UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

"Filtros en Topología y algunas aplicaciones"

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Cenobio Yescas Aparicio

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide

ASESOR DE TESIS:

Dr. Franco Barragán Mendoza

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, JUNIO DE 2013.

Dedicado a mi madre, a Antonio Gonzalez, a mis hermanos y mis amigos.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi madre y a mi padre Antonio que junto a su apoyo emocional me solventaron económicamente toda la carrera. A mis hermanos, Luis, Rodrigo y esposa, que siempre me han dado su apoyo incondicional. A los amigos que permitieron analizar y comentar temas matemáticos, a aquellos que de una u otra manera convivimos fuera de la escuela, en especial, a aquellos que dieron consejos y ayuda en momentos difíciles durante estos años. En el aspecto académico, quisiera agradecer al Profesor Adolfo Maceda, pues debido a la manera que me introdujo los saberes de Topología fue que opté por una tesis en esta área de la Matemática. También, quisiera agradecer al Dr. David Meza, por el verano de estancias en el cual lo tuve como asesor, mencionando que fue él quien me presentó la Teoría de filtros. Finalmente, quisiera agradecer al Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide, mi director de tesis, y al Dr. Franco Barragán Mendoza, asesor de tesis, pues con su ayuda he obtenido esta tesis. Por último, al sistema de becas del PROMEP por el apoyo económico proporcionado durante la realización de la tesis.

Introducción

La tesis trata sobre los filtros en topología y algunas aplicaciones. Los filtros aparecen por primera vez en 1908 en un trabajo de Riez [19]. Es Cartan [3] quien en 1937 presenta la convergencia en Topología en términos de filtros, que en 1940 Bourbaki [7] desarrolla. Así, dado un conjunto X no vacío, un filtro sobre X es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de X tal que

1. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
2. Si $G \subset X$ y $F \subset G$ para algún $F \in \mathcal{F}$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

A pesar de que la noción de filtro es propia de la Teoría de Conjuntos, en la tesis exponemos importantes usos de los filtros en la rama de las matemáticas conocida como Topología. De manera resumida, la tesis tiene como objetivo: Primero, presentar un panorama amplio de las nociones básicas de la Teoría de filtros. Segundo, exponer de forma breve y completa la teoría de redes, para poder hacer la comparación con la Teoría de filtros. Tercero y último, finalizar con un apartado para la exposición de algunas aplicaciones específicas de los filtros en Topología.

El trabajo de tesis está distribuido de la siguiente manera.

En el Capítulo 1, enunciamos los preliminares necesarios para desarrollar la tesis, hacemos un breve recordatorio de algunas nociones de Teoría de Conjuntos. También enunciamos resultados de Topología General a utilizar.

En el Capítulo 2, introducimos formalmente la definición de filtro. Tratamos las propiedades, resultados y equivalencias más conocidas dentro de la Teoría de filtros. Mencionamos ejemplos y las propiedades de los filtros. Damos también nociones como son base de filtros y ultrafiltros. También, definimos los conceptos de convergencia de filtros. Estudiamos las principales equivalencias de estas nociones de convergencia de filtros con conceptos de continuidad y convergencia dentro de espacios topológicos. Equivalencias tales como :

- Un espacio X es Hausdorff si y sólo si todo filtro convergente sobre X converge a un único punto (Teorema 2.72).
- Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en x si y sólo si para cada filtro $\mathcal{F}$ sobre X convergente a x, el filtro generado por las imágenes de los elementos de $\mathcal{F}$ es convergente a $f(x)$ (Corolario 2.68).

En el Capítulo 3 ilustramos las equivalencias entre las teorías más importantes respecto a convergencia en espacios topológicos, los filtros y las redes. Primeramente, enunciamos de forma breve conceptos generales de la Teoría de redes. Algunas nociones que definimos son: la noción de red, el filtro generado por una red y la red basada en un filtro dado. Probamos que la convergencia de una red (respectivamente de un filtro), implica la convergencia del filtro generado por la red (respectivamente de la red basada en el filtro) (Teorema 3.17).

En el Capítulo 4 mostramos algunos resultados importantes dentro de la Topología, en los cuales nos ayudamos de la Teoría de filtros para su obtención. El primero de estos es el Teorema de Tychonoff, para lo cual, en su demostración utilizamos equivalencias respecto a los espacios compactos y los ultrafiltros convergentes. De manera más específica, hacemos uso de que un espacio es compacto si y sólo si todo ultrafiltro en el espacio es convergente (Teorema 4.1). Esta demostración del Teorema de Tychonoff, cabe mencionar, no es la única forma de aplicar la Teoría de filtros. En [6], se hace la demostración de este teorema utilizando la noción de base de filtro.

Otra aplicación, es la obtención de la compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular (Teorema 4.14). Para ello utilizamos la noción de cero conjunto y de $\mathcal{Z}$-filtro (Definiciones 1.74 y 2.86). Iniciamos analizando propiedades de los $\mathcal{Z}$-filtros y los cero conjuntos. A partir de un espacio arbitrario completamente regular, X, construimos un espacio Hausdorff compacto, BX, donde BX resulta ser βX, es decir, BX es la compactificación de Stone-Čech del espacio X. Para esta construcción seguimos los pasos dados en [26, Pág. 142]. Durante este desarrollo nos ayudamos primordialmente de [22], [24], [9] y [25].

La última es una aplicación a los espacios uniformes. En este apartado, construimos un espacio topológico a partir de un conjunto X y un filtro $\mathcal{U}$ sobre $X \times X$. Si $\mathcal{U}$ satisface las propiedades para ser una estructura uniforme (Definición 4.16), entonces llamamos a X un espacio uniforme. Teniendo una estructura uniforme construimos una topología sobre X la cual llamamos topología uniforme. Con las definiciones de espacio uniforme y topología uniforme, definimos los filtros de Cauchy y los espacios uniformes completos. Resulta que un espacio uniforme es completo si todo filtro de Cauchy converge (Definición 4.32). Mostramos que todo espacio métrico tiene asociado una estructura canónica y la topología generada por ésta coincide con la topología del espacio métrico. Teniendo en cuenta ello, probamos que la definición usual de espacio métrico completo (la definición en términos de sucesiones de Cauhy, Definición 1.64) y la de espacio uniforme completo son equivalentes y hacemos la demostración en el Teorema 4.33.

A pesar de que los filtros no son un tema nuevo en Matemáticas, varios de los libros de topología no mencionan esta teoría. Sin embargo, la teoría de filtros permite describir temas importantes de topología general de una manera más clara, sencilla. En [11], la introducción de las nociones de topología, abiertos y vecindad se hacen a la par de las definiciones básicas de la Teoría de filtros. En [26], hay un capítulo especial que trata el tema de convergencia en espacios topológicos y los filtros. En [18], los filtros son introducidos para construir el tema de compactificaciones. Es importante aclarar que lo nuevo en esta tesis es la organización y presentación de la teoría de filtros, resultados y algunas aplicaciones importantes dentro de la topología. Podemos mencionar que las demostraciones de los teoremas y proposiciones, sobre todo en el capítulo de las aplicaciones, no son una copia o traslación directa de algún libro en particular si no más bien una conjunción de ideas de la literatura citada en la bibliografía. Puesto que los textos que abordan los filtros lo realizan a su forma, cada autor expone lo que considera importante y así hay resultados que aparecen en un libro y no en otro. Por tal razón, en la tesis intentamos unificar los resultados existentes en cada texto y presentarlos con un estilo propio. Como los filtros son una noción surgida en Teoría de Conjuntos, su aplicación se extiende de gran manera dentro de dicha rama de las Matemáticas. Por ello es importante mencionar que exponemos, lo que a nuestro parecer, es lo relevante respecto a los filtros y su uso en Topología. Si el lector quisiera explorar los filtros y sus aplicaciones más interesantes y especializadas dentro de la Teoría de Conjuntos puede consultar en [12], [2] o [13].

Esperamos que el lector encuentre interesante, comprensible y útil la tesis aquí expuesta, la cual puede ser un texto introductorio a la Teoría de filtros y con una visión diferente en cuanto al análisis de los conceptos en topología.

Cenobio Yescas Aparicio
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,
Instituto de Física y Matemáticas,
Universidad Tecnológica de la Mixteca.
Huajuapan de León, Oaxaca, México.
Junio, 2013.

Índice general

Introducción **V**

1. Preliminares **1**
- 1.1. Resultados de teoría de conjuntos 1
- 1.2. Nociones generales de topología 3
- 1.3. Compactificación 10
- 1.4. Cero conjuntos 12

2. Filtros **15**
- 2.1. Filtros 15
- 2.2. Bases de filtros 21
- 2.3. Ultrafiltros 26
- 2.4. Convergencia 31
- 2.5. $\mathscr{Z}$-filtros 39

3. Filtros y redes **43**
- 3.1. Redes 43
- 3.2. Relación entre filtros y redes 45

4. Aplicaciones **49**
- 4.1. El teorema de Tychonoff 49
- 4.2. La compactificación de Stone-Čech 52
- 4.3. Espacios uniformes 60

Conclusiones **69**

Bibliografía **71**

Indice alfabético **73**

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estudiamos conceptos que nos ayudarán a desarrollar el tema de tesis, conceptos básicos y usuales de cualquier curso básico de Topología General, así como algunos resultados de Teoría de Conjuntos y Análisis Matemático. En referencia a la Topología General iniciamos desde lo que es una topología, las nociones de cerradura, cuestiones de convergencia, algunos resultados de separabilidad, entre otros.

1.1. Resultados de teoría de conjuntos

Designamos a los conjuntos con letras mayúsculas: $A, B, C, ..., X, Y, Z$. Las familias de conjuntos las denotamos por medio de letras caligráficas mayúsculas: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ...$, en otro caso haremos la especificación de lo que represente alguna notación particular. Si A es un conjunto, denotamos al conjunto potencia de A por $\mathbb{P}(A)$. La unión y la intersección entre conjuntos son denotadas por $\cup$ y $\cap$, respectivamente. Por ejemplo $A \cap B$, denota la intersección entre los conjuntos A y B. La unión y la intersección sobre familias de conjuntos las denotamos por $\bigcup$ y $\bigcap$, respectivamente. Por ejemplo, $\bigcap \mathcal{A}$ denota la intersección sobre la familia $\mathcal{A}$. Denotamos al conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$, al conjunto de los números racionales por $\mathbb{Q}$ y al conjunto de números naturales por $\mathbb{N}$. El conjunto vacío es denotado por $\emptyset$.

Recordemos la definición de relación sobre un conjunto.

1.1 Definición. Una *relación* sobre un conjunto X es un subconjunto R del producto cartesiano $X \times X$.

Si R es una relación sobre un conjunto X la notación xRy significa $(x, y) \in R$ y se lee: x está relacionado con y bajo la relación R.

1.2 Definición. Sean X un conjunto y R una relación sobre X. Decimos que R es una *relación de equivalencia en* X si se satisfacen

1. Si $x \in X$, entonces xRx.

2. Si $x, y \in X$ son tales que xRy, entonces yRx.

3. Si $x, y, z \in X$ son tales que xRy y yRz, entonces xRz.

1.3 Definición. Sean X un conjunto y $\leq$ una relación sobre X. Decimos que $\leq$ es un *orden parcial en* X si cumple

1. Si $x \in X$, entonces $x \leq x$.

2. Si $x, y \in X$ son tales que $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

3. Si $x, y, z \in X$ son tales que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Decimos que X está *parcialmente ordenado* (o que X es un *conjunto ordenado*) si $\leq$ es un orden parcial en X. Un conjunto parcialmente ordenado con un orden parcial $\leq$ en X lo denotamos por $(X, \leq)$.

1.4 Definición. Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $a \in X$ y $A \subset X$. Decimos que a es una *cota superior de* A si $b \leq a$ para todo $b \in A$.

1.5 Definición. Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $a \in X$ y $A \subset X$. Decimos que a es un *elemento maximal de* A si $a \in A$ y $a \leq b$ implica que $a = b$ para todo $b \in A$.

1.6 Definición. Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $C \subset X$. Decimos que C es *una cadena* en X si para cualesquiera $a, b \in C$ se cumple $a \leq b$ o $b \leq a$.

A continuación mencionamos uno de los resultados más importantes dentro de la Teoría de Conjuntos, el Lema de Zorn. Cabe decir que este lema es una equivalencia del Axioma de Elección ([12, Pág. 56]). Hay una gran cantidad de ejemplos donde las demostraciones utilizan el Lema de Zorn. Mencionando algunos ejemplos: El Teorema de Extensión de Hahn-Banach, el Teorema de existencia de una base sobre un espacio vectorial. De hecho, en esta tesis con la ayuda del Lema de Zorn junto con la teoría de filtros demostramos el Teorema de Tychonoff.

1.7 Lema (Lema de Zorn)**.** Si X es un conjunto no vacío parcialmente ordenado, tal que toda cadena en X tiene una cota superior entonces X tiene un elemento maximal.

La demostración del Lema 1.7 se puede consultar en [10]. Además, en [12, Pág. 56] nos dan los pasos para mostrar que el Lema 1.7 es equivalente al Axioma de Elección.

1.2. Nociones generales de topología

Es importante recordar varias nociones y resultados de Topología, por lo cual en esta sección enunciamos las más importantes a utilizar en adelante. Así, tenemos nuestra primera definición.

1.8 Definición. Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $\tau \subset \mathbb{P}(X)$ es una *topología sobre* X si satisface:

1. $\emptyset, X \in \tau$.

2. Si $A_1, A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

3. Si $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Al par (X, τ) le llamamos *espacio topológico* y los elementos de τ les llamamos *conjuntos abiertos de* X. A lo largo de esta tesis en ocasiones escribimos: sea X un espacio topológico, entendiendo implícitamente que el conjunto X tiene asociado una topología τ.

No es difícil convencerse que los ejemplos siguientes son espacios topológicos.

1.9 Ejemplo. Sean X un conjunto no vacío y $\tau = \mathbb{P}(X)$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico, a τ le llamamos *la topología discreta* y a (X, τ) *espacio discreto.*

1.10 Ejemplo. Sean X un conjunto no vacío y $\tau = \{X, \emptyset\}$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico, a τ le llamamos *la topología indiscreta* y a (X, τ) *espacio indiscreto.*

1.11 Ejemplo. Sean $X = \{0, 1\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico. A este espacio le llamamos *el espacio de Sierpinski.*

Para el siguiente ejemplo de espacio topológico, recordemos que un conjunto X es un *conjunto finito* si existe una función biyectiva $f : X \to \{1, 2, ..., n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

1.12 Ejemplo. Sean X un conjunto no finito y $\tau = \{A \subset X \mid X - A \text{ es un conjunto finito }\}$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico, a τ le llamamos la *topología cofinita.*

Definimos a continuación la noción de subespacio topológico.

1.13 Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico y $Y \subset X$. Definimos la *topología relativa de* Y como $\tau' = \{A \cap Y \mid A \in \tau\}$. La pareja (Y, τ') es un espacio topológico. A Y le llamamos *subespacio de* X.

Ahora definimos la noción de vecindad de un punto. Cabe mencionar que en ocasiones esta definición de vecindad es distinta a la usada quizá en alguna otra literatura tal como en [6], en la cual se define a la vecindad de un punto como un conjunto abierto.

1.14 Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $V \subset X$ es una *vecindad de* x si existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset V$.

A la familia de vecindades de x la denotamos por $\mathcal{N}(x)$. Además, notemos que $\mathcal{N}(x) \subset \mathbb{P}(X)$ y por tanto, $\mathcal{N}(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(X))$

1.15 Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}(x)$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una *una base de vecindades de* x si para cada $U \in \mathcal{N}(x)$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset U$.

La proposición siguiente enumera algunas propiedades de las vecindades de un punto. La demostración no es difícil por lo cual se omite.

1.16 Proposición. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces se satisfacen:

1. Si $U \in \mathcal{N}(x)$ y $U \subset V$, entonces $V \in \mathcal{N}(x)$.

2. Si $U, V \in \mathcal{N}(x)$, entonces $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$.

3. Si $V \in \mathcal{N}(x)$, entonces $x \in V$.

4. Si $V \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V \in \mathcal{N}(y)$ para todo $y \in U$.

Otra forma de obtener una topología sobre un conjunto es la que nos garantiza el siguiente resultado, su demostración se puede consultar en [15] o [11].

1.17 Teorema. Sean X un conjunto y $\mathcal{V}$ una aplicación de X en $\mathbb{P}(\mathbb{P}(X))$ que satisface las condiciones (1)-(4) de la Proposición 1.16. Entonces existe una topología τ única sobre X, tal que para todo $x \in X$ tenemos $\mathcal{V}(x) = \mathcal{N}(x)$ en el espacio topológico (X, τ).

Una noción fundamental que nos ayuda a interpretar los elementos de una topología, es la de base de abiertos. Esta noción es útil porque nos facilita el uso de los conjuntos abiertos del espacio. Además cualquier conjunto abierto lo podemos identificar por medio de elementos de la base.

1.18 Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subset \tau$. Decimos que $\mathcal{B}$ es *base para* τ (o que es una base para los conjuntos abiertos de X) si todo elemento de τ se puede escribir como la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$.

A los elementos de una base de abiertos los llamamos básicos de abiertos. Cuando no hay confusión omitimos la palabra abiertos y decimos simplemente *básicos*.

1.19 Ejemplo. Recordando el Ejemplo 1.9, no es difícil demostrar que $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ es una base para la topología discreta.

1.20 Proposición. Sean X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}(X)$. Entonces $\mathcal{B}$ es base para alguna topología en X si

1. $X = \bigcup \mathcal{B}$.

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $b \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $b \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

1.21 Ejemplo. La familia $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base para alguna topología en $\mathbb{R}$.

1.22 Definición. La topología generada por $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ le llamamos la *topología usual de* $\mathbb{R}$.

Ahora damos la definición de lo que es un conjunto cerrado. Esta noción es útil debido a que en ocasiones resulta difícil trabajar con los conjuntos abiertos, así que los resultados podemos obtenerlos de una manera indirecta con el uso de los conjuntos cerrados. Además, muchos de los resultados de convergencia y separabilidad están en términos de los conjuntos cerrados.

1.23 Definición. Sean (X, τ) un espacio topológico y $B \subset X$. Decimos que B es un *conjunto cerrado en* X si $X - B \in \tau$.

1.24 Ejemplo. Sea (X, τ) un espacio topológico con τ la topología discreta (recordar Ejemplo 1.9). Si $A \subset X$ entonces A es cerrado en X.

1.25 Ejemplo. En el espacio de Sierpinski (ver Ejemplo 1.11), tenemos que los conjuntos $\emptyset, X, \{1\}$ son conjuntos cerrados en tal espacio X.

De manera similar a como se definen bases para los conjuntos abiertos (recordar Definición 1.18), podemos también definir lo que es una base para cerrados.

1.26 Definición. Sean X un conjunto y $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{C}$ es *base para los cerrados* para alguna topología en X si

1. Siempre que $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \cup C_2$ es una intersección de elementos de $\mathcal{C}$.

2. $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$.

Un ejemplo de la Definición 1.26 aparece en la Proposición 1.79, donde mostramos que los cero conjuntos son una base para cerrados en los espacios completamente regulares.

1.27 Definición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una familia de conjuntos cerrados de X. Decimos que $\mathcal{C}$ es una base para los conjuntos cerrados de X si cualquier conjunto cerrado en X se puede ver como la intersección de alguna subfamilia de $\mathcal{C}$.

La demostración de la siguiente proposición no es difícil de realizar por lo cual se omite.

1.28 Proposición. Sea X un espacio topológico. Entonces $\mathcal{C}$ es una base para los conjuntos cerrados de X si y sólo si la familia de los complementos de los elementos de $\mathcal{C}$ es una base para los conjuntos abiertos de X.

1.29 Definición. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Definimos y denotamos la *cerradura (o clausura)* de A por:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \subset X \mid A \subset B \text{ y } B \text{ es un conjunto cerrado en } X\}.$$

1.30 Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la topología usual (recordar Definición 1.22), si $A = (0,1)$ entonces $\overline{A} = [0,1]$.

La demostración de la siguiente proposición es fácil y se omite.

1.31 Proposición. Sean X un espacio topológico y $A_1, A_2 \subset X$. Entonces se cumple que

1. $A_1 \subset \overline{A_1}$.

2. Si $A_1 \subset A_2$, entonces $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

3. $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

Una caracterización de la cerradura de un conjunto con respecto a sus puntos es la siguiente.

1.32 Proposición. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si para toda $V \in \mathcal{N}(x)$ se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$.

1.33 Definición. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ no vacío y $x \in X$. Decimos que x es *punto de acumulación de* A si para toda $V \in \mathcal{N}(x)$, se tiene que $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

1.34 Ejemplo. En $\mathbb{R}$ bajo la topología usual, el subconjunto $A = [0,1)$ tiene al punto 1 como un punto de acumulación.

La Definición 1.33 nos facilita la descripción de la cerradura de un conjunto. Dado que en ocasiones resulta difícil encontrar la cerradura de un conjunto a partir de la definición (observar Definición 1.29).

1.35 Proposición. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y P el conjunto de puntos de acumulación de A. Entonces $\overline{A} = A \cup P$.

1.36 Definición. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Decimos que E es *denso* en X si $\overline{E} = X$.

No es difícil demostrar lo siguiente.

1.37 Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Para recordar algunos hechos de continuidad incluimos lo siguiente.

1.38 Definición. Sean X, Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f *es continua* en x si para toda $W \in \mathcal{N}(f(x))$, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $f(V) \subset W$. Decimos que f es continua en X si para todo $x \in X$ tenemos que f es continua en x.

No es difícil demostrar que se cumple lo siguiente.

1.39 Teorema. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces son equivalentes:

1. f es continua en X.
2. Para todo abierto V en Y, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.
3. Para todo cerrado F en Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

1.40 Definición. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Decimos que f es un *homeomorfismo* si f es continua y además la función f^{-1} es continua. Decimos que X es un espacio *homeomorfo* a Y si existe un homeomorfismo entre ellos, y escribimos $X \simeq Y$.

1.41 Ejemplo. El intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ es homeomorfo a $(0, 1)$ bajo el homeomorfismo dado por $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

Ahora, recordemos algunas nociones y resultados relacionados con los Axiomas de separación.

1.42 Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es un *espacio de Hausdorff* si para cada $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, existen $A_1, A_2 \in \tau$ tales que $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

1.43 Ejemplo. Sea X un espacio discreto (recordar Ejemplo 1.9) con al menos dos puntos. Entonces X es un espacio de Hausdorff, puesto que cada conjunto singular es abierto.

1.44 Ejemplo. A diferencia de los espacios discretos, los espacios indiscretos (ver Ejemplo 1.10) con más de un punto no pueden ser espacios de Hausdorff. El espacio de Sierpinski (recordar Ejemplo 1.11) no es Hausdorff.

1.45 Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *un espacio normal* si X es un espacio de Hausdorff y para cualesquiera F_1 y F_2 cerrados disjuntos existen abiertos A_1 y A_2 tales que $F_1 \subset A_1$, $F_2 \subset A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

1.46 Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *completamente regular* si X es un espacio de Hausdorff y si dados $x_0 \in X$ y $A \subset X$ cerrado no vacío con $x_0 \notin A$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.

1.47 Ejemplo. Sea X un espacio topológico bajo la topología discreta. Entonces X es un espacio completamente regular.

En [6, Pág. 153] se muestra por qué es cierto el Ejemplo 1.47. La siguiente es una consecuencia de que un espacio sea normal.

1.48 Proposición. Si X es un espacio normal, entonces X es un espacio completamente regular.

La prueba de la Proposición 1.48 se puede consultar en [6, Pág. 154].

El concepto de compacidad es muy importante en Matemáticas. A continuación recordamos este concepto y algunos hechos que usamos dentro de la tesis.

1.49 Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una *cubierta de* X si $X = \bigcup \mathcal{A}$. Cuando $\mathcal{A} \subset \tau$, a $\mathcal{A}$ le llamamos *cubierta abierta de* X.

1.50 Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *compacto* si para toda cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X, existe $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ finita tal que $X = \bigcup \mathcal{A}'$.

1.51 Ejemplo. Recordemos el Ejemplo 1.10. Entonces todo espacio bajo la topología indiscreta es compacto.

1.52 Teorema. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si f es continua y X compacto, entonces $f(X)$ es compacto.

La demostración del Teorema 1.52 se puede consultar en [26, Pág. 119]. También, del Teorema 1.52 podemos observar que si f es sobreyectiva entonces Y es compacto.

Recordemos la noción de espacio normal (Definición 1.45) para el siguiente resultado, cuya justificación se puede consultar en [26, Pág. 121].

1.53 Proposición. Si X es un espacio compacto y de Hausdorff, entonces X es un espacio normal.

El espacio producto es un aspecto teórico siempre presente en topología. Es comprensible que si una propiedad es válida sobre algunos espacios topológicos, surja de manera inmediata la interrogante sobre qué ocurre con el producto de estos espacios respecto a esta propiedad. Para estudiar estas interrogantes, es necesario saber cuál es la topología utilizada sobre el producto, entre otros aspectos.

1.54 Definición. Sean I un conjunto no vacío y $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. El *producto cartesiano* de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ es el conjunto de funciones $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ tal que para todo $i \in I$, $x(i) \in X_i$, es decir,

$$\prod_{i \in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i, \text{ para cada } i \in I\}.$$

De la Definición 1.54, representamos a cualquier elemento x de $\prod_{i \in I} X_i$ por $(x_i)_{i \in I}$, donde $x_i = x(i)$, para cada $i \in I$.

1.55 Definición. Sean I un conjunto no vacío y $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Para $j \in I$, definimos y denotamos la *función proyección asociada al índice* j por $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ tal que $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$.

Recordemos que si X es un conjunto y $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(X)$, entonces $\mathcal{S}$ es una *subbase para una topología en* X si la familia de intersecciones finitas de $\mathcal{S}$ es base para alguna topología en X.

1.56 Proposición. Sean I un conjunto no vacío, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, $\mathcal{S}_i = \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \tau_i\}$ y $\mathcal{S} = \cup_{i\in I}\mathcal{S}_i$. Entonces $\mathcal{S}$ es una subbase para una topología sobre $\prod_{i\in I} X_i$.

La demostración de la Proposición 1.56 aparece en cualquier libro usual de Topología general, en particular, el lector puede consultar [26] o [17].

1.57 Definición. Sean I un conjunto no vacío y $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. La topología $\tau_{\mathcal{S}}$ generada por $\mathcal{S}$ le llamamos la *topología producto*, y a $(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{\mathcal{S}})$ le llamamos *espacio producto*. Además, los elementos de la base generada por $\mathcal{S}$ son de la forma $\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap ... \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subset I$.

1.58 Teorema. Sean I un conjunto no vacío, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $j \in I$. La función proyección asociada a j, $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, es una función sobreyectiva y continua.

La demostración del Teorema 1.58 se puede consultar en [6].

Recordamos en esta parte los conceptos de espacios métricos, sucesiones, entre otras nociones. Los conceptos y resultados aquí expuestos son los fundamentos para hablar de convergencia en capítulos posteriores.

1.59 Definición. Un *espacio métrico* es un conjunto X, no vacío, dotado de una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que llamamos *métrica* tal que satisface las propiedades siguientes, para cualesquiera que sean los puntos $x, y, z \in X$:

1. $d(x, x) = 0$.
2. Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) > 0$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

No es difícil obtener la prueba del siguiente ejemplo.

1.60 Ejemplo. Sean $X = \mathbb{R}$ y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la función definida por $d(x, y) = |x-y|$. Entonces d es una métrica y X un espacio métrico.

1.61 Definición. Sean X un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Definimos y denotamos *la bola abierta con centro en a y radio r* por

$$B(a, r) = \{b \in X \mid d(a, b) < r\}.$$

1.62 Ejemplo. Del Ejemplo 1.60, si $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ entonces $B(x,r) = \{b \in \mathbb{R} \mid d(x,b) < r\} = (x-r, x+r)$.

