



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**“EL PARADIGMA HOLOGRAFICO DE BOHM
Y SU RELACION CON FRACTALES
AUTOADJUNTOS”**

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO EN FISICA APLICADA

PRESENTA

JOSE ARMANDO MARTINEZ PEREZ

DIRECTOR

M. C. JUAN RAMON TIJERINA GONZALEZ

Huajuapán de León, Oaxaca, Noviembre 2013.

Dedico este trabajo a mi PADRE, quien me ha dado todo.

Q.V.D.

AGRADECIMIENTOS

Expreso el agradecimiento sincero que siento hacia mi madre **Catalina Pérez Marín**, mi hermano **Mario Alejandro Martínez Pérez**, por su *amor* y apoyo incondicional, y a mi director de tesis M.C. **Juan Ramón Tijerina Gonzalez**, quien además de señalarme y abrirme la puerta que me ha permitido guiarme en mi trabajo, me ha brindado su conocimiento, paciencia y apoyo personal mucho antes de empezar con este trabajo de tesis.

Agradezco también, a quienes aceptaron este trabajo desde un inicio, mis sinodales, Dr. Ricardo Rosas Rodríguez, Dr. Marcelo Hernández Ávila y L.F.M. Gustavo Jiménez Santana. Además, por la ayuda e interés que desde un principio ha ofrecido en la realización de esta tesis, le doy las gracias especialmente al profesor M.C. Juan Carlos Mendoza Santos.

Y por último, a mis amigos, a mis maestros, en particular al Dr. Raúl Juárez Amaro y al M.C. José Luciano Moyotl Coyomani, por haberme acompañado y enseñado durante toda mi carrera, y a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios en ella, gracias.

José Armando Martínez, Noviembre de 2013.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se muestra el paralelismo entre el paradigma holográfico y los objetos fractales llamados auto-adjuntos. Para esto, se tiene que en el paradigma holográfico se emplea la noción de un orden implicado cuya propiedad de no-localidad señala que las propiedades de los objetos se encuentran ocultas y entrelazadas, manifestándose en la naturaleza a través de procesos llamados doblamientos y desdoblamientos. Por otro lado, en la geometría de un fractal auto-adjunto se presenta cierta propiedad conocida como auto-similitud, la cual se representa mediante una colección de transformaciones de similitud. Así, al observar que estas transformaciones pueden explicar en un contexto diferente los procesos de doblamientos, en la aportación de este trabajo, además de indicar que la propiedad de auto-similitud expresa la misma noción que la propiedad de no-localidad, se señala que un fractal auto-adjunto puede ser empleado como metáfora en la descripción del paradigma holográfico.

INDICE GENERAL

DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTOS	V
RESUMEN	VII
LISTA DE FIGURAS	XI
INTRODUCCIÓN	XIII
1 PARADIGMAS MECANICISTA Y SISTÉMICO	1
1.1 PARADIGMA MECANICISTA	1
1.2 PARADIGMA SISTÉMICO	4
2 PARADIGMA HOLOGRÁFICO	11
2.1 ORDEN IMPLICADO Y EXPLICADO	11
2.2 DOBLAMIENTO Y DESDOBLAMIENTO	18
2.2.1 METAMORFOSIS	18
2.3 HOLOMOVIMIENTO	20
2.4 VARIABLES OCULTAS	22
2.4.1 POTENCIAL CUÁNTICO	23
2.4.2 PROCESO DE MEDICIÓN	28
2.4.3 LA FUNCIÓN DE ONDA EN EL ORDEN IMPLICADO Y EXPLICADO	32
2.4.4 EXPERIMENTO HIPOTÉTICO EPR	34
2.4.5 INTERPRETACIÓN DE BOHM AL EXPERIMENTO EPR . .	39
3 FRACTALES	43

3.1	CARACTERÍSTICAS	43
3.1.1	MEDIDA	45
3.1.2	MEDIDA DE HAUSDORFF	47
3.1.3	DIMENSIÓN DE HAUSDORFF	48
3.2	CONJUNTOS AUTO-SEMEJANTES	49
3.2.1	SISTEMA DE FUNCIONES DE ITERACIÓN	50
3.2.2	DIMENSIÓN	52
3.2.3	FRACTAL DE KOCH	54
4	RESULTADOS Y CONCLUSIONES	59
4.1	NO-LOCALIDAD Y AUTO-SIMILITUD	59
4.2	METAMORFOSIS Y SFI	60
4.3	CONCLUSIONES	62
	BIBLIOGRAFIA	63
	Apéndices	66
	A HOLOGRAMA	69
	B MECÁNICA CUÁNTICA	73
B.1	FUNCIÓN DE ONDA	73
B.2	OPERADORES LINEALES	74
B.3	EL CONMUTADOR	74
B.4	OPERADORES HERMITIANOS	75
B.5	VALOR MEDIO DE UN OBSERVABLE	75
B.5.1	VALOR MEDIO DE LA POSICIÓN	76
B.5.2	VALOR MEDIO DEL MOMENTO	76
B.6	PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE	77
B.7	EIGENFUNCIONES Y EIGENVALORES DE UN OBSERVABLE	77
	C POTENCIAL CUÁNTICO	79
	D CONCEPTOS BÁSICOS DE FRACTALES	83
	E TRANSFORMACIONES DE CONTRACCIÓN Y DILATACIÓN	87

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	14
Figura 2.2	15
Figura 2.3	16
Figura 2.4	17
Figura 2.5	22
Figura 3.1	45
Figura 3.2	46
Figura 3.3	47
Figura 3.4	50
Figura 3.5	57
Figura 4.1	61
Figura A.1	70
Figura A.2	71

INTRODUCCIÓN

A través de la historia el hombre se ha hecho preguntas sobre la naturaleza, las cuales son cada vez más profundas. Al intentar responderse, el hombre ha establecido paradigmas, los cuales son conjuntos de definiciones, técnicas, teorías, conceptos, etc., cuya finalidad es ayudar a plantear algún fenómeno de la naturaleza y establecer una descripción de su comportamiento [1].

En la historia de la ciencia, durante el siglo XVII surge el *Paradigma Mecanicista* [2], basándose principalmente en el método analítico de René Descartes, el cual consiste en dividir un fenómeno complejo en trozos para entender el comportamiento del todo a partir de las propiedades de sus partes. En el paradigma mecanicista se consideran a las partes de un sistema como si trabajaran juntas y ordenadamente, gobernadas por leyes exactas que relacionan cada interacción de cada parte con la configuración de todas las demás, de aquí que en este paradigma se ocupe la metáfora de una máquina para describir a la naturaleza. Después, en el siglo XX aparece el *Paradigma Sistémico* [2], donde resaltan los trabajos del biólogo austriaco Ludgi von Bertalanffy, quién enfatiza la importancia del pensamiento sistémico, en el cual el todo es mayor que la suma de sus partes. Este paradigma describe a la naturaleza mediante una colección de sistemas dentro de sistemas que se interrelacionan unos con otros de forma dinámica, siendo los sistemas vivos la metáfora predominante de este paradigma [3].

Posteriormente, en los años 60's el neurocirujano austriaco Karl Pribram y el físico teórico estadounidense David J. Bohm, señalan que el "*Paradigma Holográfico*" [4, 5] brinda una posible explicación a los fenómenos de la naturaleza. Karl Pribram se persuade de esto al intentar describir algunas funciones del cerebro como la memoria [6], basándose en un tipo de almacenamiento que presenta un holograma, en el cual toda la información está distribuida en todas sus partes. Por su parte, David J. Bohm

establece el paradigma holográfico, al dar una nueva interpretación a los fenómenos de la *Mecánica Cuántica* en donde entes aparentemente sin conexión dan evidencia de estar interconectados, como es el caso de las *partículas gemelas* [7], sugiriendo que los sistemas cuánticos están interconectados debido a que son parte de una totalidad indivisible, en la cual cualquier punto del espacio es igual a cualquier otro, propiedad que se le nombra *no-localidad* y que también presenta un holograma; al contener cada una de sus partes la información completa contenida en él, cada parte es equivalente a cualquier otra. Así, en 1969, Pribram sugiere que el holograma es un convincente modelo para describir las funciones del cerebro, y en 1971, Bohm propone que la organización del universo puede ser entendida ocupando la metáfora de un holograma [8].

Por otra parte, en la naturaleza se muestran continuamente formas irregulares, como el borde de una costa, el contorno de una nube, la figura de un árbol, etc., las cuales son difíciles de comparar con las figuras regulares como una línea recta, un cuadrado, un círculo, etc. Sin embargo, en 1977 *Mandelbrot* propuso que tales figuras irregulares podrían ser descritas con ayuda de ciertos objetos, a los que llamó “Fractales” [9], los cuales son figuras irregulares que están caracterizadas por la *dimensión de Hausdorff* [10], al asignarles un número fraccionario como dimensión. Además, presentan la propiedad conocida como *auto-similitud*, la cual indica que tanto se parecen las partes de un objeto al todo. Y partir del grado de auto-similitud que presenten surgen tres clasificaciones: los *fractales auto-adjuntos*, los *fractales estadísticos* y los *fractales naturales*. Donde los fractales auto-adjuntos presentan el grado mayor de auto-similitud, los estadísticos el más bajo y los naturales un grado intermedio.

En el contexto del paradigma holográfico y los fractales auto-adjuntos, el objetivo de este trabajo de tesis es establecer una relación entre estas dos teorías, basándose en los términos de orden no-local y auto-similitud que se ocupan en cada uno de ellos. Así, en la aportación de este trabajo, se establece que los fractales auto-adjuntos pueden desempeñar el papel de metáfora en la descripción del paradigma holográfico.

Para lograr el objetivo de este trabajo, el estudio se distribuye en los capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo uno se estudia brevemente a los paradigmas mecanicista y sistémico, esbozando sus respectivas descripciones de la naturaleza.

El capítulo dos está destinado para exponer las ideas del paradigma holográfico, para que posteriormente se de un breve análisis del experimento de las partículas gemelas propuesto en su forma original por A. Einstein y sus colaboradores [7], terminando con la descripción propuesta por Bohm sobre este fenómeno.

En el capítulo tres se estudian las características principales de los fractales auto-adjuntos. Y, a manera de ejemplo, se examina al fractal de Koch [11], para ejemplificar dichas propiedades.

Por último, el capítulo cuatro es destinado al análisis de la relación que existe entre el paradigma holográfico y los fractales auto-adjuntos, discutiendo la relación entre los términos de no-localidad y auto-similitud. Finalmente se esbozan posibles direcciones de trabajos futuros entorno al paradigma holográfico y los objetos fractales.

Capítulo 1

PARADIGMAS MECANICISTA Y SISTÉMICO

La concepción de la naturaleza ha sido un cambio continuo, las descripciones establecidas por los paradigmas, tratan de abarcar el mayor rango de fenómenos. Sin embargo, cuando su descripción no es la adecuada, intentan reacomodar su estructura con tal de seguir siendo válidas para explicar los fenómenos que se salen del contexto original, hasta que llega el punto en que es necesario hacer cambios no solamente en su estructura, sino un cambio radical en su definición. Esto sucedió con el paradigma mecanicista debido al cambio del pensamiento analítico al sistémico, es decir, la aparición del paradigma sistémico. Sin embargo, se encuentra que cada paradigma es el adecuado según sea el contexto del fenómeno a tratar, lo que significa que el advenimiento de un nuevo paradigma no implica que se descarten los ya establecidos junto con sus respectivos conceptos, definiciones y teorías.

1.1. PARADIGMA MECANICISTA

En la historia de la ciencia, a mediados de los siglos XVI y XVII, la visión del mundo medieval basada en la filosofía aristotélica y la teología cristiana [2], cambiaron radicalmente gracias a la revolución científica llevada a cabo en ese periodo. Galileo Galilei especificó el alcance de la ciencia, restringiéndola a los fenómenos que pueden ser medidos y cuantificados. Por otra parte René Descartes, creó el método del pensamiento analítico, el cual consiste en descomponer un fenómeno complejo en partes para entender el comportamiento del todo a partir de las propiedades de sus

componentes. Descartes basó su visión de la naturaleza en la división fundamental de dos reinos independientes y separados: el de la mente y el de la materia. El universo material, incluyendo organismos vivos, fueron una máquina para Descartes, la cual podía en principio ser comprendida completamente analizándola en términos de sus partes más pequeñas.

El marco conceptual creado por Galileo y Descartes se consumó en la síntesis de la *Mecánica Newtoniana* o *Mecánica Clásica* de Isaac Newton, la cual además de haber sido el mayor logro de la ciencia del siglo XVII [2], se le considera como la formulación matemática del paradigma mecanicista.

En la mecánica clásica, según sea el interés en ciertas características del fenómeno de estudio, se define de manera adecuada al *sistema* o mejor dicho, el *sistema mecánico*, en el cual puede haber únicamente un cuerpo material, un campo o una combinación de ellos. Luego, para describir su comportamiento, se emplean las *tres leyes de la mecánica newtoniana* o *Leyes de Newton* [12]:

1. Un cuerpo permanecerá en reposo, o en movimiento uniforme, siempre y cuando ninguna *fuerza* externa actúe en él para cambiar su estado.
2. El cambio del *momento lineal* de un cuerpo es proporcional a la fuerza que actúa sobre él, y toma lugar en la dirección de esta fuerza externa.
3. Si un cuerpo dado actúa sobre un segundo cuerpo con una fuerza, entonces el último actuará sobre el primero con una fuerza igual en magnitud pero con dirección opuesta.

Además de estas tres leyes, en la perspectiva de la mecánica clásica el espacio permanece siempre similar e inamovible sin relación a algo externo [13], y se le describe con la ayuda de tres líneas perpendiculares entre sí, *coordenadas cartesianas*, pudiendo ubicar cualquier punto en el espacio. También, se considera que el tiempo transcurre por igual sin relación a algún factor externo, es decir, es absoluto, independiente y universal [13], por lo que se le trata como una *variable independiente*, la cual se puede interpretar como un cierto tipo de orden; si se tienen dos eventos puede pasar una de las tres opciones: uno de ellos sucede antes que el otro, lo contrario o suceden al mismo tiempo. Así, con la ayuda de los ejes coordenados y los números reales además de describir matemáticamente al espacio y al tiempo respectivamente [8], se establece

cierto orden en ellos, respecto al cual todo sistema mecánico se encontrará descrito y su comportamiento estará regido por las leyes de Newton, las cuales a continuación se describen brevemente.

La primera ley de Newton también conocida como *ley de inercia*, expresa de forma preliminar el carácter *causal* de la mecánica clásica, el cual significa que cualquier perturbación externa sobre un sistema es tratada como una *causa* que produce un *efecto* específico en él, pudiéndose transmitir a cada una de las partes del sistema. De aquí se desprende que un cuerpo en reposo o moviéndose a velocidad constante seguirá en su mismo estado, a menos que lo perturbe algún agente externo.

En la mecánica clásica se concibe a una fuerza como la interacción entre dos o más cuerpos. Así, con la ayuda de la segunda ley de Newton se puede entonces establecer una manera cuantitativa de relacionar la causa, una fuerza (o torca), con el efecto que produce, un cambio en la cantidad de momento lineal (o angular) del sistema. Además, junto con la ayuda de los órdenes establecidos para el espacio y el tiempo, es posible introducir cierto tipo de medidas y unidades arbitrarias a las cantidades como fuerza, momento lineal, etc., que se le asocie al sistema en estudio.

La tercera ley de Newton conocida como el principio de *causa-efecto*, es otra forma de expresar el aspecto causal de la mecánica clásica, presentándose usualmente, por ejemplo, cuando un libro se encuentra quieto sobre una mesa, debido a que esta última ejerce una fuerza igual en magnitud pero en sentido contrario al peso que el libro le ejerce.

Por otra parte, en la mecánica newtoniana cuando en el espacio no hay presente algún ente como un cuerpo material o un campo, éste presentará sus propiedades de *homogeneidad* e *isotropía* [14]. Entendiendo la homogeneidad del espacio como la equivalencia de todas sus partes; pudiendo ubicar el origen de un sistema de coordenadas en cualquier punto; y todo sistema mecánico que esté ubicado en alguna región del espacio libre, tomada al azar, se moverá del mismo modo que en cualquier otro lugar. En otras palabras, la conducta de iguales sistemas mecánicos con las mismas configuraciones iniciales será idéntica en diversas partes del espacio y por tanto no se puede distinguir una región de otra. Por otro lado, la isotropía del espacio significa la equivalencia de todas las direcciones posibles en el espacio: la conducta del sistema

mecánico no depende de su orientación.

El tiempo también se vuelve *homogéneo* gracias a sus propiedades de absoluto, independiente y universal, de los cuales se desprende que su homogeneidad [14], significa que todos sus momentos son equivalentes: el movimiento de un sistema mecánico transcurrirá de la misma manera independientemente de en qué momento fue puesto en marcha, es decir, cuando fueron fijadas las condiciones iniciales del movimiento. Claro está que dichas condiciones iniciales deberán ser las mismas para distintas puestas en marcha. Además, en la mecánica clásica siempre que un sistema mecánico se ponga en marcha nuevamente bajo las mismas condiciones, se tendrá que cualquier observador que no perturbe al sistema será testigo de un mismo comportamiento. Esta manera de considerar el comportamiento de un sistema, señala que para cierta configuración inicial del sistema su comportamiento estará determinado, lo que significa que la mecánica clásica es determinista [14].

Por último, la mecánica clásica en su descripción de la naturaleza, considera a las partes de un sistema como si trabajaran juntas y ordenadamente como una máquina, gobernadas por las leyes exactas de Newton que relacionan cada interacción de cada parte con la configuración de todas las demás.

1.2. PARADIGMA SISTÉMICO

El paradigma sistémico o teoría general de sistemas (TGS), empieza a tomar forma con los trabajos del biólogo austriaco Ludgi von Bertalanffy en 1925, seguido de los trabajos de Norbert Wiener y Ross Ashby en la cibernética, entre otros [2, 3]. Este paradigma aparece en gran parte por la necesidad de describir a sistemas vivos a los cuales no se les puede considerar en el contexto de la mecánica clásica, dado que un organismo vivo presenta características y comportamientos ajenos al funcionamiento de una máquina, por ejemplo; una planta, que continuamente interactúa con su exterior para poder sobrevivir y llevar a cabo sus funciones, mientras que un sistema mecánico como un reloj solo necesita que se le establezca la hora y fecha para que pueda funcionar adecuadamente. En general se tiene, que el objetivo de la TGS es establecer una teoría que pueda ser aplicada a cualquier tipo de sistema, ya sea un sistema vivo o un sistema físico [2]. En esta sección se dará una revisión de cómo el

paradigma sistémico brinda una descripción de la naturaleza.

La principal diferencia entre el paradigma mecanicista y el paradigma sistémico, está en que el primero es regido por el *pensamiento analítico*; en el cual el proceso de analizar un fenómeno o sistema consiste en separarlo en sus partes, analizarlas por separado para después deducir el comportamiento del todo. Mientras que en el segundo paradigma se presenta el *pensamiento sistémico*; en este proceso las partes del sistema o fenómeno ya no son más importantes que el todo, es decir, el análisis no puede ser dirigido únicamente a las partes porque las propiedades principales del todo surgen de la organización y de las relaciones entre ellas, y si se analizan por separado, tales propiedades son evadidas.

En la TGS, un objeto se entiende por algo tangible como los objetos materiales, o intangible como las ideas o la información. Así, en el contexto del paradigma sistémico un *sistema* se considera como una totalidad, la cual está formada por partes y objetos interrelacionados cuyo fin es alcanzar un conjunto de objetivos, propósitos o metas. Donde las interrelaciones se consideran como las relaciones a través de las cuales las partes modifican a otras y son modificados a la vez, dando como resultado la conducta del sistema. Por esta razón, estas relaciones constituyen la verdadera esencia del sistema y su ruptura trae consigo la ruptura del sistema como tal.

Entonces, más que definir lo que es un sistema en la TGS se dan las características principales que debe presentar un objeto para ser considerado como un sistema [3], tomando en cuenta que se tiene la libertad de abstraer las características pertinentes del objeto en estudio; dado que el objetivo siempre será aproximar el comportamiento de la naturaleza. Así, a partir de la abstracción del sistema, se esperaría identificar algún tipo de frontera que indicara qué es lo que pertenece al sistema y qué no, esto se puede hacer indirectamente al definirlo adecuadamente. La diferencia entre un sistema y su entorno, conduce a la posibilidad de que el sistema junto con otros sistemas inmersos en su medio sean partes de un sistema mayor nombrado *supersistema*. De la misma forma, algunas partes de un sistema pueden ser a la vez sistemas pequeños, nombrados *subsistemas*. De esta manera, la idea de recursividad en la TGS se presenta cuando un sistema junto con sus subsistemas y el supersistema al que pertenece pueden ser llamados sistemas, en el sentido que presentan las características propias de un sistema. Sin embargo, no es fácil identificar los subsistemas de un sistema, por-

que no todas sus partes componentes pueden considerarse subsistemas, es decir, no parece existir principios generales que determinen cuándo una parte es un subsistema o simplemente un componente.

