UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

ESPACIOS NORMADOS ASIMÉTRICOS

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

ALEJANDRO VIVEROS LUIS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CUAUHTÉMOC HÉCTOR CASTAÑEDA ROLDAN

CODIRECTOR DE TESIS:

M.C. LUZ DEL CARMEN ÁLVAREZ MARÍN

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, DICIEMBRE 2013.

Dedicado a
la mujer mas
importante
en mi vida,
mi madre
Ana Lilia Luis Ruiz

Agradecimientos

Agradezco a mi madre y a mis familiares por darme todo el apoyo económico y emocional, con el cual pude seguir adelante durante el transcurso de mi carrera.

A mi director de tesis el DR. Cuahtémoc Héctor Castañeda Roldan y a mi co-director de tesis la M.C. Luz del Carmen Álvarez Marín por sus asesorías durante el transcurso de la elaboración de la tesis.

A mis sinodales por sus comentarios y correcciones durante el transcurso de elaboración de tesis, sin el cual no podría haberla terminada.

A mis profesores de toda la carrera por sus enseñanzas, su guía, comentarios y apoyo para seguir adelante durante la carrera.

Y finalmente a mis compañeros de la carrera por su apoyo y la diversión que tuvimos durante nuestra estadía en la Universidad.

Prefacio

Dentro del área del Análisis Matemático clásico, el estudio sobre espacios métricos y normados es uno de los temas más importantes. Estos espacios incorporan en su definición propiedades de simetría. Sin embargo hay estudios sobre espacios que no satisfacen dichas propiedades, y tales espacios son conocidos como; espacios cuasimétricos y normados asimétricos [3].

La teoría de los espacios cuasimétricos y normados asimétricos está en desarrollo desde mediados del siglo pasado. Algunos de los principales contribuyentes en este campo han sido Alegre [1]; Dugundji [6]; Romaguera [7], [8]; Kelly [9]; Cobzas [3]; este último se destacó con la redacción de un libro en el cual se hace un recuento de resultados análogos a algunos de teoría clásica de Análisis Funcional.

La gama de estudios de estos espacios es tan amplia como en el caso clásico, en este trabajo hemos enfocado nuestra atención sobre los Teoremas del Mapeo Abierto y del Grafo Cerrado, vistos en el caso asimétrico. Para este fin es necesario comprender la teoría básica de los espacios cuasimétricos y normados asimétricos.

El objetivo principal de este trabajo es generalizar la teoría existente sobre espacios métricos y normados al caso asimétrico, asi como ver y analizar las principales diferencias entre estos espacios. Con el fin de construir una ruta necesaria para comprender y demostrar los Teoremas del Mapeo Abierto y del Grafo Cerrado. Es por ello que este trabajo está estructrado de la siguiente manera.

En el Capítulo 1, se presentarán algunos resultados sobre las espacios métricos y normados, con el fin de extenderlos posteriormente al caso asimétrico. También, se presentarán definiciones topológicas para la comprensión de temas relacionados con la topología en los espacios cuasimétricos.

El Capítulo 2 de este trabajo, se enfoca en la teoría básica sobre los espacios cuasimétricos y normados asimétricos, lo cual será de importancia para poder avanzar al siguiente capítulo. Entre los temas abordados están las definiciones básicas, tales como bolas, conjunto abierto y conjunto cerrado, los cuales nos permiten considerar la topología inducida en estos espacios y algunas de sus propiedades. Se verá el comportamiento de las sucesiones en estos espacios, además de las definiciones de sucesiones de Cauchy y por último la completez en estos espacios.

El Capitulo 3 está dedicado al estudio del Análisis Funcional Asimétrico, en éste se presentan las definiciones y resultados necesarios para la demostración de dos de los teoremas mas importantes del Análisis Matemático trasladados al caso asimétrico: El Teorema del Mapeo Abierto y El Teorema del Grafo Cerrado.

Finalmente se presentarán las conclusiones derivadas del estudio del trabajo realizado.

Índice general

Lista de tablas

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios Métricos

Definición 1.1 (Espacio Métrico)**.** *Es un conjunto no vacío M, de objetos (que llamaremos puntos) dotado de una función* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *(que llamaremos la métrica del espacio) que satisface las siguientes propiedades: para cualesquiera puntos x,y,z* $\in$ *M,*

M1 *d(x,x) = 0,*

M2 *d(x,y) > 0 si x≠y,*

M3 *d(x,y) = d(y,x),*

M4 *d(x,y)* $\leq$ *d(x,z) + d(z,y).*

Si d cumple sólo M1, M3 y M4; diremos que d es un semimétrica. El conjunto M dotado de una semimétrica es llamado Espacio Semimétrico.

Al número $d(x,y)$ se le denomina la *distancia* entre x e y. La propiedad M4 se llama la *desigualdad triangular*. Un espacio métrico se designa, a menudo, por medio de (M,d).

Nota 1.1. Un conjunto puede tener más de una métrica asociada.

Definición 1.2. *Sean* (M,d) *un espacio métrico y* $a \in M$*. La* bola*,* $B(a,r)$*, con centro en a y radio* $r > 0$ *es el conjunto de todos los puntos x de M tales que* $d(x,a) < r$*, es decir:*

$$B(a,r) = \{x \in M : d(x,a) < r\}.$$

Definición 1.3. *Sean (M,d) un espacio métrico y* $S \subseteq M$*. Un punto* $a \in S$ *se le llama* punto interior *de S si alguna de las bolas,* $B(a,r)$*, esta contenida en S, es decir, si existe r >0 tal que* $B(a,r) \subset S$*.*
El interior *de S,* $\operatorname{int}(S)$*, es el conjunto de todos los puntos interiores de S.*
Un subconjunto S es abierto *en M, si todos sus puntos son puntos interiores de S, es decir,* $S = \operatorname{int}(S)$*, y es* cerrado *en M si* $M - S$ *es abierto en M.*

Teorema 1.1. *Sea (M,d) un espacio métrico.*

1. *La unión de una colección arbitraria de conjuntos abiertos en M es un conjunto abierto en M, y la intersección de una colección finita de conjuntos abiertos en M es un conjunto abierto en M.*

2. *La unión de una colección finita de conjuntos cerrados en M es un conjunto cerrado en M, y la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados en M es un conjunto cerrado en M.*

Demostración. 1. Sea ζ una colección arbitraria de conjuntos abiertos en M, denotemos por $X = \bigcup_{A\in\zeta} A$. Sea $x \in X$. Entonces $x \in A_0$, para algún $A_0 \in \zeta$. Como A_0 es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A_0$, así

$$B(x,a) \subset \bigcup_{A\in\zeta} A = X.$$

Así, x es un punto interior de X, y por lo tanto X es abierto en M.
Por otra parte, suponga que $\zeta = \{A_1,\ldots,A_n\}$ y denotemos por $Y = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Sea $x \in Y$. Entonces $x \in A_i$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Como A_i es abierto existe $r_i > 0$ tal que $B(x,r_i) \subset A_i$ para cada i, $1 \le i \le n$.
Sea $r = \text{mín}\{r_i : i = 1,\ldots,n\}$. Luego se cumple

$$B(a,r) \subseteq B(a,r_i) \subset A_i, \text{ para todo } i \in \{1,\ldots,n\}.$$

En consecuencia,

$$B(a,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i = Y.$$

Así, x es un punto interior de Y, y por lo tanto Y es abierto en M.

2. Utilizando propiedades del complemento, la prueba es análoga al inciso anterior.

□

1.1.1. Sucesiones

Definición 1.4. *Una sucesión $\{x_n\}$ de puntos en un espacio métrico (M,d) es* convergente *si existe un punto $x \in M$ que satisface la siguiente propiedad:*

$$\textit{para todo } \epsilon > 0, \ \textit{existe } N \in \mathbb{N} \textit{ tal que para todo } n > N, \ d(x_n,x) < \epsilon \tag{1.1}$$

En este caso diremos que $\{x_n\}$ converge *a x, y lo denotaremos por $x_n \to x$. Si no existe algún punto $x \in S$ que satisfaga (1.1) diremos que $\{x_n\}$ es* divergente.

Nota 1.2. La definición de convergencia implica que

$$x_n \to x \text{ si y sólo si } d(x_n, x) \to 0$$

Teorema 1.2. *Toda sucesión $\{x_n\}$ de un espacio métrico (M, d) puede converger hacia un punto de M, a lo sumo.*

El Teorema 1.2 es un resultado clásico para los espacios métricos y la demostración puede encontrarse en cualquier libro de referencia de análisis matemático [2].

1.1.2. Sucesiones de Cauchy

Definición 1.5. *Una sucesion $\{x_n\}$ de un espacio métrico se llama* sucesión de Cauchy *si satisface la siguiente condición (llamada condición de Cauchy): para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \textit{ siempre que } n, m \geq N.$$

Si una sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto x, sus términos avanzados deben de aproximarse a x, por lo tanto se aproximan entre sí, es decir, la sucesión es de Cauchy. A continuación, mostraremos tal resultado.

Teorema 1.3. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (M, d) tal que $x_n \to x$. Entonces la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq N$. Sean $n, m \geq N$. Entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy.

□

1.2. Espacios Vectoriales Normados

Definición 1.6 (Espacio Normado)**.** *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una* norma *en X es una función $\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:*

N1) $\| x \| \geq 0$ *para todo* $x \in X$*,*

N2) $\| x \| = 0$ *si, y sólo si* $x = 0$*,*

N3) *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $x \in X$*, entonces* $\| ax \| = | a | \| x \|$*,*

N4) *para todo* $x, y \in X$*,* $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$*.*

Si $\| \cdot \|$ cumple solo N1, N3 y N4; diremos que $\| \cdot \|$ es una seminorma*. A un espacio vectorial junto con una norma (o seminorma) se le llama espacio vectorial normado (o seminormando) y se denota por $(X, \| \cdot \|)$.*

A la propiedad N4 se la llama *desigualdad triangular.*

Nota 1.3. Un espacio vectorial puede tener más de una norma asociada.

Observación 1.1. Sea $\| \cdot \|$ una norma sobre un espacio vectorial X, definimos la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \| y - x \|,$$

llamada la *métrica inducida* por la norma $\| \cdot \|$. Es decir, un espacio normado es un espacio métrico con la métrica inducida por la norma.

Nota 1.4. *Recordemos que en teoría clásica se tiene los siguientes puntos:*

- *Un espacio semimétrico no necesariamente es un espacio métrico.*
- *Si un espacio es un espacio métrico (o semimétrico) no necesariamente es un espacio seminormado, ni normado.*
- *Una seminorma induce una semimétrica, pero no necesariamente una métrica.*
- *Un espacio seminormado no necesariamente es un espacio normado.*

Ejemplo 1.1. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \text{ ó } (x = b \text{ y } y = c) \text{ ó } (x = c \text{ y } y = b) \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

d cumple con los axiomas M1 y M3. Se puede probar que cumple con el axioma M4. Así, (X, d) es un espacio semimétrico. Pero, como $d(b, c) = 0$ y $b \neq c$, no se cumple M2. Por lo tanto, (X, d) no es un espacio métrico.

Ejemplo 1.2. Sea $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $\| (x, y) \| = | y |$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Notemos que $\| (x, y) \| \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Luego, sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\| (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \| = | y_1 + y_2 | \leq | y_1 | + | y_2 | = \| (x_1, y_1) \| + \| (x_2, y_2) \| .$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ es un espacio seminormado. Pero, notemos que si $x \neq 0$, $\| (x, 0) \| = 0$, es decir, $\| \cdot \|$ no es una norma.

Algunas definiciones relacionadas con normas son:

Observación 1.2. *Sean X un espacio vectorial normado, $x \in X$ y $r>0$:*

- *La* bola abierta *de radio r y centro x es:*
  $B(x, r) = \{y \in X : \| y - x \| < r\}$.

- *La* bola cerrada *de radio r y centro x es:*
  $B[x,r] = \{y \in X : \| y - x \| \leq r\}$.

- *La* esfera *de radio r y centro x es:*
  $S(x,r) = \{y \in X : \| y - x \| = r\}$.

1.3. Resultados Topológicos

Definición 1.7. *Sea X un conjunto. Una* topología *en X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface:*

1. *La unión de elementos de τ, también está en τ.*

2. *Cada intersección finita de elementos de τ, es también un elemento de τ.*

3. *$\emptyset$ y X son elementos de τ.*

Al par (X,τ) se le llama espacio topológico*. A los elementos de τ los llamaremos conjuntos* abiertos *en X.*

Definición 1.8. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Un conjunto de X es un conjunto* cerrado *en X si su complemento es un conjunto abierto en X.*

Definición 1.9. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una familia $\zeta \subseteq \tau$ es llamada una* base *para τ, si cada conjunto abierto de τ es la unión de elementos de ζ.*

Un espacio métrico (M,d) es un espacio topológico, cuya topología tiene como base al conjunto de todas las bolas abiertas respecto a d del conjunto M.

Definición 1.10. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Por una* vecindad *de un elemento $x \in X$ entenderemos cualquier conjunto que contenga a un abierto que contiene a x. Si U es vecindad de x lo denotaremos por $U(x)$ o U_x.*

Definición 1.11. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es adherente a A, si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A. El conjunto,*

$$\mathrm{cl}(A) = \{x \in X : \forall\, U(x), U(x) \cap A \neq \emptyset\},$$

de todos los puntos en X adherentes a A es llamado la clausura *de A. Con τ-$\mathrm{cl}(A)$ hacemos referencia al hecho de que es respecto a la topología τ.*

Definición 1.12. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es interior de A si existe una vecindad de x contenida en A. Al conjunto de todos los puntos interiores de A lo llamaremos* interior *de A y lo denotaremos por* $\mathrm{int}(A)$*. Con τ-$\mathrm{int}(A)$ hacemos referencia al hecho de que es respecto a la topología τ.*

Un conjunto cerrado se ha definido como el complemento de un abierto. El teorema siguiente presenta una caracterización de conjunto cerrado.

Teorema 1.4. *[2] Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado en X si y sólo si contiene todos sus puntos adherentes.*

Demostración. Supongamos primero que A es cerrado en X. Sea $x \in X$ un punto adherente a A. Supongamos que $x \notin A$, es decir, $x \in X - A$. Por ser $X - A$ abierto, existe una vecindad $U(x)$ contenida en $X - A$. Entonces $U(x)$ no contiene puntos de A, en contradicción con el hecho de que x es adherente a A.
Para probar el recíproco, supongamos que A contiene todos sus puntos de adherencia. Sea $x \in X - A$. Así, $x \notin A$, con ésto x no es adherente a A. Por lo tanto, existe un vecindad $U(x)$ tal que $U(x) \cap A = \emptyset$, por consiguiente $U(x) \subset X - A$. Es decir, $X - A$ es abierto en X y por lo tanto A es cerrado en X.

□

Teorema 1.5. *[2] Sea (X, τ) un espacio topológico. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si, y solo si, $A = \mathrm{cl}(A)$.*

Definición 1.13. *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, donde $I = \{1, \ldots, n\}$. El espacio topológico $(\prod_{i \in I} X_i, \tau)$ se llama espacio producto de la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ y se denota por $\prod_{i \in I} X_i$. La topología τ se llama topología producto y tiene como base a la colección:*

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i : U_i \in \tau_i \right\}$$

En teoría clásica, la Definición 1.13 es parte fundamental en la demostración del teorema del grafo cerrado. El mismo caso ocurre para el caso asimétrico, por ello es necesario tenerla en mente cuando nos adrentemos al capítulo 4.2.

1.3.1. Axiomas de Separación

Las propiedades de los espacios topológicos son en general, muy diferentes de las de los espacios métricos, y a menudo es conveniente suponer que los espacios topológicos satisfacen alguna condición que son verdaderas en los espacios métricos. Llamados axiomas de separación. Algunas consecuencias de los axiomas son: el Lema de Urysohn[13], el Teoremoa de Extencion de Tietze[13] y el Teorema de Metrización Urysohn[13]. A continuación presentaremos algunos axiomas de separación.

Definición 1.14. *Un espacio topológico (X, τ) es llamado:*

- *T_0 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existe una vecindad U_x de x tal que $y \notin U_x$, o bien, existe una vecindad U_y de y tal que $x \notin U_y$.*

- *T_1 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen U_x y U_y (vecindades de x e y, respectivamente), tales que $y \notin U_x$ y $x \notin U_y$.*

- *T_2 o de Hausdorff si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen U_x y U_y (vecindades de x e y, respectivamente) tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Algunos ejemplos de estos espacios son: todo espacio de Hausdorff es T_1; todo espacio T_1 es T_0; cada espacio métrico es un espacio de Haudorff y por consiguiente T_1 y T_0; cada subespacio de un espacio de Huasdorff es Hausdorff; el espacio de Sierpinsky es T_0.

Un *espacio bitopológico* es un conjunto X, dotado con dos topologias τ y ν y se denota por (X, τ, ν). A continuación presentaremos algunos axiomas de separación para un espacio bitopológico [3].

Definición 1.15. *Un espacio bitopológico (X, τ, ν) es llamado:*

- *T_0 a pares si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un conjunto U τ-abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o existe un conjunto V ν-abierto tal que $y \in V$ y $x \notin V$.*

- *T_1 a pares si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos U τ-abierto y V ν-abierto tales que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ y $x \notin V$.*

- *Hausdorff a pares si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen τ-abierto U que contiene a x y ν-abierto V que contiene a y tales que $U \cap V = \emptyset$.*

- *normal a pares si dado un subconjunto A τ-cerrado de X y un subconjunto B ν-cerrado de X con $A \cap B = \emptyset$, existe un subconjunto U ν-abierto de X y existe un subconjunto V τ-abierto de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

1.3.2. Espacios de Baire

Definición 1.16. *Un subconjunto Y de un espacio topológico (X, τ) es* denso *en X si* $\mathrm{cl}(Y) = X$.

Definición 1.17. *Un espacio topológico (X, τ) es un* espacio de Baire *si la intersección numerable de conjuntos abiertos y densos en X es denso en X.*

Definición 1.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

- *Un subconjunto $B \subset X$ es llamado* denso en ninguna parte *si* $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(B)) = \emptyset$.

- *Cualquier unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte es llamada un conjunto de* primera categoría.

- *Cualquier conjunto que no sea de primera categoría se le llama de* segunda categoría.

Utilizando lo anterior podemos dar una definición alternativa de espacio de Baire, que estaremos utilizando durante el resto de la tesis, la cual nos dice: Un espacio topológico (X, τ) es un espacio de Baire si todo subconjunto abierto no vacío de X es de segunda categoría [3]. Algunos ejemplos de espacios de Baire son: los reales con la métrica usual, todo espacio topológico homeomorfo es un espacio de Baire, los espacios de Hausdorff localmente compactos, el espacio de Cantor, etc.

Una vez vistas las definiciones asociadas a espacios de Baire para un espacio topológico y dado que en ciertas ocasiones en vez de considerar al espacio X un espacio topológico lo consideraremos bitopológico, podemos hacer la extensión correspondiente en los espacios bitopológicos.

