < u_2 < \dots < u_l$. Luego $\{u_i, u_j\} \in A_t$ y $u_j - u_i \in C_t$ para todo $i < j$. Finalmente para $1 \leq i \leq l - 1$ tómesese $x_i = u_{i+1} - u_i$ y $x_l = u_l - u_1$. De este modo se tiene que $x_i \in C_t$ para todo $1 \leq i \leq l$ y $x_l = \sum_{i=1}^{l-1} x_i$.

□

Al valor mínimo que puede tomar $N(k, l)$ lo denotaremos con $N_0(k, l)$. Así de la demostración del Teorema se sigue que $N_0(k, l) \leq R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k\text{-veces}}; 2)$.

Ejemplo 2.2. $N_0(2, 3) = 5$.

Solución. Supongamos que los colores son rojo y azul, veamos qué tan lejos podemos llegar coloreando los enteros positivos sin que se cumpla la propiedad pedida. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el 1 se ha coloreado de rojo, luego el 2 tiene que ser azul ya que $2 = 1 + 1$, análogamente el 4 debe ser rojo pues $4 = 2 + 2$; de esto se sigue que el 3 es azul pues $4 = 1 + 3$. Hasta este punto tenemos:

1, 2, 3, 4.

Pero ahora el 5 no puede colorearse sin que se cumpla que es suma de dos números monocromáticos, pues $5 = 1 + 4 = 2 + 3$. De lo anterior se sigue que $N_0(2, 3) \leq 5$. Por otra parte, en la coloración: 1, 2, 3, 4, no existen tres enteros con la propiedad deseada. Por tanto $N_0(2, 3) > 4$, y así $N_0(2, 3) = 5$.

■

Como veremos más adelante $R(3, 3; 2) = 6$, así este ejemplo muestra que en general $N_0(k, l) \neq R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k\text{-veces}}; 2)$.

2.3.2. Teorema de Ramsey en la Teoría de Gráficas

En esta sección veremos que las gráficas resultan ser particularmente convenientes para analizar los números de Ramsey de la forma $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2)$. En este caso podemos enunciar el Teorema de Ramsey de la siguiente manera:

Teorema 2.10 (Ramsey Para Gráficas). Sean $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ tales que $p_1, p_2, \dots, p_k \geq 2$. El número de Ramsey $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2)$ es el orden de la gráfica completa más pequeña la cual al ser sus aristas k -coloreadas, posee un K_{p_i} monocromático de color i , para algún $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Demostración. En efecto, si G es una gráfica completa se tiene que $E_G = P_2(V_G)$, luego el enunciado del teorema anterior no es otra cosa que el Teorema de Ramsey para el caso en que $r = 2$. □

Presentamos a continuación un resultado no trivial relativo a gráficas, el cual fue probado por Erdős y Szekeres en [7].

Teorema 2.11. Dados $k, l \in \mathbb{N}$, se cumple que cualquier gráfica G con $|V_G| \geq R(k, l; 2)$ contiene un subconjunto independiente U con $|U| = k$, o una subgráfica completa K_l .

Demostración. Sea G una gráfica tal que $|V_G| \geq R(k, l; 2)$. Consideremos la siguiente 2-coloración de aristas para la gráfica completa sobre $|V_G|$ vértices:

Dada una arista $e \in K_{|V_G|}$, ésta será coloreada de rojo si $e \in E_{\overline{G}}$, mientras que si $e \in E_G$ será coloreada de azul. Luego por el Teorema de Ramsey se sigue que G debe contener ya sea un K_k rojo o un K_l azul. En el primer caso tendríamos que los vértices de K_k forman un subconjunto independiente de G . Mientras que en el segundo caso tendríamos una subgráfica completa de orden l . □

En la siguiente sección veremos cómo la interpretación gráfica del Teorema de Ramsey puede ser útil para determinar algunos números de Ramsey de manera exacta.

2.3.3. Números de Ramsey

Una vez que se ha establecido el Teorema de Ramsey lo más natural es preguntar por el valor exacto de los números de Ramsey. En el siguiente teorema se presentan algunos resultados relativos a estos números, mismos que nos serán de utilidad para acotarlos superiormente, y en algunos casos para conocerlos de manera precisa.

Teorema 2.12. Para los números de Ramsey se verifica lo siguiente:

- a) $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 1) = p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1$.
- b) $R(p, r; r) = R(r, p; r) = p$.
- c) $R(p, q; r) \leq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1$.
- d) $R(p, q; 2) \leq R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$.
- e) $R(p, q; 2) < R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$, siempre que $R(p-1, q; 2)$ y $R(p, q-1; 2)$ son ambos pares.

$$f) R(p_1, p_2, \dots, p_k; r) \leq R(p_1, p_2, \dots, p_{k-2}, R(p_{k-1}, p_k; r); r).$$

Demostración. El inciso a) es el Teorema 2.4 y los incisos b) y c) fueron establecidos en la demostración del Teorema 2.6.

El inciso d) se sigue de a) y c), pues por c) se tiene:

$$R(p, q; 2) \leq R(R(p-1, q; 2), R(p, q-1; 2); 1) + 1,$$

y aplicando a) al lado izquierdo de la desigualdad se obtiene:

$$R(p, q; 2) \leq (R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 2 + 1) + 1 = R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2).$$

Veamos la prueba de e). Sea $G = (V, E)$ una gráfica arbitraria con $|V| = R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 1$. Si probamos que en G existe un subconjunto U de p vértices independientes o una subgráfica completa K_q , en virtud del Teorema 2.11 tendríamos que $R(p, q; 2) \leq R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2) - 1 < R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$, y el teorema se seguiría. Veamos que, en efecto, esto sucede.

Si ocurre que para algún vértice $v \in V$, $\rho(v) \geq R(p, q-1; 2)$ entonces la subgráfica generada por los vértices adyacentes a v tiene p vértices independientes o una subgráfica completa de $q-1$ vértices que, junto con v generan una K_q . Por otro lado, si en vez de que $\rho(v) \geq R(p, q-1; 2)$ se tuviera que $\rho(v) \leq R(p, q-1; 2) - 2$ para algún vértice v , entonces al menos tendríamos $R(p-1, q; 2)$ vértices no adyacentes a v , luego la gráfica generada por estos vértices posee $p-1$ vértices independientes, que junto con v forman un subconjunto independiente de p vértices, o una subgráfica completa K_q . Si no ocurre ninguno de los casos anteriores, entonces se tendría que $\rho(v) = R(p, q-1; 2) - 1$ para todo $v \in V$, pero esto es imposible ya que entonces tendríamos una gráfica con un número impar de vértices con grado impar. Por tanto, en G siempre existe un subconjunto independiente U de p vértices o una subgráfica completa de orden q . Así, $R(p, q; 2) < R(p-1, q; 2) + R(p, q-1; 2)$.

Por último, el inciso f) también ya había sido establecido en la demostración del teorema 3.

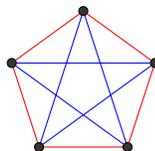
□

Obsérvese que los incisos a) y b) nos proporcionan valores exactos para los números de Ramsey, sin embargo estos valores resultan evidentes de la definición de número de Ramsey, luego los valores obtenidos por estos incisos podemos considerarlos como triviales.

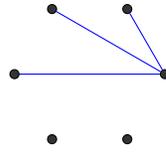
Antes de ver cómo el Teorema 2.12 nos resulta útil para calcular números de Ramsey no triviales, mostremos que $R(3, 3; 2) = 6$.

Ejemplo 2.3. $R(3, 3; 2) = 6$. Es decir, K_6 es la gráfica completa de menor orden que satisface que en cualquier 2-coloración, digamos con los colores rojo y azul, hay un K_3 rojo o un K_3 azul.

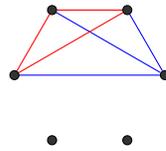
Solución. De la siguiente 2-coloración de K_5 se tiene que $R(3, 3; 2) > 5$. Pues claramente no hay un K_3 rojo o azul.



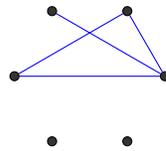
Ahora veamos $R(3, 3; 2) \leq 6$, en efecto dado que cada vértice de K_6 incide con 5 aristas, por el principio del Palomar tenemos que para cualquier 2-coloración de las aristas de K_6 con los colores rojo y azul, cada vértice incide con al menos 3 aristas azules, o al menos 3 aristas rojas. Supongamos que algún vértice es incidente con al menos 3 aristas azules:



Si las aristas que unen estos vértices son rojas, ya terminamos pues tendríamos un K_3 rojo:



Si este no es el caso, entonces al menos una de las aristas entre estos vértices es azul, luego esta arista azul junto con las otras dos aristas azules que unen estos vértices con nuestro vértice inicial forman un K_3 azul.



Si no hay un vértice en el cual incidan 3 aristas azules, entonces en todos los vértices inciden al menos 3 aristas rojas, y por un razonamiento análogo al anterior obtendríamos de igual manera un K_3 monocromático. Por tanto $R(3, 3; 2) = 6$

■

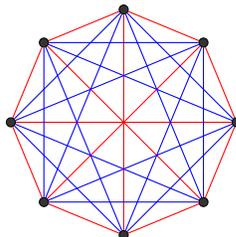
Ejemplo 2.4. $R(3, 4; 2) = 9$. Es decir, en cualquier 2-coloración de K_9 con colores rojo y azul, hay un K_3 rojo o un K_4 azul. No obstante, para $n < 9$ existen coloraciones de K_n que no contienen K_3 rojos ni K_4 azules.

Solución. Por el inciso b) del Teorema 2.12 tenemos que $R(2, 4; 2) = 4$, además por lo recién visto $R(3, 3; 2) = 6$, luego por el inciso e) del Teorema 2.12, se cumple que:

$$R(3, 4; 2) < R(2, 4; 2) + R(3, 3; 2) = 10.$$

Así que $R(3, 4; 2) \leq 9$.

Ahora obsérvese que en la siguiente 2-coloración de K_8 no hay K_3 rojos, ni K_4 azules.



De esto se sigue que $R(3, 4; 2) > 8$, y por lo tanto $R(3, 4; 2) = 9$.

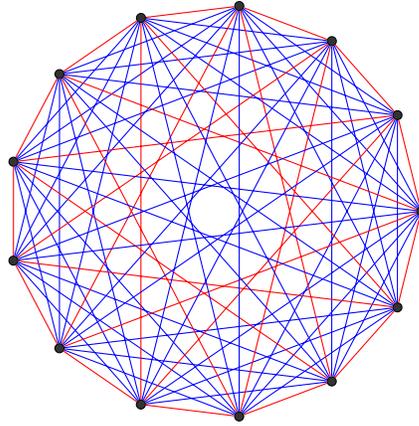
■

Ejemplo 2.5 (R. E. Greenwood, A. M. Gleason [10]). $R(3, 5; 2) = 14$. Esto es, en cualquier 2-coloración de K_{14} con los colores rojo y azul, hay un K_3 rojo o un K_5 azul. Pero existen 2-coloraciones de K_n , para $n < 14$, que no contienen ni K_3 rojos ni K_5 azules.