La TGS establece dos clases de sistemas: *sistemas abiertos* y *sistemas cerrados* [3]. Un sistema abierto se define como aquel sistema que interactúa con su medio, recibiendo energía, transformándola y finalmente cediendo la energía convertida. Ejemplos de sistemas abiertos pueden ser la llama de una vela, las plantas, insectos, células, animales, hombres, grupos sociales, etc., abarcando en general a los seres vivos. Mientras que los sistemas cerrados son aquellos que por su propia cuenta no son capaces de llevar a cabo las actividades correspondientes de los sistemas abiertos. Estos son representados por algunos sistemas físicos, como las máquinas, minerales, y en general los objetos inanimados.

El paradigma sistémico diferencia ciertos elementos generales que presenta un sistema, los cuales son imprescindibles para que cumpla con sus objetivos. Dado que se tienen dos clases de sistemas, estos elementos que a continuación se mencionan son dirigidos en general a los sistemas abiertos, considerando a los sistemas cerrados como un caso donde la complejidad de dichos elementos disminuye en gran medida.

El primer elemento es la *corriente de entrada* del sistema [3]. Este es en sí un flujo de algunos tipos de recursos provenientes de su entorno, los cuales son necesarios para el desempeño del sistema. En general se pueden clasificar tales recursos en dos tipos, energía e información. El flujo de la energía obedece la *ley de conservación* [3], la cual establece que “la energía que se encuentra en el sistema es igual a la energía que sale de él menos la energía que entra”. Entendiéndose energía en su forma general, la cual puede presentarse como calor, radiación, masa, trabajo, etc.. Mientras que el flujo de información se rige bajo la *ley de los incrementos* [3], la cual significa que “la cantidad de información que permanece en el sistema no es igual a la diferencia entre lo que entra y lo que sale, sino que es igual a la información que existe más la que entra”, es decir, hay un incremento neto en la entrada, y la salida no elimina información del sistema. Es de suponerse que el sistema necesariamente deba poseer mecanismos mediante los cuales logre recibir y aprovechar los recursos que provengan de su medio.

Cuando se definió en términos generales un sistema, se mencionó la presencia en él de un propósito(s) u objetivo(s), esto se debe a que todo sistema realiza una función. Así, la energía que reciben los sistemas sirve para mover y hacer actuar sus mecanismos particulares con el fin de alcanzar sus objetivos. En otras palabras, los sistemas convierten o transforman la energía recibida en alguna de sus diferentes formas, la cual se vuelve la *producción* característica del sistema. Cuando se considera al sistema total, se pueden distinguir diferentes procesos o funciones de conversión siendo algunas principales, en relación al producto final y otras secundarias, de servicio o intermedios que puedan operar los subsistemas. Tales procesos representan el segundo elemento de un sistema, los cuales se conocen como los *procesos de conversión*.

El tercer elemento es la *corriente de salida* [3], que equivale a la *exportación* que el sistema hace a su medio, entendiéndose por medio todos aquellos otros sistemas o supersistemas que utilizan de una forma u otra la energía que cede tal sistema. Generalmente no existe una sino varias corrientes de salida, las cuales se pueden dividir en *positivas* o *negativas*. La corriente de salida es positiva cuando es *útil* a la comunidad y negativa en caso contrario, de modo que con su exportación de corrientes de salidas positivas el sistema esté en condiciones de adquirir sus recursos a través de sus corrientes de entrada; notando que los conceptos positivo y negativo son relativos, ya que dependen del criterio del observador o su medio. Entonces se puede hablar de *sistema viable* como aquel que es capaz de auto-organizarse; mantener una estructura permanente y modificarla de acuerdo a las exigencias de su medio. Y auto-controlarse; mantener sus principales variables dentro de ciertos límites.

Y como cuarto elemento está la *comunicación de retroalimentación* [3], proceso mediante el cual el mismo sistema se transmite información acerca de su desempeño en la obtención de sus objetivos, esto con el fin de que se lleven a cabo las correcciones necesarias y adecuadas. Desde este punto de vista, la retroalimentación es un mecanismo de *control* que posee el sistema para asegurar el logro de sus metas.

Por otra parte, dado que un sistema cerrado no interactúa con su medio, se observa que tales sistemas pasan de *estados* más ordenados u organizados a estados menos ordenados u homogéneos, entendiéndose por estado a una cierta configuración que presenten las partes o variables del sistema completo. Este cambio es una cantidad definida y medible, denominada *entropía* [12], la cual es una cantidad física mensura-

ble que en sistemas aislados es siempre creciente. La entropía también se puede definir o interpretar como la tendencia que tiene todo sistema a alcanzar cierto estado que no varía con el tiempo, el cual puede considerarse como el caos, la desorganización o un estado en el cual el sistema tiende a ser homogéneo, eliminando las diferencias que lo hacen identificable como sistema funcional y lo diferencian de otros. Para el caso de sistemas cerrados, este estado es el más probable.

Lo entropía creciente sucede en sistemas cerrados, sin embargo para los sistemas abiertos se encuentra otro comportamiento, debido a que estos se encuentran continuamente interactuando con su medio, que en particular para sistemas vivos a esta interacción se le llama *metabolismo* [3]. Así, con la ayuda de este proceso los sistemas vivos evitan morir a causa de la entropía, la cual conlleva a una mayor desorganización entre sus elementos, repercutiendo en la incapacidad de realizar sus objetivos llevando a estos sistemas al colapso. El metabolismo se puede interpretar entonces como un proceso mediante el cual los sistemas vivos se liberan de la entropía. Generalizando esta idea a los sistemas abiertos, se podría decir que tales sistemas extraen de su medio *entropía negativa o neguentropía* con tal de evitar el incremento del desorden. La neguentropía se puede interpretar como información, la cual significa una disminución en la incertidumbre, porque para que un sistema sea viable debe necesariamente extraer información del medio a través de su corriente de entrada y de su retroalimentación para así organizarse, sobrevivir y cumplir sus objetivos.

En el paradigma mecanicista, se establece un tipo de orden y medida en su descripción, ahora bien, en el paradigma sistémico también existe un orden y una medida. En la TGS se señala que la organización de un sistema no se puede entender como una fuerza, materia o energía, sino más bien como algo que indica un orden y una medida. Orden en el sentido literal de las palabras: orden y organización, indicando lo contrario al caos. Y medida con la ayuda de la información; a más información mayor organización, estableciendo ciertos límites respecto al grado de organización, siendo la cota inferior cuando un sistema abierto llega a convertirse en un sistema cerrado lo cual implicaría una entropía siempre creciente, y la cota superior cuando el sistema obtiene el grado de organización necesaria para poder ser un sistema viable.

En general, según la perspectiva de la TGS, todo sistema tiende a desorganizarse y por tanto a aumentar su entropía. Sin embargo, cada sistema posee mecanismos

que le ayudan a buscar su supervivencia, estos mecanismos se encuentran en su capacidad de organización, con tal de poder mantenerse organizado frente a los cambios y perturbaciones provenientes de su medio. Esto es lo que se denomina el *principio de organicidad* [3]. Luego, para que los mecanismos de organización puedan operar es necesario proveerles energía, y por tanto el sistema debe generar un exceso de energía sobre aquella destinada a sus procesos de conversión. Los propósitos con los que se ocupa este excedente, se consideran partes de la neguentropía. Por tanto, el principio de organicidad operará en la medida que el sistema sea capaz de generar este exceso de energía. Así, un sistema siempre busca estar en un estado permanente o estado de equilibrio en el que mantenga una relación determinada y estable entre su corriente de entrada y salida, para así estar en armonía con su entorno. Esta situación no implica un estado inmóvil de equilibrio sino más bien una condición de flujo dinámico; continuo y variable, donde cada estado permanente está en función del medio cambiante de cada sistema, señalando que todos los sistemas son parte de una misma totalidad, la naturaleza.

Por último, la metáfora que ocupa el paradigma sistémico para describir a la naturaleza [3], es entonces una colección de muchos supersistemas, sistemas y subsistemas que de una forma u otra actúan y se interrelacionan unos con otros dentro de estados dinámicos, existiendo entre ellos un continuo cambio de energía e información, llevando a cabo una infinidad de procesos de conversión. Donde las acciones o interacciones que suceden no solo afectan al sistema sobre la que se ejercen sino también al sistema que las aplica y, más aún, sobre otros que aparentemente son independientes de los sistemas que interactúan.

Capítulo 2

PARADIGMA HOLOGRÁFICO

En el capítulo anterior se dijo que en el paradigma mecanicista se ocupa el modelo de una máquina para describir a la naturaleza, y que el paradigma sistémico, dado su enfoque a sistemas de tipo más general, su contexto está fuertemente orientado a sistemas vivos. En contraste con estos paradigmas, en su descripción de la naturaleza el paradigma holográfico ocupa a un holograma como metáfora, estableciendo que todas las cosas están interrelacionadas de tal manera que son parte de una sola entidad, la cual se puede decir, se basa en los mismos principios de un holograma.

En este capítulo se estudian los siguientes conceptos del paradigma holográfico: el orden implicado, orden explicado, los procesos de doblamiento y desdoblamiento, y el holomovimiento. También se hace un breve estudio de la interpretación de la mecánica cuántica en términos de variables ocultas propuesta por David J. Bohm. Posteriormente, se presenta el fenómeno de las partículas gemelas en la forma original en que fue propuesta por A. Einstein y sus colaboradores [7], terminando con la interpretación propuesta por Bohm a este fenómeno.

2.1. ORDEN IMPLICADO Y EXPLICADO

El orden en el paradigma mecanicista se basa en el orden de un sistema cartesiano para el espacio y el orden secuencial de una variable continua para el tiempo. Por tanto, cuando se desea analizar alguna propiedad de un sistema, ésta es representada mediante una variable, la cual puede estar evolucionando respecto al tiempo, variar de acuerdo a la posición o ambas. De aquí se desprende la utilidad del concepto de

función (ver apéndice D) dentro del paradigma mecanicista.

A manera de ejemplo, si se considera que se tiene una función continua f que depende de la posición x , la forma en que relaciona su dominio con su contradominio es la siguiente: a cada valor x le corresponde un solo valor $f(x)$, más aún, a cada intervalo $\Delta x = x_f - x_i$ le corresponde un cierto intervalo de valores $\Delta f = f(x_f) - f(x_i)$. Si se piensa a x como la posición y a $f(x)$ como la información que representa cierta propiedad del sistema que se esté estudiando, se puede observar que hay una *relación local* entre la propiedad del sistema y el espacio, en el sentido que a cada intervalo Δx solo le corresponde una porción Δf de toda la información esparcida sobre el espacio para el cual esté definida f . Esto señala que el orden que indirectamente trabaja y se transmite en el paradigma mecanicista es local.

Por su parte, el paradigma holográfico se basa principalmente en un orden que no presenta la característica local. Para indicar la diferencia entre el orden de este paradigma y un orden local, se puede suponer el siguiente ejemplo. Se tienen dos bases $\{\vec{u}_i\}$ y $\{\vec{v}_j\}$ para el espacio \mathbb{R}^n . Si el vector columna $(\vec{x})_u$ representa los coeficientes de expansión del punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sobre la primera base, para representar a \vec{x} respecto a la segunda base se tiene la transformación dada por la matriz de transición A de la primera a la segunda base, es decir, $(\vec{x})_v = A(\vec{x})_u$, donde $(\vec{x})_v$ son los coeficientes de expansión de \vec{x} respecto a la segunda base. De este cambio de base se desprende que cada entrada de $(\vec{x})_v$ depende en general de todas las entradas de $(\vec{x})_u$. Esta forma de relacionar a $(\vec{x})_u$ con $(\vec{x})_v$ no es una correspondencia uno a uno entre sus componentes, es decir, no se puede decir simplemente que cada entrada de $(\vec{x})_u$ está en función únicamente de un solo componente de $(\vec{x})_v$. Este tipo de correspondencia se puede entender como una *relación no-local* [8], la cual se presenta de manera más general cuando cada elemento de un objeto está relacionado, o mejor dicho, interrelacionado con todos los elementos de él mismo o de un segundo objeto.

De lo anterior, se desprende que el orden que se emplea en el paradigma holográfico se puede entender como una organización en la cual las partes manifiestan estar relacionadas de una manera no-local, a esto Bohm le nombró un *orden no-local* [8, 15]. Además, también propuso que aún en los casos que presenten la aleatoriedad en su organización, por ejemplo las olas del mar, las orillas de las costas, las nubes, etc., habrá un orden, el cual será mucho más complejo que aquel, por ejemplo, con el que

se describa a un sistema mecánico. A este tipo de orden que se presenta en la naturaleza, aunque de forma oculta o escondida y aparentemente aleatoria, Bohm no lo considera como desorganización, sino más bien como una organización con un *alto grado de complejidad* en la cual se encuentra oculto cierto orden no-local.

El propósito del paradigma holográfico es dar una descripción de la naturaleza, para ello propone la existencia de una entidad que tiene necesariamente que ser considerada como una sola totalidad, siempre existente en todo el espacio (de manera similar a como se concebía al éter permeando el espacio completo). Además, a esta entidad se le atribuye una organización con un alto grado de complejidad que presenta un orden no-local y oculto. Su característica de orden no-local suele llamarse *propiedad de no-localidad* [8], la cual refuerza la idea de una totalidad indivisible, ya que cada parte está interrelacionada de una u otra forma con todas las demás, por tanto, al *referirse* de algún modo a una de ellas se hace referencia inevitablemente a todas las demás, es decir, al *todo*. A esta entidad; una nueva noción de orden, Bohm le da nombres como “orden implicado” o lo “no-manifiesto” [8, 16, 17] (el verbo *impli-car* significa “doblar hacia adentro” o “envolver”), con lo cual da entender un orden implícito u oculto.

Bohm encuentra que un holograma (ver apéndice A), puede ser considerado como un objeto descriptivo del paradigma holográfico y en particular del orden implicado. Debido a que la manera en que está almacenada la información en un holograma es tal que exhibe un desorden aparente a simple vista (como se muestra en la figura 2.1), por lo que se puede decir que la imagen guardada en el holograma está oculta, al menos ante nuestra percepción visual. Es de esperarse entonces que Bohm entienda y sugiera que la información del orden implicado está oculta ante cualquier percepción nuestra.

Si el holograma se llegara a romper en pedazos, al iluminar cada una de estas piezas se seguirá reconstruyendo la imagen del holograma entero, aunque más pequeña y en proporción de la imagen contenida en todo el holograma (ver figura 2.2). Indicando que en un holograma, la información contenida en él, está esparcida en cada una de sus partes. De aquí se desprende que a la información en el orden implicado Bohm la exprese y considere como *doblada, envuelta o plegada* [17] en cada una de sus partes

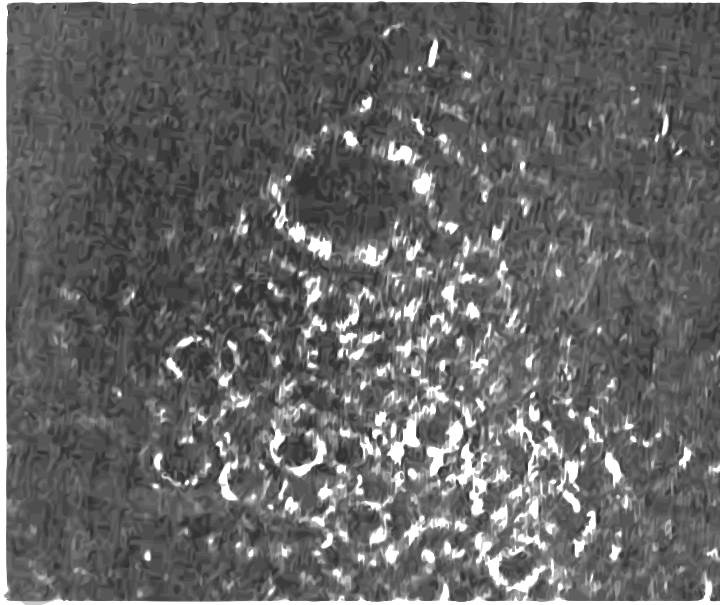


Figura 2.1: La información almacenada en un holograma muestra un desorden aparente a simple vista.

y a la vez en el todo, recalcando su propiedad de no-localidad.

Otro ejemplo llamativo (con un comportamiento peculiar que se puede considerar hipotético) que encontró Bohm para transmitir la idea de orden implicado, es un tipo de dispositivo que consiste de un recipiente formado por dos cilindros concéntricos, en el cual el cilindro interno puede girar (como un rodillo) y el espacio entre ambos se encuentra lleno de algún fluido viscoso (ver figura 2.3), como glicerina.

En este dispositivo cilíndrico, cuando se le introduce una gota de tinta y después se le hace girar lentamente su cilindro interno, la tinta empieza a esparcirse como si se estirara en forma de un hilo cada vez más fino, hasta el límite de ocultarse a la vista. Si después se gira el rodillo en sentido contrario, conforme se da el mismo número vueltas, la tinta va retomando la forma de una gota y su posición original (ver figura 2.4). Para que este comportamiento se pueda producir es necesario ciertas condiciones [15], como por ejemplo, que el líquido sea viscoso y girar lentamente el cilindro externo para que la difusión en el líquido sea despreciable. Así, si se colocaran dos o más gotas el comportamiento se sigue considerando el mismo; cuando se hace girar el rodillo interno se esparcen todas las gotas sobre el líquido viscoso, y cuando se gira en sentido contrario el mismo número de veces, nuevamente las gotas reapare-

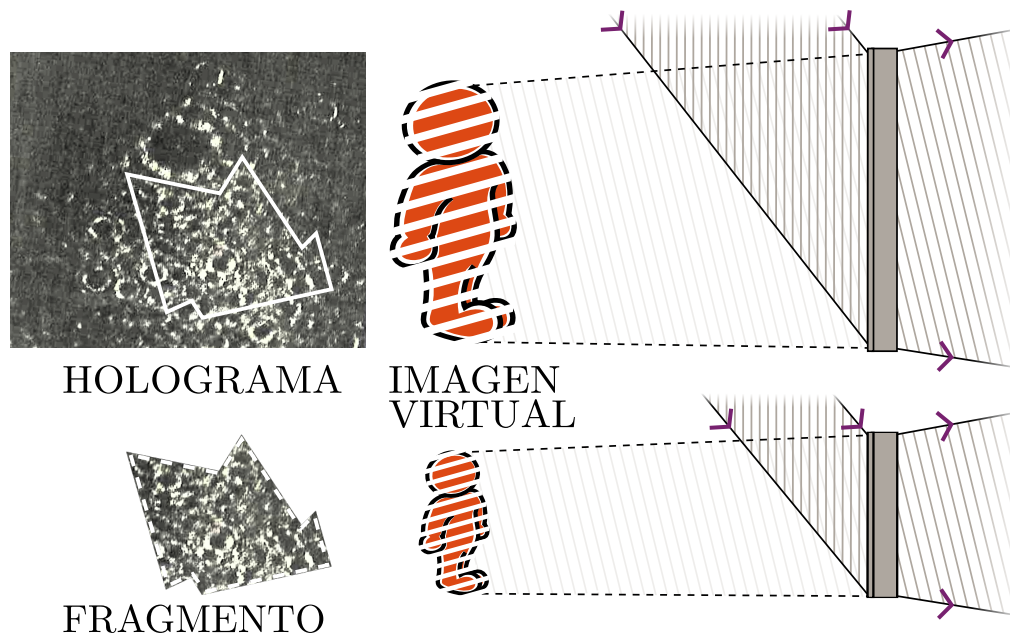


Figura 2.2: En cada parte del holograma se encuentra almacenada de cierta forma la información de toda la imagen.

cerán en su posición original.

El comportamiento del dispositivo anterior impresionó a Bohm porque el estado en el que se encuentra una o más gotas de tinta cuando están esparcidas, al estar entremezcladas en todo el líquido ejemplifican al orden implícito, dado que no se encuentran en una forma que sea distinguible a la vista, sino más bien están en un estado de orden más sutil y complejo, debido a que toda la tinta esparcida aún puede retomar la distribución de las gotas. Basándose en esta metáfora se puede considerar la manera en que Bohm concibe al orden implícito. Así, de manera muy parecida como las gotas de tinta se esparcen en el líquido viscoso, todos los objetos junto con sus propiedades o características propias, se puedan distinguir con nuestros sentidos o no, pueden en algún momento estar plegados dentro de todo el orden implícito; interpenetrándose e interconectándose en esta entidad. De esto se desprende que, una vez que cualquier objeto se encuentre plegado en el orden implícito, se encontrará presente en todas las partes del espacio, dicho de otra forma, aunque dos o más objetos se localicen en diferentes partes del espacio, cuando se encuentren plegados en el orden implícito, formarán parte de una totalidad indivisible, lo cual señala el hecho que en el paradigma holográfico todas las cosas se consideren partes inherentes del orden

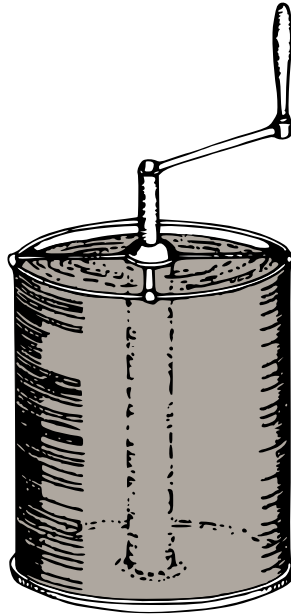


Figura 2.3: En la figura se muestra el dispositivo que constituye de dos cilindros concéntricos, cuyo espacio entre ambos está lleno de un líquido viscoso.

implicado.