La noción de sucesión, es un concepto bastante importante en Matemáticas. En particular, las sucesiones son el punto de partida para el desarrollo de conceptos tales como redes.

1.63 Definición. Sea X un espacio métrico. Una *sucesión en* X es una función x cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$. Es decir, $x : \mathbb{N} \to X$.

Ahora, si $x : \mathbb{N} \to X$ entonces denotamos a $x(n)$ por x_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, en general denotamos a las sucesiones de la forma $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

1.64 Definición. Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$, siempre que $n \geq N$ y $m \geq N$.

1.65 Ejemplo. Sean M el espacio métrico del Ejemplo 1.60 y $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en M.

Una prueba de la veracidad del Ejemplo 1.65 se puede ver en [1, Pág. 89].

1.3. Compactificación

La noción de compacidad es un tema matemático muy común y básico en Topología. En Topología y Análisis, la mayoría de las veces se trabaja sobre espacios no necesariamente compactos, y trabajar sobre estos espacios resulta difícil. Por lo cual se busca desarrollar o trasladar a espacios grandes las propiedades válidas sobre espacios más pequeños, en este sentido, a veces sobre espacios compactos como se menciona en [20]. Uno de los resultados universales más importantes de compacidad es la compactificación de un espacio. Este resultado tiene aplicaciones en numerosos campos de las matemáticas, por mencionar algunos, en la Teoría de Ramsey y en la Topología de Sistemas Dinámicos. Uno los primeros ejemplos de compactificación se remonta a 1858 con Bernhard Riemann, que con su conocida esfera de Riemann, dio el primer ejemplo de compactificación, a saber, la esfera de Riemann, que es la compactificación en un punto del plano complejo $\mathbb{C}$. La compactificación dada por Riemann intriga de buena manera a matemáticos y físicos, dado que problemas en $\mathbb{C}$ son reformulados en una esfera en el espacio $\mathbb{R}^3$(ver [5]).

1.66 Notación. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y consideremos a $Z = f(X)$ como subespacio de Y. Entonces definimos y denotamos por $f^* : X \to Z$ a la función dada por $f^*(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Cabe observar que f^* es una función sobreyectiva.

1.67 Definición. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Si f^* es un homeomorfismo, entonces decimos que f es un *encaje topológico*, o simplemente un *encaje* de X en Y.

En [17, Pág. 106] aparece de forma detallada la explicación del siguiente ejemplo.

1.68 Ejemplo. Sean $X = (-1, 1)$ y $Y = \mathbb{R}$. Entonces $f : X \to Y$ definida como $f(x) = 3x + 1$, para todo $x \in X$, es un encaje de X en Y.

1.69 Definición. Sea X un espacio topológico. Una *compactificación del espacio* X es un par ordenado (K, h), donde K es un espacio de Hausdorff compacto tal que h es un encaje de X en K y $h(X)$ es denso en K.

Es frecuente identificar a X con $h(X)$. Se tiene que sólo los espacios completamente regulares pueden ser compactificados, dado que un subconjunto de un espacio compacto de Hausdorff es necesariamente completamente regular (ver [6]).

Hay muchos ejemplos de compactificaciones, mencionando algunos:

1.70 Ejemplo. Si $X = [0, 1)$ y $Y = [0, 1]$, entonces Y es una compactificación de X. En efecto, sea $f : X \to Y$ la función dada por $f(x) = x$. Es fácil ver que f^* (recordar Notación 1.66) es una función continua y además que $(f^*)^{-1}$ es continua. Luego, f^* es un homeomorfismo. Para tener que $\overline{f(X)} = Y$, sólo falta ver que 1 es punto de acumulación de X. Recordando el ejemplo 1.34, obtenemos que 1 es un punto de acumulación de $f(X)$.

1.71 Ejemplo. Si $X = \mathbb{R}^2$ y $Y = \mathbf{S}^2$, donde $\mathbf{S}^2$ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, entonces Y es una compactificación de X. En este caso, basta considerar la proyección estereográfica (ver [11, Pág. 236]), para demostrar que en efecto Y es una compactificación de X. En [11, Pág. 400] se encuentran los detalles de este ejemplo.

Observemos que en el Ejemplo 1.70 la compactificación del espacio X resulta ser el mismo espacio unión un punto ajeno del espacio. Con la misma idea y con una construcción de vecindades especiales para un punto ajeno, para espacios arbitrarios localmente compactos (recordando que un espacio localmente compacto es un espacio en el cual todo punto tiene una vecindad compacta) y Hausdorff podemos obtener una compactificación, añadiendo al espacio un elemento no existente en él, o lo que es conocido como compactificación de Alexandroff (para una información más amplia podemos consultar [11]).

Dentro de los estudios hechos por John Von Neumann en Mecánica cuántica, sobresale que Von Neumann trabajó sobre el anillo de las funciones continuas y acotadas. Intentando fundamentar una axiomática sobre Mecánica cuántica, Von Neumann estaba interesado en la noción de una compactificación maximal para un espacio. Para llegar a tal resultado, de manera indirecta, se plantea el siguiente problema: *¿Si Y es una compactificación de X bajo qué condiciones una función continua de valores reales sobre X se puede extender a Y?*
Según [5], en 1937, Marshall H. Stone y Edmund Čech, de forma independiente, establecieron

respuestas para esta pregunta, usando resultados de C^*-álgebras. La solución a esta pregunta es lo que se conoce como Compactificación de Stone-Čech.

1.72 Teorema. Sea X un espacio topológico completamente regular. Entonces existe un espacio compacto y de Hausdorff βX y un encaje $\rho_X : X \to \beta X$ tal que $\beta X = \overline{\rho_X(X)}$.

Al espacio βX anterior se le conoce como la *compactificación de Stone-Čech de X*. Según en [5], fue Marshall Stone quien demostró por primera vez el Teorema 1.72, el cual es conocido en la literatura como el Teorema de existencia de la compactificación de Stone-Čech. La demostración la podemos consultar en [25] o [26]

1.73 Teorema. Sean X un espacio completamente regular, K un espacio compacto y Hausdorff y $\rho : X \to K$ una función continua. Si βX es la compactificación de Stone-Čech de X, entonces existe una única función continua $\psi : \beta X \to K$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"'] \arrow[d, "\rho_X"] & K \\ \beta X \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\rho = \psi \circ \rho_X$. Además, si X^* es otra compactificación de X que satisface lo anterior, entonces $\beta X \simeq X^*$.

El Teorema 1.73, se conoce como el Teorema de unicidad de la compactificación de Stone-Čech. Fue demostrado de manera independiente por Stone y Čech. La prueba se puede consultar en [25, Pág. 10] o [5].
Textos como [7] o [26] dan un orden a la familia de compactificaciones de un espacio completamente regular. Dado el orden sobre dicha familia, la compactificación de Stone-Čech resulta ser la compactificación más grande de esta familia y la única que satisface el Teorema 1.73. De hecho, la propiedad de extensión dada por el Teorema 1.73 es la principal utilidad de la compactificación de Stone-Čech. Si el lector gusta más información detallada acerca de lo anterior puede consultar en [11], [25] o [26].

1.4. Cero conjuntos

Ahora, definiremos un tipo especial de conjuntos sobre un espacio topológico. Usamos [9] y [26] como los textos principales en el estudio de estos temas.

1.74 Definición. Sean X un espacio topológico y $Z \subset X$. Decimos que Z es un *cero conjunto en X* si existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = Z$.

De la Definición 1.74, se sigue de forma inmediata la siguiente proposición.

1.75 Proposición. Sea X un espacio topológico. Entonces $\emptyset$ y X son cero conjuntos en X.

Para la demostración de las propiedades de cero conjuntos es importante recordar la definición de convergencia uniforme para series de funciones (se puede consultar [1, Pág. 271]).

1.76 Proposición. Sea X un espacio topológico. Entonces se cumple

1. Si $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de cero conjuntos, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} Z_i$ es un cero conjunto en X.

2. Sean Z_1, Z_2 cero conjuntos en X. Entonces $Z_1 \cup Z_2$ es un cero conjunto en X.

Demostración.

1. Sea $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de cero conjuntos. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $f_i : X \to [0,1]$ continua tal que $f_i^{-1}(\{0\}) = Z_i$.
   Para cada $x \in X$, sea $g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{f_n(x)}{2^n}$, $k = 1, 2, \ldots$. Dado que para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i(x) \leq 1$, $\frac{f_i(x)}{2^i} \leq \frac{1}{2^i}$. Por la prueba M de Wierstrass ([1, Pág. 223])
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$$
   converge uniformemente en X, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Definamos $g : X \to [0,1]$ por
   $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}.$$
   Recordando que la suma finita de funciones continuas es continua. Tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, g_k es continua. Luego g es continua (ver Teorema 9.2 en [1, Pág. 221]). Veamos ahora que $g^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$. Mostramos que $g^{-1}(\{0\}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$. Sea $x \in g^{-1}(\{0\})$, luego
   $$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}.$$
   Dado que todos los términos de la serie son mayores o iguales a cero entonces se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f_n(x) = 0$. Es decir, $x \in f_n^{-1}(\{0\})$, y así $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$. Ahora mostramos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \subset g^{-1}(\{0\})$. Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$. Luego, para toda $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$. Por tanto,
   $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n} = 0.$$
   Así $x \in g^{-1}(\{0\})$.

2. Sean Z_1, Z_2 cero conjuntos en X. Existen $f_1 : X \to [0,1]$ y $f_2 : X \to [0,1]$ continuas tales que $f_1^{-1}(\{0\}) = Z_1$ y $f_2^{-1}(\{0\}) = Z_2$. Sea $f : X \to [0,1]$ definida por $f(x) = f_1(x) f_2(x)$. Tenemos que f es continua dado que f_1 y f_2 lo son. Tenemos que $f^{-1}(\{0\}) = Z_1 \cup Z_2$. En efecto, Sea $x \in f^{-1}(\{0\})$. Luego $f(x) = 0$; es decir, $f_1(x) f_2(x) = 0$. Así, o bien $f_1(x) = 0$

o bien $f_2(x) = 0$. En cualquier caso $x \in Z_1 \cup Z_2$. Recíprocamente, sea $x \in Z_1 \cup Z_2$. Luego, o bien $x \in Z_1$ o bien $x \in Z_2$. Así, o $f_1(x) = 0$ o $f_2(x) = 0$. Por tanto, $f(x) = f_1(x)f_2(x) = 0$. Luego, $x \in f^{-1}(\{0\})$.

Así, la Proposición 1.76 queda demostrada. □

La proposición siguiente refiere a una propiedad importante de cualquier cero conjunto.

1.77 Proposición. Sea X un espacio topológico. Si $Z \subset X$ es un cero conjunto, entonces Z es cerrado en X.

Demostración. Sea Z un cero conjunto en X. Entonces $Z = f^{-1}(\{0\})$, para alguna función continua $f : X \to [0,1]$. Dada la continuidad de f y el hecho de que $\{0\}$ es cerrado en $[0,1]$, Z es cerrado en X. □

La siguiente es una propiedad de los cero conjuntos y una función continua.

1.78 Proposición. Sean X y Y espacios topológicos, Z un cero conjunto en Y y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f^{-1}(Z)$ es un cero conjunto en X.

Demostración. Al ser Z un cero conjunto en Y, existe una función continua $g : Y \to [0,1]$ tal que $g^{-1}(\{0\}) = Z$. Considerando la función $g \circ f$, tenemos que $(g \circ f)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(Z)$. Por tanto, $f^{-1}(Z)$ es un cero conjunto en X. □

Para el siguiente resultado recordemos la Definición 1.27. Este resultado es bastante útil, pues restringe el uso de los conjuntos cerrados de un espacio completamente regular a solamente la utilización de los cero conjuntos del espacio.

1.79 Proposición. Sea (X, τ) un espacio completamente regular. La familia $\{Z \subset X : Z$ es cero conjunto$\}$ es base para los cerrados de la topología τ.

Demostración. Para esta proposición basta verificar que $\{X - Z : Z$ es un cero conjunto en $X\}$ es base para τ (ver Proposición 1.28). Por la Proposición 1.77, $X - Z$ es abierto en X. Luego $\{X - Z : Z$ es cero conjunto$\} \subset \tau$. Ahora, sea $A \in \tau$, y $a \in A$ por demostrar que existe un cero conjunto Z tal que $a \in X - Z \subset A$. Como A es abierto, $X - A$ es cerrado. Además, $a \notin X - A$. Dado que X es completamente regular, por la Definición 1.46, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(a) = 1$ y $X - A \subset f^{-1}(\{0\})$. Sea $Z = f^{-1}(\{0\})$. Se tiene que Z es un cero conjunto y $a \notin Z$. Así, $a \in X - Z$. Queda ver que $X - Z \subset A$. Si $X - Z \not\subset A$, entonces existe $y \in X - Z$ tal que $y \notin A$. Como $y \in X - Z$ y $Z = f^{-1}(\{0\})$, $f(y) \neq 0$. Ahora, si $y \notin A$ entonces $y \in X - A$, pero $X - A \subset f^{-1}(\{0\})$, es decir, $f(y) = 0$ lo cual contradice que $f(y) \neq 0$. Así, $X - Z \subset A$. Con todo, $\{Z \subset X : Z$ es un cero conjunto en $X\}$ es base para los cerrados de la topología τ. □

Aclaramos que otros conceptos no enunciados en este capítulo y que se necesitan en la tesis son descritos en el momento previo de su uso.

Capítulo 2

Filtros

2.1. Filtros

Podemos pensar que la idea de filtro parte de tener una familia arbitraria con la propiedad de la intersección finita (ver Definición 2.10) y de ir añadiendo las intersecciones finitas de los elementos de esta familia, así como sus superconjuntos. Por otro lado, la idea topológica de filtro viene de querer tener familias de conjuntos que cumplan con propiedades análogas a las propiedades de la familia de vecindades de un punto. La definición de filtro que manejamos en esta tesis es la dada por Cartan ([12] y [14]). Cabe mencionar que no es la única manera de definir filtros, esto debido a su dualidad con los ideales, por lo cual podemos tener una definición alterna a la siguiente basándonos en los ideales, como lo muestra [2, Pág. 11].

2.1 Definición. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un *filtro sobre* X si:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $G \subset X$ y $F \subset G$ para algún $F \in \mathcal{F}$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

2.2 Observación. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre algún conjunto X, de la propiedad 3 de la definición de filtro, obtenemos que $X \in \mathcal{F}$.

Ahora veamos los ejemplos siguientes.

2.3 Ejemplo. Sea X un conjunto. Entonces $\mathcal{F} = \{X\}$ es un filtro sobre X, llamado el *filtro trivial (o filtro indiscreto)* sobre X.

Recordemos que un conjunto X es un *conjunto contable (numerable)* si existe una función biyectiva $f : X \to \mathbb{N}$ o si X es finito. Podemos verificar las propiedades de los conjuntos numerables o finitos que utilizamos en los Ejemplos 2.4 y 2.5 en [10].

2.4 Ejemplo. Sea X un conjunto no finito. Entonces $\mathcal{F}_{cof} = \{F \subset X \mid X - F \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre X, que se le conoce como *el filtro cofinito.*
En efecto:

1. Como $X - X = \emptyset$ es finito, $X \in \mathcal{F}_{cof}$, y así $\mathcal{F}_{cof} \neq \emptyset$. Además, $\emptyset \notin \mathcal{F}_{cof}$, puesto que $X - \emptyset = X$ no es finito.

2. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{cof}$. Tenemos que

$$X - (F_1 \cap F_2) = (X - F_1) \cup (X - F_2).$$

   Como $X - F_1$ y $X - F_2$ son finitos, su unión también lo es, y así $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{cof}$.

3. Sea $G \subset X$ tal que $F \subset G$ para algún $F \in \mathcal{F}_{cof}$. Entonces $X - G \subset X - F$. Como $X - F$ es finito, $X - G$ es finito. Por tanto $G \in \mathcal{F}_{cof}$.

2.5 Ejemplo. Sea X un conjunto no contable. Entonces $\mathcal{F}_{coc} = \{F \subset X \mid X - F \text{ es contable }\}$ es un filtro sobre X y se llama *filtro cocontable.*
En efecto,

1. $\mathcal{F}_{coc} \neq \emptyset$ dado que $X \in \mathcal{F}_{coc}$ pues $X - X = \emptyset$. También $\emptyset \notin \mathcal{F}_{coc}$, pues en caso contrario tendríamos que $X - \emptyset$ sería contable.

2. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{coc}$. Tenemos que $X - (F_1 \cap F_2) = (X - F_1) \cup (X - F_2)$ y dado que la unión finita de conjuntos contables sigue siendo contable, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{coc}$.

3. Sean $F \in \mathcal{F}_{coc}$ y $G \subset X$ tal que $F \subset G$. Tenemos que $X - F$ es contable. Dado que $X - G \subset X - F$, entonces $X - G$ es contable, así $G \in \mathcal{F}_{coc}$.

2.6 Ejemplo. Sean X un conjunto y $A \subset X$ no vacío. Entonces $\mathcal{F}_A = \{F \subset X \mid A \subset F\}$ es un filtro sobre X. A tal filtro $\mathcal{F}_A$ le denominamos *filtro principal de A sobre X.*
En efecto:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$, puesto que $A \in \mathcal{F}$. Además, $\emptyset \notin \mathcal{F}$, por el hecho que $A \not\subset \emptyset$.

2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $A \subset F_1$ y $A \subset F_2$. Luego $A \subset F_1 \cap F_2$. Por tanto $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

3. Sea $G \subset X$ tal que $F \subset G$ para algún $F \in \mathcal{F}$. Tenemos que $A \subset F \subset G$ y por tanto $G \in \mathcal{F}$.

Para el caso de que $A = \{x\}$ entonces al filtro principal sobre A lo denotamos simplemente como $\mathcal{F}_x$.

Dado que la idea de filtro viene inspirada en la familia de vecindades de un punto (ver Definición 1.14), no podemos dejar de mencionar que la familia de vecindades de un punto es un filtro.

2.7 Ejemplo. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces $\mathcal{N}(x) = \{F \subset X \mid F \text{ es vecindad de } x\}$ es un filtro sobre X, y se llama *filtro de vecindades de x*.

2.8 Ejemplo. El conjunto potencia de un conjunto X, $\mathbb{P}(X)$ no es filtro sobre X, dado que no se cumple la propiedad 1 de la Definición 2.1 pues $\emptyset \in \mathbb{P}(X)$.

2.9 Observación. Sea X un conjunto. Del Ejemplo 2.8 tenemos que $\mathbb{P}(X)$ no es un filtro. Ahora, analicemos $\mathbb{P}(X) - \{\emptyset\}$. Claramente, si X es vacío, entonces $\mathbb{P}(X) - \{\emptyset\} = \emptyset$ no es filtro. Supongamos $X \neq \emptyset$. Si X tiene a lo menos dos elementos, entonces existen $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Tenemos que $\{x\} \in \mathbb{P}(X) - \{\emptyset\}$ y $\{y\} \in \mathbb{P}(X) - \{\emptyset\}$. Pero, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$. Luego, $\mathbb{P}(X) - \{\emptyset\}$ no cumple con la propiedad (2) de la Definición 2.1. Por tanto, $\mathbb{P}(X) - \{\emptyset\}$ no es un filtro. Finalmente, si X tiene exactamente un elemento, entonces $\mathbb{P}(X) - \{\emptyset\} = \{X\}$. Así, $\mathbb{P}(X) - \{\emptyset\}$ es el filtro trivial sobre X.

Un concepto conjuntista muy importante en la Topología es el que a continuación recordamos.

2.10 Definición. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad de la intersección finita*, si para cada subcolección finita $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{A}' \neq \emptyset$.

El siguiente resultado se sigue de la propiedad 2 de la Definición 2.1.

2.11 Teorema. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

De los Ejemplos 2.3 y 2.4 podemos ver una semejanza entre estos tipos de filtros y las topologías indiscreta (ver Ejemplo 1.10) y cofinita (ver Ejemplo 1.12), respectivamente. De lo anterior nos podemos preguntar si un filtro pueda inducir una topología sobre algún conjunto. La respuesta es afirmativa y la tenemos en el siguiente teorema.

2.12 Teorema. Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Si $\tau = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$, entonces τ es una topología sobre X.

Demostración. Veamos que τ cumple las condiciones para ser una topología (ver Definición 1.8).

1. Claramente $\emptyset \in \tau$. Como X está contenido en todo filtro sobre X, por la Observación 2.2, tenemos que $X \in \mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F} \subset \tau$, $X \in \tau$.

2. Sean $F_1, F_2 \in \tau$ arbitrarios. Si $F_1 = \emptyset$ o $F_2 = \emptyset$, entonces $F_1 \cap F_2 = \emptyset \in \tau$. Ahora, si $F_1 \neq \emptyset \neq F_2$, entonces $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Se sigue que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \subset \tau$, $F_1 \cap F_2 \in \tau$.

3. Sea $\mathcal{A} \subset \tau$. Si $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$. Así, supongamos que $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$. Luego existe $F \in \tau$ tal que $F \in \mathcal{A}$ y $F \neq \emptyset$. Así, tenemos que $F \in \mathcal{F}$. De donde, $F \subset \bigcup \mathcal{A}$. Dado que $\mathcal{F}$ es filtro obtenemos que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{F}$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Con esto, el teorema queda demostrado. □

Así, del Teorema 2.12, tenemos de forma inmediata que añadiendo el conjunto vacío a los filtros en Ejemplos 2.3 y 2.4, obtenemos la topología trivial y la topología cofinita, respectivamente. Otra observación es que por cada filtro sobre algún conjunto X, tenemos una topología inducida por este filtro. Respondiendo a la pregunta de [11, Pág. 130] sobre quien es $\mathcal{N}(x)$ para cualquier $x \in X$, tenemos que si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, $x \in X$ y τ la topología inducida por $\mathcal{F}$ entonces $\mathcal{N}(x) = \mathcal{F}_x$. También cabe preguntarse si toda topología puede ser inducida por un filtro. La respuesta es negativa, pues considerando la topología discreta obtenemos que no existe filtro del cual se obtenga esta topología. Así, queda observar que el total de filtros posibles sobre un conjunto es menor que el total de topologías sobre dicho conjunto.

Tenemos que por lo general una unión de filtros no es necesariamente un filtro (puesto que puede que el conjunto vacío quede como elemento de la unión), el siguiente ejemplo no ilustra esto.

2.13 Ejemplo. Sea X un conjunto no vacío con al menos dos elementos y $A \subset X$ tal que $A \neq X$. Si $B = X - A$, por el Ejemplo 2.6, $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{F}_B$ son filtros. Sin embargo, $\mathcal{F}_A \bigcup \mathcal{F}_B$ no es un filtro. En efecto, tenemos que $A \in \mathcal{F}_A$ y $B \in \mathcal{F}_B$. Pero, $A \cap B = \emptyset$. Luego, $\mathcal{F}_A \bigcup \mathcal{F}_B$ no cumple con la propiedad (2) de la Definición 2.1.

La siguiente proposición muestra una condición bajo la cual la unión de una familia de filtros es un filtro.

2.14 Proposición. Sean X un conjunto y $\mathfrak{A}$ una familia de filtros sobre X. Si para cualesquiera $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{A}$ tenemos que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$, entonces $\bigcup \mathfrak{A}$ es un filtro.

Demostración. Veamos que $\bigcup \mathfrak{A}$ es un filtro.

1. Puesto que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ para toda $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$, $\bigcup \mathfrak{A} \neq \emptyset$. Es claro que $\emptyset \notin \bigcup \mathfrak{A}$.

2. Sean $F_1, F_2 \in \bigcup \mathfrak{A}$. Entonces existen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{A}$ tales que $F_1 \in \mathcal{F}_1$ y $F_2 \in \mathcal{F}_2$. Por hipótesis
$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \qquad \text{o} \qquad \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1.$$
Podemos suponer que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Con ello tenemos que $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_2$ y dado que $\mathcal{F}_2$ es un filtro obtenemos que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_2$ y por tanto $F_1 \cap F_2 \in \bigcup \mathfrak{A}$. Para el otro caso obtenemos la misma conclusión.

3. Sean $F \in \bigcup \mathfrak{A}$ y $F \subset G \subset X$. Tenemos que existe $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$ tal que $F \in \mathcal{F}$. Luego, por ser $\mathcal{F}$ un filtro obtenemos que $G \in \mathcal{F}$. Así, $G \in \bigcup \mathfrak{A}$.

Así, la Proposición 2.14 queda demostrada. $\square$

Al no siempre ser la unión de filtros un filtro, la proposición siguiente nos permite obtener un filtro a partir de las uniones finitas de elementos de dos filtros.

2.15 Proposición. Sean X un conjunto y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ filtros sobre X. Entonces $\mathcal{F} \cup_* \mathcal{G} = \{F \cup G \mid F \in \mathcal{F} \text{ y } G \in \mathcal{G}\}$ es un filtro sobre X.

Demostración.

1. $\mathcal{F} \cup_* \mathcal{G} \neq \emptyset$, puesto que $\mathcal{F} \neq \emptyset \neq \mathcal{G}$. Además, $\emptyset \notin \mathcal{F} \cup_* \mathcal{G}$, dado que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{G}$.

2. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{F} \cup_* \mathcal{G}$. Luego, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, tales que $U_1 = F_1 \cup G_1$ y $U_2 = F_2 \cup G_2$. Entonces

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= (F_1 \cup G_1) \cap (F_2 \cup G_2) \\ &= \big((F_1 \cup G_1) \cap F_2\big) \cup \big((F_1 \cup G_1) \cap G_2\big) \\ &= \big((F_1 \cap F_2) \cup (G_1 \cap F_2)\big) \cup \big((F_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_2)\big). \end{aligned}$$

   Como $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ y $F_1 \cap F_2 \subset (F_1 \cap F_2) \cup (G_1 \cap F_2)$, por ser $\mathcal{F}$ filtro tenemos que $(F_1 \cap F_2) \cup (G_1 \cap F_2) \in \mathcal{F}$. De manera similar, como $\mathcal{G}$ es filtro obtenemos que $(F_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_2) \in \mathcal{G}$. Así, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F} \cup_* \mathcal{G}$.

3. Sean $A \subset X$ y $U \in \mathcal{F} \cup_* \mathcal{G}$ tales que $U \subset A$. Tenemos que $U = F \cup G$ para algunos $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Entonces se cumple lo siguiente:

$$F \subset F \cup G = U \subset A$$

   y

$$G \subset F \cup G = U \subset A.$$

   Por tanto $F \subset A$ y $G \subset A$. Como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros, $A \in \mathcal{F}$ y $A \in \mathcal{G}$. Así $A = A \cup A \in \mathcal{F} \cup_* \mathcal{G}$.

Así, la proposición queda demostrada. $\square$

Tal como sucede con las topologías sobre un conjunto, acerca del hecho de que la intersección de una familia arbitraria de topologías sigue siendo una topología, de manera similar la intersección de una familia arbitraria de filtros es un filtro.

2.16 Teorema. Sean X un conjunto y $\mathfrak{A}$ una familia de filtros sobre X, entonces $\bigcap \mathfrak{A}$ es un filtro sobre X.

Demostración. Veamos que $\bigcap \mathfrak{A}$ es un filtro sobre X.

1. $\emptyset \notin \bigcap \mathfrak{A}$ puesto que $\emptyset \notin \mathcal{F}$, para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$. Además, $\bigcap \mathfrak{A} \neq \emptyset$ puesto que $X \in \mathcal{F}$ para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$.

2. Sean $F_1, F_2 \in \bigcap \mathfrak{A}$. Entonces para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$ tenemos que $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es filtro, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$. Es decir, $F_1 \cap F_2 \in \bigcap \mathfrak{A}$.

