UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

“PROCESOS ESTOCÁSTICOS APLICADOS A MODELOS FINANCIEROS A TIEMPO DISCRETO”

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

DAVID ALBERTO BENÍTEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR:

M.C. JOSÉ DEL CARMEN JIMÉNEZ HERNÁNDEZ

CO-DIRECTOR:

DRA. EKATERINA TODOROVA KOLKOVSKA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, OCTUBRE DE 2012.

Procesos estocásticos aplicados a modelos financieros a tiempo discreto

David Alberto Benítez González

Octubre de 2012

Agradecimientos

A la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska, por sus conocimientos brindados para la realización de esta tesis, y todo su apoyo y paciencia.

Al M.C. José del Carmen Jiménez Hernández, por su apoyo y dedicación a lo largo de todo el desarrollo del presente trabajo.

A mis sinodales M.C. Vulfrano Tochihuitl Bueno, Dr. Guillermo Arturo Lancho Romero, Dr. Franco Barragán Mendoza, M.C. Tirso Miguel Ángel Ramírez Solano, por sus recomendaciones y consejos para mejorar este trabajo.

A los profesores de los cuales tuve el honor de tomar alguna clase, por enseñarme lo que es ser un verdadero matemático.

Al CIMAT, por el apoyo brindado durante mis estancias profesionales para la realización de este trabajo.

A mi familia, por tenerme siempre en sus rezos, por compartir su vida y su amor interminable, y su confianza y apoyo incondicional para la realización de mis sueños.

A Pedro, Citlalliy, Ramón, Nallely, Arlette, y a todos mis demás compañeros matemáticos que compartieron conmigo este largo camino hasta la culminación de la carrera.

Al grupo 706, por su amistad y permitirme formar parte de algo más allá de las matemáticas.

Y finalmente, a mi amiga Sofía Vasconcelos, por convertirse en la persona más importante al final de este camino, por alegrarme la vida y hacer de mi mundo un lugar mejor.

Índice general

Prefacio

La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelización de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a leyes no determinísticas.

Estos procesos se aplican a la teoría económica, que trata de dar cuenta de los mecanismos que registran los hechos económicos a nivel local o global. También se aplican a la teoría de la previsión, a los transportes y al trabajo, a las ciencias del medio ambiente y a las teorías de la información, entre otras aplicaciones.

En los últimos años, el análisis financiero ha experimentado una serie de cambios y transformaciones, los cuales han fomentado el uso de los procesos estocásticos para modelar el comportamiento de los mercados financieros y de sus respectivos derivados.

Las opciones han sido utilizadas durante siglos, pero se mantuvieron sin esclarecer hasta la introducción de una lista de opciones de intercambio en 1973. Desde entonces, el comercio de opciones ha tenido un crecimiento sin precedentes en los mercados de valores americanos.

La teoría de valoración de opciones tiene una larga e ilustre historia, pero se sometió a un revolucionario cambio en 1973. En ese momento, Fischer Black y Myron Scholes presentaron el primer modelo satisfactorio de valoración de opciones en equilibrio. En el mismo año, Robert Merton extendió su modelo de varias maneras importantes. Estos trabajos han formado las bases para muchos estudios académicos posteriores.

A medida que ha pasado el tiempo la teoría de valoración de opciones ha sido importante para casi todas las áreas de las finanzas. Por ejemplo, prácticamente todos los valores de las empresas pueden ser interpretados como carteras de opciones de compra y venta sobre los activos de la empresa. De hecho, la teoría se aplica a una clase muy general de problemas económicos, la valoración de los contratos en los que el resultado de cada parte depende de un evento futuro incierto, Cox et al. 1979.

El objetivo general de esta tesis es estudiar la teoría referente a la aplicación de los procesos estocásticos a los modelos financieros en tiempo discreto, en especial al modelo de Cox-Ross-Rubinstein, mejor conocido como el modelo binomial.

En el primer Capítulo se introducen conceptos básicos de probabilidad, tales como esperanza condicional, procesos estocásticos, filtraciones y martingalas, que serán necesarios para su aplicación en los modelos financieros a tiempo discreto.

En el segundo Capítulo se muestran los principales conceptos y resultados de los modelos financieros a tiempo discreto, en especial los dos teoremas fundamentales para la valoración de opciones. También se obtienen resultados numéricos de estos resultados en ejemplos concretos.

En el tercer Capítulo se continua con el estudio de los conceptos y resultados de estos modelos, pero centrándose en el caso de las opciones americanas. En particular, se obtienen resultados sobre cómo valorar las opciones americanas en cada tiempo y cómo obtener portafolios replicantes.

El cuarto Capítulo presenta el modelo de Cox-Ross-Rubinstein como caso particular de los modelos financieros a tiempo discreto. Se muestran algunos ejemplos que nos permitan comparar la relación existente entre las opciones americanas y las opciones europeas. Se obtienen resultados sobre cómo valorar estos dos tipos de opciones y cómo replicarlos. También se ofrecen cálculos numéricos para varios casos concretos. Finalmente, se demuestra cómo se obtiene la fórmula de Black-Scholes del caso a tiempo continuo a partir del modelo de Cox-Ross-Rubinstein.

Finalmente en el quinto Capítulo se presentan las conclusiones obtenidas de esta tesis.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

La valoración de precios de una opción involucra la predicción de eventos futuros. De esta forma, la teoría de probabilidad es una herramienta necesaria para lograr este objetivo.

En este capítulo se introducirán algunos conceptos básicos de probabilidad [4], los cuales serán útiles en los modelos financieros a tiempo discreto.

1.1. Espacios de probabilidad finitos

Definición 1.1.1. *Sea Ω un conjunto no vacío. Una colección F de subconjuntos de Ω es una σ **-álgebra** si satisface las siguientes propiedades:*

a) $\Omega \in F$.

b) *F es cerrado bajo uniones contables, es decir, si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de elementos de F entonces*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F.$$

c) *F es cerrado bajo complementos, es decir, si $A \in F$ entonces $A^c \in F$.*

Definición 1.1.2. *Un **espacio medible** es un par (Ω, F) que consiste de un conjunto no vacío Ω y una $\sigma-$álgebra F de subconjuntos de Ω.*

Los conjuntos no vacíos más pequeños en una $\sigma-$álgebra F se pueden definir como sigue.

Definición 1.1.3. *Sea F una $\sigma-$álgebra sobre Ω. Un **átomo** de F es un conjunto no vacío $A \in F$ con la propiedad de que ningún subconjunto propio de A está también en F.*

En ocasiones, es necesario poder cuantificar la ocurrencia de los elementos pertenecientes a un conjunto. De esta manera, se puede introducir el concepto de espacio de probabilidad.

Definición 1.1.4. *Un* ***espacio de probabilidad finito*** *es una terna* (Ω, F, P)*, que consiste de un conjunto finito no vacío* Ω*, llamado* ***espacio muestral****, una* $\sigma-$*álgebra* F *de subconjuntos de* Ω*, cuyos elementos son llamados* ***eventos****, y una función* P *de valores reales definida sobre* Ω*, llamada* ***medida de probabilidad*** *sobre* Ω*. La función* P *debe satisfacer las siguientes propiedades:*

a) *Para cada* $A \in F$*,* $0 \leq P(A) \leq 1$*.*

b) $P(\Omega) = 1$*.*

c) *Si* A *y* B *son disjuntos, entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*.*

Si Ω es un conjunto finito, entonces para cada $\omega \in \Omega$ el evento $\{\omega\}$ es llamado un **evento elemental**. La manera más simple para definir una medida de probabilidad sobre un espacio muestral finito Ω es especificar la probabilidad de todos los eventos elementales. Se asigna a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$ un número p_ω que satisface $0 \leq p_\omega \leq 1$ y

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

Entonces se puede definir una medida de probabilidad P estableciendo

$$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$

y extendiendo esto para todos los eventos. Así, la probabilidad de cualquier evento A es la suma de las probabilidades de los eventos elementales contenidos en A.

El conjunto $\{p_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ es referido como una **distribución de probabilidad** y la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\omega) = p_\omega,$$

se llama **función de masa de probabilidad**.

Cuando una distribución de probabilidad es dada, la probabilidad de cualquier evento $A \in F$ es la suma de las probabilidades de los resultados en el evento, esto es

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Definición 1.1.5. *Se dice que dos medidas de probabilidad* P_1 *y* P_2 *son equivalentes si y sólo si para cualquier evento* A*,* $P_1(A) = 0$ *si y sólo si* $P_2(A) = 0$*.*

Definición 1.1.6. *Cuando dos eventos* A *y* B *son disjuntos como conjuntos, se dice que son* ***mutuamente excluyentes****. Cuando una colección* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *de eventos satisface*

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall \ i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ con } i \neq j,$$

se dice que la colección es ***mutuamente excluyente a pares****.*

Algunas consecuencias de la definición de espacio de probabilidad están dadas por el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1. *Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad finito, entonces,*

a) $P(\emptyset) = 0$.

b) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

c) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

d) *Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una colección finita de eventos mutuamente excluyentes a pares en Ω entonces*

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

De manera intuitiva, se puede ver que dos eventos son independientes si el conocimiento de que uno de ellos ocurra, no afecta la probabilidad de que el otro ocurra. Así, se puede definir la independencia entre eventos.

Definición 1.1.7. *Los eventos A y B sobre el espacio de probabilidad finito (Ω, F, P) son* ***independientes*** *si la probabilidad de que ambos eventos ocurran es el producto de las probabilidades de los eventos, esto es,*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

De manera general, se puede definir la independencia entre una colección finita de eventos.

Definición 1.1.8. *La colección de eventos $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es* ***independiente*** *si para cada subcolección $\{E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}\}$ de estos eventos, se tiene*

$$P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_k}).$$

Dado un conjunto, se puede definir una partición de éste.

Definición 1.1.9. *Sea Ω un conjunto no vacío. Una* ***partición*** *de Ω es una colección $Q = \{B_1, \ldots, B_k\}$ de subconjuntos no vacíos de Ω, llamados bloques de la partición, con las siguientes propiedades:*

a) *Los bloques son disjuntos a pares*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall \ i, j \in \{1, \ldots, k\} \text{ con } i \neq j.$$

b) *La unión de todos los bloques es Ω, es decir,*

$$B_1 \cup \ldots \cup B_k = \Omega.$$

Considere un espacio medible (Ω, F) y una partición $B_1, \ldots, B_n$, con n eventos en F. El conjunto B que contiene los elementos de F, que son el conjunto vacío o pueden ser escritos como $B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_k}$, donde $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, es una sub-$\sigma$-álgebra finita de F. Ésta es la $\sigma-$álgebra B de F generada por la sucesión de B_i.

Recíprocamente, a cualquier sub-σ-álgebra finita B de F se le puede asociar una partición finita $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de Ω, donde B está generada por los átomos B_i de B.

1.2. Variables aleatorias

Una variable aleatoria es una función que toma valores numéricos determinados por el resultado de un experimento aleatorio. Formalmente se define como sigue.

Definición 1.2.1. *Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definida sobre un espacio muestral finito Ω se llama una **variable aleatoria** sobre Ω. El conjunto de todas las variables aleatorias sobre Ω es denotado por $RV(\Omega)$.*

Como $RV(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones sobre Ω, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ bajo la suma ordinaria y la multiplicación escalar de funciones. Así, si X y Y son variables aleatorias sobre Ω y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $aX + bY$ es una variable aleatoria sobre Ω. El producto de dos variables aleatorias sobre Ω es también una variable aleatoria sobre Ω.

Una de las variables aleatorias más utilizadas es aquella que identifica eventos específicos.

Definición 1.2.2. *Sea A un evento en Ω. La función 1_A definida por*

$$1_A(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

*se llama la **función indicadora** para A.*

El conjunto de los distintos valores $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de la variable aleatoria X se llama la **imagen** de X, y se denota por $im(X)$.

Definición 1.2.3. *Sea X una variable aleatoria sobre un espacio muestral finito Ω. Sea F cualquier $\sigma-$álgebra sobre Ω. Entonces X es **F-medible** si*

$$X^{-1}(B) \in F, \text{ para cada } B \subseteq im(X).$$

Teorema 1.2.1. *Sea F una σ-álgebra sobre Ω. Una variable aleatoria X es $F-medible$ si y sólo si X es constante en cada átomo de F.*

Cualquier variable aleatoria X sobre un espacio muestral Ω puede definir una σ-álgebra sobre Ω.

Definición 1.2.4. *Sea X una variable aleatoria sobre Ω. Entonces X define una σ-álgebra sobre Ω cuyos elementos son las imágenes inversas de los subconjuntos de $im(X)$, esto es,*

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) | B \subseteq im(X)\}.$$

La σ-álgebra $\sigma(X)$ generada por X es la menor σ-álgebra para la cual X es medible.