En base al ejemplo del arreglo cilíndrico se puede considerar otra metáfora, el cielo. Cuando la tinta se encuentra en forma de gota, está en un estado que se puede comparar a la condición de una nube suspendida en el cielo, teniendo papeles semejantes la gota de tinta con la nube, y el líquido viscoso con el cielo. El estado en el que se encuentran la gota y la nube es tal que su forma se puede percibir y describir tal vez con un orden local, por ejemplo, a la gota de tinta se le puede ver como una masa acumulada en un punto y a la nube se le puede describir mediante una función que relacione su densidad con cada punto del espacio. Así, cuando la organización dentro del orden implicado tiene un orden tal que puede ser percibido o descrito con la ayuda de alguna teoría adecuada, se tiene que tal orden ya no es oculto, ahora se encuentra en una configuración que resalta y que manifiesta cierta estructura, la cual se puede percibir y describir. A las características que se manifiestan en esta estructura, Bohm las interpreta como información *desdoblada*, *desenvuelta* o *desplegada* del orden implicado, y a este último, cuando presenta tal orden le nombra “orden explicado” [8].

Considerando nuevamente al ejemplo del holograma junto con las metáforas del arreglo cilíndrico y el cielo, se pueden discernir entre ellos el orden explicado e im-

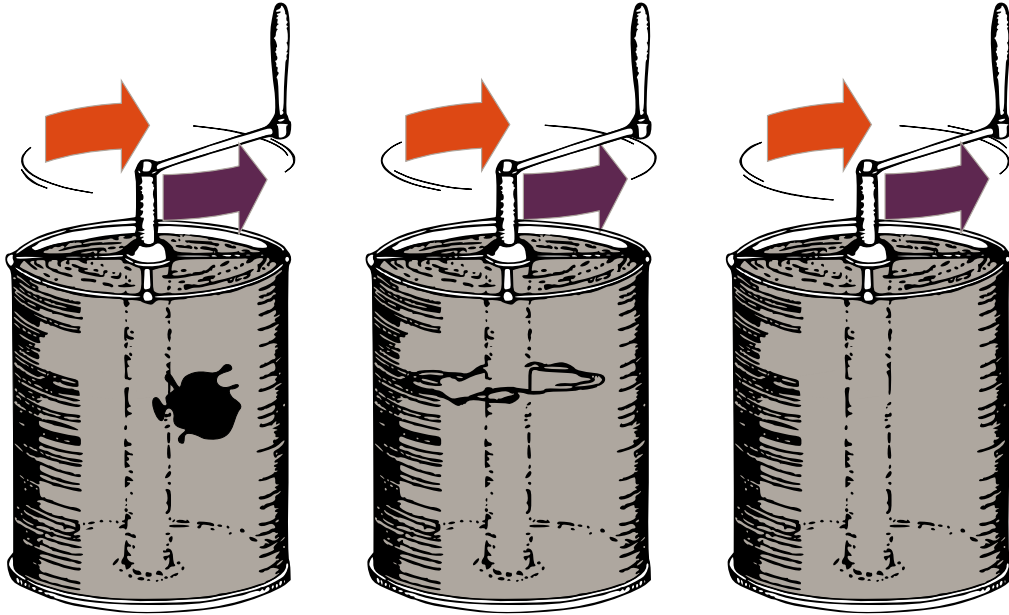


Figura 2.4: Las flechas en sentido horario suponen el giro del rodillo interno para esparcir la gota de tinta, mientras que las flechas en sentido contrario muestran cuando se hace girar el rodillo en sentido inverso con tal que la tinta retome la forma de una gota.

plicado. Para el primero, cuando se recrea el frente de luz proveniente del objeto, viéndose su imagen virtual, la información del holograma se estará manifestando en un orden explicado, mientras que el patrón de interferencia grabado en el holograma ejemplifica al orden implicado. En el segundo, cuando la tinta toma la forma de una gota ilustra al orden explicado, mientras que cuando se encuentra esparcida representa al orden implicado. En el tercero, se puede decir que todas las nubes se encuentran en el orden explicado, mientras que el resto del cielo representa al orden implicado. Considerando esta última metáfora, así como las nubes contienen solo una parte de la humedad esparcida sobre todo el cielo, el orden explicado solo manifiesta ciertas características o información que se encuentran plegadas dentro del orden implicado. Sin embargo, tanto el orden explicado e implicado siguen siendo una sola entidad, ambos son aspectos de una sola totalidad o unidad, y el hecho que se pueda discernir entre un orden explícito e implícito es solo un manera útil de describir a esta totalidad y no un reflejo de una diferencia objetiva en él [16, 15]. De aquí en adelante cuando se mencione orden explicado u orden implicado se referirá a un orden explícito u oculto respectivamente, y cuando se agregue el adjetivo de *totalidad* al orden implicado, se estará considerando a una sola entidad incluyendo tanto al orden explicado e impli-

cado.

2.2. DOBLAMIENTO Y DESDOBLAMIENTO

Como se puede apreciar, existen procesos mediante los cuales la información oculta en el orden implicado se modifica para que pueda manifestarse en un orden explicado, y también coexisten procesos que cumplen con el objetivo contrario. Por lo cual, en el paradigma holográfico se definen dos procesos específicos: el *doblamiento* o *plegado* y *desdoblamiento* o *desplegado* [16]. A través del primero el orden explicado se transforma en un orden implicado, y mediante el segundo proceso el orden implicado pasa a ser un orden explicado. Es de esperarse entonces que la información que se pliegue o despliegue dependa específicamente de los procesos de doblamiento y desdoblamiento.

El proceso de plegado se ejemplifica en un holograma, cuando se graba el patrón de interferencia y el proceso de desdoblamiento cuando se reconstruye el frente de luz del objeto para observar su imagen virtual. Mientras que en la metáfora del dispositivo cilíndrico, el proceso de doblamiento se da a través de las vueltas necesarias para que la gota de tinta se difunda en todo el líquido, y al proceso de desplegado cuando se hace girar el mismo número de vueltas en sentido contrario con tal que la tinta se manifieste en forma de gota.

2.2.1. METAMORFOSIS

El objetivo del proceso de doblamiento es entonces transformar el orden explícito a un orden oculto. En el paradigma holográfico se establece que la naturaleza del orden implicado es ser un orden oculto con un alto grado de complejidad, el cual únicamente puede ser analizado cuando se ha transformado en un orden explicado, de otra forma seguirá perteneciendo al orden implicado. Sin embargo, el orden explicado e implicado están correlacionados a través de los procesos de doblamiento y desdoblamiento. Así, dada la importancia de estos dos procesos, Bohm establece, aunque de una manera preliminar, una representación simbólica para ellos. Al proceso de doblamiento le asigna un operador M , al cual llama metamorfosis [8], señalando que no corresponde a cambios como una traslación o rotación de un cuerpo rígido, sino a un proceso que

transforma objetos casi por completo, en los cuales solo ciertas características sutiles e implícitas permanecen invariantes, semejante al proceso de metamorfosis que presenta una oruga al cambiar radicalmente para convertirse en una mariposa, de aquí el nombre del operador M . Además, dado que el doblamiento y desdoblamiento son procesos inversos, al operador inverso M^{-1} le corresponde representar el proceso de desdoblamiento.

Por otro lado, dado que el orden explicado e implicado son partes de una misma totalidad, los procesos que tengan lugar en alguno de ellos, afectará a ambos. Esto es, para algún proceso en el orden explicado, se tendrá un proceso equivalente en el orden implicado, es decir, el propósito o función del proceso en cuestión también se cumplirá si se lleva a cabo su proceso equivalente en el orden implicado. Para ilustrar esto, se puede retomar la semejanza entre la totalidad del orden implicado y el cielo al suponer la siguiente situación:

Al no tener una forma bien definida dado que cambian constantemente de forma, a cualquier nube se le puede considerar equivalente a cualquier otra. Así, cuando se observa el movimiento de una nube, al ser un proceso de traslación éste se distingue porque en algún momento la nube está ubicada en cierto lugar y en otro instante se encontrará en un lugar diferente. El proceso equivalente cuando la nube se encuentra esparcida en el cielo se puede observar cuando en algún instante y lugar la nube se dispersa, y en un momento posterior se concentra nuevamente en forma de nube pero en un lugar diferente. En ambas situaciones se llevaron a cabo procesos que se pueden considerar equivalentes porque cumplieron el mismo propósito, el cual se manifiesta en el orden explicado cuando la nube se encuentra en lugares diferentes en instantes diferentes, esto se puede expresar de forma más general de la siguiente manera.

Si E es un operador que representa algún proceso que se manifiesta y puede ser descrito en el orden explicado; como alguno de los casos particulares de una traslación o rotación. Y E' es el correspondiente al proceso que tiene lugar en el orden implicado y que se considera equivalente al proceso que representa E . Bohm establece una correspondencia simbólica entre E y E' , apoyándose de los procesos de doblamiento y desdoblamiento M y M^{-1} respectivamente, con la siguiente relación:

$$E' = MEM^{-1}. \quad (2.1)$$

Dado que E' , E , M , y M^{-1} son operadores, ellos operan por la izquierda a algún conjunto u objeto, entonces, la relación (2.1) se puede interpretar en el sentido que los propósitos del proceso que represente E' son equivalentes a los que impliquen MEM^{-1} . El primero opera directamente en el orden implicado mientras que el segundo lo hace indirectamente en el orden explicado de la siguiente forma: el término M^{-1} indica que primero desdobra al objeto dentro del orden explicado, en donde tiene sentido operar posteriormente a E , quien describe el proceso equivalente representado por E' , y por último, después de efectuarse el proceso E , el término M indica que se realiza el proceso de doblamiento sobre el objeto para plegarlo nuevamente al orden implicado.

2.3. HOLOMOVIMIENTO

Si se observa un holograma, se encuentra que este objeto es finito y estático, dado que ocupa un lugar en el espacio y la información almacenada en él no varía con el tiempo. Sin embargo, como se vio en la sección 2.1, estas características no se le atribuyen al orden implicado, dado que esta entidad es dinámica y está presente en cada parte del espacio.

La propiedad dinámica del orden implicado se refleja en los procesos de doblamiento y desdoblamiento que involucran tanto al orden implicado como al orden explicado. Sin embargo, a parte de ellos es de esperarse que existan procesos que únicamente tengan lugar ya sea en el orden implicado o en el orden explicado. A manera de ejemplo, si se compara el papel de una nube suspendida en el cielo con el orden explicado, se pueden considerar los procesos con los que la nube se traslada y cambia de forma continuamente en el cielo. Si por el contrario, ilustrando al orden implicado la nube se encuentra en forma de humedad esparcida sobre todo el cielo, en éste pueden ocurrir procesos que aparenten que una nube aparezca en un lugar o en otro, y con una cierta forma u otra. En ambos casos, se ejemplifica que existen procesos internos e independientes en el orden explicado e implicado. Por otro lado, dado que el orden implicado está presente en cada parte del espacio, se infiere que todos los procesos que en ella se lleven a cabo, tienen lugar en todo el espacio.

En general, Bohm se refiere a los procesos que modifican la estructura de la totalidad del orden implicado como *movimientos*. En los cuales se basa un aspecto muy importante del paradigma holográfico, para el cual Bohm ocupó el término “*holomovimiento*”, que representa a todo movimiento que tiene lugar en la totalidad del orden implicado [8, 16], manifestando que su estructura es siempre cambiante. Así, la descripción de la naturaleza que propone el paradigma holográfico es el holomovimiento, lo cual significa que todos los objetos o cosas en la naturaleza son productos de los movimientos de la totalidad del orden implicado: plegándose, desplegándose y cambiando dentro de él, es decir, la naturaleza es el reflejo de la estructura dinámica de la totalidad del orden implicado, en donde los movimientos más importantes del holomovimiento son los procesos de doblamiento y desdoblamiento, a través de los cuales se pliega o manifiesta todo lo que se puede llegar a percibir de la naturaleza.

Así, a los aspectos o características de la totalidad del orden implicado que están siempre en movimiento en el holomovimiento, manifestándose en el orden explicado, son a los cuales se les trata de describir. A manera de ejemplo se puede considerar a una partícula, la cual es un objeto que se abstrae de la naturaleza. Y para exponer cómo el paradigma holográfico describe su comportamiento, se puede retomar el arreglo cilíndrico de la figura 2.4, planteando hipotéticamente la siguiente situación:

Se introduce una gota en el arreglo y se gira el rodillo hasta que la gota desaparezca. Luego se introduce otra gota de tinta en un lugar ligeramente diferente a la primera, para después girar el rodillo hasta que también se difunda. Se repite este proceso con varias gotas. Luego, imaginando que se pueda girar el rodillo del cilindro en sentido contrario con una velocidad tal que a simple vista las gotas aparezcan de manera consecutiva una tras otra rápidamente, se podrá observar algo muy parecido al movimiento de un objeto como se muestra en la figura 2.5.

Como se puede observar en este ejemplo, el movimiento aparente de un objeto en realidad se debe al funcionamiento completo del dispositivo; a través del cual toda la tinta esparcida va retomando la forma de cada gota. Sin embargo, si hubiera algún obstáculo en los lugares donde emergen las gotas de tinta, es de esperarse que el comportamiento parecido al movimiento de un objeto fuera totalmente diferente. Esto resemblance el comportamiento que se describe de una partícula en la mecánica cuántica, el cual corresponderá a las propiedades corpusculares u ondulatorias dependiendo de

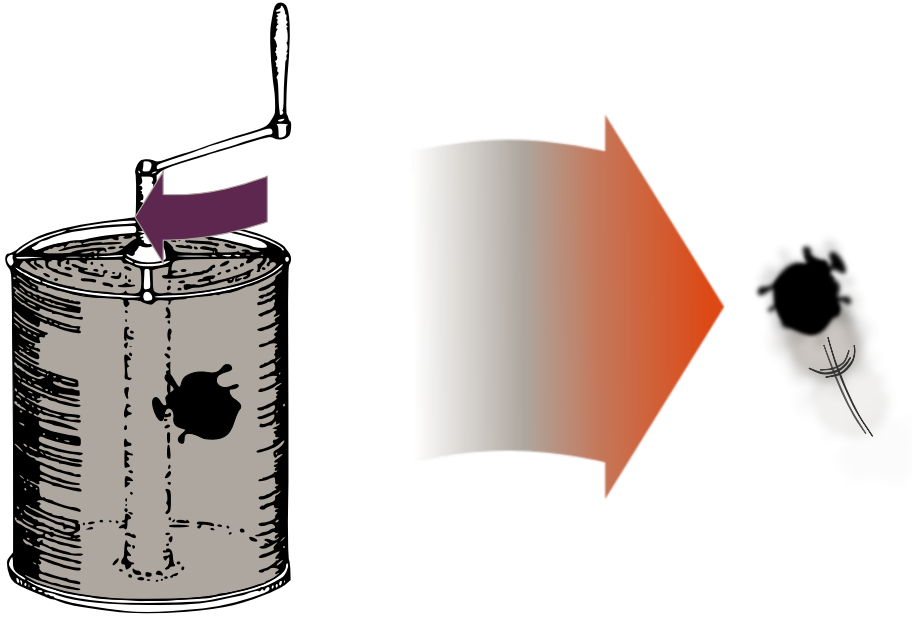


Figura 2.5: Representación del movimiento de una partícula con ayuda del contenedor cilíndrico lleno de algún líquido viscoso.

los sistemas con los que interactúe esta entidad.

En base a lo anterior, en la perspectiva del paradigma holográfico el movimiento de una partícula es el resultado de todo un proceso que tiene lugar en el orden implicado, mediante el cual la estructura de éste se modifica manifestando las características que la partícula pueda presentar. Con esto, en la mecánica cuántica Bohm sugiere que las propiedades que puede manifestar un objeto se encuentran plegadas en el orden implicado, y se les puede observar o describir en el orden explicado a través del comportamiento que manifieste dicho objeto [15]. En la siguiente sección se hará un breve estudio de la interpretación propuesta por Bohm de la mecánica cuántica, apoyándose en los conceptos del paradigma holográfico.

2.4. VARIABLES OCULTAS

En 1952 David J. Bohm proporciona una interpretación de la mecánica cuántica [18, 19], la cual sugiere que además de considerar a una partícula inmersa en un campo cuántico representado por su función de onda, sus variables posición y momento

tienen simultáneamente valores definidos, quienes al no poder predecirlos con certeza ni medirlos deben considerarse como ocultos. En esta interpretación surge un cierto comportamiento de no-localidad; no importa que tan distantes estén las partes de un sistema cuántico, todas pueden llegar a influir en su comportamiento. Para exponer tal interpretación, los conceptos que se utilizan en esta sección se pueden encontrar en el apéndice B.

2.4.1. POTENCIAL CUÁNTICO

En la interpretación de la mecánica cuántica propuesta por Bohm, se empieza por considerar a Ψ como la función de onda de una partícula de masa m , posición \vec{x} e inmersa en un potencial clásico $V(\vec{x})$. Por tanto Ψ debe cumplir la ecuación de Schrödinger, esto es

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{x}) \Psi. \quad (2.2)$$

Si se expresa a la función de onda en forma polar

$$\Psi = R e^{iS/\hbar},$$

siendo $R = R(\vec{x}, t)$ y $S = S(\vec{x}, t)$ funciones reales. Se tiene que al sustituir en (2.2) y simplificar (ver apéndice C), se llega a las siguientes igualdades

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \left(\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\vec{x}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (R \nabla^2 S + 2 \nabla R \cdot \nabla S). \quad (2.4)$$

Debido a que el último término del lado derecho de la ecuación (2.3) desempeña un papel semejante al potencial clásico, se le puede considerar como una energía atribuida a un potencial, para el cual Bohm ocupó el nombre de “*potencial cuántico*” [18]. En la interpretación de Bohm se plantea que la mecánica cuántica puede ser entendida asumiendo que la partícula está inmersa no únicamente en un potencial clásico $V(\vec{x})$, sino también en un potencial cuántico denotado por Q [20] y dado como

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (2.5)$$

Además, si se considera al término $V(\vec{x}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$ que aparece en el lado derecho de la ecuación (2.3) como un solo potencial U , la expresión (2.3) se convierte en la ecuación de Hamilton-Jacobi;

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \left(\frac{(\nabla S)^2}{2m} + U \right),$$

apoyándose en esta ecuación se propone que el ímpetu \vec{p} de la partícula está dado por la siguiente ecuación:

$$\vec{p} = \nabla S. \quad (2.6)$$

Dado que R y S se determinan mutuamente, en lugar de resolver las ecuaciones (2.3) y (2.4) directamente, es conveniente resolver primero la ecuación de Schrödinger (2.2) para la función de onda Ψ , la cual se puede escribir como $\Psi = A + iB$. Y con la ayuda de las relaciones $R^2 = A^2 + B^2$ y $S = \hbar \tan^{-1}(B/A)$ se puede encontrar las expresiones para R y S .

Por otra parte, a la densidad de probabilidad definida por la ecuación

$$P = |\Psi|^2 = R^2, \quad (2.7)$$

Bohm sugiere considerarla como la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en cierta posición [20], esto difiere de la interpretación de Born [21], quien propuso que P proporciona la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en cierta posición como resultado de alguna medición. A partir de la interpretación propuesta por Bohm, se desprende la hipótesis que una partícula tenga una posición precisa, que junto con la relación (2.6), a su ímpetu también le corresponde tener un valor preciso. No obstante, en la práctica tales valores no son conocidos debido a que no se pueden predecir simultáneamente con certeza, ni medirlos debido a que las perturbaciones introducidas por los aparatos de medición son impredecibles e incontrolables [22]. Esto hace notar que el apoyo en un conjunto estadístico es una necesidad práctica y no un reflejo de alguna limitante inherente en la precisión con la cual se puedan concebir a las variables que definen el estado de un sistema [19].

Para la extensión del análisis anterior a un sistema con N -partículas, se escribe la correspondiente función de onda $\Psi = \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$ de la forma:

$$\Psi = R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) e^{iS(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)/\hbar},$$

y repitiendo un proceso semejante al mostrado para una partícula (ver apéndice C), para R y S se tienen:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{(\nabla_i S)^2}{m_i} + V - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{1}{2} \left(R \sum_{i=1}^N \frac{\nabla_i^2 S}{m_i} + 2 \sum_{i=1}^N \frac{\nabla R \cdot \nabla S}{m_i} \right), \quad (2.9)$$

nuevamente se considera al ímpetu de la i -ésima partícula y al potencial cuántico del sistema total como

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \nabla_i S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t), \\ Q &= - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}{R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De esta última expresión se señala que, al depender de la magnitud R el potencial cuántico Q estará determinado por la función de onda Ψ , la cual Bohm propuso considerar como la representación matemática de un *campo*- Ψ cuántico, real y objetivo [18], que de manera semejante en que un campo electromagnético obedece a las ecuaciones de Maxwell, este campo- Ψ obedece la ecuación de Schrödinger (2.2). Se puede decir entonces que el potencial cuántico Q es determinado por el campo- Ψ cuántico.