3. Sea $F \in \bigcap \mathfrak{A}$ y $G \subset X$ tal que $F \subset G$. Para todo filtro $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$, tenemos que $F \in \mathcal{F}$. Al tener $F \subset G$, se sigue para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}$, $G \in \mathcal{F}$. Por tanto $G \in \bigcap \mathfrak{A}$.

Con todo, el Teorema 2.16 queda demostrado. □

Es práctico el análisis de la intersección sobre un filtro, puesto que de ello podemos deducir propiedades o características del filtro en general. En ocasiones somos capaces de saber de qué tipo de filtro hablamos. Es por ello que enunciamos los siguientes resultados no sin antes dar una definición apropiada para clarificar y facilitar los cálculos algebraicos que tengamos que realizar.

2.17 Definición. Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Definimos y denotamos a *core de* $\mathcal{F}$ por

$$core(\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

2.18 Proposición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ filtros sobre X. Entonces se cumplen las propiedades siguientes:

1. $\mathcal{F}$ es el filtro indiscreto si y sólo si $core(\mathcal{F}) = X$.

2. Sea $A \subset X$ no vacío. Entonces $core(\mathcal{F}_A) = A$.

3. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ entonces $core(\mathcal{F}) \supset core(\mathcal{G})$.

4. $y \in core(\mathcal{N}(x))$ si y sólo si $x \in \overline{\{y\}}$.

Demostración.

1. Si $\mathcal{F}$ es el filtro indiscreto, entonces $\mathcal{F} = \{X\}$ (vea Ejemplo 2.3), así $core(\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = X$. Recíprocamente, si $core(\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = X$, entonces para todo $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $X \subset F$. Dado que $F \subset X$ para todo $F \in \mathcal{F}$, obtenemos que $F = X$ para todo $F \in \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} = \{X\}$.

2. Sea $A \subset X$ no vacío. Para todo $F \in \mathcal{F}_A$, tenemos que $A \subset F$ (recordar Ejemplo 2.6). Así $A \subset \bigcap \mathcal{F}_A$. Ahora, dado que $A \in \mathcal{F}_A$, obtenemos que $A \supset \bigcap \mathcal{F}_A$. Por tanto $A = \bigcap \mathcal{F}_A = core(\mathcal{F}_A)$.

3. Tenemos que
$$core(\mathcal{G}) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \subset F$$
para cada $F \in \mathcal{F}$, pues $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Así,
$$core(\mathcal{G}) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = core(\mathcal{F}).$$

4. $y \in core(\mathcal{N}(x))$ si y sólo si $y \in \bigcap \mathcal{N}(x)$. Es decir, para todo $V \in \mathcal{N}(x)$ tenemos $y \in V$, y esto, si y sólo si $V \cap \{y\} \neq \emptyset$, lo que quiere decir, $x \in \overline{\{y\}}$.

Así, la Proposición 2.18 queda demostrada. □

2.19 Observación. El recíproco de la Proposición 2.18-(2) en general no es cierto. Esto es, si $core(\mathcal{F}) = A$ no necesariamente tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$. Por ejemplo, consideremos en $\mathbb{R}$ a $A = (0, 1)$. No es difícil mostrar que $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} \mid A \subset F \text{ y } F \neq A\}$ es un filtro; además podemos notar que $\mathcal{F}_A \neq \mathcal{F}$ puesto que $A \in \mathcal{F}_A$ y $A \notin \mathcal{F}$. Además, $core(\mathcal{F}) = A$.

A continuación enunciamos una definición que tiene una importancia notable en secciones posteriores.

2.20 Definición. Sea X un conjunto. Decimos que un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es *primo*, si para $P_1, P_2 \subset X$ tales que $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{F}$ tenemos que $P_1 \in \mathcal{F}$ o $P_2 \in \mathcal{F}$.

2.21 Ejemplo. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces $\mathcal{F}_x$ (recordar Ejemplo 2.6) es un filtro primo. En efecto, sean $P_1, P_2 \subset X$ tales que $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{F}_x$. Por la definición de $\mathcal{F}_x$, $x \in P_1 \cup P_2$. Se sigue que $x \in P_1$ o $x \in P_2$. Por tanto, $P_1 \in \mathcal{F}_x$ o $P_2 \in \mathcal{F}_x$.

2.22 Ejemplo. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Si A tiene al menos dos elementos, entonces $\mathcal{F}_A$ no es un filtro primo.

2.2. Bases de filtros

Recordemos que cuando analizamos espacios tópologicos y sus propiedades, restringimos el estudio de los conjuntos abiertos al estudio de sus bases. Estos análisis facilitan en gran medida la obtención de resultados, puesto que si alguna propiedad se cumple para los elementos de una base de una topología entonces ésta se puede extender a todos los elementos de la topología. Para el caso de los filtros sobre un espacio topológico, surge un aspecto similar, lo que llamamos bases de filtros, que de manera análoga a las bases de una topología, permiten trabajar sobre un determinado subconjunto del filtro para después extender los resultados al filtro. Otro hecho importante es el que muchos filtros son definidos a partir de bases de filtro. Así, tenemos la siguiente definición.

2.23 Definición. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{B}$ es *base de filtro sobre* X si:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

De las propiedades (1) y (2) de un filtro (recordar Definición 2.1), tenemos de manera inmediata que un filtro, en particular, es una base de filtro.

2.24 Ejemplo. Sea X un conjunto. Entonces todo filtro sobre X es una base de filtro sobre X.

Dada una base de filtro $\mathcal{B}$ sobre X, no es difícil demostrar que la familia

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \{F \subset X \mid \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } B \subset F\}$$

es un filtro sobre X. A este filtro le llamamos el *filtro generado por la base* $\mathcal{B}$. Además, tenemos que si $\mathcal{F}$ es otro filtro tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$. Con esto podemos concluir que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es el filtro más pequeño (con la relación de orden dada por la inclusión) que contiene a $\mathcal{B}$.

2.25 Ejemplo. Consideremos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y $\mathcal{C} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una base de filtro sobre $\mathbb{R}$.
En efecto:

1. Como $\mathbb{R} \neq \emptyset$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Dado que $(a, \infty) \neq \emptyset$ para toda $a \in \mathbb{R}$, $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

2. Sean $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Tenemos que $C_1 = (a, \infty)$ y $C_2 = (b, \infty)$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$. Luego
   Si $a \leq b$ entonces $(a, \infty) \cap (b, \infty) = (b, \infty) \in \mathcal{C}$.
   Si $a > b$ entonces $(a, \infty) \cap (b, \infty) = (a, \infty) \in \mathcal{C}$.

Al filtro generado por $\mathcal{C}$ se le conoce como *filtro de Fréchet*.

2.26 Definición. Sea X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, decimos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ es una *base de filtro para* $\mathcal{F}$ si para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$.

Sea X un conjunto. Notemos que si $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}(X)$ satisface la Definición 2.23, entonces $\mathcal{B}$ cumple la Definición 2.26 para el filtro $\mathcal{F}(\mathcal{B})$. Ahora, si $\mathcal{B}$ es base de filtro para algún filtro $\mathcal{F}$ sobre X, entonces $\mathcal{B}$ es base de filtro en X y $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Esto último, garantiza la consistencia entre ambas definiciones.

2.27 Definición. Sean X un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ no vacío. Decimos que $\mathcal{S}$ es una *subbase de filtro para* $\mathcal{F}$ si la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base de filtro para $\mathcal{F}$.

Recordemos que $\overline{F}$ denota la cerradura de F.

2.28 Proposición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. La familia $\mathcal{B} = \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$, es una base de filtro. Denotamos a $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ por $\overline{\mathcal{F}}$, y se tiene que $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$.

Demostración. Veamos que en efecto, $\mathcal{B}$ es una base de filtro.

1. Dado que, para todo $F \in \mathcal{F}$, tenemos que $\emptyset \neq F$, entonces para todo $F \in \mathcal{F}$, $\overline{F} \neq \emptyset$. Esto es $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Además, como $\mathcal{F} \neq \emptyset$ se sigue que $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

2. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. De la Proposición 1.31- (1) y (3), $F_1 \cap F_2 \subset \overline{F_1 \cap F_2}$ y $\overline{F_1 \cap F_2} \subset \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$. Luego, puesto que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, tenemos que $\overline{F_1 \cap F_2} \in \mathcal{B}$.

Ahora, queda demostrar que $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$. Sea $G \in \overline{\mathcal{F}}$. Entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\overline{F} \subset G$. Dado que $F \subset \overline{F}$ (ver Proposición 1.31-(1)) tenemos ahora $F \subset G$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro y $F \in \mathcal{F}$ podemos concluir que $G \in \mathcal{F}$. Puesto que G fue arbitrario, $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$. □

Del Ejemplo 2.28 y recordando la Definición 2.17 tenemos la siguiente proposición.

2.29 Proposición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces $core(\mathcal{F}) \subset core(\overline{\mathcal{F}})$.

Demostración.
Por el Ejemplo 2.28, $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$. Luego, por el Teorema 2.18-(3), $core(\mathcal{F}) \subset core(\overline{\mathcal{F}})$. □

El siguiente ejemplo no es difícil de justificar.

2.30 Ejemplo. Sean X un conjunto no vacío y $A \subset X$ no vacío. Entonces $\mathcal{B} = \{A\}$ es una base de filtro para $\mathcal{F}_A$.

La siguiente proposición se refiere a las propiedades que preserva un filtro bajo una función. A pesar de que la familia de imágenes de un filtro no es un filtro, tenemos que dicha familia es una base de filtro. Cuando hablamos de convergencia y continuidad podemos usar esta proposición.

2.31 Proposición. Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $f : X \to Y$ una función. Entonces $\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})} = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro en Y. Denotamos al filtro generado por $\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$ por $f(\mathcal{F})$.

Demostración. Veamos que en efecto $\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$ es base de filtro.

1. Como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, existe $F \in \mathcal{F}$. Así $f(F) \in \mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$. Luego $\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})} \neq \emptyset$.
   Si $\emptyset \in \mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $f(F) = \emptyset$. Con esto $F = \emptyset$, así $\emptyset \in \mathcal{F}$. Lo que contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ sea filtro. Por lo tanto $\emptyset \notin \mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$.

2. Sean $f(F_1)$ y $f(F_2)$ elementos de $\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$, donde $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Sabemos que $f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$. Por otro lado, como $\mathcal{F}$ es filtro, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, y así $f(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$.

Con esto, hemos demostrado la Proposición 2.31. □

2.32 Corolario. Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Entonces $\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})} = \mathcal{F}(\mathcal{B})$.

Demostración. Por la Proposición 2.31, $\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Queda ver que $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$. Sea $G \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(B) \subset G$. Al ser f sobreyectiva, $f^{-1}(G) \neq \emptyset$. Como $f(f^{-1}(G)) = G$, $f(B) \subset f(f^{-1}(G))$. Luego, $B \subset f^{-1}(G)$. Como $\mathcal{F}$ es filtro, $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$. De donde, $G = f(f^{-1}(G)) \in \mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$. □

La demostración de la siguiente proposición es fácil de obtener.

2.33 Proposición. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{F}$ un filtro sobre Y. Si para cada $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $f^{-1}(F) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{B} = \{f^{-1}(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ es base de filtro sobre X. Al filtro generado por $\mathcal{B}$ lo denotamos por $f^{-1}(\mathcal{F})$ y le llamamos la *imagen inversa por f del filtro $\mathcal{F}$*.

La siguiente proposición nos caracteriza el concepto de subbase de filtro mediante la propiedad de intersección finita (ver Definición 2.10). De hecho, en [23] esto se toma como definición de subbase. Así, a partir de una familia con la propiedad de intersección finita, podemos obtener una base de filtro y por tanto un filtro. El filtro que se obtiene de dicha familia contiene a la familia.

2.34 Proposición. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{S}$ es una subbase de filtro sobre X si y sólo si $\mathcal{S}$ posee la propiedad de la intersección finita.

La prueba de la Proposición 2.34 no es difícil. En [21, Pág. 128] se puede consultar.

Dado un subconjunto arbitrario no vacío de un conjunto y un filtro sobre este conjunto, podemos obtener bases de filtro relacionadas con las intersecciones del subconjunto (o del complemento del subconjunto) con los elementos del filtro. Este resultado es bastante útil en la demostración de otras proposiciones cuando no podemos demostrar las proposiciones de manera directa.

2.35 Teorema. Sean X un conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $E \subset X$. Si $\mathcal{B} = \{F \cap E \mid F \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{B}' = \{F \cap (X - E) \mid F \in \mathcal{F}\}$, entonces:

1. Si $F \cap E \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base de filtro sobre X. Además, $E \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$.

2. Si existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap E = \emptyset$, entonces $\mathcal{B}'$ es una base de filtro sobre X. Además, $X - E \in \mathcal{F}(\mathcal{B}')$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B}')$.

Demostración.

1. Supongamos que $F \cap E \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es base de filtro sobre X. En efecto,

    a) Al ser $\mathcal{F} \neq \emptyset$, se tiene que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Como $F \cap E \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

    b) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = F_1 \cap E$ y $B_2 = F_2 \cap E$. Entonces,

    $$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (F_1 \cap E) \cap (F_2 \cap E) \\ &= (F_1 \cap F_2) \cap E \in \mathcal{B} \text{ puesto que } F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

    Recordemos que $\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \{F \subset X \mid B \subset F \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$ (Definición 2.23). Fijemos $F \in \mathcal{F}$. Tenemos que $F \cap E \in \mathcal{B}$. Como $F \cap E \subset E$ y $F \cap E \subset F$, $E \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $F \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Por lo tanto $E \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$.

2. Si $E = \emptyset$ entonces $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$ y $\mathcal{B}' = \mathcal{F}$. Por ser $\mathcal{F}$ filtro sobre X, por el Ejemplo 2.24 tenemos que $\mathcal{B}'$ es base de filtro sobre X.
    Supongamos ahora que $E \neq \emptyset$. Si $F \cap E = \emptyset$, para algún $F \in \mathcal{F}$, entonces $F \subset X - E$. Al ser $\mathcal{F}$ filtro obtenemos que $X - E \in \mathcal{F}$. Por tanto $F' \cap (X - E) \neq \emptyset$, para toda $F' \in \mathcal{F}$. Luego, aplicando (1) a $X - E$, obtenemos que $\mathcal{B}'$ es una base de filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B}')$ y $X - E \in \mathcal{F}(\mathcal{B}')$.

Así, el Teorema 2.35 queda demostrado. □

Terminamos esta sección con una definición muy útil en la Teoría de filtros.

2.36 Definición. Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Decimos que $\mathcal{F}$ *es un filtro fijo* si $core(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Si $core(\mathcal{F}) = \emptyset$ decimos que $\mathcal{F}$ *es libre.*

Los siguientes ejemplos no son difíciles de justificar por lo cual omitimos los detalles.

2.37 Ejemplo. Todo filtro principal es un filtro fijo (vea Proposición 2.18-(2)).

2.38 Ejemplo. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces $\mathcal{N}(x)$ es un filtro fijo (recordar Proposición 2.18-(3)).

2.39 Ejemplo. El filtro de Fréchet es un filtro libre. En efecto, recordemos el Ejemplo 2.25 y supongamos que el filtro de Fréchet no es libre, luego existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \bigcap\{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Como $x + 1 \in \mathbb{R}$, por lo anterior, $x \in (x + 1, \infty)$. Esto último no es posible. Por tanto, el filtro de Fréchet es libre.

2.3. Ultrafiltros

En esta sección presentamos la noción de ultrafiltro. Dada esta definición, mostramos la existencia de ultrafiltros con la ayuda del Lema de Zorn. Los ultrafiltros son importantes pues las nociones de convergencia se describen de una manera elegante con estos. Además, el manejo de ultrafiltros es menos complicado que los filtros. A partir de aquí, el uso de los ultrafiltros es importante durante el desarrollo de la tesis.

2.40 Definición. Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}(X)$ es un *ultrafiltro sobre* X si:

1. $\mathcal{U}$ es un filtro sobre X.

2. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

En términos de la relación de orden sobre $\mathbb{P}(X)$ dada por la inclusión, $\mathcal{U}$ es ultrafiltro sobre X si es un filtro maximal (vea Definición 1.5) sobre la familia de filtros en X.

Para el siguiente ejemplo recordemos la Definición 2.6.

2.41 Ejemplo. Sea X un espacio topológico. Si $x \in X$, entonces $\mathcal{F}_x$ es un ultrafiltro. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{G}$. Dado que $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ y $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{G}$, se sigue que para cada $G \in \mathcal{G}$, $G \cap \{x\} \neq \emptyset$. Luego $x \in G$, para cada $G \in \mathcal{G}$, es decir, $G \in \mathcal{F}_x$. Por tanto, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_x$.

2.42 Ejemplo. Sean X un conjunto y $A \subset X$ con más de un punto. Entonces $\mathcal{F}_A$ no es un ultrafiltro. En efecto, sea $x \in A$. No es difícil mostrar que $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_x$. Pero $\mathcal{F}_x \not\subset \mathcal{F}_A$, pues $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ y $\{x\} \notin \mathcal{F}_A$.

Es fácil verificar lo siguiente:

2.43 Ejemplo. Los filtros $\mathcal{F}_{cof}$ y $\mathcal{F}_{coc}$ (recordar Ejemplos 2.4 y 2.5) no son ultrafiltros.

El resultado que se enuncia a continuación, es uno de los más importantes dentro de la Teoría de filtros. Este teorema garantiza la existencia de ultrafiltros. Muchos resultados posteriores en el trabajo de tesis hacen uso de éste en su demostración. Pudiéramos considerarle como una consecuencia del Axioma de Elección, pues para su demostración se utiliza el lema de Zorn, que es una de las equivalencias del Axioma de Elección (una demostración de esta equivalencia la podemos encontrar en [10, Pág. 191]). De acuerdo con [12], la demostración de este teorema aparece en 1930 y es dada por Tarski.
Para la demostración del siguiente teorema es necesario recordar las Definiciones 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6.

2.44 Teorema. Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{C} = \{\mathcal{F}' \mid \mathcal{F}'$ es un filtro sobre X y $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'\}$. Se tiene que $\mathfrak{C}$ está parcialmente ordenado por el orden dado por $\subset$.
En efecto,

- Para todo $\mathcal{F}' \in \mathfrak{C}$, tenemos que $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'$.
- Si $\mathcal{F}'_1 \subset \mathcal{F}'_2$ y $\mathcal{F}'_2 \subset \mathcal{F}'_3$, por la transitividad de la inclusión de conjuntos tenemos que $\mathcal{F}'_1 \subset \mathcal{F}'_3$.
- $\mathcal{F}'_1 \subset \mathcal{F}'_2$ y $\mathcal{F}'_2 \subset \mathcal{F}'_1$, entonces $\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}'_2$.

Mostremos ahora que toda cadena en $\mathfrak{C}$ está acotada superiormente. Para ello sea $\{\mathcal{F}'_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{C}$ una cadena, donde I es un conjunto arbitrario de índices. Definamos a $\mathcal{U}'$ como sigue

$$\mathcal{U}' = \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}'_i.$$

Tenemos que $\mathcal{U}'$ es un filtro. En efecto, sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{C}$. Entonces, al ser $\mathfrak{C}$ una cadena, o $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ o $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Luego, por la Proposición 2.14, $\mathcal{U}' = \bigcup \mathfrak{C}$ es un filtro.
Por la definición de $\mathcal{U}'$, tenemos que

$$\mathcal{F}' \subset \mathcal{U}'$$

para toda $\mathcal{F}' \in \{\mathcal{F}'_i\}_{i\in I}$. Es decir, $\mathcal{U}'$ es una cota superior de $\{\mathcal{F}'_i\}_{i\in I}$. Como la cadena en $\mathfrak{C}$ fue arbitraria podemos aplicar el Lema de Zorn (ver Lema 1.7) y decir que $\mathfrak{C}$ tiene un elemento maximal. Sea $\mathcal{U}$ un elemento maximal de $\mathfrak{C}$. Ya que $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}$ entonces $\mathcal{U}$ es un filtro, además $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Ahora sólo queda mostrar que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un filtro tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$,
Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, entonces por transitividad obtenemos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, de aquí se sigue que $\mathcal{G} \in \mathfrak{C}$.
Como $\mathcal{U}$ es un elemento maximal de $\mathfrak{C}$ con el orden $\subset$, entonces

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$$

Con lo anterior concluimos que $\mathcal{G} = \mathcal{U}$, lo cual prueba que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. □

Dada la forma de la Definición 2.40, basada en la relación de orden dada por la inclusión, en ocasiones es difícil demostrar la maximalidad de los ultrafiltros, por lo que es necesario tener equivalencias que nos faciliten la obtención de ultrafiltros. El siguiente teorema nos ayudará en gran medida en la obtención de ejemplos de ultrafiltros, de hecho, estas equivalencias son más utilizadas que la definición misma de ultrafiltro.

2.45 Teorema. Sean X un conjunto y $\mathcal{U}$ un filtro sobre X. Entonces son equivalentes:

1. $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.
2. Para cada $E \subset X$ tal que $E \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{U}$, se tiene que $E \in \mathcal{U}$.

3. Si $E \subset X$, entonces $E \in \mathcal{U}$ o $X - E \in \mathcal{U}$.

4. Si $A, B \subset X$ y $A \cup B \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.

Demostración.

1)$\Rightarrow$2) Supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y sea $E \subset X$ tal que $E \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{U}$. Luego, por el Teorema 2.35 tenemos que $\mathcal{B} = \{E \cap F \mid F \in \mathcal{U}\}$ es base de filtro tal que $E \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Por el Teorema 2.44, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ está contenido en algún ultrafiltro $\mathcal{U}(\mathcal{B})$. Así $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}(\mathcal{B})$. Además, $E \in \mathcal{U}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(\mathcal{B})$. Por otro lado como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro y $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(\mathcal{B})$ entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{B})$. De aquí resulta que $E \in \mathcal{U}$.

2)$\Rightarrow$3) Supongamos 2). Sea $E \subset X$ arbitrario tal que $E \notin \mathcal{U}$. Entonces para toda $F \in \mathcal{U}$ tenemos $F \not\subset E$. Lo anterior quiere decir que $F \cap (X - E) \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{U}$, y así por 2) $X - E \in \mathcal{U}$.

3)$\Rightarrow$4) Supongamos 3). Sean $A, B \subset X$ tales que $A \cup B \in \mathcal{U}$.
Si $A \subset B$ o $B \subset A$ claramente tenemos 4).
Supongamos que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Por 3) tenemos que:

$$A \in \mathcal{U} \qquad \text{o} \qquad X - A \in \mathcal{U}$$

Si $A \in \mathcal{U}$, con esto obtenemos 4).
Si $X - A \in \mathcal{U}$, entonces $(X - A) \cap (A \cup B) \in \mathcal{U}$. Notemos que $(X - A) \cap (A \cup B) \subset B$. Por lo tanto $B \in \mathcal{U}$.

4)$\Rightarrow$1) Supongamos 4) y que $\mathcal{U}$ no es un ultrafiltro. Luego, existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{U}$. Es decir, existe $F \in \mathcal{F} - \mathcal{U}$. Sean $A = F$ y $B = X - F$. Tenemos que $A \cup B = X \in \mathcal{U}$. Por hipótesis (4), $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$. Como $F \in \mathcal{F} - \mathcal{U}$ obtenemos que $B \in \mathcal{U}$. Pero dado que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es filtro entonces:

$$F \cap B \in \mathcal{F}$$

pero $F \cap B = F \cap (X - F) = \emptyset$, por tanto $\emptyset \in \mathcal{F}$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ sea filtro. $\square$

Por el Teorema 2.45 y la Definición 2.20, se tiene que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro si y sólo si $\mathcal{U}$ es un filtro primo.

Dado un filtro $\mathcal{F}$, el Teorema 2.44 nos garantiza la existencia de al menos un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$. Como el Teorema 2.44 no enuncia unicidad, podemos hablar de la familia de ultrafiltros que contiene a $\mathcal{F}$. La cuestión ahora, es encontrar la relación entre dicha familia y el filtro $\mathcal{F}$. El siguiente teorema nos muestra que el filtro es la intersección sobre dicha familia.

2.46 Teorema. Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces $\mathcal{F}$ es la intersección de todos los ultrafiltros que lo contienen.

Demostración. Sea $\mathfrak{A} = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ es ultrafiltro y $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}\}$. Por el Teorema 2.44 tenemos que $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. El hecho de que $\bigcap \mathfrak{A}$ sea filtro se obtiene del Teorema 2.16. Veamos ahora que $\mathcal{F} = \bigcap \mathfrak{A}$. Tenemos que para todo $\mathcal{U} \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Es decir, $\mathcal{F} \subset \bigcap \mathfrak{A}$. Por otro lado, supongamos que $\bigcap \mathfrak{A} \not\subset \mathcal{F}$. Entonces existe $F_1 \in \bigcap \mathfrak{A}$ tal que $F_1 \notin \mathcal{F}$. Luego $F \not\subset F_1$, para todo $F \in \mathcal{F}$. Con esto, para todo $F \in \mathcal{F}$ tenemos $(X - F_1) \cap F \neq \emptyset$. Por el Teorema 2.35, $\mathcal{B} = \{F \cap (X - F_1) \mid F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro. Para $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ tenemos que, por el Teorema 2.44, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que lo contiene. Además, tenemos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ y que $X - F_1 \in \mathcal{U}$.
Por lo anterior, $\mathcal{U} \in \mathfrak{A}$, y así $\bigcap \mathfrak{A} \subset \mathcal{U}$. Como $F_1 \in \bigcap \mathfrak{A}$, se sigue que $F_1 \in \mathcal{U}$. Así, $F_1, X - F_1 \in \mathcal{U}$. Ya que $\mathcal{U}$ es filtro entonces $F_1 \cap (X - F_1) \in \mathcal{U}$, es decir, $\emptyset \in \mathcal{U}$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ sea filtro. Por tanto $\bigcap \mathfrak{A} \subset \mathcal{F}$. □

Del Teorema 2.16 surge de forma inmediata el siguiente corolario.

2.47 Corolario. Si un filtro $\mathcal{F}$ está contenido en un único ultrafiltro $\mathcal{F}'$ entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Demostración. Sea $\mathfrak{A} = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ es ultrafiltro y $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}\} = \{\mathcal{F}'\}$. Por el Teorema 2.46, $\mathcal{F} = \bigcap \mathfrak{A} = \mathcal{F}'$. □

2.48 Proposición. Sean X un conjunto y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Entonces $core(\mathcal{U})$ tiene a lo más un punto. Cuando $core(\mathcal{U}) = \{x\}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}_x$.