Definición 1.19. *Sea (X, τ, ν) un espacio bitopológico.*

- *Un subconjunto $B \subset X$ es llamado* (τ, ν)-denso en ninguna parte *si* ν-int$(\tau$-cl$(B)) = \emptyset$.
- *Cualquier unión numerable de conjuntos (τ, ν)-densos en ninguna parte es llamada un conjunto de* (τ, ν)-primera categoría.
- *Cualquier conjunto que no sea de (τ, ν)-primera categoría es de (τ, ν)-segunda categoría.*

Definición 1.20. *Un espacio bitopologico (X, τ, ν) es llamado* espacio de (τ, ν)-Baire *si cada subconjunto τ-abierto no vacío de X es de (ν, τ)-segunda categoría.*

Capítulo 2

Espacios Cuasimétricos y Espacios Normados Asimétricos

En este capítulo daremos una introducción a los espacios cuasimétricos y a los espacios normados asimétricos, los cuales denotaremos por (X, ρ) y (X, p) respectivamente, donde ρ denotará a una cuasi semimétrica y p denotará a una seminorma asimétrica. Además, de dar definiciones básicas y varios resultados, también se verán y analizarán algunas similitudes y diferencias que existen entre los espacios a estudiar y los espacios métricos y normados.
Dado que los espacios cuasi semimétricos y los normados asimétricos son ejemplos de espacios bitopológicos, se analizarán las topologías inducidas en estos espacios. Incluimos también temas como sucesiones y completez, los cuales son las bases para los resultados del Capítulo 3.

2.1. Conceptos Básicos

Definición 2.1. *Una* cuasi semimétrica *en un conjunto X es una función $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones: para cualesquiera $x, y, z \in X$,*

QM1 $\rho(x, x) = 0$,

QM2 $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Si, además cumple,

QM3 $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0, \quad \textit{implica} \quad x = y.$

Entonces ρ es llamada una cuasimétrica*. El par (X, ρ) es llamado un* espacio cuasi semimétrico, *respectivamente, un* espacio cuasimétrico.
Si una cuasi semimétrica cumple, para todo $x, y \in X$

S $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

diremos que ρ es una cuasi semimétrica simétrica.

Nota 2.1. Una cuasimétrica simétrica es una métrica.

Observación 2.1. Una semimétrica d definida en un conjunto X cumple con las condiciones QM1 y QM2, y por lo tanto es una cuasi semimétrica. Además, si suponemos que d es una métrica y $x, y \in X$ son tales que $d(x,y) = d(y,x) = 0$, entonces $x = y$, es decir, d cumple QM3. Con lo anterior podemos concluir que una semimétrica es una cuasi semimétrica, pero no una cuasimétrica. Y una métrica es una cuasimétrica. Así, los espacios cuasimétricos son una generalización de los espacios semimétricos y los métricos.

Definición 2.2. *Una* norma asimétrica *en un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$ es una función $p : X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones: para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \geq 0$,*

AN1 $p(x) = p(-x) = 0$ *implica* $x = 0$,

AN2 $p(\alpha x) = \alpha p(x)$,

AN3 $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Si p sólo cumple las condiciones AN2 y AN3, es llamada una seminorma asimétrica*. El par (X, p) es llamado un* espacio normado asimétrico *(respectivamente* seminormado asimétrico*).*

Observación 2.2. Siguiendo un análisis similar al de la Observación 2.1 concluimos que una seminorma es una seminorma asimétrica, y una norma es una norma asimétrica. Es decir, los espacios normados asimétricos son una generalización de los espacios normados.

Ejemplo 2.1. Sea $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la función dada por:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{si } x \leq y, \\ 0 & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Veamos que ρ es una cuasi semimétrica sobre $\mathbb{R}$. Es claro que $\rho(x,y) \geq 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Además, $\rho(x,x) = x - x = 0$, por lo tanto sí cumple QM1.
Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Notemos que $\rho(x,y) = \text{máx}\{y - x, 0\} = (1/2)(y - x + \mid y - x \mid)$. Entonces

$$\begin{aligned} \rho(x,z) &= (1/2)(z - y + y - x + \mid z - y + y - x \mid) \\ &\leq (1/2)(z - y + \mid z - y \mid) + (1/2)(y - x + \mid y - x \mid) \\ &= \rho(y,z) + \rho(x,y) \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$. Así, se cumple QM2 y por lo tanto ρ es una cuasi semimétrica. Mas aún, ρ es una cuasimétrica, en efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$. Como

$\rho(x,y)=0$ implica $x \geq y$ y $\rho(y,x)=0$ se sigue que $x \leq y$, con ésto $x=y$.
Ahora, si $y > x$, tenemos que

$$\rho(x,y) = y - x > 0 = \rho(y,x).$$

Con esto probamos que ρ no es simétrica. Y por lo tanto tampoco es una métrica. También, si $x > y$, tenemos que

$$\rho(x,y) = 0,$$

es decir, ρ no cumple el Axioma M2. Y por lo tanto, ρ no es una semimétrica.

Ejemplo 2.2. Sean $X = \{a,b,c\}$ y $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ definida como

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x=a \text{ y } y=b) \text{ ó } (x=b \text{ y } y=c), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que ρ cumple QM1. Además, es fácil probar que cumple QM2, tomando todas las posibles combinaciones de puntos. Con esto, ρ es una cuasi semimétrica.
Notemos que $\rho(a,b) = \rho(b,a) = 0$, pero $a \neq b$. Por lo tanto ρ no es una cuasimétrica.
También se tiene que

$$0 = \rho(c,b) \neq \rho(b,c) = 1,$$

es decir, no es simétrica. Por lo tanto, ρ no es una semimétrica.

Ejemplo 2.3. En el espacio vectorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, definimos $p : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ por:

$$p(A) = \max\{A_{i,j}, 0\}.$$

El par $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), p)$ es un espacio normado asimétrico. En efecto:
Si $p(A) = p(-A) = 0$, se tiene que $0 = \max\{A_{i,j}, 0\} \geq A_{i,j}$ y $0 = \max\{-A_{i,j}, 0\} \geq -A_{i,j}$. Luego, $0 \leq A_{i,j} \leq 0$ y de aquí $A_{i,j} = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$, y para todo $1 \leq j \leq n$. Así, p cumple AN1.
Además, si $\alpha \geq 0$, $p(\alpha A) = \max\{\alpha A_{i,j}, 0\} = \alpha \max\{A_{i,j}, 0\} = \alpha p(A)$, por lo tanto p cumple AN2.
Por último, si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$p(A) + p(B) = \max\{A_{i,j}, 0\} + \max\{B_{i,j}, 0\} \geq \max\{(A+B)_{i,j}, 0\} = p(A+B).$$

Con lo cual, p cumple AN3.
Notemos que si $A_{i,j} = -1$ para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$ y $j \in \{1,\ldots,n\}$, entonces $p(A) = 0$ y

$$p((-1)A) = 1 \neq 0 = \mid -1 \mid p(A).$$

Es decir, p no cumple N3 y por lo tanto no es una seminorma ni una norma.

En los espacios cuasi semimétricos y los cuasimétricos, a diferencia de los métricos, no siempre se cumple la propiedad de simetría, es decir, no siempre se tiene que $\rho(x,y)=\rho(y,x)$. De hecho $\rho(y,x)$ determina otra cuasi semimétrica, llamada la conjugada de ρ.

Definición 2.3. *Sea ρ una cuasi semimétrica en un conjunto X. Se define la* conjugada *de ρ por:*

$$\overline{\rho}(x,y)=\rho(y,x), \quad \textit{para todo } \ x,y\in X.$$

Proposición 2.1. *Sea ρ una cuasi semimétrica (cuasimétrica) en un conjunto X. Entonces $\overline{\rho}$ es una cuasi semimétrica (cuasimétrica) en el conjunto X.*

Demostración. Como $\rho(x,y)\geq 0$, para todo $x,y\in X$, se cumple que $\rho(y,x)\geq 0$, así $\overline{\rho}(x,y)\geq 0$. También se cumple que $\overline{\rho}(x,x)=\rho(x,x)=0$, por lo tanto $\overline{\rho}$ cumple QM1.
Sean $x,y,z\in X$. Como ρ cumple QM2, se tiene que:

$$\overline{\rho}(x,z)=\rho(z,x)\leq\rho(z,y)+\rho(y,x)=\overline{\rho}(y,z)+\overline{\rho}(x,y),$$

es decir,

$$\overline{\rho}(x,z)\leq\overline{\rho}(x,y)+\overline{\rho}(y,z).$$

Por lo tanto $\overline{\rho}$ cumple QM2. En consecuencia, $\overline{\rho}$ es una cuasi semimétrica.
Si ρ es una cuasimétrica, entonces también cumple QM3. Supongamos ahora que $\overline{\rho}(x,y)=\overline{\rho}(y,x)=0$, así se tiene que $\rho(y,x)=\rho(x,y)=0$. En consecuencia $x=y$. Por lo tanto, $\overline{\rho}$ cumple QM3; así, $\overline{\rho}$ es una cuasimétrica.

□

Hemos visto que si ρ es una cuasi semimétrica (cuasimétrica), entonces $\overline{\rho}$ es una cuasi semimétrica (cuasimétrica). Ahora, podemos probar que la función $\rho^s(x,y)=\text{máx}\{\rho(x,y),\overline{\rho}(x,y)\}$ también es una cuasi semimétrica (cuasimétrica), pues hereda las propiedades de ambas, de ρ y $\overline{\rho}$, pero además adquiere la propiedad de simetría.

Proposición 2.2. *Sea ρ una cuasi semimétrica (cuasimétrica) en X. Entonces la función $\rho^s : X\times X\to\mathbb{R}$ definida por $\rho^s(x,y)=\text{máx}\{\rho(x,y),\overline{\rho}(x,y)\}$, para cada $x,y\in X$, es una cuasi semimétrica simétrica (métrica) en X.*

Demostración. Como ρ y $\overline{\rho}$ cumplen que para todo $x,y\in X$, $\rho(x,y)\geq 0$ y $\overline{\rho}(x,y)\geq 0$ entonces $\text{máx}\{\rho(x,y),\overline{\rho}(x,y)\}\geq 0$, es decir, $\rho^s(x,y)\geq 0$, por lo que se cumple QM1.
Sean $x,y,z\in X$, si $\rho^s(x,z)=\rho(x,z)$ entonces

$$\begin{aligned}\rho^s(x,z) &\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)\\ &\leq \text{máx}\{\rho(x,y),\overline{\rho}(x,y)\}+\text{máx}\{\rho(y,z),\overline{\rho}(y,z)\}\\ &= \rho^s(x,y)+\rho^s(y,z).\end{aligned}$$

Si $\rho^s(x,z) = \overline{\rho}(x,z)$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho^s(x,z) &\leq \overline{\rho}(x,y) + \overline{\rho}(y,z) \\
&\leq \text{máx}\{\rho(x,y), \overline{\rho}(x,y)\} + \text{máx}\{\rho(y,z), \overline{\rho}(y,z)\} \\
&= \rho^s(x,y) + \rho^s(y,z).
\end{aligned}$$

Así, ρ^s cumple QM2, y ρ^s es cuasi semimétrica. Pero además, dado que $\rho^s(x,y) = \rho^s(y,x)$, ρ^s es cuasi semimétrica simétrica.

Ahora, si ρ es cuasimétrica y $\rho^s(x,y) = 0$, entonces $\rho(x,y) = \overline{\rho}(x,y) = 0$, es decir, $\rho(x,y) = \rho(y,x) = 0$ y $x = y$. De modo que ρ^s es métrica.

□

Nota 2.2. Dada una cuasi semimétrica ρ, se cumplen las siguientes desigualdades para cualesquiera $x, y \in X$:

$$\rho(x,y) \leq \rho^s(x,y) \quad y \quad \overline{\rho}(x,y) \leq \rho^s(x,y). \tag{2.1}$$

Existen definiciones similares a las anteriores en los espacios normados asimétricos. Esto es, se definen la conjugada $\overline{p}$ y la función p^s correspondiente a la seminorma asimétrica p, como

$$\overline{p}(x) = p(-x) \quad y \quad p^s(x) = max\{p(x), \overline{p}(x)\}, \quad \text{para cada } x \in X$$

respectivamente. Estas dos funciones cumplen resultados similares a las Proposiciones 2.1 y 2.2. Además, las desigualdades en (2.1) se convierten en:

$$p(x) \leq p^s(x) \quad y \quad \overline{p}(x) \leq p^s(x). \tag{2.2}$$

Sabemos que a partir de una norma, podemos definir una métrica, de la misma forma, dada una seminorma asimétrica (X, p) podemos definir una cuasi semimétrica por la fórmula

$$\rho_p(x,y) = p(y-x), \quad \text{para cada } x, y \in X. \tag{2.3}$$

A ρ_p se le llama la *cuasi semimétrica inducida* por la seminorma asimétrica (o *cuasimétrica inducida* por la norma asimétrica) p. Veamos que en efecto ρ_p es una cuasi semimétrica.

Es obvio que $\rho_p(x,y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$. Además,

$$\rho_p(x,z) = p(z-x) = p(z-y+y-x) \leq p(z-y) + p(y-x) = \rho_p(y,z) + \rho_p(x,y).$$

Por lo tanto, ρ_p es una cuasi semimétrica. Supongamos además que p es una norma asimétrica. Entonces si $\rho_p(x,y) = \rho_p(y,x) = 0$, esto es, si $0 = p(y-x) = p(x-y) = p(-(y-x))$, se sigue que $y - x = 0$ o $x = y$. Por lo tanto, ρ_p es una cuasimétrica.

Una observación importante en relación a ρ_p, es la siguiente:

$$\rho_p(x+z, y+z) = p(y+z-(x+z)) = p(y-x) = \rho(x,y), \quad \text{para todo} \quad z \in X.$$

Es decir, ρ_p es una función invariante bajo traslaciones.

Hemos comentado algunas relaciones que existen entre las definiciones de funciones cuasimétricas y normas asimétricas, también con relacion a las métricas y normas. En la Tabla 2.1 tenemos un resumen sobre estas relaciones de implicación existentes. De manera que si una función es de cierto tipo, esto implica (o no necesariamente) que sea de otro tipo. Los espacios en blanco nos dicen que no necesariamente son ciertas estas implicaciones, el principal problema es sobre el espacio en el que se definen las funciones, porque mientras las 'normas' se definen en un espacio vectorial, las 'métricas' no necesariamente. En ella se abrevian las funciones según sea su tipo, de la siguiente manera:

M. Métrica.

SM. Semimétrica.

N. Norma.

SN. Seminorma.

CSM. Cuasi semimétrica.

CM. Cuasimétrica.

CSMS. Cuasi semimétrica simétrica.

NA. Norma asimétrica.

SNA. Seminorma asimétrica.

⇒	M	SM	N	SN	CSM	CM	CSMS	NA	SNA
M		Por Def.	Por Nota 1.4	Por Nota 1.4	Por Obs. 2.1	Por Obs. 2.1	Por Obs. 2.1 y Def.		
SM	Por Nota 1.4		Por Nota 1.4	Por Nota 1.4	Por Obs. 2.1	No necesariamente se cumple QM3	No necesariamente se cumple S		
N	Por Obs. 1.1	Por Obs. 1.1		Por Def.	Por Obs. 2.2 y 2.3	Por Obs. 2.2 y 2.3	Por Obs. 1.1 y Def.	Por Obs. 2.2	Por Obs. 2.2
SN	Por Nota 1.4	Por Nota 1.4	Por Nota 1.4		Por Obs. 1.1 y por Obs. 2.1	No necesariamente se cumple QM3	No necesariamente se cumple S	No necesariamente se cumple AN1	Por Obs. 2.2
CSM	No Necesariamente Ejm. 2.5	No Necesariamente Ejm. 2.5				No Necesariamente Ejm. 2.5	No Necesariamente Ejm. 2.5		
CM	No Necesariamente Ejm. 2.1	No Necesariamente Ejm. 2.1			Por Def.		No Necesariamente Ejm. 2.1		
CSMS	No Necesariamente se cumple M2	No Necesariamente se cumple M2			Por Def.	Por Def.			
NA	No Necesariamente se cumple M2	No Necesariamente se cumple M2	No Necesariamente Ejm. 2.3	No Necesariamente Ejm. 2.3	Por 2.3	Por 2.3	No Necesariamente se cumple S		Por Def.
SNA	No Necesariamente se cumple M2	No Necesariamente se cumple M2	No Necesariamente Ejm. 2.3	No Necesariamente Ejm. 2.3	Por 2.3	No Necesariamente se cumple QM3	No Necesariamente se cumple S	No Necesariamente se cumple AN1	

Tabla 2.1: Tabla que muestra las relaciones de los espacios 'métricos' y 'normados'

Los conceptos de bolas abiertas y cerradas, conjuntos abiertos y cerrados que se definen en espacios métricos y normados, se transmiten a los espacios cuasi semimétricos y seminormados asimétricos, pero su significado cambia, como se observa en los ejemplos 2.4 y 2.5.

Definición 2.4. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico. Entonces para $x \in X$ y $r > 0$ definimos:*

- *La* bola abierta *respecto a ρ por $B_\rho(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$.*
- *La* bola cerrada *respecto a ρ por $B_\rho[x,r] = \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}$.*

Si (X, p) es un espacio seminormado asimétrico, se definen respectivamente de la siguiente forma

- *$B_p(x,r) = \{y \in X : p(y-x) < r\}$.*
- *$B_p[x,r] = \{y \in X : p(y-x) \leq r\}$.*

Ejemplo 2.4. Sean $X = \{a,b,c\}$ y $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ definida como

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \text{ ó } (x = a \text{ y } y = b), \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que (X, ρ) es un espacio cuasimétrico. Además, si $r > 0$, se tiene

$$B_\rho(a,r) = \begin{cases} X, & \text{si } r > 1; \\ \{a,b\}, & \text{si } r \leq 1. \end{cases} \qquad B_\rho[a,r] = \begin{cases} X, & \text{si } r \geq 1; \\ \{a,b\}, & \text{si } r < 1. \end{cases}$$

$$B_\rho(b,r) = \begin{cases} X, & \text{si } r > 1; \\ \{b\}, & \text{si } r \leq 1. \end{cases} \qquad B_\rho[b,r] = \begin{cases} X, & \text{si } r \geq 1; \\ \{b\}, & \text{si } r < 1. \end{cases}$$

$$B_\rho(c,r) = \begin{cases} X, & \text{si } r > 1; \\ \{c\}, & \text{si } r \leq 1. \end{cases} \qquad B_\rho[c,r] = \begin{cases} X, & \text{si } r \geq 1; \\ \{c\}, & \text{si } r < 1. \end{cases}$$

Ejemplo 2.5. Sean $X = \mathbb{R}$, $k \geq 0$ y $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ definida como

$$\rho(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{si } x \leq y \\ k & \text{si } x > y \end{cases}$$

El espacio (X, ρ) es un espacio cuasi semimétrico. Además, para todo $x \in X$ y $r > 0$ se tiene

$$B_\rho(x,r) = \begin{cases} (-\infty, x+r), & \text{si } r > k; \\ [x, x+r), & \text{si } r \leq k. \end{cases} \qquad B_\rho[x,r] = \begin{cases} (-\infty, x+r], & \text{si } r \geq k; \\ [x, x+r], & \text{si } r < k. \end{cases}$$

También podemos comprobar que

$$B_{\overline{\rho}}(x,r) = \begin{cases} (x-r,\infty), & \text{si } r > k; \\ (x-r,x], & \text{si } r \leq k. \end{cases} \qquad B_{\overline{\rho}}[x,r] = \begin{cases} [x-r,\infty), & \text{si } r \geq k; \\ [x-r,x], & \text{si } r < k. \end{cases}$$

Podemos observar que

$$\{y \in X : \rho(y,x) < r\} = B_{\overline{\rho}}(x,r) \neq B_\rho(x,r),$$

y también

$$\{y \in X : \rho(x,y) \leq r\} = B_{\overline{\rho}}[x,r] \neq B_\rho[x,r].$$

Definición 2.5. *Sean (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico y $G \subseteq X$. Se dice que G es* abierto *respecto a ρ o ρ-abierto en X, si para cada $x \in G$ existe $r > 0$ tal que $B_\rho(x,r) \subseteq G$. Es* cerrado *respecto a ρ o ρ-cerrado en X si su complemento es ρ-abierto.*

Proposición 2.3. *En un espacio cuasi semimétrico (X,ρ), para todo $x \in X$ el conjunto $B_\rho(x,r)$ es un conjunto ρ-abierto.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Sea $y \in B_\rho(x,r)$ arbitrario y tomemos $r_1 = r - \rho(x,y)$. Sea $z \in B_\rho(y,r_1)$. Entonces

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < \rho(x,y) + r_1 = r.$$

Entonces $z \in B_\rho(x,r)$ y por lo tanto $B_\rho(x,r)$ es ρ-abierto.