Al desempeñar un papel semejante al potencial clásico, el potencial cuántico contribuirá con las fuerzas que se ejercen sobre las partículas. Sin embargo, independientemente del potencial clásico, en todo momento las partículas actuarán bajo la fuerza que les ejerza su potencial cuántico (el cual puede ser o no, nulo), lo que significa que siempre estarán inmersas en su campo- Ψ , el cual no se origina por algún agente externo al sistema, sino por el sistema mismo dado que depende del estado cuántico de éste. Además, a partir de que la función de onda Ψ o lo que es equivalente, el campo- Ψ contiene la información con la cual se especifica y describe el estado cuántico actual del sistema total, esta información se hallará implícita en el potencial

cuántico debido a su dependencia en la función de onda, lo cual no llega a suceder con un potencial clásico. Se sigue entonces, que a través de la fuerza derivada del potencial cuántico se estará manifestando indirectamente la información del campo $-\Psi$ en el comportamiento de las partículas. Esto significa que este potencial establece una conexión entre el sistema total y cada una de las partículas, dando la posibilidad de describir en cierta manera a la totalidad indivisible de un sistema cuántico.

Para exponer la interpretación que Bohm ofrece a la contribución del potencial cuántico que subyace en el comportamiento de las partículas, es conveniente considerar el término de *información activa* [23], la cual se entiende como aquella información que aunque perteneciendo a una energía menor, es quien dirige a una energía mayor dándole forma a su comportamiento. Al emplear este concepto, al potencial cuántico se le puede entender entonces como información *potencialmente* activa, convirtiéndose realmente en información *activa* cuando y en donde este potencial entre en actividad con alguna partícula influyendo en su comportamiento.

Por otra parte, al aparecer la magnitud R de la función de onda Ψ (la cual a partir de ahora se podrá considerar también como la magnitud del campo $-\Psi$) como denominador de los términos en la expresión (2.10) para el potencial cuántico, indica que en las regiones en donde la magnitud R sea pequeña el potencial cuántico podría fluctuar bruscamente de tal forma que las partículas que entren en esas regiones podrían intercambiar grandes cantidades de energía y momento en un corto tiempo [18], independientemente del potencial clásico $V(\vec{x})$. Así mismo, si la ecuación (2.10) se reescribe de la siguiente manera

$$Q = - \left\{ \left(\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 + \cdots + \frac{\hbar^2}{2m_N} \nabla_N^2 \right) R(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N, t) \right\} / R(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N, t),$$

al encontrarse la magnitud del campo $-\Psi$ en el numerador y denominador, se advierte que el potencial cuántico no dependerá de que tan apreciable sea el valor de la magnitud R , sino más bien de su forma, señalando que el efecto del potencial cuántico Q sobre las partículas no necesariamente disminuirá en las regiones donde la magnitud R sea pequeña. Dada su dependencia en la función de onda, quien satisface ciertas condiciones de frontera, y por consiguiente de las posiciones de las partículas, el potencial cuántico será el medio a través del cual, tanto el entorno en el que se encuentren las partículas como ellas mismas, pueden llegar a afectar sus comporta-

mientos, no importando que tan distantes se encuentren de los posibles obstáculos de su medio, así como entre ellas mismas. A partir de esto, al estar cada parte de un sistema inmersa en su potencial cuántico, la influencia de éste último sobre ellas no necesariamente disminuirá al aumentar su separación espacial, siendo este comportamiento considerado como la propiedad que se le atribuye, nombrada *no-localidad* [20]. Así, a la totalidad indivisible de un sistema cuántico, se le puede concebir ahora en términos del potencial cuántico quien manifiesta la propiedad de no-localidad, dando la posibilidad de que no siempre se cumplirá la noción común de que un objeto, mientras más alejado espacialmente esté de algún otro al que pueda perturbar, menor es la interacción que ejerza sobre este último.

Por otra parte, la propiedad de no-localidad no será apreciable únicamente entre las partes del sistema, de las cuales su participación en la función de onda sea contribuir con términos; que dependan cada una de las variables que las definen; y que multipliquen el resto de la función de onda del sistema total. Estas partes mostrarán entonces un comportamiento independiente, el cual es un caso particular del comportamiento indivisible de un sistema cuántico.

A manera de ejemplo, considérese que la función de onda de un sistema de N partículas se pueda escribir como

$$\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = \Psi_1(\vec{x}_1, t) \cdots \Psi_N(\vec{x}_N, t),$$

donde cada Ψ_i es la función de onda de la i -ésima partícula. La correspondiente expresión del potencial cuántico (2.10) se reducirá entonces a

$$Q = - \left(\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\nabla_1^2 R_1}{R_1} + \cdots + \frac{\hbar^2}{2m_N} \frac{\nabla_N^2 R_N}{R_N} \right), \quad (2.11)$$

la cual es una suma de potenciales individuales

$$Q_i = - \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R_i}{R_i},$$

en los cuales cada término R_i es la magnitud de la función de onda Ψ_i . Así, la interacción entre el potencial cuántico y cada una de las partículas será $-\nabla_i Q = -\nabla_i Q_i$, lo cual advierte que la i -ésima partícula será afectada por el potencial cuántico Q de

tal forma que solo influirá en ella su correspondiente potencial cuántico individual Q_i , y con él únicamente la información contenida en su correspondiente función de onda Ψ_i . Esto significa que en el comportamiento de la i -ésima partícula no habrá alguna contribución por parte de alguna otra partícula a través del potencial cuántico del sistema total, indicando que la conexión entre la i -ésima partícula y el sistema total habrá cesado, lo cual refleja y concuerda con el hecho que se comporten y puedan describir como sistemas independientes.

2.4.2. PROCESO DE MEDICIÓN

La mecánica cuántica, en la cual, a pesar de que la función de onda es quien proporciona toda la posible información física acerca del sistema, no predice con certeza cuál será el resultado obtenido después de realizar alguna medición, en su lugar, ofrece una información estadística acerca de los posibles resultados. A continuación, antes de exponer la interpretación ofrecida por Bohm, primero se describirá la interpretación usual para el proceso de medición.

Considérese que se desea medir un observable, asociado a una partícula de posición \vec{x} y representado por el operador A . Suponiendo un espectro discreto, la función de onda de la partícula, quien será el sistema observado, se puede escribir como

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_n C_n \psi_n(\vec{x}), \quad (2.12)$$

donde las constantes C_n son los coeficientes de expansión sobre el conjunto completo formado por las eigenfunciones $\psi_n(\vec{x})$ del operador A . Dado que, al medir un observable se obtendrá como resultado únicamente uno de los eigenvalores de su operador, el módulo al cuadrado de cada coeficiente $|C_n|^2$ se interpreta como la probabilidad de que se obtenga como resultado de la medición el valor del eigenvalor a_n correspondiente a la eigenfunción $\psi_n(\vec{x})$ [24].

Antes de efectuarse la medición, la función de onda (2.12) del sistema observado se expresa como una superposición de los estados cuánticos $\psi_n(\vec{x})$ debido a que no existe la certeza de que el sistema se encuentre en algún estado en particular. A partir de la interpretación usual se asume entonces que no se puede determinar, describir

ni analizar detalladamente la manera en que se definirá el resultado que se obtiene al efectuarse la medición [24, 21]. No obstante, después de realizarse la medición y haber hallado el valor de a_m , se dice entonces que la función de onda $\Psi(\vec{x})$ ha colapsado en ψ_m , entendiéndose que a partir de entonces el sistema se encontrará en el estado cuántico m . Si enseguida se realizara la medición del mismo observable, se hallaría como resultado nuevamente el valor a_m , corroborando el actual estado cuántico m del sistema.

En contraste a la interpretación usual y sin recurrir al colapso de la función de onda, Bohm sugiere una interpretación diferente del proceso de medición. Para describirla, se empieza por representar al estado cuántico del sistema observado por la función de onda (2.12) y a los parámetros que definen al sistema de medición por y . Sea $\phi_0(y)$ la función de onda inicial del aparato de medición. Antes que ambos sistemas interactúen, la función de onda del sistema compuesto será

$$\Psi'_0 = \phi_0(y) \sum_n C_n \psi_n(\vec{x}), \Psi'_0 = \sum_n C_n \psi_n(\vec{x}) \phi_0(y),$$

la cual es el producto de las funciones de onda tanto del sistema observado como del sistema de medición. Obteniéndose para este sistema compuesto un potencial cuántico semejante a (2.11) (con $N = 2$), lo cual corresponde al comportamiento independiente entre los dos sistemas. Cuando ambos empiecen a interactuar su función de onda se podrá expresar como

$$\Psi'_f = \sum_n C_n \psi_n(\vec{x}) \phi_n(y), \quad (2.13)$$

donde cada $\phi_n(y)$ es la función de onda que representa al estado cuántico del sistema de medición que corresponde a un posible resultado. A esta etapa Bohm le nombra *proceso de fusión* [20], porque durante la interacción se puede considerar que ambos sistemas se habrán unido y se comportarán como una sola entidad; el actual sistema compuesto. Que a partir de su función de onda correspondiente (2.13) es de esperarse que las expresiones tanto de R , S y su potencial cuántico Q correspondan a las fluctuaciones bruscas que puedan presentarse entre los sistemas observado y de medición durante su interacción [19], especialmente las que tengan lugar en las regiones donde la magnitud R resulte pequeña. En la interpretación de la mecánica cuántica en términos de variables ocultas, se considera que tales interacciones y por tanto el resultado de la medición estarán determinadas de una manera muy susceptible a las

condiciones iniciales [19]; la función de onda Ψ'_0 , la posición inicial de la partícula \vec{x} y los valores iniciales de los parámetros del aparato de medición y_0 . Sin embargo, dado que no se pueden describir o manipular a detalle estas interacciones, ni tampoco predecir con certeza o medir (debido a su carácter oculto) los valores precisos de las variables que especifican el estado cuántico inicial del sistema compuesto, se debe persuadir de ocupar una descripción estadística acerca del resultado que se obtendrá del proceso de medición.

Posteriormente, una vez que se puedan despreciar las interacciones entre ambos sistemas, con tal que se pueda realizar una medición apropiada, las funciones de onda $\phi_n(y)$ deberán ser diferentes y no superponerse en su estado de configuración (representado por y) para que, además que cada una de ellas esté correlacionada únicamente con un estado $\psi_n(\vec{x})$ del sistema observado, se tenga la certeza que el sistema de medición se hallará en solo uno de sus estados cuánticos, $\phi_m(y)$ [20]. Cuando esto suceda se podrá decir que el correspondiente estado del sistema observado será $\psi_m(\vec{x})$. Se tendrá entonces que ambos sistemas ya no se comportarán más como una sola entidad, por lo que habrá tenido lugar a lo que Bohm nombra *proceso de fisión* [20]. Así, el sistema compuesto se hallará en el estado cuántico $\psi_m(\vec{x})\phi_m(y)$, y su potencial cuántico se podrá expresar como la suma de potenciales individuales, correspondientes a cada uno de los dos sistemas, quienes manifestarán entonces un comportamiento independiente.

En este punto, podría ser (aunque no necesariamente) que posteriormente el arreglo o proceso experimental provoque que los sistemas observado y de medición vuelvan a interactuar, con lo cual sería necesario que el estado cuántico del sistema compuesto se tuviera que expresar de manera semejante a la función de onda (2.13), volviéndose indefinidos los estados cuánticos de ambos sistemas. Sin embargo, antes que esto llegara a suceder, después que los estados de los sistemas observado y de medición estén correlacionados, este último deberá interactuar con algún dispositivo que se encargue de registrar el resultado de la medición al cambiar su estado a través de un proceso irreversible [25], para que después de efectuarse el registro, no pueda fluctuar a su configuración inicial o a alguna otra. Además de esto, el dispositivo de registro debe contener un número grande de partículas ($\sim 10^{23}$), para poder describirlo clásicamente y posteriormente permitir que a una escala macroscópica cualquier observador pueda

inferir el resultado de la medición sin alterarla [22].

Así, al interactuar con el sistema de medición, al dispositivo que realice el registro, cuyas partículas se describirán colectivamente por Z_j , le corresponderá una función de onda $\lambda_n(Z_j)$ correlacionada con cada estado n del sistema de medición. Y por tanto, antes de realizarse el registro la función de onda del sistema total formado por los sistemas observado, de medición y de registro, será

$$\Psi_0 = \sum_n C_n \psi_n(\vec{x}) \phi_n(y) \lambda_n(Z_j).$$

La ecuación anterior refleja la totalidad que debe considerarse en la descripción de un sistema cuántico, en el sentido que, a pesar de que el sistema observado en principio no será afectado por el dispositivo de registro, la contribución de éste último al sistema total será garantizar que, después que interactúe con el sistema de medición, el sistema observado únicamente se comporte según lo indique su estado cuántico $\psi_m(\vec{x})$. La justificación [20, 25] de esto es porque una vez realizado el registro, el sistema total se encontrará en el estado cuántico $\psi_m(\vec{x}) \phi_m(y) \lambda_m(Z_j)$, cuyo espacio de configuración estará especificado por las variables \vec{x} , y y Z_j . Y la única forma en que algún otro estado $\psi_r(\vec{x})$ pueda interferir y modificar el estado cuántico $\psi_m(\vec{x})$ actual del sistema observado después del registro, es que alguna otra función de onda $\psi_r(\vec{x}) \phi_r(y) \lambda_r(Z_j)$ se superponga con el correspondiente estado cuántico actual del *sistema total* en su espacio de configuración. Esto no pasará, debido a que el proceso mediante el cual se efectuó el registro de la medición, al ser un proceso irreversible significa que no habrá alguna interferencia o fluctuación entre el estado actual del dispositivo de registro con algún otro $\lambda_r(Z_j)$ [25]. Así, independientemente si los estados $\psi_r(\vec{x})$ o $\phi_r(y)$ llegaran a solaparse (en sus respectivos espacios de configuración) con los estados actuales de los sistemas observado y de medición respectivamente, el sistema observado se seguirá comportando según el estado cuántico m , quien corresponde al valor a_m obtenido como resultado del proceso de medición. Si enseguida se volviera a medir el mismo observable, es de esperarse que nuevamente se registre el valor de a_m . Esto se debe a que una vez realizada la primer medición, posteriormente el sistema observado seguirá hallándose en su estado cuántico m , el cual determinará la información de su correspondiente potencial cuántico individual y por tanto su comportamiento subsiguiente al primer proceso de medición.

Por tanto, en la descripción del proceso de medición propuesta por Bohm, los sistemas observado y de medición llevan a cabo un proceso de fusión, el cual precede a un proceso de fisión, de tal forma que la manera en que se define el resultado de una medición es mediante una transformación mutua entre ambos sistemas, la cual presenta un alto grado de complejidad en la manera de estar determinada, aunque aparentemente aleatoria, por los parámetros que no se pueden conocer con precisión y que definen el estado del sistema total. Por último, el papel que desempeña el dispositivo de registro da razón del porqué el sistema observado a partir de entonces se comportará según el estado correspondiente al resultado de la medición, esto sin la necesidad de recurrir a algún colapso de la función de onda [20] causado por el acto de medir.

2.4.3. LA FUNCIÓN DE ONDA EN EL ORDEN IMPLICADO Y EXPLICADO

En la mecánica cuántica las propiedades de la materia son consideradas como potencialidades, las cuales se definen y manifiestan únicamente en la interacción con otros sistemas. Por ejemplo, al encontrar cierto valor de un observable como resultado de alguna medición, no significa que tal propiedad existía antes de efectuarse dicho proceso, sino más bien que era una de las posibles potencialidades, la cual durante el proceso de medición se definió tanto por el sistema de medición como por el mismo sistema observado.

Para describir cada potencialidad que un objeto puede llegar a revelar, en la mecánica cuántica se emplea la función de onda, Ψ . Así, si un objeto, quien normalmente se considera un sistema, tiene la misma función que algún otro, no significa que ambos se comportarán de la misma manera si llegaran a interactuar con los mismos sistemas, sino que tendrán el mismo rango de potencialidades a manifestar, a las cuales la función de onda les asigna cierta probabilidad de realizarse. Se dice entonces que ambos sistemas estarán en el mismo estado cuántico representado por la misma función de onda.

A un estado cuántico Ψ , por su parte Bohm también le llama *estanque de información* [20] dado que el comportamiento de un sistema sugiere estar guiado y

determinado por su estado cuántico, antes que el sistema mismo manifieste la información contenida en su estado Ψ . Sin embargo con esto no se puede aludir algo acerca de donde se alberga la información que determinará el comportamiento de un sistema. Para esto Bohm ofrece una posible explicación de la siguiente manera.

Al no estar constituido únicamente de tres coordenadas el espacio de configuración de la función de onda, sino de las variables necesarias para determinar el estado cuántico del sistema, por ejemplo, la función de onda de dos partículas dependerá de seis variables, las cuales corresponden a las posiciones de cada una. Así, la información en la función de onda se encuentra determinada por los valores de cada uno de los parámetros en su espacio de configuración, que en general corresponden a las propiedades de cada parte del sistema, las cuales a su vez, desde el enfoque del paradigma holográfico se encuentran inmersas en el orden implicado, como se dijo en la sección anterior. A partir de esto y en base al paradigma holográfico, Bohm interpreta a la información de la función de onda albergada generalmente en un orden implícito [16], que se manifiesta en el comportamiento del sistema revelando sus propiedades; potencialidades. Si el sistema se tratara de una partícula (ver sección anterior), tales propiedades podrían ser ciertos valores ya sea de su posición o ímpetu, las cuales representan sus propiedades excluyentes; corpusculares u ondulatorias.

A partir de la perspectiva del paradigma holográfico, Bohm señala que la información de la función de onda se encuentra en el orden implicado, el cual no se manifiesta hasta que el sistema la revela en su comportamiento. Es decir, la información de la función de onda se alberga en un orden implicado, mientras que en la conducta del sistema esta información emerge en un orden explicado [20].

Retomando el proceso de medición, en la interpretación de Bohm los estados en los que se podrá encontrar el sistema observado, correspondientes a cada posible resultado antes de definirse el valor de la medición, se pueden considerar como *inactivos*, estando plegados en el orden implicado. Y, únicamente el estado en el que se encontrará el sistema después de efectuarse el registro será *activo*, en el sentido que éste definirá la información potencialmente activa que determinará su potencial cuántico correspondiente, mediante el cual aun encontrándose en un orden implicado, la información contenida en el estado activo será la que se manifieste en un orden explicado a través del comportamiento que presente el sistema observado. Además, antes de

realizarse el registro, los estados inactivos podrían volverse activos, sin embargo, dado el proceso irreversible que se realiza en el registro, la información en estos estados no podrá manifestarse en el comportamiento del sistema observado [20].

Por último, como se menciona al final de la sección anterior, la propuesta en el paradigma holográfico es entonces que las propiedades de la materia al ser parte de la naturaleza se encuentran plegadas en el orden implicado, y se manifiestan a través de su comportamiento desplegándose en un orden explicado. En el cual tiene sentido describirlas debido a que presentan cierta estructura capaz de abstraerse, por ejemplo apoyándose en la mecánica cuántica, la cual utiliza a la función de onda para describir estas propiedades de la materia, considerándolas como ciertas potencialidades que únicamente se definen y realizan cuando el sistema interactúa con un sistema apropiado.

2.4.4. EXPERIMENTO HIPOTÉTICO EPR

En el experimento propuesto por A. Einstein-Podolsky-Rosen [7] se discute la forma en que la mecánica cuántica describe a un sistema a través de la función de onda, quien caracteriza completamente al estado cuántico del sistema [22].

Para llegar a la controversia presentada en [7], A. Einstein y sus colaboradores parten de la definición que un *elemento de realidad física* es aquel al que siempre le corresponde una cantidad física, de la cual se pueda predecir su valor con certeza sin perturbar al sistema al que pertenezca; esto significa que tal elemento existe objetivamente independientemente que se tenga o no conocimiento de él. A partir de esta primer definición se desprende un segundo concepto, la *condición de completitud* que debe cumplir una teoría para ser llamada completa, la cual exige que a cada elemento de realidad física se le asigne un elemento correspondiente en la teoría física.

A. Einstein y sus colaboradores parten de la suposición que la mecánica cuántica es una teoría completa, y proponen un experimento hipotético el cual se describe a continuación.

Se supone un sistema formado por dos sistemas I y II, los cuales interactúan en el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = T$, después del cual ellos dejan de tener alguna interacción. Se considera también que el estado del sistema total puede ser conocido y representado por la función de onda Ψ_0 para un tiempo antes de $t = 0$. Sea A un operador correspondiente a una cantidad física perteneciente al sistema I, con eigenfunciones y eigenvalores $u_1(x_1), u_2(x_1), \dots$ y a_1, a_2, \dots respectivamente, donde x_1 representa a las variables usadas para describir al sistema I. Entonces se puede expandir la función de onda Ψ_0 sobre el conjunto completo $\{u_n(x_1)\}$:

$$\Psi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1),$$

donde x_2 representa a las variables que definen al sistema II y $\psi_n(x_2)$ son los coeficientes de expansión sobre el conjunto $\{u_n(x_1)\}$.