Teorema 1.2.2. *Sean X y Y variables aleatorias. Entonces Y es $\sigma(X) - medible$ si y sólo si Y es una función de X, esto es, si y sólo si existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para la cual $Y = f(X)$.*

Se puede definir también un vector aleatorio de la siguiente forma.

Definición 1.2.5. *Una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *de un espacio muestral* Ω *al espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$ *se llama un* ***vector aleatorio*** *sobre* Ω.

El conjunto $RV^n(\Omega)$ de todos los vectores aleatorios sobre un espacio muestral Ω es también un espacio vectorial bajo la suma ordinaria y la multiplicacion escalar de funciones.

Intuitivamente, decir que dos variables aleatorias son independientes significa que el conocimiento del valor de una de ellas no aporta información sobre el valor de la otra variable aleatoria. Así, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.2.6. *Las variables aleatorias* X *y* Y *sobre* Ω *son* ***independientes*** *si*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y),$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}$. *Más general, las variables aleatorias* $X_1, \ldots, X_n$ *son* ***independientes*** *si*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i),$$

para cada $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

1.2.1. Esperanza y varianza

El valor esperado es una suma ponderada de los valores de una variable aleatoria X, cada valor ponderado por su probabilidad de ocurrencia.

Definición 1.2.7. *Sea* X *una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad finito* (Ω, F, P) *donde* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. *El* ***valor esperado*** *(esperanza o media) de* X *está dado por*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)P(\omega_i).$$

Si X *toma los valores distintos* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *entonces se tiene*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i).$$

El valor esperado de X es también denotado por μ_X o μ.

De manera más general, el valor esperado de una función de la variable aleatoria X está dado por:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(X(\omega_i))P(\omega_i).$$

Una de las propiedades que cumple el valor esperado es que es una funcional lineal.

Teorema 1.2.3. *La función de esperanza $E : RV(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal, esto es, para cualesquiera variables aleatorias X y Y, y números reales a y b, se cumple*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Otra propiedad que cumple esta funcional es que, si dos variables aleatorias son independientes, entonces el valor esperado del producto de las variables aleatorias es el producto de los valores esperados de las variables aleatorias.

Teorema 1.2.4. *Si X y Y son variables aleatorias independientes sobre un espacio de probabilidad finito (Ω, F, P), entonces*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Este teorema se puede generalizar para el producto de más de dos variables aleatorias independientes.

Definición 1.2.8. *Sea X una variable aleatoria con valor esperado μ. La **varianza** de X, denotada por σ^2, se define como*

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2],$$

*y la **desviación estándar** es la raíz cuadrada positiva de la varianza, esto es,*

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

La desviación estándar de una variable aleatoria mide el grado de dispersión alrededor de la media.

Algunas propiedades que cumple la varianza son las siguientes.

Propiedades 1.2.1. *Sea X una variable aleatoria con valor esperado finito μ. Entonces*

a)
$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

b) Para cualquier número real a
$$Var(aX) = a^2 Var(X).$$

c) Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

d) Si c es una constante, entonces
$$Var(X + c) = Var(X).$$

Si X es una variable aleatoria con valor esperado μ y varianza σ^2, se puede definir una nueva variable aleatoria Y por

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

en donde

$$E(Y) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}[E(X - \mu)] = \frac{1}{\sigma}[E(X) - \mu] = 0$$

y

$$Var(Y) = Var\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X) = 1.$$

El proceso de transformación de X a Y se llama estandarización de la variable aleatoria X.

1.3. Probabilidades binomiales

Un experimento que sólo tiene dos posibles resultados se llama experimento de Bernoulli. Los dos resultados son descritos como éxito o fracaso, donde la probabilidad de éxito es usualmente denotada por p, y la probabilidad de fracaso es $1 - p$.

Si un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito p es repetido n veces, éste se llama un experimento binomial con n ensayos. Los resultados de cada ensayo son independientes; los parámetros del experimento binomial son n y p.

Definición 1.3.1. *Sea $0 < p < 1$ y sea n un entero positivo, y $\Omega = \{0, \ldots, n\}$. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X sobre Ω con función de masa*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \ \text{para cada } k = 0, \ldots, n, \tag{1.1}$$

*se llama **distribución binomial**.*

Esta distribución da la probabilidad de obtener exactamente k éxitos en un experimento binomial con parámetros n y p. El valor esperado y la varianza de esta distribución están dados en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial. Entonces*

$$E(X) = np, \ Var(X) = np(1 - p).$$

1.4. Probabilidad condicional y esperanza condicional

Cuando se tiene información adicional sobre un experimento, ésta se puede tomar en cuenta. Así, se puede definir la probabilidad condicional dado un conjunto E. La idea es concentrar todas las probabilidades de Ω sobre el conjunto E.

Definición 1.4.1. *Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad finito. Sea E un evento con $P(E) > 0$. Entonces para cualquier evento A, la* ***probabilidad condicional de** A **dado** E, denotada por $P(A|E)$, está dada por*

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}. \tag{1.2}$$

Condicionar sobre un conjunto E permite definir una nueva medida de probabilidad condicional sobre Ω.

Teorema 1.4.1. *Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad finito y sea E un evento para el cual $P(E) > 0$. Entonces la función P_E definida por*

$$P_E(A) = P(A|E)$$

es una medida de probabilidad sobre Ω para la cual $P_E(E) = 1$.

Demostración. Para probar que $P_E(A)$ es una medida de probabilidad, se deben cumplir las tres propiedades de la Definición 2.1.1:

a) La monotonía de P implica
$$0 \leq P(A \cap E) \leq P(E)$$
y así $0 \leq P(A|E) \leq 1$, esto es,
$$0 \leq P_E(A) \leq 1.$$

b) Se cumple $P_E(\Omega) = P(\Omega|E) = \dfrac{P(\Omega \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E)}{P(E)} = 1.$

c) Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cap E$ y $B \cap E$ son disjuntos. Así

$$\begin{aligned}
P_E(A \cup B) &= P[(A \cup B)|E] \\
&= \frac{P[(A \cup B) \cap E]}{P(E)} \\
&= \frac{P[(A \cap E) \cup (B \cap E)]}{P(E)} \\
&= \frac{P(A \cap E) + P(B \cap E)}{P(E)} \\
&= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} + \frac{P(B \cap E)}{P(E)} \\
&= P(A|E) + P(B|E) \\
&= P_E(A) + P_E(B).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, con lo anterior se tiene que $P_E(A)$ es una medida de probabilidad. $\square$

Se pueden juntar las nociones de probabilidad condicional y de valor esperado para obtener la definición de esperanza condicional.

Definición 1.4.2. *Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad finito y sea A un evento para el cual $P(A) > 0$. La **esperanza condicional** de una variable aleatoria X con respecto al evento A es*

$$E(X|A) = E_A(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)P(\omega_i|A).$$

También se puede definir la esperanza condicional en términos de esperanza no condicional.

Teorema 1.4.2. *Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad finito y sea A un evento para el cual $P(A) > 0$. La esperanza condicional de una variable aleatoria X con respecto al evento A es*

$$E(X|A) = \frac{E(X1_A)}{P(A)}, \tag{1.3}$$

donde 1_A es la función indicadora de A.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} E_A(X) &= \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)P(\omega_i|A) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)\frac{P(\omega_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{1}{P(A)}\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)1_A(\omega_i)P(\omega_i) \\ &= \frac{1}{P(A)}E(X1_A). \end{aligned}$$

□

Una consecuencia de este teorema es el siguiente resultado.

Teorema 1.4.3. *Si A y B son eventos con $P(A \cap B) > 0$, entonces*

$$E_A(X|B) = E(X|A \cap B). \tag{1.4}$$

Demostración. Usando el teorema anterior, se tiene

$$\begin{aligned} E_A(X|B) &= \frac{E_A(X1_B)}{P_A(B)} \\ &= \frac{E(X1_B1_A)}{P(A)P_A(B)} \\ &= \frac{E(X1_{A\cap B})}{P(A\cap B)} \\ &= E(X|A \cap B). \end{aligned}$$

□

Se puede definir la variable aleatoria $E(X|F)$ como una combinación lineal de funciones indicadoras de los átomos de una σ-álgebra F.

Definición 1.4.3. *Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad finito y sean $\{B_1, \ldots, B_n\}$ los átomos de una σ-álgebra F para la cual $P(B_i) > 0$ para cada i. La esperanza condicional de una variable aleatoria X con respecto a la σ-álgebra F es la variable aleatoria*

$$E(X|F) : (\Omega, F) \to \mathbb{R},$$

definida por

$$E(X|F) = \sum_{i=1}^{n} E(X|B_i) 1_{B_i}. \tag{1.5}$$

En particular, para cada $\omega \in \Omega$

$$E(X|F)(\omega) = E(X|[\omega]_F),$$

donde $[\omega]_F$ es el átomo de F que contiene a ω.

El siguiente teorema establece algunas propiedades de la esperanza condicional.

Teorema 1.4.4. *Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad finito y sean $\{B_1, \ldots, B_n\}$ los átomos de una σ-álgebra F para la cual $P(B_i) > 0$ para cada i. La esperanza condicional $E(X|F)$ tiene las siguientes propiedades.*

a) *La función $E(\cdot|F)$ es una funcional lineal, esto es,*

$$E(aX + bY|F) = aE(X|F) + bE(Y|F). \tag{1.6}$$

b) *La esperanza condicional satisface*

$$E[E(X|F)] = E(X). \tag{1.7}$$

c) *La esperanza condicional $E(X|F)$ puede caracterizarse como la única variable aleatoria Y que es $F-$medible y satisface*

$$E(Y 1_{B_i}) = E(X 1_{B_i}), \tag{1.8}$$

para todos los átomos B_i de F.

d) *Si Y es una variable aleatoria $F-$medible entonces*

$$E(YX|F) = YE(X|F). \tag{1.9}$$

e) *Si X es $F-$medible, entonces*

$$E(X|F) = X. \tag{1.10}$$

f) *Si G es una sub-σ-álgebra de F, entonces*

$$E[E(X|G)|F] = E(X|G) = E[E(X|F)|G]. \tag{1.11}$$

A ésta se le conoce como la propiedad de torre.

g) Si X es independiente de F, entonces

$$E(X|F) = E(X). \tag{1.12}$$

Demostración. a) Se tiene que

$$\begin{aligned}
E(aX+bY|F) &= \sum_{i=1}^{n} E(aX+bY|B_i)1_{B_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{E[(aX+bY)1_{B_i}]}{P(B_i)}1_{B_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{E(aX1_{B_i}+bY1_{B_i})}{P(B_i)}1_{B_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{aE(X1_{B_i})+bE(Y1_{B_i})}{P(B_i)}1_{B_i} \\
&= a\sum_{i=1}^{n} \frac{E(X1_{B_i})}{P(B_i)}1_{B_i} + b\sum_{i=1}^{n} \frac{E(Y1_{B_i})}{P(B_i)}1_{B_i} \\
&= a\sum_{i=1}^{n} E(X|B_i)1_{B_i} + b\sum_{i=1}^{n} E(Y|B_i)1_{B_i} \\
&= aE(X|F) + bE(X|F).
\end{aligned}$$

b) Se tiene que

$$\begin{aligned}
E[E(X|F)] &= E\left[\sum_{i=1}^{n} E(X|B_i)1_{B_i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X|B_i)E(1_{B_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X|B_i)P(B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X1_{B_i}) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{n} X1_{B_i}\right) \\
&= E(X).
\end{aligned}$$

c) Sea $Y = E(X|F)$, Y es $F-\textit{medible}$ por definición. Entonces,

$$\begin{aligned}
E(Y1_{B_i}) &= E[E(X|F)1_{B_i}] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{n} E(X|B_j)1_{B_j}1_{B_i}\right] \\
&= E[E(X|B_i)1_{B_i}] \\
&= E(X|B_i)E(1_{B_i}) \\
&= E(X|B_i)P(B_i) \\
&= E(X1_{B_i}).
\end{aligned}$$

Suponga que Z es una variable aleatoria que es $F-medible$, y para la cual

$$E(Z1_{B_i}) = E(X1_{B_i}),$$

para cada átomo B_i de F. Como Z es constante en B_i, suponga que $Z(\omega) = c$ para todo $\omega \in B_i$. Entonces $Z1_{B_i} = c1_{B_i}$, y con esto

$$E(Z1_{B_i}) = E(c1_{B_i}) = cE(1_{B_i}).$$

Se sigue que

$$cE(1_{B_i}) = E(X1_{B_i}),$$

y así

$$Z(\omega) = c = \frac{E(X1_{B_i})}{E(1_{B_i})} = E(X|B_i) = E(X|F)(\omega),$$

lo cual prueba que $Z = E(X|F) = Y$.