$\square$

Proposición 2.4. *En un espacio cuasi semimétrico (X,ρ), toda bola cerrada respecto a ρ es un conjunto $\overline{\rho}$-cerrado.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Sea $y \in X - B_\rho[x,r]$, y $r' = \rho(x,y) - r > 0$.
Para $z \in B_{\overline{\rho}}(y,r')$, como $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, se tiene que

$$\rho(x,z) \geq \rho(x,y) - \rho(z,y) = \rho(x,y) - \overline{\rho}(y,z) > \rho(x,y) - r' = r, \tag{2.4}$$

así $B_{\overline{\rho}}(y,r') \subseteq X - B_\rho[x,r]$ y por lo tanto $B_\rho[x,r]$ es $\overline{\rho}$-cerrado.

$\square$

Notemos que la Proposición 2.3 es similar a un resultado básico en los espacios métricos, pero aunque normalmente uno esperaría que toda bola cerrada respecto a ρ sea ρ-cerrado, como ocurre en los espacios métricos, en general, para los espacios cuasi semimétricos no es así. Observe que para demostrar el resultado anterior, en (2.4) se utiliza la conjugada de ρ, en el caso de los espacios métricos no es necesario esto, ya que se cumple la propiedad de simetría. Para entender mejor esto, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6. Sea el espacio cuasimétrico definido en el Ejemplo 2.1, el cual es un caso particular de los espacios definidos en el Ejemplo 2.5.
Para $x \in X$ y $r > 0$, tenemos que $B_\rho[x,r] = (-\infty, x+r]$. Para que este conjunto sea ρ-cerrado es necesario que su complemento $(x+r,\infty)$ sea ρ-abierto, pero como vimos en el Ejemplo 2.5 las bolas ρ-abiertas tiene la forma $(-\infty,k)$. Es decir, $B_\rho[x,r]$ no es ρ-cerrado.

Los dos siguientes resultados nos permitirán dotar a un espacio cuasi semimétrico (X,ρ) de una topología inducida por ρ.

Teorema 2.1. *Sea (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico. Entonces:*

1. *La intersección de una colección finita de conjuntos ρ-abiertos de X es ρ-abierta.*
2. *La unión de una colección arbitraria de conjuntos ρ-abiertos de X es ρ-abierta.*
3. *La intersección de una colección arbitraria de conjuntos ρ-cerrados de X es ρ-cerrada.*
4. *La unión de una colección finita de conjuntos ρ-cerrados de X es ρ-cerrada.*

Omitimos la demostración del Teorema 2.1, por ser idéntica a la del Teorema 1.1 de teoría clásica, de igual manera que el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Sea (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico. Entonces X y $\emptyset$ son conjuntos ρ-abiertos y ρ-cerrados.*

2.2. La topología de los espacios Cuasi semimétricos

Definición 2.6. *Sea (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico, definimos a la topología τ_ρ del espacio X por la colección de todos los conjuntos ρ-abiertos, es decir,*

$$\tau_\rho = \{A \subseteq X : A \ \textit{es} \ \rho\textit{-abierto}\}$$

llamada la topología inducida por la cuasi semimétrica ρ.

Por el Teorema 2.1 y el Corolario 2.1, podemos asegurar que τ_ρ en efecto es una topología. Si $G \in \tau_\rho$ diremos que G es τ_ρ-abierto, o simplemente que G es ρ-abierto.

Es importante señalar que para definir dicha topología sólo nos enfocamos en ρ, por lo que no es lo mismo si se trabajase con $\overline{\rho}$ o ρ^s, pues usando la conjugada de ρ obtenemos la topología $\tau_{\overline{\rho}}$. Una tercera topología es τ_{ρ^s} generada por la semimétrica ρ^s.

Como en el caso de los espacios métricos, los espacios cuasi semimétricos tienen una propiedad importante en relación a las topologías asociadas, la cual es: el conjunto de todas las bolas μ-abiertas forman una base para la topología τ_μ, es decir, el conjunto

$$\mathcal{B}_\mu = \{B_\mu(x,r) : x \in X, r > 0\}$$

es una base para τ_μ, donde $\mu \in \{\rho, \overline{\rho}, \rho^s\}$. En efecto, sea $A \in \tau_\rho$. Luego, para todo $x \in A$, existe $B_\rho(x,r) \subseteq A$, entonces se tiene que se cumple la inclusión

$$\bigcup_{x \in A} B_\rho(x,r) \subseteq A,$$

además, se cumple que

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_\rho(x,r),$$

por lo tanto, $A = \bigcup_{x \in A} B_\rho(x,r)$.

Ejemplo 2.7. Sea (X,ρ) el espacio cuasimétrico definido en el Ejemplo 2.4.
Las topologías inducidas en este espacio están dadas por

$$\tau_\rho = P(X) - \{\{a\}\} \quad \text{y} \quad \tau_{\overline{\rho}} = P(X) - \{\{b\}\}$$

donde $P(X)$ es el conjunto potencia del conjunto X.

En la demostración del Teorema 1.4 podemos observar que sólo son utilizadas propiedades topológicas. De la misma manera sucede con el Teorema 1.5. Dicho esto, podemos trasladar estos teoremas a los espacios cuasi semimétricos y cuasimétricos. Así, podemos decir que un conjunto es ρ-cerrado si y sólo si coincide con su clausura respecto a τ_ρ.

Dado un espacio con más de una topología, una pregunta natural que surge es si pueden compararse entre sí las topologías o si existe una relación entre ellas; así, en un espacio cuasi semimétrico podemos hacernos las misma preguntas respecto a las topologías inducidas. Con el Ejemplo 2.7 podemos darnos cuenta que no existe ninguna relación de inclusión entre las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$. Aunque no ocurre lo mismo con la topología τ_{ρ^s}, como se ve en el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Sean (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico. Entonces la topología τ_{ρ^s} es más fina que las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$, es decir, $\tau_\rho \subset \tau_{\rho^s}$ y $\tau_{\overline{\rho}} \subset \tau_{\rho^s}$.*

Demostración. Sea $A \in \tau_\rho$, es decir, para cada $x \in A$ existe $B_\rho(x,r) \subseteq A$. Sea $y \in B_{\rho^s}(x,r)$. Entonces

$$\rho(x,y) \leq \rho^s(x,y) < r,$$

lo cual implica que, $y \in B_\rho(x,r)$, con esto, $B_{\rho^s}(x,r) \subseteq B_\rho(x,r)$. Entonces $B_{\rho^s}(x,r) \subseteq A$, es decir, $A \in \tau_{\rho^s}$. Por lo tanto, $\tau_\rho \subset \tau_{\rho^s}$.
De manera análoga, se prueba que $\tau_{\overline{\rho}} \subset \tau_{\rho^s}$.

□

Aunque el espacio (X,ρ) tiene al menos tres topologías asociadas, la mayor parte de este trabajo sólo se utilizarán las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$. Esto es, necesitaremos ver al espacio X como un espacio bitopológico $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$. A continuación se presentan algunos resultados topológicos sobre los espacios cuasi semimétricos.

Teorema 2.2. *Sea (X, ρ) un espacio cuasimétrico. Entonces las topologías τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$ son T_0.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces $\text{máx}\{\rho(x,y), \rho(y,x)\} > 0$, en caso contrario por el axioma QM3 se concluye que $x = y$, lo cual contradice la elección de los puntos. Ahora, si $\rho(x,y) > 0$, sea $r = \rho(x,y)$. Entonces $y \notin B_\rho(x,r)$. Además, $x \notin B_{\overline{\rho}}(y,r)$.
De manera similar, si $\rho(y,x) > 0$, entonces $x \notin B_\rho(y,r)$, donde $r = \rho(y,x)$. Así $y \notin B_{\overline{\rho}}(x,r)$.
Es decir, τ_ρ y $\tau_{\overline{\rho}}$ son T_0.

□

También podemos encontrar diferencias entre los espacios cuasi semimétricos y los espacios métricos en relación a sus propiedades topológicas. Una diferencia importantes entre ellos es que aunque la topología asociada a un espacio métrico siempre es T_0, T_1 y, más aún, es T_2, las topologías asociadas a un espacio cuasi semimétrico son T_0 pero no necesariamente son T_1 y por tanto tampoco T_2, como se observa en el Ejemplo 2.8.

Ejemplo 2.8. Consideremos el espacio cuasimétrico (X, ρ) definido en el Ejemplo 2.4. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y $0 < r < 1$. Si $x \neq a$ se tiene que

$$y \notin B_\rho(x,r) = \{x\}$$

si $x = a$ y $y \neq b$, se tiene el mismo resultado. Por ultimo si $x = a$ y $y = b$, para $0 < r < 1$ se tiene que

$$x \notin B_\rho(y,r) = \{y\}$$

y por lo tanto (X, ρ) es T_0.
Pero para todo $r > 0$, $b \in B_\rho(a,r) = \{a, b\}$. Así, (X, ρ) no es T_1.

Aunque se mencionó que no necesariamente estas topologías son T_1, podemos establecer condiciones necesarias y suficientes para asegurar que sí se cumpla esta propiedad.

Proposición 2.6. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *La topología τ_ρ es T_1*

2) *La topología $\tau_{\overline{\rho}}$ es T_1*

3) *$\rho(x,y) > 0$ para todo $x \neq y$*

Además, si se cumple alguno de los puntos anteriores se tiene que

4) *El espacio bitopológico $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es Hausdorff a pares.*

Demostración. Supongamos que τ_ρ es T_1. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces existe $B_\rho(x, r_1)$ tal que $y \notin B_\rho(x, r_1)$. Supongamos que $\rho(x, y) = 0$ entonces se tiene que $y \in B_\rho(x, r_1)$, lo cual es una contradicción. Así, hemos visto que 2 implica 3. De manera similar se prueba que 2 implica 3.

Supongamos que $\rho(x, y) > 0$, para todo $x \neq y$. Sea $r = \rho(x, y)$. Entonces es obvio que $y \notin B_\rho(x, r)$. También se tiene que $\rho(y, x) > 0$. Sea $r_1 = \rho(y, x)$. Entonces $x \notin B_\rho(y, r_1)$. Por lo tanto τ_ρ es T_1. Con ésto concluimos que 3 implica 1. De manera análoga se prueba la implicación de 3 a 2.

Ahora supongamos que τ_ρ es T_1, y sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y $r = \dfrac{\rho(x, y)}{2}$. Supongamos que el conjunto $A = B_\rho(x, r) \cap B_{\overline{\rho}}(r, y)$ es no vacío. Entonces existe $z \in A$ tal que $z \in B_\rho(x, r)$ y $z \in B_{\overline{\rho}}(r, y)$. Luego

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, z) + \overline{\rho}(y, z) < r + r = \rho(x, y)$$

lo cual contradice que un real es igual a sí mismo. Así, $A = \emptyset$ y por lo tanto X es Hausdorff a pares.

$\square$

Ejemplo 2.9. Sea $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la cuasimétrica definida como

$$\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & \text{si } x > y; \\ 2(y - x) & \text{si } x \leq y. \end{cases}$$

Notemos que para $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$,

$$B_\rho(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : \rho(x, y) < r\} = (x - r, x + \frac{1}{2}r]$$

y

$$B_{\overline{\rho}}(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : \rho(y, x) < r\} = [x - \frac{1}{2}r, x + r).$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x \neq y$, y sin perdida de generalidad suponemos que $x < y$; sea $r = \dfrac{1}{2}(y - x)$, entonces

$$y \notin B_\rho(x, r) \quad \text{y} \quad x \notin B_\rho(y, r).$$

Además, se cumple también que

$$y \notin B_{\overline{\rho}}(x, r) \quad \text{y} \quad x \notin B_{\overline{\rho}}(y, r).$$

Así, la topología τ_ρ es T_1, y también lo es la topología $\tau_{\overline{\rho}}$. Observemos que $\rho(x, y) > 0$ para todo $x \neq y$. Con esto, hemos visto que en efecto se tienen las equivalencias de la Proposición 2.6.

Luego, si $x \neq y$, $x < y$ y $r = \dfrac{1}{2}(y - x)$

$$y \notin B_\rho(x, r) \quad \text{y} \quad x \notin B_{\overline{\rho}}(y, r).$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R}, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es Hausdorff a pares.

Del Ejemplo 2.8, podemos observar que la topología τ_ρ no es T_1, y que $\rho(a, b) = 0$, es decir, las equivalencias de la Proposición 2.6 se siguen cumpliendo.

Proposición 2.7. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico. Si el espacio bitopológico asociado $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es T_0 a pares, entonces $\rho(x, y) > 0$ para cualquier par de puntos distintos $x, y \in X$.*

Demostración. Supongamos que existen $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y $\rho(x, y) = 0$, entonces se tiene que $x \in B_\rho(y, r)$ y $y \in B_{\overline{\rho}}(x, y)$ para todo $r > 0$, lo cual contradice al hecho de que X es T_0 a pares.

□

Teorema 2.3. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *El espacio bitopológico $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es T_0 a pares.*

2. *El espacio bitopológico $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es T_1 a pares.*

3. *El espacio bitopológico $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es Hausdorff a pares.*

Demostración. Veamos que 1 implica 2. Supongamos que X es T_0 a pares. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, por la Proposición 2.7, se tiene que $\rho(x, y) > 0$ y además $\overline{\rho}(y, x) > 0$. Sean $r = \rho(x, y)$. Entonces $y \notin B_\rho(x, r)$ y $x \notin B_{\overline{\rho}}(y, r)$, es decir, $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es T_1 a pares.

Ahora, veamos que 1 implica 3. Supongamos que X es T_0 a pares. Entonces $\rho(x, y) > 0$, para todo $x \neq y$. Por la Proposición 2.6 $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es Hausdorff a pares.

Un espacio de Hausdorff es T_1, y este a su vez es T_0. Por lo tanto los hechos 2 implica 1, 3 implica 1 y 3 implica 2 son inmediatos.

□

Ejemplo 2.10. Sea $X = \mathbb{Z}$ y $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ la cuasimétrica definida por:

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ \frac{1}{n} & \text{si } m > n,\ m \text{ par y } n \text{ impar} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se prueba que, para $x \in X$ y $r > 0$: Si x es par,

$$B_\rho(x,r) = \begin{cases} \{y \in X : y < x,\ \ y \text{ impar}\} \cup \{x\} & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

y

$$B_{\overline{\rho}}(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Si x es impar,

$$B_\rho(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

y

$$B_{\overline{\rho}}(x,r) = \begin{cases} \{y \in X : y > x,\ \ y \text{ par }\} \cup \{x\} & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, y sin perdida de generalidad supongamos que $x < y$. Sea $0 < r \leq 1$, entonces $y \notin B_\rho(x,r)$, es decir, $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es T_0 a pares. Mas aún, se cumple también que $x \notin B_{\overline{\rho}}(y,r)$. Así, $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es T_1 a pares. Por último, notemos que $B_\rho(x,r) \cap B_{\overline{\rho}}(y,r) = \emptyset$. Por lo tanto, $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es Hausdorff a pares.

Definición 2.7. *Sea (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico. Para $x \in X$ y $Y \subseteq X$ se definen $\rho(x,Y)$ y $\rho(Y,x)$ como*

$$\rho(x,Y) = \text{ínf}\{\rho(x,y) : y \in Y\} \quad y \quad \rho(Y,x) = \text{ínf}\{\rho(y,x) : y \in Y\}.$$

Lema 2.1. *Sean (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico, A un subconjunto no vacío de X y $x, x' \in X$. Entonces los siguientes enunciados son verdaderos:*

1. $\rho(x,A) \leq \rho(x,x') + \rho(x',A)$ *y* $\rho(A,x') \leq \rho(A,x') + \rho(x',x)$,
2. $\rho(x,A) = 0$ *si, y solo si,* $x \in \tau_\rho\text{-cl}(A)$.

Demostración. 1. Para todo $y \in A$, se cumple que

$$\rho(x,A) \leq \rho(x,y) \leq \rho(x,x') + \rho(x',y).$$

Tomando el ínfimo con respecto a $y \in A$, obtenemos que $\rho(x,A) \leq \rho(x,x') + \rho(x',A)$. La segunda desigualdad se prueba de manera similar.

2. Sea $x \in \tau_\rho\text{-cl}(A)$. Entonces, para todo $r > 0$, $B_\rho(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Equivalentemente, para todo $r > 0$, existe $a \in A$ tal que $\rho(x,a) < r$. Así, $\rho(x,A) = 0$.