Solución. Tenemos que $R(2, 5; 2) = 5$ y por lo recién obtenido $R(3, 4; 2) = 9$, luego por el inciso d) del Teorema 2.12 tenemos que:

$$R(3, 5; 2) \leq R(2, 5; 2) + R(3, 4; 2) = 14.$$

Además de la siguiente 2-coloración³ de K_{13} se sigue que $R(3, 5; 2) > 13$. Pues como puede observarse esta no contiene K_3 rojos o K_5 azules.



Por tanto, $R(3, 5; 2) = 14$.

■

Ahora veremos algunos resultados que permiten hallar cotas superiores para los números de Ramsey. Para comenzar tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.13. Si $k \geq 2$ y $p_1, p_2, \dots, p_k \geq 3$, entonces:

$$R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2) \leq R(p_1 - 1, p_2, \dots, p_k; 2) + R(p_1, p_2 - 1, \dots, p_k; 2) + \dots + R(p_1, p_2, \dots, p_k - 1; 2) - k + 2.$$

Demostración. Para $1 \leq i \leq k$ definamos:

$$R_i = R(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i - 1, p_{i+1}, \dots, p_k; 2).$$

Sea $n = R_1 + R_2 + \dots + R_k - k + 2$, basta probar que en cualquier k -coloración de la gráfica completa K_n con las clases de coloración $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ y una subgráfica completa K_{p_i} monocromática de color i .

³En el Apéndice A se explica como se obtuvo esta coloración.

Sea $v \in V_{K_n}$ arbitrario, y consideremos el conjunto

$$V_i = \{w \in V_{K_n} | w \neq v \text{ y } vw \in C_i\}.$$

Ahora como:

$$\sum_{i=1}^k |V_i| = n - 1 = \sum_{i=1}^k R_i - k + 1.$$

Por el Principio del Palomar en su forma general, se sigue que para algún $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ se tiene $|V_i| \geq R_i$. Luego, la subgráfica generada por V_i contiene una subgráfica completa K_{p_j} monocromática de color j , para algún $j \neq i$, o contiene una subgráfica completa K_{p_i-1} de color i . Si ocurre el primer caso ya hemos terminado, y si ocurre el segundo, entonces los vértices de K_{p_i-1} y el vértice v generan una subgráfica completa K_{p_i} monocromática de color i .

□

Como una aplicación de este resultado veamos que $R(3, 3, 3; 2) \leq 17$.

Ejemplo 2.6. $R(3, 3, 3; 2) \leq 17$. Es decir, que en cualquier 3-coloración de K_{17} , digamos con los colores rojo, azul y verde, existe un K_3 ya sea rojo, azul o verde.

Solución. En efecto,

$$\begin{aligned} R(3, 3, 3; 2) &\leq R(2, 3, 3; 2) + R(3, 2, 3; 2) + R(3, 3, 2; 2) - 3 + 2 \\ &= 3R(2, 3, 3; 2) - 1. \end{aligned}$$

Luego por el inciso f) del Teorema 2.12 se sigue:

$$R(3, 3, 3; 2) \leq 3R(2, R(3, 3; 2); 2) - 1.$$

Del Ejemplo 2.3 $R(3, 3; 2) = 6$, por tanto:

$$R(3, 3, 3; 2) \leq 3R(2, 6; 2) - 1 = 3(6) - 1 = 17.$$

■

Antes de enunciar el siguiente teorema recordemos lo siguiente:

Definición 2.2. Sea $n = \sum_{i=1}^k m_i$, donde m_1, m_2, \dots, m_k son enteros no negativos. El *coeficiente multinomial* se define por:

$$\binom{n}{m_1 \ m_2 \ \dots \ m_k} = \frac{n!}{m_1! \ m_2! \ \dots \ m_k!}.$$

Ahora presentamos sin demostración la siguiente proposición, para el lector interesado una prueba de la misma puede hallarse en [16].

Proposición 2.2.

$$\binom{n}{m_1 \ m_2 \ \dots \ m_k} = \binom{n-1}{m_1-1 \ m_2 \ \dots \ m_k} + \binom{n-1}{m_1 \ m_2-1 \ \dots \ m_k} +$$

$$\dots + \binom{n-1}{m_1 \ m_2 \ \dots \ m_k - 1}.$$

El siguiente teorema nos proporciona una cota superior para todos los números de Ramsey de la forma $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2)$.

Teorema 2.14.

$$R(p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_k + 1; 2) \leq \binom{p_1 + p_2 + \dots + p_k}{p_1 \ p_2 \ \dots \ p_k}.$$

Demostración. Sea $k \geq 2$ arbitraria pero fija, y procedamos por inducción sobre $n = p_1 + p_2 + \dots + p_k$. Luego si $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1$ tenemos:

$$R(2, 2, \dots, 2; 2) = 2 \leq \binom{k}{1 \ 1 \ \dots \ 1} = k!.$$

Supongamos que el teorema se verifica para todo $n < N$ y veamos que también se cumple para $n = N$. En efecto, para cualesquier enteros positivos p_1, p_2, \dots, p_k tales que $\sum_{i=1}^k p_i = N$, por el Teorema 2.13 se tiene:

$$R(p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_k + 1; 2) \leq \sum_{i=1}^k R(p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_i, \dots, p_k + 1; 2).$$

Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos:

$$R(p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_k + 1; 2) \leq \sum_{i=1}^k \binom{N-1}{p_1 \ p_2 \ \dots \ p_i - 1 \ \dots \ p_k}.$$

Y por la Proposición 2.2 se concluye que:

$$R(p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_k + 1; 2) \leq \binom{N}{p_1 \ p_2 \ \dots \ p_k}.$$

□

Como último resultado de esta sección se presenta el siguiente teorema debido a Greenwood y Gleason, éste proporciona una cota superior para el orden de una gráfica completa con el cual se asegura la existencia de un triángulo monocromático.

Teorema 2.15 (R. E. Greenwood, A. M. Gleason [10]). Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$R(\underbrace{3, \dots, 3}_n; 2) \leq \lfloor en! \rfloor + 1.$$

Donde e es la base del logaritmo natural, y $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x , es decir, el mayor entero que es menor o igual a x .

Demostración. Por inducción sobre n . Si $n = 1$ trivialmente se tiene que $R(3; 2) = 3 = \lfloor e(1!) \rfloor + 1$. También si $n = 2$ por el Ejemplo 2.3 se tiene que

$$6 = R(3, 3; 2) \leq \lfloor e(2!) \rfloor + 1 = 5 + 1.$$

Ahora supongamos que el teorema se verifica para $n = k - 1$, es decir, que

$$R(\underbrace{3, \dots, 3}_{k-1}; 2) \leq \lfloor e(k-1)! \rfloor + 1.$$

Veamos que también se cumple para $n = k$. En efecto, por el Teorema 2.13 se sigue que:

$$\begin{aligned} R(\underbrace{3, \dots, 3}_k; 2) &\leq R(2, 3, \dots, 3; 2) + R(3, 2, \dots, 3; 2) + \dots \\ &\dots + R(3, 3, \dots, 2; 2) - k + 2; \\ &= kR(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k-1}; 2) - k + 2; \\ &\leq kR(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k-2}, R(3, 2; 2); 2) - k + 2; \quad (\text{Inciso f) del Teorema 2.12}). \\ &= kR(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k-1}; 2) - k + 2. \quad (\text{Pues } R(3, 2; 2) = 3). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción se sigue que:

$$\begin{aligned} R(\underbrace{3, \dots, 3}_k; 2) &\leq k(\lfloor e(k-1)! \rfloor + 1) - k + 2 \\ &= k\lfloor e(k-1)! \rfloor + 2. \end{aligned}$$

Si tuviéramos que $k(\lfloor e(k-1)! \rfloor) = \lfloor ek! \rfloor - 1$, la demostración habría concluido. Pues ya se tendría que:

$$\begin{aligned} R(\underbrace{3, \dots, 3}_k; 2) &\leq (\lfloor ek! \rfloor - 1) + 2 \\ &= \lfloor ek! \rfloor + 1. \end{aligned}$$

Veamos pues que esto en verdad ocurre. Para ello se probará que

$$\lfloor ek! \rfloor = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!}$$

y se verá que la igualdad deseada se sigue de ésta. Por simple inspección puede observarse que la igualdad anterior se cumple si $k = 1, 2$. Entonces para $k > 2$ se tiene:

$$\lfloor ek! \rfloor = \left\lfloor \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{n!} \right\rfloor = \left\lfloor \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{k!}{n!} \right\rfloor;$$

como $\sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!}$ es entero se sigue que:

$$\begin{aligned} [ek!] &= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} + \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{k!}{n!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} + \left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Dado que: $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} < \frac{1}{k^3}$, ..., entonces

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots \right] &\leq \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots \right] \\ &= \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{k}} - 1 \right] \\ &= \left[\frac{k}{k-1} - 1 \right] \\ &= 0. \quad (\text{Pues } k > 2). \end{aligned}$$

A partir de lo anterior ya se puede afirmar que para todo entero positivo k ,

$$[ek!] = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} k[e(k-1)!] &= k \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{k!}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} - \frac{k!}{k!} \\ &= [ek!] - 1. \end{aligned}$$

Y esto concluye la demostración.

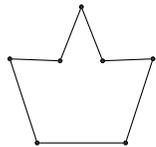
□

Capítulo 3

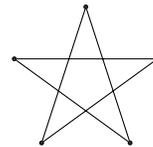
Teorema de Erdős-Szekeres

Para el presente capítulo serán necesarios los siguientes conceptos preliminares.

Definición 3.1. Un *polígono* es una figura geométrica cerrada que consiste en una sucesión de segmentos de línea l_1, l_2, \dots, l_n , llamados *lados*. Cada par de lados consecutivos, l_i y l_{i+1} , $i = 1, \dots, n - 1$, así como el último lado l_n con el primero l_1 , tienen un punto extremo en común, llamado *vértice*. Un polígono es llamado *simple* si ningún par de lados consecutivos se intersecan.



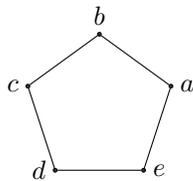
Polígono simple.



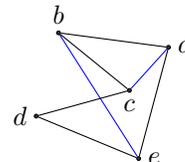
Polígono no simple.

Cada polígono simple divide al plano en dos regiones: su *interior*, que consiste de los puntos dentro de la curva, y su *exterior*, que consiste de los puntos fuera de la curva. Este hecho es un caso particular del famoso Teorema de la curva de Jordan. En lo sucesivo nos estaremos refiriendo frecuentemente al interior de un polígono simple P , por lo que lo denotaremos simplemente por $int(P)$.

Definición 3.2. Un polígono P es llamado *convexo* si cada segmento de línea que conecta dos puntos en $int(P)$ se halla completamente dentro del polígono. Una *diagonal* de un polígono simple es un segmento de línea que conecta dos vértices no consecutivos del polígono. Una diagonal es llamada *diagonal interior* si se encuentra completamente dentro del polígono, exceptuando los vértices.



a) Polígono convexo.



b) Polígono no convexo.