d) Suponga que Z es $F-medible$. Sea $Z(\omega) = b$ para todo $\omega \in B_i$. Entonces como $ZX1_{B_i} = bX1_{B_i}$ se tiene

$$\begin{aligned} E(ZX|F)(\omega) &= E(ZX|B_i) \\ &= \frac{E(ZX1_{B_i})}{P(B_i)} \\ &= \frac{bE(X1_{B_i})}{P(B_i)} \\ &= bE(X|F)(\omega) \\ &= Z(\omega)E(X|F)(\omega), \end{aligned}$$

y por lo tanto $E(ZX|F) = ZE(X|F)$.

e) Suponga $X = 1$ en 4), para obtener

$$E(Z1|F) = ZE(1|F) = Z.$$

f) Para $\omega \in \Omega$ se tiene

$$\begin{aligned} E[E(X|G)|F](\omega) &= E[E(X|G)|[\omega]_F] \\ &= \frac{E[E(X|G)1_{[\omega]_F}]}{P([\omega]_F)}. \end{aligned}$$

Como $E(X|G)$ es constante sobre los átomos de G, y ya que G es una sub-σ-álgebra de F, se tiene que $E(X|G)$ es también constante sobre los átomos de F. Entonces

$$\begin{aligned} E[E(X|G)|F](\omega) &= \frac{E(X|G)(\omega)E[1_{[\omega]_F}]}{P([\omega]_F)} \\ &= E(X|G)(\omega). \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo ω, se tiene

$$E[E(X|G)|F] = E(X|G).$$

Pruébese ahora que

$$E[E(X|F)|G] = E(X|G).$$

Sea $Y = E(X|F)$. Por 3) se cumple

$$E(Y1_B) = E(X1_B),$$

para todo $B \in F$. Como G es una sub-σ-álgebra de F, se sigue que $G \subseteq F$ y así la ecuación se cumple para todo $B \in G$. Ahora sea $Z = E(X|G)$. Por 3) se cumple

$$E(Z1_B) = E(X1_B),$$

para todo $B \in G$. Juntando lo anterior se tiene

$$E(Y1_B) = E(Z1_B),$$

para todo $B \in G$. Como Z es $G - medible$, por 3) se tiene

$$Z = E(Y|G).$$

Sustituyendo Z y Y se obtiene

$$E(X|G) = E[Y = E(X|F)|G].$$

g) Suponga que X es independiente de F. Entonces para cada átomo de F se tiene

$$P(X = r|B) = P(X = r),$$

y con esto

$$\begin{aligned} E(X|F)(\omega) &= E(X|[\omega]_F) \\ &= \sum_{r \in X(\Omega)} rP(X = r|[\omega]_F) \\ &= \sum_{r \in X(\Omega)} rP(X = r) \\ &= E(X). \end{aligned}$$

□

1.5. Procesos estocásticos

Los procesos estocásticos se pueden ver como modelos que analizan el comportamiento de fenómenos no deterministas que evolucionan a través del tiempo. Éstos tienen muchas aplicaciones en varias áreas de las matemáticas aplicadas, incluyendo las matemáticas financieras.

Definición 1.5.1. *Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizadas por el conjunto T, llamado espacio parametral, y con valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

El proceso $\{X_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es llamado a tiempo discreto, y el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ es llamado a tiempo continuo.

Un proceso estocástico se puede ver como una función de dos variables

$$X : \Omega \times T \to S$$

Para cada $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ es una variable aleatoria y para cada $t \in T$, $t \to X_t(\omega)$ es una trayectoria o realización del proceso.

Si $A \subset S$, el evento $\{X_t \in A\}$ corresponde a la situación en donde al tiempo t el proceso toma algún valor dentro de A.

Algunos ejemplos de procesos estocásticos son los siguientes.

- **Procesos de ensayos independientes**
  El proceso estocástico $\{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$ puede estar formado por variables aleatorias independientes. Este modelo corresponde al experimento de realizar una sucesión de ensayos independientes del mismo.

- **Procesos de Markov**
  Suponiendo el estado presente conocido del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama propiedad de Markov, que se expresa como sigue:
  Para cualesquiera estados $x_0, \ldots, x_{n-1}$ (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro), se cumple

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

- **Procesos con incrementos independientes**
  Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes si para cualesquiera tiempos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ las variables aleatorias $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

- **Procesos estacionarios**
  Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es estacionario si para cualesquiera tiempos $t_1, \ldots, t_n$, la distribución conjunta de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es la misma que la de $(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h})$ para $h > 0$. En particular, la distribución de X_t es la misma que la de X_{t+h} con $h > 0$.

- **Procesos con incrementos estacionarios**
  Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios si para cualesquiera tiempos $s < t$ y para $h > 0$, las variables aleatorias $X_t - X_s$ y $X_{t+h} - X_{s+h}$ tienen la misma distribución de probabilidad.

- **Martingalas**
  Una martingala es un proceso estocástico $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cumple la condición

$$E(X_{n+1}|X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = x_n$$

- **Procesos de Lévy**
  Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy si sus incrementos son independientes y estacionarios.

- **Procesos gaussianos**
  Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es gaussiano si para cualesquiera tiempos $t_1, \ldots, t_n$, la distribución conjunta de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es una distribución normal multivariada.

1.6. Filtraciones y martingalas

Definición 1.6.1. *Una sucesión $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ de sub-σ-álgebras de un conjunto $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ para la cual*

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_N$$

*se llama una **filtración**.*

Así, una filtración inicia sin conocimiento del estado final, posiblemente gana algún conocimiento adicional en cada instante de tiempo (pero nunca pierde información), y termina con el conocimiento completo del estado final.

Definición 1.6.2. *Una sucesión $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ de variables aleatorias es **adaptada** a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ si para cada n, X_n es $F_n -$ medible.*

Definición 1.6.3. *Una sucesión $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ de variables aleatorias adaptadas a una filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ es **predecible** si $\forall n \geq 1$, H_n es $F_{n-1} -$ medible.*

A partir de la definición de esperanza condicional, se puede obtener el concepto de $F_n -$ *martingala*.

Definición 1.6.4. *Una sucesión $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ de variables aleatorias adaptadas a una filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ es:*

a) Una $F_n -$ martingala si $E(M_{n+1}|F_n) = M_n$ para toda $n \leq N - 1$.

b) Una $F_n -$ supermartingala si $E(M_{n+1}|F_n) \leq M_n$ para toda $n \leq N - 1$.

c) Una $F_n -$ submartingala si $E(M_{n+1}|F_n) \geq M_n$ para toda $n \leq N - 1$.

Propiedades 1.6.1. *Algunas propiedades que cumplen las martingalas son:*

a) $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *es una* $F_n - martingala$ *si y sólo si*

$$E(M_{n+j}|F_n) = M_n, \ \forall j \geq 0. \tag{1.13}$$

b) *Si* $(M_n)_{n\geq 0}$ *es una* $F_n - martingala$*, entonces para cada* n*,*

$$E(M_n) = E(M_0). \tag{1.14}$$

c) *La suma de dos* $F_n - martingalas$ *es una* $F_n - martingala$*.*

A partir de una $F_n - martingala$ y una sucesión predecible, se puede generar otra sucesión que también sea una $F_n - martingala$.

Teorema 1.6.1. *Sea* $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *una* $F_n - martingala$ *y* $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ *una sucesión predecible con respecto a la filtración* $(F_n)_{0\leq n\leq N}$*. Denote* $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$*. Entonces la sucesión* $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ *definida por*

$$\begin{array}{rcl} X_0 &=& H_0M_0, \\ X_n &=& H_0M_0 + H_1\Delta M_1 + \ldots + H_n\Delta M_n \quad n \geq 1, \end{array}$$

es una martingala con respecto a $(F_n)_{0\leq n\leq N}$*.*

Demostración. $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ es una sucesión adaptada a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$, pues $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ es predecible y $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ por ser una $F_n - martingala$, es adaptada a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$, y con esto ΔM_n también lo es. Más aún, para $n \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} E(X_{n+1} - X_n|F_n) &=& E[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|F_n] \\ &=& H_{n+1}E(M_{n+1} - M_n|F_n) \\ &=& H_{n+1}[E(M_{n+1}|F_n) - E(M_n|F_n)] \\ &=& H_{n+1}(M_n - M_n) \\ &=& 0. \end{array}$$

Así $E(X_{n+1}|F_n) = E(X_n|F_n) = X_n$. Por lo tanto se tiene que $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$. □

A $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ se le llama **trasformación de martingala** de $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ por $(H_n)_{0\leq n\leq N}$.

El teorema siguiente establece una caracterización de martingalas.

Teorema 1.6.2. *Una sucesión adaptada de variables aleatorias reales* $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *es una* $F_n - martingala$ *si y sólo si para cualquier sucesión predecible* $(H_n)_{0\leq n\leq N}$*, se tiene que*

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} H_n\Delta M_n\right) = 0. \tag{1.15}$$

Demostración. Suponga que $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$, la sucesión $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ definida por: $X_0 = 0$, y para $n \geq 1$, $X_n = \sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j$ para cualquier proceso predecible $(H_n)_{0\leq n\leq N}$. Entonces por el Teorema 1.6.1, $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ es una martingala. Con esto

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = E(X_N) = E(X_0) = 0.$$

Para $j \in \{1, \ldots, N\}$ fijo, se le puede asociar la sucesión $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ definida por: $H_n = 0$ para $n \neq j+1$ y $H_{j+1} = 1_A$ para cualquier A $F_j - medible$. Así $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ es predecible.

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = 0 \Rightarrow$$

$$E[1_A(M_{j+1} - M_j)] = 0 \Rightarrow$$

$$E(M_{j+1}1_A) = E(M_j 1_A)$$

Por la propiedad (1.8) se tiene que $M_j = E(M_{j+1}|F_j)$. Por lo tanto $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$. □

Capítulo 2

Modelos financieros a tiempo discreto

Un producto derivado se define como un instrumento cuyo valor depende o se deriva del valor de un bien denominado subyacente. Los contratos de derivados tienen tres finalidades básicas: cobertura de riesgos, especulación, o aprovechamiento de oportunidades de arbitraje.

Entre los productos derivados más comunes se encuentran las opciones.

Una opción le da a su titular el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender una cierta cantidad de un activo financiero, en una fecha determinada, a un determinado precio de ejercicio.

El escritor de la opción necesita especificar:

- El tipo de la opción: la opción para comprar se llama *call*, mientras que la opción para vender se llama *put*.
- El activo subyacente: comúnmente, pueden ser valores, bonos, monedas, entre otros.
- La cantidad del activo subyacente a ser comprado o vendido.
- La fecha de expiración: si la opción se puede ejercer en cualquier momento antes de la fecha de expiración o madurez de la opción, se llama *opción americana*, pero si sólamente se puede ejercer en la fecha de expiración de la opción, se llama *opción europea*.
- El precio de ejercicio, el cual es el precio al cual la transacción se realiza si la opción es ejercida.

El vendedor de una opción se dice que toma una posición corta, y el comprador de la opción se dice que toma una posición larga.

El precio de la opción es la prima; cuando la opción es negociada en un mercado organizado, la prima es cotizada por el mercado. De otra manera, el problema es valorar el precio de la opción. Además, aunque la opción sea negociada en un mercado organizado, puede ser interesante detectar algunas posibles anormalidades en el mercado.

Analícese el caso de un call europeo sobre un activo, cuyo precio al tiempo t es denotado por S_t. Llámese N la fecha de expiración y K el precio de ejercicio. Si $K > S_N$, el titular de la opción no tendrá ningún interés en ejercer la opción. Pero si $S_N > K$, el titular logrará una ganancia de $S_N - K$ por ejercer la opción, esto es, comprando el activo por K y vendiéndolo al mercado por S_N; entonces, el valor de un call en la madurez está dado por

$$(S_N - K)_+ = \text{máx}(S_N - K, 0).$$

Si la opción es ejercida, el escritor de ésta deberá ser capaz de entregar el activo al precio K. Esto significa que debe generar una cantidad $(S_N - K)_+$ en la madurez.

Al momento de escribir la opción, que se considerará al inicio del tiempo, S_N es desconocida y entonces habría que responder las siguientes dos preguntas:

a) ¿Cuánto debería el comprador pagar por la opción? En otras palabras, ¿cuánto debería valer al tiempo $t = 0$ un activo que valga $(S_N - K)_+$ al tiempo N? Este es el problema de valoración de la opción.

b) ¿Cómo podría el escritor de la opción, que gana la prima inicialmente, generar una cantidad $(S_N - K)_+$ al tiempo N? Este es el problema de cobertura de la opción.