Demostración. Para la primera parte, supongamos que $core(\mathcal{U})$ tiene más de dos puntos.
Sean $x \in core(\mathcal{U})$ y $A_x = core(\mathcal{U}) - \{x\}$. Tenemos que $A_x \neq \emptyset$. Por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, $A_x \in \mathcal{U}$ o $X - A_x \in \mathcal{U}$. Si $A_x \in \mathcal{U}$, entonces $A_x \supset core(\mathcal{U})$. Como $x \in core(\mathcal{U})$, $x \in A_x$ lo cual no es posible por construcción de A_x. Por tanto, $X - A_x \in \mathcal{U}$.
Como $core(\mathcal{U})$ tiene más de dos puntos, la familia $\mathcal{A} = \{X - A_x \mid x \in core(\mathcal{U})\}$ tiene más de dos elementos.
Dado que $X - A_x \in \mathcal{U}$, para cada $x \in core(\mathcal{U})$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$. Se sigue que

$$\bigcap \mathcal{A} \supset \bigcap \mathcal{U} = core(\mathcal{U})$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\bigcap \mathcal{A} &= \cap_{x \in core(\mathcal{U})}(X - A_x) \\
&= X - \cup_{x \in core(\mathcal{U})} A_x \\
&= X - (\cup_{x \in core(\mathcal{U})}(core(\mathcal{U}) - \{x\})) \\
&= X - (core(\mathcal{U}) - \cap_{x \in core(\mathcal{U})}\{x\}) \\
&= X - (core(\mathcal{U}) - \emptyset) \\
&= X - core(\mathcal{U})
\end{aligned}$$

Esto último indica que

$$X - core(\mathcal{U}) = \bigcap \mathcal{A} \supset core(\mathcal{U})$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $core(\mathcal{U})$ tiene a lo más un elemento.
Ahora supongamos que $core(\mathcal{U}) = \{x\}$. Veamos que $\mathcal{U} = \mathcal{F}_x$. Sea $F \in \mathcal{U}$. Como $core(\mathcal{U}) \subset F$, entonces $x \in F$, y así, $F \in \mathcal{F}_x$.
Sea ahora $A \in \mathcal{F}_x$. Dado que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro se tiene que $A \in \mathcal{U}$ o $X - A \in \mathcal{U}$.
Si $X - A \in \mathcal{U}$ entonces $core(\mathcal{U}) \subset X - A$, esto quiere decir que $x \in X - A$, lo cual no es posible, pues $x \in A$. Entonces $A \in \mathcal{U}$ y así $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{U}$. □

Con la Proposición 2.48 podemos decir que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro fijo sobre X, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}_x$ para algún $x \in X$, por tanto podemos dar explícitamente cualquier ultrafiltro fijo en X. Caso contrario, sucede si $\mathcal{U}$ no es fijo, pues a pesar de que se sabe de la existencia de ultrafiltros libres hasta la actualidad no se han podido describir de manera explícita como se menciona en [16]. Se conjetura que puede ser uno de los ultrafiltros que contiene al filtro de Fréchet.

Resulta interesante preguntarse el número de filtros y ultrafiltros cuando X es un espacio finito.

2.49 Proposición. Si X es un espacio topológico con únicamente n elementos, entonces se pueden construir sobre X a lo más $2^n - 1$ filtros y n ultrafiltros.

Demostración. Como X es finito, $\mathbb{P}(X)$ es finito. Con esto cualquier filtro $\mathcal{F}$ sobre X es finito. Por el Teorema 2.11,

$$core(\mathcal{F}) \neq \emptyset.$$

Luego todo filtro sobre X es fijo. Veamos que si $A = core(\mathcal{F})$ entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$. Sea $F \in \mathcal{F}$. Como $core(\mathcal{F}) \subset F$ entonces $A \subset F$. Dado que $\mathcal{F}_A$ es filtro y $A \in \mathcal{F}_A$ tenemos que $F \in \mathcal{F}_A$. Ahora, ya que X es finito, entonces $core(\mathcal{F}) \in \mathcal{F}$, es decir $A \in \mathcal{F}$. Con esto si $G \in \mathcal{F}_A$ entonces $A \subset G$. Puesto que $\mathcal{F}$ es filtro y $A \in \mathcal{F}$ concluimos que $G \in \mathcal{F}$. Por todo esto tenemos que todos los filtros son filtros principales. Dado que hay $2^n - 1$ subconjuntos no vacíos de X entonces a lo más se pueden construir $2^n - 1$ filtros sobre X.
En el caso de los ultrafiltros, sabemos que si $A \subset X$ tiene más de un punto entonces $\mathcal{F}_A$ no puede ser ultrafiltro (ver Ejemplo 2.42). Así dado que hay n conjuntos singulares en $\mathbb{P}(X)$ entonces a lo más se pueden construir n ultrafiltros (pues si $A = \{x\}$ entonces $\mathcal{F}_x$ es ultrafiltro). □

Terminamos esta sección con el siguiente resultado, que es de mucha utilidad dentro de la Teoría de filtros, en especial, cuando hablamos de convergencia y continuidad.

2.50 Teorema. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Entonces $f(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro sobre Y.

Demostración. Recordemos que $f(\mathcal{U})$ es el filtro generado por $\{f(F) \mid F \in \mathcal{U}\}$ (ver Proposición 2.31). Resta verificar que $f(\mathcal{U})$ es ultrafiltro.

En efecto, sea $A \subset Y$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, por el Teorema 2.45-(2), entonces se tiene que

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$$

o

$$X - f^{-1}(A) \in \mathcal{U}.$$

Si $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$, entonces $f(f^{-1}(A)) \in f(\mathcal{U})$. Como $f(\mathcal{U})$ es un filtro en Y y $f(f^{-1}(A)) \subset A$, se sigue que $A \in f(\mathcal{U})$.
Si $X - f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$, entonces $f(X - f^{-1}(A)) \in f(\mathcal{U})$. Recordemos que se cumple $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$. Luego, $f(X - f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(Y - A))$. Tenemos que $f(f^{-1}(Y - A)) \subset Y - A$. Así, $f(X - f^{-1}(A)) \subset Y - A$. Al ser $f(\mathcal{U})$ filtro, $Y - A \in f(\mathcal{U})$. Por tanto, $A \in f(\mathcal{U})$ o $Y - A \in f(\mathcal{U})$. Con esto, por el Teorema 2.45-(2), $f(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro. $\square$

2.4. Convergencia

Aunque los filtros aparecen por primera vez en 1908 (según [7]), es Henri Cartan quien por primera vez habla de convergencia en términos de filtros ([3] y [4]). Ya en 1940 Bourbaki desarrolla esta teoría ([7]). Los temas de convergencia son muy importantes en Topología. En los espacios métricos, o en general en espacios primero numerables (donde entendemos que un espacio primero numerable es un espacio en el cual todo punto tiene una base de vecindades numerable), las sucesiones (recordar Definición 1.63) son la herramienta predilecta para hablar de continuidad y convergencia. En estos espacios la convergencia se describe en términos de sucesiones. Surge de manera inmediata la interrogante sobre si es posible extender esta propiedad de los espacios primero numerables hacia espacios que no son primero numerables. La respuesta a la interrogante es negativa, puesto que las sucesiones ya no garantizan las propiedades de convergencia en espacios no primero numerables, resultan ser inadecuadas. Observemos el siguiente teorema, el cual es un resultado clásico en el Análisis.

2.51 Teorema. Sean X un espacio primero numerable, $A \subset X$ no vacío y $a \in X$. Entonces $a \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión en A convergente a a.

En el siguiente ejemplo ilustramos que las sucesiones ya no son útiles para describir nociones de convergencia en espacios no primero numerables. En particular, mostramos que el Teorema 2.51 no es valido si se extiende a espacios topológicos arbitrarios.

2.52 Ejemplo. Consideremos el espacio ordinal $[0, \Omega]$. Tenemos que $\Omega \in \overline{[0, \Omega)}$. Sin embargo, no existe sucesión en $[0, \Omega)$ que converja a Ω.

En [6, Pág. 215] y [26, Pág. 72] podemos consultar los detalles del Ejemplo 2.52.

Así, una de las maneras de hablar de convergencia sobre un espacio topológico arbitrario es con ayuda de filtros. Para nuestra primera definición recordemos que $\mathcal{N}(x)$ es la familia de todas las vecindades de x (ver Definición 1.14).

2.53 Definición. Sean (X,τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}$ una base de filtro sobre X y $x \in X$. Entonces:

1. Decimos que $\mathcal{F}$ *converge a* x si para toda $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V$. Si $\mathcal{F}$ converge a x escribimos $\mathcal{F} \to x$.

2. Decimos que $\mathcal{F}$ *aglomera en* x o que x *es punto de aglomeración de* $\mathcal{F}$ si para todo $F \in \mathcal{F}$ y toda $V \in \mathcal{N}(x)$ se cumple que $F \cap V \neq \emptyset$. Si $\mathcal{F}$ aglomera en x escribimos $\mathcal{F} \succ x$.

Nota: Recordemos que todo filtro es una base de filtro, luego la Definición 2.53 se aplica para cualquier filtro arbitrario.

Tenemos la siguiente equivalencia.

2.54 Teorema. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ si y sólo si $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F} \to x$. Entonces para $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, $V \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$.
Recíprocamente, si $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$ es claro que $\mathcal{F} \to x$. $\square$

Veamos ahora los siguientes ejemplos.

2.55 Ejemplo. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces el filtro $\mathcal{F} = \mathcal{N}(x)$ converge a x. Esto es, $\mathcal{N}(x)$ es el filtro más pequeño (con la relación de inclusión) que converge a x.

2.56 Ejemplo. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ no vacío. Entonces el filtro principal sobre A (vea Ejemplo 2.6) aglomera en cada punto de $\overline{A}$. En efecto, sea $a \in \overline{A}$ un elemento arbitrario. Sean $F \in \mathcal{F}_A$ y $V \in \mathcal{N}(a)$ arbitrarios. Puesto que, $a \in \overline{A}$ y V es una vecindad de a, $A \cap V \neq \emptyset$. Como $A \subset F$, obtenemos que $\emptyset \neq A \cap V \subset F \cap V$. Esto es $F \cap V \neq \emptyset$.

2.57 Ejemplo. Sea (X,τ) el espacio topológico indiscreto (recordar Ejemplo 1.10). Entonces todo filtro sobre X converge a cualquier punto del espacio. Esto ocurre por el hecho de que la única vecindad de cualquier punto de X es el propio espacio X y que X está en todo filtro.

2.58 Ejemplo. Sean X un conjunto no finito y τ la topología cofinita (ver Ejemplo 1.12). Entonces $\mathcal{F}_{cof}$ converge a cualquier punto del espacio.
En efecto, sea $x \in X$ arbitrario. Recordemos del Ejemplo 2.4, que $\mathcal{F}_{cof} = \{F \subset X \mid X - F \text{ es finito}\}$, con esto $\tau = \mathcal{F}_{cof} \cup \{\emptyset\}$. Por tanto, $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}_{cof}$ y así $\mathcal{F}_{cof} \to x$.

2.59 Ejemplo. En el espacio de Sierpinski (vea Ejemplo 1.11)X, sea $x = 0$, entonces para el filtro $\mathcal{N}(x)$ tenemos:

$$\mathcal{N}(x) \to 0 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{N}(x) \to 1.$$

Con este ejemplo mostramos que el punto de convergencia no necesariamente es único.

2.60 Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual (recordar Definición 1.22). Entonces el filtro de Fréchet (ver Ejemplo 2.25) no tiene puntos de aglomeración. En efecto, recordemos que el filtro de Fréchet tiene por base a $\mathcal{C} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Supongamos que $x \in X$ es un punto de aglomeración del filtro de Fréchet. Tenemos que $(x-1, x+1) \in \mathcal{N}(x)$. Por otro lado $(x+1, \infty) \in \mathcal{C}$, es decir, $(x+1, \infty)$ es elemento del filtro. Así, por ser x punto de aglomeración se tiene que

$$(x-1, x+1) \cap (x+1, \infty) \neq \emptyset$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, el filtro de Fréchet no tiene puntos de aglomeración.

El siguiente resultado enuncia la relación entre un filtro con alguna de sus bases, cuando dicho filtro es convergente. Este resultado es útil porque las bases de filtro en ocasiones son mucho más fáciles de usar que el filtro mismo.

2.61 Proposición. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, $\mathcal{B}$ una base del filtro para $\mathcal{F}$ y $x \in X$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ si y sólo si $\mathcal{B} \to x$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F} \to x$. Tenemos que para toda $V \in \mathcal{N}(x)$, $V \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Luego por la Definición 2.53-(1), $\mathcal{B} \to x$.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B} \to x$. Para toda $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Como $\mathcal{F}$ es filtro y $B \in \mathcal{F}$(pues $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$), $V \in \mathcal{F}$. Luego $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F} \to x$. □

2.62 Proposición. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \to x$. Si $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{G} \to x$.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F} \to x$ entonces $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$. Por transitividad tenemos que $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{G}$. Luego $\mathcal{G} \to x$. □

2.63 Teorema. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces son equivalentes

1. x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.
2. Existe un filtro $\mathcal{G}$ en X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \to x$.
3. $x \in \overline{F}$, para toda $F \in \mathcal{F}$. Es decir, $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Demostración.
1)$\Rightarrow$ 2) Sea $x \in X$ un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$. Entonces, para todo $V \in \mathcal{N}(x)$ y para toda $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $V \cap F \neq \emptyset$. Se tiene que, el conjunto $\mathcal{B} = \{V \cap F \mid V \in \mathcal{N}(x) \text{ y } F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro.
En efecto,

- Puesto que $\mathcal{N}(x)$ y $\mathcal{F}$ son distintos del vacío y de que $V \cap F \neq \emptyset$, para todo $V \in \mathcal{N}(x)$ y para todo $F \in \mathcal{F}$, se sigue que $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

- Sean $V_1 \cap F_1, V_2 \cap F_2 \in \mathcal{B}$, donde $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(x)$ y $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Notemos que $(V_1 \cap F_1) \cap (V_2 \cap F_2) = (V_1 \cap V_2) \cap (F_1 \cap F_2)$. Como $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(x)$ y $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, $(V_1 \cap F_1) \cap (V_2 \cap F_2) \in \mathcal{B}$.

Probemos ahora que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es nuestro filtro $\mathcal{G}$ deseado, es decir, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \to x$. Sean $V \in \mathcal{N}(x)$ y $F \in \mathcal{F}$ arbitrarios. Tenemos que $V \cap F \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Puesto que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es filtro y además $V \cap F \subset F$ y $V \cap F \subset V$, tenemos $F \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $V \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Así hemos mostrado que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$. La última expresión muestra que $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \to x$.
2)$\Rightarrow$ 3) Supongamos que existe un filtro $\mathcal{G}$ en X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \to x$. Sea $F \in \mathcal{F}$. Entonces $F \in \mathcal{G}$. Dado que $\mathcal{G}$ converge a x, obtenemos que para todo $V \in \mathcal{N}(x)$:

$$V \cap F \neq \emptyset,$$

es decir, que $x \in \overline{F}$. Así, $x \in \overline{F}$, para cada $F \in \mathcal{F}$.
3)$\Rightarrow$ 1) Esto se obtiene de la definición de punto de aglomeración (ver Definición 2.53-(2)) y de la definición de la clausura de un conjunto. □

El siguiente resultado muestra que las nociones $\mathcal{F}$ converge a x y $\mathcal{F}$ aglomera en x son equivalentes para ultrafiltros.

2.64 Teorema. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $x \in X$. Entonces $\mathcal{U} \succ x$ si y sólo si $\mathcal{U} \to x$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U} \succ x$. Dado que $\mathcal{U}$ es, en particular, un filtro, por el Teorema 2.63-(2), tenemos que existe un filtro $\mathcal{G}$ en X tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \to x$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{G}$, es decir, que $\mathcal{U} \to x$.
Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{U} \to x$. Sean $F \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{N}(x)$. Dado que $\mathcal{U} \to x$, existe $F_1 \in \mathcal{U}$ tal que $F_1 \subset V$. Ahora, como $\mathcal{U}$ es filtro, $F \cap F_1 \neq \emptyset$ pero $F \cap F_1 \subset F \cap V$. Así, $F \cap V \neq \emptyset$. Con esto $\mathcal{U} \succ x$. □

Recordemos que en el Ejemplo 2.52 se muestra que el Teorema 2.51 es invalido en espacios topológicos no necesariamente primero numerables. Por ello buscamos un resultado análogo al Teorema 2.51 en términos de filtros, el cual sea aplicable a cualquier espacio topológico. El siguiente teorema enuncia una equivalencia de la cerradura de un conjunto y la existencia de un filtro convergente a él. Esta propiedad es una de las más importantes dentro de la teoría de filtros. Su uso se extiende a lo largo de toda la Teoría de filtros.

2.65 Teorema. Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \to x$ y $A \in \mathcal{F}$.

Demostración. Supongamos que $x \in \overline{A}$. Entonces para toda $V \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $V \cap A \neq \emptyset$. Así, por el Teorema 2.35, $\mathcal{B} = \{V \cap A \mid V \in \mathcal{N}(x)\}$ es una base de filtro tal que $A \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Recordado la Definición 2.53 y por el hecho que $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$, tenemos que $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \to x$.

Recíprocamente, veamos que $x \in \overline{A}$. Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \to x$, $A \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{N}(x)$. Como $\mathcal{F}$ converge a x, $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$. Luego $V \in \mathcal{F}$. Como $A \in \mathcal{F}$, se sigue que $A \cap V \neq \emptyset$. Aplicando la Proposición 1.32, tenemos que $x \in \overline{A}$. □

Del Teorema 2.65, surge de manera inmediata el siguiente resultado.

2.66 Corolario. Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subset X$. La clausura de A es

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{ existe un filtro } \mathcal{F} \text{ tal que } \mathcal{F} \to x \text{ y } A \in \mathcal{F}\}.$$

Una caracterización importante en la Teoría de filtros, es la equivalencia que posee una función continua en un punto x con la base de filtro generada por las imágenes de las vecindades de x, bajo esta función continua. A continuación enunciamos el resultado(recordemos la Definición 1.38, la Proposición 2.31 y el Ejemplo 2.7).

2.67 Teorema. Sean X, Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en x si y sólo si la base de filtro $\mathcal{B}_{f(\mathcal{N}(x))} = \{f(V) \mid V \in \mathcal{N}(x)\}$ converge a $f(x)$.

Demostración. Supongamos que f es continua en x. Sea $W \in \mathcal{N}(f(x))$. Por ser f continua en x, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $f(V) \subset W$. Así, $\mathcal{B}_{f(\mathcal{N}(x))} \to x$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B}_{f(\mathcal{N}(x))} \to x$. Sea $W \in \mathcal{N}(f(x))$. Como $\mathcal{B}_{f(\mathcal{N}(x))} \to x$, existe $B \in \mathcal{B}_{f(\mathcal{N}(x))}$ tal que $B \subset W$. Luego, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $f(V) = B \subset W$. Así, por la Definición 1.38, f es continua en x. □

Por el Teorema 2.67 y la Proposición 2.61, surge de manera inmediata el corolario siguiente.

2.68 Corolario. Sean X, Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en x si y sólo si el filtro $f(\mathcal{N}(x))$ converge a $f(x)$.

Una consecuencia directa del Teorema 2.67, es la caracterización de una función continua en todo el espacio.

2.69 Corolario. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en X si y sólo si para todo $x \in X$, la base de filtro $\mathcal{B}_{f(\mathcal{B})} = \{f(F) \mid F \in \mathcal{B}\}$ converge a $f(x)$, para cada base de filtro $\mathcal{B}$ convergente a x.

Demostración. Supongamos que f es continua en X. Sean $x \in X$, $\mathcal{B}$ una base de filtro tal que $\mathcal{B} \to x$ y $W \in \mathcal{N}(f(x))$. Por ser f continua en x, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $f(V) \subset W$. Por otro lado, como $\mathcal{B} \to x$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Luego $f(B) \subset f(V)$. Ahora, por transitividad, $f(B) \subset W$. Dado que W fue arbitrario y recordando la Definición 2.53-(1), $\mathcal{B}_{f(\mathcal{B})} \to x$.
Recíprocamente, sea $x \in X$ arbitrario. Tenemos en particular que $\mathcal{N}(x)$ es base de filtro. Entonces por hipótesis $\mathcal{B}_{f(\mathcal{N}(x))} \to f(x)$, así por el Teorema 2.67, f es continua en x. Como x es arbitrario, se sigue que f es continua en X. □

Otro resultado del Teorema 2.67, surge a razón de que un filtro es a su vez una base de filtro.

2.70 Corolario. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en X si y sólo si $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ para cada $x \in X$ y cada filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \to x$.

Recordando la Definición 1.57 tenemos la siguiente proposición.

2.71 Proposición. Sean I un conjunto no vacío y $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ una colección de espacios topológicos. Sean $(\Pi_{i\in I} X_i, \tau_{\mathcal{S}})$ el espacio producto, $x \in \Pi_{i\in I} X_i$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\Pi_{i\in I} X_i$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ si y sólo si $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x)$ en (X_i, τ_i), para todo $i \in I$.

Demostración. Recuerde que x es de la forma $(x_i)_{i\in I}$, donde $x_i = \pi_i(x)$, para cada $i \in I$. Supongamos que $\mathcal{F} \to x$. Sea $i \in I$. Por el Teorema 1.58, π_i es una función continua. Así, por el Corolario 2.70, $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x) = x_i$.
Recíprocamente, supongamos que $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x) = x_i$ en (X_i, τ_i), para todo $i \in I$. Sea $V \in \mathcal{N}(x)$. Sin perder generalidad podemos suponer que V es elemento de la base de la topología producto, esto es $V = \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap ... \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, donde $U_{i_j} \in \tau_{i_j}$ para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$ (recordar Definición 1.57). Sea $j \in \{1, 2, ..., k\}$. Como $U_{i_j} \in \tau_{i_j}$ y $x_{i_j} \in U_{i_j}$, $U_{i_j} \in \mathcal{N}(x_{i_j})$. Dado que $\pi_{i_j}(\mathcal{F}) \to x_{i_j}$, existe $G_{i_j} \in \pi_{i_j}(\mathcal{F})$ tal que $G_{i_j} \subset U_{i_j}$. Al ser $\{\pi_{i_j}(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ base del filtro $\pi_{i_j}(\mathcal{F})$, existe $F_{i_j} \in \mathcal{F}$ tal que $\pi_{i_j}(F_{i_j}) \subset G_{i_j}$. Así, $\pi_{i_j}(F_{i_j}) \subset U_{i_j}$. Luego, $F_{i_j} \subset \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$. De donde, para todo $j \in \{1, 2, ..., k\}$, $F_{i_j} \subset \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$.
Por tanto, $F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_k} \subset \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = V$. Como $F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_k} \in \mathcal{F}$, por la Definición 2.53-(1), $\mathcal{F} \to x$. □

Recordemos que cuando hablamos de filtros convergentes, no tenemos garantizada la unicidad del punto de convergencia. Este hecho se muestra en el Ejemplo 2.59. Así, el punto de convergencia de un filtro no es necesariamente único sobre un espacio arbitrario. El siguiente teorema muestra qué tipo de espacios garantizan la unicidad del punto de convergencia.

2.72 Teorema. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces X es un espacio de Hausdorff si y sólo si todo filtro convergente en X converge a un único punto.

Demostración. Supongamos que X es de Hausdorff y sea $\mathcal{F}$ un filtro convergente en X. Supongamos que $x, y \in X$ son tales que $\mathcal{F} \to x$, $\mathcal{F} \to y$ y $x \neq y$. Por ser X de Hausdorff, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $V \cap U = \emptyset$. Puesto que $\mathcal{F} \to x$ y $\mathcal{F} \to y$, entonces $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{N}(y) \subset \mathcal{F}$. Pero también tenemos que $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$. Así $U, V \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es filtro, $U \cap V \in \mathcal{F}$, de donde, $U \cap V \neq \emptyset$, lo que es un contradicción.
Ahora, supongamos que todo filtro convergente en X converge a un único punto y que X no es de Hausdorff. Luego existen $x_0, y_0 \in X$, con $x_0 \neq y_0$ tales que para toda $U \in \mathcal{N}(x_0)$ y toda $V \in \mathcal{N}(y_0)$, $U \cap V \neq \emptyset$. Como $\mathcal{N}(x_0)$ y $\mathcal{N}(y_0)$ son filtros, $\mathcal{B} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{N}(x_0) \text{ y } V \in \mathcal{N}(y_0)\}$ es una base de filtro sobre X. Luego, el filtro generado por $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, tiene la propiedad de que $\mathcal{N}(x_0) \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{N}(y_0) \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$.
Así, $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \to x_0$ y $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \to y_0$, lo que contradice nuestra suposición. □

Ya que tenemos las definiciones de punto de aglomeración y punto límite, podemos analizar el comportamiento del conjunto de estos puntos.

2.73 Definición. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un espacio topológico X. Definimos los conjuntos $lim(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F} \to x\}$ y $adh(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F} \succ x\}$.

En relación a estos conjuntos, tenemos las siguientes propiedades.

2.74 Proposición. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros sobre un espacio topológico X. Entonces se cumplen

1. $adh(\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.
2. $lim(\mathcal{F})$ y $adh(\mathcal{F})$ son conjuntos cerrados en X.
3. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, entonces $lim(\mathcal{F}) = adh(\mathcal{F})$.
4. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, entonces $lim(\mathcal{F}) \subset lim(\mathcal{G})$ y $adh(\mathcal{F}) \supset adh(\mathcal{G})$.
5. $lim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = lim(\mathcal{F}) \cap lim(\mathcal{G})$.
6. Si $x \in lim(\mathcal{F})$, entonces $\overline{\{x\}} \subset lim(\mathcal{F})$. En particular $\overline{\{x\}} = lim(\mathcal{N}(x))$
7. $lim(\overline{\mathcal{F}}) \subset lim(\mathcal{F})$ y $adh(\mathcal{F}) = adh(\overline{\mathcal{F}})$. Sin embargo, tenemos que en general $lim(\mathcal{F}) \neq lim(\overline{\mathcal{F}})$.
8. Si $A \subset X$, entonces $adh(\mathcal{F}_A) = \overline{A}$ y para $x \in X$ tenemos que $lim(\mathcal{F}_x) = adh(\mathcal{F}_x) = \overline{\{x\}}$.
9. Sean τ_1, τ_2 dos topologías sobre X tales que $\tau_1 \subset \tau_2$. Entonces $lim_{\tau_2}(\mathcal{F}) \subset lim_{\tau_1}(\mathcal{F})$ y $adh_{\tau_2}(\mathcal{F}) \subset adh_{\tau_1}(\mathcal{F})$, donde el subíndice τ_i indica bajo qué topología se consideran los puntos de convergencia y los puntos de aglomeración.

Demostración.

1. Sea $x \in adh(\mathcal{F})$. Entonces $\mathcal{F} \succ x$. Por el Teorema 2.63-(3), $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Por tanto, $adh(\mathcal{F}) \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Ahora, sea $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Entonces por el Teorema 2.63-(3) $\mathcal{F} \succ x$, es decir, $x \in adh(\mathcal{F})$. Por tanto, $adh(\mathcal{F}) \supset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

2. Veamos que $lim(\mathcal{F})$ es cerrado. Para ello demostramos que $X - lim(\mathcal{F})$ es abierto. En efecto, sea $x \in X - lim(\mathcal{F})$. Así $\mathcal{F}$ no converge a x, es decir, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}$ tenemos $F \not\subset V$. Sin perder generalidad, supongamos que V es abierto. Ahora mostremos que $V \subset X - lim(\mathcal{F})$. Para ello, si $y \in V \cap lim(\mathcal{F})$, entonces, como $\mathcal{F} \to y$ y $V \in \mathcal{N}(y)$, existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $F_1 \subset V$. Pero esto contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ no converja a x. Por tanto $V \subset X - lim(\mathcal{F})$. Así $X - lim(\mathcal{F})$ es abierto y con esto se obtiene que $lim(\mathcal{F})$ es cerrado.

   Para $adh(F)$ la demostración es análoga.

3. Esta propiedad se obtiene considerando el Teorema 2.64.

4. Supongamos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Sea $x \in lim(\mathcal{F})$. Es decir, $\mathcal{F} \to x$. Por demostrar que $\mathcal{G} \to x$. Como $\mathcal{F} \to x$, $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$. Por hipótesis, se sigue que $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{G}$. Así $x \in lim(\mathcal{G})$. Para el caso de adh, sea $x \in adh(\mathcal{G})$, es decir, $\mathcal{G} \succ x$. Por demostrar que $\mathcal{F} \succ x$. Sean $F \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{N}(x)$. Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \succ x$ entonces $F \cap V \neq \emptyset$. Por tanto $\mathcal{F} \succ x$. Así, $adh(\mathcal{G}) \subset adh(\mathcal{F})$.

5. Considerando el inciso anterior, como $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$, entonces $lim(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) \subset lim(\mathcal{F})$ y $lim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) \subset lim(\mathcal{G})$. Se sigue que $lim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) \subset lim(\mathcal{F}) \cap lim(\mathcal{G})$. Ahora, queda demostrar que $lim(\mathcal{F}) \cap lim(\mathcal{G}) \subset lim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$. Sea $x \in lim(\mathcal{F}) \cap lim(\mathcal{G})$. Dado que $\mathcal{F} \to x$ y $\mathcal{G} \to x$, $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{G}$. De donde $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Luego, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \to x$. Por tanto, $x \in lim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$.