Figura 3.1: Ejemplo de polígono convexo y de polígono no convexo.

En el polígono b) de la figura anterior, el segmento de línea que conecta a con c es una diagonal interior, mientras que el segmento de línea que une b con e no lo es.

Definición 3.3. Una *triangulación* de un polígono simple consiste en la división del polígono en triángulos, mediante la adición de diagonales que no se intersecan.



Figura 3.2: Dos triangulaciones de un polígono simple.

Como puede verse en la figura anterior, en general los polígonos simples admiten más de una triangulación.

Definición 3.4. Dado un conjunto finito A de puntos en el plano, se define el *polígono que encierra a A* como el menor polígono convexo¹, P , que satisface que todo punto de A está en P o está en $int(P)$.

Definición 3.5. Sea A un conjunto finito de puntos en el plano y P el polígono que encierra a A , el cierre convexo de A se define y se denota como: $conv(A) = P \cup int(P)$.

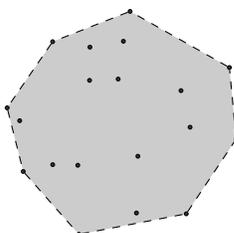


Figura 3.3: Cierre convexo de un conjunto de puntos en el plano. El polígono que encierra los puntos se halla en líneas punteadas.

Por último definimos lo que entenderemos por posición general en el plano.

Definición 3.6. Un conjunto A de puntos en el plano se halla en *posición general*, si cualesquiera tres puntos de A no se encuentran sobre una misma línea recta.

3.1. Teorema de Erdős-Szekeres

El siguiente problema fue propuesto por Esther Klein en 1933:

Problema 3.1. Probar que en cualquier configuración de 5 puntos en el plano en posición general, siempre pueden hallarse 4 que constituyen los vértices de un cuadrilátero convexo.

¹El menor en el orden dado por la contención de conjuntos.

E. Klein resolvió este problema analizando las posibles configuraciones de los 5 puntos. Si el cierre convexo de los puntos es un pentágono o un cuadrilátero, el resultado es evidente. Ya que en el primer caso cualquier colección de 4 puntos determinan un cuadrilátero convexo, y en el segundo el cuadrilátero convexo está determinado por los puntos que forman el cierre convexo.

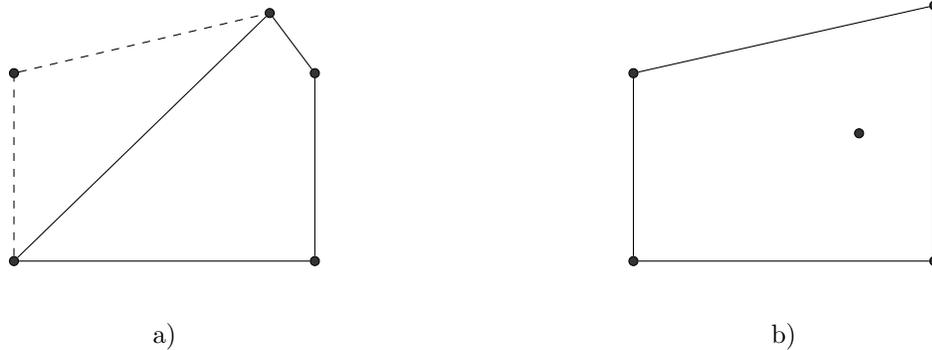


Figura 3.4: En a) cualquier subconjunto de 4 puntos determinan un 4-ágono convexo. En b) el cuadrilátero convexo está dado por el polígono del cierre convexo.

Por último cuando el polígono del cierre convexo es un triángulo, los dos puntos interiores, junto con los dos puntos que quedan del mismo lado de la recta que los une, forman el cuadrilátero convexo.

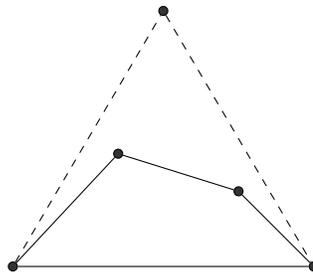


Figura 3.5: Cuadrilátero convexo cuando el cierre convexo está determinado por tres puntos.

En [7], Erdős y Szekeres mencionan que después de dar solución a este problema, E. Klein sugiere la siguiente generalización:

Problema 3.2. ¿Es posible encontrar para cada entero $n \geq 3$, un mínimo entero $ES(n)$, tal que cualquier configuración de $ES(n)$ puntos en el plano en posición general, contenga n que formen un polígono convexo?

P. Erdős y G. Szekeres dieron respuesta positiva a este problema, y su solución constituye uno de los acontecimientos más importantes dentro de la matemática discreta, ya que su artículo [7] impulsó el desarrollo de la Teoría de Ramsey, la cual brinda solución a múltiples problemas de existencia. En la presente sección se exponen diversas soluciones al problema de Erdős-Szekeres (que es como se conoce al Problema 3.2). Las primeras soluciones dependen del Teorema de Ramsey y nos permiten acotar el valor

de $ES(n)$ mediante ciertos números de Ramsey. La otra solución es más geométrica y brinda cotas más justas para $ES(n)$.

Antes de pasar a las demostraciones enunciemos de manera más formal el Teorema de Erdős-Szekeres, para lo cual requeriremos de la siguiente definición.

Definición 3.7. Sea X un subconjunto de puntos en el plano en posición general, diremos que $x_1, \dots, x_n \in X$ se hallan en *posición convexa*, si x_1, \dots, x_n constituyen los vértices de un polígono convexo.

Teorema 3.1 (Erdős-Szekeres). Para cada entero $n \geq 3$ existe un mínimo entero $ES(n)$, tal que en cualquier configuración en el plano de $ES(n)$ puntos en posición general, n de ellos se hallan en posición convexa.

A manera de ejemplo podemos observar que cualesquiera tres puntos en el plano en posición general determinan los vértices de un triángulo, luego $ES(3) = 3$. También de la solución al Problema 3.1 se tiene que $ES(4) = 5$.



Figura 3.6: En a) tres puntos en posición general se hallan en posición convexa. En b) cinco puntos en posición general siempre contienen cuatro que forman un cuadrilátero convexo.

3.1.1. Demostraciones usando el Teorema de Ramsey

La primer prueba del Teorema de Erdős-Szekeres que hace uso del Teorema de Ramsey es la que aparece en [7] y es debida según el propio P. Erdős a G. Szekeres. Esta prueba se basa en el problema resuelto por E. Klein y en el siguiente lema:

Lema 3.1. Dados $k \geq 4$ puntos en el plano, en posición general, si cualesquier 4 de ellos son vértices de un cuadrilátero convexo, entonces los k puntos son los vértices de un k -gono convexo.

Demostración. Sea l el número de lados del polígono que encierra los k puntos, si $k = l$, habríamos terminado. Supongamos entonces que $l < k$ y sean v_1, v_2, \dots, v_l sus vértices. A partir del vértice v_1 tracemos rectas hacia los vértices v_2, v_3, \dots, v_l . Como $l < k$, hay un punto en el interior del l -gono convexo, además como los puntos están en posición general, este punto debe ser interior a alguno de los triángulos: $\triangle v_1 v_2 v_3, \triangle v_1 v_3 v_4, \dots, \triangle v_1 v_{l-1} v_l$. Pero entonces, el punto interior y los 3 vértices del triángulo no forman un cuadrilátero convexo, lo cual es una contradicción.

□

Para probar la existencia de $ES(n)$ es suficiente con mostrar que este valor es finito.

Demostración (Erdős-Szekeres [7]). Consideremos un conjunto de $R(5, n; 4)$ puntos en el plano en posición general. Coloreemos los cuadriláteros con vértices en este conjunto de la siguiente manera:

Si el cuadrilátero no es convexo se colorea de azul, en otro caso de rojo.

Por el Teorema de Ramsey se sigue que existen 5 puntos con todos sus cuadriláteros azules, es decir, con todos sus cuadriláteros no convexos, o existen n puntos tal que todos sus cuadriláteros son rojos. Como Esther Klein mostró que el primer caso no se puede dar, entonces lo que se tiene es un subconjunto de n puntos con todos sus 4-subconjuntos rojos, es decir, con todos sus cuadriláteros convexos. Luego por el Lema 3.1, se tiene que los n puntos forman un polígono convexo. □

De esta demostración se sigue que $ES(n) \leq R(5, n; 4)$. Veamos ahora otra demostración del Teorema de Erdős-Szekeres de la que se deduce $ES(n) \leq R(n, n; 3)$, esta demostración es debida a A. Tarsy, pero fue publicada por M. Lewin en [12].

Demostración (A. Tarsy [12]). Considérese un conjunto de $R(n, n; 3)$ puntos en el plano en posición general, además supongamos que no hay dos puntos con la misma abscisa.²Ahora denotemos los puntos mediante $P_1, \dots, P_{R(n, n; 3)}$ de acuerdo al incremento de la coordenada x , esto es desde el punto más a la izquierda hasta el que se encuentre más a la derecha.

Una vez hecho lo anterior, coloreemos todos los triángulos de este conjunto como sigue:

Si el $\triangle P_i P_j P_k$, $i < j < k$, es tal que P_j se encuentra por arriba del segmento $\overline{P_i P_k}$, el triángulo será rojo, en otro caso será azul. Equivalentemente, el triángulo $\triangle P_i P_j P_k$, $i < j < k$ será rojo, si cuando se recorren los vértices de P_i hacia P_k el recorrido se hace en el sentido de las manecillas del reloj. En otro caso será azul.



Figura 3.7: Posibles coloraciones del triángulo $\triangle P_i P_j P_k$

El Teorema de Ramsey nos asegura la existencia de un subconjunto S de n puntos, tal que todos sus triángulos son del mismo color. Afirmamos que este conjunto de puntos constituye los vértices de un polígono convexo. En efecto, de no ser este el caso se tiene que al menos un punto $P_r \in S$ está en el interior de $\text{conv}(S)$. Luego si triangulamos $\text{conv}(S)$ podemos hallar un triángulo $\triangle P_i P_j P_k \subset S$, con $i < j < k$, tal que P_r está en el interior de $\triangle P_i P_j P_k$.

²Si no fuera este el caso, basta con una rotación del plano para que se cumpla.

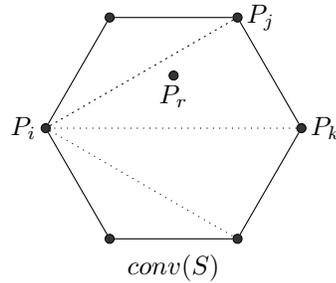


Figura 3.8: Ejemplo de triangulación de $\text{conv}(S)$ con un P_r en su interior.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que: $i < r < j$. Entonces el triángulo $\triangle P_i P_r P_j$ se colorea diferente al triángulo $\triangle P_i P_r P_k$.