Las curvas de pago para las posiciones larga y corta de los tipos de opciones están dadas en la Figura 2.1.

Call largo (Ver Figura 2.1 a)).

- El descenso está limitado por el costo del call.
- El ascenso es ilimitado ya que no hay límite para el precio del activo.
- El comprador espera que el precio del activo aumente.
- Debería ser ejercido cuando el precio del activo sea mayor que el precio de ejercicio K.
- Pago=máx$\{S_N - K, 0\}$.

Call corto (Ver Figura 2.1 b)).

- El descenso es ilimitado ya que no hay límite para el precio del activo.
- El ascenso está limitado por el precio de venta del call.
- El comprador espera que el precio del activo disminuya.
- Debería ser ejercido cuando el precio del activo sea menor que el precio de ejercicio K.

- Pago=mín$\{K - S_N, 0\}$.

Put largo (Ver Figura 2.1 c)).

- El descenso está limitado por el costo del put.
- El ascenso está limitado ya que el precio del activo puede solamente descender hasta 0, en tal caso la ganancia es igual al precio de ejercicio K.
- El comprador espera que el precio del activo disminuya.
- Debería ser ejercido cuando el precio del activo sea menor que el precio de ejercicio K.
- Pago=máx$\{K - S_N, 0\}$.

Put corto (Ver Figura 2.1 d)).

- El descenso está limitado ya que el precio del activo puede solamente descender hasta 0, en tal caso la pérdida es igual al precio de ejercicio K.
- El ascenso está limitado por el precio de venta del put.
- El comprador espera que el precio del activo aumente.
- Debería ser ejercido cuando el precio del activo sea mayor que el precio de ejercicio K.
- Pago=mín$\{S_N - K, 0\}$.

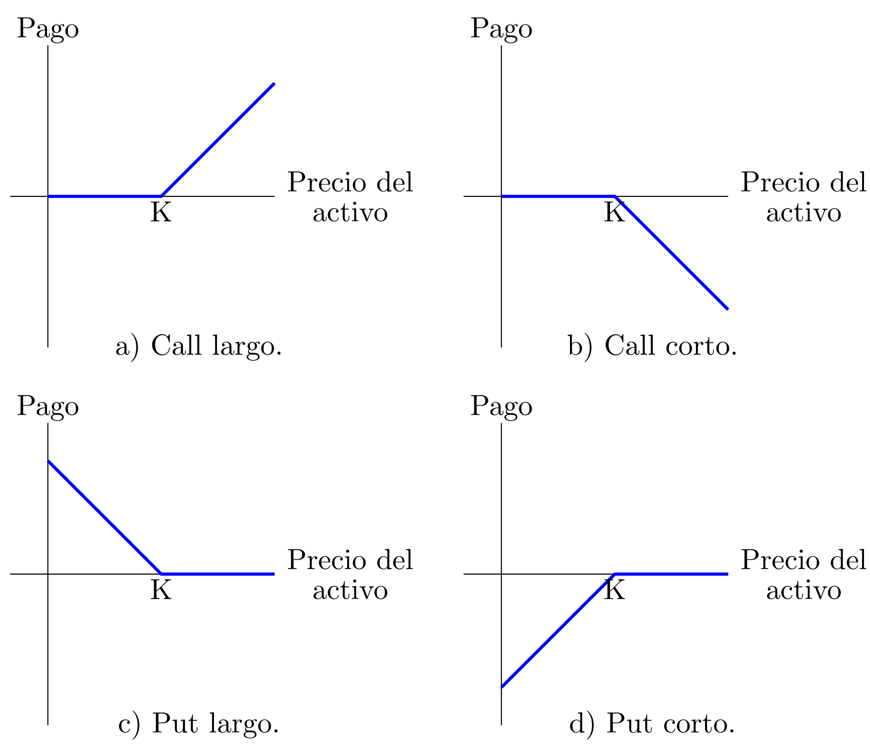

Figura 2.1. Curvas de pago.

El problema de la valoración de derivados es determinar un valor inicial justo de cualquier derivado. La dificultad es que el valor final del derivado es desconocido al tiempo $t = 0$, dado que generalmente depende del valor final del activo subyacente.

Se asumirá que el valor final del activo subyacente es una variable aleatoria conocida y así el conjunto de los posibles valores finales del activo es conocido. En consecuencia, el conjunto de posibles valores del derivado es también conocido. El conocimiento de este conjunto, junto con el principio de no arbitraje es la clave para la valoración de derivados [6].

Se harán las siguientes hipótesis para los modelos:

- Una unidad de contabilidad de dinero, por ejemplo un peso.
- Existencia de un activo libre de riesgo, el cual es el bono bancario, cuyo valor al tiempo n es $(1+r)^n$, donde r es la tasa fija del bono.
- Mercado infinitamente divisible, esto es, se puede tomar cualquier cantidad de un activo, ya sea parte entera, fraccionaria, irracional, etc.
- Mercado sin fricciones.
  Todas las transacciones toman lugar inmediatamente y sin ningún retraso externo.
- Mercado perfecto.
  - No existen tarifas de transación o comisiones.
  - No existen restricciones para la venta en corto.
  - La tasa de endeudamiento es la misma que la tasa de crédito.
- Paridad compra-venta.
  Se supondrá que cualquier precio de compra de un activo es igual a su precio de venta.
- Los precios son determinados bajo la hipótesis de no arbitraje.

2.1. El modelo básico de los mercados financieros a tiempo discreto

Definición 2.1.1. *Un modelo de un* ***mercado financiero a tiempo discreto*** *es construido sobre un espacio de probabilidad finito* (Ω, F, P) *equipado con una filtración* $(F_n)_{0\leq n\leq N}$.

A F_n se le puede ver como la información disponible al tiempo n. El número entero finito N se llama horizonte y es el tiempo de la madurez de las opciones.

Se asumirá que $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $F_N = P(\Omega)$ y $\forall\omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$.

Definición 2.1.2. *El* ***mercado*** *está formado por* $d+1$ *activos financieros, cuyos precios al tiempo* n *están dados por las variables aleatorias no negativas* $S_n^0, \ldots, S_n^d$, $F_n -$ *medibles.*

A $S_n = (S_n^0, \ldots, S_n^d)$ se le conoce como el vector de precios al tiempo n. Los activos $S_n^1, \ldots, S_n^d$ se llaman activos con riesgo. El activo S_n^0 es el activo sin riesgo.

Si la tasa de interés del activo sin riesgo sobre un periodo unitario es constante e igual a r, entonces $S_n^0 = (1+r)^n$, por lo tanto $S_0^0 = 1$.

El coeficiente $\beta_n = \dfrac{1}{S_n^0}$ se interpreta como el factor de descuento (desde el tiempo n hasta el tiempo 0). Por ejemplo, si una opción cuesta k pesos al tiempo n, su precio al tiempo 0 es $\dfrac{k}{S_n^0} = \dfrac{k}{(1+r)^n}$.

2.2. Estrategias de inversión

Los portafolios son diseñados para modelar los bienes de un inversionista sobre un periodo de tiempo fijo. Su definición formal es la siguiente.

Definición 2.2.1. *Un **portafolio** al tiempo n es un vector aleatorio*

$$\varphi_n = (\varphi_n^0, \ldots, \varphi_n^d),$$

donde φ_n^i es el número de acciones del activo i que se compran al tiempo n, y se mantienen constantes hasta el tiempo $n+1$.

Definición 2.2.2. *Una **estrategia de inversión** es un proceso estocástico a tiempo discreto $\varphi = ((\varphi_n^0, \ldots, \varphi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ con valores sobre $\mathbb{R}^{d+1}$, y es la sucesión de los portafolios desde el tiempo 0 hasta el tiempo n.*

Se supondrá que el proceso φ es predecible, es decir:

$$\textit{para todo } i \in \{0, \ldots, d\}, \qquad \begin{cases} \varphi_0^i & \text{es} \quad F_0 - \textit{medible}, \\ \varphi_n^i & \text{es} \quad F_{n-1} - \textit{medible}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Esto significa que las cantidades que se comprarán de cada activo al tiempo n $(\varphi_n^0, \ldots, \varphi_n^d)$ son decididas con respecto a la información disponible al tiempo $n-1$ y permanecen hasta el tiempo n, cuando las nuevas compras se realicen.

Definición 2.2.3. *El **valor del portafolio** al tiempo n es el producto escalar*

$$V_n(\varphi) = \langle \varphi_n, S_n \rangle := \sum_{i=0}^{d} \varphi_n^i S_n^i. \tag{2.1}$$

*Su **valor descontado** es:*

$$\widetilde{V}_n(\varphi) = \beta_n \langle \varphi_n, S_n \rangle := \langle \varphi_n, \widetilde{S}_n \rangle, \tag{2.2}$$

con $\beta_n = \dfrac{1}{S_n^0}$ y $\widetilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \ldots, \beta_n S_n^d)$ es el vector de precios descontados.

Definición 2.2.4. *Una estrategia de inversión φ es* ***autofinanciada*** *si cumple*

$$\forall n \in \{0, \ldots, N-1\} : \langle \varphi_n, S_n \rangle = \langle \varphi_{n+1}, S_n \rangle. \tag{2.3}$$

Esto significa que al tiempo n, una vez que los nuevos precios $S_n^0, \ldots, S_n^d$ están dados, el inversionista reajusta sus compras de φ_n a φ_{n+1} al tiempo $n+1$ sin cambiar el valor del portafolio al tiempo n.

La igualdad $\langle \varphi_n, S_n \rangle = \langle \varphi_{n+1}, S_n \rangle$ implica

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\varphi) - V_n(\varphi) &= \langle \varphi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - \langle \varphi_n, S_n \rangle \\ &= \langle \varphi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - \langle \varphi_{n+1}, S_n \rangle \\ &= \langle \varphi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle. \end{aligned}$$

Usando que al tiempo $n+1$ el portafolio tiene un valor $\langle \varphi_{n+1}, S_{n+1} \rangle$, se obtiene que $\langle \varphi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle$ es la ganancia neta causada por el cambio de precios entre los tiempos n y $n+1$. Así, el beneficio o pérdida obtenida al tiempo $n+1$ siguiendo una estrategia autofinanciada depende solamente del movimiento de precios.

Proposición 2.2.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) *La estrategia φ es autofinanciada.*

b) *Para cada $n \in \{1, \ldots, N\}$ se tiene*

$$V_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta S_j \rangle, \tag{2.4}$$

donde ΔS_j es el vector $S_j - S_{j-1}$.

c) *Para cada $n \in \{1, \ldots, N\}$ se tiene*

$$\widetilde{V}_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle, \tag{2.5}$$

donde $\Delta \widetilde{S}_j$ es el vector $\widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Suponga que φ es autofinanciada. Entonces

$$\begin{aligned} V_n(\varphi) - V_0(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} [V_i(\varphi) - V_{i-1}(\varphi)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, S_i - S_{i-1} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \Delta S_i \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta S_j \rangle.$$

$b) \Rightarrow a)$ Suponga que b) se cumple. Entonces

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\varphi) - V_n(\varphi) &= \left(V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n+1} \langle \varphi_j, \Delta S_j \rangle \right) - \left(V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta S_j \rangle \right) \\ &= \langle \varphi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle, \end{aligned}$$

lo que equivale a que φ sea autofinanciada.

$a) \Rightarrow c)$ Suponga que φ es autofinanciada. Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_n(\varphi) - \widetilde{V}_0(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} [\widetilde{V}_i(\varphi) - \widetilde{V}_{i-1}(\varphi)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \widetilde{S}_i - \widetilde{S}_{i-1} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \Delta \widetilde{S}_i \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widetilde{V}_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle.$$

$c) \Rightarrow a)$ Suponga que c) se cumple. Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_{n+1}(\varphi) - \widetilde{V}_n(\varphi) &= \left(V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n+1} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle \right) - \left(V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle \right) \\ &= \langle \varphi_{n+1}, \widetilde{S}_{n+1} - \widetilde{S}_n \rangle, \end{aligned}$$

lo que equivale a que φ sea autofinanciada.

$\square$

De la proposición anterior se puede ver que si un inversionista sigue una estrategia autofinanciada, el valor descontado de su portafolio está determinado completamente por su riqueza inicial y la estrategia $(\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$.

Proposición 2.2.2. *Para todo proceso predecible* $((\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ *y para todo valor inicial* V_0 $F_0 -$ *medible, existe un único proceso predecible* $(\varphi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ *tal que la estrategia* $\varphi = (\varphi^0, \ldots, \varphi^d)$ *es autofinanciada y su valor inicial es* V_0.