6. Sean $x \in lim(\mathcal{F})$, $y \in \overline{\{x\}}$ y $V \in \mathcal{N}(y)$. Como $y \in \overline{\{x\}}$ tenemos $V \cap \{x\} \neq \emptyset$. A partir de esto tenemos que $V \cap \{x\} = \{x\}$. Se sigue que $V \in \mathcal{N}(x)$ (si no pasara esto $\mathcal{F}$ no converge a x). Así, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V$. Con esto $\mathcal{F} \to y$. Por tanto $\overline{\{x\}} \subset lim(\mathcal{F})$. Para cuando $\mathcal{F} = \mathcal{N}(x)$, por lo anterior $\overline{\{x\}} \subset lim(\mathcal{N}(x))$. Falta ver que $lim(\mathcal{N}(x)) \subset \overline{\{x\}}$. Sean $y \in lim(\mathcal{N}(x))$ y $V \in \mathcal{N}(y)$. Dado que $\mathcal{N}(x) \to y$, existe $V_y \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V_y \subset V$. Como $x \in V_y$, $x \in V$. Así, $V \cap \{x\} \neq \emptyset$. Por tanto $y \in \overline{\{x\}}$.

7. Primero vamos a demostrar que $adh(\mathcal{F}) = adh(\overline{\mathcal{F}})$. Recordemos que $\overline{\mathcal{F}}$ es el filtro generado por la base $\mathcal{B} = \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$ (vea Proposición 2.28). Veamos que $adh(\mathcal{F}) \subset adh(\overline{\mathcal{F}})$. Sea $x \in adh(\mathcal{F})$, entonces para todo $V \in \mathcal{N}(x)$ y toda $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $F \cap V \neq \emptyset$, y dado que $F \cap V \subset \overline{F} \cap V$, $\overline{F} \cap V \neq \emptyset$. Con esto, $\overline{\mathcal{F}} \succ x$. Mostramos ahora que $adh(\overline{\mathcal{F}}) \subset adh(\mathcal{F})$. Sea $x \in adh(\overline{\mathcal{F}})$. Sea $F \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{N}(x)$ por demostrar que $F \cap V \neq \emptyset$. Como $\overline{\mathcal{F}} \succ x$ y $\overline{F} \in \overline{\mathcal{F}}$, entonces por el Teorema 2.63, $x \in \overline{\overline{F}}$, pero $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$. Así, $x \in \overline{F}$, lo que significa que $V \cap F \neq \emptyset$. Por tanto $x \in adh(\mathcal{F})$.
   Por la Proposición 2.28 se tiene que $\overline{\mathcal{F}} \subset \overline{F}$. Luego, por (4) de esta proposición, $lim(\overline{\mathcal{F}}) \subset lim(\mathcal{F})$. Ahora queda ver que no siempre sucede que $lim(\mathcal{F}) \neq lim(\overline{\mathcal{F}})$. Es decir, $lim(\mathcal{F}) \not\subset lim(\overline{\mathcal{F}})$. Consideremos una topología τ sobre X distinta a la topología discreta tal que existe $A \in \tau$ con $X - A \notin \tau$. Tomemos $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$. Con esto, $A \in \mathcal{F}$ y $A \notin \overline{\mathcal{F}}$. Tenemos que si $x \in A$ entonces $\mathcal{F} \to x$. Sin embargo, $\overline{\mathcal{F}}$ no converge a x puesto que $A \in \mathcal{N}(x)$ y $A \notin \overline{\mathcal{F}}$.

8. Primero probamos que $adh(\mathcal{F}_A) = \overline{A}$.
   En efecto, por la primera propiedad de la presente proposición $adh(\mathcal{F}_A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} \overline{F}$. Por Proposición 2.18-(2), $core(\mathcal{F}_A) = A$. Puesto que $core(\mathcal{F}_A) \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$, $\overline{A} \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} \overline{F}$. Es decir, $\overline{A} \subset adh(\mathcal{F}_A$. Ahora, si $x \in adh(\mathcal{F}_A)$, entonces para todo $F \in \mathcal{F}_A$ y toda $V \in \mathcal{N}(x)$, $F \cap V \neq \emptyset$. En particular para toda $V \in \mathcal{N}(x)$: $A \cap V \neq \emptyset$. Así, $x \in \overline{A}$. Para la otra igualdad, considerando $A = \{x\}$ obtenemos que $adh(\mathcal{F}_x) = \overline{\{x\}}$. Como $\mathcal{F}_x$ es un

ultrafiltro, por la tercer propiedad de la presente proposición, $adh(\mathcal{F}_x) = lim(\mathcal{F}_x)$. Así, se tiene que $adh(\mathcal{F}_x) = lim(\mathcal{F}_x) = \overline{\{x\}}$.

9. Supongamos que τ_1, τ_2 son topologías sobre X tales que $\tau_1 \subset \tau_2$. Sea $x \in lim_{\tau_2}(\mathcal{F})$ y $V_1 \in \tau_1$ tal que $x \in V_1$. Por nuestra hipótesis tenemos que $V_1 \in \tau_2$. Con esto existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V_1$. Luego $x \in lim_{\tau_1}(\mathcal{F})$. Por tanto, $lim_{\tau_2}(\mathcal{F}) \subset lim_{\tau_1}(\mathcal{F})$.
   Sea ahora $x \in adh_{\tau_2}(\mathcal{F})$. Sean $F \in \mathcal{F}$ y $V_1 \in \tau_1$ arbitrarios. Como $\tau_1 \subset \tau_2$, $V_1 \in \tau_2$. Así, $V_1 \cap F \neq \emptyset$. De aquí, $x \in adh_{\tau_1}$. Por tanto, $adh_{\tau_2}(\mathcal{F}) \subset adh_{\tau_1}(\mathcal{F})$.

Con todo, la Proposición 2.74 queda demostrada. □

2.5. $\mathcal{Z}$-filtros

Dentro de la Teoría de filtros, hay tipos especiales de filtros que permiten describir nociones y resultados de Topología y Teoría de conjuntos de una forma mas sencilla. En esta sección describiremos algunos de ellos, que son los que nos ayudan a desarrollar la teoría de la sección de aplicaciones. Para ello, comenzamos con los $\mathcal{P}$-filtros. Para este tipo de filtros consideremos un espacio topológico (X, τ) y $\mathcal{P}$ una familia de subconjuntos X tales que si $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, entonces $P_1 \cap P_2$ y $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}$. Así, con estas suposiciones tenemos lo siguiente.

2.75 Definición. Un *$\mathcal{P}$-filtro sobre X* es una colección $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. Si $P_1, P_2 \in \mathcal{F}$, entonces $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{F}$.
3. Sean $P_1 \in \mathcal{F}$ y $P_2 \in \mathcal{P}$. Si $P_1 \subset P_2$, entonces $P_2 \in \mathcal{F}$.

Veamos los siguientes ejemplos.

2.76 Ejemplo. Si $\mathcal{P} = \mathbb{P}(X)$, entonces los $\mathcal{P}$-filtros son los filtros sobre X. Esto nos dice que los $\mathcal{P}$-filtros pueden verse como una generalización de los filtros.

2.77 Ejemplo. Si $\mathcal{P} = \tau$, entonces los $\mathcal{P}$-filtros son llamados *filtros abiertos*.

2.78 Ejemplo. Si $\mathcal{P} = \{P \subset X \mid X - P \in \tau\}$, entonces los $\mathcal{P}$-filtros son llamados *filtros cerrados*.

2.79 Definición. Sean $\mathcal{F}$ un $\mathcal{P}$-filtro sobre X y $p \in X$.

1. Decimos que $\mathcal{F}$ *converge a p*, si para cada $V \in \mathcal{N}(p)$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V$. Escribimos $\mathcal{F} \to p$.
2. Decimos que $\mathcal{F}$ tiene a p como *punto de aglomeración* si $p \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Escribimos $\mathcal{F} \succ p$.

Podemos observar que la Definición 2.79-(2) es equivalente a la Definición 2.53-(2). Pues si $x \in \overline{F}$ entonces para todo $V \in \mathcal{N}(x)$, por la Proposición 1.32, $F \cap V \neq \emptyset$.

Surge de manera análoga a la Definición 2.40 el siguiente concepto.

2.80 Definición. Un $\mathcal{P}$-ultrafiltro es un $\mathcal{P}$-filtro maximal.

La siguiente proposición es una caracterización de un $\mathcal{P}$-ultrafiltro. Este resultado permite trabajar sobre el ultrafiltro sin la necesidad de estar empleando las nociones complicadas de maximalidad con el orden dado por la inclusión.(vea Teorema 2.45-(2))

2.81 Proposición. Para un $\mathcal{P}$-filtro $\mathcal{F}$ son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{P}$-ultrafiltro.

2. Si $P \in \mathcal{P}$ y $P \cap F \neq \emptyset$, para cada $F \in \mathcal{F}$, entonces $P \in \mathcal{F}$.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$ (2) Supongamos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{P}$-ultrafiltro. Sea $P' \in \mathcal{P}$ tal que $P' \cap F \neq \emptyset$, para cada $F \in \mathcal{F}$. Fijemos $F \in \mathcal{F}$. Definamos el conjunto

$$\mathcal{P}_F = \{P \in \mathcal{P} \mid P' \cap F \subset P\}.$$

Veamos que $\mathcal{P}_F$ es $\mathcal{P}$-filtro. Es claro que $\mathcal{P}_F \subset \mathcal{P}$. Ahora,

1. Puesto que $P', F \in \mathcal{P}_F$,$\mathcal{P}_F \neq \emptyset$. Dado que $P' \cap F \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{P}_F$.

2. Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_F$. Entonces $P' \cap F \subset P_1$ y $P' \cap F \subset P_2$. Luego $P' \cap F \subset P_1 \cap P_2$. Así, $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}_F$.

3. Sea $P \in \mathcal{P}$ tal que $P_1 \subset P$, para algún $P_1 \in \mathcal{P}_F$. Entonces como $P' \cap F \subset P_1$, se sigue, por transitividad que, $P' \cap F \subset P$. Por tanto, $P \in \mathcal{P}_F$.

Por otro lado, veamos que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_F$ es un $\mathcal{P}$-filtro. En efecto,

1. Puesto que cada $\mathcal{P}_F \neq \emptyset$, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_F \neq \emptyset$. Además, como para cada $F \in \mathcal{F}$: $\emptyset \notin \mathcal{P}_F$, obtenemos que $\emptyset \notin \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_F$.

2. Sean $P_1, P_2 \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_F$. Luego $P_1 \in \mathcal{P}_{F_1}$ y $P_2 \in \mathcal{P}_{F_2}$ para algunos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. De aquí, $P' \cap F_1 \subset P_1$ y $P' \cap F_2 \subset P_2$. Como $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $(P' \cap F_1) \cap (P' \cap F_2) \neq \emptyset$. Además $(P' \cap F_1) \cap (P' \cap F_2) \subset P_1 \cap P_2$. Con esto, $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}_{F_1 \cap F_2} \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_F$, así $P_1 \cap P_2 \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_F$.

3. Sea $P \in \mathcal{P}$ tal que $P_1 \subset P$, para algún $P_1 \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_F$. Tenemos que $P_1 \in \mathcal{P}_{F_1}$, para algún $F_1 \in \mathcal{F}$, es decir, $P' \cap F_1 \subset P_1$. Por transitividad, obtenemos que $P' \cap F_1 \subset P$. Luego, $P \in \mathcal{P}_{F_1}$, y por tanto $P \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_F$.

Es claro que $\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{P}_F\subset\mathcal{P}$. Con esto tenemos que $\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{P}_F$ es $\mathcal{P}$-filtro.
Veamos que $\mathcal{F}=\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{P}_F$. Tenemos que, para cada $F\in\mathcal{F}$, $F\in\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{P}_F$, y así $\mathcal{F}\subset\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{P}_F$. Dado que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{P}$-ultrafiltro (recordar Definición 2.80), obtenemos la igualdad. Finalmente, para cada $F\in\mathcal{F}$, $P'\in\mathcal{P}_F$. Entonces, $P'\in\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{P}_F=\mathcal{F}$.
(2)$\Rightarrow$ (1) Supongamos que se cumple (2). Sea $\mathcal{G}$ un $\mathcal{P}$-filtro tal que $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$. Por demostrar que $\mathcal{G}=\mathcal{F}$. Para ello sólo falta ver que $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$. Sea $G\in\mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$, al ser $\mathcal{G}$ $\mathcal{P}$-filtro tenemos que para todo $F\in\mathcal{F}$, $G\cap F\in\mathcal{G}$. Puesto que $\mathcal{G}$ es $\mathcal{P}$-filtro, $G\cap F\neq\emptyset$. Por (2) obtenemos ahora que $G\in\mathcal{F}$. Así, $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$. Luego, $\mathcal{G}=\mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es $\mathcal{P}$-ultrafiltro. □

El siguiente teorema garantiza la existencia de $\mathcal{P}$-ultrafiltros. Su demostración es análoga a la demostración del Teorema 2.44.

2.82 Teorema. Todo $\mathcal{P}$-filtro está contenido en un $\mathcal{P}$-ultrafiltro.

De manera similar a la Definición 2.20, tenemos:

2.83 Definición. Decimos que un $\mathcal{P}$-filtro $\mathcal{F}$ es *primo*, si para $P_1,P_2\in\mathcal{P}$ tales que $P_1\cup P_2\in\mathcal{F}$ tenemos que $P_1\in\mathcal{F}$ o $P_2\in\mathcal{F}$.

De la Definición 2.83 tenemos nuestro siguiente teorema, el cual es una condición necesaria para que un $\mathcal{P}$-filtro sea un $\mathcal{P}$-ultrafiltro. Recordemos el Teorema 2.45-(4).

2.84 Teorema. Todo $\mathcal{P}$-ultrafiltro $\mathcal{F}$ es primo.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{P}$-ultrafiltro. Sean $P_1,P_2\in\mathcal{P}$ tales que $P_1\cup P_2\in\mathcal{F}$. Supongamos que $P_1\notin\mathcal{F}$ y $P_2\notin\mathcal{F}$. Luego, existen $F_1,F_2\in\mathcal{F}$ tales que $P_1\cap F_1=\emptyset$ y $P_2\cap F_2=\emptyset$. Con lo anterior se sigue que $P_1\cap(F_1\cap F_2)=\emptyset$ y $P_2\cap(F_1\cap F_2)=\emptyset$. Dado que $F_1\cap F_2\in\mathcal{F}$ y $P_1\cup P_2\in\mathcal{F}$ entonces

$$\begin{aligned}\emptyset&\neq(P_1\cup P_2)\cap(F_1\cap F_2)\\&=(P_1\cap(F_1\cap F_2))\cup(P_2\cap(F_1\cap F_2)).\end{aligned}$$

Esto es una contradicción puesto que $P_1\cap(F_1\cap F_2)=\emptyset$ y $P_2\cap(F_1\cap F_2)=\emptyset$. Así, $P_1\in\mathcal{F}$ o $P_2\in\mathcal{F}$. □

El siguiente resultado es bastante importante, puesto que lo empleamos en la construcción de la compactificación de Stone- Čech, específicamente en la Proposición 4.8.

2.85 Proposición. Todo $\mathcal{P}$-filtro primo $\mathcal{F}$ está contenido en un único $\mathcal{P}$-ultrafiltro.

La demostración de la Proposición 2.85 no se incluye. La demostración directa no resulta tan trivial, la única prueba que encontramos hace uso de la dualidad de los $\mathcal{Z}$-filtros con los ideales. Es decir, se necesitan demostrar varios resultados sobre ideales, de los cuales una consecuencia resulta la Proposición 2.85 gracias a que los ideales son duales a los filtros. Dicha prueba se puede consultar en [9, Pág. 30].

A continuación tratamos los $\mathcal{Z}$-filtros, los cuales son un caso especial de los $\mathcal{P}$-filtros. Este tipo particular de filtros son los que ayudarán posteriormente a demostrar el teorema de la compactificación de Stone-Čech. Recordemos la definición de cero conjunto, Definición 1.74.

2.86 Definición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P} = \{Z \subset X \mid Z \text{ es un cero conjunto}\}$. Entonces los $\mathcal{P}$-filtros sobre X son llamados *$\mathcal{Z}$-filtros*.

Recordando el Ejemplo 2.6, tenemos lo siguiente.

2.87 Ejemplo. Sean $x \in X$ y $\mathcal{F}_x = \{Z \subset X \mid Z \text{ es cero un conjunto y } x \in Z\}$. Entonces $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{Z}$-filtro. En efecto,

- Tenemos que $\emptyset \notin \mathcal{F}_x$, pues si estuviera tendríamos que $x \in \emptyset$. Además, al ser X un cero conjunto(ver Proposición 1.75), $X \in \mathcal{F}_x$. Así $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$.
- Si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in Z_1$ y $x \in Z_2$. Luego $x \in Z_1 \cap Z_2$. Por Proposición 1.76-(1), $Z_1 \cap Z_2$ es un cero conjunto. Así, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}_x$.
- Sean Z_1 un cero conjunto y $Z \in \mathcal{F}_x$ tales que $Z \subset Z_1$. Entonces, como $x \in Z$, $x \in Z_1$. Así $Z_1 \in \mathcal{F}_x$.

A $\mathcal{F}_x$ le llamamos el *$\mathcal{Z}$-filtro principal sobre x*.

Teniendo en mente la Proposición 1.79 y recordando las Definiciones 2.79-(2) y 2.83 tenemos el siguiente resultado.

2.88 Teorema. Sea (X, τ) un espacio completamente regular. Entonces todo $\mathcal{Z}$-filtro primo tiene a lo más un punto de aglomeración.

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro en X y $p, q \in adh(\mathcal{F})$ tales que $p \neq q$. Como X es un espacio de Hausdorff, existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Tenemos que $X - U$ y $X - V$ son conjuntos cerrados. Por la Proposición 1.79 podemos supones que $X - U$ y $X - V$ son cero conjuntos. Al ser $U \cap V = \emptyset$, $(X - U) \cup (X - V) = X$. Recordemos que $X \in \mathcal{F}$. Así, $(X - U) \cup (X - V) \in \mathcal{F}$. Al ser $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro primo, o $X - U \in \mathcal{F}$ o $X - V \in \mathcal{F}$.
Supongamos que $X - U \in \mathcal{F}$. Como $p \in adh(\mathcal{F})$, recordar Definición 2.79-(2), $(X - U) \cap U \neq \emptyset$. Lo anterior es una contradicción.
Ahora, si suponemos que $(X - V) \in \mathcal{F}$, también obtenemos que $(X - V) \cap V \neq \emptyset$. Lo cual no es posible. La contradicción surge de suponer $p \neq q$. Por tanto, $p = q$, Así, $\mathcal{F}$ tiene a lo más un punto de aglomeración. $\square$

Capítulo 3

Filtros y redes

En Topología dos de las formas para describir convergencia en los espacios topológicos son: los filtros y las redes. En este capítulo hacemos el análisis sobre la relación que existe entre los filtros y las redes. La equivalencia entre ambas teorías, según [7], es notada por Bartle en 1955, al igual que por Bruns y Schmidt. Debemos mencionar que en este capítulo solamente se mencionan aspectos generales de la teoría de redes. Para un panorama más general podemos consultar [26].

3.1. Redes

La idea de red viene inspirada en la noción de sucesión (recordar Definición 1.63). La cuestión era generalizar hacia los espacios topológicos lo que sucedía sobre los espacios métricos con las sucesiones. Los primeros estudios para obtener dicha generalización fueron hechos por E. H. Moore y más tarde por Smith (ver [11]). La teoría que obtuvieron fue la de redes. Al analizar la posible generalización de las sucesiones, podemos observar que el conjunto $\mathbb{N}$ limita la utilidad de la Definición 1.63 solamente a los espacios primero numerables. La idea es entonces tener una función con un dominio que permita extender los resultados conocidos sobre sucesiones a espacios más generales, a fin de obtener una noción análoga a la Definición 1.63. En este estudio se obtuvo que los conjuntos más adecuados para tener una generalización de sucesión son los conjuntos dirigidos.

3.1 Definición. Un conjunto Λ no vacío es un *conjunto dirigido* si existe una relación $\leq$ sobre Λ tal que:

1. Si $\lambda \in \Lambda$ entonces $\lambda \leq \lambda$,

2. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$,

3. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

La relación $\leq$ la llamamos una *dirección sobre* Λ, o diremos que $\leq$ dirige a Λ. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ también usamos la notación $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

A continuación algunos ejemplos de conjuntos dirigidos. Su justificación no es difícil por lo cual se omite.

3.2 Ejemplo. Tenemos que el conjunto $\mathbb{N}$ es un conjunto dirigido, bajo la relación usual sobre $\mathbb{N}$.

3.3 Ejemplo. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y Λ una base de vecindades de x (vea Definición 1.15). Entonces Λ es un conjunto dirigido bajo la dirección $\leq$ dada por $V_1 \leq V_2$ si y sólo si $V_2 \subset V_1$ para cualesquiera $V_1, V_2 \in \Lambda$.

3.4 Ejemplo. Sea $\mathcal{C}$ la colección de todas las particiones finitas del intervalo cerrado $[a, b]$ en subintervalos cerrados. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$. Definimos $\leq$ por $A_1 \leq A_2$ si A_2 refina a A_1, es decir, $A_2 \subset A_1$. Entonces $\leq$ es una dirección sobre $\mathcal{C}$. Así, $\mathcal{C}$ es un conjunto dirigido. Para una referencia más amplia de este ejemplo podemos consultar [26].

Ahora enunciamos la noción de red.

3.5 Definición. Sea X un conjunto. Una *red* en X es una función $P : \Lambda \to X$ donde Λ es un conjunto dirigido.

3.6 Notación. El punto $P(\lambda)$ lo denotamos como x_λ y la red basada en Λ por $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

La Definición 3.5 también es conocida como sucesión de Moore-Smith ([11]).

3.7 Ejemplo. Recordando el Ejemplo 3.2, tenemos que toda sucesión es una red.

Tenemos a continuación las definiciones de convergencia y aglomeración para redes.

3.8 Definición. Sean X un espacio topológico, $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X y $x \in X$.

1. La red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *converge* a x si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para cada $\lambda \geq \lambda_0$ tenemos que $x_\lambda \in V$.

2. La red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *aglomera en* x si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$ y cada $\lambda_0 \in \Lambda$ existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in V$.

3.9 Ejemplo. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y Λ cualquier base de vecindades sobre x. Consideremos la relación $\leq$ definida en el Ejemplo 3.3. Sea $V \in \Lambda$. Como V es vecindad de x, $V \neq \emptyset$. Luego, existe $x_V \in V$. Para cada $V \in \Lambda$, fijemos $x_V \in V$. Entonces obtenemos una red $\{x_V\}_{V \in \Lambda}$ en X y no es difícil ver que $\{x_V\}_{V \in \Lambda}$ converge a x.

3.10 Ejemplo. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $\mathcal{C}$ el conjunto dirigido del Ejemplo 3.4. Definimos las redes $P_L : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ y $P_U : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ como $P_L(A)$ y $P_U(A)$ la suma inferior y superior de Riemann, respectivamente, sobre la partición A. Cuando ambas redes convergen hacia un mismo número c, significa que $\int_a^b f(x)dx = c$. Según [26], este es el primer ejemplo de red dado por Moore y Smith. Para ver un desarrollo más detallado consultar [26, Pág. 74].

3.2. Relación entre filtros y redes

A continuación vemos que se pueden definir redes a partir de filtros y filtros a partir de redes. Lo importante, es analizar el comportamiento de filtros con su red generada (o de una red con su filtro generado).

3.11 Proposición. Sean X un espacio topológico, Λ un conjunto dirigido y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $B_\lambda = \{x_{\lambda_0} \mid \lambda_0 \geq \lambda\}$. Entonces la familia $\mathcal{B}_\Lambda = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una base de filtro sobre X.

Demostración. Veamos que $\mathcal{B}_\Lambda$ es una base de filtro (recordar Definición 2.23).

1. Como Λ es un conjunto dirigido, $\Lambda \neq \emptyset$. Luego existe al menos un $\lambda \in \Lambda$. Como $B_\lambda \in \mathcal{B}_\Lambda$, $\mathcal{B}_\Lambda \neq \emptyset$. Para toda $\lambda \in \Lambda$ tenemos que $x_\lambda \in B_\lambda$. Así, $B_\lambda \neq \emptyset$. Por tanto, $\emptyset \notin \mathcal{B}_\Lambda$.

2. Tenemos que $B_{\lambda_1}, B_{\lambda_2} \in \mathcal{B}_\Lambda$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Como Λ es un conjunto dirigido, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda$ y $\lambda_2 \leq \lambda$. Se cumple que $B_\lambda \in \mathcal{B}_\Lambda$. Veamos ahora que $B_\lambda \subset B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2}$. Sea $x_{\lambda_0} \in B_\lambda$. Por definición de B_λ, $\lambda \leq \lambda_0$. Como $\lambda_1 \leq \lambda$ y $\lambda_2 \leq \lambda$, por transitividad del conjunto dirigido Λ, $\lambda_1 \leq \lambda_0$ y $\lambda_2 \leq \lambda_0$. Así, $x_{\lambda_0} \in B_{\lambda_1}$ y $x_{\lambda_0} \in B_{\lambda_2}$. Por tanto, $x_{\lambda_0} \in B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2}$.

Por tanto $\mathcal{B}_\Lambda$ es base de filtro sobre X. □

3.12 Definición. Sean X un espacio topológico, Λ un conjunto dirigido y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X. Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $B_\lambda = \{x_{\lambda_0} \mid \lambda_0 \geq \lambda\}$. El filtro $\mathcal{F}(\mathcal{B}_\Lambda)$ es llamado *el filtro generado por la red* $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Ahora veamos la otra situación, que a partir de un filtro se puede definir una red. Para ello, nos auxiliamos de la siguiente proposición.

3.13 Proposición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces el conjunto $\Lambda_\mathcal{F} = \{(x, F) \mid x \in F \in \mathcal{F}\}$ es un conjunto dirigido, por la relación $\leq$ definida como $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ si y sólo si $F_2 \subset F_1$.

Demostración.

1. Sea $(x, F) \in \Lambda_\mathcal{F}$. Como $F \subset F$, $(x, F) \leq (x, F)$.

2. Sean $(x_1, F_1), (x_2, F_2), (x_3, F_3) \in \Lambda_\mathcal{F}$ tales que $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ y $(x_2, F_2) \leq (x_3, F_3)$. Luego $F_2 \subset F_1$ y $F_3 \subset F_2$. Por transitividad, $F_3 \subset F_1$. Así, $(x_1, F_1) \leq (x_3, F_3)$.

3. Sean $(x_1, F_1), (x_2, F_2) \in \Lambda_\mathcal{F}$. Consideremos $F = F_1 \cap F_2$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, $F \neq \emptyset$. Sea $x \in F$. Tenemos que $(x_1, F_1) \leq (x, F)$ y $(x_2, F_2) \leq (x, F)$, pues $F = F_1 \cap F_2 \subset F_1$ y $F = F_1 \cap F_2 \subset F_2$.

Tenemos que 1, 2 y 3 satisfacen la Definición 3.1. Por tanto, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ es un conjunto dirigido. □

Con la Proposición 3.13, tenemos la siguiente definición.

3.14 Definición. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Definimos a *la red basada sobre* $\mathcal{F}$ por la red $P_{\mathcal{F}} : \Lambda_{\mathcal{F}} \to X$ definida por $P_{\mathcal{F}}((x, F)) = x$, para cada $(x, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$.