Dado que no se puede calcular ni predecir en qué estado se encontrarán los sistemas I y II para $t > T$, se puede llevar a cabo una medición de la cantidad A , y suponer que se registre un valor a_k , después del proceso de medición el sistema I tendrá entonces que estar en el estado $u_k(x_1)$ y por tanto el segundo sistema estará en el estado $\psi_k(x_2)$. La función de onda Ψ_0 , a partir de ese momento será

$$\Psi_f = \psi_k(x_2) u_k(x_1). \quad (2.14)$$

Si en lugar de A se hubiese escogido otra cantidad física, por ejemplo B con eigenfunciones $v_1(x_1), v_2(x_1), \dots$ y eigenvalores b_1, b_2, \dots correspondientes. La función Ψ_0 expandida sobre el conjunto completo $\{v_s(x_1)\}$ sería

$$\Psi_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_s(x_2) v_s(x_1).$$

Y si además, en vez de A se midiera la cantidad B en el sistema I, después de realizarse la medición suponiendo que el valor encontrado para B sea b_r , el sistema I quedaría en el estado $v_r(x_1)$ y el sistema II en el estado $\phi_r(x_2)$.

Lo anterior significa que al sistema II se le puede asignar dos funciones de onda, ψ_k y ϕ_r . Independientemente de que se hagan las mediciones de A o B , pues se supuso que para $t > T$ las posibles interacciones entre ambos sistemas son despreciables tal que se

pueden considerar nulas. De aquí, que si ψ_k y ϕ_r fueran las eigenfunciones de dos operadores P y Q , los valores de sus eigenvalores p y q serían las predicciones exactas de sus mediciones sin perturbar al sistema de alguna forma. Por tanto, estas cantidades físicas serían las correspondientes de dos elementos de realidad física para el sistema II.

A manera de ejemplo, supóngase que la función de onda Ψ_0 corresponde a un sistema conformado por dos partículas. Suponiendo un espectro continuo, esta función de onda se puede escribir como

$$\Psi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i/\hbar)(x_1-x_2+x_0)p} dp, \quad (2.15)$$

donde x_0 es una constante.

Sea A el momento de la primer partícula, con eigenfunciones $u_p(x_1) = e^{(i/\hbar)x_1p}$ y eigenvalores p . Entonces la función de onda (2.15) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(i/\hbar)(x_2-x_0)p} e^{(i/\hbar)x_1p} dp, \\ \Psi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \end{aligned}$$

siendo $\psi_p(x_2) = e^{-(i/\hbar)(x_2-x_0)p}$.

Por otra parte, sea B la posición de la partícula, se tiene que sus correspondientes eigenfunciones y eigenvalores son $v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$ y x respectivamente, para este

caso la función de onda (2.15) toma la forma

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i/\hbar)(x-x_2+x_0)p} \Big|_{x=x_1} dp, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i/\hbar)(x-x_2+x_0)p} \delta(x_1 - x) dx \right] dp, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i/\hbar)(x-x_2+x_0)p} dp \right] \delta(x_1 - x) dx, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h \delta(x - x_2 + x_0) \delta(x_1 - x) dx.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

De esta última ecuación se tiene

$$\Psi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(x_2) v_x(x_1) dx,$$

siendo $\phi_x(x_2) = h\delta(x - x_2 + x_0)$.

Con este ejemplo se puede observar que $\psi_p(x_2)$ es una eigenfunción del operador ímpetu P con eigenvalor $-p$. Mientras que $\phi_x(x_2)$ es eigenfunción del operador de posición Q con eigenvalor $x + x_0$. Ambos operadores son no-conmutativos, dado que $[Q, P] = i\hbar$, correspondientes a la segunda partícula.

Por tanto, A. Einstein y colaboradores concluyen, suponiendo que la mecánica cuántica es una teoría completa, la siguiente contradicción:

- Por una parte la mecánica cuántica implica que para dos operadores no conmutativos correspondientes a dos cantidades físicas, el preciso conocimiento de una excluye el conocimiento de la otra, más aún, cualquier intento de medición de esta última variable alterará el estado del sistema de tal forma que destruya el conocimiento de la primera, es decir, sola una cantidad física corresponderá a un elemento de realidad física pero no ambos. Para cuando estos operadores sean del ímpetu y la posición, que sería el caso para la partícula 2 del ejemplo, la

mecánica cuántica dice que cuando el momento de la partícula es conocido, su coordenada no tiene realidad física, y viceversa.

- Por otro lado, se concluye a partir del experimento hipotético planteado que cuando los operadores ψ y ϕ son eigenfunciones de operadores no-conmutativos, como en el caso de la segunda partícula en el ejemplo, ambas cantidades físicas son correspondientes cada una a un elemento de realidad física.

Estos dos argumentos se contradicen, por tanto, A. Einstein y colaboradores llegan a la conclusión de que la teoría de la mecánica cuántica es incompleta [7]. Esto no significa que la mecánica cuántica sea una teoría errónea, más bien, esta conclusión señala que a la mecánica cuántica se le pueda entender enteramente como una teoría estadística en la cual sus predicciones corresponden a los resultados experimentales [26].

La interrogante que se desprende del experimento hipotético planteado por A. Einstein y sus colaboradores es la siguiente: ¿Cómo es posible que la interacción de la medición sobre un sistema pueda afectar al otro sistema?. Si se suponen, al menos lo suficientemente distantes para que ninguno de los dos se perturbe y que las interacciones en las que intervenga alguno de ellos no influya al otro sistema. En otras palabras, ¿Cómo es posible que el sistema al que no se le perturbe pueda saber simultáneamente el resultado de la medición que se le realiza al otro sistema?. Lo inmediato es pensar que se transmitió alguna perturbación desde el sistema medido hacia el otro. Sin embargo, éste no es el caso desde la perspectiva de la mecánica cuántica, la cual predice que tal transmisión es inmediata, dado que los estados de ambos sistemas se encuentran *correlacionados*, lo que significa que por cada posible resultado de alguna medición sobre alguno de los sistemas, a ambos les corresponden solo ciertos estados. Así, mientras se efectúa la medición al primer sistema, según la interpretación usual, la función de onda de ambos sistemas está siendo colapsada, por lo que después de efectuarse la medición, el segundo sistema se encontrará en el estado correlacionado al estado del primer sistema correspondiente al resultado de la medición.

A. Einstein y colaboradores creían que a pesar que las predicciones de la mecánica cuántica fueran correctas, su interpretación usual no daba una descripción completa

acerca de cómo se propagaban las correlaciones existentes entre los estados de dos sistemas cuando se colapsaba su función de onda.

2.4.5. INTERPRETACIÓN DE BOHM AL EXPERIMENTO EPR

Para dar un tratamiento al experimento EPR, Niels Bohr señala que se debe entender al sistema total formado por los dos sistemas que previamente formaban uno solo, junto con el arreglo experimental, comportándose como una entidad indivisible [8]. Que, al igual que se asume que no se puede describir a detalle la manera en que se define el resultado de una medición, también debe de persuadirse que no se puede analizar detalladamente a esta entidad indivisible, de la cual se manifiesta la correlación que se cuestiona en el experimento EPR. Por su parte, además de reiterar la indivisibilidad de un sistema en el dominio cuántico, David J. Bohm analiza este experimento de la siguiente manera [20].

En el experimento EPR, el requisito de que los sistemas I y II estén separados espacialmente por causa de algún agente externo, es un reflejo de que se pretenda que ambos sistemas no puedan interactuar entre ellos ni perturbarse. Para representar esta situación, supóngase que se tiene un sistema inestable, el cual a través de la desintegración espontánea pueda separarse en dos partes sin la intervención de algún agente externo. Considerando que el sistema inestable sea una molécula cuya función de onda se puede expresar como

$$\Psi_i(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_n C_n \psi_n(\vec{x}) \chi_n(\vec{z}), \quad (2.17)$$

donde \vec{x} y \vec{z} representan a las variables que definen a cada parte en las que se separará el sistema, las cuales se considerarán que son dos partículas. Así, \vec{x} y \vec{z} serán las posiciones de la primera partícula I y segunda partícula II respectivamente. Después de la desintegración, la función de onda del sistema se podrá escribir

$$\Psi_f(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_n C_n \psi_n(\vec{x} - \vec{a}_n) \chi_n(\vec{z} - \vec{b}_n), \quad (2.18)$$

donde \vec{a}_n y \vec{b}_n representan las distancias que las dos partículas se han separado.

Si la función de onda del sistema se pudiera escribir como un producto de dos factores cada uno dependiendo de \vec{x} o \vec{z} , entonces se podría afirmar que las dos partículas serían estadísticamente independientes, es decir, que se comportarían como sistemas independientes. Sin embargo, para las funciones de onda Ψ_i y Ψ_f no es el caso, por lo que ambas seguirán describiendo la totalidad indivisible que presenta el sistema antes y después que tenga lugar su desintegración espontánea. Por tanto su potencial cuántico en ambos periodos no podrá expresarse como la suma de potenciales individuales, indicando que aún después de la desintegración, las partes del sistema estarán inmersas en un mismo potencial cuántico.

Dado que después de la desintegración todavía no se ha considerado que algún agente externo perturbe alguna de las partes del sistema, la función de onda (2.18) seguirá indicando estados correlacionados entre las partes del sistema aun cuando se hallan separado distancias macroscópicas. Cumpliéndose el requisito del experimento EPR, de que las partes del sistema puedan estar separados lo suficiente lejos para que ninguna fluctuación en alguno de los dos perturbe al otro.

Lo siguiente es suponer que se lleve a cabo un proceso de medición sobre alguna de las partes del sistema. Para ello se puede considerar que el sistema de medición es representado por una partícula con posición \vec{y} e inicialmente en el estado $\phi_0(\vec{y})$, la cual se hace incidir sobre la partícula I. Así, momentos antes de que la partícula incidente interactúe con ella, la actual función de onda que describe al sistema total constituido por el sistema formado por las dos partículas I y II junto con la partícula incidente, será

$$\begin{aligned}\Psi_I &= \phi_0(\vec{y}) \sum_n C_n \psi_n(\vec{x} - \vec{a}_n) \chi_n(\vec{z} - \vec{b}_n), \\ \Psi_I &= \sum_n C_n \{ \phi_0(\vec{y}) \psi_n(\vec{x} - \vec{a}_n) \} \chi_n(\vec{z} - \vec{b}_n).\end{aligned}\tag{2.19}$$

La interacción entre la partícula incidente y I provocará un proceso de fusión. Además, dado que solo se involucrarán ambas partículas en este proceso, éste se manifestará solamente en los términos $\phi_0(\vec{y}) \psi_n(\vec{x} - \vec{a}_n)$ de la función de onda (2.19), en donde el reflejo de la interacción será escribir cada uno de esos factores como una

combinación lineal $\sum_i \alpha_{in} \phi_i(\vec{y}) \lambda_i(\vec{x})$, donde λ_i forma un conjunto completo, que libremente se puede escoger como el correspondiente a las eigenfunciones de la cantidad física que se esté midiendo en la partícula I. La función de onda del sistema total durante el proceso de fusión será

$$\begin{aligned}\Psi_F &= \sum_n C_n \left\{ \sum_i \alpha_{in} \phi_i(\vec{y}) \lambda_i(\vec{x}) \right\} \chi_n(\vec{z} - \vec{b}_n), \\ \Psi_F &= \sum_i \phi_i(\vec{y}) \lambda_i(\vec{x}) \left\{ \sum_n C_n \alpha_{in} \chi_n(\vec{z} - \vec{b}_n) \right\}.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Posteriormente al proceso de fusión es de esperarse que tenga lugar el proceso de fisión, y que la partícula I se encuentre en un estado, denotado por s , correspondiente al resultado de su medición. La actual función de onda del sistema total será entonces

$$\Psi_E = \phi_s(\vec{y}) \lambda_s(\vec{x}) \sum_n C_n \alpha_{sn} \chi_n(\vec{z} - \vec{b}_n).\quad (2.21)$$

Claramente la función de onda (2.21) es el producto de factores cada uno correspondiente a las variables de cada partícula, por tanto la mecánica cuántica predice que a partir de ese momento las partículas I y II se comportarán de manera independiente.

Así, en la interpretación de Bohm, se debe tener en cuenta que la función de onda (2.19) depende de dos factores, correspondientes al estado cuántico de la partícula incidente y al estado cuántico común de las partículas I y II, señalando que el potencial cuántico total influirá sobre las partículas I y II como si se tratara únicamente de su potencial correspondiente a su función de onda individual (2.18). Posteriormente, al interactuar la partícula incidente con la partícula I, la función de onda (2.19) se alterará modificándose en (2.20), lo cual es un reflejo que el estado cuántico del sistema total y por ende su potencial cuántico, se perturben de acuerdo a las fluctuaciones incontrolables introducidas en el proceso de medición (ver subsección 2.4.2). Además, dado que las partículas I y II se encuentran todo el tiempo inmersas en su potencial cuántico individual, cuando la partícula incidente y I interactúen, la primera contribuirá al potencial cuántico total quien a partir de entonces al no poder expresarse como la suma de términos independientes no influirá más sobre las partículas I y II como si se tratara únicamente de su correspondiente potencial cuántico individual. Por tanto, las perturbaciones que causa la partícula incidente al estado cuántico to-

tal, repercuten instantáneamente sobre las partículas I y II a través de las fuerzas ejercidas por el potencial cuántico total, el cual hasta ese momento aún presentara su propiedad de no-localidad, la cual dejará de manifestarse en las partes del sistema total una vez que su estado cuántico quede especificada por la función de onda (2.21).

Además de mantener la indivisibilidad de los procesos en el dominio cuántico sugerida por Bohr [8]. En su interpretación del experimento EPR, Bohm señala que las correlaciones entre los estados cuánticos de las partículas I y II se manifestarán debido a que las perturbaciones introducidas por el proceso de medición efectuado en alguna de ellas, no se propagaran a la otra partícula, sino que afectarán directamente a ambas a través de su potencial cuántico, el cual al no poder expresarse como la suma de potenciales individuales exhibirá su propiedad de no-localidad, y a causa de que no se pueden controlar las perturbaciones introducidas en el proceso de medición, el potencial cuántico terminará fragmentándose en potenciales individuales después de la medición, con lo cual su propiedad de no-localidad ya no se manifestará más en el comportamiento de las partículas.

Capítulo 3

FRACTALES

El término fractal, el cual significa *ruptura* fue ocupado por Mandelbrot [10] para describir ciertos objetos, cuyas formas son tan irregulares que no es adecuado describirlas simplemente con la geometría euclidiana. Sin embargo, a pesar de sus formas tan peculiares, todos estos objetos presentan en mayor o menor grado una misma propiedad, llamada *auto-similitud*, la cual de cierta manera indica que tanto se parece un objeto a sí mismo. Si se encuentra que cada parte reproduce exactamente la geometría del objeto entero, entonces se tiene una auto-similitud *completa*, mientras que entre menos se parezca cada parte al todo la auto-similitud será más débil.

En este capítulo se presentan las características principales de un fractal, seguido de un estudio a los fractales llamados auto-semejantes, quienes presentan la propiedad de auto-similitud completa, la cual se describe mediante un sistema de funciones de iteración. Examinando por último el ejemplo de la curva de Koch para presentar los elementos más relevantes de este capítulo. Los conceptos básicos que se ocupan en el transcurso de este capítulo están descritos en el apéndice D.

3.1. CARACTERÍSTICAS

Los fractales son figuras inusuales, entre sus rarezas está el hecho que los métodos de la geometría clásica no son del todo adecuados para estudiarlos, por tanto se requieren otras técnicas para tal fin. Por ejemplo, se está familiarizado con la idea que las curvas, superficies suaves o volúmenes son objetos ya sea unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales. Donde este tipo de dimensión conocida como *di-*

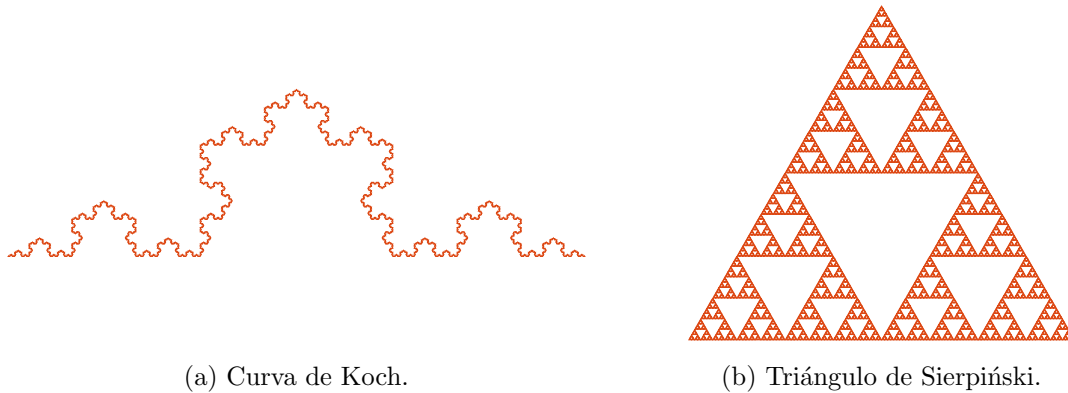
mención topológica, asigna a un conjunto siempre un número entero como dimensión. Sin embargo, para el caso de los fractales este tipo de dimensión no es conveniente, en su lugar a estas figuras irregulares se les asigna un número fraccionario como dimensión, la cual se conoce como *dimensión de Hausdorff* o *dimensión fractal*. De aquí, que Mandelbrot haya definido a un fractal como aquel conjunto al cual la dimensión de Hausdorff le asigna un número estrictamente mayor que su dimensión topológica.

Definir un fractal puede llegar a ser una tarea difícil, por tanto es mejor enlistar ciertas propiedades [10], tal que los objetos que las presenten podrán ser considerados como fractales. Así, si F denota a un objeto fractal, se tiene:

- (a) F tiene una estructura fina, es decir, a cualquier escala la cual puede ser tan pequeña como se desee, F presentará detalles completos.
- (b) F es tan irregular para describirlo a él y sus partes con términos del lenguaje en la geometría tradicional, tanto localmente como globalmente.
- (c) A menudo F tiene un grado de auto-similitud: completa, aproximada o estadística.
- (d) Usualmente la dimensión fractal de F es mayor que su dimensión topológica.
- (e) En la mayoría de los casos, F es definido de forma simple, quizá recursivamente.

Como se mencionó al principio, dado que los objetos fractales presentan cierto grado de auto-similitud, si se tiene el caso de auto-similitud completa estos son nombrados *fractales auto-semejantes* o *fractales auto-adjuntos* [10], se puede observar en la figura 3.1 dos ejemplos conocidos: en (a) la curva de Koch y en (b) el triángulo de Sierpiński, figuras que son invariantes a cambios de escalas, es decir, no importa que tanto varíe su escala, en cada parte de ellos siempre se obtendrá exactamente la misma forma del todo.

En contraste a los fractales con auto-similitud completa, se tiene a los fractales que presentan el menor grado de auto-similitud conocidos como *fractales aleatorios* o *fractales estadísticos* [10], los cuales se distinguen dado que no se puede asegurar que al ampliar su escala alguna de sus partes muestre la forma del todo. Esto se debe a que la manera en que ellos presentan la auto-similitud no es exactamente en sus formas, sino más bien en su aleatoriedad, es decir, al igual que el todo cada parte



(a) Curva de Koch.

(b) Triángulo de Sierpiński.

Figura 3.1: Fractales con auto-similitud completa.

presenta la misma aleatoriedad en su geometría, figura 3.2.

Los fractales auto-similares completos y estadísticos son objetos que tienen una representación matemática bien definida, es decir, cada uno de ellos bien puede ser un subconjunto en \mathbb{R}^n . Sin embargo, existen objetos fractales que no se les puede dar una descripción matemática exacta, estos son los *fractales naturales* [10], su mismo nombre dice de donde provienen. Estos objetos fractales se encuentran en la naturaleza misma, y aunque a ellos no se les pueda implementar exactamente en la misma forma los instrumentos matemáticos correspondientes a los otros dos tipos de fractales, bien se pueden aproximar a través de fractales que se acerquen la auto-similitud completa. En la figura 3.3 se muestra un helecho como ejemplo de un fractal natural.

Por último, hay que señalar que aunque las clasificaciones por auto-similitud parezcan independientes, en ellas existe un denominador común, la dimensión. No es de extrañarse que Mandelbrot, para identificar a los fractales de las figuras regulares se haya basado en cierta dimensión, la cual se desprende de la medida s -dimensional de Hausdorff, por esta razón antes de definir la dimensión fractal, a continuación se empieza introduciendo el concepto de medida [10].