Demostración. La condición de autofinanciamiento implica que,

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_n(\varphi) &= V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \ldots + \varphi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d). \end{aligned}$$

Por definición de $\widetilde{V}_n(\varphi)$,

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_n(\varphi) &= \langle \varphi_n, \widetilde{S}_n \rangle \\ &= \varphi_n^0 + \varphi_n^1 \widetilde{S}_n^1 + \ldots + \varphi_n^d \widetilde{S}_n^d.\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}\varphi_n^0 &= V_0 + \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \ldots + \varphi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) - (\varphi_n^1 \widetilde{S}_n^1 + \ldots \varphi_n^d \widetilde{S}_n^d) \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\varphi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \ldots + \varphi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) + \\ &\quad [\varphi_n^1 (\widetilde{S}_n^1 - \widetilde{S}_{n-1}^1) + \ldots + \varphi_n^d (\widetilde{S}_n^d - \widetilde{S}_{n-1}^d)] - (\varphi_n^1 \widetilde{S}_n^1 + \ldots + \varphi_n^d \widetilde{S}_n^d) \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\varphi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \ldots + \varphi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) - (\varphi_n^1 \widetilde{S}_{n-1}^1 + \ldots + \varphi_n^d \widetilde{S}_{n-1}^d).\end{aligned}$$

Así se define

$$\varphi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\varphi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \ldots + \varphi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) - (\varphi_n^1 \widetilde{S}_{n-1}^1 + \ldots \varphi_n^d \widetilde{S}_{n-1}^d) \in F_{n-1},$$

y por lo tanto φ_n^0 es predecible. $\square$

2.3. Arbitraje y mercados financieros viables

Si $\varphi_n^0 < 0$, se entiende que se ha pedido prestado la cantidad $|\varphi_n^0|$ en el mercado sin riesgo.

Si $\varphi_n^i < 0$ para algún $i \geq 1$, se dice que se está corto un número $|\varphi_n^i|$ del activo i.

En nuestro modelo de mercado la venta corta y los préstamos son permitidos, pero el valor del portafolio debe ser positivo todo el tiempo.

Definición 2.3.1. *Una estrategia de inversión φ es **admisible** si es autofinanciada y si $V_n(\varphi) \geq 0$ para cada $n \in \{0, \ldots, N\}$.*

La definición anterior significa que el inversionista debe estar preparado para pagar sus deudas en cualquier momento.

Definición 2.3.2. *Una **estrategia con arbitraje** es una estrategia admisible con valor inicial cero y valor final positivo.*

Definición 2.3.3. *Se dice que el mercado es **viable** si no existe oportunidad de arbitraje.*

A cada proceso admisible $(\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^d)$ se le asocia el proceso definido por

$$\widetilde{G}_n(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \ldots + \varphi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d). \tag{2.6}$$

De (2.5) se sigue que ésta es la ganancia descontada acumulada lograda siguiendo la estrategia autofinanciada con valor inicial cero.

Lema 2.3.1. *Si el mercado es viable, cualquier proceso predecible* $(\varphi^1, \ldots, \varphi^d)$ *cumple que,*

$$\widetilde{G}_N(\varphi) \notin \Gamma = \{X \mid X(\omega) > 0 \ \forall \omega\}.$$

Demostración. Suponga que $\widetilde{G}_N(\varphi) \in \Gamma$, si $\widetilde{G}_n(\varphi) \geq 0 \ \forall n \in \{0, \ldots, N\}$ entonces el mercado no es viable, pues en cada tiempo la ganancia descontada acumulada sería no negativa, y por lo tanto $\widetilde{V}_N(\varphi) = \widetilde{G}_N(\varphi) > 0$.

Ahora suponga que las $\widetilde{G}_n(\varphi)$ no son todas no negativas, esto es, existe al menos una $\widetilde{G}_n(\varphi)$ tal que $\widetilde{G}_n(\varphi) < 0$.

Defina $n = \sup\{k \mid P(\widetilde{G}_k(\varphi) < 0) > 0\}$. De la definición de n, se tiene que $n \leq N - 1$, $P(\widetilde{G}_n(\varphi) < 0) > 0$ y $\forall m > n, \widetilde{G}_m(\varphi) \geq 0$.

Ahora introduciendo un nuevo proceso ψ como,

$$\psi_j(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \leq n \\ 1_A(\omega)\varphi_j(\omega) & \text{si} \quad j > n, \end{cases}$$

donde $A = \{\widetilde{G}_n(\varphi) < 0\}$. El proceso ψ es predecible porque φ es predecible y A es $F_n-medible$. Más aún:

$$\widetilde{G}_j(\psi) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \leq n \\ 1_A[\widetilde{G}_j(\varphi) - \widetilde{G}_n(\varphi)] & \text{si} \quad j > n. \end{cases}$$

En efecto, suponga que $j > n$, entonces,

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_j(\psi) &= 1_A \left[\sum_{i=1}^{j} (\varphi_i^1 \Delta \widetilde{S}_i^1 + \ldots + \varphi_i^d \Delta \widetilde{S}_i^d) \right] \\ &= 1_A \left[\sum_{i=n+1}^{j} (\varphi_i^1 \Delta \widetilde{S}_i^1 + \ldots + \varphi_i^d \Delta \widetilde{S}_i^d) \right] \\ &= 1_A \left[\sum_{i=1}^{j} (\varphi_i^1 \Delta \widetilde{S}_i^1 + \ldots + \varphi_i^d \Delta \widetilde{S}_i^d) - \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i^1 \Delta \widetilde{S}_i^1 + \ldots + \varphi_i^d \Delta \widetilde{S}_i^d) \right] \\ &= 1_A \left[\widetilde{G}_j(\varphi) - \widetilde{G}_n(\varphi) \right]. \end{aligned}$$

De aquí, $\widetilde{G}_j(\psi) \geq 0 \ \ \forall j \in \{0, \ldots, N\}$ pues $\widetilde{G}_j(\varphi) - \widetilde{G}_n(\varphi) > 0$ si $j > n$. Entonces $\widetilde{G}_N(\psi) > 0$ sobre A. Por lo tanto el mercado no es viable. □

Lema 2.3.2. *El conjunto* $V = \{\widetilde{G}_N(\varphi) \mid \varphi$ *es predecible con valores en* $\mathbb{R}^d\}$ *es un subespacio vectorial del espacio de variables aleatorias reales definidas sobre* Ω.

Teorema 2.3.1. ***(Primer teorema fundamental de valuación de opciones)*** *El mercado es viable si y sólo si existe una medida de probabilidad* P^* *equivalente a* P *bajo la cual los precios descontados de los activos son martingalas.*

Demostración. $\Leftarrow$] Suponga que existe una medida de probabilidad P^* equivalente a P bajo la cual los precios descontados son martingalas; entonces para cualquier estrategia autofinanciada φ y de (2.5) se tiene que

$$\widetilde{V}_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle.$$

Por el Teorema 1.6.1, $(\widetilde{V}_n(\varphi))_{0 \leq n \leq N}$ es una martingala bajo la medida P^*.

Entonces por (1.14), $\widetilde{V}_N(\varphi)$ y $V_0(\varphi)$ tienen la misma esperanza bajo P^*, esto es,

$$E^*[\widetilde{V}_N(\varphi)] = E^*[\widetilde{V}_0(\varphi)].$$

Entonces, si la estrategia φ es admisible con valor inicial cero, se tiene que

$$E^*[\widetilde{V}_N(\varphi)] = E^*[\widetilde{V}_0(\varphi)] = E^*(0) = 0,$$

con $\widetilde{V}_N(\varphi) \geq 0$. Así, $\widetilde{V}_N(\varphi) = 0$, pues $P^*(\{\omega\}) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$.

Por lo tanto, el mercado es viable.

$\Rightarrow$] Sea φ un proceso predecible. Aún si no se asume que las $\widetilde{G}_n(\varphi)$ son no negativas, todavía se tiene que $\widetilde{G}_N(\varphi) \notin \Gamma$.

Usando el subespacio V definido en el Lema 2.3.2, y por el Lema 2.3.1, $V \cap \Gamma = \emptyset$.

Defínase el conjunto compacto y convexo K como

$$K = \left\{ X \in \Gamma \mid \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) = 1 \right\}.$$

Como $K \subset \Gamma$ se tiene que $V \cap K = \emptyset$.

El teorema de separación de conjuntos convexos establece que:

"Sea K un conjunto compacto y convexo y V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si V y K son disjuntos, existe una funcional lineal ξ definida en $\mathbb{R}^n$, que satisface:

a) $\forall x \in K$, $\xi(x) > 0$.

b) $\forall x \in V$, $\xi(x) = 0$.

Por lo tanto, el subespacio V está incluido en un hiperplano que no intersecta a K."

Se puede ver que esto es equivalente a decir que existen $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$ tales que $\xi(X) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$, donde $X \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un vector $(\lambda(\omega_1), \ldots, \lambda(\omega_n))$ tal que:

a) $\forall X \in K, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda(\omega_i) X(\omega_i) > 0.$

b) Para cualquier proceso predecible φ,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(\omega_i) \widetilde{G}_N(\varphi)(\omega_i) = 0.$$

De la propiedad a), por ser una combinación convexa se tiene que $\lambda(\omega_i) > 0$ $\forall \omega_i \in \Omega$. Con esto, la medida de probabilidad P^* definida por medio de la fórmula

$$P^*(\{\omega_i\}) = \frac{\lambda(\omega_i)}{\sum_{k=1}^{n} \lambda(\omega_k)} > 0$$

es una medida de probabilidad equivalente a P.

Si se denota por E^* la esperanza bajo la medida P^*, la propiedad b) significa que, para cualquier proceso predecible φ en $\mathbb{R}^d$ se tiene que

$$\begin{aligned}
E^*\left(\sum_{j=1}^{N} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle\right) &= \sum_{j=1}^{N} E^*\left(\langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\langle \varphi_j(\omega_i), \Delta \widetilde{S}_j(\omega_i) \rangle \frac{\lambda(\omega_i)}{\sum_{k=1}^{m} \lambda(\omega_k)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \lambda(\omega_k)} \sum_{i=1}^{m} \left[\lambda(\omega_i) \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi_j(\omega_i), \Delta \widetilde{S}_j(\omega_i) \rangle\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ y cada sucesión predecible (φ_n^i) en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$E^*\left(\sum_{j=1}^{N} \varphi_j^i \Delta \widetilde{S}_j^i\right) = 0.$$

Por el Teorema 1.6.2, los precios descontados $\widetilde{S}_n^1, \ldots, \widetilde{S}_n^d$ son martingalas bajo la medida de probabilidad P^*. $\square$

2.4. Mercados completos

Definición 2.4.1. *Sea $(F_n)_{0 \le n \le N}$ una filtración. Una variable aleatoria $h = h(S_0, \ldots, S_N)$ que es $F_N -$ medible se llama una* ***alternativa o reclamación contingente****.*

Algunos ejemplos de alternativas son los call y los put.

Un call europeo de S^1 con precio de ejercicio K se define mediante $h = (S^1_N - K)_+$.

Un put europeo de S^1 con precio de ejercicio K se define mediante $h = (K - S^1_N)_+$.

En ambos casos, h es una función solamente dependiente de S_N.

Definición 2.4.2. *Sea h una alternativa. Una* ***estrategia replicante*** *φ para h es una estrategia de inversión para la cual el valor final del portafolio es h, esto es, $V_N(\varphi) = h$.*

Definición 2.4.3. *Una alternativa h se dice que es* ***alcanzable*** *si existe al menos una estrategia que replique su valor h al tiempo N.*

En un mercado financiero viable, es suficiente encontrar una estrategia autofinanciada que valga h al tiempo N para decir que h es alcanzable. En efecto: Si φ es una estrategia autofinanciada y si P^* es una medida de probabilidad equivalente a P bajo la cual los precios descontados son $F_n - martingalas$, entonces $(\widetilde{V}_n(\varphi))_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$ bajo la medida P^*. Así, para $n \in \{0, \ldots, N\}$,

$$\widetilde{V}_n(\varphi) = E^*[\widetilde{V}_N(\varphi)|F_n]. \tag{2.7}$$

Si $h = \widetilde{V}_N(\varphi)$ entonces $\widetilde{V}_N(\varphi) \geq 0$. Usando (2.7) se tiene que $\widetilde{V}_n(\varphi) \geq 0,\ \forall n = 0, \ldots, N$, y por lo tanto φ es admisible.