□

Con el Lema 2.1, si A es ρ-cerrado, se tiene que

$$A = \{y \in X : p(y, A) = 0\}$$

Teorema 2.4. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico. Entonces el espacio bitopológico asociado $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es normal a pares.*

Demostración. Sean $A, B \subseteq X$ tales que A es τ_ρ-cerrado y B es $\tau_{\overline{\rho}}$-cerrado y disjuntos. Entonces $A = \{y \in X : p(y, A) = 0\}$ y $B = \{y \in X : \overline{\rho}(y, B) = 0\}$.
Sean

$$U = \{x \in X : \rho(x, A) < \overline{\rho}(x, B)\}$$

y

$$V = \{x \in X : \overline{\rho}(x, B) < \rho(x, A)\}.$$

Observemos que $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U$ y $B \subset V$. Veremos que $U \in \tau_\rho$ y $V \in \tau_{\overline{\rho}}$.
Sea $x_0 \in V$. Entonces se cumple que $\rho(x_0, A) - \overline{\rho}(x_0, B) > 0$. Sea $\rho(x_0, A) - \overline{\rho}(x_0, B) = k$. Tomemos $x \in B_{\overline{\rho}}(x_0, \frac{k}{2})$. Así ,

$$\overline{\rho}(x, B) \leq \overline{\rho}(x, x_0) + \overline{\rho}(x_0, B) = \rho(x_0, x) + \overline{\rho}(x_0, B)$$

y también

$$\rho(x_0, A) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, A).$$

De aquí, $\rho(x, A) \geq \rho(x_0, A) - \rho(x_0, x)$. Luego,

$$\rho(x, A) - \overline{\rho}(x, B) \geq \rho(x_0, A) - \overline{\rho}(x_0, B) - 2\rho(x_0, x) > k - k = 0,$$

con lo cual $\overline{\rho}(x, B) < \rho(x, A)$, es decir, $x \in V$. Así, $B_{\overline{\rho}}(x_0, \frac{k}{2}) \subseteq V$, y por lo tanto $V \in \tau_{\overline{\rho}}$.
Por otra parte si $x_1 \in U$, se cumple $\overline{\rho}(x_1, B) - \rho(x_1, A) > 0$. Sean $\overline{\rho}(x_1, B) - \rho(x_1, A) = k_1$ y $x \in B_\rho(x_1, \frac{k_1}{2})$. Luego,

$$\rho(x_1, A) \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, A)$$

y

$$\overline{\rho}(x, B) \leq \overline{\rho}(x, x_1) + \overline{\rho}(x_1, B) = \rho(x_1, x) + \overline{\rho}(x_1, B).$$

De donde $\overline{\rho}(x_1, B) \geq \overline{\rho}(x, B) - \rho(x_1, x)$. De manera que:

$$\overline{\rho}(x_1, B) - \rho(x_1, A) \geq \overline{\rho}(x, B) - \rho(x, A) - 2\rho(x_1, x) > k_1 - k_1 = 0.$$

Por lo tanto, se concluye que $U \in \tau_\rho$.

□

En ocasiones, cuando se trabaja con espacios topológicos, una pregunta importante es: ¿el espacio es Hausdorff? En el caso bitopológico, ¿es Hausdorff a pares? El Teorema 2.3 nos da condiciones necesarias y suficientes para ello, pero en ocasiones puede ser difícil o laborioso comprobarlas. La Proposición 2.6 nos presenta condiciones mas fáciles de comprobar. Nos dice que un espacio bitopológico $(X, \tau_\rho, \tau_{\overline{\rho}})$ es Hausdorff a pares si y sólo si ρ y $\overline{\rho}$ son cuasimétricas que cumplen con la condición

$$\rho(x, y) = 0 \text{ si, y solo si } x = y.$$

2.3. Propiedades topológicas de los espacios seminormados asimétricos

En los espacios seminormados asimétricos también podemos definir una topología a partir de la seminorma asimétrica.

Definición 2.8. *Sea (X, p) un espacio seminormado asimétrico, se define la topología τ_p del espacio X por*

$$\tau_p = \tau_{\rho_p},$$

llamada la topología inducida por la seminorma asimétrica, donde ρ_p es como se definió en la ecuación (2.3).

Observemos que τ_ρ puede ser vista como una topología sobre un espacio cuasi semimétrico. Y así se tiene que, en general la topología generada por una norma asimétrica es T_0 pero no T_1, y por lo tanto tampoco de Hausdorff. Una condición para que la topología de un espacio normado asimétrico sea de Hausdorff fue encontrada por Garcia-Raffi, Romaguera y Sánchez-Pérez [8], en términos de la función $p^\diamond$ asociada a la seminorma asimétrica p.

Definición 2.9. *Sea (X, p) un espacio seminormado asimétrico. Se define la función $p^\diamond : X \to [0, \infty)$ por*

$$p^\diamond(x) = \text{ínf}\{p(y) + p(y - x) : y \in X\}, \ \ \forall x \in X. \tag{2.5}$$

En el siguiente resultado se presentan algunas propiedades de $p^\diamond$.

Proposición 2.8. *Sea (X, p) un espacio seminormado asimétrico. Entonces la función $p^\diamond$ definida en (2.5) es la seminorma (simétrica) más grande en X tal que $p^\diamond \leq p$.*

Demostración. Remplazando y por $y - x$ en (2.5) tenemos

$$\begin{aligned} p^\diamond(-x) &= \text{ínf}\{p(y) + p(y + x) : y \in X\} \\ &= \text{ínf}\{p(y - x) + p((y - x) + x) : y \in X\} = p^\diamond(x). \end{aligned}$$

Si $\alpha \geq 0$, y remplazando y por αy, obtenemos

$$\begin{aligned} p^{\diamond}(\alpha x) &= \operatorname{ínf}\{p(y) + p(y - \alpha x) : y \in X\} \\ &= \operatorname{ínf}\{\alpha p(y) + \alpha p(y - x) : y \in X\} \\ &= \alpha \operatorname{ínf}\{p(y) + p(y - x) : y \in X\} = \alpha p^{\diamond}(x). \end{aligned}$$

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned} p^{\diamond}(x + y) &= \operatorname{ínf}\{p(z + w) + p(z + w - (x + y)) : z, w \in X\} \\ &\leq p(z + w) + p(z + w - x - y), \quad \forall z, w \in X \\ &\leq p(z) + p(w) + p(z - x) + p(w - y), \quad \forall z, w \in X, \end{aligned}$$

tomando el ínfimo respecto a z y w,

$$\begin{aligned} p^{\diamond}(x + y) &\leq \operatorname{ínf}\{p(z) + p(z - x) : z \in X\} + \operatorname{ínf}\{p(w) + p(w - y) : w \in X\} \\ &= p^{\diamond}(x) + p^{\diamond}(y). \end{aligned}$$

Así, $p^{\diamond}$ es una seminorma simétrica.
Sea q otra seminorma en X tal que $q \leq p$. Supongamos que $p^{\diamond}(x) < q(x) \leq p(x)$, para algún $x \in X$. Por definición de $p^{\diamond}$, existe $y \in X$ tal que

$$p^{\diamond}(x) = p(y) + p(y - x) < q(x),$$

luego,

$$q(x) \leq q(y) + q(x - y) = q(y) + q(y - x) \leq p(y) + p(y - x) < q(x).$$

Esto contradice el hecho de que un número es igual a sí mismo. Por lo tanto $q \leq p^{\diamond}$.

□

Teorema 2.5. *Sea (X, p) un espacio seminormado asimétrico.*

1. *La topología τ_p es T_0 si y sólo si $p(x) > 0$ o $p(-x) > 0$, para cada $x \neq 0$*

2. *La topología τ_p es T_1 si y sólo si $p(x) > 0$, para cada $x \neq 0$*

3. *La topología τ_p es Hausdorff si y sólo si $p^{\diamond}(x) > 0$, para cada $x \neq 0$.*

Demostración.

1. Si $p(x) > 0$ o $p(-x) > 0$ para cada $x \neq 0$, se tiene que $\rho_p(x, y) > 0$, para $x \neq y$, y por la Proposición 2.6, $\tau_p = \tau_{\rho_p}$ es T_0.

2. Se prueba de manera similar a 1 utilizando la Proposición 2.6.

3. Supongamos primero que $p^\diamond(x) > 0$, para cada $x \neq 0$, lo cual implica que $p^\diamond(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, es decir, $p^\diamond$ es una norma en X, y así la topología $\tau_{p^\diamond}$ generada por $p^\diamond$ es Hausdorff. La desigualdad $p^\diamond \leq p$ implica que $\tau_p \subseteq \tau_{p^\diamond}$. Entonces τ_p es de Hausdorff también.
   Por otra parte, supongamos que $p^\diamond(x) = 0$ para algún $x \neq 0$. Por la Definición 2.9, existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim_n [p(x_n) + p(x_n - x)] = p^\diamond(x) = 0$. Esto implica que $\lim_n p(x_n) = 0$ y $\lim_n p(x_n - x) = 0$. Con esto, para todo $U, V \in \tau_p$ con $0 \in U$ y $x \in V$ se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$, es decir, la topología τ_p no es de Hausdorff.

□

Lema 2.2. *Sea (X, p) un espacio seminormado asimétrico de Hausdorff. Entonces $(X, \overline{p})$ es también un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $x \neq 0$, luego

$$\begin{aligned}
\overline{p}^\diamond(x) &= \inf\{\overline{p}(y) + \overline{p}(y - x) : y \in X\} \\
&= \inf\{p(-y) + p(-y - (-x)) : y \in X\} \\
&= \inf\{p(y) + p(y - (-x)) : y \in X\} = p^\diamond(-x) = p(x).
\end{aligned}$$

Como (X, p) es de Hausdorff, tenemos que $p(x) > 0$, para $x \neq 0$. Por lo tanto, $(X, \overline{p})$ es de Hausdorff.

□

2.4. Sucesiones

Como en cualquier otro conjunto, en los espacios cuasi semimétricos también se habla de sucesiones. En esta sección se mostrarán algunas definiciones y resultados similares a los que se conocen en espacios métricos, pero también se verán algunas diferencias que existen entre estos espacios respecto a sucesiones.

Definición 2.10. *Sea (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico. Una sucesión $\{x_n\}$ en X,* converge *a $x \in X$ respecto a ρ, si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero positivo k tal que $n > k$, implica que $\rho(x, x_n) < \epsilon$. Al punto x se le llama punto ρ-límite de la sucesión.*
La convergencia respecto a ρ se llama ρ-convergencia y se denota por $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Si la sucesión no converge a x respecto a ρ lo denotaremos por $x_n \overset{\rho}{\nrightarrow} x$.

Nota 2.3. Así como en los espacios métricos, la definición de ρ-convergencia se puede caracterizar de la siguiente manera:

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \quad \textit{si y sólo si} \quad \rho(x, x_n) \to 0$$

Nota 2.4. En relación a un espacio normado (seminormado) asimétrico (X, p), diremos que una sucesión $\{x_n\}$ en el espacio (X, p) cumple con la definición de ρ-convergencia, si la cumple en (X, ρ_p). Es decir, una sucesión $\{x_n\}$ en el espacio (X, p) es p-convergente si es ρ_p-convergente.

En los espacios cuasi semimétricos, como en el caso métrico, podemos caracterizar la ρ-cerradura de un conjunto en relación a sucesiones, la demostración del resultado como se verá es similar al caso métrico.

Proposición 2.9. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico y $A \subseteq X$. Si A es ρ-cerrado, entonces cualquier sucesión en A que converja, converge a un elemento de A.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en A tal que $x_n \xrightarrow{\rho} x$, para algún $x \in X$.
Supongamos que $x \in A^c$, como A^c es ρ-abierto, existe $r > 0$ tal que $B_\rho(x, r) \subseteq A^c$. Además, dado que $x_n \xrightarrow{\rho} x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x, x_n) < r$, para $n \geq k$. Es decir, $x_n \in B_\rho(x, r)$, lo cual contradice el hecho de que $x_n \in A$, para todo n. Por lo tanto $x \in A$.

□

Algunos resultados que se deducen de la Proposición 2.9, similares al caso métrico son:

Proposición 2.10. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico y $A \subset X$.*

1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en A tal que $x_n \xrightarrow{\rho} x$, entonces $x \in \rho\text{-cl}(A)$.*

2. *Dado $x \in \rho\text{-cl}(A)$, entonces existe una sucesion $\{x_n\}$ en A tal que $x_n \xrightarrow{\rho} x$.*

Demostración.
1. Como $A \subset \rho\text{-cl}(A)$, se tiene que $x_n \in \rho\text{-cl}(A)$, para todo n. Luego, por ser $\rho\text{-cl}(A)$ ρ-cerrado por la Proposición 2.9, $x \in \rho\text{-cl}(A)$.

2. Sea $x \in \rho\text{-cl}(A)$. Entonces $B_\rho(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n \in B_\rho(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Así,

$$\rho(x, x_n) < \frac{1}{n} \to 0.$$

   Es decir, $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

□

En el caso de los espacios métricos, se sabe que una sucesión puede converger a un punto a lo sumo. A diferencia de estos espacios, una sucesión en un espacio cuasi semimétrico puede converger a más de un punto.

Así, denotamos por $L_\rho(\{x_n\})$ al conjunto de todos los ρ-límites de la sucesión $\{x_n\}$, es decir,

$$L_\rho(\{x_n\}) = \{x \in X : x_n \xrightarrow{\rho} x\} \tag{2.6}$$

En el siguiente ejemplo vemos que en efecto una sucesión en un espacio cuasi semimétrico puede ρ-converger a más de un punto.

Ejemplo 2.11. Sea el espacio cuasimétrico $(\mathbb{R}, \rho)$ donde

$$\rho(x,y) = \begin{cases} y - x, & \text{si } x \leq y; \\ 0, & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Tomemos la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ en $\mathbb{R}$. Notemos que $\rho(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \to 0$ y así $\frac{1}{n} \xrightarrow{\rho} 0$.
También notemos que si $x > 0$, entonces existe k entero tal que $\frac{1}{n} < x$, para $n > k$. Entonces $\rho(x, \frac{1}{n}) = 0 \to 0$, es decir, $\frac{1}{n} \xrightarrow{\rho} x$. Por lo tanto, tenemos que $L_\rho(\{x_n\}) = [0, \infty)$.
Además, $\overline{\rho}(x, x_n) = \rho(x_n, x) = 0$ si $x \leq 0$. Entonces $L_{\overline{\rho}}(\{x_n\}) = (-\infty, 0]$.
Observemos que $\rho(1, \dfrac{1}{n}) \to 0$, pero $\rho(\dfrac{1}{n}, 1) = 1 - \dfrac{1}{n} \to 1$. Dicho esto, la condición $\rho(x, x_n) \to 0$ no es equivalente a $\rho(x_n, x) \to 0$, ésto se debe principalmente a la falta de simetría de la función.

Con el ejemplo anterior, hemos visto que una sucesión no sólo puede ρ-converger a más de un punto, sino que puede ρ-converger a un número infinito de puntos. También, que los conjuntos $L_\rho(\{x_n\})$ y $L_{\overline{\rho}}(\{x_n\})$ no necesariamente son iguales.

Proposición 2.11. *Sean (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Entonces el conjunto $L_\rho(\{x_n\})$ definido en (2.6) es ρ-cerrado.*

Demostración. Sean $Y = X - L_\rho(\{x_n\})$ y $x \in Y$, entonces $x_n \overset{\rho}{\nrightarrow} x$, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que $\rho(x, x_n) > \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sean $0 < r < \epsilon$, $y \in B_\rho(x, r)$ y $\epsilon_1 = \epsilon - r > 0$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$, $\rho(x, x_n) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_n)$, así, se tiene que

$$\rho(y, x_n) \geq \rho(x, x_n) - \rho(x, y) > \rho(x, x_n) - r > \epsilon - r = \epsilon_1.$$

Luego, $x_n \overset{\rho}{\nrightarrow} y$, lo cual implica que $y \in Y$ y $B_\rho(x, r) \subset Y$. Por lo tanto, $L_\rho(\{x_n\})$ es ρ-cerrado. $\square$

Aunque los espacios cuasi semimétricos y los espacios métricos no compartan el resultado de la unicidad del límite, existen otros resultados que sí comparten en relación a sucesiones. En particular, se tiene la siguiente caracterización de la convergencia de sucesiones.

Teorema 2.6. *Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio cuasi semimétrico (X, ρ), ρ-converge a un punto $x \in X$ si y sólo si toda subsucesión de $\{x_n\}$ ρ-converge a x.*

La demostración del Teorema 2.6 es idéntica a la conocida para el caso de los espacios métricos, la razón de ésto es que en tal demostración, no se utiliza en ninguna parte la propiedad de simetría.

Hemos visto que una sucesión no necesariamente tiene un único punto límite. Así, surge la pregunta, ¿Que condiciones debe cumplir una sucesion $\{x_n\}$ o el espacio X para que si converge la sucesión, el punto límite sea único? Una respuesta a esta pregunta se da con el siguiente resultado.

Proposición 2.12. *Sean (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico de Hausdorff y $\{x_n\}$ una sucesión ρ-convergente a x en (X, ρ). Entonces $L_p(\{x_n\}) = \{x\}$.*

Demostración. Sea $y \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{\rho} y$ y $x \neq y$. Por ser X de Hausdorff, existen $U_x, U_y \in \tau_\rho$ tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$. Sean $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que $B_\rho(x, \epsilon_1) \subseteq U_x$ y $B_\rho(y, \epsilon_2) \subseteq U_y$. Como x, y son puntos límites de $\{x_n\}$, encontramos $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$p(x, x_n) < \epsilon, \;\; \forall n \geq k_1 \quad \text{y} \quad p(x, x_m) < \epsilon, \;\; \forall m \geq k_2.$$

Para $n > k = \max\{k_1, k_2\}$, $x_n \in U_x$ y $x_n \in U_y$, lo cual contradice el hecho que U_x y U_y son disjuntos. Por lo tanto $x = y$.

□

2.5. Sucesiones de Cauchy

Como en todo espacio métrico en el que se habla sobre sucesiones, uno puede plantearse la pregunta: ¿se puede hablar sobre sucesiones de Cauchy? La falta de simetría en la definición de los espacios cuasi semimétricos causa grandes problemas, concernientes a la definición de sucesiones de Cauchy. En estos espacios existe una gran variedad de definiciones alternativas de sucesiones de Cauchy, de las cuales cada una tiene sus ventajas y desventajas.

Definición 2.11. *Sea ρ una cuasi semimétrica en X. Una sucesión $\{x_n\}$ en X es llamada:*

1. ρ-Cauchy izquierdo (derecho) *si para todo $\epsilon > 0$ existe un punto $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x, x_s) < \epsilon$, para todo $s \geq k$ (respectivamente $\rho(x_s, x) < \epsilon$, para todo $s \geq k$).*

2. ρ-Cauchy *si para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_r, x_s) < \epsilon$, para todo $r, s \geq k$.*

3. K-Cauchy izquierdo (derecho) *si para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_r, x_s) < \epsilon$, para $s \geq r \geq k$ (respectivamente $\rho(x_r, x_s) < \epsilon$, para $r \geq s \geq k$).*

4. Débilmente K-Cauchy izquierdo (derecho) *si para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_k, x_s) < \epsilon$, para todo $s \geq k$ (respectivamente $\rho(x_s, x_k) < \epsilon$, para todo $s \geq k$).*

Nota 2.5. Si ρ es una cuasi semimétrica simétrica, las definiciones anteriores coinciden con la definición usual de sucesión de Cauchy.

Nota 2.6. En relación a un espacio normado (seminormado) asimétrico (X, p), diremos que una sucesión $\{x_n\}$ en el espacio (X, p) cumple con la definición 2.11, si la cumple en el espacio (X, ρ_p). Es decir, la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy (referente a cualquier definición de Cauchy) en el espacio (X, p) si es de Cauchy en el espacio (X, ρ_p).

Proposición 2.13. *1. Las siguientes implicaciones son verdaderas para cualquier sucesión en un espacio cuasi semimétrico:*
ρ-Cauchy $\Rightarrow$ K-Cauchy izquierdo $\Rightarrow$ débilmente K-Cauchy izquierdo $\Rightarrow$ ρ-Cauchy izquierdo. La cadena de implicaciones es válida también si se sustituye la palabra izquierdo por la palabra derecho.