Figura 3.9: Dos triángulos en $\text{conv}(S)$ con coloraciones distintas.

Lo anterior contradice que todos los triángulos de S son monocromáticos. Por lo tanto los puntos de S son los vértices de un n -ágono convexo. □

La última demostración del Teorema de Erdős-Szekeres que hace uso del Teorema de Ramsey es debida a Scott Johnson y su argumento es el siguiente:

Demostración (Johnson [11]). Sea S un conjunto de $R(n, n; 3)$ puntos en el plano en posición general. Para cualquier 3-subconjunto $\{a, b, c\}$ de S , sea $|abc|_S$ el número de puntos de S que están en el interior del triángulo $\triangle abc$. Defínanse los siguientes conjuntos:

$$A_i = \{\{a, b, c\} \subset S : |abc|_S \text{ es impar}\} \text{ y } A_p = \{\{a, b, c\} \subset S : |abc|_S \text{ es par}\}.$$

Por el Teorema de Ramsey, existe un n -subconjunto B de S , tal que $P_3(B) \subset A_i$ o $P_3(B) \subset A_p$, donde como antes $P_3(B)$ es la colección de los 3-subconjuntos de B . Veamos que los puntos de B son los vértices de un polígono convexo.

Supongamos que los puntos de B no son los vértices de un polígono convexo. Entonces existen 4 puntos distintos en B , digamos a, b, c, d , tales que d es interior al triángulo $\triangle abc$. Si consideramos a $\triangle abc$ como el conjunto formado por el triángulo y su interior, se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\triangle abc = (\triangle abd) \cup (\triangle acd) \cup (\triangle bcd),$$

además como S se halla en posición general, se satisface que:

$$(\triangle abd) \cap (\triangle acd) \cap (\triangle bcd) = \{d\}.$$

Como puede verse en la siguiente figura.

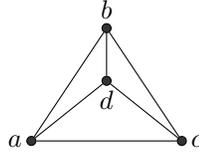


Figura 3.10: El triángulo $\triangle abc$ con un punto d en su interior.

De lo anterior se sigue que:

$$|abc|_S = |abd|_S + |acd|_S + |bcd|_S + 1.$$

De la igualdad anterior se sigue que $|abc|_S, |abd|_S, |acd|_S, |bcd|_S$ no pueden ser todos pares o todos impares, lo que contradice que $P_3(B) \subset A_i$ o $P_3(B) \subset A_p$. Esta contradicción nos muestra que los puntos de B determinan un polígono convexo.

□

A partir de las demostraciones anteriores se sigue que:

$$ES(n) \leq \min\{R(5, n; 4), R(n, n; 3)\}.$$

Las siguientes secciones las dedicaremos a analizar métodos que permiten hallar cotas más justas para $ES(n)$.

3.1.2. Copas y Copas

Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general, tal que no hay dos con la misma coordenada x . Nombremos los puntos en S como P_1, P_2, \dots, P_n de acuerdo al crecimiento de su coordenada x , de este modo P_1 es el punto más a la izquierda y P_n el punto más a la derecha. Ahora sea $T = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_l\}$ un subconjunto de S , también ordenado de acuerdo al crecimiento de sus abscisas. Para $i = 1, 2, \dots, l-1$ sea m_i la pendiente del segmento $\overline{Q_i Q_{i+1}}$.

Definición 3.8. Sea T como en el párrafo anterior, T será llamada una l -copa o una l -capa si la secuencia: m_1, m_2, \dots, m_{l-1} es creciente o decreciente respectivamente. El punto Q_1 será el extremo izquierdo de T , y el punto Q_l el extremo derecho.

Ejemplo 3.1. A continuación se muestran ejemplos de una 4-copa y una 5-capa:



Figura 3.11: Una 4-capa y una 5-capa.

■

La siguiente observación será clave para la obtención de cotas superiores para $ES(n)$.

Observación 3.1. Si un punto p es extremo derecho de una capa y al mismo tiempo es extremo izquierdo de una copa, entonces la capa o la copa puede ser extendida a una capa o copa más larga, respectivamente.

Demostración. Denotemos con u al segundo punto de la capa, contando desde la derecha, y sea v el segundo punto de la copa, contando desde la izquierda. Ahora, si el ángulo $\angle upv$ es menor que 180° la capa puede extenderse hasta v , por otro lado si el ángulo $\angle upv$ es mayor que 180° la copa puede extenderse hasta u , como se muestra en la Figura 3.11.



Figura 3.12: En a) la capa se extiende hasta v y en b) la copa se extiende hasta u .

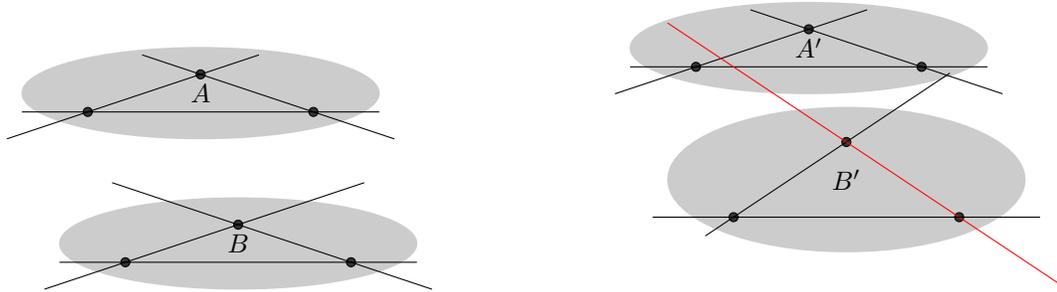
□

Otra definición que nos será de mucha utilidad en algunos resultados subsecuentes es la siguiente:

Definición 3.9. Sean A y B dos conjuntos finitos de puntos en el plano. Diremos que B está en el fondo de A si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) Ninguna línea determinada por puntos de $A \cup B$ es vertical.
- ii) Cada línea determinada por puntos de A pasa por encima de los puntos de B .
- iii) Cada línea determinada por puntos de B pasa debajo de los puntos de A .

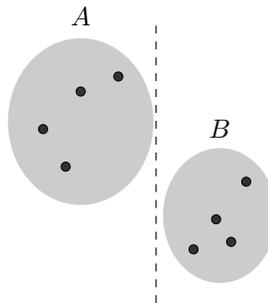
Ejemplo 3.2. En la siguiente figura el conjunto B se encuentra en el fondo del conjunto A . Pero el conjunto B' no se halla en el fondo del conjunto A' .



■

Definición 3.10. Sean A y B dos conjuntos finitos de puntos en el plano. Se dirá que B está a la derecha de A , si la abscisa de cada punto en B es mayor a la abscisa de todos los puntos en A .

Ejemplo 3.3. En la siguiente figura el conjunto B se halla a la derecha del conjunto A .



■

Se denota por $f(k, l)$ a la menor cantidad de puntos en el plano, en posición general, con la cual se asegura la presencia de una k -copa o una l -capa. En [7] P. Erdős y G. Szekeres logran obtener el valor exacto de $f(k, l)$.

Teorema 3.2. Para $k, l \geq 3$, se cumple que:

$$f(k, l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

Demostración. El teorema es consecuencia de los siguientes hechos acerca de $f(k, l)$:

- *i)* $f(3, l) = l$ y $f(k, 3) = k$.
- *ii)* $f(k, l) = f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$.

El inciso *i)* se sigue de la definición de $f(k, l)$.

Para probar *ii)* primero veremos que $f(k, l) \leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$, para ésto considérese un conjunto X de $f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$ puntos en el plano en posición general. Veamos que en este conjunto siempre podemos hallar una k -copa o una l -capa.

En efecto, considérese el conjunto Y definido como sigue:

$$Y = \{p \in X \mid p \text{ es extremo izquierdo de una } (k-1)\text{-copa}\}.$$

Obsérvese que $X \setminus Y$ no tiene $(k-1)$ -copas, luego si $X \setminus Y$ tiene $f(k-1, l)$ elementos, debe contener una l -capa y el inciso *ii*) queda probado. Si ocurre que $|X \setminus Y| < f(k-1, l)$, entonces $|Y| \geq f(k, l-1)$, y Y contiene una k -copa o una $(l-1)$ -capa. De ocurrir el primer caso, habríamos terminado, supongamos que se tiene una $(l-1)$ -capa, digamos $\{P_1, P_2, \dots, P_{l-1}\}$. Por la manera en que se definió al conjunto Y , existe una $(k-1)$ -copa $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}\}$ tal que $P_{l-1} = Q_1$. Por la observación 3.1 se sigue que se puede extender la $(k-1)$ -copa a una k -copa añadiendo como extremo izquierdo a P_{l-2} , o podemos extender la $(l-1)$ -capa a una l -capa añadiendo como extremo derecho a Q_2 . Así se tiene que $f(k, l) \leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$.

Veamos ahora que $f(k, l) \geq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$. Sea $F(k, l) = f(k, l) - 1$, y $X(k, l)$ un conjunto con $F(k, l)$ puntos en posición general, en el cual no existen k -copas o l -capas. Nótese que la desigualdad $f(k, l) \geq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$ es equivalente a $F(k, l) \geq F(k-1, l) + F(k, l-1)$. La última desigualdad quedaría establecida si se muestra un conjunto de $F(k-1, l) + F(k, l-1)$ puntos en posición general en el cual no haya k -copas o l -capas.

Sean $U = X(k, l-1)$ y $V = X(k-1, l)$. Colocar el conjunto V de modo que se encuentre en el fondo y a la derecha de U . Hágase $X(k, l) = U \cup V$.

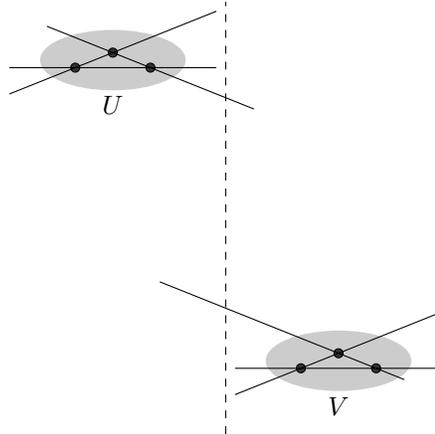


Figura 3.13: El conjunto V se encuentra en el fondo y a la derecha de U .

Como V está en el fondo y a la derecha de U , cualquier k -copa en $X(k, l)$ se encuentra completamente contenida en U o tiene su extremo izquierdo en U y el resto en V . De esto se sigue que no hay k -copas en $X(k, l)$. De manera análoga, cualquier l -capa se encuentra contenida en V o tiene su extremo derecho en V y el resto de los puntos en U . De esto se sigue que $X(k, l)$ tampoco contiene l -capas. Por lo tanto $F(k, l) \geq F(k-1, l) + F(k, l-1)$ o equivalentemente $f(k, l) \geq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$. De lo anterior se concluye que

$$f(k, l) = f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1.$$

Veamos ahora que $f(k, l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

La prueba es por inducción sobre k y l .