Definición 2.4.4. *Se dice que el mercado es* ***completo*** *si toda alternativa es alcanzable.*

Teorema 2.4.1. ***(Segundo teorema fundamental de valuación de opciones)*** *Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única medida de probabilidad P^* equivalente a P bajo la cual los precios descontados son martingalas.*

Demostración. $\Rightarrow$] Suponga que el mercado es viable y completo. Entonces cualquier alternativa h puede escribirse como $h = V_N(\varphi)$, donde φ es una estrategia admisible.

Como φ es autofinanciada, de (2.5) se tiene que

$$\frac{h}{S^0_N} = \widetilde{V}_N(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j \rangle.$$

Suponga que P_1 y P_2 son dos medidas de probabilidad bajo las cuales los precios descontados son martingalas. Entonces por el Teorema 1.6.1 se tiene que $(\widetilde{V}_n(\varphi))_{0\leq n\leq N}$ es una martingala bajo P_1 y P_2. Denótese por E_1 y E_2 las esperanzas con respecto a P_1 y P_2, respectivamente. Entonces por (1.14) se tiene

$$E_1[\widetilde{V}_N(\varphi)] = E_1[V_0(\varphi)] = V_0(\varphi),$$
$$E_2[\widetilde{V}_N(\varphi)] = E_2[V_0(\varphi)] = V_0(\varphi).$$

Entonces

$$E_1\left(\frac{h}{S^0_N}\right) = E_1[\widetilde{V}_N(\varphi)] = V_0(\varphi) = E_2[\widetilde{V}_N(\varphi)] = E_2\left(\frac{h}{S^0_N}\right).$$

Con esto se tiene que $E_1(h) = E_2(h)$, $\forall h$ variable aleatoria $F_N - medible$. Tomando $h = 1_{\{\omega\}}$ para $\omega \in \Omega$ se tiene $P_1(\omega) = P_2(\omega)$, lo que implica que $P_1 = P_2$.

Por lo tanto la medida de probabilidad es única.

$\Leftarrow$] Suponga que el mercado es viable e incompleto; entonces existe una variable aleatoria $h \geq 0$ que no es alcanzable.

Defínase el conjunto de alternativas alcanzables de la siguiente forma,

$$V = \{X \mid X = U_0 + \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n, \Delta \widetilde{S}_n \rangle,\ U_0 \ es\ F_0 - medible,\ \varphi\ es\ predecible\}.$$

Como h no es alcanzable, entonces $h \notin V$. Así $V \not\subseteq RV(\Omega)$.

Sea P^* una medida de probabilidad equivalente a P bajo la cual los precios descontados son martingalas, y defínase el siguiente producto escalar en el conjunto de las variables aleatorias: $\langle X, Y \rangle = E^*(XY)$.

Si un subespacio no es el espacio completo, entonces existe un vector $Z \neq 0$ que es ortogonal a cada vector en el subespacio. Así, para cada $X \in V$ se tiene

$$\langle X, Z \rangle = E^*(XZ) = 0.$$

Como la alternativa 1 es alcanzable, esto si al tiempo inicial se compran $\frac{1}{S_N^0}$ acciones del activo sin riesgo, y se invierte sobre ellas hasta el tiempo N, se tiene

$$0 = \langle 1, Z \rangle = E^*(Z).$$

Defínase una medida de probabilidad P^{**} diferente a P^* bajo la cual los precios descontados son martingalas de la siguiente manera:

$$P^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{Z(\omega)}{2\|Z\|_\infty}\right) P^*(\{\omega\}).$$

Ésta define una nueva medida de probabilidad, pues

$$\sum_{\omega \in \Omega} \left(1 + \frac{Z(\omega)}{2\|Z\|_\infty}\right) P^*(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} P^*(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|Z\|_\infty} \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) P^*(\{\omega\}) = 1,$$

debido a que $E^*(Z) = 0$. Además, como $|Z(\omega)| \leq \|Z(\omega)\|_\infty$ $\forall \omega$, se tiene

$$0 < \frac{1}{2} P^*(\{\omega\}) \leq P^{**}(\{\omega\}) \leq \frac{3}{2} P^*(\{\omega\}).$$

Con esto P^{**} es una medida de probabilidad equivalente a P^*.

Para cada $X = \sum_{j=1}^{N} \langle \varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j \rangle \in V$, y como $E^*(Z) = 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
E^{**}\left[\sum_{j=1}^{N} \langle \varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j \rangle\right] &= \sum_{j=1}^{N} E^{**}\left(\langle \varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j \rangle\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\omega\in\Omega} \langle \varphi_j(\omega), \Delta\widetilde{S}_j\omega \rangle P^{**}(\{\omega\})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\omega\in\Omega} \langle \varphi_j(\omega), \Delta\widetilde{S}_j\omega \rangle \left(1 + \frac{Z(\omega)}{2\|Z\|_\infty}\right) P^{*}(\{\omega\})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\omega\in\Omega} \langle \varphi_j(\omega), \Delta\widetilde{S}_j(\omega) \rangle P^{*}(\{\omega\})\right) + \\
&\quad \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2\|Z\|_\infty}\sum_{\omega\in\Omega} \langle \varphi_j(\omega), \Delta\widetilde{S}_j(\omega) \rangle Z(\omega) P^{*}(\{\omega\})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} E^{*}\left(\langle \varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j \rangle\right) + \frac{1}{2\|Z\|_\infty}\sum_{j=1}^{N} E^{*}\left(\langle \varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j \rangle Z\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} E^{*}\left(\langle \varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j \rangle\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto P^{**} es otra medida de probabilidad bajo la cual los precios descontados son martingalas, contradiciendo la unicidad. □

2.5. Valoración y cobertura de alternativas en mercados completos

Asuma que el mercado es viable y completo, y sea P^* la única medida de probabilidad bajo la cual los precios descontados de los activos financieros son martingalas.

Sea h una alternativa y φ una estrategia replicante para la alternativa $V_N(\varphi) = h$.

Como $(\widetilde{V}_n)_{0\le n\le N}$ es la transformación de martingala de los precios descontados $(\widetilde{S}_n)_{0\le n\le N}$, entonces $(\widetilde{V}_n)_{0\le n\le N}$ es una $F_n - martingala$ bajo la medida P^*, y en consecuencia

$$
V_n(\varphi) = S_n^0 E^*\left(\frac{h}{S_N^0}|F_n\right),\ n = 0, \ldots, N. \tag{2.8}
$$

Por lo tanto, si se puede calcular la medida P^* equivalente a P, en cualquier momento n, el valor de una estrategia admisible que replica h es completamente determinada por h.

A $V_n(\varphi)$ se le puede ver como la riqueza necesaria al tiempo n para replicar h al tiempo N siguiendo la estrategia φ.

Si al tiempo 0, un inversionista vende la opción por $E^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$, entonces existe una estrategia replicante φ, tal que se genera la cantidad h al tiempo N. Esto significa que el inversionista está perfectamente asegurado. [3]

2.6. Cálculo de medidas de martingalas

Cada precio final $\omega_r \in \Omega$ pertenece a una sucesión de bloques, uno de cada $\sigma-$álgebra F_n.

$$\{\omega_r\} = B_N^{i_N} \subseteq B_{N-1}^{i_{N-1}} \subseteq \ldots \subseteq B_0^{i_0} = \Omega.$$

Teorema 2.6.1. *$P^*(\omega_r)$ es un producto de probabilidades condicionales, condicionados a cada bloque de la sucesión de bloques a los que pertenece ω_r, es decir,*

$$P^*(\omega_r) = P^*(\omega_r|B_{N-1}^{i_{N-1}})P^*(B_{N-1}^{i_{N-1}}|B_{N-2}^{i_{N-2}})\cdots P^*(B_1^{i_1}|B_0^{i_0}). \tag{2.9}$$

Demostración. Como cada bloque $B_n^{i_n} \subseteq B_{n-1}^{i_{n-1}}$, usando la definición de probabilidad condicional se tiene que:

$$\begin{aligned}
P^*(\omega_r) &= P^*(\omega_r|B_{N-1}^{i_{N-1}})P^*(B_{N-1}^{i_{N-1}}) \\
&= P^*(\omega_r|B_{N-1}^{i_{N-1}})P^*(B_{N-1}^{i_{N-1}}|B_{N-2}^{i_{N-2}})P^*(B_{N-2}^{i_{N-2}}) \\
&\vdots \\
&= P^*(\omega_r|B_{N-1}^{i_{N-1}})P^*(B_{N-1}^{i_{N-1}}|B_{N-2}^{i_{N-2}})\cdots P^*(B_1^{i_1}|B_0^{i_0}).
\end{aligned}$$

□

De esta manera, se pueden calcular las probabilidades en P^* si se calculan las probabilidades condicionales $P^*(B_{k+1}^u|B_k^v)$ para cada uno de los bloques $B_{k+1}^u \subseteq B_k^v$.

Los árboles de información de estados muestran una imagen intuitiva de las probabilidades condicionales y cómo se combinan para obtener las medidas de probabilidades. Las probabilidades condicionales son usadas para etiquetar las ramas de la trayectoria.

La probabilidad $P(\omega_r)$ es sólo el producto de las probabilidades condicionales etiquetadas en las ramas de la trayectoria que va de B_0^1 hasta ω_r.

Para calcular las probabilidades condicionales, se debe tomar bloque por bloque y sus sucesores inmediatos.

Teorema 2.6.2. *Sea P^* una medida de martingala. Para calcular las probabilidades condicionales $P^*(\cdot|B_n^v)$, suponga que los bloques que emanan de B_n^v son*

$$B = \{B_{n+1}^1, \ldots, B_{n+1}^c\}.$$

Entonces se tiene el sistema de ecuaciones (uno para cada $j = 1, \ldots, d$),

$$\widetilde{S}_n^j = \sum_{i=1}^{c} \widetilde{S}_{n+1}^j P^*(B_{n+1}^i | B_n^v), \tag{2.10}$$

junto con

$$1 = \sum_{i=1}^{c} P^*(B_{n+1}^i | B_n^v). \tag{2.11}$$

Demostración. Fíjese un bloque B_n^v, suponga que los bloques que emanan de B_n^v son

$$B = \{B_{n+1}^1, \ldots, B_{n+1}^c\}.$$

Entonces para cada activo S^j, por el segundo teorema fundamental de valuación de opciones, los precios descontados son martingalas y cumplen

$$\widetilde{S}_n^j = E^*(\widetilde{S}_{n+1}^j | F_n).$$

La variable aleatoria $E^*(\widetilde{S}_{n+1}^k | F_n)$ es $F_n - medible$, esto es, es constante en los bloques de F_n, así que se puede escribir

$$\widetilde{S}_n^j 1_{B_n^v} = E^*(\widetilde{S}_{n+1}^j | F_n) 1_{B_n^v}.$$

Como $\widetilde{S}_{n+1}^j$ es constante en los bloques de F_{n+1}, se tiene

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_n^j 1_{B_n^v} &= E^*(\widetilde{S}_{n+1}^j | F_n) 1_{B_n^v} \\
&= \frac{E^*\left(1_{B_n^v} \widetilde{S}_{n+1}^j\right)}{P(B_n^v)} 1_{B_n^v} \\
&= \sum_{i=1}^{c} \frac{E^*(1_{B_n^v} \widetilde{S}_{n+1}^j | B_{n+1}^i) P^*(B_{n+1}^i)}{P(B_n^v)} 1_{B_n^v} \\
&= \sum_{i=1}^{c} \widetilde{S}_{n+1}^j \frac{P^*(B_n^v | B_{n+1}^i) P(B_{n+1}^i)}{P^*(B_n^v)} 1_{B_n^v} \\
&= \sum_{i=1}^{c} \widetilde{S}_{n+1}^j \frac{P^*(B_n^v \cap B_{n+1}^i)}{P(B_n^v)} 1_{B_n^v} \\
&= \sum_{i=1}^{c} \widetilde{S}_{n+1}^j P^*(B_{n+1}^i | B_n^v) 1_{B_n^v}.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (una para cada $j = 0, \ldots, d$),

$$\widetilde{S}_n^j = \sum_{i=1}^{c} \widetilde{S}_{n+1}^j P(B_{n+1}^i | B_n^v),$$

permiten calcular las probabilidades condicionales.

Note que para $j = 0$ se tiene que $\widetilde{S}_n^0 = 1$. Así, la ecuación en este caso es:

$$1 = \sum_{i=1}^{c} P(B_{n+1}^i | B_n^v).$$

□

Ejemplo. La Figura 2.2 muestra el árbol de información de los precios de un activo en un modelo con solamente un activo con riesgo. Suponga además que la tasa sin riesgo es $r = 0$.