2. *Una sucesión es ρ-Cauchy izquierdo si y sólo si es $\overline{\rho}$-Cauchy derecho.*

3. *Una sucesión ρ-convergente es ρ-Cauchy izquierdo y una sucesión $\overline{\rho}$-convergente es ρ-Cauchy derecho.*

4. *Una sucesión es ρ^s-Cauchy si y sólo si es K-Cauchy izquierdo y derecho.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio cuasi semimétrico (X, ρ).

1. Supongamos que $\{x_n\}$ es:

   - ρ-Cauchy. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_r, x_s) < \epsilon$, para todo $r, s \geq k$. En particular si $s \geq r \geq k$, $\rho(x_r, x_s) < \epsilon$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es K-Cauchy izquierdo.
   - K-Cauchy izquierdo. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_r, x_s) < \epsilon$, para todo $s \geq r \geq k$. Si $r = k$ se cumple que $\rho(x_k, x_s) < \epsilon$, para todo $s \geq k$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es débilmente K-Cauchy izquierdo.
   - Débilmente K-Cauchy izquierdo. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_k, x_s) < \epsilon$, para todo $s \geq k$. Si $x = x_k$ se cumple que $\rho(x, x_s) < \epsilon$, para todo $s \geq k$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es ρ-Cauchy izquierdo.

   Análogamente se prueban para el caso derecho.

2. La prueba se obtiene de la equivalencia de los siguientes enunciados:
   $\{x_n\}$ es ρ-Cauchy izquierdo.
   Para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x, x_s) < \epsilon$, para todo $s \geq k$.
   Para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\rho}(x_s, x) < \epsilon$, para todo $s \geq k$.
   $\{x_n\}$ es $\overline{\rho}$-Cauchy derecho.

3. Suponga que $\{x_n\}$ es ρ-convergente en (X, ρ), es decir, existe $x \in X$ tal que $\rho(x, x_n) \to 0$, esto es, para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mid \rho(x, x_n) - 0 \mid = \rho(x, x_n) < \epsilon$, para todo $n \geq k$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es ρ-Cauchy izquierdo.
   Análogamente se prueba que una sucesión $\overline{\rho}$-convergente es ρ-Cauchy derecho.

4. Supongamos primero que $\{x_n\}$ es ρ^s-Cauchy. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^s(x_r, x_s) < \epsilon$, para todo $r, s \geq k$. Sabemos que $\rho(x_r, x_s) \leq \rho^s(x_r, x_s)$, lo cual implica que $\{x_n\}$ es ρ-Cauchy y por el inciso 1), es K-Cauchy izquierdo y derecho.
   Para el recíproco, supongamos que $\{x_n\}$ es K-Cauchy izquierdo y derecho. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\rho(x_r, x_s) < \epsilon/2$, para todo $s \geq r \geq k_1$ y $\rho(x_m, x_n) <$

$\epsilon/2$, para todo $m \geq n \geq k_2$.
Sean k=max$\{k_1, k_2\}$ y $r_1, r_2 \geq k$. Entonces

$$\rho^s(x_{r_1}, x_{r_2}) \leq \rho(x_{r_1}, x_{r_2}) + \rho(x_{r_2}, x_{r_1}) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es ρ^s-Cauchy.

$\square$

Las recíprocas de las implicaciones de la Proposición 2.13.1 no necesariamente son ciertas. A continuación daremos algunos ejemplos y contra-ejemplos en los que veremos con más detalle estas implicaciones.

Ejemplo 2.12. Sea X=[0,1] y $\rho_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ la cuasimétrica definida por:

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq y; \\ 1, & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Ejemplo 2.12.1 Sea $\{x_n\}$ la sucesion en X definida por

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \frac{1}{3} + 3^{-n}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Notemos que para todo $\epsilon > 0$, $\rho_1(\frac{1}{3}, x_n) = 0 < \epsilon$, para todo $n \geq 1$, es decir, $\{x_n\}$ es ρ_1-Cauchy izquierdo.
Además, $\rho_1(x_n, 1) = 0 < \epsilon$ para todo $n \geq 1$, esto es, $\{x_n\}$ es ρ_1-Cauchy derecho.
Sin embargo, si $0 < \epsilon < 1$, n impar y m par, tenemos que $x_m < x_n$ y por tanto $\rho_1(x_n, x_m) = 1 > \epsilon$.
Así, $\{x_n\}$ no es débilmente K-Cauchy izquierdo, ni derecho, ni ρ_1-Cauchy.

Ejemplo 2.12.2 Ahora, consideremos la sucesión $\{y_n\}$ en X definida por

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1; \\ \frac{1}{n-1}, & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Sean $\epsilon > 0$ y k=1. Entonces para todo $r > k$, $\rho_1(y_k, y_r) = \rho_1(0, \frac{1}{r-1}) = 0 < \epsilon$. Luego, $\{y_n\}$ es débilmente K-Cauchy izquierdo.
Pero para $0 < \epsilon < 1$, si $s \geq r > k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $\rho_1(y_r, y_s) = \rho_1(\frac{1}{r-1}, \frac{1}{s-1}) = 1 > \epsilon$.
Por lo tanto, $\{y_n\}$ no es K-Cauchy izquierdo.

Ejemplo 2.13. Sea X=(0,1) y $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ la cuasimétrica definida por:

$$\rho_2(x,y) = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ 1 & \text{si } x < y \end{cases}$$

Ejemplo 2.13.1 Definamos la sucesión $\{x_n\}$ por $x_n = (n+1)^{-1}$.
Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{1}{\epsilon}$, si $s \geq r \geq k$. Se tiene que

$$\rho_2(x_r, x_s) = (r+1)^{-1} - (s+1)^{-1} < r^{-1} - (s+1)^{-1} < r^{-1} < k^{-1} < \epsilon.$$

Así, $\{x_n\}$ es K-Cauchy izquierdo y por lo tanto ρ_2-Cauchy izquierdo.
Sin embargo, para $0 < \epsilon < 1$ y $x \in X$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$, $x_n < x$. Entonces $\rho_2(x_n, x) = 1 > \epsilon$ y de aquí se tiene que $\rho_2(x_n, x) \nrightarrow 0$.
Por lo tanto, $\{x_n\}$ no es ρ_2-Cauchy derecho ni es ρ_2-convergente en X.

Ejemplo 2.13.2 Ahora consideremos la sucesión $\{y_n\}$ en X definida como $y_n = 1 - x_n$.
Sea $\epsilon > 0$. De igual forma tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{1}{\epsilon}$; si $r \geq s \geq k$, se tiene que

$$\rho_2(y_r, y_s) = (1 - (r+1)^{-1}) - (1 - (s+1)^{-1}) = (s+1)^{-1} - (r+1)^{-1} < k^{-1} < \epsilon.$$

Lo que implica que $\{y_n\}$ es K-Cauchy derecho, y por lo tanto, ρ_2-Cauchy derecho.
Sin embargo, para $0 < \epsilon < 1$ y $x \in X$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$, $x < y_n$. Entonces $\rho_2(x, y_n) = 1 > \epsilon$ y también se tiene que $\overline{\rho_2}(y_n, x) \nrightarrow 0$.
Por lo tanto, $\{y_n\}$ no es ρ_2-Cauchy izquierdo ni es $\overline{\rho_2}$-convergente en X.

Ejemplo 2.14. Sea $X = \mathbb{Z}$ y $\rho_3 : X \times X \to \mathbb{R}$ la cuasimétrica definida por:

$$\rho_3(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ \frac{1}{n} & \text{si } m > n,\ m \text{ par y } n \text{ impar} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Consideremos la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = 2n$ y sea $\epsilon > 0$. Tomemos $k \in X$ tal que k es impar y $k > \frac{1}{\epsilon}$. Entonces se cumple que para todo $n \geq k$, $\rho(x_n, k) = \frac{1}{k} < \epsilon$. Por lo tanto $\{x_n\}$ es ρ-Cauchy derecho. Sin embargo, para $0 < \epsilon < 1$ y $m < n$, $\rho(m,n) = 1 > \epsilon$. Entonces $\{x_n\}$ no es débilmente K-Cauchy derecho.

En la tabla 2.2 se resumen los puntos importantes vistos en los ejemplos anteriores. En ella, se marca cada ejemplo visto anteriormente. Cada columna hace referencia a una sola sucesión vista, con $\surd$ hacemos referencia al tipo de sucesión de Cauchy que es la sucesión, mientras que con X indicamos que la sucesión vista no es de ese tipo. Los espacios en blanco nos indica que no se sabe si es o no de ese tipo la sucesión analizada.

Tipo de sucesión \ Ejemplo	Ejemplo 2.12.1	Ejemplo 2.12.2	Ejemplo 2.13.1	Ejemplo 2.13.2	Ejemplo 2.14
ρ-Cauchy	X				
K-Caucy izquierdo		X	$\surd$		
K-Cauchy derecho				$\surd$	
débilmente K-Cauchy izquierdo	X	$\surd$			
débilmente K-Cauchy derecho	X				X
ρ-Cauchy izquierdo	$\surd$		$\surd$	X	
ρ-Cauchy derecho	$\surd$		X	$\surd$	$\surd$
ρ-convergente			X		
$\overline{\rho}$-convergente				X	

Tabla 2.2: Tabla que muestra las conclusiones de los ejemplos sobre sucesiones de Cauchy

En [11] podemos encontrar otros resultados que nos aseguran la unicidad del límite de una sucesión. Para ello necesitamos la siguiente condición:

$$\rho(x, y) = 0 \text{ si y solo si } x = y, \ \ \forall x, y \in X \tag{2.7}$$

Teorema 2.7. *Sean (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico que satisface (2.7) y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Sea $x \in X$ tal que $x \in L_\rho(\{x_n\})$ y $x \in L_{\overline{\rho}}(\{x_n\})$. Entonces $L_\rho(\{x_n\}) = L_{\overline{\rho}}(\{x_n\}) = \{x\}$. Además, $\{x_n\}$ es ρ-Cauchy.*

Demostración. Primero veamos que la sucesión es ρ-Cauchy.
Sea $\epsilon > 0$. Entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\overline{\rho}(x, x_r) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $r > k_1$ y $\rho(x, x_s) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $s > k_2$.
Sean $k = \text{máx}\{k_1, k_2\}$ y $r, s \geq k$. Entonces

$$\rho(x_r, x_s) \leq \rho(x_r, x) + \rho(x, x_s) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es ρ-Cauchy.
Falta probar que $L_\rho(\{x_n\}) = L_{\overline{\rho}}(\{x_n\}) = \{x\}$. Sea $y \in L_\rho(\{x_n\})$. Luego

$$\rho(y, x) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, x) = \rho(y, x_n) + \overline{\rho}(x, x_n) \to 0,$$

así $\rho(y,x) = 0$, lo cual implica que $x = y$. Con esto probamos que $L_\rho(\{x_n\}) = \{x\}$. De manera similar se prueba que $L_{\overline{\rho}}(\{x_n\}) = \{x\}$.

□

Teorema 2.8. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio cuasi semimétrico (X,ρ). Si ρ cumple (2.7) y $L_\rho(\{x_n\})$ ($L_{\overline{\rho}}(\{x_n\})$) consta de más de un elemento, entonces $L_{\overline{\rho}}(\{x_n\}) = \emptyset$ ($L_\rho(\{x_n\}) = \emptyset$).*

Demostración. Supongamos que $L_\rho(\{x_n\})$ consta de más de un elemento y $L_{\overline{\rho}}(\{x_n\}) \neq \emptyset$.
Sean $x \in L_\rho(\{x_n\})$ y $y \in L_{\overline{\rho}}(\{x_n\})$. Así,

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) = \rho(x,x_n) + \overline{\rho}(y,x_n) \to 0.$$

En consecuencia, $\rho(x,y) = 0$, lo cual implica que $x = y$. Con ésto, $L_\rho(\{x_n\}) = L_{\overline{\rho}}(\{x_n\})$, es decir, todo punto ρ-límite es $\overline{\rho}$-límite. Ahora, sean $x, y \in L_\rho(\{x_n\})$, entonces

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) = \rho(x,x_n) + \overline{\rho}(y,x_n) \to 0.$$

Con ésto, $\rho(x,y) = 0$, lo cual implica $x = y$. Así, $L_\rho(\{x_n\})$ consta de un sólo punto, lo cual contradice la hipótesis.
De manera análoga se prueba que si $L_{\overline{\rho}}(\{x_n\})$ consta de más de un elemento, entonces $L_\rho(\{x_n\}) = \emptyset$.

□

Teorema 2.9. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio cuasi semimétrico (X,ρ).*

1. *Si $\{x_n\}$ es ρ-convergente hacia a y $\overline{\rho}$-convergente hacia b, entonces $\rho(a,b) = 0$.*

2. *Si $\{x_n\}$ es ρ-convergente hacia a y $\rho(b,a) = 0$, entonces $\{x_n\}$ es ρ-convergente hacia b.*

3. *Si $\{x_n\}$ es K-Cauchy izquierdo y tiene una subsucesión ρ-convergente hacia a, entonces $\{x_n\}$ es ρ-convergente hacia a.*

4. *Si $\{x_n\}$ es K-Cauchy izquierdo y tiene una subsucesión $\overline{\rho}$-convergente hacia a, entonces $\{x_n\}$ es $\overline{\rho}$-convergente hacia a.*

Demostración.

1. Como $\{x_n\}$ es ρ-convergente hacia a, se tiene que $\rho(a,x_n) \to 0$, y como es $\overline{\rho}$-convergente hacia b, se tiene que $\rho(x_n,b) \to 0$, entonces

$$\rho(a,b) \leq \rho(a,x_n) + \rho(x_n,b) \to 0.$$

   Por lo tanto $\rho(a,b) = 0$.

2. Se sigue de la relación

$$\rho(b,x_n) \leq \rho(b,a) + \rho(a,x_n) = \rho(a,x_n) \to 0.$$

3. Sea $\epsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ es K-Cauchy izquierdo, existe n_0 tal que $\rho(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n_0 \leq m \leq n$. Sea $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión ρ-convergente de $\{x_n\}$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} \geq n_0$ y $\rho(a, x_{n_k}) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $k \geq k_0$. Así, se tiene que para $n > n_{n_k}$

$$\rho(a, x_n) \leq \rho(a, x_{n_{k_0}}) + \rho(x_{n_{k_0}}, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

   Por lo tanto, $\{x_n\}$ es ρ-convergente hacia a.

4. Se concluye análogamente al inciso 3.

□

2.6. Completez

En los espacios métricos la definición de completez esta asociada al concepto de sucesión de Cauchy. Así mismo, en los espacios cuasi semimétricos se tiene esta relación, por lo que existen diferentes nociones de completez, una por cada definición de sucesión de Cauchy.

Definición 2.12. *Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico. Entonces X es llamado:*

1. *ρ-completo izquierdo (derecho) si cada sucesión ρ-Cauchy izquierdo (derecho), ρ-converge a algún punto de X.*

2. *K-completo izquierdo (derecho) si cada sucesión K-Cauchy izquierdo (derecho), ρ-converge a algún punto de X.*

3. *débilmente K-completo izquierdo (derecho) si cada sucesión débilmente K-Cauchy izquierdo (derecho), ρ-converge a algún punto de X.*

4. *ρ-completo si cada sucesión ρ-Cauchy, ρ-converge a algún punto de X.*

Nota 2.7. Si ρ es una cuasi semimétrica simétrica, entonces las definiciones anteriores coinciden con la definición usual de completez.

Nota 2.8. En relación a un espacio normado (seminormado) asimétrico (X, p), diremos que (X, p) cumple con la Definición 2.12, si (X, ρ_p) la cumple. Es decir, el espacio (X, p) es completo (referente a cualquier definición de completez) si (X, ρ_p) lo es.

Proposición 2.14. *Las definiciones de completez están relacionadas de la siguiente manera*
ρ-completo izquierdo $\Rightarrow$ débilmente K-completo izquierdo $\Rightarrow$ K-completo izquierdo $\Rightarrow$ ρ-completo
La cadena de implicaciones es válida también si se sustituye la palabra izquierdo por derecho.

Demostración. Sea (X, ρ) un espacio cuasi semimétrico. Supongamos que X es:

- ρ-completo izquierdo. Sea $\{x_n\}$ una sucesión débilmente K-Cauchy izquierdo. Entonces $\{x_n\}$ es ρ-Cauchy izquierdo y así ρ-converge a algún punto de X, por lo tanto X es débilmente K-completo izquierdo.

- Débilmente K-completo izquierdo. Sea $\{x_n\}$ una sucesión K-Cauchy izquierdo. Entonces $\{x_n\}$ es débilmente K-Cauchy izquierdo y así ρ-converge a algún punto de X, por lo tanto X es K-completo izquierdo.

- K-completo izquierdo. Sea $\{x_n\}$ una sucesión ρ-Cauchy. Entonces $\{x_n\}$ es K-Cauchy izquierdo y así ρ-converge a algún punto de X, por lo tanto X es ρ-completo.

La prueba es análoga para el caso derecho.

□

Para entender de mejor manera las definiciones de completez y las implicaciones de la Proposición 2.14 y ver que sus recíprocas no siempre se cumplen, analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.15. Sea (Y, ρ) el subespacio del espacio (X, ρ) del Ejemplo 2.13, donde $Y = \{(n+1)^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo 2.15.1 Sea $\{x_n\}$ una sucesión ρ-Cauchy derecho en Y. Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in Y$ y $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, x) < \epsilon$, para $n \geq k_\epsilon$. Así, se cumple que $x_{n+1} < x_n$ y que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_n$, para $n > k$. Luego $\rho(x_n, x) = 0$. De donde, $\{x_n\}$ es ρ-convergente en Y y por lo tanto Y es ρ-completo derecho.
Por otra parte, en el Ejemplo 2.13.1 se vio que la sucesión $\{(n+1)^{-1}\}$ es ρ-Cauchy izquierdo. Pero si $x \in Y$, se tiene que $x = \dfrac{1}{k_0}$, para algún $k_0 \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $0 < \epsilon < \rho(x_{k_0}, x_{k_0+1})$. Entonces para $n > k_0$

$$\rho(x_{k_0}, x_n) = x_{k_0} - x_n = \frac{1}{k_0} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_0+1} = \rho(x_{k_0}, x_{k_0+1}) > \epsilon.$$

Así, $\{x_n\}$ no es ρ-convergente en Y, y por lo tanto Y no es ρ-completo izquierdo.

Ejemplo 2.15.2 Ahora consideremos $\{z_n\}$ una sucesión K-Cauchy derecho en Y, esto es, para todo $\epsilon > 0$ existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(z_r, z_s) < \epsilon$, para $s \geq r \geq k_\epsilon$. De igual forma se tiene que $z_{n+1} < z_n$ y que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_n = z_k$ para $n \geq k$, lo cual implica que $z_n \xrightarrow{\rho} z_k$ y por lo tanto Y es K-completo derecho.
Sin embargo, se vió en el Ejemplo 2.13.1 que la sucesión $\{(n+1)^{-1}\}$ es K-Cauchy izquierdo y no es ρ-convergente en X; y por lo tanto tampoco en Y. Así, Y no es K-completo izquierdo.