Si $k = 3$:

$$f(3, l) = \binom{3+l-4}{3-2} + 1 = \binom{l-1}{1} + 1 = l,$$

lo cual es verdadero por el inciso i).

Del mismo modo el inciso i) garantiza la veracidad del teorema cuando $l = 3$:

$$f(k, 3) = \binom{k+3-4}{k-2} + 1 = \binom{k-1}{k-2} + 1 = k.$$

Supongamos que el teorema se satisface para $f(k-1, l)$ y para $f(k, l-1)$, veamos que esto implica que se cumple para $f(k, l)$.

En efecto, por el inciso ii) se tiene que:

$$f(k, l) = f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1,$$

y por la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} f(k, l) &= \left(\binom{k-1+l-4}{k-1-2} + 1 \right) + \left(\binom{k+l-1-4}{k-2} + 1 \right) - 1. \\ f(k, l) &= \binom{k+l-5}{k-3} + \binom{k+l-5}{k-2} + 1 = \binom{k+l-4}{k-2} + 1. \end{aligned}$$

□

Como una consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.1. Si $n \geq 3$, entonces $ES(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$.

Demostración. En efecto, esto se sigue de que los puntos que forman una k -copa o una l -capa, son vértices de un polígono convexo. Luego, si tomamos un conjunto con $f(n, n)$ puntos en posición general entonces aseguramos la existencia de una n -copa o una n -capa, y por ende de un n -ágono convexo. Esto implica que $ES(n) \leq f(n, n) = \binom{2n-4}{n-2} + 1$.

□

3.2. Números de Erdős-Szekeres

Para cada $n \geq 3$, el valor $ES(n)$ será llamado el número de Erdős-Szekeres correspondiente a n . Las pruebas que al momento se han hallado del Teorema de Erdős-Szekeres no permiten determinar los valores precisos de $ES(n)$ para cualquier n . En el momento en que P. Erdős y G. Szekeres escribieron su artículo, se conocían los siguientes valores:

- $ES(3) = 3$. (Trivial)
- $ES(4) = 5$. (E. Klein)
- $ES(5) = 9$. (E. Makai)

Resulta interesante notar que:

- $ES(3) = 3 = 2^{3-2} + 1.$
- $ES(4) = 5 = 2^{4-2} + 1.$
- $ES(5) = 9 = 2^{5-2} + 1.$

A partir de esta observación Erdős y Szekeres propusieron la siguiente conjetura:

Conjetura 3.1 (Erdős-Szekeres). Para cada $n \geq 3$ se cumple que

$$ES(n) = 2^{n-2} + 1.$$

Aunque no se han obtenido resultados que nos hagan pensar que esta conjetura esté a punto de sucumbir, en [19] prueban que $ES(6) = 2^{6-2} + 1 = 17$, aportando más evidencia a la posible veracidad de la misma.

Cómo determinar los valores exactos de $ES(n)$ ha resultado ser una tarea sumamente difícil, en su lugar los matemáticos se han centrado en buscar cotas para dichos valores.

3.2.1. Cota inferior

Como ya mencionamos, Erdős y Szekeres conjeturaron que $ES(n) = 2^{n-2} + 1$. Aunque la conjetura permanece abierta, en [8] lograron un avance al probar que $ES(n) \geq 2^{n-2} + 1$.

Teorema 3.3 (Erdős-Szekeres, [8]). Para cada $n \geq 3$ se cumple que: $ES(n) > 2^{n-2}$.

Demostración. Para demostrar esta afirmación lo que Erdős y Szekeres hicieron fue evidenciar la existencia de una configuración de 2^{n-2} puntos en posición general en la cual no puede hallarse un n -ángono convexo. Una configuración con esta propiedad puede obtenerse de la siguiente manera: para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ sea A_i un conjunto de $\binom{n-2}{i}$ puntos sin $(n-i)$ -copas y sin $(i+2)$ -capas.³ También podemos asumir que no hay líneas verticales determinadas por puntos en A_i ⁴, es más, podemos suponer que las líneas determinadas por puntos de A_i son casi horizontales, es decir, que para un valor de ϵ suficientemente pequeño, los ángulos de estas rectas con el eje X se hallan en el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$.⁵

Coloquemos cada conjunto A_i en una vecindad de la línea horizontal: $l_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -i\}$, de tal modo que se encuentren a la derecha de los conjuntos que ya hallan sido colocados: A_0, A_1, \dots, A_{i-1} . Comprimiendo suficientemente cada A_i en sentido vertical, podemos garantizar que A_i está en el fondo de A_j para $j < i$. Sea $X = \bigcup_{i=0}^{n-2} A_i$, entonces

$$|X| = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}.$$

Veamos que en X no hay n puntos que determinen un n -ángono convexo. Supongamos que $Y \subset X$ se encuentra en posición convexa. Sean p y q el menor y mayor valor de i que verifica $A_i \cap Y \neq \emptyset$, respectivamente. Si $p = q$, entonces Y no contiene $(p+2)$ -capas ni $(n-p)$ -copas, de aquí que $|Y| < n$. En general, por la manera en que fue construido X , se tiene que:

- $Y \cap A_p$ es una capa de a lo más $p+1$ puntos.

³Estos conjuntos existen, basta con hacer $A_i = X(n-i, i+2)$ como en la demostración del Teorema 3.2.

⁴Si no es el caso, basta con rotar los puntos un ángulo apropiado.

⁵Para obtener esto basta con encoger el conjunto A_i en dirección vertical.

- $Y \cap A_q$ es una copa de a lo más $n - q - 1$ puntos.
- $|Y \cap A_i| \leq 1$ para $p < i < q$.

Por tanto,

$$|Y| \leq (p + 1) + (n - q - 1) + q - p - 1 = n - 1,$$

y de esta manera X no contiene n puntos que determinen un n -ágono convexo.

□

3.2.2. Cotas Superiores

Un problema importante es determinar la cantidad mínima de puntos necesarios para asegurar la presencia de un n -ágono convexo. Como ya se vio en la sección anterior, P. Erdős y G. Szekeres probaron que 2^{n-2} puntos no son suficientes para garantizar la aparición de n -ágonos convexos. Este resultado junto con el Corolario 3.1 nos proporcionan las siguientes cotas para el valor de $ES(n)$:

$$2^{n-2} + 1 \leq ES(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Como ya se mencionó, Erdős y Szekeres, conjeturaron que la cota inferior es justa. Respecto a la cota superior, ésta se mantuvo sin mejoras por casi 60 años, hasta que en [4] Chung y Graham obtuvieron la siguiente:

Teorema 3.4 (Chung-Graham [4]).

$$ES(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}.$$

Demostración. Sea X un conjunto de $\binom{2n-4}{n-2}$ puntos en posición general, sin dos con la misma coordenada y . Defínase el conjunto R como:

$$R = \{p \in X \mid p \text{ es extremo derecho de una } (n-1)\text{-copa}\}.$$

Observemos que $\binom{2n-4}{n-2} - \binom{2n-5}{n-3} = \binom{2n-5}{n-2}$. Ahora, al igual que en la prueba del Teorema 3.2, podemos suponer que $|R| \geq \binom{2n-5}{n-3}$. Si $R > \binom{2n-5}{n-3}$, entonces R contiene una n -copa o una $(n-1)$ -copa. En el primer caso ya no queda nada por probar, en el segundo contamos con una $(n-1)$ -copa cuyo extremo izquierdo es también un extremo derecho de alguna $(n-1)$ -copa, y se prosigue como en la prueba del teorema 3.2. Así, se puede asumir que $|R| = \binom{2n-5}{n-3}$. Sea $B = X \setminus R$, es claro que $|B| = \binom{2n-5}{n-3}$. Para $b \in B$, el conjunto $R \cup \{b\}$ es de tamaño $\binom{2n-5}{n-3} + 1$, luego contiene una n -copa o una $(n-1)$ -copa. En caso de tener una n -copa de nuevo habríamos terminado. Luego supongamos que para cualquier elección de $b \in B$ lo que se tiene es una $(n-1)$ -copa. Si el extremo izquierdo de alguna $(n-1)$ -copa es elemento de R , por la observación 3.1 habríamos terminado, pues tendríamos una $(n-1)$ -copa cuyo extremo izquierdo es también extremo derecho de una $(n-1)$ -copa, por tanto alguna de ellas puede ser extendida y obtenerse una n -copa o una n -copa. Para agotar todas las posibilidades debemos asumir que para cualquier $(n-1)$ -copa en $R \cup \{b\}$ su extremo izquierdo es b . Es decir, todo $b \in B$ es extremo izquierdo de una $(n-1)$ -copa cuyo extremo derecho se halla en R . Un razonamiento análogo, nos muestra que cualquier $r \in R$ es extremo derecho de una $(n-1)$ -copa cuyo extremo izquierdo se encuentra en B . Sea S el conjunto de todos los segmentos rb , donde $r \in R$ y $b \in B$, y existe una $(n-1)$ -copa o una $(n-1)$ -copa cuyo extremo derecho es r y

cuyo extremo izquierdo es b . Sea rb el elemento de S que tiene la mayor pendiente. Supongamos que r, b son extremos de una $(n-1)$ -copa, el tratamiento del otro caso es análogo. Ya sabemos que existe una $(n-1)$ -copa cuyo extremo derecho es r y cuyo extremo izquierdo es b' . Ahora es fácil ver que la $(n-1)$ -copa y b' , o la $(n-1)$ -copa y b determinan un n -ágono convexo.

□

Como podemos ver la mejora es bastante modesta, pero este resultado permitió que otros matemáticos obtuvieran mejores resultados, siendo G. Tóth y P. Valtr, los que más éxito han tenido, aunque sus resultados todavía se encuentran lejos del valor conjeturado.

Por último, para concluir esta sección presentamos una prueba debida a G. Toth y P. Valtr de que $ES(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$. Para esto recordemos algunos conceptos referentes a gráficas dirigidas.

Definición 3.11. Una *gráfica dirigida* $D = (V_D, E_D)$ consiste de un conjunto de vértices V_D y un conjunto de aristas (dirigidas) $E_D \subset V_D \times V_D$ (sin lazos \overrightarrow{vv}).

Definición 3.12. Un torneo T_n es *transitivo* si no contiene ciclos dirigidos, esto es, para cada $3 \leq m \leq n$ no existen $v_1, v_2, \dots, v_m \in V_D$ con $\overrightarrow{v_1v_2}, \overrightarrow{v_2v_3}, \dots, \overrightarrow{v_{m-1}v_m}, \overrightarrow{v_mv_1} \in E_D$.

Ejemplo 3.4. En la siguiente figura se muestra un torneo T_5 transitivo y uno no transitivo.



Figura 3.14: El torneo que aparece en a) es transitivo, pero el de b) no lo es.

■

La siguiente definición es acerca del comportamiento de las funciones de peso sobre gráficas dirigidas.