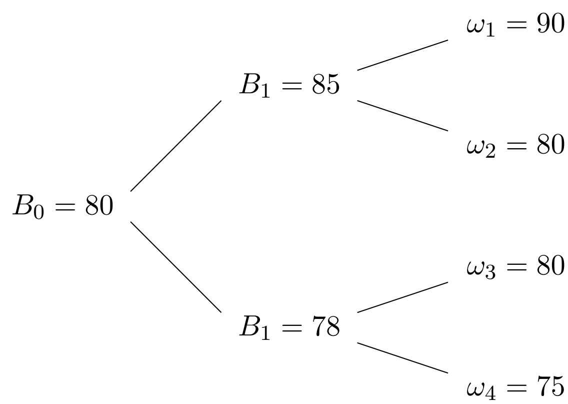

Figura 2.2. Precios del activo.

Calculemos la estrategia autofinanciada $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ que replique la alternativa,

$$X(\omega_1) = 95, X(\omega_2) = 90, X(\omega_3) = 85, X(\omega_4) = 75,$$

esto es, para la cual $V_2(\varphi_2) = X$, o equivalentemente

$$\begin{array}{rcl} V_2(\varphi_2)(\omega_1) & = & 95 \\ V_2(\varphi_2)(\omega_2) & = & 90 \\ V_2(\varphi_2)(\omega_3) & = & 85 \\ V_2(\varphi_2)(\omega_4) & = & 75. \end{array}$$

Reescribiendo estas ecuaciones usando (2.1) se tiene

$$\begin{array}{rcl} S_2^0(\omega_1)\varphi_2^0(\omega_1) + S_2^1(\omega_1)\varphi_2^1(\omega_1) & = & 95 \\ S_2^0(\omega_2)\varphi_2^0(\omega_2) + S_2^1(\omega_2)\varphi_2^1(\omega_2) & = & 90 \\ S_2^0(\omega_3)\varphi_2^0(\omega_3) + S_2^1(\omega_3)\varphi_2^1(\omega_3) & = & 85 \\ S_2^0(\omega_4)\varphi_2^0(\omega_4) + S_2^1(\omega_4)\varphi_2^1(\omega_4) & = & 75. \end{array}$$

Sustituyendo los precios actuales

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2^0(\omega_1) + 90\varphi_2^1(\omega_1) & = & 95 \\ \varphi_2^0(\omega_2) + 80\varphi_2^1(\omega_2) & = & 90 \\ \varphi_2^0(\omega_3) + 80\varphi_2^1(\omega_3) & = & 85 \\ \varphi_2^0(\omega_4) + 75\varphi_2^1(\omega_4) & = & 75. \end{array}$$

La condición de que φ_2 sea F_1-medible, esto es, constante en F_1, implica:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2^0(\omega_1) & = & \varphi_2^0(\omega_2) \\ \varphi_2^0(\omega_3) & = & \varphi_2^0(\omega_4) \\ \varphi_2^1(\omega_1) & = & \varphi_2^1(\omega_2) \\ \varphi_2^1(\omega_3) & = & \varphi_2^1(\omega_4). \end{array}$$

Así el sistema anterior puede ser escrito usando solo ω_1 y ω_3 como

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_2^0(\omega_1) + 90\varphi_2^1(\omega_1) & = & 95 \\
\varphi_2^0(\omega_1) + 80\varphi_2^1(\omega_1) & = & 90 \\
\varphi_2^0(\omega_3) + 80\varphi_2^1(\omega_3) & = & 85 \\
\varphi_2^0(\omega_3) + 75\varphi_2^1(\omega_3) & = & 75.
\end{array}$$

La solución para ambos sistemas de ecuaciones resulta

$$\begin{array}{rcccl}
\varphi_2(\omega_1) & = & \varphi_2(\omega_2) & = & (50,\ 0.5) \\
\varphi_2(\omega_3) & = & \varphi_2(\omega_4) & = & (\text{-}75,2).
\end{array}$$

Así, calculando el valor del portafolio para φ_2 usando (2.1):

$$\begin{array}{rcccl}
V_1(\varphi_2)(\omega_1) & = & 50(1) + 0.5(85) & = & 92.5 \\
V_1(\varphi_2)(\omega_3) & = & -75(1) + 78(2) & = & 81.
\end{array}$$

La condición de autofinanciamiento implica que

$$\begin{array}{rcccl}
V_1(\varphi_2)(\omega_1) & = & V_1(\varphi_1)(\omega_1) & = & 92.5 \\
V_1(\varphi_2)(\omega_3) & = & V_1(\varphi_1)(\omega_3) & = & 81.
\end{array}$$

Reescribiendo estas ecuaciones se tiene

$$\begin{array}{rcl}
S_1^0(\omega_1)\varphi_1^0(\omega_1) + S_1^1(\omega_1)\varphi_1^1(\omega_1) & = & 92.5 \\
S_1^0(\omega_3)\varphi_1^0(\omega_3) + S_1^1(\omega_3)\varphi_1^1(\omega_3) & = & 81.
\end{array}$$

Sustituyendo los precios actuales

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1^0(\omega_1) + 85\varphi_1^1(\omega_1) & = & 92.5 \\
\varphi_1^0(\omega_3) + 78\varphi_1^1(\omega_3) & = & 81.
\end{array}$$

Como φ_1 es F_0-medible, esto es, constante en Ω, para cada $\omega \in \Omega$,

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1^0(\omega) + 85\varphi_1^1(\omega) & = & 92.5 \\
\varphi_1^0(\omega) + 78\varphi_1^1(\omega) & = & 81.
\end{array}$$

La solución para el sistema es

$$\varphi_1(\omega) = \left(-\frac{330}{7}, \frac{23}{14}\right),$$

el cual es un portafolio que consiste de una posición corta de $\frac{330}{7} \approx 47.14$ bonos y una compra de $\frac{23}{14} \approx 1.64$ acciones del activo, para un costo inicial de

$$\frac{-330}{7}(1) + \frac{23}{14}(80) \approx 84.29.$$

Por lo tanto, para un costo inicial de 84.29, se puede adquirir un portafolio que esté asegurado para pagar

$$X(\omega_1) = 95, X(\omega_2) = 90, X(\omega_3) = 85, X(\omega_4) = 75.$$

Calculemos ahora las probabilidades del árbol de estados de la Figura 2.2.

Se calculan las esperanzas condicionales, empezando con cada bloque de la partición F_1. Para el bloque B_1^1, las ecuaciones son

$$\begin{array}{lcl} 90P^*(B_2^1|B_1^1) + 80P^*(B_2^2|B_1^1) & = & 85 \\ P^*(B_2^1|B_1^1) + P^*(B_2^2|B_1^1) & = & 1. \end{array}$$

La solución para el sistema es

$$P^*(B_2^1|B_1^1) = P^*(B_2^2|B_1^1) = \frac{1}{2}.$$

Para el bloque B_1^2, las ecuaciones son

$$\begin{array}{lcl} 80P^*(B_2^3|B_1^2) + 80P^*(B_2^4|B_1^2) & = & 78 \\ P^*(B_2^3|B_1^2) + P^*(B_2^4|B_1^2) & = & 1. \end{array}$$

La solución para el sistema es

$$P^*(B_2^3|B_1^2) = \frac{3}{5}, P^*(B_2^4|B_1^2) = \frac{2}{5}.$$

Finalmente, para el bloque B_0^1, las ecuaciones son

$$\begin{array}{lcl} 85P^*(B_1^1|B_0^1) + 78P^*(B_1^2|B_0^1) & = & 80 \\ P^*(B_1^1|B_0^1) + P^*(B_1^2|B_0^1) & = & 1. \end{array}$$

La solución para el sistema es

$$P^*(B_1^1|B_0^1) = \frac{2}{7}, P^*(B_1^2|B_0^1) = \frac{5}{7}.$$

Se puede calcular la medida de probabilidad P^* usando (2.9), esto es, tomando los productos a lo largo de cada trayectoria desde el estado inicial hasta el estado final:

$$\begin{array}{lclcl} P^*(\omega_1) & = & \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{7} \\ P^*(\omega_2) & = & \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{7} \\ P^*(\omega_3) & = & \frac{5}{7}\left(\frac{3}{5}\right) & = & \frac{3}{7} \\ P^*(\omega_4) & = & \frac{5}{7}\left(\frac{2}{5}\right) & = & \frac{2}{7}. \end{array}$$

Consideremos nuevamente la alternativa

$$X(\omega_1) = 95, X(\omega_2) = 90, X(\omega_3) = 85, X(\omega_4) = 75.$$

Los pagos para una estrategia replicante autofinanciada $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ son:

$$\begin{array}{rcl} V_2(\varphi_2)(\omega_1) & = & 95 \\ V_2(\varphi_2)(\omega_2) & = & 90 \\ V_2(\varphi_2)(\omega_3) & = & 85 \\ V_2(\varphi_2)(\omega_4) & = & 75. \end{array}$$

La riqueza inicial necesaria para replicar la alternativa es entonces:

$$\begin{array}{rcl} V_0(\varphi) & = & E^*(\widetilde{V}_2(\varphi)) \\ & = & 95\left(\frac{1}{7}\right) + 90\left(\frac{1}{7}\right) + 85\left(\frac{3}{7}\right) + 75\left(\frac{2}{7}\right) \\ & = & \frac{590}{7} \approx 84.29, \end{array}$$

igual que el valor obtenido anteriormente.

Capítulo 3

Opciones americanas

Los modelos descritos en el capítulo anterior son diseñados para valorar opciones europeas. Sin embargo, en el mundo real, la mayoría de las opciones son de tipo americano. En este capítulo se tratará sobre el uso de las opciones americanas, su valoración y la elección del momento adecuado para ejercerlas [3].

3.1. Conceptos básicos de opciones americanas

Una opción americana es una opción que puede ser ejercida en cualquier momento entre los tiempos 0 y N. A ésta se le puede asociar un proceso de pagos para cada tiempo.

Definición 3.1.1. *El proceso de pagos de una opción americana se define como una sucesión positiva* $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ *adaptada a una filtración* $(F_n)_{0\leq n\leq N}$*.*

Las opciones americanas pueden ser de dos tipos: call americano o put americano.

En el caso de un call americano sobre el precio del activo S^1 con precio de ejercicio K, se define $Z_n = (S_n^1 - K)_+$. En el caso de un put americano se define $Z_n = (K - S_n^1)_+$.

Teorema 3.1.1. *El precio* U_n *de una opción americana al tiempo* n *para* $n = 0, \ldots, N-1$, *está dado por*

$$U_n = \text{máx}\left[Z_n, \frac{1}{1+r}E^*(U_{n+1}|F_n)\right]. \tag{3.1}$$

Demostración. Para definir el precio de la opción asociada con $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$, se puede pensar en términos de una inducción hacia atrás, empezando al tiempo N.

En efecto, el valor de la opción al tiempo N por definición es igual a $U_N = Z_N$.

Al tiempo $N-1$ si el comprador ejerce su derecho inmediatamente ganará Z_{N-1}, o puede esperar y ejercer su derecho al tiempo N, en tal caso el vendedor de la opción debe estar listo para pagar la cantidad Z_N.

Entonces, al tiempo $N-1$, el vendedor de la opción tiene que ganar el máximo entre Z_{N-1} y la cantidad necesaria al tiempo $N-1$ para generar Z_N al tiempo N.

El vendedor de la opción al tiempo $N-1$ necesita el máximo entre Z_{N-1} y el valor al tiempo $N-1$ de una estrategia admisible con pago Z_N al tiempo N, esto es, $\widetilde{Z}_{N-1} = E^*\left(\widetilde{Z}_N|F_{N-1}\right)$ por la propiedad de martingala, donde $\widetilde{Z}_N = \dfrac{Z_N}{S_N^0}$.

Entonces el precio de la opción al tiempo $N-1$ es

$$U_{N-1} = \text{máx}\left[Z_{N-1}, S_{N-1}^0 E^*(\widetilde{Z}_N|F_{N-1})\right].$$

Por inducción, se define el precio de la opción americana para $n = 0, \dots, N-1$ por

$$U_n = \text{máx}\left[Z_n, S_n^0 E^*\left(\frac{U_{n+1}}{S_{n+1}^0}|F_n\right)\right].$$

Recordando que $S_n^0 = (1+r)^n$, se tiene

$$U_n = \text{máx}\left[Z_n, \frac{1}{1+r}E^*(U_{n+1}|F_n)\right],\ n = 0, \dots, N-1$$

□

Si se define $\widetilde{U}_n = \dfrac{U_n}{S_n^0}$ como los precios descontados de la opción americana, entonces

$$\widetilde{U}_n = \text{máx}\left[\widetilde{Z}_n, E^*(\widetilde{U}_{n+1}|F_n)\right],\ n = 0, \dots, N-1. \tag{3.2}$$

Proposición 3.1.1. *La sucesión $(\widetilde{U}_n)_{0\leq n\leq N}$ es la menor F_n-supermartingala bajo la medida P^* que domina a la sucesión $(\widetilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$.*

Demostración. Por definición se tiene

$$\widetilde{U}_n = \text{máx}[\widetilde{Z}_n, E^*(\widetilde{U}_{n+1}|F_n)] \geq E^*(\widetilde{U}_{n+1}|F_n), \tag{3.3}$$

$$\widetilde{U}_n = \text{máx}[\widetilde{Z}_n, E^*(\widetilde{U}_{n+1}|F_n)] \geq \widetilde{Z}_n. \tag{3.4}$$

De (3.3) se tiene que $(\widetilde{U}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una F_n- *supermartingala* bajo la medida P^*, y de (3.4) se tiene que $(\widetilde{U}_n)_{0\leq n\leq N}$ domina a $(\widetilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$.