Ejemplo 2.15.3 Si $\{x_n\} \in X$ es una sucesión ρ-Cauchy, siguiendo el mismo razonamiento de los ejemplos anteriores, se concluye que $\{x_n\}$ es ρ-convergente, y por lo tanto X es ρ-completo. Sin embargo la sucesión $\{x_n = (n+1)^{-1}\}$ es K-Cauchy izquierdo y hemos visto en el Ejemplo 2.13.1 que no es ρ-convergente. Así, X no es K-completo izquierdo. También se ha visto en el Ejemplo 2.13.2 que la sucesión $\{y_n = 1 - x_n\}$ es K-Cauchy derecho, pero para $x \in X$, si

- $x < x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces para $0 < \epsilon < 1$ se tiene que $\rho(x, x_n) \geq 1 > \epsilon$.
- $x_n < x$, para algunos $n \in \mathbb{N}$. Entonces sea $\epsilon = \rho(x, x_k)$, donde $k = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : x > x_n\}$, luego para $n \leq k$, $\rho(x, x_n) \geq \rho(x, x_k) > \epsilon$.

Lo cual implica que $\{y_n\}$ no es ρ-convergente, y por tanto X no es K-completo derecho.

Ejemplo 2.16. Sea (X, ρ) el espacio cuasimétrico definido en el Ejemplo 2.14.

Ejemplo 2.16.1 Sean $\{y_n\}$ una sucesión K-Cauchy derecho en X y $0 < \epsilon < 1$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_r, x_s) < \epsilon$ para $r \geq s \geq k$. Supongamos que y_n es impar para todo $n \geq k$, entonces $\rho(y_m, y_n) = 1$, lo que contradice el hecho de que la sucesión es K-Cauchy derecho. Si la sucesión es tal que contiene números pares e impares para $n \geq k$, entonces tomemos $m, n \geq k$ impares, así $\rho(y_m, y_n) = 1$, lo que contradice el hecho de que la sucesión es K-Cauchy derecho. Por lo tanto, la sucesión es tal que y_n es par, para todo $n \geq k$, además se cumple que $y_n = y_k$ para todo $n \geq k$. Así $y_n \xrightarrow{\rho} y_{k_0}$, y por tanto X es K-completo derecho.
Por otra parte, hemos visto en el Ejemplo 2.14 que la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = 2n$ es ρ-Cauchy derecho, además para $x \in X$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > x$, para $n > k$. Luego $\rho(x, x_n) = 1$, para $n > k$. Entonces $\{x_n\}$ no ρ-converge en X, y por lo tanto X no es ρ-completo derecho.

Ejemplo 2.16.2 Además, si $\{z_n\}$ es una sucesión K-Cauchy izquierdo respecto a $\overline{\rho}$, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión K-Cauchy derecho respecto a ρ y por lo anteriormente dicho existe k_0 tal que $\rho(z_n, z_{k_0}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, es decir, $\overline{\rho}(z_{k_0}, z_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, así $z_n \xrightarrow{\overline{\rho}} z_{k_0}$ y por lo tanto X es K-completo derecho respecto a $\overline{\rho}$.
Así, también para z impar, $\overline{\rho}(z, z_n) = \rho(z_n, z) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ y por lo tanto X no es $\overline{\rho}$-completo.

En la Tabla 2.3 se resumen los puntos importantes vistos en los ejemplos anteriores. En ellos, se comprueba que tipo de espacio es el analizado, en relación a las definiciones de completez. Con $\surd$ hacemos referencia a que en efecto es del tipo mencionado, mientras que con X indicamos a que no es el tipo de espacio señalado. Los espacios en blanco nos dice que no se sabe si el espacio visto en el ejemplo son o no completos.

Lema 2.3. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio seminormado asimétrico (X, p), si $\{x_n\}$ es K-Cauchy derecho (izquierdo) en (X, p). Entonces $\{-x_n\}$ es K-Cauchy derecho (izquierdo) en $(X, \overline{p})$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Dado que $\{x_n\}$ es K-Cauchy derecho, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq n \geq k$, se cumple $p(x_n - x_m) < \epsilon$, o equivalentemente $\overline{p}(-x_n - (-x_m)) < \epsilon$, para $m \geq n \geq k$. Es decir, $\{-x_n\}$ es K-Cauchy derecho en $(X, \overline{p})$. La prueba es análoga para el caso izquierdo. $\square$

Proposición 2.15. *Sea (X, p) un espacio seminormado asimétrico. Si (X, p) es K-completo derecho (izquierdo), entonces $(X, \overline{p})$ es K-completo derecho (izquierdo).*

Completez \ Ejemplo	Ejemplo 2.15.1	Ejemplo 2.15.2	Ejemplo 2.15.3	Ejemplo 2.16.1	Ejemplo 2.16.2
ρ-completo			$\surd$		X
K-completo izquierdo		X	X		
K-completo derecho		$\surd$	X	$\surd$	$\surd$
ρ-completo izquierdo	X				
ρ-completo derecho	$\surd$			X	

Tabla 2.3: Tabla que muestra las conclusiones de los ejemplos sobre completez

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión K-Cauchy derecho en $(X, \overline{p})$. Por el Lema 2.3, $\{-x_n\}$ es K-Cauchy derecho en (X, p). Luego, por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $-x_n \xrightarrow{p} x$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(-x_n - x) < \epsilon$, para todo $n \geq k$, o equivalentemente, $\overline{p}(x_n - (-x)) < \epsilon$, para todo $n \geq k$. Así, $x_n \xrightarrow{p} -x$. Por lo tanto, $(X, \overline{p})$ es K-completo derecho. La prueba es análoga para el caso izquierdo.

□

Definición 2.13. *Una serie* $\sum_n x_n$ *en un espacio seminormado asimétrico* (X, p) *es llamada* convergente *si existe* $x \in X$ *tal que* $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$. *La serie* $\sum_n x_n$ *es llamada* absolutamente convergente *si* $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty$.

Como es bien sabido en teoría clásica, un espacio normado es completo si, y sólo si cada una de sus series absolutamente convergentes es convergente. En el caso de los espacios asimétricos se tiene un resultado similar.

Proposición 2.16. *1. Sea* (X, ρ) *un espacio cuasi semimétrico y* $\{x_n\}$ *un sucesión en* X. *Si la sucesión satisface*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty,$$

entonces $\{x_n\}$ *es K-Cauchy izquierdo.*

2. Un espacio seminormado asimétrico (X, p) *es K-completo izquierdo si, y sólo si, cada serie absolutamente convergente de* X *es convergente.*

Demostración. 1. Para $\epsilon > 0$ sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho(x_{k+i}, x_{k+i+1}) < \epsilon.$$

Entonces, para $m \geq n \geq k$, se cumple que

$$\rho(x_n, x_m) \leq \sum_{n=1}^{m-n-1} \rho(x_{n+i}, x_{n+i+1}) < \epsilon.$$

2. Primero supongamos que (X, p) es K-completo izquierdo. Sea $X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty$. Para $\epsilon > 0$ sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_{k+i}) < \epsilon.$$

Luego, si $m \geq n \geq k$ se tiene que

$$p(X_m - X_n) = p\left(\sum_{i=n+1}^{m} x_i\right) \leq \sum_{i=n+1}^{m} p(x_i) < \epsilon,$$

con ésto, $\{X_n\}$ es K-Cauchy izquierdo y por hipótesis existe $x \in X$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} X_n$, es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.
Por otra parte, supongamos que toda serie absolutamente convergente de X es convergente. Sea $\{x_n\}$ una sucesión K-Cauchy izquierdo en X. Sea k_1 tal que $p(x_m - x_n) < \frac{1}{2}$, para todo $k_1 \leq n \leq m$. Sea $k_2 > k_1$ tal que $p(x_m - x_n) < \frac{1}{2^2}$, para todo $k_2 \leq n \leq m$ (además, se cumple que $p(x_{k_2} - x_{k_1}) < \frac{1}{2}$). Sea $k_3 > k_2$ tal que $p(x_m - x_n) < \frac{1}{2^3}$, para todo $k_3 \leq n \leq m$ (obsérvese que $p(x_{k_3} - x_{k_2}) < \frac{1}{2^2}$). Siguiendo con este procedimiento, encontramos una sucesión de índices $k_1 < k_2 < \ldots$ tales que $p(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De ahí

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

con ésto se tiene que la serie $\sum_n (x_{k_{n+1}} - x_{k_n})$ es absolutamente convergente y por hipótesis, existe $y \in X$ tal que $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_{k_{n+1}} - x_{k_n}$. Pero $X_n = \sum_{i=1}^{n} x_{k_{i+1}} - x_{k_i} = x_{k_{n+1}} - x_{k_1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí, $x_{k_n} \xrightarrow{p} y + x_{k_1}$ cuando $n \to \infty$. Por el Teorema 2.9, la sucesión $\{x_n\}$ p-converge a $y + x_{k_1}$.

$\square$

Proposición 2.17. *Un espacio cuasi semimétrico (X, ρ) es K-completo derecho si y sólo si cualquier sucesión decreciente de bolas $\overline{\rho}$-cerradas*

$$B_{\overline{\rho}}[x_1, r_1] \supset B_{\overline{\rho}}[x_2, r_2] \supset \ldots \quad con \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \tag{2.8}$$

tiene intersección no vacía.

Además, si la topología τ_ρ es Hausdorff, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\overline{\rho}}[x_n, r_n]$ contiene exactamente un elemento.

Demostración. Sean (X, ρ) K-completo derecho y $B_{\overline{\rho}}[x_n, r_n]$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de bolas $\overline{\rho}$-cerradas que satisfacen (2.8).
Para $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $r_n < \epsilon$ para todo $n > k$. Si $k \le n \le m$, entonces $x_m \in B_{\overline{\rho}}[x_n, r_n]$ y así $\overline{\rho}(x_n, x_m) \le r_n < \epsilon$. De aquí, $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$, para $k \le n \le m$, es decir, $\{x_n\}$ es K-Cauchy derecho y por hipótesis existe $x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{\rho} x$.
Como, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_{\overline{\rho}}[x_k, r_k]$ para todo $n \ge k$, y dado que la bola $B_{\overline{\rho}}[x_k, r_k]$ es ρ-cerrado, por la Proposición 2.9 se sigue que

$$x = \rho\text{-lím}_{n\to\infty} x_n \in B_{\overline{\rho}}[x_k, r_k],$$

donde ρ-lím representa al límite de la sucesión respecto a ρ. Por lo tanto $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\overline{\rho}}[x_k, r_k]$.
Supongamos ahora que τ_ρ es de Hausdorff y sea $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\overline{\rho}}[x_k, r_k]$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\rho}(x_n, y) \le r_n$, o equivalentemente, $\rho(y, x_n) \le r_n \to 0$, es decir, $x \xrightarrow{\rho} x$. Por la Proposición 2.12, $y = x$.
Recíprocamente, sea $\{x_n\}$ una sucesión K-Cauchy derecho en (X, ρ). Entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_m, x_n) < \dfrac{1}{2}$ para $k_1 \le n \le m$, o equivalentemente, $\overline{\rho}(x_n, x_m) < \dfrac{1}{2}$. En particular, $\overline{\rho}(x_{k_1}, x_n) < \dfrac{1}{2}$, para $k_1 \le n$. Consideremos ahora $B_{\overline{\rho}}[x_{k_1}, 1]$.
Sea ahora $k_2 > k_1$ tal que $\rho(x_m, x_n) < \dfrac{1}{2^2}$ para $k_2 \le n \le m$ o equivalentemente, $\overline{\rho}(x_n, x_m) < \dfrac{1}{2}$.
En particular, $\overline{\rho}(x_{k_2}, x_n) < \dfrac{1}{2}$, para $k_2 \le n$. Notemos que si $y \in B_{\overline{\rho}}[x_{k_2}, 1/2]$,

$$\overline{\rho}(x_{k_1}, y) \le \overline{\rho}(x_{k_1}, x_{k_2}) + \overline{\rho}(x_{k_2}, y) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

es decir, $B_{\overline{\rho}}[x_{k_2}, 1/2] \subseteq B_{\overline{\rho}}[x_{k_1}, 1]$.
Continuando con este procedimiento, obtenemos una sucesión $k_1 < k_2 < \ldots$ tal que

$$\overline{\rho}(x_{k_n}, x_k) \le \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo } k \ge k_n.$$

Ademas $\overline{\rho}(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) \le \dfrac{1}{2^n}$, con lo cual las bolas $B_{\overline{\rho}}[x_{k_n}, 1/2^{n-1}]$ satisfacen que $B_{\overline{\rho}}[x_{k_{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}] \subseteq B_{\overline{\rho}}[x_{k_n}, \dfrac{1}{2^{n-1}}]$, $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\overline{\rho}}[x_{k_n}, 1/2^{n-1}]$. Entonces

$$\rho(x, x_{k_n}) = \overline{\rho}(x_{k_n}, x) \le \frac{1}{2^{n-1}} \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

es decir, $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Por el Teorema 2.9.4, la sucesión $\{x_n\}$ es ρ-convergente a x. Por lo tanto (X, ρ) es K-completo derecho.

$\square$

Teorema 2.10. *Sea (X,ρ) un espacio cuasi semimétrico. Si $(X,\overline{\rho})$ es K-completo derecho, entonces (X,ρ) es de segunda categoría en sí mismo.*

Demostración. Suponga que X es de primera categoría. Entonces

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

donde Y_n es denso en ninguna parte en X, para todo n. Esto es ρ-int(ρ-cl$(Y_n)) = \emptyset$, así,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

donde $X_n = \rho\text{-cl}(Y_n)$ y $\rho\text{-int}(X_n) = \emptyset$, para todo n.
Luego, $X - X_1$ es no vacío y ρ-abierto, lo cual implica que existen $x_1 \in X$ y $0 < r_1 < 1$ tales que $B_\rho[x_1, r_1] \subset X - X_1$. El conjunto $B_\rho(x_1, r_1) - X_2$ es no vacío y ρ-abierto, así, existen $x_2 \in X$ y $0 < r_2 < \dfrac{1}{2}$ tales que $B_\rho[x_2, r_2] \subset B_\rho(x_1, r_1) - X_2$.
Continuando de esta manera se obtienen x_n y $0 < r_n < \dfrac{1}{n}$ tales que

$$B_\rho[x_n, r_n] \subset B_\rho(x_{n-1}, r_{n-1}) - X_n, \quad \text{para todo } n, \text{ donde } \; B_\rho(x_0, r_0) = X.$$

Entonces se tiene que

$$\bigcap B_\rho[x_n, r_n] \subset \bigcap B_\rho(x_{n-1}, r_{n-1}) - X_n \subset \bigcap X - X_n = X - \bigcup X_n = \emptyset$$

lo cual contradice a la Proposición 2.17. Por lo tanto, el espacio (X,ρ) es de segunda categoría en sí mismo.

□

Capítulo 3

Análisis Funcional Asimétrico

El análisis funcional es una parte importante de las matemáticas. Es la rama de las matemáticas que trata sobre el estudio los espacios vectoriales normados completos sobre los reales o los complejos y espacios topológicos dotados de una estructura algebriaca. También trata sobre el estudio de los espacios de funciones, como es el caso de los operadores lineales continuos definidos en los espacios de Banach y de Hilbert. Éstos conducen naturalmente a la definición de C^* álgebra y otras álgebras de operadores.
En este capítulo se presentaran algunos resultados básicos sobre análisis funcional en los espacios normado asimétricos. En particular, se estudiará el conjunto de las funciones lineales entre dos espacios normados asimétricos y se presentaran resultados análogos a dos de los teoremas más importantes del análisis clásico: el teorema del mapeo abierto y el teorema del grafo cerrado.

3.1. Funciones Lineales Continuas entre Espacios Normados Asimétricos

Definición 3.1. *Sean X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Una función $f : X \to Y$ se dice* lineal *si para cualesquiera $x, y \in X$, y para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Se dira que f es sublineal *si para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha > 0$*

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad y \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Definición 3.2. *Sean (X, p) y (Y, q) dos espacios seminormados asimétricos. Una función lineal $f : X \to Y$ es llamada (p, q)-*continua *si es continua respecto a las topologías τ_p en X y τ_q en Y.*
*De manera general, si $\mu \in \{p, \overline{p}, p^s\}$ y $\nu \in \{q, \overline{q}, q^s\}$, f es (μ, ν)-*continua *si es continua respecto a las topologías τ_μ en X y τ_ν en Y.*

Observemos que la definición de (p,q)-continuidad es la definición usual de continuidad. La razón de dar esta definición es simplemente presentar la notación, ya que también trabajaremos sobre continuidad respecto a las seminormas asimétricas $\overline{p}$, p^s, $\overline{q}$ y q^s.

Definición 3.3. *Sean (X,p) y (Y,q) dos espacios seminormados asimétricos. Definimos $L_{\mu,\nu}(X,Y)$ como el conjunto de todas las funciones lineales (μ,ν)-continuas de (X,p) a (Y,q) donde $\mu \in \{p,\overline{p},p^s\}$ y $\nu \in \{q,\overline{q},q^s\}$. Escribimos simplemente $L(X,Y)$ para denotar a $L_{p^s,q^s}(X,Y)$, el conjunto de todos las funciones lineales continuas de (X,p^s) a (Y,q^s).*

Definición 3.4. *Una función lineal $f:(X,p)\to(Y,q)$ entre dos espacios seminormados asimétricos es llamada* (p,q)-semi-Lipschipz *si existe un número $\beta>0$ tal que*

$$q(f(x)) \leq \beta p(x), \quad \textit{para todo } x \in X.$$

En teoría clásica de espacios normados, existen caracterizaciones de la continuidad de las funciones lineales. En espacios normados asimétricos, podemos dar una caracterización de la (p,q)-continuidad basada en el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *Sean X un espacio vectorial real, $f,g : X \to \mathbb{R}$ funciones sublineales y $\alpha,\beta>0$. Si $g(x)>0$, para todo $x\in X$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

$$\textit{Para todo } x\in X,\ \ g(x)\leq\beta, \quad \textit{implica} \quad f(x)\leq\alpha, \tag{3.1}$$

y

$$\textit{Para todo } x\in X,\ \ f(x)\leq\frac{\alpha}{\beta}g(x). \tag{3.2}$$

Demostración. Supongamos primero que se cumple (3.1). Entonces $g\left(\frac{\beta}{g(x)}x\right)=\beta$, luego

$$f\left(\frac{\beta}{g(x)}x\right)\leq\alpha, \ \text{ de donde } \ f(x)\leq\frac{\alpha}{\beta}g(x).$$

Supongamos ahora que se cumple (3.2) y sea $x\in X$ tal que $g(x)\leq\beta$. Entonces

$$f(x)\leq\frac{\alpha}{\beta}g(x)\leq\frac{\alpha}{\beta}\beta=\alpha$$

□

La siguiente proposición da algunas caracterizaciones de la (p,q)-continuidad.