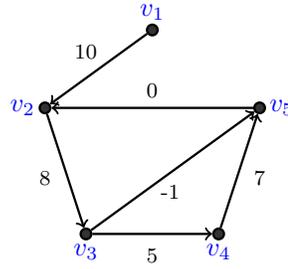
Definición 3.13. Sea D una gráfica dirigida y $w : E_D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de peso. Un camino dirigido $v_1v_2 \dots v_n$ en D será *w-decreciente* si:

$$w(\overrightarrow{v_1v_2}) > w(\overrightarrow{v_2v_3}) > \dots > w(\overrightarrow{v_{n-1}v_n}).$$

Similarmente, será llamado *no w-decreciente* si:

$$w(\overrightarrow{v_1v_2}) \leq w(\overrightarrow{v_2v_3}) \leq \dots \leq w(\overrightarrow{v_{n-1}v_n}).$$

Ejemplo 3.5. Como puede observarse en la siguiente digráfica pesada, el camino: $v_1v_2v_3v_4$ es *w-decreciente*, mientras que el camino: $v_3v_5v_2$ es *no w-decreciente*.



■

La prueba de la cota se basa en un resultado de V. Chvátal y J. Komlós, el cual se enuncia a continuación sin demostración, la cual puede hallarse en la referencia.

Lema 3.2 (V. Chvátal, J. Komlós:[5]). Sea G un torneo transitivo con más de $\binom{p+q-4}{p-2}$ vértices, y sea $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces G contiene un camino dirigido simple w -decreciente con p vértices o un camino dirigido simple no w -decreciente con q vértices.

Teorema 3.5 (G. Tóth, P. Valtr: [20]). Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, entonces se cumple que

$$ES(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2.$$

Demostración. Sea P un conjunto de $N = \binom{2n-5}{n-2} + 2$ puntos en posición general, y como antes, consideraremos que no hay dos puntos con la misma coordenada y . Sea p el punto más a la izquierda en P . Denotemos los puntos en $P \setminus \{p\}$ por p_1, p_2, \dots, p_{N-1} , ordenados de manera decreciente respecto a la pendiente que forman con p .

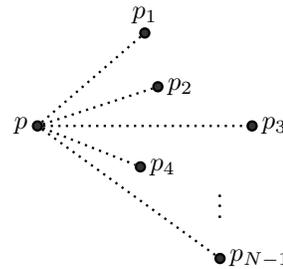


Figura 3.15: Conjunto de puntos etiquetados de manera decreciente respecto a la pendiente formada con p .

Defínase un torneo transitivo sobre p_1, p_2, \dots, p_{N-1} de tal modo que cada arista esté dirigida hacia el vértice de mayor índice. Para cualquier $i < j$, sea w la función de peso que asigna a cada arista $\overrightarrow{p_i p_j}$ el ángulo que forma dicha arista con el eje y , medido en el sentido de las manecillas del reloj.



Figura 3.16: En a) se muestra como se construyen las aristas del torneo, y en b) como se asigna el peso a una arista.

Por la manera en que están dirigidas las aristas es claro que no puede haber ciclos dirigidos, luego por el Lema 3.2, existe un camino dirigido simple $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n}$ w -decreciente o un camino dirigido simple $p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_{n-1}}$ no w -decreciente. En el primer caso el n -ágono convexo está determinado por: $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n}$, en el segundo por: $p, p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_{n-1}}$.



a) Un camino dirigido simple w -decreciente.

b) Un camino dirigido simple no w -decreciente.

□

Capítulo 4

El Teorema de Erdős-Szekeres en \mathbb{R}^d

En su artículo de 1935 P. Erdős y G. Szekeres afirmaron que la demostración de su teorema podía ser generalizada para probar un resultado análogo en \mathbb{R}^d . El objetivo de este capítulo es presentar este resultado y ver cómo su demostración se sigue de manera directa del Teorema de Ramsey, mostrándonos una vez más el poder de este Teorema para obtener resultados de existencia. Para poder presentar la demostración serán necesarios algunos conceptos del análisis convexo.

4.1. Conceptos básicos de análisis convexo.

Recordemos que al enunciar el Teorema de Erdős-Szekeres en el plano, restringimos nuestra atención a conjuntos de puntos que se hallarán en posición general, esto es, conjuntos de puntos en los que cualesquier 3 de ellos no eran colineales. El concepto de posición general puede ser generalizado para tratar con conjuntos de puntos en más de dos dimensiones. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 un conjunto X de puntos se halla en posición general si cualesquier tres puntos de X no son colineales y además cualesquier cuatro puntos no son coplanarios.

Para establecer el concepto de posición general para conjuntos en \mathbb{R}^d , seguiremos el tratamiento dado en [22] por R. T. Rockafellar y en [15] por James R. Munkres. Comenzamos por la siguiente:

Definición 4.1. Un conjunto $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ de puntos en \mathbb{R}^d es *geométricamente independiente*, o *afinmente independiente*, si las ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^k a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^k a_i = 0,$$

tienen únicamente solución trivial, i.e., $a_i = 0$.

Para dar una interpretación a lo que se quiere decir con *geométricamente independiente*, observemos que al resolver la segunda ecuación para a_0 obtenemos:

$$a_0 = - \sum_{i=1}^k a_i.$$

Luego al sustituir este valor en la primer ecuación se tiene:

$$\mathbf{0} = \sum_{i=0}^k a_i \mathbf{x}_i = a_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{x}_i = \left(-\sum_{i=1}^k a_i\right) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^k a_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0).$$

De donde se sigue que la definición de independencia geométrica es equivalente a decir que la ecuación:

$$\sum_{i=1}^k a_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

se satisface solo cuando $a_i = 0$. Esta última afirmación coincide con la de independencia lineal para el conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\}$ del espacio vectorial \mathbb{R}^d . De esto se sigue que: dos puntos distintos forman un conjunto geoméricamente independiente; tres puntos distintos son geoméricamente independientes si no son colineales; cuatro puntos en \mathbb{R}^3 son geoméricamente independientes si no son coplanarios.

Definición 4.2. Si $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k\}$ es un conjunto de puntos geoméricamente independiente de \mathbb{R}^d , entonces el k -plano, P , determinado por estos puntos se define como el conjunto de puntos \mathbf{x} en \mathbb{R}^d que satisfacen:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k t_i \mathbf{x}_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^k t_i = 1.$$

De la segunda ecuación de la definición anterior se tiene que:

$$t_0 = 1 - \sum_{i=1}^k t_i.$$

Sustituyendo este valor en la primer ecuación,

$$\mathbf{x} = t_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i = \left(1 - \sum_{i=1}^k t_i\right) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i.$$

De esta última cadena de igualdades se deduce que los puntos de P pueden escribirse como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k a_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0), \tag{4.1}$$

para ciertos números a_1, a_2, \dots, a_k . Como los vectores $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ son linealmente independientes, son base de algún subespacio V^k de \mathbb{R}^d , así la ecuación (4.1) nos permite describir a P como el plano que pasa por el punto x_0 y que es paralelo a los vectores del espacio vectorial V^k . Esta es la razón por la que P recibe el nombre de k -plano.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar la definición de puntos en posición general en \mathbb{R}^d :

Definición 4.3 ([15]). Un conjunto X de puntos en \mathbb{R}^d se dice que se halla en *posición general*, en \mathbb{R}^d , si todo subconjunto de X que contiene a lo más $d + 1$ puntos es geoméricamente independiente.

Claramente la definición anterior es equivalente a decir que un conjunto X se halla en posición general, si para todo $k \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ no hay $k+2$ puntos en un mismo k -plano. Es fácil ver que esta definición es consistente con la definición de posición general para puntos en el plano que ya habíamos mencionado.

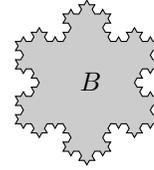
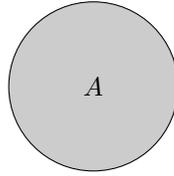
Una vez que se ha establecido el concepto de puntos en posición general en \mathbb{R}^d lo que sigue es definir de manera precisa qué es lo que se entiende por conjuntos convexos en \mathbb{R}^d . Para cumplir con este objetivo nos apegaremos a la definición dada en [22], para lo cual comenzaremos por presentar algunos términos preliminares:

Definición 4.4. Un subconjunto C de \mathbb{R}^d se dice que es un *conjunto convexo* si siempre que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ y $\lambda \in [0, 1]$ se cumple

$$(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in C.$$

La versión geométrica de la definición puede enunciarse diciendo que C es convexo si siempre que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, entonces el segmento determinado por \mathbf{x} y \mathbf{y} está contenido en C .

Ejemplo 4.1. En la siguiente figura, el conjunto A es convexo, mientras que el conjunto B no lo es.



■

Ejemplo 4.2. Los k -planos en \mathbb{R}^d son conjuntos convexos.

En efecto, si P es un k -plano generado por $\{x_0, \dots, x_k\}$, entonces tenemos que si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$ se debe tener que:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k a_i \mathbf{x}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \sum_{i=0}^k b_i \mathbf{x}_i,$$

donde $\sum_{i=0}^k a_i = 1$ y $\sum_{i=0}^k b_i = 1$. Luego si $\lambda \in [0, 1]$, entonces

$$(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^k a_i \mathbf{x}_i + \lambda \sum_{i=0}^k b_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=0}^k [(1 - \lambda)a_i + \lambda b_i] \mathbf{x}_i.$$

Como

$$\sum_{i=0}^k [(1 - \lambda)a_i + \lambda b_i] = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^k a_i + \lambda \sum_{i=0}^k b_i = (1 - \lambda) + \lambda = 1,$$

se tiene que $(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in P$ para todo $\lambda \in [0, 1]$, y así P es convexo.

■

Definición 4.5. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, una expresión de la forma $(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ donde $\lambda \in [0, 1]$, se llama *combinación convexa* de \mathbf{x} y \mathbf{y} . En general, una *combinación convexa* de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$, es una suma de la forma:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

donde $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

El siguiente resultado es una caracterización de los conjuntos convexos a partir de las combinaciones convexas de sus elementos:

Teorema 4.1. Un subconjunto de \mathbb{R}^d es convexo si y sólo si contiene todas las combinaciones convexas de sus elementos.

Demostración. (\Leftarrow) Sea C un subconjunto de \mathbb{R}^d , si C contiene todas las combinaciones convexas de sus elementos, en particular contiene las combinaciones convexas de todos los subconjuntos de dos elementos de C , luego, por definición, C es convexo.

(\Rightarrow) Sea C un subconjunto convexo de \mathbb{R}^d , hay que probar que C es cerrado bajo combinaciones convexas de cualquier número finito, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, k \geq 2$, de puntos en C . Para ello, se procederá por inducción sobre k .

Si $k = 2$, hay que mostrar que si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$, entonces $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$ está en C siempre que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Pero, de esto se sigue que $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, por tanto,

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 = (1 - \lambda_2) \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \in C,$$

pues C es convexo.

Sea $k > 2$ y supongamos que C es cerrado bajo combinaciones convexas de menos de k puntos. Veamos que también es cerrado bajo combinaciones convexas de k puntos.