Una pregunta que surge de manera inmediata es la relación que pueda existir entre un filtro arbitrario y el filtro generado por la red basada sobre el filtro arbitrario. De manera análoga, qué pasa con una red arbitraria y la red basada sobre el filtro generado por la red arbitraria. A continuación damos respuestas a estas cuestiones
La primera pregunta tiene como respuesta que ambos filtros son iguales. El siguiente teorema muestra esta equivalencia.

3.15 Teorema. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces $\mathcal{F}$ es igual al filtro generado por la red $P_{\mathcal{F}}$.

Demostración. Sea $P_{\mathcal{F}} : \Lambda_{\mathcal{F}} \to X$ la red basada sobre $\mathcal{F}$, donde $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{(x, F) \mid x \in F \in \mathcal{F}\}$ como en la Proposición 3.13. Para cada $(x, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$, sea $B_{(x,F)} = \{P_{\mathcal{F}}((x_1, F_1)) \mid (x_1, F_1) \geq (x, F)\}$.
Por la Proposición 3.11,

$$\mathcal{B}_{\Lambda_{\mathcal{F}}} = \{B_{(x,F)} \mid (x, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}\},$$

es una base de filtro en X.
Probamos que $\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\Lambda_{\mathcal{F}}}) = \mathcal{F}$. Sea $B_{(x_0,F)} \in \mathcal{B}_{\Lambda_{\mathcal{F}}}$, para algún $(x_0, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$, entonces

$$B_{(x_0,F)} = \{P_{\mathcal{F}}((x_1, F_1)) \mid (x_1, F_1) \geq (x_0, F)\}.$$

Para cada $x \in F \in \mathcal{F}$, $x = P_{\mathcal{F}}((x, F))$. Al ser $F \subset F$, $(x, F) \geq (x_0, F)$. Luego, $x = P_{\mathcal{F}}((x, F)) \in B_{(x_0,F)}$. Así, $F \subset B_{(x_0,F)}$.
Como $\mathcal{F}$ es filtro entonces obtenemos que $B_{(x_0,F)} \in \mathcal{F}$.
Así, $\mathcal{B}_{\Lambda_{\mathcal{F}}} \subset \mathcal{F}$. Luego, $\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\Lambda_{\mathcal{F}}}) \subset \mathcal{F}$.
Sean $F \in \mathcal{F}$ y $x_0 \in F$. Por demostrar que $B_{(x_0,F)} \subset F$.
Sea $(x_1, F_1) \geq (x_0, F)$ entonces $F_1 \subset F$. Como $x_1 \in F_1$ resulta que $x_1 \in F$. Pero $x_1 = P_{\mathcal{F}}((x_1, F_1))$, así pues, $P_{\mathcal{F}}((x_1, F_1)) \in F$ para todo $(x_1, F_1) \geq (x_0, F)$. Es decir, $B_{(x_0,F)} \subset F$.
Dado que $B_{(x_0,F)} \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_{\Lambda_{\mathcal{F}}})$ y $\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\Lambda_{\mathcal{F}}})$ es filtro, $F \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_{\Lambda_{\mathcal{F}}})$. □

Ahora, para una red arbitraria y la red basada sobre el filtro generado por la red arbitraria tenemos que no siempre se da la igualdad. Recordemos que una red es una función de un conjunto dirigido en un espacio topológico. Luego, dada una red P con dominio en un conjunto dirigido Λ, la red basada en el filtro generado por P no necesariamente tiene como dominio a Λ. Así, ambas redes no son iguales. Para ello observemos el siguiente ejemplo.

3.16 Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual (ver Definición 1.22). Por el Ejemplo 3.7, $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una red. Tenemos que $B_\lambda = \{\frac{1}{k} \mid k \geq \lambda\}$, $\mathcal{F}(\mathcal{B}_\mathbb{N}) = \{F \subset X \mid B_\lambda \subset F$ para algún $\lambda \in \mathbb{N}\}$ y $\Lambda_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_\mathbb{N})} = \{(x, F) \mid x \in F$ y $F \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_\mathbb{N})\}$. Dado que $\mathbb{N} \neq \Lambda_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_\mathbb{N})}$, tenemos las redes $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $P_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_\mathbb{N})}$ no son iguales.

Concluimos el capítulo con dos teoremas que nos muestran la relación que existe entre un filtro y la red basada en éste (y viceversa), todo en el contexto de convergencia y puntos de aglomeración. El primer teorema nos ilustra las equivalencias respecto a la convergencia de un filtro con la red basada en él. También la relación de una red convergente con el filtro generado por dicha red.

3.17 Teorema. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$.

1. $\mathcal{F}$ converge a x si y sólo si la red basada sobre $\mathcal{F}$ converge a x.

2. Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x si y sólo si el filtro generado por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x.

Demostración.
(1) Supongamos que $\mathcal{F}$ converge a x. Entonces para toda $V \in \mathcal{N}(x)$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V$. Dado que $F \neq \emptyset$, existe $y \in F$. Así, el par $(y, F) \in \Lambda_\mathcal{F}$. Sea $(x_1, F_1) \in \Lambda_\mathcal{F}$ tal que $(y, F) \leq (x_1, F_1)$. Por la relación definida en $\Lambda_\mathcal{F}$ tenemos que $F_1 \subset F$. Por lo anterior tenemos que $x_1 \in F_1 \subset V$. Así, $x_1 \in V$. Pero $x_1 = P_\mathcal{F}((x_1, F_1))$. Por tanto $P_\mathcal{F}$ converge a x.
Recíprocamente, supongamos que $P_\mathcal{F}$ converge a x y sea $V \in \mathcal{N}(x)$. Entonces existe $(y, F) \in \Lambda_\mathcal{F}$ tal que si $(x_1, F_1) \geq (y, F)$ entonces $x_1 = P_\mathcal{F}((x_1, F_1)) \in V$. Veamos que $F \subset V$. Sea $x_1 \in F$. El par $(x_1, F) \in \Lambda_\mathcal{F}$ y, además, $(x_1, F) \geq (y, F)$. Con esto tenemos que $x_1 = P_\mathcal{F}((x_1, F)) \in V$. Por tanto $F \subset V$ y así $\mathcal{F}$ converge a x.
(2) La demostración de este inciso es similar al del inciso (1). $\square$

El segundo teorema nos muestra algo similar al Teorema 3.17, ahora para el caso de los puntos de aglomeración(recuerde la Definición 2.53-(2)).

3.18 Teorema. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$.

1. $\mathcal{F}$ aglomera en x si y sólo si la red basada sobre $\mathcal{F}$ tiene a x como punto de aglomeración.

2. Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene a x como punto de aglomeración si y sólo si el filtro generado por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ aglomera en x.

Demostración.

1. Supongamos que $\mathcal{F}$ aglomera en x. Sean $V \in \mathcal{N}(x)$ y y un elemento de la red $P_\mathcal{F}$. Se cumple que $y = P_\mathcal{F}((y, F_y))$, para algún $F_y \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \succ x$, tenemos que $F_y \cap V \neq \emptyset$. Sea $z \in F_y \cap V$. Es fácil ver que $(z, F_y) \in \Lambda_\mathcal{F}$ y $(y, F_y) \leq (z, F_y)$. Así, $P_\mathcal{F}((z, F_y)) = z \in V$.

Lo anterior satisface la Definición 3.8-(2). Por tanto, $P_{\mathcal{F}}$ tiene a x como punto de aglomeración.

Recíprocamente, supongamos que $P_{\mathcal{F}}$ tiene a x como punto de aglomeración. Sean $V \in \mathcal{N}(x)$, $F \in \mathcal{F}$ y $y \in F$. Tenemos que $(y, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. Por hipótesis, existe $(z, F_1) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ tal que $(y, F) \leq (z, F_1)$ y $P_{\mathcal{F}}((z, F_1)) \in V$. Como $(y, F) \leq (z, F_1)$, $F_1 \subset F$. Luego, por transitividad, $z \in F$. Con todo $z = P_{\mathcal{F}}((z, F_1)) \in V$ y $z \in F$. Así, $F \cap V \neq \emptyset$. Se sigue que $\mathcal{F} \succ x$ (recordar la Definición 2.53-(2)).

2. La demostración de este inciso es análoga a la demostración de (1).

Así, el Teorema 3.18 queda demostrado. $\square$

Los Teoremas 3.17 y 3.18 nos muestran herramientas importantes para describir la convergencia sobre los espacios topológicos. Lo trascendental de estos resultados es la opción que otorga de trabajar ya sea con redes o con filtros. Esto nos permite trabajar con la teoría que más se adecúe.

Según [26], se prefieren los filtros debido a que sólo dependen de teoría de conjuntos y de las propiedades del espacio topológico. En contraparte las redes complican los cálculos algebraicos debido al manejo de los conjuntos dirigidos. Dado que las redes y los filtros son conceptos equivalentes en la teoría de convergencia, la demostración de varios resultados usando redes es semejante si se usan los filtros. Un ejemplo de esto, es la demostración del teorema de Tychonoff incluida en la tesis que posee una idea similar a la demostración utilizando redes presentada en [26, Pág. 120]. La ventaja que tiene la teoría de filtros sobre la de redes, es que se eliminan la dependencia de índices y de conjuntos no numerables, por una noción más elegante, práctica y sencilla de estudiar. Por último, no podemos dejar de mencionar que al ser los filtros una noción propia de la Teoría de Conjuntos, su aplicación se extiende a diversos temas a parte de la teoría de convergencia, lo que no sucede con las redes.

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. El teorema de Tychonoff

El Teorema de Tychonoff establece que el producto de cualquier colección de espacios topológicos compactos es compacto. Debe su nombre al matemático Andrey Nikolayevich Tychonoff, quien lo probó para el producto de los intervalos unitarios en 1930, y en 1935 lo generalizó para espacios arbitrarios. Este teorema es uno de los más importantes en topología debido a una gran aplicación a múltiples resultados en matemáticas, por mencionar algunos:

- La construcción de la compactificación de Stone-Cech(para espacios completamente regulares).
- El Teorema de Ascoli.

Cabe mencionar que el Teorema de Tychonoff es equivalente al Axioma de Elección, en [21, Pág. 102] podemos encontrar una demostración de esta equivalencia.

El siguiente teorema es una caracterización de compacidad utilizando filtros y ultrafiltros. Además, incluimos otra equivalencia de compacidad usando familias de intersecciones finitas, para su utilización posterior.

4.1 Teorema. Sea X un espacio topológico. Entonces son equivalentes:

1. X es compacto.
2. Toda familia $\mathcal{A}$ de conjuntos cerrados no vacíos con la propiedad de la intersección finita cumple que $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.
3. Para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X, existe $x \in X$ tal que $\mathcal{F} \succ x$.
4. Todo ultrafiltro sobre X converge.

Demostración.
1)⇒2)] Supongamos que X es compacto. Sea $\mathcal{A}$ una familia de cerrados no vacíos con la propiedad de la intersección finita (recordar Definición 2.10) y supongamos que $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Observemos que, para toda $A \in \mathcal{A}$, $X - A$ es abierto en X. Sea $\mathcal{C} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$. Observemos que

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{C} &= \bigcup_{A \in \mathcal{A}} X - A \\ &= X - \bigcap \mathcal{A} \\ &= X - \emptyset \\ &= X. \end{aligned}$$

De donde, $\mathcal{C}$ es un cubierta abierta de X. Por ser X compacto, existen $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n (X - A_i)$.
Se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset,$$

puesto que $X - \bigcup_{i=1}^n (X - A_i) = \bigcap_{i=1}^n A_i$, lo cual es una contradicción, dado que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por tanto, $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.
2)⇒3)] Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Afirmamos que el conjunto $\mathcal{A} = \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.
En efecto, sean $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n \in \mathcal{A}$. Como $F_i \subset \overline{F}_i$, para todo i, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^n F_i \subset \bigcap_{i=1}^n \overline{F}_i.$$

Notemos que $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$, pues por el Teorema 2.11, $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Así, $\bigcap_{i=1}^n \overline{F}_i \neq \emptyset$. Con esto, $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita.
Ahora, por 2) existe $x \in X$ tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{A}} \overline{F}$. Por el Teorema 2.63-(1) y (3), obtenemos que $\mathcal{F} \succ x$.
3)⇒ 4)] Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Tenemos que $\mathcal{U}$ es, en particular, un filtro. Luego, por 3), existe $x \in X$ tal que $\mathcal{U} \succ x$. Por el Teorema 2.64, tenemos que $\mathcal{U} \to x$.
4)⇒1)] Supongamos que todo ultrafiltro sobre X converge. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de X y supongamos que $\mathcal{C}$ no tiene subcubiertas finitas. Luego para toda subfamilia finita $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, se tiene que

$$X - \bigcup \mathcal{C}' \neq \emptyset.$$

Se puede verificar fácilmente que

$$\mathcal{B} = \{X - \bigcup \mathcal{C}' \mid \mathcal{C}' \subset \mathcal{C} \text{ finita}\}$$

es base de filtro sobre X. Por el Teorema 2.44, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{U},$$

donde $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es el filtro generado por $\mathcal{B}$. Por 4) tenemos que $\mathcal{U} \to x$, para algún $x \in X$. Al ser $\mathcal{C}$ cubierta abierta de X, existe un abierto $U \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{U} \to x$ (recordemos Definición 2.53-(1)), existe $F \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U$. Luego, $U \in \mathcal{U}$. Por otro lado, definiendo $\mathcal{C}' = \{U\}$ tenemos que $X - \bigcup \mathcal{C}' \in \mathcal{B}$, pues $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Así, $X - \bigcup \mathcal{C}' \in \mathcal{U}$. Puesto que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, tenemos que

$$U \cap (X - \bigcup \mathcal{C}') \in \mathcal{U}.$$

Pero $U \cap (X - \bigcup \mathcal{C}') = U \cap (X - U) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{C}$ admite subcubiertas finitas. Así, X es compacto. $\square$

Demostramos ahora el Teorema de Tychonoff. Recordemos la Definición 1.57.

4.2 Teorema. Sean I un conjunto no vacío y $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{\mathcal{S}})$ es compacto si y sólo si X_i es compacto, para todo $i \in I$.

Demostración. Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Supongamos que X es compacto. Fijemos $i \in I$. Por el Teorema 1.58, π_i es una función continua y sobreyectiva. Luego, por el Teorema 1.52, X_i es compacto. Por lo tanto, para todo $i \in I$, X_i es compacto.

Recíprocamente, supongamos que para todo $i \in I$, X_i es compacto. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro arbitrario sobre X. Sea $i \in I$. Por el Teorema 2.50, $\mathcal{U}_i = \pi_i(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro sobre X_i. Como X_i es compacto, por el Teorema 4.1-(1) y (4) existe $x_i \in X_i$ tal que $\mathcal{U}_i \to x_i$. Así, para todo $i \in I$, $\mathcal{U}_i \to x_i$. Definamos ahora, $x = (x_i)_{i \in I}$. Claramente $x \in X$. Luego, por la Proposición 2.71, $\mathcal{U} \to x$. Como $\mathcal{U}$ fue un ultrafiltro arbitrario sobre X, por el Teorema 4.1-(1) y (4), X es compacto. $\square$

Comparando esta demostración con otras demostraciones del Teorema de Tychonoff, podemos decir que esta resulta más sencilla, directa y de las más cortas. Por ejemplo, en [17] encontramos una demostración del Teorema 4.2 que por su desarrollo es bastante larga, además de ser difícil de asimilar de forma inmediata. Si analizamos con detenimiento la demostración de [17], si se tuvieran en consideración la Teoría de filtros, la construcción de tal demostración se pudiera simplificar, es decir, la demostración tendría la misma estructura pero sería más sencilla y corta. Para explicar esto mejor, en la demostración de [17] los primeros pasos que se hacen son

1. A partir de una familia con la propiedad de la intersección finita, $\mathcal{A}$, se obtiene una familia de conjuntos, $\mathcal{D}$, tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es maximal respecto al orden de la inclusión.

2. Se demuestra que las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{D}$ son elementos de $\mathcal{D}$ y todo conjunto que intersecta a todos los elementos de $\mathcal{D}$ es elemento de $\mathcal{D}$.

Dado que la prueba de los pasos anteriores es por construcción, se hace difícil el entendimiento del principio de la demostración del Teorema de Tychonoff. Con la ayuda de la Teoría de Filtros

podemos aligerar esta demostración. En el paso (1), al ser $\mathcal{A}$ una familia con la propiedad de la intersección finita, por la Proposición 2.34, $\mathcal{A}$ es una subbase de filtro de la cual podemos obtener un filtro. Y por el Teorema 2.44, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contiene a $\mathcal{A}$. Además, $\mathcal{U}$ coincide con $\mathcal{D}$. La propiedad (2) de la Definición 2.1 y la equivalencia (1)-(2) del Teorema 2.45 garantizan que se cumpla el paso (2). Considerando lo anterior, la demostración de [17] seguiría bajo la misma idea. Con esto observamos la ventaja que permiten los filtros de facilitar la obtención de resultados.
Una pregunta que puede surgir de manera inmediata, respecto al hecho de que las sucesiones toman un rol semejante al de filtros dentro de los espacios métricos, es acerca de la demostración del Teorema 4.2 para espacios métricos utilizando sucesiones. En [8, Pág. 280], se hace una demostración del Teorema de Tychonoff para espacios métricos empleando las sucesiones, la idea es la misma que utilizando filtros. La demostración con sucesiones usa las propiedades de la función proyección. Además de utilizar el bien conocido resultado para espacios métricos, que nos dice que un espacio métrico es compacto si y sólo si toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Esta equivalencia es análoga a la equivalencia (1)-(4) del Teorema 4.1. La idea de la demostración de [8] similar a la de filtros, excepto por los detalles que implica trabajar con sucesiones.

4.2. La compactificación de Stone-Čech

En este apartado de la tesis, obtenemos la compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular. Según en [25], H. Wallman mostró que para un espacio normal X, el espacio βX es homeomorfo al espacio de los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros de X. Por otro lado, en [5] se menciona que P. Samuel evitando el uso del anillo de funciones continuas optó por utilizar la Teoría de filtros para la construcción de la compactificación de Stone-Čech. A continuación exponemos una construcción de la compactificación de Stone-Čech utilizando las propiedades de los cero conjuntos de un espacio completamente regular y de la familia de los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros de dicho espacio. Según en [25], Čech fue el precursor del uso de los cero conjuntos para esta construcción.

Una proposición necesaria en esta sección es la siguiente, el resultado está relacionado con la existencia de puntos de aglomeración de un $\mathcal{Z}$-filtro.

4.3 Proposición. Sea X un espacio compacto y completamente regular. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro en X, entonces $\mathcal{F}$ tiene puntos de aglomeración.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro en X. Tenemos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita (vea Teorema 2.11). Al ser $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos cerrados en X, por el Teorema 4.1-(1) y (2), $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Sea $p \in \bigcap \mathcal{F}$. Para toda $F \in \mathcal{F}$, $p \in F$. Al ser F un conjunto cerrado, $p \in \overline{F}$. Recordando la Definición 2.79-(2), tenemos que $\mathcal{F} \succ p$. Por tanto, $adh(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ (vea Definición 2.73). $\square$

4.4 Corolario. Sea X un espacio compacto y completamente regular. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro primo en X entonces $\mathcal{F}$ tiene un único punto de aglomeración.

Demostración. Al ser $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, por la Proposición 4.3, se asegura la existencia de puntos de aglomeración de $\mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F}$ es primo, por el Teorema 2.88, $\mathcal{F}$ tiene a lo más un punto de aglomeración. Con todo, $\mathcal{F}$ tiene un único punto de aglomeración. □

Obtengamos ahora la descripción de βX como $\mathcal{Z}$-ultrafiltros.

4.5 Notación. Si X es un espacio completamente regular, ponemos $BX = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es } \mathcal{Z}-\text{ultrafiltro en } X\}$. Además, para cada cero conjunto Z en X, definimos y denotamos a $Z^* = \{\mathcal{U} \in BX \mid Z \in \mathcal{U}\}$.

Lo que resta de esta sección esta encaminada a demostrar que BX es la compactificación de Stone-Čech.

4.6 Lema. Sean X un espacio completamente regular y Z_1, Z_2 cero conjuntos en X. Entonces se cumplen:

1. $Z_1^* = \emptyset$ si y sólo si $Z_1 = \emptyset$.
2. Si $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, entonces $Z_1^* \cap Z_2^* = \emptyset$.
3. $(Z_1 \cap Z_2)^* = Z_1^* \cap Z_2^*$.
4. $(Z_1 \cup Z_2)^* = Z_1^* \cup Z_2^*$.

Demostración.

1. Por contrareciproca. Supongamos que $Z_1 \neq \emptyset$. Sea $z \in Z_1$. Entonces $\mathcal{F}_z$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro en X (recordar Ejemplo 2.87). Es facil ver que $Z_1 \in \mathcal{F}_z$. Luego, $Z_1^* \neq \emptyset$. Recíprocamente, supongamos que $Z_1 = \emptyset$. Como no existe $\mathcal{Z}$-filtro que contenga a $\emptyset$ como elemento, $Z_1^* = \emptyset$.

2. Por contrareciproca. Si $Z_1^* \cap Z_2^* \neq \emptyset$, entonces existe $\mathcal{U} \in Z_1^* \cap Z_2^*$. Luego, $\mathcal{U} \in Z_1^*$ y $\mathcal{U} \in Z_2^*$. Luego, $Z_1 \in \mathcal{U}$ y $Z_2 \in \mathcal{U}$. Por tanto, al ser $\mathcal{U}$ un filtro, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{U}$. Así, $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$.

3. Por la Proposición 1.76-(1) tenemos que $Z_1 \cap Z_2$ es un cero conjunto, por lo $(Z_1 \cap Z_2)^*$ tiene sentido. Si $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, entonces, por (1) del presente lema, $(Z_1 \cap Z_2)^* = \emptyset^* = \emptyset$. Por otro lado, por (2) del presente lema, $Z_1^* \cap Z_2^* = \emptyset$. Por tanto, $(Z_1 \cap Z_2)^* = Z_1^* \cap Z_2^*$. Supongamos ahora que $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{U} \in (Z_1 \cap Z_2)^*$. Luego $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{U}$. Dado que $Z_1 \cap Z_2 \subset Z_1$, $Z_1 \cap Z_2 \subset Z_2$ y $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro, $Z_1 \in \mathcal{U}$ y $Z_2 \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U} \in Z_1^*$ y $\mathcal{U} \in Z_2^*$. Por lo que, $(Z_1 \cap Z_2)^* \subset Z_1^* \cap Z_2^*$. Recíprocamente, sea $\mathcal{U} \in Z_1^* \cap Z_2^*$. Entonces $\mathcal{U} \in Z_1^*$ y $\mathcal{U} \in Z_2^*$. Luego $Z_1 \in \mathcal{U}$ y $Z_2 \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{U}$. Así, $Z_1^* \cap Z_2^* \subset (Z_1 \cap Z_2)^*$.

4. Dado que Z_1 y Z_2 son cero conjuntos, por la Proposición 1.76-(2), $Z_1 \cup Z_2$ es un cero conjunto. Sea $\mathcal{U} \in (Z_1 \cup Z_2)^*$. Tenemos que $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{U}$. Al ser $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro, $Z_1 \in \mathcal{U}$ o $Z_2 \in \mathcal{U}$. Se sigue que $\mathcal{U} \in Z_1^*$ o $\mathcal{U} \in Z_2^*$. Luego, $\mathcal{U} \in Z_1^* \cup Z_2^*$. Recíprocamente, sea $\mathcal{U} \in Z_1^* \cup Z_2^*$. Luego, $\mathcal{U} \in Z_1^*$ o $\mathcal{U} \in Z_2^*$. Se cumple que $Z_1 \in \mathcal{U}$ o $Z_2 \in \mathcal{U}$. Como $Z_1 \subset Z_1 \cup Z_2$ y $Z_2 \subset Z_1 \cup Z_2$, al ser $\mathcal{U}$ un filtro, $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U} \in Z_1^* \cup Z_2^*$. □

4.7 Proposición. Sea X un espacio completamente regular. Entonces la familia $\mathcal{C} = \{Z^* \mid Z \text{ es cero conjunto en } X\}$ es una base para los cerrados de alguna topología en BX.

Demostración. Recordemos primero la Definición 1.26.

1. Sean $Z_1^*, Z_2^* \in \mathcal{C}$, veamos que $Z_1^* \cup Z_2^*$ es una intersección de elementos de $\mathcal{C}$. Por Lema 4.6-(4), $Z_1^* \cup Z_2^* = (Z_1 \cup Z_2)^*$ y $(Z_1 \cup Z_2)^* \in \mathcal{C}$.

2. Veamos que $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$.
   Si $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$ entonces existe un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que, para todo $Z^* \in \mathcal{C}$, se tiene $\mathcal{U} \in Z^*$. Dado que $\emptyset$ es un cero conjunto, $\mathcal{U} \in \emptyset^*$, es decir, $\emptyset \in \mathcal{U}$. Esto contradice que $\mathcal{U}$ sea filtro. Luego, $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$.

Con todo $\mathcal{C}$ es una base para los cerrados de alguna topología en BX. □

A partir de ahora, consideramos a BX con la topología generada por la base de cerrados $\mathcal{C}$. Recordemos que el $\mathcal{Z}$-filtro principal sobre x es $\mathcal{F}_x = \{Z \subset X \mid Z \text{ es un cero conjunto y } x \in Z\}$ (Ejemplo 2.87).

4.8 Proposición. Sean X un espacio completamente regular y $x \in X$. Entonces el $\mathcal{Z}$-filtro principal sobre x, $\mathcal{F}_x$, es el único $\mathcal{Z}$-ultrafiltro convergente a x.

Demostración. Por el Ejemplo 2.87, $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{Z}$-filtro. Ahora veamos que $\mathcal{F}_x \to x$. Sea V un abierto en X tal que $x \in V$. Tenemos que $X - V$ es cerrado. Como X completamente regular, entonces por la Definición 1.46 existe una función continua $f_x : X \to [0, 1]$ tal que $f_x(x) = 0$ y $f_x(X - V) = \{1\}$. Definiendo $Z = f_x^{-1}(\{0\})$, se tiene que Z es un cero conjunto y $x \in Z$. Como $f_x(X - V) = \{1\}$, $Z \cap (X - V) = \emptyset$. Así, $Z \subset V$. Como $Z \in \mathcal{F}_x$, se sigue que $\mathcal{F}_x \to x$.
Veamos que $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{Z}$-filtro primo (recordar Definición 2.83). Sean Z_1, Z_2 cero conjuntos tales que $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}_x$. Por la definición de $\mathcal{F}_x$ (Ejemplo 2.87), $x \in Z_1 \cup Z_2$. Luego, $x \in Z_1$ o $x \in Z_2$. Se sigue que $Z_1 \in \mathcal{F}_x$ o $Z_2 \in \mathcal{F}_x$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{Z}$-filtro primo.
Al ser $\mathcal{F}_x$ un $\mathcal{Z}$-filtro primo, por la Proposición 2.85 existe un único $\mathcal{Z}$-ultrafiltro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}_x \to x$, se sigue, de la Proposición 2.62, que $\mathcal{F} \to x$.
Veamos ahora que $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}$. Para esto sólo falta demostrar que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_x$. Supongamos que $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{F}_x$. Entonces existe $Z' \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin Z'$.
Es decir, $x \in X - Z'$. Por ser X completamente regular existe $g : X \to [0, 1]$ continua tal que:

$$g(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad g(Z') = \{1\}.$$

Dado que $g^{-1}(\{0\})$ es un cero conjunto tal que $x \in g^{-1}(\{0\})$, $g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}_x$. Como $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}$, $g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}$.
Tenemos que $g^{-1}(\{0\}) \cap Z' \in \mathcal{F}$. Pero $g^{-1}(\{0\}) \cap Z' = \emptyset$. Lo que contradice que $\mathcal{F}$ sea filtro. Con todo $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}$. Así $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro que converge a x. Para ver la unicidad de $\mathcal{F}_x$ sólo basta recordar la maximalidad de un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro. Con todo hemos probado la proposición. □

4.9 Proposición. Sea X un espacio completamente regular. La función $h_{BX} : X \to BX$ definida por $h_{BX}(x) = \mathcal{F}_x$, donde $\mathcal{F}_x = \{Z \subset X \mid Z \text{ es un cero conjunto y } x \in Z\}$, es inyectiva.