Proposición 3.2. *Sean (X,p), (Y,q) dos espacios seminormados asimétricos y $f:(X,p)\to(Y,q)$ una función lineal. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *La función f es (p,q)-continua en X.*
2. *La función f es (p,q)-continua en $0\in X$.*

3. *La función f es (p,q)-semi-Lipschitz.*

Demostración. Es suficiente probar que 2 implica 3 y que 3 implica 1.
Supongamos que f es (p,q)-continua en $0 \in X$, es decir, existe $r > 0$ tal que $f(B_p[0,r]) \subseteq B_q[0,1]$. Se sigue que

$$\forall x \in X \text{ con } p(x) \leq r, \text{ implica que } q(f(x)) \leq 1.$$

Por la Proposición 3.1, se sigue que

$$q(f(x)) \leq \frac{1}{r} p(x),$$

para todo $x \in X$, es decir, f es (p,q)-semi-Lipschitz.
Supongamos que f es (p,q)-semi-Lipschitz, es decir, existe $M > 0$ tal que $q(f(x)) \leq Mp(x)$. Así, para $\epsilon > 0$ sea $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$. Sean $x, y \in X$ tales que $p(x-y) < \delta$. Entonces

$$q(f(x) - f(y)) \leq Mp(x-y) < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon,$$

es decir, f es (p,q)-continua.

□

Basados en estas propiedades, podemos introducir una seminorma asimétrica en el espacio $L_{p,q}(X,Y)$.

Definición 3.5. *Definimos la función $p_q^* : L_{p,q}(X,Y) \to [0,\infty)$ dada por*

$$p_q^*(f) = \sup\{q(f(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} \text{ para todo } f \in L_{p,q}(X,Y). \tag{3.3}$$

La función p_q^* es una seminorma asimétrica en el espacio $L_{p,q}(X,Y)$. En efecto, sea $\alpha > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} p_q^*(\alpha f) &= \sup\{q(\alpha f(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} \\ &= \sup\{\alpha q(f(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} \\ &= \alpha \sup\{q(f(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} \\ &= \alpha p_q^*(f). \end{aligned}$$

Ahora, si $f, g \in L_{p,q}(X,Y)$, entonces

$$\begin{aligned} p_q^*(f+g) &= \sup\{q(f(x)+g(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} \\ &\leq \sup\{q(f(x)) + q(g(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} \\ &\leq \sup\{q(f(x) : x \in X, p(x) \leq 1\} + \sup\{q(g(x) : x \in X, p(x) \leq 1\} \\ &= p_q^*(f) + p_q^*(g). \end{aligned}$$

Así, p_q^* es una seminorma asimétrica en $L_{p,q}(X,Y)$.

Más aún, supongamos ahora que q es una norma asimétrica y sea $f \in L_{p,q}(X,Y)$ tal que $p_q^*(f) = p_q^*(-f) = 0$, es decir,

$$\sup\{q(f(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} = \sup\{q(-f(x)) : x \in X, p(x) \leq 1\} = 0.$$

Como $q \geq 0$, se tiene que

$$q(f(x)) = q(-f(x)) = 0, \;\; \forall x \in X \text{ tal que } p(x) \leq 1.$$

Por ser q norma asimétrica, se sigue que $f(x) = 0 \; \forall x$. Por lo tanto, p_q^* es una norma asimétrica.

Recordemos que las funciones p^s y q^s son seminormas, al sustituirlas en la fórmula (3.3) es de esperarse que $(p_{q^s}^s)^*$ también sea una seminorma, es decir, la función

$$(p_{q^s}^s)^*(f) = \sup\{q^s(f(x)) : x \in X, p^s(x) \leq 1\}$$

es una seminorma. En efecto, solo falta probar que para $\alpha \in \mathbb{R}$, $(p_{q^s}^s)^*(\alpha f) =\mid \alpha \mid (p_{q^s}^s)^*(f)$, pero

$$\begin{aligned}
(p_{q^s}^s)^*(\alpha f) &= \sup\{q^s((\alpha f)(x)) : x \in X, p^s(x) \leq 1\} \\
&= \sup\{\mid \alpha \mid q^s(f(x)) : x \in X, p^s(x) \leq 1\} \\
&= \mid \alpha \mid \sup\{q^s(f(x) : x \in X, p^s(x) \leq 1\} \\
&= \mid \alpha \mid (p_{q^s}^s)^*(f).
\end{aligned}$$

Más aún, supongamos que q es una norma asimétrica. Sea $f \in L(X,Y)$ tal que $(p_{q^s}^s)^*(f) = 0$, es decir,

$$\sup\{q^s(f(x)) : x \in X, p^s(x) \leq 1\} = 0,$$

así

$$q^s(f(x)) = 0 \;\; \text{para todo} \;\; x \in X, \;\text{y}\; p^s(x) \leq 1.$$

Como q es norma asimétrica, q^s es una norma y por la linealidad de f, se concluye que $f(x) = 0$, para todo $x \in X$. Por lo tanto, $(p_{q^s}^s)^*(f)$ es una norma y el espacio $(L(X,y), (p_{q^s}^s)^*)$ es un espacio normado.

Ejemplo 3.1. Sea (X,p) un espacio seminormado asimétrico. Sea (Y,q) el espacio normado asimétrico $(\mathbb{R}, u)$, donde u es la norma asimétrica en $\mathbb{R}$ definida como

$$u(x) = x^+ = \text{máx}\{x, 0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces $L_{p,u}(X,Y)$ y $L(X,Y)$ son denotadas por X^* y X^{s*} respectivamente.

La norma asimétrica p_u^* en X^* se denota simplemente por p^*, y

$$p^*(f) = \sup\{f(x)^+ : x \in X, p(x) \leq 1\} = \sup\{f(x) : p(x) \leq 1\}$$

para todo $f \in X^*$. El par (X^*, p^*) es llamado el espacio dual del espacio (X, p). La norma $(p^s_{u^s})^*$ en X^{s*} es denotado por p^{s*}, y

$$p^{s*} = \sup\{| f(x) | : p^s(x) \leq 1\},$$

para todo $f \in X^{s*}$.

Un dato importante relacionado con estos espacios es que, a diferencia del caso clásico, el espacio $L_{p,q}(X, Y)$ no es necesariamente un espacio lineal, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. Sea $X = C[0, 1]$ y $p : X \to [0, \infty)$ la seminorma asimétrica definida como $p(f) = \text{máx}\{\overline{f}, 0\}$, donde $\overline{f} = \text{máx}\{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$. Definimos la función $\phi : (X, p) \to (\mathbb{R}, u)$, por $\phi(f) = f(1)$ para todo $f \in X$. Sea $f \in X$, entonces

$$u(\phi(f)) = u(f(1)) \leq \text{máx}\{\overline{f}, 0\} = p(f).$$

Así ϕ es (p, u)-continua y por tanto $\phi \in L_{p,u}(X, Y)$.
Definimos las funciones $f_n(t) = 1 - nt$, $t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$. Notemos que $f_n \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$-\phi(f_n) = -f_n(1) = n - 1 \quad \text{y} \quad p(f_n) = 1.$$

Así $-\phi$ no es (p, u)-semi-Lipschiz y por tanto tampoco es (p, u)-continua.

Aunque no es el caso para $L(X, Y)$, porque es un espacio normado, y por lo tanto lineal. Sin embargo, de los resultados básicos de análisis clásico, sabemos que si f y g son funciones lineales y continuas, entonces $f + g$ y λf para $\lambda > 0$. También son continuas y lineales. Es decir, aunque el espacio $L_{p,q}(X, Y)$ no es necesariamente un espacio lineal, se tiene que es un cono [3] incluido en el espacio $L(X, Y)$.

El siguiente resultado prueba que el conjunto $L_{p,q}(X, Y)$ esta contenido en el espacio $L(X, Y)$. Y aunque técnicamente las definiciones de $L_{p,q}(X, Y)$ y $L_{\overline{p},\overline{q}}(X, Y)$ son distintas, en realidad se tiene que los conjuntos son los mismos.

Teorema 3.1. *Sean (X, p) y (Y, q) dos espacios seminormados asimétricos. Entonces cualquier función lineal $f : (X, p) \to (Y, q)$ que sea (p, q)-continua es también (p^s, q^s)-continua, es decir $L_{p,q}(X, Y) \subseteq L(X, Y)$. Además*

$$L_{p,q}(X, Y) = L_{\overline{p},\overline{q}}(X, Y) \tag{3.4}$$

Demostración. Sea f (p,q)-continua. Veamos que f es (p^s,q^s)-continua. Por la Proposición 3.2, f es (p,q)-semi-Lipschiz, es decir, existe $\beta>0$ tal que

$$q(f(x)) \leq \beta p(x) \leq \beta p^s(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Reemplazando x por $-x$, obtenemos

$$q(f(-x)) = q(-f(x)) \leq \beta p^s(-x) \leq \beta p^s(x).$$

Lo cual implica que $q^s(f(x)) \leq \beta p^s(x)$, para todo $x \in X$. Es decir, f es (p^s,q^s)-semi-Lipschiz o equivalentemente (p^s,q^s)-continua.
Ahora, sea $f \in L_{p,q}(X,Y)$, o equivalentemente, f es (p,q)-semi-Lipschiz, es decir, existe $\beta>0$ tal que

$$q(f(x)) \leq \beta p(x) \quad \forall x \in X.$$

Reemplazando x por $-x$, tenemos que

$$q(f(-x)) = q(-f(x)) = \overline{q}(f(x)) \leq \beta p(-x) = \beta \overline{p}(x) \quad \forall x \in X,$$

esto es, f es $(\overline{p},\overline{q})$-semi-Lipschiz, o equivalentemente $f \in L_{\overline{p},\overline{q}}(X,Y)$.

$\square$

3.2. Teoremas Fundamentales del Análisis Funcional

El teorema del mapeo abierto y el teorema del grafo cerrado son unos de los resultados más importantes en análisis funcional clásico, cuyas demostraciones se basan en el teorema de categoría de Baire. Una de sus consecuancias radica en su uso para la demostración de resultados sobre isimorfismos entre un espacio normado de dimensión finita y $\mathbb{R}^n$, además de la equivalencia de normas.
Basado en el Teorema 2.10, Alegre [1] extendió estos principios al caso de los espacios normados asimétricos.

Definición 3.6. *Un subconjunto A de un espacio lineal es un conjunto semibalanceado si para todo $x \in A$, se tiene que $\lambda x \in A$, donde $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Definición 3.7. *Un subconjunto A de un espacio lineal X es un conjunto absorbente si para todo $x \in X$, existe $t>0$ tal que $x \in tA = \{ta : a \in A\}$.*

Lema 3.1. *Sea (X,p) un espacio normado asimétrico y $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$. Si A es semibalanceado, entonces*

1. $p\text{-cl}(A)$ *es semibalanceado.*

2. $p\text{-int}(A)$ *es semibalanceado.*

Demostración. 1. Supongamos que p-cl(A) no es semibalanceado, y sean $x \in p$-cl(A), $0 \leq \alpha \leq 1$ tales que $\alpha x \notin p$-cl(A). Entonces existe $r > 0$ tal que $B_p(\alpha x, r) \cap A = \emptyset$. Sea $y \in A$ tal que $p(y - x) < \alpha r$. Así tenemos que

$$p(\alpha y - \alpha x) = \alpha p(y - x) < r.$$

Luego, como A es semibalanceado, $\alpha y \in A$ y $\alpha y \in B_p(\alpha x, r)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto p-cl(A) es semibalanceado.

2. Sean $x \in p$-int(A) y $0 < \alpha < 1$. Es decir, existe $r > 0$ tal que $B_p(x, r) \subseteq A$. Si $y \in B_p(\alpha x, \alpha r)$, entonces $p(y - \alpha x) < \alpha r$. Sea $z = \frac{1}{\alpha} y$, así,

$$p(z - x) = p\left(\frac{1}{\alpha} y - x\right) = \frac{1}{\alpha} p(y - \alpha x) < \frac{1}{\alpha} \alpha r = r,$$

lo cual implica que $z \in B_p(x, r)$, y $z \in A$. Como A es semibalanceado, $\alpha z \in A$, pero $\alpha z = y$. Por lo tanto, $B_p(\alpha x, \alpha r) \subseteq A$ o equivalentemente $\alpha x \in p$-int(A), es decir p-int(A) es semibalanceado.

$\square$

Lema 3.2. *Sean (X, p) un espacio normado asimétrico y $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$. Si A es absorbente, entonces*

1. *p-cl(A) es absorbente.*

2. *si además, A es semibalanceado, entonces $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA$.*

Demostración. 1. Por definición de subconjunto absorbente, si $x \in X$, existe $t > 0$ tal que $x \in tA$. Como $A \subseteq p$-cl(A), se tiene que $x \in t(p$-cl$(A))$.

2. Como $nA \subseteq X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA \subseteq X$. Por otra parte, sea $x \in X$. Por ser A absorbente, existen $t_x > 0$ y $a \in A$ tales que $x = t_x a$. Sea $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n_x > t_x$. Con ésto, $x = n_x \frac{t_x}{n_x} a$. Como A es semibalanceado, $\frac{t_x}{n_x} a \in A$. Por lo tanto $x \in n_x A$. Así

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} n_x A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA,$$

con lo que se obtiene la igualdad de conjuntos.

$\square$

Lema 3.3. *Sea (X, p) un espacio normado asimétrico de segunda categoría en sí mismo. Si A es un subconjunto semibalanceado y absorbente de X, entonces p-cl(A) y $\overline{p}$-cl(A) son vecindades del $0 \in X$, el neutro aditivo del espacio X.*

Demostración. Por el Lema 3.2, p-cl(A) es absorbente y entonces

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n(p\text{−cl}(A)).$$

Dado que (X, p) es de segunda categoría en sí mismo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(p\text{-cl}(A))$ no es denso en ninguna parte, es decir, $p\text{-int}(p\text{-cl}(A)) \neq \emptyset$. Por el Lema 3.1, p-cl(A) es semibalanceado y también $p\text{-int}(p\text{-cl}(A))$ lo es. Por lo tanto, $0 \in p\text{-int}(p\text{-cl}(A))$, así p-cl(A) es vecindad del $0 \in X$. De manera análoga se prueba que $\overline{p}$-cl(A) es vecindad del $0 \in X$.

□

Lema 3.4. *Sean X un espacio lineal y ρ una cuasimétrica invariante bajo traslaciones en X. Si (X, ρ) es K-completo derecho (izquierdo), entonces $(X, \overline{\rho})$ también lo es.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $\{x_n\}$ una sucesión K-Cauchy derecho en $(X, \overline{\rho})$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\rho}(x_r, x_s) < \epsilon$, para $r \geq s \geq k$. Dado que ρ es invariante bajo traslación tenemos que

$$\rho(-x_r, -x_s) = \rho(x_s, x_r) = \overline{\rho}(x_r, x_s) < \epsilon,$$

para $r \geq s \geq k$. Es decir, la sucesión $\{-x_n\}$ es K-Cauchy derecho en (X, ρ).
Como (X, ρ) es K-completo derecho, por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $-x_n \overset{\rho}{\to} x$. Esto es, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x, -x_n) < \epsilon$, para $n > k_0$. Así, tenemos que

$$\overline{\rho}(-x, x_n) = \rho(x_n, -x) = \rho(x_n + x - x_n, -x + x - x_n) = \rho(x, -x_n) < \epsilon,$$

para $n > k_0$. Lo cual nos dice que $x_n \overset{\overline{\rho}}{\to} -x$. Por lo tanto $(X, \overline{\rho})$ es K-completo derecho.
La prueba es análoga para el caso izquierdo.

□

La demostración del siguiente resultado es similar a la existente en la teoría clásica de espacios normados, por lo que su prueba se puede omitir.

Lema 3.5. *Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos. Si f es una función lineal de X a Y, entonces f es abierta si y solo si para cada vecindad U del origen en X, $f(U)$ es vecindad del origen en Y.*

Teorema 3.2 (Teorema de Mapeo Abierto)**.** *Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos. Si (X, p) es K-completo derecho, (Y, q) es un espacio de Hausdorff K-completo derecho y f es una función lineal sobreyectiva (p, q)-continua de (X, p) a (Y, q), entonces f es abierta de (X, p) a (Y, q).*

Demostración. Sea $r > 0$ y definamos los conjuntos

$$V = \{x \in X : p(x) < 2r\}$$

y

$$V_n = \{x \in X : p(x) < \frac{r}{2^n}\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Primero veamos que $\overline{q}$-cl$(f(V_n))$ es una vecindad del $0 \in Y$.
Notemos que para $y \in f(V_n)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, $y = f(x)$, para algún $x \in V_n$. Luego,

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x),$$

también

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) < p(x) < \frac{r}{2^n}.$$

Es decir, $\lambda y \in f(V_n)$. Además, para $x \in X$ tal que $p(x) > 0$

$$p(tx) = tp(x) < \frac{r}{2^n} \quad \text{si} \quad t < \frac{r}{2^n p(x)}.$$

Con esto, V_n es absorbente. Sea $y \in Y$. Entonces existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, y como V_n es absorbente existe $t > 0$ tal que $x \in tV_n$, luego $y = f(tx_1)$, donde $x = tx_1$, $x_1 \in V_n$. En consecuencia, $y = tf(x_1)$. Por lo tanto $y \in tf(V_n)$. Con ésto, $f(V_n)$ son subconjuntos semibalanceados y absorbentes de Y. Por el Lema 3.4, tenemos que $(Y, \overline{\rho}_q)$ es K-completo derecho. Luego, por el Teorema 2.10, el espacio (Y, q) es de segunda categoría en sí mismo. Así, por el Lema 3.3, concluimos que $\overline{q}$-cl$(f(V_n))$ es una vecinad del $0 \in Y$. A continuación, consideremos una sucesión decreciente de números reales positivos $\{\delta_n\}$ tal que $\delta_n \to 0$ y sea $W_n = \{y \in Y : q(y) < \delta_n\} \subset \overline{q}$-cl$(f(V_{n+1}))$.
Sea $y_1 \in \overline{q}$-cl$(f(V_1))$. Dado que el conjunto

$$-W_n = \{-y \in Y : q(y) < \delta_n\} = \{-y \in Y : q(-(-y)) < \delta_n\} = \{y \in Y : \overline{q}(y) < \delta_n\}$$

es vecindad del $0 \in Y$ respecto a $\overline{q}$, satisface que

$$(y_1 - W_1) \cap f(V_1) \neq \emptyset.$$

Así, existe $x_1 \in V$ tal que $f(x_1) \in y_1 - W_1$.
Sea $y_2 = y_1 - f(x_1)$. Entonces $y_2 \in W_1 \subset \overline{q}$-cl$(f(V_2))$ y dado que $-W_2$ es vecindad del $0 \in Y$ respecto a $\overline{q}$, satisface que

$$(y_2 - W_2) \cap f(V_2) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $x_2 \in V_2$ tal que $f(x_2) \in y_2 - W_2$.
Siguiendo este razonamiento podemos encontrar los puntos $x_i \in V_i$ y construir la sucesión $\{y_n\}$ tal que $y_n = y_{n-1} - f(x_{n-1}) \in W_{n-1}$. Definimos $z_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Luego, para $\epsilon > 0$, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n \geq k$ se tiene que

$$p(z_m - z_n) = p\left(\sum_{i=n+1}^{m} x_i\right) \leq \sum_{i=n+1}^{m} p(x_i) < \sum_{i=n+1}^{m} \frac{r}{2^i} < \epsilon.$$

Con ésto, probamos que $\{z_n\}$ es K-Cauchy izquierdo en (X, p), o equivalentemente es K-Cauchy derecho en $(X, \overline{p})$, y como la K-completez derecha de (X, p) implica la K-completez derecha de $(X, \overline{p})$, existe $z \in X$ tal que $z_n \overset{\overline{p}}{\to} z$.
Por lo tanto, para $0 < \epsilon < r$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{p}(z_n - z) = p(z - z_n) < \epsilon$, para $n \geq k$.
Entonces

$$p(z) = p(z_n + z - z_n) \leq p(z_n) + p(z - z_n) \leq \sum_{i=1}^{n} p(x_i) + \epsilon < \sum_{i=1}^{n} \frac{r}{2^i} + \epsilon < 2r,$$

es decir, $z \in V$.
Además, dado que $y_{n+1} \in W_n$, tenemos que $q(y_{n+1}) < \delta_n$ lo cual implica que $y_n \overset{q}{\to} 0$.
Por otra parte, consideremos la sucesión $\{f(z_n)\}$, se tiene que

$$f(z_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i+1}) = y_1 - y_{n+1},$$

luego,

$$\overline{q}(f(z_n) - y_1) = q(y_1 - f(z_n)) = q(y_{n+1}) < \delta_n$$

Con ésto, tenemos que $f(z_n) \overset{\overline{q}}{\to} y_1$.
Dado que f es (p, q)-continua de (X, p) a (Y, q), por la igualdad (3.4), tenemos que f es (p, q)-continua de $(X, \overline{p})$ a $(Y, \overline{q})$, y como $z_n \overset{\overline{p}}{\to} z$ se tiene que $f(z_n) \overset{\overline{q}}{\to} f(z)$. Por el Lema 2.2 se obtiene que $(Y, \overline{q})$ es Hausdorff y por la Proposición 2.12 concluimos que $y_1 = f(z)$. Así $y_1 \in f(V)$. Es decir, $\overline{q}$-cl$(f(V_1)) \subset f(V)$ y entonces $f(V)$ es vecindad del $0 \in Y$. Entonces, por el Lema 3.5, f es abierta de (X, p) a (Y, q).