Dada una combinación convexa arbitraria de k puntos de C :

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k,$$

al menos un λ_i es distinto de 1, pues en otro caso se tendría $\sum_{i=1}^k \lambda_i = k \neq 1$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\lambda_1 \neq 1$. Sea:

$$\mathbf{y} = \lambda'_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda'_k \mathbf{x}_k, \quad \lambda'_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1}.$$

Obsérvese que $\lambda_i \geq 0$ para $i = 2, \dots, k$, y además

$$\lambda'_1 + \dots + \lambda'_k = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_k}{(1 - \lambda_1)} = \frac{\lambda_2 + \dots + \lambda_k}{\lambda_2 + \dots + \lambda_k} = 1.$$

Así, \mathbf{y} es combinación convexa de $k - 1$ puntos de C , luego por hipótesis de inducción $\mathbf{x} \in C$. Como $x = (1 - \lambda_1) \mathbf{y} + \lambda_1 \mathbf{x}_1$, entonces de la convexidad de C se sigue que $\mathbf{x} \in C$, y por tanto C contiene todas las combinaciones convexas de puntos de C .

□

El siguiente teorema nos permitirá deducir la convexidad de algunos subconjuntos de \mathbb{R}^d .

Teorema 4.2. La intersección de una colección arbitraria de conjuntos convexos es convexa.

Demostración. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una colección arbitraria de conjuntos convexos de \mathbb{R}^d . Hagamos

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ y $\lambda \in [0, 1]$ arbitrarios. Claramente $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_i$ para cada $i \in I$, luego se tiene que

$$(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in C_i,$$

para cada $i \in I$, este debido a que cada C_i es convexo. De este modo se concluye que $(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in C$.

□

La siguiente definición nos permite generar conjuntos convexos a partir de conjuntos arbitrarios de \mathbb{R}^d .

Definición 4.6. Dado un subconjunto X de \mathbb{R}^d , se define el *cierre convexo* de X como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X . El cierre convexo de X se denota mediante $\text{conv}(X)$.

A partir del teorema anterior es claro que $\text{conv}(X)$ es convexo, es más, podemos decir que $\text{conv}(X)$ es el menor conjunto convexo que contiene a X , en el sentido de que si C es un conjunto convexo que contiene a X , entonces $\text{conv}(X) \subseteq C$.

El siguiente teorema permite caracterizar a $\text{conv}(X)$ como combinaciones convexas de elementos de X .

Teorema 4.3. Para cualquier $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $\text{conv}(X)$ consiste de todas las combinaciones convexas de elementos de X .

Demostración. Claramente los elementos de X pertenecen a $\text{conv}(X)$, luego por el Teorema 4.1 todas las combinaciones convexas de elementos de X pertenecen a $\text{conv}(X)$. Veamos ahora que cualquier elemento de $\text{conv}(X)$ es una combinación convexa de elementos de X . Para probar esto basta con observar que si

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k$$

y

$$\mathbf{y} = \mu_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{y}_r$$

son combinaciones convexas, donde $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in X$, entonces el vector:

$$(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$

donde $0 \leq \lambda \leq 1$, es otra combinación convexa de elementos de X . De este modo, se tiene que el conjunto de combinaciones convexas de elementos de X es el mismo un conjunto convexo, el cual contiene a X . Como $\text{conv}(X)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X , se sigue de lo anterior que los elementos de $\text{conv}(X)$ son combinaciones convexas de elementos de X .

□

Corolario 4.1. El cierre convexo de un subconjunto finito $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ de \mathbb{R}^d consiste de todos los vectores de la forma:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k,$$

donde $\lambda_i \geq 0$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$.

Definición 4.7. Dado un número finito de puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$, el cierre convexo de dicha colección $\text{conv}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\})$ es llamado un *politopo*.

El siguiente teorema es un refinamiento, debido a Carathéodory, del teorema anterior y será fundamental para una de las pruebas del teorema principal de este capítulo. La prueba que presentamos fue tomada de [1].

Teorema 4.4 (Carathéodory). Sea X un subconjunto arbitrario de \mathbb{R}^d . Si $\mathbf{x} \in \text{conv}(X)$, entonces $x \in \text{conv}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+1}\})$, donde $\mathbf{x}_i \in X$ para $i = 1, \dots, d+1$.

Demostración. Hay que probar que cualquier $\mathbf{x} \in \text{conv}(X)$ puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

donde

$$\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \mathbf{x}_i \in X \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, d+1.$$

Como $\mathbf{x} \in \text{conv}(X)$, por definición se tiene que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

donde $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que $\lambda_i > 0$ y $\mathbf{x}_i \in X$.

Si $k \leq d+1$ no habría nada que probar. Supongamos que $k > d+1$, entonces los vectores $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1$ son linealmente dependientes. De este modo existen escalares $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ no todos cero, tales que $\sum_{i=2}^k \alpha_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = 0$.

Obsérvese que:

$$\sum_{i=2}^k \alpha_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = \sum_{i=2}^k \alpha_i \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1 \sum_{i=2}^k \alpha_i,$$

luego si se define $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^k \alpha_i$ y se sustituye este valor en la ecuación anterior tendríamos:

$$\sum_{i=2}^k \alpha_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = \sum_{i=2}^k \alpha_i \mathbf{x}_i + \alpha_1 \mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

De lo anterior se sigue que:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i = 0,$$

donde $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$, y no todos los α_i son cero. Al menos uno de los α_i es mayor que cero, pues en otro caso la suma de los α_i sería negativa. Luego:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i + \mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i - \gamma \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma \alpha_i) \mathbf{x}_i$$

para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Ahora, se elige el valor de γ como sigue:

$$\gamma = \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} : \alpha_i > 0 \right\} = \frac{\lambda_h}{\alpha_h}, \quad \text{para algún } h \in \{1, \dots, k\}.$$

Observe que $\gamma > 0$. Ahora si $\alpha_i \leq 0$, entonces $\lambda_i - \gamma\alpha_i > 0$, y si $\alpha_i > 0$, entonces $\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \geq \frac{\lambda_h}{\alpha_h} = \gamma$, de donde $\lambda_i - \gamma\alpha_i \geq 0$. De lo anterior se concluye que $\lambda_i - \gamma\alpha_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Particularmente se tiene, dada la manera en que se definió γ , que $\lambda_h - \gamma\alpha_h = 0$. En consecuencia \mathbf{x} se puede expresar como:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma\alpha_i)\mathbf{x}_i,$$

donde $\lambda_i - \gamma\alpha_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma\alpha_i) = 1$, cumpliéndose además que, $\lambda_h - \gamma\alpha_h = 0$. De este modo se ha conseguido expresar a \mathbf{x} como combinación convexa de a lo más $k - 1$ puntos en X . Como el proceso anterior puede ser repetido mientras $k \geq d + 2$, podemos repetirlo hasta que \mathbf{x} sea representado como combinación convexa de $d + 1$ puntos de X .

□

4.2. Teorema de Erdős-Szekeres en \mathbb{R}^d

Con los conceptos expuestos en la sección anterior, casi estamos en condiciones de establecer el Teorema de Erdős-Szekeres en dimensiones superiores. A manera de referencia ponemos a continuación la versión bidimensional del teorema.

Teorema 4.5 (Erdős-Szekeres en \mathbb{R}^2). Para cada entero $n \geq 3$ existe un mínimo entero $ES(n)$, tal que en cualquier configuración en el plano de $ES(n)$ puntos en posición general, n de ellos se hallan en posición convexa.

Hace falta aclarar qué es lo que se entenderá ahora cuando se hable de puntos en posición convexa, este es precisamente el objetivo de la siguiente definición.

Definición 4.8. Sea X un subconjunto de \mathbb{R}^d que se halla en posición general, diremos que X se encuentra en *posición convexa* si para todo $x \in X$ se satisface que $x \notin \text{conv}(X \setminus \{x\})$.

La definición anterior es equivalente a decir que un subconjunto X se halla en posición convexa si y sólo si los puntos de X constituyen el conjunto de vértices de algún politopo en \mathbb{R}^d . Nótese que esta definición es consistente con la que se introdujo en el capítulo 3.

Siguiendo la notación usada en [13] presentamos la siguiente definición:

Definición 4.9. Para $n \geq 1, d \geq 2$ definimos y denotamos por $N_d(n)$ al menor entero positivo tal que cualquier conjunto de $N_d(n)$ puntos en posición general en \mathbb{R}^d contiene n puntos en posición convexa.

Aquí vuelven a surgir de manera natural las preguntas:

- ¿Existe $N_d(n)$ para todo $n \geq 1$ y $d \geq 2$?
- En caso de existir, ¿cuál es el valor de $N_d(n)$?

Para la primer pregunta la versión multidimensional del Teorema de Erdős-Szekeres se encarga de responderla de manera afirmativa. Mientras que para la segunda, salvo para algunos casos, aún no se conoce la respuesta.

En la presente sección presentaremos dos demostraciones de la versión multidimensional del Teorema de Erdős-Szekeres, la primera será una aplicación del Teorema de Ramsey y para ella se requerirán un par de resultados preliminares. El primero de ellos es el análogo del resultado de Esther Klein para \mathbb{R}^d y el segundo nos proporciona condiciones suficientes de convexidad para ciertos conjuntos de \mathbb{R}^d .

Lema 4.1 ([14]). Cualquier conjunto de $d + 3$ elementos de \mathbb{R}^d en posición general contiene $d + 2$ en posición convexa.

Lema 4.2. Sea X un conjunto finito de al menos $d + 2$ puntos de \mathbb{R}^d en posición general. Si cualesquier $d + 2$ puntos de X se hallan en posición convexa, entonces X se halla en posición convexa.

Demostración. Supongamos que X no se halla en posición convexa, luego existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in \text{conv}(X \setminus \{x_0\})$. Entonces por el Teorema 4.4, $x_0 \in \text{conv}(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$, donde $x_i \in X \setminus \{x_0\}$ para $i = 1, \dots, d + 1$. De esto se sigue que $\{x_0, x_1, \dots, x_{d+1}\}$ son $d + 2$ puntos de X que no se encuentran en posición convexa. Lo cual es una contradicción, por lo tanto X se halla en posición convexa.

□

Teorema 4.6 (Erdős-Szekeres en \mathbb{R}^d). Para cualesquier enteros $n \geq 1$ y $d \geq 2$, el número $N_d(n)$ existe.

Demostración. En efecto, consideremos $R(n, d + 3; d + 2)$ puntos de \mathbb{R}^d en posición general. Coloréense los subconjuntos de $d + 2$ elementos de la siguiente manera: Si el $(d + 2)$ -subconjunto se halla en posición convexa entonces lo coloreamos de color rojo, en otro caso se colorea azul. Ahora, por el Teorema de Ramsey se tiene que debe haber un n -subconjunto con todos sus $(d + 2)$ -subconjuntos rojos, o debe haber un $(d + 3)$ -subconjunto con todos sus $(d + 2)$ -subconjuntos azules. Por el Lema 4.2 tenemos que el último caso no puede ocurrir, así lo que se tiene es que existe un n -subconjunto con todos sus $(d + 2)$ -subconjuntos en posición convexa, y por el Lema 4.1 este n -subconjunto se halla en posición convexa. Por tanto $N_d(n)$ existe y además se tiene que $N_d(n) \leq R(n, d + 3; d + 2)$.