Demostración. La Proposición 4.8 garantiza la buena definición de la función h_{BX}. Ahora, sean $x, y \in X$ tales que $h_{BX}(x) = h_{BX}(y)$. Entonces $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$. Tenemos que $\mathcal{F}_x \to x$ y como $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$ entonces también $\mathcal{F}_x \to y$. Dado que X es Hausdorff, por el Teorema 2.72, $x = y$. □

Algunas propiedades de la función h_{BX} con los cero conjuntos se muestran en la siguiente:

4.10 Proposición. Sean Z, Z_1, Z_2 cero conjuntos en X. Entonces se cumple lo siguiente

1. $h_{BX}(Z) = h_{BX}(X) \cap Z^*$.
2. $\overline{h_{BX}(Z)} = Z^*$.
3. $\overline{h_{BX}(Z_1 \cap Z_2)} = \overline{h_{BX}(Z_1)} \cap \overline{h_{BX}(Z_2)}$ y $\overline{h_{BX}(Z_1 \cup Z_2)} = \overline{h_{BX}(Z_1)} \cup \overline{h_{BX}(Z_2)}$.

Demostración.

1. Primero notemos que,

$$\begin{aligned} h_{BX}(X) \cap Z^* &= \{h_{BX}(x) \mid h_{BX}(x) \in Z^*\} \\ &= \{\mathcal{F}_x \mid \mathcal{F}_x \in Z^*\} \\ &= \{\mathcal{F}_x \mid Z \in \mathcal{F}_x\} \end{aligned}$$

   Sea $x \in Z$. Entonces $h_{BX}(x) \in h_{BX}(Z)$, es decir, $\mathcal{F}_x \in h_{BX}(Z)$. Por ser Z cero conjunto y $x \in Z$, entonces $Z \in \mathcal{F}_x$. Así, $h_{BX}(x) \in h_{BX}(X) \cap Z^*$. Por lo tanto, $h_{BX}(Z) \subset h_{BX}(X) \cap Z^*$. Ahora, sea $\mathcal{F}_x \in h_{BX}(X) \cap Z^*$. Luego $Z \in \mathcal{F}_x$. Como $\mathcal{F}_x = \{Z' \subset X \mid Z' \text{ es cero conjunto } \text{ y } x \in Z'\}$, $x \in Z$ y así $\mathcal{F}_x = h_{BX}(x) \in h_{BX}(Z)$. Por lo tanto, $h_{BX}(X) \cap Z^* \subset h_{BX}(Z)$.

2. Como $h_{BX}(Z) = h_{BX}(X) \cap Z^*$ tenemos que $h_{BX}(Z) \subset Z^*$. Notemos que Z^* es un cerrado básico en BX (ver Proposición 4.7). Luego, por la Definición 1.29, $\overline{h_{BX}(Z)} \subset Z^*$. Ahora, ya que $\overline{h_{BX}(Z)}$ es la intersección de todos los cerrados en BX que contienen a $h_{BX}(Z)$, sin perder generalidad, podemos expresar $\overline{h_{BX}(Z)} = \bigcap \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A} = \{W^* \in \mathcal{C} \mid h_{BX}(Z) \subset W^*\}$. Ahora, veamos que $Z^* \subset \bigcap \mathcal{A}$, es decir, para cada $W^* \in \mathcal{A}$ se tiene $Z^* \subset W^*$. Sea $W^* \in \mathcal{A}$ arbitrario. Sea $z \in Z$. Como $h_{BX}(Z) \subset W^*$, se sigue que $h_{BX}(z) = \mathcal{F}_z \in W^*$. Es decir, $W \in \mathcal{F}_z$, y por la forma de $\mathcal{F}_z$ tenemos que $z \in W$. Así, $Z \subset W$. Ahora, sea $\mathcal{F} \in Z^*$. Entonces $Z \in \mathcal{F}$. Luego, como $Z \subset W$, $W \in \mathcal{F}$, y por tanto, $\mathcal{F} \in W^*$. Así, $Z^* \subset W^*$.

3. Esto es consecuencia directa de (2) de esta proposición y del Lema 4.6-(3) y (4).

Con todo, la Proposición 4.10 queda demostrada. □

Ahora, teniendo en cuenta que BX está dotado con la topología obtenida por $\mathcal{C}$, ya estamos preparados para demostrar lo siguiente. Recordemos que f es una función cerrada si para cualquier conjunto cerrado A en el dominio de f tenemos que $f(A)$ es cerrado. Además, si f es una función cerrada, continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

4.11 Proposición. Para un espacio completamente regular X la función $h_{BX} : X \to BX$ es un encaje de X en BX y $h_{BX}(X)$ es denso en BX.

Demostración. Observemos que $h_{BX}(X) \cap Z^*$ es cerrado en el subespacio $h_{BX}(X)$, pues Z^* es cerrado en BX. En la Notación 1.66, consideramos la función definida por $h^*_{BX} : X \to h_{BX}(X)$ dada por $h^*_{BX}(x) = h_{BX}(x)$. Para ver que h_{BX} es un encaje debemos mostrar que h^*_{BX} es un homeomorfismo (vea Definición 1.40).
Tomando en cuenta que los cero conjuntos forman una base para los cerrados en X (ver proposición 1.79), entonces por Proposición 4.10-(1), para cada cero conjunto Z en X, $h^*_{BX}(Z)$ es cerrado en $h_{BX}(X)$ (pues Z^* es cerrado en BX). Así, h^*_{BX} es una función cerrada. Por la Proposición 4.9, h^*_{BX} es biyectiva. Veamos que h^*_{BX} es continua. Sea Z un cero conjunto en X y consideremos el cerrado básico en $h_{BX}(X) \cap Z^*$ en $h_{BX}(X)$. Entonces, por Proposición 4.10-(1) y la biyectividad de h^*_{BX} obtenemos que $(h^*_{BX})^{-1}(h_{BX}(X) \cap Z^*) = (h^*_{BX})^{-1}(h^*_{BX}(Z)) = Z$. Por ser Z cerrado en X (por la Proposición 1.79), se sigue que $(h^*_{BX})^{-1}(h_{BX}(X) \cap Z^*)$ es cerrado en X. Por tanto h^*_{BX} es continua (ver Teorema 1.39-(1) y (3)).
Con todo lo anterior concluimos que, h^*_{BX} es un homeomorfismo. Así, h_{BX} es un encaje de X en BX.
Finalmente, veamos que $\overline{h_{BX}(X)} = BX$. Puesto que todo $\mathcal{Z}$-ultrafiltro contiene a X y BX es el conjunto cuyos elementos son todos los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros, $X^* = BX$. Así, por la Proposición 4.10-(1)

$$\overline{h_{BX}(X)} = \overline{h_{BX}(X)} \cap X^* = \overline{h_{BX}(X)} \cap BX$$

es decir, BX es el único cerrado que contiene a $h_{BX}(X)$. Ya que $\overline{h_{BX}(X)}$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a $h_{BX}(X)$, podemos concluir que $\overline{h_{BX}(X)} = BX$. □

Para tener que BX es una compactificación de un espacio completamente regular X falta ver que BX es Hausdorff y compacto. En el siguiente teorema esto lo demostramos.

4.12 Proposición. Sea X un espacio completamente regular. Entonces BX es compacto y Hausdorff.

Demostración. Veamos primero que BX es un espacio compacto; para ello mostremos que cualquier familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita posee intersección no vacía.
Sea $\{Z^*_\lambda\}_{\lambda \in I}$ una familia de cerrados básicos arbitrarios con la propiedad de la intersección finita. Mostremos que $\{Z_\lambda\}_{\lambda \in I}$ tiene la propiedad de intersección finita. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\{Z_{\lambda_i}\}_{i=1}^n \subset \{Z_\lambda\}_{\lambda \in I}$. Por el Lema 4.6-(3), $\bigcap_{i=1}^n Z^*_{\lambda_i} = (\bigcap_{i=1}^n Z_{\lambda_i})^*$. Como $\{Z^*_\lambda\}_{\lambda \in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita, $\bigcap_{i=1}^n Z^*_{\lambda_i} \neq \emptyset$. Luego, por el Lema 4.6-(2), $\bigcap_{i=1}^n Z_{\lambda_i} \neq \emptyset$. Por lo tanto, la

familia $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ posee la propiedad de intersección finita. Por la Proposición 2.34, $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ es una subbase de filtro. Sea $\mathcal{U}$ el $\mathcal{Z}$-ultrafiltro obtenido por $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ (esto es posible pues al ser $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ subbase de filtro, podemos obtener una base de filtro. Y para el filtro generado por dicha base existe un ultrafiltro que lo contiene). Tenemos que $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}\subset\mathcal{U}$. Esto quiere decir que para cada $\lambda\in I$, tenemos que $Z_\lambda\in\mathcal{U}$, o equivalentemente, $\mathcal{U}\in Z_\lambda^*$, por tanto

$$\mathcal{U}\in\bigcap_{\lambda\in I}Z_\lambda^*.$$

Así, $\bigcap_{\lambda\in I}Z_\lambda^*\neq\emptyset$. Por el Teorema 4.1-(1) y (2), concluimos que BX es compacto.

Ahora, mostramos que BX es Hausdorff. Sean $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\in BX$ tales que $\mathcal{U}_1\neq\mathcal{U}_2$. Luego, $\mathcal{U}_1\not\subset\mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_2\not\subset\mathcal{U}_1$ (si esto no sucediera, por la maximalidad de los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros tendríamos la igualdad). Sea $Z_1\in\mathcal{U}_1$ tal que $Z_1\notin\mathcal{U}_2$. Existe $Z_2\in\mathcal{U}_2$ tal que $Z_1\cap Z_2=\emptyset$ (Si no existiera este Z_2, entonces $Z\cap Z_1\neq\emptyset$, para todo $Z\in\mathcal{U}_2$. Luego, por la Proposición 2.81, $Z_1\in\mathcal{U}_2$, lo cual no es posible). Al ser Z_1 y Z_2 cero conjuntos existen $f_1:X\to[0,1]$ y $f_2:X\to[0,1]$ continuas tales que $f_1^{-1}(\{0\})=Z_1$ y $f_2^{-1}(\{0\})=Z_2$. Sea $g:X\to[0,1]$, la función definida por $g(x)=\frac{f_1(x)}{f_1(x)+f_2(x)}$. Tenemos que g es continua. Además, $g(Z_1)=\{0\}$ y $g(Z_2)=\{1\}$. Sean $A_1=g^{-1}([0,\frac{1}{3}))$ y $A_2=g^{-1}((\frac{2}{3},1])$. Entonces A_1 y A_2 son conjuntos abiertos disjuntos. Luego $Z_3=X-A_1$ y $Z_4=X-A_2$ son conjuntos cerrados. Sin perder generalidad podemos suponer que Z_3 y Z_4 son cero conjuntos, pues los cero conjuntos son base para los conjuntos cerrados de X. Por su construcción Z_3 y Z_4 cumplen con: $Z_3\cap Z_1=\emptyset$, $Z_4\cap Z_2=\emptyset$ y $X=Z_3\cup Z_4$. Tenemos que $\mathcal{U}_1\notin Z_3^*$ y $\mathcal{U}_2\notin Z_4^*$ (En caso contrario, $\mathcal{U}_1\in Z_3^*$ o $\mathcal{U}_2\in Z_4^*$. Así, $Z_1\cap Z_3\in\mathcal{U}_1$ o $Z_2\cap Z_4\in\mathcal{U}_2$, lo cual contradice que $Z_3\cap Z_1=\emptyset$ y $Z_4\cap Z_2=\emptyset$). Así, $X^*=BX$. Luego, $BX=(Z_3\cup Z_4)^*$. Por el Lema 4.6-(4) $BX=Z_3^*\cup Z_4^*$. Al ser $BX-(Z_3^*\cup Z_4^*)=\emptyset$, tenemos que $(BX-Z_3^*)\cap(BX-Z_4^*)=\emptyset$. Por tanto, $BX-Z_3^*$ y $BX-Z_4^*$ son abiertos disjuntos tales que $\mathcal{U}_1\in X-Z_3^*$ y $\mathcal{U}_2\in X-Z_4^*$. Así, BX es Hausdorff. □

4.13 Teorema. Sean X un espacio completamente regular, K un espacio compacto y Hausdorff, y $f:X\to K$ una función continua. Entonces f puede ser extendida a BX, es decir, existe una función continua $g:BX\to K$ tal que $f=g\circ h_{BX}$.

Demostración. Dados K un espacio compacto y $f:X\to K$ continua. Construyamos una función continua $g:BX\to K$ tal que $f=g\circ h_{BX}$. Primero observemos que por las Proposiciones 1.48 y 1.53 K es completamente regular. Sea $\mathcal{U}\in BX$. Notemos que por la Proposición 1.78, para cada cero conjunto K_1 en K, $f^{-1}(K_1)$ es cero conjunto en X. Veamos que $\mathcal{G}=\{K'\subset K\mid K'$ es un cero conjunto en K y $f^{-1}(K')\in\mathcal{U}\}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro en K. En efecto,

1. $\emptyset\notin\mathcal{G}$, caso contrario $\emptyset=f^{-1}(\emptyset)\in\mathcal{U}$ y esto no es posible dado que $\mathcal{U}$ es $\mathcal{Z}$-filtro. Tenemos que K es un cero conjunto en K. Dado que $X\in\mathcal{U}$ y $f^{-1}(K)=X$, $K\in\mathcal{G}$. Así, $\mathcal{G}\neq\emptyset$.

2. Sean $K_1,K_2\in\mathcal{G}$. Por la Proposición 1.76-(1), $K_1\cap K_2$ es un cero conjunto en K. Tenemos que $f^{-1}(K_1)\in\mathcal{U}$ y $f^{-1}(K_2)\in\mathcal{U}$. Luego, al ser $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, $f^{-1}(K_1)\cap f^{-1}(K_2)\in\mathcal{U}$.

Pero $f^{-1}(K_1 \cap K_2) = f^{-1}(K_1) \cap f^{-1}(K_2)$. Por tanto, $f^{-1}(K_1 \cap K_2) \in \mathcal{U}$. Así, $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{G}$.

3. Sean $K_1 \in \mathcal{G}$ y K_2 un cero conjunto en K tales que $K_1 \subset K_2$. Tenemos $f^{-1}(K_1) \in \mathcal{U}$. Como $K_1 \subset K_2$, se sigue que $f^{-1}(K_1) \subset f^{-1}(K_2)$. Al ser $\mathcal{U}$ $\mathcal{Z}$-filtro, $f^{-1}(K_2) \in \mathcal{U}$. Por tanto, $K_2 \in \mathcal{G}$.

Ahora veamos que $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro primo. En efecto,
Sean K_1 y K_2 cero conjuntos tales que $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{G}$. Luego $f^{-1}(K_1) \cup f^{-1}(K_2) = f^{-1}(K_1 \cup K_2) \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro, por el Teorema 2.84, obtenemos que $f^{-1}(K_1) \in \mathcal{U}$ o $f^{-1}(K_2) \in \mathcal{U}$. Es decir, $K_1 \in \mathcal{G}$ o $K_2 \in \mathcal{G}$.
Al ser $\mathcal{G}$ un $\mathcal{Z}$-filtro primo en el espacio completamente regular K, por el Teorema 2.88, existe un único punto de aglomeración de $\mathcal{G}$. Sea $q_{\mathcal{U}}$ este punto. Definamos $g : BX \to K$ por $g(\mathcal{U}) = q_{\mathcal{U}}$, para todo $\mathcal{U} \in BX$.
Veamos que g extiende a f, es decir, $f = g \circ h_{BX}$. Tenemos que tanto f y $g \circ h_{BX}$ coinciden en dominio y codominio. Sólo falta ver que para todo $x \in X$, $f(x) = (g \circ h_{BX})(x)$. Sea $x \in X$, entonces $(g \circ h_{BX})(x) = g(h_{BX}(x)) = g(\mathcal{F}_x)$. Para el $\mathcal{Z}$-filtro primo $\mathcal{G} = \{K' \subset K \mid K' \text{ es un cero conjunto en } K \text{ y } f^{-1}(K') \in \mathcal{F}_x\}$ tenemos que $\mathcal{G} \succ g(\mathcal{F}_x)$. Por otro lado, si $K' \in \mathcal{G}$, entonces $f^{-1}(K') \in \mathcal{F}_x$. Por la definición de $\mathcal{F}_x$, $x \in f^{-1}(K')$. Luego, $f(x) \in K'$. Por tanto, $f(x) \in core(\mathcal{G})$. Se sigue de la Proposición 2.74-(1) que $\mathcal{G} \succ f(x)$. Así, $\mathcal{G} \succ f(x)$ y $\mathcal{G} \succ g(\mathcal{F}_x)$. Como $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro primo, por el Corolario 4.4, hay un único punto de aglomeración. Por lo tanto, $f(x) = g(\mathcal{F}_x)$. Así, $f(x) = (g \circ h_{BX})(x)$.
Veamos ahora que g es continua. Tenemos, por la Proposición 1.79, que la familia de cero conjuntos en K son una base para los cerrados en K. Para mostrar que g es continua basta ver que la imagen inversa bajo g de un cero conjunto es un conjunto cerrado en BX. En efecto, sea Y un cero conjunto en K. Primero mostremos que $g^{-1}(Y) = (f^{-1}(Y))^*$. Sea $\mathcal{U} \in g^{-1}(Y)$. Tenemos que $g(\mathcal{U}) \in Y$. Por la definición de g existe un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro $\mathcal{G}$ sobre K tal que $\mathcal{G} \succ g(\mathcal{U})$. Luego, por el Teorema 2.63-(1) y (3), para todo $G \in \mathcal{G}$, $g(\mathcal{U}) \in \overline{G}$. Al ser la familia de cero conjuntos en K una base para los cerrados de K, para todo Y cero conjunto en K, $\overline{Y} = Y$. Por tanto, para todo $G \in \mathcal{G}$, $g(\mathcal{U}) \in G$. Como $g(\mathcal{U}) \in Y$, para todo $G \in \mathcal{G}$, $G \cap Y \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.81, $Y \in \mathcal{G}$. Recordemos que $\mathcal{G} = \{K' \subset K \mid K' \text{ es un cero conjunto en } K \text{ y } f^{-1}(K') \in \mathcal{U}\}$; así, $f^{-1}(Y) \in \mathcal{U}$. Se sigue que $\mathcal{U} \in (f^{-1}(Y))^*$. Recíprocamente, sea $\mathcal{U} \in (f^{-1}(Y))^*$. Tenemos que $f^{-1}(Y) \in \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{G}$ el $\mathcal{Z}$-ultrafiltro en K convergente a $g(\mathcal{U})$. Como $f^{-1}(Y) \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{G} = \{K' \subset K \mid K' \text{ es un cero conjunto en } K \text{ y } f^{-1}(K') \in \mathcal{U}\}$, $Y \in \mathcal{G}$. Se sigue que $g(\mathcal{U}) \in Y$. Por tanto, $\mathcal{U} \in g^{-1}(Y)$.
Como Y es un cero conjunto en K y f una función continua, por la Proposición 1.78, $f^{-1}(Y)$ es un cero conjunto en X. Luego, $(f^{-1}(Y))^*$ es un cerrado básico en BX. Como $g^{-1}(Y) = (f^{-1}(Y))^*$, $g^{-1}(Y)$ es cerrado en BX. Por tanto, g es continua. □

Gracias a todo lo anterior, concluimos con el siguiente teorema en el cual mostramos que la construcción obtenida es la compactificación de Stone-Čech.

4.14 Teorema. Sea X un espacio completamente regular. Entonces BX es la compactificación de Stone-Čech de X.

Demostración. Por las Proposiciones 4.11 y 4.12, tenemos que BX es una compactificación de X. Por el Teorema 4.13, BX satisface el Teorema 1.73. Por tanto, $BX \simeq \beta X$. Es decir, BX es la compactificación de Stone-Čech de X. □

Analizando otras demostraciones de la compactificación de Stone-Čech, la construcción aquí expuesta resulta sencilla y clara. Demostraciones como las que se exponen en [17], [21] o [26] resultan ser más directas, pero más abstractas. En estas demostraciones se utiliza el hecho de que cualquier espacio completamente regular puede ser encajado en el producto $[0,1]^J$, para algún conjunto J. De ahí, se define la función que será el encaje. Sin embargo, dicha función resulta difícil de analizar. A pesar que la demostración que aquí exponemos de la compactificación de Stone-Čech es menos intuitiva que otras, resulta ser más fácil de asimilar. Pareciera que la construcción con filtros es bastante extensa, comparada con la demostración que presenta [17] y [26]. Sin embargo, al analizar el desarrollo de las otras pruebas podemos percibir conceptos y resultados implícitos que no son totalmente triviales a pesar de que los autores omitan su exposición y que si se incluyeran harían sus pruebas más largas que la que hemos expuesto. La ventaja de la demostración con filtros, es que se apoya en conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos, Análisis y Topología. Lo cual permite extender este desarrollo a espacios más arbitrarios. En concreto, la construcción de βX aquí expuesta, resulta ser un caso especial de una construcción más general: compactificación de Wallman. En [26], se resume el proceso general de la siguiente forma. Dado Y un espacio Hausdorff y D un conjunto cerrado en Y, denotamos por γY la familia de todos los ultrafiltros cerrados de Y (recordar Ejemplo 2.78) y $D^* = \{\mathcal{U} \in \gamma Y \mid D \in \mathcal{U}\}$.

1. $\mathcal{C}_\gamma = \{D^* \mid D \text{ es un conjunto cerrado en } Y\}$ es una base de cerrados para alguna topología en Y.

2. La función $h_\gamma : Y \to \gamma Y$, que asigna a cada $y \in Y$ el único ultrafiltro en γY que converge a y es un encaje de Y en γY.

3. $h_\gamma(Y)$ es denso en Y y para cada conjunto cerrado D en Y, $\overline{h_\gamma(D)} = D^*$.

4. γY es un espacio compacto.

5. Si K es un espacio compacto y Hausdorff, y $f : Y \to K$ es una función continua, entonces f puede ser extendida a γY, es decir, existe una función continua $g : \gamma Y \to K$ tal que $f = g \circ h_\gamma$.

El espacio γY es conocido como la compactificación de Wallman para el espacio Y. Notar que para esta construcción no se garantiza que γY sea Hausdorff, en contraste para el espacio βX, que fue posible puesto que los cero conjuntos lo determinan en espacios completamente regulares. Las demostraciones para la obtención de la compactificación de Wallman son análogas al proceso de Stone-Čech que hemos expuesto. Sin embargo, si se desea observar los detalles de la construcción podemos consultar en [25], [18] o [7].

4.3. Espacios uniformes

En esta sección de aplicaciones, introducimos la definición de los espacios uniformes y algunos resultados concernientes a ellos. Los espacios uniformes, según [18], fueron descubiertos por D. Kurepa pero introducidos formalmente por Weil (de acuerdo con [7] fue en 1938) y desarrollados por Bourbaki en 1940. Hacemos saber que la construcción de estos espacios se hace con nociones de Teoría de filtros como en [11], a diferencia de otros textos que lo hacen con el concepto de cubierta (véase [7] o [18]). Introducimos los espacios uniformes para poder definir los filtros de Cauchy, los cuales son los que nos permiten demostrar en el final de la sección el resultado que relaciona los espacios métricos completos y este tipo de filtros. Para iniciar el tema tenemos la notación siguiente.

4.15 Notación. Sean X un conjunto, $A \subset X$, $a \in A$, y $F, G \subset X \times X$. Entonces

1. $F \circ G := \{(x, y) \in X \times X \mid \text{ existe } z \in X \text{ con } (x, z) \in F \text{ y } (z, y) \in G\}$.
2. $F^{-1} := \{(x, y) \mid (y, x) \in F\}$.
3. $F(a) := \{y \in X \mid (a, y) \in F\}$.

Además, decimos que F es simétrico si $F = F^{-1}$.

Con lo anterior, tenemos la definición siguiente:

4.16 Definición. Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \times X$. Decimos que $\mathcal{F}$ es una *estructura uniforme* si satisface:

1. Si $F \in \mathcal{F}$ y $x \in X$, entonces $(x, x) \in F$.
2. Si $F \in \mathcal{F}$, entonces $F^{-1} \in \mathcal{F}$.
3. Si $F \in \mathcal{F}$, entonces existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $G \circ G \subset F$.

Si $\mathcal{F}$ es una estructura uniforme, entonces al par $(X, \mathcal{F})$ le llamamos *espacio uniforme*. A los elementos de $\mathcal{F}$ le llamamos *entornos de X* o *entornos uniformes de X*.

Tal como sucede con con los filtros o las topologías, para una estructura uniforme tenemos una base. Recordemos la Definición 2.26.

4.17 Definición. Sean $(X, \mathcal{F})$ un espacio uniforme y $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es un *sistema fundamental de entornos* de $\mathcal{F}$ o *base de* $\mathcal{F}$ si $\mathcal{B}$ es una base de filtro para $\mathcal{F}$.

El siguiente ejemplo nos permite observar que toda estructura uniforme posee un sistema fundamental de entornos diferente a la estructura uniforme misma.

4.18 Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio uniforme. Los entornos simétricos de $\mathcal{F}$ forman un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{F}$. En efecto, sean $F \in \mathcal{F}$ y $B = F \cap F^{-1}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro y $F^{-1} \in \mathcal{F}$ (recordar Definición 4.16-(2)), $B = F \cap F^{-1} \in \mathcal{F}$. Además, $B \subset F$. Nos queda mostrar que B es un entorno simétrico. Para lo cual usaremos que $(U^{-1})^{-1} = U$, para cualquier entorno U.

$$
\begin{aligned}
B^{-1} &= (F \cap F^{-1})^{-1} \\
&= \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in F \cap F^{-1}\} \\
&= \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in F \text{ y } (y, x) \in F^{-1}\} \\
&= \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in F\} \cap \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in F^{-1}\} \\
&= F^{-1} \cap (F^{-1})^{-1} \\
&= F^{-1} \cap F \\
&= B
\end{aligned}
$$

Luego, los entornos simétricos forman un sistema fundamental para $\mathcal{F}$.

El Ejemplo 4.18 nos permite obtener el siguiente resultado. Esta proposición resulta importante puesto que permite trabajar sólo con entornos simétricos, lo cual facilita el cálculo y obtención de resultados.

4.19 Proposición. Sean $(X, \mathcal{F})$ un espacio uniforme y $F \in \mathcal{F}$. Entonces existe un entorno simétrico $V \in \mathcal{F}$ tal que $V(x) \times V(x) \subset V \circ V \subset F$, para todo $x \in X$.