3.1.1. MEDIDA

Considerando a los subconjuntos de \mathbb{R}^n , básicamente una medida es una forma de atribuir un tamaño numérico a cada uno de estos conjuntos. Se llama a μ una medida

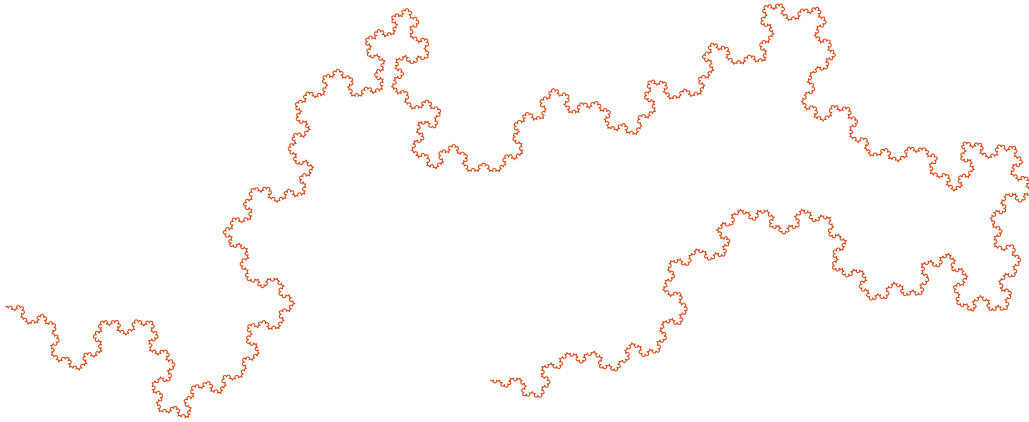


Figura 3.2: Fractal aleatorio.

en \mathbb{R}^n , si asigna un número no negativo, posiblemente ∞ , a cada subconjunto de \mathbb{R}^n tal que

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$,
- (c) si A_1, A_2, \dots es una secuencia de conjuntos contable (o finita), entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

La igualdad se cumple

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

si los A_i son disjuntos para todo $i = 1, \dots, \infty$. Es decir, la igualdad se cumple si $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

Se llama a $\mu(A)$ la medida del conjunto A , pensando a $\mu(A)$ como el tamaño de A medida de alguna forma.

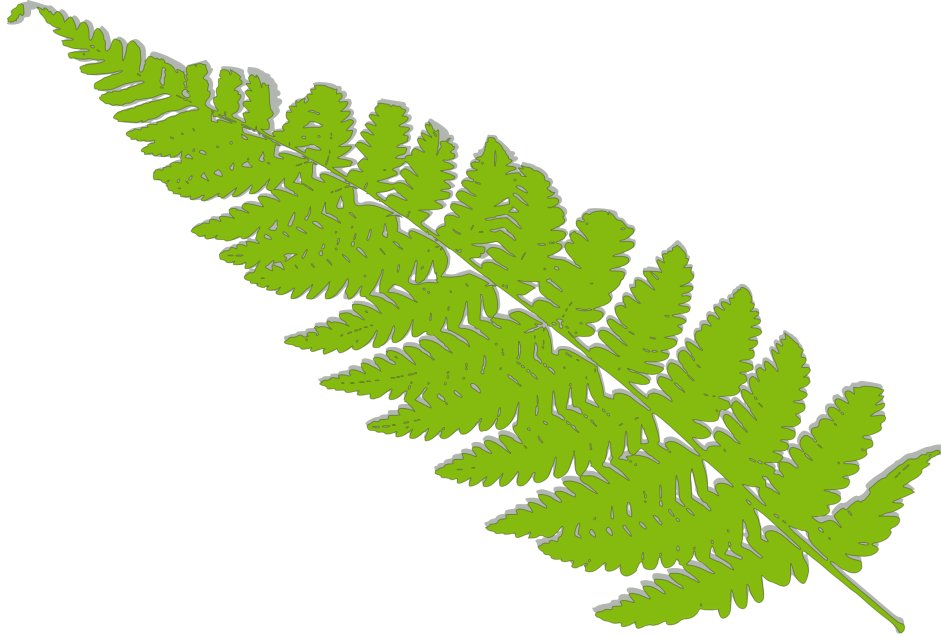


Figura 3.3: Fractal natural.

3.1.2. MEDIDA DE HAUSDORFF

Sea U un conjunto no vacío del espacio Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n , su *diámetro* se define como $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$, es decir, la distancia más grande entre un par de puntos en U . Así, si se tiene una colección arbitraria de conjuntos $\{U_i\}$, cuyos diámetros miden a lo más δ y contienen a un conjunto F , es decir, $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ con $0 \leq |U_i| \leq \delta$ para cada i , se dice entonces que $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de F .

Suponiendo que F es un subconjunto de \mathbb{R}^n y s un número real no negativo. Para algún $\delta > 0$ se define

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right), \quad (3.1)$$

donde se debe considerar a todas las cubiertas de F que cumplan $0 \leq |U_i| \leq \delta$ para luego minimizar la suma en (3.1). En la medida que δ decrece, además que la cantidad de cubiertas permisibles disminuye y su número de conjuntos necesarios para cubrir a F es más grande en cada una de estas cubiertas, la suma en (3.1) podría incrementar al aumentar los elementos a sumar. Esto sugiere que el ínfimo $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ pueda aproximarse

a cierto límite cuando $\delta \rightarrow 0$, es decir

$$\mathcal{H}^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F), \quad (3.2)$$

este límite se llama *medida de Hausdorff s -dimensional* de F [10], la cual existe y es una medida para cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n , aunque por lo regular sea 0 o ∞ .

3.1.3. DIMENSIÓN DE HAUSDORFF

A partir de (3.1), se puede considerar que para algún conjunto F y un $s > 0$, dado que $\delta \geq |U_i|$, conforme $\delta \rightarrow 0$ la sumatoria $\sum |U_i|^s$ cada vez se aproxime más a cero y se tenga $\mathcal{H}^s = 0$, a pesar de que tan grande sea el número de los conjuntos que conformen las cubiertas admisibles.

En base a lo anterior se puede suponer que para ciertos conjuntos F exista algún s tal, que al menos $\mathcal{H}^s \leq \infty$. Así, si $t > s$

$$\sum |U_i|^t = \sum |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum |U_i|^s,$$

tomando el ínfimo en ambos lados, $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Haciendo $\delta \rightarrow 0$ se tiene $\mathcal{H}^t = 0$, esto indica que $\mathcal{H}^s(F)$ no se incrementará para valores mayores a s .

Por otra parte, si se sigue suponiendo \mathcal{H}^s finito, con $\tau \leq s$, se tiene

$$\sum |U_i|^\tau = \sum |U_i|^{\tau-s} |U_i|^s = \sum \left(\frac{1}{|U_i|} \right)^{s-\tau} |U_i|^s \geq \left(\frac{1}{\delta} \right)^{s-\tau} \sum |U_i|^s,$$

nuevamente, tomando el ínfimo $\mathcal{H}_\delta^\tau(F) \geq \left(\frac{1}{\delta} \right)^{s-\tau} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Haciendo $\delta \rightarrow 0$ se obtiene $\mathcal{H}^\tau = \infty$.

En base a lo anterior se muestra que puede existir un valor crítico s tal que \mathcal{H}^s se comporte como una función escalón, brincando de ∞ a 0 en s . Este valor crítico es conocido como la *dimensión de Hausdorff* del conjunto F , la cual se escribe $dim_H F$ y está definida para todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ como

$$dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}. \quad (3.3)$$

Mientras que para la medida de Hausdorff se tiene

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & \text{si } s > \dim_H F, \end{cases}$$

si $s = \dim_H F$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ debe ser cero, infinito o satisfacer

$$0 < \mathcal{H}^s < \infty. \tag{3.4}$$

3.2. CONJUNTOS AUTO-SEMEJANTES

Como se mencionó en la sección anterior, la característica principal de los fractales auto-semejantes es que presentan la propiedad de auto-similitud completa. Apoyándose en las características de los fractales se puede notar que la auto-similitud presentada por estos fractales se da en forma recursiva; cada parte distinguible del objeto fractal presenta la misma figura que el todo completo. Una forma de obtener un fractal auto-semejante es mediante un *proceso de construcción* [10], el cual consiste en el siguiente procedimiento.

El primer paso es elegir un conjunto inicial E_0 , el cual tendrá un papel semejante al de una semilla. Se hacen copias reducidas de este conjunto y se colocan en cada parte del fractal que se desee construir (posteriormente, con la ayuda de ciertas transformaciones esta tarea se hará de una manera más adecuada), transformando el conjunto E_0 en uno nuevo, E_1 , el cual se nombra *conjunto generador*. Se realiza nuevamente el procedimiento anterior con este nuevo conjunto E_1 , haciendo copias de éste y colocándolas en sus posiciones correspondientes. Al repetir indefinidamente este proceso se puede obtener o al menos aproximar a un fractal auto-semejante.

Para ejemplificar el proceso de construcción, se puede considerar al triángulo de Sierpiński, cuya construcción se muestra en la figura 3.4. La semilla o conjunto-inicial es un triángulo equilátero, figura 3.4a. En (b) se realizan tres copias de este triángulo y se colocan en cada parte del triángulo de Sierpiński, obteniéndose el conjunto generador mostrado en (c). Al realizar este proceso recursivamente, el conjunto se aproximará al triángulo de Sierpiński mostrado en la figura 3.4d.

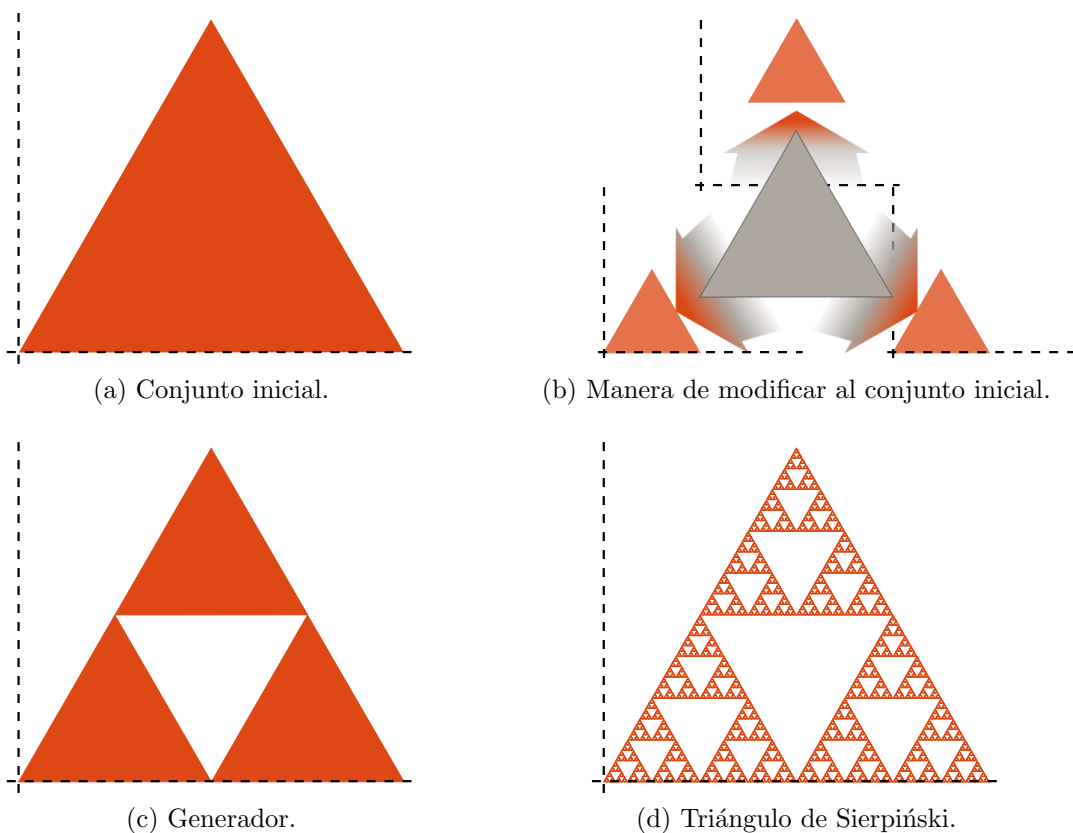


Figura 3.4: Proceso de construcción del triángulo de Sierpiński.

Una forma de caracterizar a estos conjuntos es mediante las transformaciones de similitud, las cuales además de representar la auto-similitud de un fractal auto-semejante, también tienen la ventaja que de una forma unificada y a menudo simple llevan a encontrar su dimensión fractal.

3.2.1. SISTEMA DE FUNCIONES DE ITERACIÓN

Sea D un conjunto cerrado de \mathbb{R}^n , a menudo se tendrá $D = \mathbb{R}^n$, un mapeo $S : D \rightarrow D$ es llamado una *contracción* en D si existe un número c con $0 < c < 1$, tal que $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ para todo $x, y \in D$. Claramente una contracción es continua. Si la igualdad se cumple, es decir, $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$, entonces S transforma conjuntos en conjuntos geoméricamente similares, y en este caso a la transformación S se le llama una *contracción de similitud*. Además se puede construir una familia de

contracciones denotado por

$$\{S_i\} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\} \text{ con } m \geq 2, \quad (3.5)$$

la cual es nombrada un *sistema de funciones de iteración* (SFI) [10]. Y al conjunto no vacío F , el cual cumpla la siguiente relación

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F), \quad (3.6)$$

es llamado *atractor* del IFS. Así, siempre que $F \subset D$ sea un conjunto no vacío, cumpla con (3.6) y sea compacto, es decir, que sea un conjunto cerrado con diámetro finito, F será un atractor para el IFS. La propiedad fundamental de este sistema de funciones de iteración es determinar un único atractor que usualmente es un fractal, cuya propiedad de auto-similitud es representada por el mismo SFI.

Por otra parte, es conveniente comparar de alguna manera dos conjuntos y poder decir que tan cerca se encuentran uno del otro, en particular cuando se desee dibujar un fractal dado su estructura fina, será preferible aproximarlo con algún conjunto que se le parezca. Para esto, si A y B son dos subconjuntos compactos en D , siendo el conjunto A_δ formado por los puntos que se encuentren a lo más una distancia δ de A , esto es; $A_\delta = \{x : |x - y| \leq \delta \text{ para algún } y \text{ en } A\}$, se define la distancia entre los conjuntos A y B como el menor δ , tal que la δ -vecindad del conjunto A contenga al conjunto B y viceversa:

$$d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ y } B \subset A_\delta\},$$

esta función distancia, conocida como la *métrica de Hausdorff* [10], satisface los tres requerimientos, $d(A, B) \geq 0$ cumpliéndose la igualdad únicamente si $A = B$, $d(A, B) = d(B, A)$ y $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ para cualesquiera conjuntos compactos A, B y C en D .

Si $E \subset D$, para el SFI (3.5) se define una transformación S dada como

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E),$$

además, si $S^0(E) = E$, se puede escribir S^k para la k -ésima iteración de S , esto es, $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ para $k \geq 1$.

Así, para dos conjuntos $A, B \subset D$, la distancia $d(S(A), S(B))$ estará acotada por la mayor de las distancias $\delta = \max d(S_i(A), S_i(B))$ ($1 \leq i \leq m$), dado que con este δ se tiene la certeza además que $(S_i(A))_\delta$ contenga a $S_i(B)$ y viceversa para toda i , esto también se cumpla para $(S(A))_\delta = (\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta$ y $S(B) = \bigcup_{i=1}^m S_i(B)$. Con esto y dado que $|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|$ para $x, y \in D$, si $c = \max_{1 \leq i \leq m} c_i$

$$d(S(A), S(B)) \leq \max d(S_i(A), S_i(B)) \leq cd(A, B).$$

Si B es el atractor F del SFI (3.5), renombrando a A por E , con ésta última desigualdad se tiene

$$\begin{aligned} d(S^k(E), F) &= d(S^k(E), S(F)) \leq cd(S^{k-1}(E), F), \\ &\vdots \\ d(S^k(E), F) &\leq c^k d(E, F) \text{ donde } c < 1. \end{aligned}$$

En base a esto, se puede decir que para cualquier conjunto no vacío E , la secuencia $S^k(E)$ convergerá al atractor F en el sentido que $d(S^k(E), F) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Con lo anterior se señala que los conjuntos $S^k(E)$ proveen una buena aproximación al atractor F . Si éste es un fractal entonces estas aproximaciones son conocidas como *pre-fractales* de F , quienes al no converger a un conjunto vacío, la intersección de todas ellas deberá igualar a F [10], esto es

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E).$$

3.2.2. DIMENSIÓN

Una de las ventajas de usar un sistema de funciones de iteración es que la dimensión de su atractor (3.6) es a menudo relativamente fácil de calcular o estimar en términos de las contracciones que la definen. Si se considera el caso en que las transformación

$S_1, S_2, \dots, S_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son contracciones de similitud, con

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n), \quad (3.7)$$

donde cada constante c_i es llamada la proporción o factor de escalamiento de S_i . El atractor F que determina el SFI formado por estas contracciones de similitud es llamado un *conjunto auto-similar*, el cual además de contener copias de sí mismo debido que cada contracción S_i transforma conjuntos en otros geoméricamente similares, su medida de Hausdorff cumple con $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Por otra parte, si se supone que $\{U_j\}$ es una δ -cubierta de F , es decir, $F \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$, y S' una contracción de similitud con factor de escala λ , esto es, $|S'(x) - S'(y)| = \lambda|x - y|$. Los conjuntos F y $\{U_j\}$, sufrirán ambos los mismos cambios cuando se les aplique la transformación S' , por lo que la contención de F en $\{U_j\}$ se preservará, es decir, $S'(F) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S'(U_j)$, lo que significa que $\{S'(U_j)\}$ será una $\lambda\delta$ -cubierta de $S'(F)$. Además, escribiendo $\sum |S(U_j)|^s = \lambda^s \sum |U_j|^s$, tomando el ínfimo y luego el límite $\delta \rightarrow 0$, se obtiene la relación

$$\mathcal{H}^s(S'(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F), \quad (3.8)$$

llamada *propiedad de escalamiento* de la medida de Hausdorff \mathcal{H}^s [10], la cual indica que si S' es una transformación de similitud, la dimensión del conjunto $S'(F)$ será proporcional a la dimensión de F .

Así, suponiendo que F sea el atractor del SFI y los conjuntos $S_i(F)$ puedan considerarse disjuntos. A partir de (3.6), se tiene

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^m S_i(F) \right) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(S_i(F)),$$

ocupando la propiedad de escalamiento (3.8), ésta última igualdad se puede reescribir como

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F) \sum_{i=1}^m c_i^s.$$

Dado que $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ para $s = \dim_H F$, se desprende que las c_i deben satisfacer

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1, \quad (3.9)$$

en donde s es la dimensión del conjunto auto-similar F , es decir, el fractal auto-semejante.

3.2.3. FRACTAL DE KOCH

El fractal auto-semejante conocido como curva o fractal de Koch, mostrado en la figura 3.5d, fue construido por el matemático sueco Helge von Koch en 1904 [11]. Este ejemplo muestra las características de los fractales auto-semejantes:

- (a) Tiene una estructura fina.
- (b) Es tan irregular que no se le puede tratar con la geometría tradicional.
- (c) Muestra auto-similitud completa.
- (d) Dado que es una curva, tiene dimensión topológica 1, siendo mayor su dimensión de Hausdorff, como se verá más adelante.
- (e) Se puede definir mediante un proceso de construcción, el cual es recursivo.

Para llevar a cabo el proceso de construcción del fractal de Koch que se muestra en la figura 3.5, se empieza con el conjunto inicial dado por la recta en el plano de longitud a , es decir, el conjunto $E_0 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0, a], x_2 = 0\}$, figura 3.5a. Enseguida hay que encontrar el correspondiente SFI, donde las contracciones de similitud se escribirán en su forma matricial por conveniencia.

Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, el SFI del fractal de Koch está formado por las siguientes contracciones de similitud

$$\begin{aligned} S_1(\vec{x}) &= \frac{1}{3}I\vec{x}, \\ S_2(\vec{x}) &= \frac{1}{3}A_{\pi/3}\vec{x} + \vec{u}, \\ S_3(\vec{x}) &= \frac{1}{3}A_{-\pi/3}\vec{x} + \vec{v}, \\ S_4(\vec{x}) &= \frac{1}{3}I\vec{x} + \vec{w}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{\pi/3} &= \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\text{sen}(\pi/3) \\ \text{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}, \\ A_{-\pi/3} = A_{\pi/3}^t &= \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \text{sen}(\pi/3) \\ -\text{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}, \\ \vec{u} &= \begin{pmatrix} a/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ \vec{w} &= \begin{pmatrix} 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si ahora se define una transformación S de la siguiente manera

$$S(E_0) = \bigcup_{i=1}^{m=4} S_i(E_0),$$

el sistema de funciones de iteración $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ estará entonces representado por ésta transformación, la cual define la auto-similitud del fractal de Koch. Así, el conjunto generador será $E_1 = S(E_0)$, figura 3.5b, a partir del cual se puede construir al fractal de Koch.

3.2.