□

Capítulo 5

Conclusión

En algunas teorías matemáticas se trabaja con conjuntos cuyos elementos se comportan de manera impredecible, en el sentido de que resulta imposible determinar de forma precisa cuáles de ellos satisfacen cierta propiedad. Por ejemplo, en la Teoría de Números se tiene que dentro del conjunto de los números naturales los números primos se distribuyen de una manera sumamente errática, al punto de que al momento se desconoce una fórmula útil que proporcione el valor del n -ésimo número primo. Por esta razón resulta sorprendente observar que bajo ciertas condiciones alguna propiedad ineludiblemente se verifica en estos conjuntos. La Teoría de Ramsey se encarga de estudiar este tipo de propiedades y las condiciones bajo las cuales se garantiza la satisfacción de las mismas.

A pesar de su importancia la Teoría de Ramsey no ha tenido la suficiente difusión, aún cuando los conceptos necesarios para su estudio resultan ser relativamente simples. Consideramos que el presente trabajo contribuirá a difundir esta importante teoría dentro de los alumnos de matemáticas de la UTM, permitiendo que quienes tengan acceso a éste puedan hallar algunos de los aspectos más importantes de la misma. Para hacer evidente el poder de la Teoría de Ramsey se analiza a fondo un resultado clásico pero aún vigente dentro de la misma, este es el Teorema de Erdős-Szekeres, teorema que ha motivado el planteamiento de nuevas cuestiones acerca de la distribución de puntos en el plano y en espacios de dimensión superior. Respecto a estas preguntas se plantean los avances obtenidos al momento y las ideas que se han desarrollado al tratar de dar con su solución, ésto con el objetivo de señalar el gran alcance que la Teoría de Ramsey puede tener.

Bibliografía

- [1] Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, C.M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley-Interscience, 3rd ed.
- [2] J. A. Bondy, U. S. R. Morty. *Graph Theory*. Graduate Text in Mathematics, Vol. 244, Springer, Berlin.
- [3] F. R. K. Chung, C. M. Grinstead, A survey of bounds for classical Ramsey numbers, *Journal of Graph Theory* **7** (1983), 25-37.
- [4] F. R. K. Chung, R. L. Graham, Forced convex n-gons in the plane, *Discrete and Computational Geometry* **19(3)** (1998), 367-371.
- [5] V. Chvátal, J. Komlós, Some combinatorial theorems on monotonicity, *Canad. Math. Bull.* **14** (1971), 151-157.
- [6] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Third Edition. Graduate Text in Mathematics, Vol. 173, Springer, Berlin.
- [7] P. Erdős, G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica* **2** (1935), 463-470.
- [8] P. Erdős, G. Szekeres, On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* **3-4** (1961), 53-62.
- [9] P. Erdős, Z. Tuza, P. Valtr, Ramsey-remainder, *Eur. J. Comb.* **17(6)** (1996), 519-532.
- [10] R. E. Greenwood, A. M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs, *Canadian Journal of Mathematics* **7** (1955), 1-7.
- [11] Scott Johnson, A new proof of the Erdős-Szekeres convex k-gon result, *Journal of Combinatorial Theory Series A* **42** (1986), 318-319.
- [12] M. Lewin, A new proof of a theorem of Erdős-Szekeres, *The Mathematical Gazette* **60(412)** (1976), 136-138
- [13] W. Morris, V. Soltan, The Erdős-Szekeres problem on points in convex position- a survey, *Bull. Amer. Math. Soc., New Ser.* **37(4)** (2000), 437-458.
- [14] T. S. Motzkin, Cooperative classes of finite sets in one and more dimensions, *J. Combin. Theory* **3** (1967), 244-251.

- [15] James R. Munkres. Topología. Pearson Educación, S.A., Madrid, 2002.
- [16] José Héber Nieto Said. Teoría Combinatoria. La Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela, 1996.
- [17] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society* **30** (1930), 264-286.
- [18] Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw Hill, 7th ed.
- [19] G. Szekeres, L. Peters, Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem, *ANZIAM J.* **48** (2006), 151-164.
- [20] G. Tóth, P. Valtr, Note on the Erdős-Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 457-459.
- [21] G. Tóth, P. Valtr, The Erdős-Szekeres theorem: upper bounds and related results, *Combinatorial and Computational Geometry* **52** (2005), 557-568.
- [22] R. Tyrrell Rockafellar. Convex Analysis. Princeton University Press.

Apéndice A

Coloración de K_{13}

En el Ejemplo 2.5 se mostró que $R(3, 5; 2) = 14$. La 2-coloración de K_{13} sin K_3 rojos ni K_5 azules, presentada ahí, resultó clave para obtener este número de Ramsey. Si bien en aquella ocasión no se dijo nada acerca de la idea que llevo a R. E. Greenwood y A. M. Gleason a obtener esa coloración, en el presente apéndice se desea aclarar esta situación. Para ello será necesario introducir la siguiente definición.

Definición A.1. Sea p un número primo impar y a un entero tal que $\text{mcd}(a, p) = 1$. Si la congruencia cúbica $x^3 \equiv a \pmod{p}$ tiene solución, entonces a se dice que es un *residuo cúbico de p* . En otro caso, a es llamado un *no residuo cúbico de p* .

Ejemplo A.1. Para ilustrar la definición anterior calculemos los residuos cúbicos de 13.

Solución. Basta con probar con que elementos son congruentes los cubos de los miembros de la clase de residuos módulo 13. Esto es

$$1^3 \equiv 1$$

$$2^3 \equiv 8$$

$$3^3 \equiv 1$$

$$4^3 \equiv 12$$

$$5^3 \equiv 8$$

$$6^3 \equiv 8$$

$$7^3 \equiv 5$$

$$8^3 \equiv 8$$

$$9^3 \equiv 1$$

$$10^3 \equiv 1$$

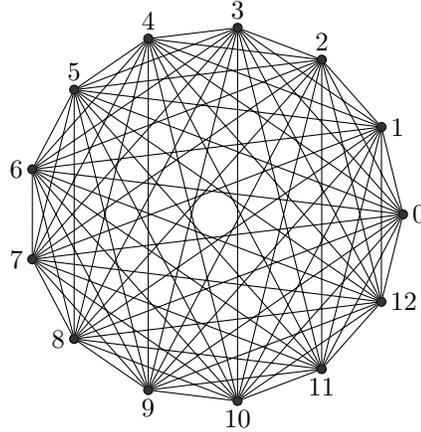
$$11^3 \equiv 5$$

$$12^3 \equiv 12$$

De aquí se sigue que los residuos cúbicos de 13 son aquellos que sean congruentes módulo 13 con alguno de: 1, 5, 8 o 12.



Para obtener la coloración de K_{13} considérense los 13 elementos del campo \mathbb{Z}_{13} numerados de 0 a 12, y tómesese cada elemento de este campo como el vértice de una gráfica completa.



La coloración de las aristas de K_{13} será como sigue, si la diferencia de dos vértices es un residuo cúbico, es decir, congruente con 1, 5, 8 o 12 ($\text{mod } 13$), la arista que los une se colorea de rojo, en otro caso se colorea de azul. Como 1 y -1 son ambos residuos cúbicos, el orden en que se efectúa la diferencia carece de importancia. Se afirma que en esta coloración de K_{13} no hay K_3 rojos ni K_5 azules.

En efecto, veamos primero que no puede haber K_3 rojos. Si $x < y < z$ son vértices de K_{13} tales que $y - x$ y $z - y$ son ambos residuos cúbicos entonces la tercer diferencia $z - x = (z - y) + (y - x)$ debe tomar alguno de los siguientes valores: 1+1, 1+5, 1+8, 1+12, 5+5, 5+8, 5+12, 8+8, 8+12, 12+12, ya que tanto $z - y$ como $y - x$ son residuos cúbicos. Pero ninguna de estas sumas es un residuo cúbico. Por tanto, $y - x$, $z - y$ y $z - x$ no pueden ser todos residuos cúbicos y así no hay K_3 rojos.

Para ver que tampoco puede haber K_5 azules, tomemos un vértice v de K_{13} y formemos la lista más grande de vértices tal que la diferencia de cualesquier dos elementos de la lista no sea congruente con 1, 5, 8 o 12 ($\text{mod } 13$) y que satisfaga que v sea elemento de dicha lista. Como queremos que la diferencia de dos vértices no sea congruente con 1 ($\text{mod } 13$), entonces eliminamos vértices consecutivos, luego los posibles candidatos para estar en la lista se reduce a:

$$v, v + 2, v + 4, v + 6, v + 8, v + 10, v + 12.$$

Como tampoco puede haber vértices con diferencia de 12, los candidatos se reducen a:

$$v, v + 2, v + 4, v + 6, v + 8, v + 10.$$

Es claro que hasta el momento no se tienen dos vértices cuya diferencia sea 5. Pero cuando se eliminan los vértices cuya diferencia es 8 solo quedan 4 posibles elementos, pues $v + 8$ se elimina y además uno de $v + 2$ o $v + 10$ también tiene que descartarse. Así, la lista de vértices tales que no hay dos con diferencia congruente a 1, 5, 8 o 12 ($\text{mod } 13$) es a lo más de tamaño 4, haciendo imposible la ocurrencia de un K_5 azul.

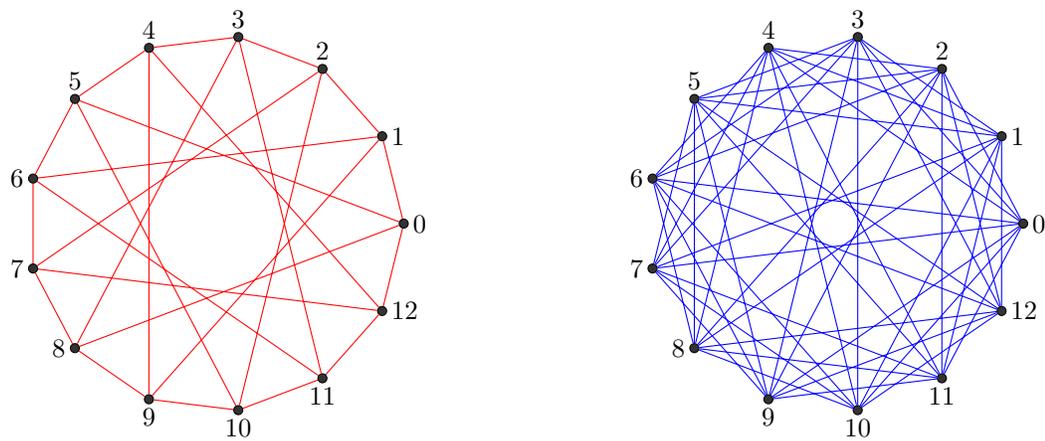


Figura A.1: Las aristas rojas y azules de K_{13} .