Demostración. Por el inciso (3) de la Definición 4.16, existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $W \circ W \subset F$. Para W, por el Ejemplo 4.18, existe un entorno simétrico $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \subset W$. Veamos primero que $V \circ V \subset W \circ W$. Sea $(x, y) \in V \circ V$. Luego, existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in V$ y $(z, y) \in V$. Como $V \subset W$, $(x, z) \in W$ y $(z, y) \in W$. Se sigue que $(x, y) \in W \circ W$. Dado que $V \circ V \subset W \circ W$ y $W \circ W \subset F$, tenemos que $V \circ V \subset F$. Ahora, sea $x \in X$ y $(w, z) \in V(x) \times V(x)$. Tenemos que $w \in V(x)$ y $z \in V(x)$. Luego, por la forma de $V(x)$ (recordar Notación 4.15-(3)), $(x, w) \in V$ y $(x, z) \in V$. Al ser V simétrico y $(x, w) \in V$, $(w, x) \in V$. Como $(w, x) \in V$ y $(x, z) \in V$, se sigue que $(w, z) \in V \circ V$. Por tanto, $V(x) \times V(x) \subset V \circ V$. $\square$

4.20 Proposición. Sean X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}(X \times X)$. Entonces $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme sobre X si y sólo si es una base de filtro sobre X que cumple:

1. Si $B \in \mathcal{B}$ y $x \in X$, entonces $(x, x) \in B$.
2. Si $B \in \mathcal{B}$, entonces existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $F \subset B^{-1}$.
3. Si $B \in \mathcal{B}$, entonces existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $F \circ F \subset B$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme sobre X, digamos que $\mathcal{F}$ es dicha estructura uniforme. Veamos que se cumplen las tres propiedades requeridas:

1. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, por el inciso (1) de la Definición 4.16, tenemos que $(x, x) \in B$ para cualesquiera $B \in \mathcal{B}$ y $x \in X$.
2. Sea $B \in \mathcal{B}$. Tenemos que $B \in \mathcal{F}$. Luego, por el inciso (2) de la Definición 4.16, $B^{-1} \in \mathcal{F}$. Al ser $\mathcal{B}$ base para $\mathcal{F}$, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $F \subset B^{-1}$.
3. Sea $B \in \mathcal{B}$. Tenemos que $B \in \mathcal{F}$. Luego, por el inciso (3) de la Definición 4.16, existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $G \circ G \subset B$. Al ser $\mathcal{B}$ base para $\mathcal{F}$, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $F \subset G$. Se sigue fácilmente que $F \circ F \subset G \circ G$. Por tanto, $F \circ F \subset B$.

Recíprocamente, basta mostrar que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es una estructura uniforme de X. Tenemos que por (1) y (3), $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ cumple con (1) y (3) de la Definición 4.16. Queda ver que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ cumple con el inciso (2) de esta definición. Sea $F \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$. Al ser $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$. Por (2), existe $G \in \mathcal{B}$ tal que $G \subset B^{-1}$. Como $B \subset F$, es facil ver que $B^{-1} \subset F^{-1}$. Luego, $G \subset F^{-1}$. Al ser $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ un filtro y $G \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$, $F^{-1} \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$. $\square$

Ya que hemos demostrado la Proposición 4.20, tenemos el siguiente ejemplo, el cual no es complicado de verificar.

4.21 Ejemplo. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $\mathcal{B} := \{U_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$, donde $U_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\}$, es una base de filtro. Además, $\mathcal{B}$ cumple con las condiciones (1), (2) y (3) de la Proposición 4.20.

En [11] se observa la importancia del Ejemplo 4.21, pues a partir de este se extrae la Definición 4.16. También del Ejemplo 4.21 tenemos la siguiente definición, de la cual se obtiene que todo espacio métrico es un espacio uniforme.

4.22 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. La *estructura uniforme canónica* de X, $\mathcal{F}_d$, es la que tiene como base la base de filtro $\mathcal{B} := \{U_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$.

La proposición siguiente nos ilustra la obtención de una topología sobre un espacio uniforme a partir de la estructura uniforme sobre dicho espacio. Para la obtención del resultado es importante recordar el Teorema 1.17.

4.23 Proposición. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio uniforme. Entonces existe sobre X una única topología que asocia a cada punto $x \in X$ el filtro $\{V(x) \mid V \in \mathcal{F}\}$.

Demostración. Veamos que la aplicación $\mathcal{V} : X \to \mathbb{P}(\mathbb{P}(X))$ definida por $\mathcal{V}(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{F}\}$ satisface las hipótesis del Teorema 1.17. En efecto, sea $x \in X$,

1. Sean $U(x) \in \mathcal{V}(x)$, para algún $U \in \mathcal{F}$, y $V \subset X$ tal que $U(x) \subset V$. Por demostrar que $V \in \mathcal{V}(x)$, es decir, que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $V = F(x)$. Definamos $F = U \cup (\{x\} \times (V - U(x)))$. Como $U \subset F$, $U \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro, $F \in \mathcal{F}$. Obtengamos a $F(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in F\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in U \cup (\{x\} \times (V - U(x)))\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in U\} \cup \{y \in X \mid (x, y) \in (\{x\} \times (V - U(x)))\} \\ &= U(x) \cup (V - U(x)) \\ &= V \end{aligned}$$

   Luego, $V \in \mathcal{V}(x)$.

2. Sean $U(x), V(x) \in \mathcal{V}(x)$, donde $U, V \in \mathcal{F}$. Por demostrar que $V(x) \cap U(x) \in \mathcal{V}(x)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} V(x) \cap U(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \cap \{y \in X \mid (x, y) \in U\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ y } (x, y) \in U\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap U\} \\ &= (V \cap U)(x) \end{aligned}$$

   Como $\mathcal{F}$ es un filtro y $V, U \in \mathcal{F}$, $V \cap U \in \mathcal{F}$. Así, $(V \cap U)(x) \in \mathcal{V}(x)$. Por tanto, $V(x) \cap U(x) \in \mathcal{V}(x)$.

3. Sea $U(x) \in \mathcal{V}(x)$, para algún $U \in \mathcal{F}$. Al ser $\mathcal{F}$ una estructura uniforme, para todo $F \in \mathcal{F}$, $(x, x) \in F$. Como $U \in \mathcal{F}$, $(x, x) \in U$. Luego, $x \in U(x)$.

4. Sea $U(x) \in \mathcal{V}(x)$, con $U \in \mathcal{F}$. Al ser $\mathcal{F}$ un estructura uniforme, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \circ V \subset U$. Sea $w \in V(x)$. Por demostrar que $U(x) \in \mathcal{V}(w)$. Tenemos que $(x, w) \in V$. También, para todo $y \in V(w)$, $(w, y) \in V$. Recordando como es $V \circ V$ (Notación 4.15), obtenemos que $(x, y) \in V \circ V$. Como $V \circ V \subset U$, para todo $y \in V(w)$, $(x, y) \in U$. Luego, para todo $y \in V(w)$, $y \in U(x)$. Se sigue que $V(w) \subset U(x)$, así por el inciso (1), $U(x) \in \mathcal{V}(w)$.

Tenemos que (1)-(4) satisfacen las condiciones del Teorema 1.17. Por tanto, existe una única topología τ sobre X tal que $\mathcal{V}(x) = \mathcal{N}(x)$ en la topologia τ. $\square$

4.24 Nota. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio uniforme. La topología obtenida en la Proposición 4.23 le llamamos *la topología uniforme* y la denotamos por $\tau_{\mathcal{F}}$.

En adelante, si hablamos de un espacio uniforme, manejamos la topología uniforme sobre X para poder estudiar nociones topológicas en estos espacios.

4.25 Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la topología uniforme obtenida de la estructura uniforme canónica $\mathcal{F}_d$ coincide con la topología inducida por la métrica d en X.

Demostración. Recordemos la Definición 1.61. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Veamos que $B(x, \epsilon) = U_\epsilon(x)$, para algún $U_\epsilon \in \mathcal{F}_d$. En efecto, recordando la Notación 4.15 y el Ejemplo 4.21, tenemos

$$\begin{aligned} U_\epsilon(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in U_\epsilon\} \\ &= \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \\ &= B(x, \epsilon) \end{aligned}$$

Con la igualdad anterior y dado que la familia de bolas abiertas en X genera la topología sobre este espacio, tenemos que la topología uniforme obtenida de $\mathcal{F}_d$ coincide con la topología inducida por la métrica d en X. $\square$

Definimos ahora una noción dentro de Teoría de filtros equivalente a la de sucesiones de Cauchy (ver Definición 1.64) en los espacios métricos.

4.26 Definición. Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X (respectivamente base de filtro). Decimos que $\mathcal{F}$ es un *filtro de Cauchy* (respectivamente *base de filtro de Cauchy*) si para cada entorno $V \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset V$.

Para el ejemplo siguiente recordemos que el espacio uniforme lo trabajamos bajo la topología uniforme.

4.27 Ejemplo. Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $x \in X$. Entonces el filtro de vecindades de x, $\mathcal{N}(x)$, es un filtro de Cauchy. En efecto, sea $V \in \mathcal{U}$. Por la Proposición 4.19, existe un entorno simétrico $W \in \mathcal{U}$ tal que $W(x) \times W(x) \subset W \circ W \subset V$. Recordando la Proposición 4.23, $W(x) \in \mathcal{N}(x)$.

A continuación mostramos una equivalencia de la Definición 4.26 en los espacios métricos.

4.28 Proposición. Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en el espacio uniforme $(X, \mathcal{F}_d)$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existen $p_\epsilon \in X$ y $F_\epsilon \in \mathcal{F}$ tales que $F_\epsilon \subset B(p_\epsilon, \epsilon)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $(X, \mathcal{F}_d)$. Sea $\epsilon > 0$. Para el entorno U_ϵ, al ser $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy, existe $F_\epsilon \in \mathcal{F}$ tal que $F_\epsilon \times F_\epsilon \subset U_\epsilon$. Fijemos $p_\epsilon \in F_\epsilon$. Recordemos que $U_\epsilon(p_\epsilon) = B(p_\epsilon, \epsilon)$ (vea Proposición 4.25). Veamos que $F_\epsilon \subset U_\epsilon(p_\epsilon)$. Dado que $p_\epsilon \in F_\epsilon$, para todo $x \in F_\epsilon$, $(p_\epsilon, x) \in F_\epsilon \times F_\epsilon$. Como $F_\epsilon \times F_\epsilon \subset U_\epsilon$, para todo $x \in X$, $(p_\epsilon, x) \in U_\epsilon$. Recordando la forma de $U_\epsilon(x)$ (Notación 4.15-(3)), $x \in U_\epsilon(p_\epsilon)$. Por tanto, $F_\epsilon \subset U_\epsilon(p_\epsilon) = B(p_\epsilon, \epsilon)$.
De manera recíproca, supongamos que para todo $\epsilon > 0$ existe $p_\epsilon \in X$ y $F_\epsilon \in \mathcal{F}$ tal que $F_\epsilon \subset B(p_\epsilon, \epsilon)$. Sea $\epsilon > 0$. Tenemos que U_ϵ es un entorno en el espacio uniforme $(X, \mathcal{F}_d)$. Para $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, existen $p_\delta \in X$ y $F_\delta \in \mathcal{F}$ tales que $F_\delta \subset B(p_\delta, \delta)$. Luego, $F_\delta \times F_\delta \subset B(p_\delta, \delta) \times B(p_\delta, \delta)$. Veamos que $B(p_\delta, \delta) \times B(p_\delta, \delta) \subset U_\epsilon$. Como $B(p_\delta, \delta) = U_\delta(p_\delta)$, queda mostrar que $U_\delta(p_\delta) \times U_\delta(p_\delta) \subset U_\epsilon$. Sea $(x, y) \in U_\delta(p_\delta) \times U_\delta(p_\delta)$. Tenemos que $x \in U_\delta(p_\delta)$ y $y \in U_\delta(p_\delta)$. Luego, $(p_\delta, x) \in U_\delta$ y $(p_\delta, y) \in U_\delta$. Así, $d(p_\delta, x) < \delta$ y $d(p_\delta, y) < \delta$. Tenemos que, por la desigualdad del triángulo, $d(x, y) < d(x, p_\epsilon) + d(p_\epsilon, y)$. Como $d(p_\delta, x) < \delta$ y $d(p_\delta, y) < \delta$

$$\begin{aligned} d(x, y) &< \delta + \delta \\ &= 2\delta \\ &= 2(\frac{\epsilon}{3}) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Luego, $(x, y) \in U_\epsilon$. Por tanto, $F_\delta \times F_\delta \subset U_\epsilon$. Así, $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy. □

La Proposición 4.28, pudiera considerarse como una generalización de la Definición 1.64. En la proposición siguiente mostramos que en un espacio métrico toda sucesión de Cauchy genera un filtro de Cauchy.

4.29 Proposición. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces $\{\{x_n, x_{n+1}, ...\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtro sobre X que genera un filtro de Cauchy sobre $(X, \mathcal{F}_d)$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{B} = \{\{x_n, x_{n+1}, ...\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtro.

- Sea $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\{x_n, x_{n+1}, ...\} \neq \emptyset$. Así, $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Por otro lado, dado que la sucesión es un subconjunto de X no vacío, $\mathcal{B} \neq \emptyset$.
- Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, supongamos que $m > n$. Luego,

  $$\{x_m, x_{m+1}, ...\} = \{x_m, x_{m+1}, ...\} \cap \{x_n, x_{n+1}, ...\}.$$

  Por tanto, $\{x_m, x_{m+1}, ...\} \cap \{x_n, x_{n+1}, ...\} \in \mathcal{B}$.

Por (1) y (2), recordando la Definición 2.23, $\mathcal{B}$ es base de filtro. Queda mostrar que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es un filtro de Cauchy. Sea $V \in \mathcal{F}_d$. Tenemos que $V = U_\epsilon$ (recordar Definición 4.22), para algún $\epsilon > 0$. Al ser $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, para ϵ, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon$, para $n, m > N$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$. Luego, para $m \geq n$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Así, para $m \geq n$, $(x_n, x_m) \in U_\epsilon$, se sigue que $\{x_n\} \times \{x_n, x_{n+1}, ...\} \subset U_\epsilon$. Dado que n es arbitrario, tenemos que $\{x_n, x_{n+1}, ...\} \times \{x_n, x_{n+1}, ...\} \subset U_\epsilon$. Así, por la Proposición 4.28, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es un filtro de Cauchy. $\square$

Para lo siguiente recordemos la Definición 2.53.

4.30 Proposición. Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Si $\mathcal{F} \to x$ para algún $x \in X$, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy.

Demostración. Sea $V \in \mathcal{U}$. Al ser $\mathcal{N}(x)$ un filtro de Cauchy (por el Ejemplo 4.27), existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \times U \subset V$. Dado que $\mathcal{F} \to x$, $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$. Luego, $U \in \mathcal{F}$. Se sigue que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy (ver Definición 4.26). $\square$

Es importante mencionar que el recíproco de la Proposición 4.30 no siempre se cumple, en [11, Pág. 500] se justifica el por qué.

4.31 Proposición. Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy sobre X. Entonces $\mathcal{F}$ converge a cada uno de sus puntos de aglomeración.

Demostración. Sean $x \in adh(\mathcal{F})$ y W un entorno. En vista de la Definición 2.53-(1) veamos que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset W(x)$. Por la Proposición 4.19, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(x) \times V(x) \subset V \circ V \subset W$. Por otro lado, al ser $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy, para V, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset V$. Como x es un punto de aglomeración, $F \cap V(x) \neq \emptyset$. Fijemos $y \in F \cap V(x)$. Tenemos que $y \in F$. Así, $\{y\} \times F \subset F \times F \subset V$. Tenemos que, para todo $z \in F$, $(y, z) \in V$, es decir, $z \in V(y)$. Luego, $F \subset V(y)$. Sea $y_0 \in V(y)$. Se cumple que $(y, y_0) \in V$ y $y \in V(x)$. Luego, $(y, y_0) \in V$ y $(x, y) \in V$. Así, $(x, y_0) \in V \circ V$. De donde, $V(y) \subset (V \circ V)(x)$. Puesto que $V \circ V \subset W$, $(V \circ V)(x) \subset W(x)$. Con todo, $F \subset V(y) \subset (V \circ V)(x) \subset W(x)$. Por transitividad, $F \subset W(x)$. $\square$

En la definición siguiente, etiquetamos a los espacios donde los filtros de Cauchy son convergentes con un nombre especial.

4.32 Definición. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Decimos que $(X,\mathcal{U})$ es un *espacio uniforme completo* si todo filtro de Cauchy sobre X es convergente.

Observemos que si un espacio uniforme es completo entonces el recíproco de la Proposición 4.30 es verdadero.

4.33 Teorema. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces son equivalentes:

1. $(X, \mathcal{F}_d)$ es un espacio uniforme completo.

2. Toda sucesión de Cauchy en (X, d) converge.

Demostración.
1)$\Rightarrow$ 2) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (X,d). Por la Proposición 4.29, para $\mathcal{B} = \{\{x_n, x_{n+1}, ...\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es un filtro de Cauchy. Por (1), existe $x \in X$ tal que $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \to x$. Veamos que $x_n \to x$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \to x$, para $B(x,\epsilon)$ existe $F_\epsilon \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ tal que $F_\epsilon \subset B(p_\epsilon, \epsilon)$. Dado que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_N, x_{N+1}, ...\} \subset F_\epsilon$. Luego, $\{x_N, x_{N+1}, ...\} \subset B(x,\epsilon)$. Para $n > N$, $x_n \in B(x,\epsilon)$. Es decir, para todo $n > N$, $d(x,x_n) < \epsilon$. Por tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.
2)$\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{G}$ un filtro de Cauchy sobre X. Para $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 4.28, existen $p_n \in X$ y $F_n \in \mathcal{F}$ tales que $F_n \subset B(p_n, \frac{1}{n})$. Al ser $F_n \neq \emptyset$, existe $x_n \in F_n$. Afirmamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X,d). En efecto, sea $\epsilon > 0$. Es fácil deducir que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{1}{N}$. Sean $m_1, m_2 > 2N$. Tenemos que $x_{m_1} \in B(x, \frac{1}{m_1})$ y $x_{m_2} \in B(x, \frac{1}{m_2})$. Luego, $d(x, x_{m_1}) < \frac{1}{m_1}$ y $d(x, x_{m_2}) < \frac{1}{m_2}$. Así,

$$\begin{aligned} d(x_{m_1}, x_{m_2}) &\leq d(x_{m_1}, x) + d(x, x_{m_2}) \\ &< \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\ &< \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} \\ &= 2(\frac{1}{2N}) = \frac{1}{N} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Al ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(X, \mathcal{F}_d)$, por (2), existe $x \in X$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Veamos que $\mathcal{G} \succ x$. Sea $V \in \mathcal{N}(x)$ y $G \in \mathcal{G}$. Sin perder generalidad podemos suponer $V = B(x,\delta)$, para algún $\delta > 0$. Dado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, para $\frac{\delta}{3}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_m) < \frac{\delta}{3}$, para todo $m > M$. Para $\frac{\delta}{3}$ podemos encontrar $m_0 > M$ tal que $\frac{\delta}{3} > \frac{1}{m_0}$. Por construcción de x_{m_0}, existen $p_{m_0} \in X$ y $F_{m_0} \in \mathcal{G}$ tales que $x_{m_0} \in F_{m_0} \subset B(p_{m_0}, \frac{1}{m_0})$. Ya que $F_{m_0} \in \mathcal{G}$, $F_{m_0} \cap F \neq \emptyset$. Fijemos $y \in F_{m_0} \cap F$. Tenemos que $y \in B(p_{m_0}, \frac{1}{m_0})$, es decir, $d(p_{m_0}, y) < \frac{1}{m_0}$. Ahora,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x, x_{m_0}) + d(x_{m_0}, y) \\ &\leq d(x, x_{m_0}) + d(x_{m_0}, p_{m_0}) + d(p_{m_0}, y) \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} \\ &= 3(\frac{\delta}{3}) = \delta \end{aligned}$$

Luego, $y \in B(x,\delta)$. Como $y \in F$, $y \in B(x,\delta) \cap F$. Por tanto, $B(x,\delta) \cap F \neq \emptyset$. Al ser $\mathcal{G}$ un filtro de Cauchy y x punto de aglomeración de $\mathcal{G}$, por la Proposición 4.31, $\mathcal{G} \to x$. Por la arbitrariedad de $\mathcal{G}$, concluimos que $(X, \mathcal{F}_d)$ es un espacio uniforme completo. $\square$

Finalmente, con el Teorema 4.33 mostramos que en los espacios métricos la definición usual de espacio métrico completo es equivalente a la noción de espacio uniforme completo.

El análisis aquí expuesto sobre espacios uniformes y filtros de Cauchy, otorga claridad a la teoría de espacios uniformes, pues a diferencia de textos como [7] y [18], los espacios uniformes se introducen mediante las nociones de recubrimientos, esto hace una asimilación más lenta y difícil de la teoría. En [6] y [26], se hace un desarrollo parecido al de la tesis, la diferencia es que estos textos no toman en cuenta la noción de filtros o base de filtros, lo que hace que sus definiciones y resultados se extiendan a consecuencia de realizar cálculos y análisis extras que con la teoría de filtros se tendrían de manera inmediata. Otra ventaja que presenta el uso de filtros en los espacios uniformes es por ejemplo en la definición de los filtros de Cauchy, pues a diferencia de otros textos en los que se definen a los filtros de Cauchy mediante epsilon y delta sobre espacios métricos, en los espacios uniformes se quita la dependencia de los epsilon y delta y la definición se vuelve más conjuntista y sobre espacios arbitrarios. Finalmente, con los espacios uniformes se pueden extender resultados de espacios métricos (y métricos completos) hacia espacios topológicos más generales.

Conclusiones

En esta tesis hemos expuesto, en la medida de lo posible, un estudio detallado y completo de la Teoría de filtros, haciendo énfasis en la claridad y formalidad de la exposición de estos resultados. Al ser la noción de filtros propia de la Teoría de conjuntos, claramente el intentar aglomerar en un solo texto todo lo concerniente a esta noción resultaría difícil, tardado, además, de que se dejarían fuera numerosos resultados. Tal como se especificó en los objetivos de la tesis, el análisis desarrollado se enfocó en la importancia de los filtros en Topología y la ilustración de algunas aplicaciones importantes.

Hemos presentado para la mayoría de los resultados expuestos las demostraciones respectivas, a excepción de una parte del Capítulo 1, los cuales son resultados ya conocidos de cualquier curso estándar de Topología General, sin embargo, se incluyeron las referencias para los lectores interesados.

En el Capítulo 3, se mostró otro concepto para estudiar la convergencia en espacios topológicos, la red. En esta parte, tratamos de ilustrar las principales equivalencias entre las nociones de filtros y redes, así como de analizar las diferencias y ventajas que tiene la Teoría de filtros con las redes. En el Capitulo 4, en las tres aplicaciones expuestas, detallamos las demostraciones que muchos autores obvian, así también ilustramos la teoría necesaria para éstas. Contrastamos estas aplicaciones de filtros con otras demostraciones conocidas de los resultados expuestos, haciendo las comparaciones respectivas y resaltamos las ventajas del uso de los filtros. Así, hemos logrado los objetivos de la tesis, los cuales se alcanzan con el desarrollo de los Capítulos 2, 3 y 4.

En general,hemos observado que a pesar de la sencillez que denote la definición de filtro, sus propiedades resultan ser bastante útiles y, en consecuencia, sus aplicaciones muy importantes. El enfoque que nos proporciona la Teoría de filtros para el análisis de espacios topológicos es bastante sencillo y útil. Hemos visto que el estudio de los temas de Topología, con ayuda de los filtros, se vuelve conjuntista, por tanto más general y arbitrario, y a su vez más elegante. Al final, el lector de la tesis podrá comparar la utilidad de los filtros con otras teorías, y así, apreciar la importancia de esta noción.

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol. *Análisis Matemático*. Editorial Reverté, S. A. Segunda Edición, 2006.

[2] Tomek Bartosynski; Haim Judah. *Set theory: on the structure of the real line*. A K Peters Wellesley, Massachusetts, 1995.

[3] Henri Cartan. *Théorie des filtres*. C. R. Acad. Sci. Paris 205, 1937.

[4] Henri Cartan. *Filtres et ultrafiltres*. C. R. Acad. Sci. Paris 205, 1937.

[5] Tarun Chitra. *The Stone-Čech Compactification*. Math presentations, Ithaca, New York 2009.

[6] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Inc, United States of America, 1976.

[7] Ryszard Engelking. *General topology*. Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[8] Andrés Fraguela Collar. *Análisis Matemático Avanzado*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, México.

[9] Leonard Gillman and Meyer Jerison. *Rings of Continuos Functions*. Springer-Verlag, Princeton, 1960.

[10] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos. Una introducción*. Sociedad Matemática Mexicana, Tercera Edición, 2011.

[11] Diederich Hinrichsen; José L. Fernández Muñiz; Andrés Fraguela Collar y Ángel Álvarez Prieto. *Topología General*. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[12] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer-Verlag, New York, 2003 .

[13] Winfried Just and Martin Weese. *Discovering modern set theory II*. American Mathematical Society, 1997.

[14] Kazimierz Kuratowski. *Topology* Volumen I. Academic Press, New York and London, 1966.

[15] Gottfried Köethe. *Topological vector spaces I*. Springer-Verlag, New York Inc, 1969.

[16] Marta Macho Stadler. *Topología General*. Notas de clase, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad de País Vasco-Euskal, España, 2002.

[17] James Munkres. *Topology*. Second edition,Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

[18] Jun-Iti Nagata. *Modern General Topology*. University of Amsterdam, Second revised edition, Netherlands, 1985.

[19] F. Riez. *Stetikeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*. Atti del IV Congresso Internazionale del Matematici, Roma 1908, vol. II, Roma, 1909.

[20] Matthias Rubin and D. Leung. *The Stone-Čech Compactification, Notas*. Department of Mathematics, Faculty of Science, National University of Singapore.

[21] Graciela Salicrup. *Introducción a la Topología*. Sociedad Matemática Mexicana,1997.

[22] Lynn Arthur Steen; J. Arthur Seebach Jr. *Counterexamples in Topology*. Second edition, Springer Verlag, New York, 1978.

[23] Neil Strickland. *Notes on ultrafilters*. Dapartment of Pure Mathematics, University of Sheffield.

[24] Angel Tamariz Mascarua. *Anillos de funciones continuas, compactación de Stone-Ĉech, espacios realcompactos y cardinales Ulam-medibles*. Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[25] Russell C. Walker. *The Stone Čech Compactification*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

[26] Stephen Willard. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1970.

Índice alfabético

Base de filtro para algún filtro 22
Base de filtro para $\mathcal{F}$ 22
Base para abiertos 4
Base de cerrados de alguna topología 5
Base de cerrados para τ 5
Bola abierta 9
Cadena 2
Cero conjunto 12
Cerradura 6
Compactificación 11
Compactificación de Stone-Čech(βX) 12
Conjunto denso 6
Conjunto dirigido 43
Core de $\mathcal{F}$ 20
Cota Superior 2
Cubierta 8
Elemento maximal 2
Encaje 10
Espacio compacto 8
Espacio completamente regular 7
Espacio Hausdorff 7
Espacio métrico 9
Espacio producto 9
Espacio uniforme 60
Espacio uniforme completo 66
Estructura uniforme 60
Filtro 15
Filtro clausura 23
Filtro cocontable 16
Filtro cofinito 16
Filtro convergente 32
Filtro de Cauchy 64
Filtro de Frechet 22
Filtro primo 21
Filtro principal 16
Filtro trivial 15
Función continua 6
Función f^* 10
Función proyección 8
Homeomorfismo 7
Lema de Zorn 2
Orden parcial 2
$\mathcal{P}$-filtro 39
$\mathcal{P}$-filtro primo 41
$\mathcal{P}$-filtro convergente 39
$\mathcal{P}$-ultrafiltro 40
Producto cartesiano 8
Propiedad de intersección finita 17
Punto de acumulación 6
Punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ 32
Punto de aglomeración para $\mathcal{P}$-filtro 39
Punto de aglomeración para redes 44
Red 44
Red convergente 44
Relación de equivalencia 1
Sistema fundamental de entornos 61
Subbase de filtro 22
Sucesión 10
Sucesión de Cauchy 10
Teorema de Tychonoff 51
Topología 3
Topología de Sierpinski 3

Topología discreta 3

Topología uniforme 64

Topología usual de $\mathbb{R}$ 5

Ultrafiltro 26

Vecindad 4

$\mathcal{Z}$-filtro 42

$\mathcal{Z}$-filtro principal 42