CONJUNTOS AUTO-SEMEJANTES

Si se considera $S^0(E_0) = E_0$, $S^k(E_0)$ aproximará al atractor del SFI $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ conforme k aumente

$$\begin{aligned} S^k(E_0) &= S \circ (S^{k-1}(E_0)) = \bigcup_{i=1}^{m=4} S_i(S^{k-1}(E_0)), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^{m=4} S_i(S^{k-1}(E_0)) = \bigcup_{i=1}^{m=4} S_i(\lim_{k \rightarrow \infty} S^{k-1}(E_0)), \\ \Rightarrow F &= \bigcup_{i=1}^{m=4} S_i(F), \end{aligned}$$

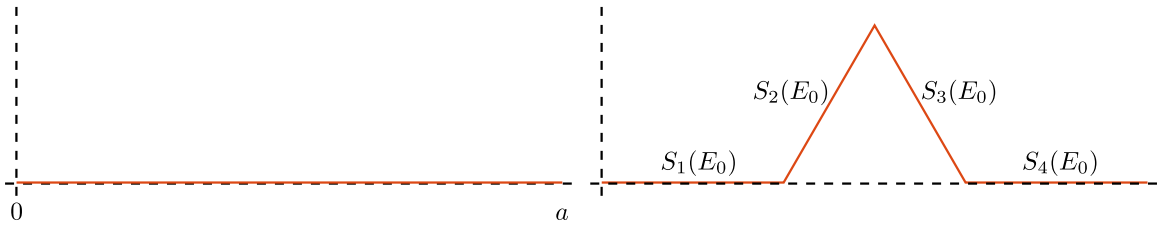
Por otra parte, si $\vec{x} = (x_1 \ x_2)^t$ y $\vec{y} = (y_1 \ y_2)^t$, para calcular la dimensión de la curva de Koch es necesario conocer los factores de contracción de cada S_i , las cuales cumplen con $|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y|$. Así, para S_1 se tiene

$$\begin{aligned} |S_1(\vec{x}) - S_1(\vec{y})| &= \left| \frac{1}{3}I\vec{x} - \frac{1}{3}I\vec{y} \right| = \left| \frac{1}{3}I(\vec{x} - \vec{y}) \right|, \\ &= \frac{1}{3}|\vec{x} - \vec{y}|, \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Y para S_2 , se sigue

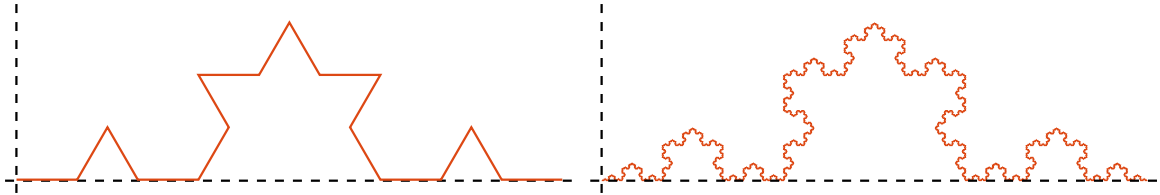
$$\begin{aligned} |S_2(\vec{x}) - S_2(\vec{y})| &= \left| \frac{1}{3}A_{\pi/3}\vec{x} + \vec{u} - \left\{ \frac{1}{3}A_{\pi/3}\vec{y} + \vec{u} \right\} \right| = \frac{1}{3}|A_{\pi/3}(\vec{x} - \vec{y})|, \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(A_{\pi/3}(\vec{x} - \vec{y})) \cdot (A_{\pi/3}(\vec{x} - \vec{y}))}, \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(A_{\pi/3}(\vec{x} - \vec{y}))^t (A_{\pi/3}(\vec{x} - \vec{y}))}, \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^t A_{\pi/3}^t A_{\pi/3}(\vec{x} - \vec{y})}, \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^t (A_{-\pi/3}A_{\pi/3})(\vec{x} - \vec{y})}, \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^t (\vec{x} - \vec{y})} = \frac{1}{3}|\vec{x} - \vec{y}|, \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

donde se usó el hecho que, $A_{\pi/3}$ es la matriz que rota un ángulo de $\pi/3$ en sentido contrario a las manecillas del reloj y $A_{-\pi/3}$ la matriz que gira un ángulo de $-\pi/3$ en sentido de las manecillas del reloj, por tanto $A_{-\pi/3}A_{\pi/3}$ hace girar un ángulo de $\pi/3$



(a) Conjunto inicial E_0 .

(b) Generador de la curva de Koch E_1 .



(c) Segunda iteración del proceso de construcción.

(d) Atractor.

Figura 3.5: Proceso de construcción de la curva de Koch.

y luego un ángulo $-\pi/3$ dejando en la misma orientación al conjunto sobre el que se aplique, es decir, $A_{-\pi/3}A_{\pi/3} = I$.

Para S_3 y S_4 se procede de manera semejante como se calculó S_1 y S_2 , encontrándose que

$$c_i = \frac{1}{3} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.10}$$

Así, cada transformación de contracción de similitud en $\{S_i\}$ independientemente que traslade y/o rote al conjunto al que se le aplique, tiene una factor de contracción igual a $1/3$, por tanto, a partir de (3.10) y (3.9), se puede calcular la dimensión de la

curva de Koch

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 c_i^s &= 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^s &= \frac{1}{4} \\ -s \ln(3) &= -\ln(4) \\ \Rightarrow s &= \frac{\ln(4)}{\ln(3)}.\end{aligned}$$

Obteniéndose un valor aproximado de $s \approx 1,2618$ mayor que 1, la cual corresponde a una curva unidimensional. Por último, esta dimensión fraccionaria s al ser relativamente próxima al valor 1, tiene la interpretación colectiva que la curva de Koch se asemeja a una curva, pero en cierto sentido llena más el espacio que una curva unidimensional.

Capítulo 4

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1. NO-LOCALIDAD Y AUTO-SIMILITUD

En la sección de [3.1](#), se estableció la propiedad de auto-similitud, la cual está presente en un objeto siempre que su geometría manifieste cierta estructura, donde cada parte de él asemeje la forma del objeto completo. En particular, cuando esta similitud entre el objeto y cada una de sus partes es completa, es decir, cada parte recrea exactamente la misma geometría, se habla entonces de los fractales auto-semejantes.

Cada parte arbitraria de un fractal auto-semejante es indistinguible de cualquier otra, debido a que la información de la estructura o geometría del fractal completo se alberga en cada una de ellas, dicho de otra forma, todas las partes de un fractal auto-semejante están interrelacionadas al estar todas vinculadas con la geometría del todo (ver figura [4.1](#)).

Por otra parte, en la sección [2.1](#), se examinó la propiedad de no-localidad, la cual está presente en un objeto si sus partes muestran una organización en la cual, cada una de ellas está interrelacionada con todas las demás. Por ejemplo en un holograma, en el cual no importa que sección se tome, ésta siempre contendrá la información de la imagen almacenada (o esparcida) en el holograma completo, es decir, cada parte de él es equivalente a cualquier otra dado que en cada una de ellas se almacena la misma información.

Al observar la propiedad de no-localidad junto con la propiedad de auto-similitud, se encuentra que son términos equivalentes, dado que ambos se manifiestan en la organización de un objeto cuando cada parte está interrelacionada con todas las demás y por tanto con el todo. Así, aunque la propiedad de auto-similitud esté enfocada a los aspectos geométricos, esto no la limita a ser considerada como otra forma de expresar la propiedad de no-localidad, la cual se emplea para describir la estructura del orden implicado.

4.2. METAMORFOSIS Y SISTEMA DE FUNCIONES DE ITERACIÓN

En la subsección 2.2.1, se describió el proceso de doblamiento, representado por el operador M . Si se consideran diferentes procesos de doblamientos, estos se pueden representar por M_1, M_2, \dots [8]. Para estudiar posteriormente a los procesos de doblamiento y desdoblamiento junto con los fractales auto-semejantes, es adecuado denotar a la colección de metamorfosis M_1, M_2, \dots , como

$$\{M_i\} = \{M_1, M_2, \dots\},$$

donde el proceso de desdoblamiento correspondiente a cada M_i , es denotado por M_i^{-1} .

Por otro lado, en la subsección 3.2.1 se dijo que un fractal auto-semejante está descrito mediante su correspondiente sistema de funciones de iteración (SFI) $\{S_i\}$. En el cual, es de esperarse que a cada contracción de similitud S_i le corresponda una transformación inversa S_i^{-1} (ver apéndice E). Así, si se elige cierta escala únicamente como referencia, cada S_i tiene la función de *contraer* al fractal en una escala más pequeña, y por su lado cada S_i^{-1} ayuda a extender o *dilatar* la parte contraída por S_i , exhibiendo al fractal en la escala original.

Recapitulando, los procesos representados por la colección de metamorfosis $\{M_i\}$, tienen lugar en la totalidad del orden implicado, donde cada metamorfosis M_i pliega ciertos aspectos que se encuentran en el orden explicado dentro del orden implicado, mientras que su proceso inverso M_i^{-1} los despliega. Por su lado, las transformaciones S_i y S_i^{-1} correspondientes a un fractal auto-semejante, al alterar la escala del objeto

fractal contrayéndola y expandiéndola (ver figura 4.1), en última instancia, provocan que la estructura en la geometría del fractal oculte o muestre su información, no importando que tan considerable pueda ser el cambio de escala, siempre se estará y mostrará alguna parte de este objeto. Esto sugiere que las transformaciones de contracción S_i y dilatación S_i^{-1} pueden ser empleados con el propósito de explicar en un contexto diferente los procesos de doblamiento y desdoblamiento, considerando a un fractal auto-semejante como metáfora del orden implicado.

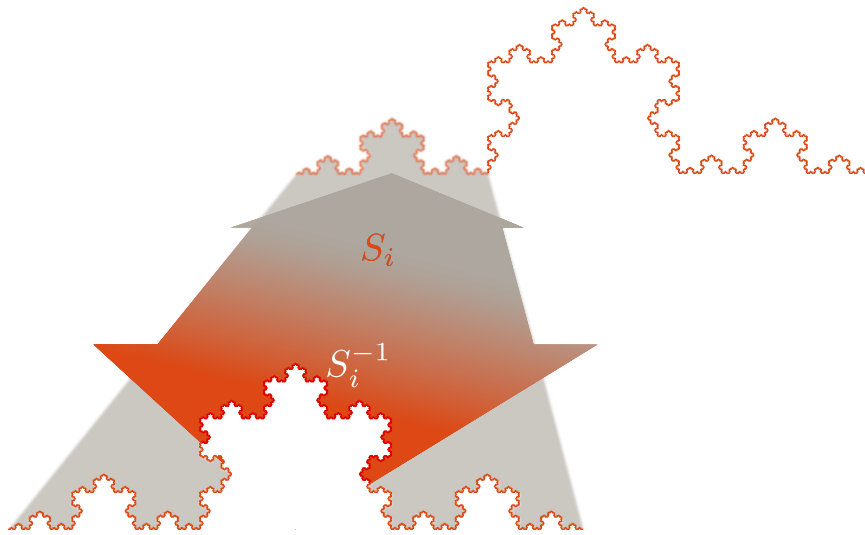


Figura 4.1: Cada parte de la curva de Koch al contener la misma geometría que el todo, es indistinguible a cualquier otra, esto se puede observar con ayuda de las transformaciones de contracción y dilatación, quienes amplifican o contraen su escala.

Al igual que el orden explicado e implicado siguen perteneciendo a la totalidad del orden implicado, en un fractal auto-semejante no importa en qué escala se esté, siempre se estará en el mismo fractal. Esto indica que ambos expresan en forma distinta la misma característica de totalidad indivisible. Persuadiendo que al igual que cada contracción de similitud determina alguna parte del fractal, es decir, un fractal auto-semejante se puede caracterizar completamente por su SFI $\{S_i\}$, la colección de metamorfosis $\{M_i\}$ pueda ser empleada para representar a la totalidad del orden implicado, dado que cada metamorfosis está asociada únicamente con ciertos aspectos que son parte de él.

4.3. CONCLUSIONES

Los paralelismos que se encontraron durante el desarrollo de este trabajo, entre el paradigma holográfico y los fractales auto-semejantes, y los cuales son la aportación de esta tesis se resumen a continuación.

- (I) La auto-similitud es otra forma de expresar la propiedad de no-localidad.
- (II) La función que cumple cada S_i se puede emplear para expresar en otro contexto el proceso que representa cada metamorfosis M_i , y que tiene lugar en la totalidad del orden implicado.
- (III) Mientras que un SFI $\{S_i\}$ define a un fractal auto-semejante, una colección de metamorfosis $\{M_i\}$ puede ser utilizada para representar a la totalidad del orden implicado.

A partir de estas relaciones se muestra entonces que existen paralelismos entre el paradigma holográfico y los objetos llamados fractales auto-semejantes o auto-adjuntos, los cuales pueden ser ocupados como una nueva metáfora en la descripción de la estructura del paradigma holográfico. Con esto no se alteran las descripciones que brinda el paradigma holográfico, como por ejemplo al experimento EPR, sino se contribuye a este paradigma aportando una nueva perspectiva en su descripción.

Por otra parte, respecto al paradigma holográfico junto con los objetos fractales, y la relación mostrada entre las propiedades de no-localidad y auto-similitud, se pueden señalar ciertas relaciones esbozando posibles estudios, como por ejemplo, una relación directa entre S_i y M_i . Por otro lado, dado que los fractales aleatorios muestran una geometría en la cual su apariencia muestra un desorden aparente o aleatorio, el cual Bohm interpreta como una organización con un alto grado de complejidad, suscita una posible relación entre el paradigma holográfico y los fractales aleatorios. Y por último, en la teoría de variables ocultas, al presentar la propiedad de no-localidad, al potencial cuántico se le puede inferir la propiedad de auto-similitud, indicando cierta semejanza con un fractal auto-semejante.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. S. Kuhn. *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. Fondo de cultura económica, 1971.
- [2] Fritjof Capra. *La Trama de la Vida*. Editorial Anagrama, 1996.
- [3] Oscar Johansen Bertoglio. *Introducción a la Teoría General de Sistemas*. Limusa, 1993.
- [4] D. Bohm and B. Hilley. *The Undivided Universe: An Interpretation of Quantum Theory*. Routledge, 1995.
- [5] Gordon G. Globus. *Consciousness and the Brain*. Plenum Press, 1976.
- [6] Karl Pribram. *Languages of the Brain: Experimental Paradoxes and Principles in Neuropsychology*. Prentice-Hall, 1972.
- [7] B. Podolsky A. Einstein and N. Rosen. Can quantum-mechanic description of physical reality be considered complete. *Phys. Rev.*, **47**(2):777–780, May 1935.
- [8] David J. Bohm. *Wholeness and the Implicate Order*. London and New York, 2005.
- [9] Benoit B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and company, 1983.
- [10] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley-Blackwell, 2003.
- [11] Ivars Peterson. *The Mathematical Tourist*. W. H. Freeman and Company, 1988.
- [12] D. Halliday y K. S. Krane R. Resnick. *Física Vol 1*. Compañía Editorial Continental, 2001.

- [13] M A de Gosson. *The Principles of Newtonian and Quantum Mechanics: The Need for Planck's Constant, H*. Imperial College Press, 2001.
- [14] I. Tóptiguin M. Brédov, V. Rumiántsev. *Electrodinámica Clásica*. Editorial Mir Moscú, 1988.
- [15] Paavo T. I. Pylkkänen. *Mind, Matter and the Implicate Order*. Springer, 2007.
- [16] Ken Wilber. *The Holographic Paradigm and Other Paradoxes: Exploring the Leading Edge of Science*. Shambhala Publications Inc, 1982.
- [17] M. Talbot. *The Holographic Universe*. Harper Collins Publishers, 1996.
- [18] D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables i. *Phys. Rev.*, **85**(2):166–180, January 1952.
- [19] D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables ii. *Phys. Rev.*, **85**(2):180–193, January 1952.
- [20] B. J. Hiley D. Bohm and Kaloyerou. An ontological basis for the quantum theory. Technical Report 6, Department of Physics, Birkbeck College, (London University), July 1987.
- [21] J. J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison Wesley, second edition, 2011.
- [22] David J. Bohm. *Quantum Theory*. Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [23] B. J. Hiley. From the heisenberg picture to bohm: a new perspective on active information and its relation to shannon information. *A. Khrennikov (ed): Proc. Conf. Quantum Theory: reconsideration of foundations, Växjö University Press, Sweden*, 141-162, 2002.
- [24] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 2005.
- [25] D. J. Bohm and B. J. Hiley. Measurement understood through the quantum potential approach. *Foundations of Physics*, **14**(3):255–274, 1984.
- [26] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics Non-relativistic Theory*. Pergamon Press, 1965.
- [27] D. Gabor. A new microscopic principle. *Nature*, **85**(2):161–177, January 1948.

- [28] C. Cohen. *Quantum Mechanics*. Wiley VCH, 2006.
- [29] A. S. Davydov. *Quantum Mechanics*. Neo Press, second edition, 1966.
- [30] L. De la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de cultura económica, 2000.

Apéndices

Apéndice A

HOLOGRAMA

Un holograma es producto de la naturaleza ondulatoria de la luz, la cual presenta el fenómeno conocido como interferencia. El tipo de holograma que se emplea de objeto descriptivo del paradigma holográfico es el holograma de transmisión [27].

De forma breve, para lograr un holograma de transmisión se puede utilizar un arreglo interferométrico como el mostrado en la figura A.1. El láser es una fuente de luz coherente, de la cual se dividen dos rayos con ayuda de un *divisor de haz*, el rayo reflejado se nombra *rayo objeto* y el transmitido *rayo de referencia*, el cual mantendrá la fase original. El rayo objeto incidirá sobre el objeto del cual se desea hacer el holograma, al reflejarse se hará llegar junto con el rayo de referencia en una película fotosensible. Dado que ambos rayos seguirán caminos diferentes se creará una diferencia de fase de tal forma que sobre la película se presente un patrón de interferencia.

Para ver el resultado de un holograma es necesario hacerle incidir luz de la misma naturaleza con el que fue creado, enseguida la luz se difracta creando una imagen virtual del objeto fotografiado, como se muestra en la figura A.2.

Por último, las características que conciernen de un holograma son las siguientes:

- Cuando se toma un fragmento del holograma entero y se le hace incidir el rayo de referencia, éste se difractará obteniéndose una imagen virtual del objeto original, es de esperarse que la información en el fragmento presente menos detalles que el holograma entero. Por tanto, el tamaño de la imagen virtual del fragmento es a la imagen del holograma entero como lo es el fragmento al holograma completo. Esta forma de almacenamiento se conoce como almacenamiento holográfico [27].

A.0.

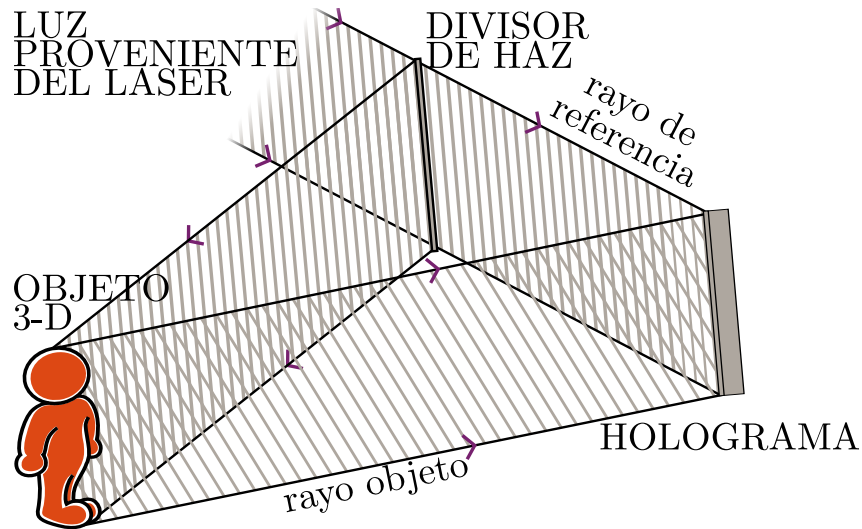


Figura A.1: Arreglo interferométrico para el grabado de un holograma de transmisión.

- Un holograma es creado por la superposición de dos rayos, uno de los cuales tiene la fase del objeto y su amplitud, mientras que el otro la fase original de la fuente de luz. Así, al superponerse, en su patrón de interferencia encriptan la información del objeto, dado que éste no muestra a simple vista la figura del objeto.

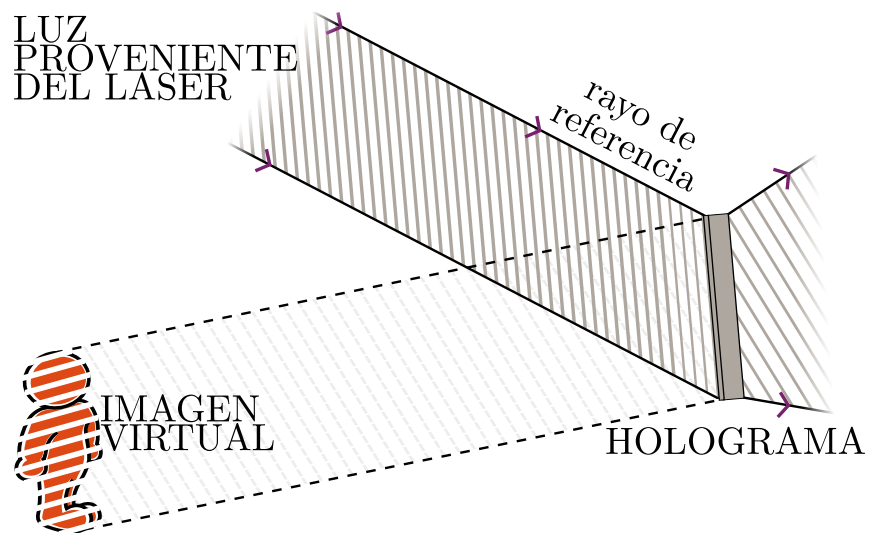


Figura A.2: Reconstrucción de la imagen grabada en un holograma de transmisión.