□

Ejemplo 3.3. Sea el espacio normado asimétrico (X, p), donde $X = \mathbb{R}$ y

$$p(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión K-Cauchy derecho en (X, p) y $\epsilon > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$p(x_s - x_r) < \epsilon, \quad \text{para} \quad r \geq s \geq k.$$

Sea $x = x_k$. Analicemos $p(x_r - x)$, para $r \geq k$.
Si $x_r - x < 0$,

$$p(x_r - x) = x - x_r = \frac{1}{2} 2(x - x_r) = \frac{1}{2} p(x - x_r) < \epsilon.$$

Si $x_r - x \geq 0$,

$$p(x_r - x) = 2(x_r - x) = 2p(x - x_r) < 2\epsilon.$$

Es decir, $x_n \xrightarrow{p} x$. Por lo tanto, (X,p) es K-completo derecho.
Notemos que para $x \in X$ y $r > 0$

$$B_p(x,r) = \{y \in X : p(y-x) < r\} = (x-r, x+\frac{1}{2}r).$$

Luego, para $x, y \in X$ con $x \neq y$, y sin pérdida de generalidad suponemos que $x < y$; sea $r = \frac{1}{2}(y-x)$, con lo cual

$$B_p(x,r) \cap B_p(y,r) = \emptyset.$$

Es decir, (X,p) es de Hausdorff.
Así, para cualquier función $f : X \to X$ (p,p)-continua, lineal y sobreyectiva, por el Teorema 3.2 f es una función abierta de X en X.

El recíproco del Teorema 3.3 no es verdadero. En el siguiente ejemplo mostraremos que aunque la función sea abierta,aunque el espacio X no sea K-completo derecho.

Ejemplo 3.4. Sean (X,p) y (Y,q) espacios normados asimétricos, donde $X = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $p(A) = \text{máx}\{A_{i,j}, 0\}$, $Y = \mathbb{R}$, y $q(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$.
Sea $f : (X,p) \to (Y,q)$ dada por $f(M) = Tr(M)$, la traza de la matriz M. La función f es (p,q)-continua, sobreyectiva y lineal. Veamos que es abierta de X en Y.
Sea $A \in \tau_p$, veamos que $f(A) \in \tau_q$. Sea $x_0 \in f(A)$, esto es, $x_0 = Tr(M^0)$, para algún $M^0 \in A$. Como $A \in \tau_p$, existe $r > 0$ tal que $B_p(M^0, r) \subseteq A$, es decir, si $M \in X$ es tal que $p(M - M^0) < r$ entonces $M \in A$, o dicho de otra forma, si $\text{máx}\{M_{i,j} - M^0_{i,j}, 0\} < r$ entonces $M \in A$.
Pero $\text{máx}\{M_{i,j} - M^0_{i,j}, 0\} < r$ si y sólo si $M_{i,j} - M^0_{i,j} < r$, para todo i, j.
Sea $R = nr$. Veamos que si $x \in B_q(x_0, R)$, entonces $x = Tr(M)$, para algún $M \in A$. Sea $x \in B_q(x_0, R)$.
Si $x - x_0 \geq 0$, se tiene que

$$q(x - x_0) = 2(x - x_0) < R = nr.$$

Sea $M = M^0 + \frac{x - x_0}{n} I$. Notemos que

$$Tr(M) = Tr(M^0) + x - x_0 = x_0 + x - x_0 = x.$$

Además,

$$M_{i,j} - M^0_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \dfrac{x - x_0}{n} < r & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Es decir, $M_{i,j} - M^0_{i,j} < r$. Por lo tanto, $M \in A$.

Si $x - x_0 < 0$, sea $M = M^0 + \dfrac{x - x_0}{n} I$. De igual forma

$$Tr(M) = x$$

y

$$M_{i,j} - M_{i,j}^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \dfrac{x - x_0}{n} < r & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Así, $M \in A$. Por lo tanto, f es abierta de X en Y.
Además, por el Ejemplo 3.3, sabemos que (Y, q) es K-completo derecho y es un espacio de Hausdorff.
Notemos que la sucesión $\{M^n\} \subset X$ dada por $M_{i,j}^n = n$ para todo i, j es K-Cauchy derecho. En efecto, sea $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ y $r \geq s \geq k$. Entonces

$$p(M^s - M^r) = \max\{M_{i,j}^s - M_{i,j}^r, 0\} = 0 < \epsilon.$$

Pero $\{M^n\} \subset X$ no p-converge a ningún punto en X. Es decir, el espacio (X, p) no es K-completo derecho.

A continuación presentamos un resultado de teoría clásica generalizado al caso asimétrico, el cual será de suma utilidad en la demostración del teorema del grafo cerrado.

Proposición 3.3. *Sean $\{(X_i, p_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios normados asimétricos, $X = \prod_{i \in I} X_i$ el producto cartesiano y τ la topología producto en X. Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$,*

1. *La función $p(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x_i)$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, es una norma asimétrica en X, cuya topología inducida coincide con la topología producto.*

2. *Si (X_i, p_i) es K-completo izquierdo (derecho) para todo $i \in I$, entonces X dotado con la norma asimétrica p, definida en 1, es K-completo izquierdo (derecho).*

Demostración. 1. Es fácil ver que p en efecto es una norma asimétrica. Veamos que $\tau_p = \tau$.
Sea $B \in \tau$. Veamos que $B \subseteq p\text{-int}(B)$. Sea $x \in B$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
$B = \bigcup_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$, donde $A_{i,j} \in \tau_{p_i}$, para todo $i \in I$ y para algún conjunto de indices J . Fijemos $j \in J$. Luego, para cada $A_{i,j}$, $i \in I$, existe $B_{p_i}(x_i, r_i) \subseteq A_{i,j}$.
Sea $r = \min\{r_i : i \in I\}$. Si $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B_p(x, r)$, entonces $p(y - x) < r$, es decir, $\sum_{i \in I} p_i(y_i - x_i) < r$. Así, $p_i(y_i - x_i) < r \leq r_i$ para todo $i \in I$.
Con lo que concluimos que $y_i \in B_{p_i}(x_i, r_i)$, para todo $i \in I$. Entonces,

$$y \in \prod_{i \in I} B_{p_i}(x_i, r_i) \subseteq \prod_{i \in I} A_{i,j} \subseteq \bigcup_j \prod_{i \in I} A_{i,j} = B.$$

Así $B_p(x, r) \subseteq B$, y por lo tanto, $B \in \tau_p$.
Por otra parte, sea $B \in \tau_p$. Entonces para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$ existe $B_p(x, r_x) \subseteq B$.

Notemos que $x \in \prod_{i\in I} B_{p_i}(x_i, \frac{r_x}{n})$. Por lo tanto ,

$$B \subseteq \bigcup_{x\in B} \prod_{i\in I} B_{p_i}(x_i, \frac{r_x}{n}).$$

Además, para cada $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{i\in I} B_{p_i}(x_i, \frac{r_x}{n})$, se tiene que $p_i(y_i - x_i) < \frac{r_x}{n}$, lo cual implica que, $\sum_{i\in I} p_i(y_i - x_i) < r_x$. Es decir,

$$y \in B_p(x, r_x) \subseteq B.$$

Así $\prod_{i\in I} B_{p_i}(x_i, \frac{r_x}{n}) \subseteq B$. Entonces,

$$\bigcup_{x\in B} \prod_{i\in I} B_{p_i}(x_i, \frac{r_x}{n}) \subseteq B.$$

Por lo tanto, $B \in \tau$.

2. Supongamos que $\forall i \in I$ (X_i, p_i) es K-completo izquierdo y sea $\{x_k\}$ una sucesión en X, con $x_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $s \geq r \geq k_0$, $p(x_s - x_r) < \epsilon$, es decir $\sum_{i=i}^n p_i(x_i^s - x_i^r) < \epsilon$. Como $p_i \geq 0$, $p_i(x_i^s - x_i^r) < \epsilon$, para todo $i \in I$. Así, la sucesión $\{x_i^k\}$ es K-Cauchy izquierdo, y por la tanto $\forall i \in \{i, \ldots, n\}$ existe $y_i \in X_i$ tal que $x_i^k \xrightarrow{p_i} y_i$. Por lo tanto, $\forall i \in \{i, \ldots, n\}$ existen $k_i \in \mathbb{N}$ tales que $p_i(x_i^k - y_i) < \frac{\epsilon}{n}$, $\forall k \geq k_i$.
Sean $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$ y $k' = \max\{k_i : i \in I\}$. Para $k > k'$ se cumple que

$$p(x_k - y) = \sum_{i=1}^n p_i(x_i^k - y_i) < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{n} = \epsilon,$$

con lo cual $x_k \xrightarrow{p} y$ y por lo tanto (X, p) es K-completo izquierdo.
La demostración del caso derecho es análoga.

□

Lema 3.6. *Sean (X, p) un espacio normado asimétrico K-completo derecho (izquierdo) y A un subconjunto cerrado de X, entonces A es K-completo derecho (izquierdo).*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión K-Cauchy derecho (izquierdo) en A. Como X es K-completo derecho (izquierdo), existe $x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{p} x$. Como A es cerrado, se tiene que $x \in A$. Por lo tanto, A es K-completo derecho (izquierdo).

□

Teorema 3.3 (Teorema del grafo cerrado)**.** *Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos. Si (X, p) es K-completo derecho y Hausdorff, (Y, q) es K-completo derecho, f una función lineal de X a Y y $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ un subconjunto cerrado de $X \times Y$, entonces f es (p, q)-continua de (X, p) a (Y, q).*

Demostración. Definamos la función $p \times q : X \times Y \to [0, \infty)$ por $(p \times q)(x, y) = p(x) + q(x)$, por la Proposición 3.3.1, $p \times q$ es una norma asimétrica cuya topología inducida coincide con la topología producto en $X \times Y$. Además, como (X, p) y (Y, q) son K-completos derechos, por la Proposición 3.3.2, $(X \times Y, p \times q)$ también lo es. Luego, por el Lema 3.6 $(G(f), p \times q)$ es K-completo derecho.
Sea $F : (G(f), p \times q) \to (X, p)$ la función dada por $F(x, f(x)) = x$. Es claro que F es biyectiva y lineal, y como F es la proyección de $X \times Y$ a X restringida a $G(f)$, es $(p \times q, p)$-continua. Entonces, por el Teorema 3.2, F es abierta de $(G(f), p \times q)$ a (X, p). Por lo tanto F^{-1} también lo es.
Ahora consideremos la función $G : (G(f), p \times q) \to (Y, q)$ dada por $G(x, f(x)) = f(x)$. Es claro que G es lineal, y por ser la proyección de $X \times Y$ a Y restringida a $G(f)$, es $(p \times q, q)$-continua. Notemos que $f = G \circ F^{-1}$, y como la composición de continuas es continua, se sigue que f es (p, q)-continua de (X, p) a (Y, q).

□

Del mismo modo que sucede para el Teorema 3.2, el recíproco del Teorema 3.3 no se cumple, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5. Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos, donde $X = M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $p(A) = \text{máx}\{A_{i,j}, 0\}$, $Y = \mathbb{R}$, y $q(x) = \text{máx}\{x, 0\}$.
Sea $M \in X$, es claro que $q(Tr(M)) \leq np(M)$ si $Tr(M) < 0$.
Si $Tr(M) \geq 0$

$$q(f(M)) = q(Tr(M)) = Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{s} \text{máx}\{M_{i,j}, 0\} = np(M).$$

Con lo cual concluimos que f es (p, q)-semi-Lipschipz, o equivalentemente, (p, q)-continua.
Por otra parte, sea la sucesión de matrices $T^n \in X$ tales que $T^n_{i,j} = n$ para todo i, j. Luego, para todo $\epsilon > 0$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, si $r \geq s \geq k$, entonces:

$$p(T^s - T^r) = \text{máx}\{s - r, 0\} = 0 < \epsilon,$$

es decir, la sucesion $\{T^n\}$ es K-Cauchy derecho en X. Pero para todo $M \in X$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n > k$, entonces:

$$p(T^n - M) > \epsilon.$$

Con ésto, la sucesión $\{T^n\}$ no p-converge en X. Por lo tanto (X, p) no es K-completo derecho.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se realizó un estudio introductorio de los espacios cuasi semimétricos (cuasimétricos) y también de los espacios seminormados (normados) asimétricos. Estos espacios son generalizaciones de los espacios métricos y de los espacios normados, respectivamente, ya que se abstienen para su definición la exigencia de la simetría, que se estudian brevemente en los cursos de la Licenciatura de Matemáticas Aplicadas en esta Universidad. La mayor parte de la literatura respecto a estos espacios se encuentra en artículos de investigación, dado que es un área de estudio relativamente reciente, con importantes desarrollos que se dan sobre todo a partir de la última década del siglo pasado.

Como se ha visto a lo largo del trabajo, hay resultados de corte clásico que no requieren para su demostración de la simétria de la métrica o de la norma y por lo tanto pueden trasladarse directamente al nuevo ámbito, sin embargo, la mayor parte de los teoremas que se enuncian aquí para estos espacios cuasi semimétricos y seminormados asimétricos, toman como punto de partida teoremas similares del caso clásico (espacios métricos y normados), pero es necesario hacer adecuadas correcciones en definiciones previas, y adaptar las demostraciones de forma ingeniosa para poder llegar a la mejor meta posible sin la ayuda de la mencionada simetría, buscando condiciones adecuadas que permitan extender los resultados mencionados.

Esto se hace particularmente en lo relativo a la convergencia de sucesiones y la completez de los espacios considerados. En el Capítulo 2 se dieron definiciones diferentes de sucesiones de Cuachy, las cuales motivan otras definiciones de completez. Una de estas últimas se utiliza como hipótesis para demostrar el teorema del mapeo abierto en la parte final del trabajo.

Podemos concluir que se cumplió el objetivo de hacer un desarrollo comprensible de las bases de la teoría de los espacios cuasi semimétricos y de los espacios seminormados asimétricos, observando y comentando sus diferencias más relevantes con los espacios métricos y con los espacios normados, respectivamente. Varias definiciones y propiedades fueron ilustradas con ejemplos y contraejemplos, lo cual hace el trabajo final un material de valor didáctico para iniciar un estudio de estos espacios.

Asimismo, en el desarrollo de los capítulos se completaron numerosos detalles omitidos en las demostraciones que se dan en las fuentes bibliográficas consultadas y se formalizan con definiciones varios de los conceptos utilizados.

Nos hemos enfocado sólo en una pequeña parte de la teoría del análisis matemático y el análisis funcional para explicar cómo se trasladan algunos de sus resultados a este contexto asimétrico. Aún queda un vasto material teórico sin atender y la extensión de sus resultados a este nuevo campo es en gran parte un área de investigación en la actualidad.

Una de las aplicaciones de esta teoría es abordada en teoría de aproximación [3],[12],[5]. Como es bien sabido, el marco natural para tratar el problema de la mejor aproximacion es la de los espacios normados, así es natural considerar el correspondiente problema en los espacios normados asimétricos. Algunos problemas de mejor aproximación con respecto a la norma asimétrica, incluyendo aproximación en espacios de continuos o funciones intregrables, fueron considerados por Duffin y Karlovitz [5]. Pfankuche-Winkler [10] consideró el problema de la mejor aproximación en algunos espacios normados asimétricos de tipo Orlicz. De Blair and Myjak [4] probaron algunos resultados del problema de la mejor aproximación con respecto a una norma asimétrica en espacios de Banach.

Bibliografía

[1] C. Alegre, *Continuous operators on asymmetric normed spaces,* Acta Math. Hungarica, 122 (2009), no. 4, 357-372.

[2] T.M. Apostol, *Análisis Matemático,* Segunda Edición. Editorial Reverte, S.A., 1996.

[3] S. Cobzas, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces,* 2010.

[4] F.S. De Blasi and J. Myjak, *On a generalized best approximation problem,* J. Approx. Theory 94 (1998), no. 1, 54-72.

[5] R.J. Duffin, L.A. Karlovitz, *Formulation of linear programs in analysis. I. Approximation theory,* Congr. Numer. 69 (1989), 113-120.

[6] J. Dugundji, *Topology,* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[7] L.M. García-Raffi, S. Romaguera, E.A. Sánchez-Pérez, *The Dual Space of an Asymmetric Normed Linear Space,* Quaestiones Mathematicae, (2003), 83-96.

[8] L.M. García-Raffi, S. Romaguera, E.A. Sánchez-Pérez, *On Hausdorff asymmetric normed linear space,* Houston J. Math., (2003), 717-728.

[9] J.C. Kelly, *Bitopological spaces,* Proc. London Math. Soc. 13 (1963), 71-89.

[10] M. Pfannkuche-Winkler, *Best Φ-Approximation im nicht-symmetrischen Fall,* Skripten zur Mathematischen Statistik, vol. 15, 1988.

[11] I.L. Reilly , P. V. Subrahmanyam, M. K. Vamanamurthy, *Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces,* Monatsh. Math. 93 (1982), 127-140.

[12] Salvador Romaguera, Manuel Sanchis, *Semi-Lipschitz Functions and Best Approximation in Quasi-Metric Spaces,* Journal of Approximation Theory 103 (2000), 292-301.

[13] H.L. Royden, *Real Analysis,* Third Edition, Macmillan Publishing Company, 1988.