Apéndice B

MECÁNICA CUÁNTICA

En la mecánica cuántica, las propiedades de la materia, como por ejemplo el valor de la posición o ímpetu de una partícula, se consideran como potencialidades, las cuales se manifiestan de acuerdo con el sistema con el que interactúe, el cual puede llegar a ser algún dispositivo de medición. En general, con ayuda de la función de onda, en la mecánica cuántica se obtienen ciertas probabilidades acerca de los probables resultados de algún proceso de medición.

B.1. FUNCIÓN DE ONDA

La función de onda asociada a una partícula con posición x y masa m , se denota por la función compleja $\Psi(x, t)$, satisfaciendo ciertas condiciones de frontera y encontrándose al resolver la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t).$$

La interpretación estadística de la función de onda, establece que la probabilidad de encontrar a la partícula entre x y $x + dx$ al tiempo t , es

$$P(x, t)dx = |\Psi(x, t)|^2 dx,$$

donde $|\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$ se concibe como la densidad de probabilidad, por lo que su integral sobre todo el espacio es 1.

Además, si se tienen dos (o más) funciones de onda Ψ_1 y Ψ_2 , cualquier combinación lineal $a\Psi_1 + b\Psi_2$, donde a y b son constantes arbitrarias, también es una posible función de onda. Este enunciado es conocido como el principio de superposición [22].

En la mecánica cuántica se asume que a través de la función de onda toda la información física acerca del sistema puede ser obtenida. Además, para sistemas más complejos que el constituido por una sola partícula, se asume que la función de onda dependerá de todas las variables necesarias para describirlo. Por ejemplo, para un sistema de 2 partículas, la función de onda estará determinada por las seis coordenadas espaciales que corresponden a las dos partículas, las cuales constituyen un espacio 6-dimensional conocido como su espacio de configuración [22]. Así, para un tiempo dado la función de onda y por ende la configuración de las partículas, estarán determinadas por cierto punto de su espacio de configuración, hay que recalcar que este espacio de configuración no necesariamente está relacionado con el espacio físico en el cual se encuentran las partículas.

B.2. OPERADORES LINEALES

Al ser útiles en la obtención de expresiones concernientes a las variables físicas de un sistema, como la posición o momento, es conveniente definir a los operadores lineales, los cuales son transformaciones que indican ciertos cambios específicos a realizar sobre la función de onda. Así, se dice que O es un operador lineal si cumple con las siguientes propiedades:

1. Cuando O opera sobre una función de onda produce una nueva función de onda, es decir $O\Psi_1 = \Psi_2$.
2. $O(\Psi_1 + \Psi_2) = O\Psi_1 + O\Psi_2$.
3. $C(O\Psi) = O(C\Psi)$, donde C es una constante arbitraria.

B.3. EL CONMUTADOR

Con los operadores se pueden realizar las operaciones suma, resta, multiplicación entre dos operadores o multiplicación por un escalar. Así, si O y P son dos operadores,

el conmutador entre ellos se define como:

$$[O, P] = OP - PO.$$

Los operadores tienen las mismas propiedades que los números, sin embargo, en general ellos no satisfacen la ley conmutativa $ab = ba$.

B.4. OPERADORES HERMITIANOS

De entre todos los operadores lineales, únicamente ciertos operadores son adecuados para representar alguna variable física, los cuales se nombran operadores Hermitianos. Así, para que un operador O sea Hermitiano, su valor medio dado por

$$\bar{O} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* O \Psi dx,$$

debe ser igual a su complejo conjugado, esto significa que el valor medio de un operador Hermitiano es real.

El complejo conjugado de \bar{O} se encuentra tomando el complejo conjugado de todas las partes de la integral. Entonces, la condición de un valor real como valor medio para un operador Hermitiano, se puede expresar como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* O \Psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi O^* \Psi^* dx,$$

donde O^* es el complejo conjugado del operador O .

B.5. VALOR MEDIO DE UN OBSERVABLE

Una de las utilidades de la mecánica cuántica es el cálculo de las predicciones en las mediciones de variables físicas u observables, asumiendo que para ciertas variables definidas en la mecánica clásica, como la posición e ímpetu, existe un correspondiente operador Hermitiano, del cual su valor medio será un número real correspondiente al

valor esperado cuando se realice una medición de dicha observable.

B.5.1. VALOR MEDIO DE LA POSICIÓN

La posición x puede ser representada como un operador, teniendo la simple propiedad de multiplicar por la izquierda a la función de onda en el espacio de posición. Así, el valor esperado de la posición x es

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx,$$

el cual se interpreta como el valor promedio obtenido tras haber realizado repetidas mediciones sobre un conjunto o colección de sistemas preparados físicamente de la misma manera, presentando las mismas condiciones iniciales con la mayor precisión posible para así encontrarse en el mismo estado cuántico.

En forma similar, el valor medio de alguna función f , que dependa de x puede ser escrita como

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* f(x) \Psi dx.$$

Para la generalización a tres dimensiones, el valor medio sería

$$\bar{f}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* f(x, y, z) \Psi dx dy dz.$$

B.5.2. VALOR MEDIO DEL MOMENTO

El momento p se representa por el operador $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, y su valor esperado está dado como

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx,$$

en el espacio de momento, esta última expresión es escribe

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^* p \Phi dp,$$

donde $\Phi(p)$ es el componente de Fourier normalizado de Ψ , con $p = \hbar k$. En general, para cualquier función del momento, el promedio está dado por

$$\bar{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^* f(p) \Phi dp,$$

B.6. PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Si se miden simultáneamente la posición e ímpetu con incertidumbres δx y δp respectivamente, entonces el producto de estos dos errores nunca puede ser más pequeño que un número del orden de \hbar [22]. Esto es

$$\delta x \delta p \geq (\sim \hbar),$$

donde el símbolo $(\sim \hbar)$ significa “un número del orden de \hbar ”.

B.7. EIGENFUNCIONES Y EIGENVALORES DE UN OBSERVABLE

Cuando se mide un observable, representado por el operador O , en una colección de sistemas bajo las mismas condiciones con el mismo rango de potencialidades, es decir, que se encuentren en el mismo estado cuántico representado por una misma función de onda Ψ , no siempre se obtendrá un mismo valor como resultado. Sin embargo, si por alguna razón se tiene la certeza que el resultado de cada medición será siempre cierto valor o , se dice entonces que el estado cuántico Ψ estará determinado por el observable O . Esta situación se expresa mediante la relación

$$O\Psi = o\Psi,$$

la cual es la ecuación de eigenvalores del operador O , en donde Ψ es una eigenfunción perteneciente a O y o ($\neq 0$) su correspondiente eigenvalor. La colección de todos los eigenvalores de un operador se conoce como su espectro, el cual puede ser discreto si los valores varían discretamente de un eigenvalor al siguiente, o en caso contrario

B.7. EIGENFUNCIONES Y EIGENVALORES DE UN OBSERVABLE

continuo.

Por simplicidad, si se tiene un espectro discreto, el conjunto de eigenfunciones

$$\{\psi_1, \psi_2, \dots\},$$

correspondientes a los eigenvalores $\{o_1, o_2, \dots\}$, forman un conjunto completo, lo que significa que cualquier otra función de onda Ψ' se puede escribir como una combinación lineal de estas funciones, esto es

$$\Psi' = \sum_n C_n \psi_n,$$

donde las constantes C_n son los coeficientes de expansión.

Para un desarrollo más detallado sobre mecánica cuántica, véase las referencias [26, 28, 29, 21, 30].

Apéndice C

POTENCIAL CUANTICO DE UN SISTEMA DE N-PARTÍCULAS

En este apéndice se obtendrán las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= -\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{(\nabla_i S)^2}{m_i} + V - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R}\right), \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \left(R \sum_{i=1}^N \frac{\nabla_i^2 S}{m_i} + 2 \sum_{i=1}^N \frac{\nabla R \cdot \nabla S}{m_i}\right).\end{aligned}$$

Para un sistema de N-partículas, la función de onda

$$\Psi = \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t), \quad (\text{C.1})$$

satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 \Psi + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \Psi, \quad (\text{C.2})$$

donde

$$\nabla_k^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}.$$

Si se reescribe la función de onda de la siguiente manera

$$\Psi = R e^{iS/\hbar}. \quad (\text{C.3})$$

C.0.

Al sustituirla en el lado izquierdo de la ecuación de Schrödinger (C.2), se tiene

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} - R \frac{\partial S}{\partial t} \right) e^{iS/\hbar}. \quad (\text{C.4})$$

Sustituyendo la función de onda (C.3), en el primer término del lado derecho de la ecuación de Schrödinger (C.2)

$$-\sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 \Psi = -\sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 (R e^{iS/\hbar}). \quad (\text{C.5})$$

Si se considera la siguiente notación

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{k1}} = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_{k2}} = \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_{k3}} = \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad (\text{C.6})$$

para cada factor $\nabla_k^2 (R e^{iS/\hbar})$ en (C.5) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_k^2 (R e^{iS/\hbar}) &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_{kl}^2} (R e^{iS/\hbar}), \\ &= \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \xi_{kl}^2} (e^{iS/\hbar}) + 2 \frac{\partial R}{\partial \xi_{kl}} \frac{\partial e^{iS/\hbar}}{\partial \xi_{kl}} + R \frac{\partial^2 e^{iS/\hbar}}{\partial \xi_{kl}^2} \right), \\ &= \left(\sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 R}{\partial \xi_{kl}^2} \right) e^{iS/\hbar} + 2 \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_{kl}} \right) \left(\frac{\partial e^{iS/\hbar}}{\partial \xi_{kl}} \right) \\ &\quad + R \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 e^{iS/\hbar}}{\partial \xi_{kl}^2}, \\ &= (\nabla_k^2 R) e^{iS/\hbar} + 2 \nabla_k R \cdot \nabla_k e^{iS/\hbar} + R \nabla_k^2 e^{iS/\hbar}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

sustituyendo en la ecuación (C.5) se obtiene

$$\sum_{k=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 \Psi = \sum_{k=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_k} \{ (\nabla_k^2 R) e^{iS/\hbar} + 2 \nabla_k R \cdot \nabla_k e^{iS/\hbar} + R \nabla_k^2 e^{iS/\hbar} \}. \quad (\text{C.8})$$

Por otra parte, para el segundo término del lado derecho de la ecuación (C.7), se tiene

$$\begin{aligned} 2\nabla_k R \cdot \nabla_k e^{iS/\hbar} &= 2\nabla_k R \cdot \left(\frac{i}{\hbar} \nabla_k S e^{iS/\hbar} \right), \\ &= \frac{2i}{\hbar} \nabla_k R \cdot \nabla_k S e^{iS/\hbar}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

y para el tercer término

$$\begin{aligned} R \nabla_k^2 e^{iS/\hbar} &= R \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 e^{iS/\hbar}}{\partial \xi_{kl}^2}, \\ &= R \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_{kl}} \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial \xi_{kl}} e^{iS/\hbar} \right), \\ &= R \left\{ \sum_{l=1}^3 \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_{kl}^2} e^{iS/\hbar} + \sum_{l=1}^3 \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_{kl}} \right)^2 e^{iS/\hbar} \right\}, \\ &= R \frac{i}{\hbar} \nabla_k^2 S e^{iS/\hbar} - R \frac{1}{\hbar^2} (\nabla_k S)^2 e^{iS/\hbar}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Sustituyendo las expresiones (C.9) y (C.10) en la ecuación (C.8) y acomodando términos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 \Psi &= \left(\sum_{k=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 R \right) e^{iS/\hbar} - i \left(\sum_{k=1}^N \frac{\hbar}{m_k} \nabla_k R \cdot \nabla_k S \right) e^{iS/\hbar} \\ &\quad - i \left(\sum_{k=1}^N \frac{\hbar R}{2m_k} \nabla_k^2 S \right) e^{iS/\hbar} + \left(\sum_{k=1}^N \frac{R}{2m_k} (\nabla_k S)^2 \right) e^{iS/\hbar}, \\ &= \left\{ - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 R + \sum_{k=1}^N \frac{R}{2m_k} (\nabla_k S)^2 \right. \\ &\quad \left. - i \left(\sum_{k=1}^N \frac{\hbar}{m_k} \nabla_k R \cdot \nabla_k S + \sum_{k=1}^N \frac{\hbar R}{2m_k} \nabla_k^2 S \right) \right\} e^{iS/\hbar}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

C.0.

Al sustituir las expresiones (C.3), (C.4) y (C.11) en la ecuación de Schrödinger (C.2)

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} - R \frac{\partial S}{\partial t} \right) e^{iS/\hbar} &= \left\{ -\sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 R + \sum_{k=1}^N \frac{R}{2m_k} (\nabla_k S)^2 \right. \\ &\quad \left. -i \left(\sum_{k=1}^N \frac{\hbar}{m_k} \nabla_k R \cdot \nabla_k S + \sum_{k=1}^N \frac{\hbar R}{2m_k} \nabla_k^2 S \right) \right\} e^{iS/\hbar} \\ &\quad + V R e^{iS/\hbar}. \end{aligned}$$

Cancelando el factor $e^{iS/\hbar}$ en ambos lados de la ecuación anterior e igualando las partes real e imaginaria, se llegan a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= - \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{(\nabla_i S)^2}{m_i} + V - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \left(R \sum_{i=1}^N \frac{\nabla_i^2 S}{m_i} + 2 \sum_{i=1}^N \frac{\nabla R \cdot \nabla S}{m_i} \right). \end{aligned}$$

Para el caso de una partícula, se hace $N = 1$ en las sumatorias de las ecuaciones anteriores, obteniéndose

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= - \left(\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\vec{x}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{1}{2m} (R \nabla^2 S + 2 \nabla R \cdot \nabla S). \end{aligned}$$

Apéndice D

CONCEPTOS BÁSICOS DE FRACTALES

Se trabajará generalmente en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n , cuyos puntos se denotan como $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, etc., donde cada entrada está en \mathbb{R} . Las operaciones de suma y multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ son definidas de la manera usual, $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ y $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Además, la distancia entre dos puntos x y y será la distancia euclidiana $|x - y| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right)^{1/2}$, donde $|x_i - y_i|$ es el valor absoluto.

Un conjunto se define como $F = \{x : x \text{ cumple la condición } P(x)\}$, entonces si $x \in F$, se tendrá que x cumple con la condición especificada por F . El conjunto vacío es denotado por \emptyset . Los subconjuntos en \mathbb{R}^n son representados por las letras mayúsculas A, B , etc., y una colección finita o infinita de conjuntos $\{U_1, U_2, \dots\}$ será denotada como $\{U_i\}$. Por su parte, los símbolos $\subset, \cup, \cap, \setminus$ representarán la contención, unión, intersección y diferencia entre dos conjuntos.

Además, se denota por \bar{A} al conjunto más pequeño que contiene completamente a A , y por $\text{int}(A)$ al subconjunto más grande contenido en A . Así, se dice que el conjunto A es *cerrado* si $A = \bar{A}$ o *abierto* si $A = \text{int}(A)$, mientras que su frontera ∂X está dada como $\partial A = \bar{A} \setminus A$.

Definición D.1 (Diámetro) Se define el diámetro $|A|$ de un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n , como la distancia más grande entre dos de sus elementos, es decir, $|A| = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$.

D.0.

Definición D.2 (δ -vecindad de un conjunto) Se define una delta-vecindad de un subconjunto A de \mathbb{R}^n , como el conjunto formado por los puntos que se encuentren a lo más una distancia δ de A , esto es, $A_\delta = \{x : |x - y| \leq \delta \text{ para algún } y \text{ en } A\}$.

Definición D.3 (Función) Un mapeo, función o transformación f del conjunto X al conjunto Y es una regla o fórmula que asocia a cada punto $f(x)$ de Y a cada punto x de X y se escribe como $f : X \rightarrow Y$, siendo X e Y el dominio e imagen de la función f respectivamente.

Definición D.4 (Función uno a uno) Una función es llamada uno a uno si se tiene $f(x) \neq f(y)$, siempre que $x \neq y$.

Definición D.5 (Función sobre) Una función es llamada sobre si para cada elemento de Y hay un elemento x en X tal que $f(x) = y$.

Definición D.6 (Correspondencia uno a uno) Una función que es uno a uno y sobre, es conocida como una correspondencia uno a uno.

Si f es una correspondencia uno a uno entre X y Y , entonces se puede definir la función inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ tomando a $f^{-1}(y)$ como el único elemento de X tal que $f(x) = y$.

La composición entre las funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ es la función $g \circ f : X \rightarrow Z$ dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Por otro lado, ciertas funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n conocidas como *transformaciones* (denotadas por letras mayúsculas), además de tener un significado geométrico particular, en general cumplen con la ley asociativa, permitiendo realizar la composición entre transformaciones, es decir, si S , T y U son transformaciones, se tiene $S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U$.

Definición D.7 (Congruencia) La transformación $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada una congruencia o isotropía si preserva distancias, es decir, si $|S(x) - S(y)| = |x - y|$ para todo x, y en \mathbb{R}^n .

Se tiene entonces que una congruencia transforma conjuntos en otros geoméricamente semejantes. Casos especiales pueden ser la transformación identidad $I(x) = x$, traslaciones de la forma $S(x) = x + a$, o rotaciones alrededor del punto a tales que $|S(x) - a| = |x - a|$. Una congruencia dada por una combinación de rotaciones y

traslaciones, es llamada *congruencia directa* o *movimiento rígido*. Por otro lado, hay transformaciones que además de trasladar o rotar un conjunto, también cambian la escala.

Definición D.8 (Transformación de similitud) Una transformación $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nombra de similitud con factor o escala $c > 0$, si $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$ para todo x, y en \mathbb{R}^n .

Una transformación de similitud mapea conjuntos dentro de conjuntos similares con longitudes o dimensiones multiplicadas por un factor c .

Por otro lado, es de utilidad ocupar la notación vectorial para los puntos $x = (x_1, \dots, x_n)$, ocupando las operaciones y definiciones elementales de matrices, escribiéndolos como $\vec{x} = (x_1 \ \cdots \ x_n)^t$, donde el superíndice t indica que se tome la matriz transpuesta, intercambiando filas por columnas. Además, $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ representará la norma euclidiana de un vector, la cual también se puede escribir como el producto de matrices $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^t \vec{x}}$. Así, la distancia euclidiana está dada por $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$.

Con la notación matricial, una transformación de traslación se escribe como $S(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{b}$, siendo \vec{b} el vector desplazamiento. Una transformación de rotación en el plano alrededor del punto \vec{a} está dada por $S(\vec{x}) = \vec{a} + A_\theta \cdot (\vec{x} - \vec{a})$, donde A_θ es la matriz de rotación que hace girar un ángulo θ , dada por

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La transformación identidad está dada por la relación $\vec{x} = I_{n \times n} \vec{x}$, donde $I_{n \times n}$ es la matriz identidad $n \times n$.

Por otra parte, sean X y Y subconjuntos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente, $f : X \rightarrow Y$ una función y a un punto de \overline{X} . Se define el límite de una función.

Definición D.9 (Límite de una función) Si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - y| < \epsilon$ para todo $x \in X$ con $|x - a| < \delta$. Se dice que $f(x)$ tiene límite, tiende o

D.0.

converge a y cuando x tiende a a . Denotándose como $f(x) \rightarrow y$ cuando $x \rightarrow a$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$.

Por último, se define una función continua.

Definición D.10 (Continuidad en un punto y sobre un conjunto) *una función es continua en el punto a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, y f es continua en X si es continua en todos los puntos de X .*

Apéndice E

TRANSFORMACIONES DE CONTRACCIÓN Y DILATACIÓN

Una contracción de similitud $S : D \rightarrow D$ en \mathbb{R}^n , es una función uno a uno, por lo que se puede esperar que exista su transformación inversa S^{-1} . Ambas transformaciones deben cumplir la relación $S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S = I$, donde I es la transformación identidad.

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, tales que

$$S(\vec{x}) = \vec{x}', \tag{E.1}$$

$$S(\vec{y}) = \vec{y}'. \tag{E.2}$$

Si se opera cada lado de las ecuaciones anteriores por S^{-1} , se tiene

$$S^{-1}(\vec{x}') = \vec{x},$$

$$S^{-1}(\vec{y}') = \vec{y}.$$

Tomando la diferencia entre éstas dos últimas expresiones

$$S^{-1}(\vec{x}') - S^{-1}(\vec{y}') = \vec{x} - \vec{y}. \tag{E.3}$$

E.0.

Por otra parte, sea c el factor de contracción de S con $0 < c < 1$, ocupando las expresiones (E.1) y (E.2)

$$\begin{aligned} |S(\vec{x}) - S(\vec{y})| &= c|\vec{x} - \vec{y}|, \\ \Rightarrow |\vec{x} - \vec{y}| &= \frac{1}{c}|S(\vec{x}) - S(\vec{y})|, \\ \Rightarrow |\vec{x} - \vec{y}| &= \frac{1}{c}|\vec{x}' - \vec{y}'|. \end{aligned} \tag{E.4}$$

Tomando la norma en ambos lados de la ecuación (E.3) e igualando con la expresión (E.4)

$$|S^{-1}(\vec{x}') - S^{-1}(\vec{y}')| = \frac{1}{c}|\vec{x}' - \vec{y}'|.$$

De la ésta última expresión, se observa que S^{-1} es una transformación de similitud con factor $1/c$, donde $1/c \leq 1$, y por tanto S^{-1} transforma conjuntos en conjuntos con dimensiones más grandes.