Considere una F_n- *supermartingala* $(\widetilde{T}_n)_{0\leq n\leq N}$ que domina a $(\widetilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$. Haciendo inducción hacia atrás se tiene que

$$\widetilde{T}_N \geq \widetilde{Z}_N = \widetilde{U}_N.$$

Suponga ahora que $\widetilde{T}_n \geq \widetilde{U}_n$ para algún $n \leq N$, entonces

$$\widetilde{T}_{n-1} \geq E^*(\widetilde{T}_n|F_{n-1}) \geq E^*(\widetilde{U}_n|F_{n-1}),$$

de donde

$$\widetilde{T}_{n-1} \geq \text{máx}[\widetilde{Z}_{n-1}, E^*(\widetilde{U}_n|F_{n-1})] = \widetilde{U}_{n-1}.$$

Por inducción matemática se sigue que $(\widetilde{U}_n)_{0\leq n\leq N}$ es la menor F_n- *supermartingala* bajo la medida P^* que domina a $(\widetilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$. □

3.2. Tiempos de paro

El comprador de una opción americana puede ejercer su derecho en cualquier tiempo hasta la madurez. La decisión de ejercer o no al tiempo n será hecha de acuerdo a la información disponible al tiempo n.

En un modelo de mercado financiero a tiempo discreto construido sobre un espacio de probabilidad finito (Ω, F, P), la fecha de ejercicio se puede describir por una variable aleatoria llamada tiempo de paro.

Definición 3.2.1. *Una variable aleatoria ν que toma valores en $\{0, \ldots, N\}$ es un **tiempo de paro** con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ si para cada $n \in \{0, \ldots, N\}$ se tiene $\{\nu = n\} \in F_n$.*

Teorema 3.2.1. *La variable aleatoria ν es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ si y sólo si para cada $n \in \{0, \ldots, N\}$ se cumple*

$$\{\nu \leq n\} \in F_n.$$

Demostración. Suponga que ν es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$. El conjunto $\{\nu \leq n\}$ se puede ver como

$$\{\nu \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\nu = k\} \in \bigcup_{k=1}^{n} F_k \subset F_n.$$

Por lo tanto, se cumple que $\{\nu \leq n\} \in F_n$.
Ahora suponga que $\{\nu \leq n\} \in F_n$. El conjunto $\{\nu = n\}$ se puede ver como

$$\{\nu = n\} = \{\nu \leq n\} \backslash \{\nu \leq n-1\} \in F_n \backslash F_{n-1} \in F_n.$$

Así, $\{\nu = n\} \in F_n$, y por la tanto ν es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$. □

Definición 3.2.2. *Sea $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ una sucesión adaptada a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$, y sea ν un tiempo de paro con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$. La **sucesión parada al tiempo** ν se define como*

$$X_n^\nu = X_{\nu\wedge n}.$$

Esto es, sobre el conjunto $\{\nu = j\}$ se tiene

$$X_n^\nu = \begin{cases} X_j & si \quad j \leq n \\ X_n & si \quad j > n. \end{cases}$$

Note que $X_N^\nu = X_\nu = X_j$ sobre el conjunto $\{\nu = j\}$.

Proposición 3.2.1. *Sea $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ una sucesión adaptada a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ y sea ν un tiempo de paro con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$. Entonces la sucesión parada $(X_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ es adaptada a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$. Más aún, si $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ es una F_n- martingala (F_n- supermartingala), entonces $(X_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ es una F_n- martingala (F_n- supermartingala).*

Demostración. Para $n \geq 1$ se puede escribir

$$X_{\nu \wedge n} = X_0 + \sum_{j=1}^{n} 1_{\{j \leq \nu\}}(X_j - X_{j-1}), \tag{3.5}$$

Como $\{j \leq \nu\} = \{\nu < j\}^c = \{\nu \leq j-1\}^c \in F_{n-1}$, entonces $1_{\{j \leq \nu\}}$ es predecible.

La sucesión $(X_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ es adaptada a la filtración $(F_n)_{0 \leq n \leq N}$ porque $1_{\{j \leq \nu\}}(X_j - X_{j-1})$ es $F_n - medible$, y así

$$X_{\nu \wedge n} = X_0 + \sum_{j=1}^{n} 1_{\{j \leq \nu\}}(X_j - X_{j-1}) \in F_n.$$

Si $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ es una $F_n - martingala$, entonces por el Teorema 1.6.1 $(X_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ es también una $F_n - martingala$.

Si $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ es una $F_n - supermartingala$, entonces $(X_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$ es también una $F_n - supermartingala$, pues

$$\begin{aligned}
E(X_{\nu \wedge n}|F_{n-1}) &= E\left(X_0 + \sum_{j=1}^{n} 1_{\{j \leq \nu\}}(X_j - X_{j-1})|F_{n-1}\right) \\
&= X_0 + \sum_{j=1}^{n-1} 1_{\{j \leq \nu\}}(X_j - X_{j-1}) + 1_{\{n \leq \nu\}}E(X_n - X_{n-1}|F_{n-1}) \\
&= X_{\nu \wedge (n-1)} + 1_{\{n \leq \nu\}}E(X_n|F_{n-1}) - 1_{\{n \leq \nu\}}X_{n-1} \\
&\leq X_{\nu \wedge (n-1)} + 1_{\{n \leq \nu\}}X_{n-1} - 1_{\{n \leq \nu\}}X_{n-1} \\
&= X_{\nu \wedge (n-1)}.
\end{aligned}$$

□

3.3. La envoltura de Snell

Definición 3.3.1. *Sea $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ una sucesión adaptada a la filtración $(F_n)_{0 \leq n \leq N}$. La sucesión $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ definida como*

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max[Z_n, E(U_{n+1}|F_n)] \quad \forall n \leq N-1. \end{cases}$$

se llama la envoltura de Snell de la sucesión $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Por el Teorema 3.1.1, $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ es la menor $F_n - supermartingala$ que domina a la sucesión $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Por definición $U_n \geq Z_n$, (con igualdad para $n = N$), y en el caso de una desigualdad estricta, $U_n = E(U_{n+1}|F_n)$, y en este caso (U_n) es una $F_n - martingala$.

Proposición 3.3.1. *La variable aleatoria definida por*

$$\nu_0 = \text{ínf}\{n \geq 0 | U_n = Z_n\}, \tag{3.6}$$

es un tiempo de paro son respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$*, y la sucesión parada* $(U_{n\wedge\nu_0})_{0\leq n\leq N}$ *es una* $F_n - martingala$*.*

Demostración. Como $U_N = Z_N$, $\nu_0 \neq \emptyset$, y así ν_0 es un elemento bien definido de $\{0,\ldots,N\}$. Para $n = 0$ se tiene

$$\{\nu_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in F_0,$$

y para $k \geq 1$ se tiene

$$\{\nu_0 = k\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \ldots \cap \{U_{k-1} > Z_{k-1}\} \cap \{U_k = Z_k\} \in F_k.$$

Por lo tanto ν_0 es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$.

Por (3.5), se tiene que

$$U_n^{\nu_0} = U_{\nu_0\wedge n} = U_0 + \sum_{j=1}^{n} 1_{\{j\leq\nu_0\}}(U_j - U_{j-1}).$$

Para $n \in \{0,\ldots,N-1\}$, se cumple que

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = 1_{\{n+1\leq\nu_0\}}(U_{n+1} - U_n).$$

Por definición $U_n = \text{máx}[Z_n, E(U_{n+1}|F_n)]$, y sobre el conjunto $\{n+1 \leq \nu_0\}$ se tiene que $U_n > Z_n$. Con esto $U_n = E(U_{n+1}|F_n)$ y entonces

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = 1_{\{n+1\leq\nu_0\}}[U_{n+1} - E(U_{n+1}|F_n)].$$

Tomando esperanza condicional de ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned}
E(U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0}|F_n) &= E[1_{\{n+1\leq\nu_0\}}(U_{n+1} - E(U_{n+1}|F_n))|F_n] \\
&= 1_{\{n+1\leq\nu_0\}}[E(U_{n+1}|F_n) - E(E(U_{n+1}|F_n)|F_n)] \\
&= 1_{\{n+1\leq\nu_0\}}[E(U_{n+1}|F_n) - E(U_{n+1}|F_n)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(U_n^{\nu_0})_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$. □

Definición 3.3.2. $\tau_{n,N}$ *es el conjunto de tiempos de paro que toman valores en* $\{n,\ldots,N\}$*.*

Note que $\tau_{n,N}$ es un conjunto finito porque se asume que Ω es finito.

Si se define Z_n como la ganancia de un jugador al tiempo n, se observa que al detenerse al tiempo ν_0 se maximiza la ganancia esperada dado F_0.

Corolario 3.3.1. *El tiempo de paro ν_0 satisface*

$$U_0 = E(Z_{\nu_0}|F_0) = \sup_{\nu\in\tau_{0,N}} E(Z_\nu|F_0). \tag{3.7}$$

Demostración. Dado que $(U_n^{\nu_0})_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$, se tiene

$$U_0 = U_0^{\nu_0} = E(U_N^{\nu_0}|F_0) = E(U_{\nu_0}|F_0) = E(Z_{\nu_0}|F_0).$$

Por otro lado, si $\nu \in \tau_{0,N}$, la sucesión parada $(U_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - supermartingala$. Así que

$$U_0 \geq E(U_N^\nu|F_0) = E(U_\nu|F_0) \geq E(Z_\nu|F_0),$$

de donde $U_0 = \sup_{\nu\in\tau_{0,N}} E(Z_\nu|F_0)$. □

Corolario 3.3.2. *El tiempo de paro $\nu_n = \text{ínf}\{j \geq n|U_j = Z_j\}$ satisface*

$$U_n = E(Z_{\nu_n}|F_n) = \sup_{\nu\in\tau_{n,N}} E(Z_\nu|F_n). \tag{3.8}$$

La demostración es análoga a la anterior.

Definición 3.3.3. *Un tiempo de paro ν con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ es llamado **óptimo** para la sucesión $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ si*

$$E(Z_\nu|F_0) = \sup_{\nu_n\in\tau_{0,N}} E(Z_{\nu_n}|F_0). \tag{3.9}$$

Teorema 3.3.1. *Un tiempo de paro ν con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ es óptimo si y sólo si $Z_\nu = U_\nu$ y $(U_{\nu\wedge n})_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$.*

Demostración. $\Leftarrow$] Si la sucesión parada $(U_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$, entonces $U_0 = E(U_\nu|F_0)$, y si $Z_\nu = U_\nu$, entonces $U_0 = E(Z_\nu|F_0)$, y del Corolario 3.3.1 se obtiene que ν es un tiempo de paro óptimo con respecto a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$.

$\Rightarrow$] Si ν es óptimo, del Corolario 3.3.1 se tiene

$$U_0 = E(Z_\nu|F_0) \leq E(U_\nu|F_0).$$

Como $(U_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - supermartingala$, se sigue que $E(U_\nu|F_0) \leq U_0$. Así, $E(U_\nu|F_0) = E(Z_\nu|F_0)$. Como $U_\nu \geq Z_\nu$, se obtiene $U_\nu = Z_\nu$.

Dado que $E(U_\nu|F_0) = U_0$ (por ser ν un tiempo de paro óptimo), y como $(U_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - supermartingala$, entonces

$$U_0 \geq E(U_{\nu\wedge n}|F_0) \geq E(U_\nu|F_0) = U_0.$$

Así se obtiene que

$$E(U_{\nu\wedge n}|F_0) = E(U_\nu|F_0).$$

Por la propiedad de torre (1.11) se cumple que

$$E(U_{\nu\wedge n}|F_0) = E(U_\nu|F_0) = E[E(U_\nu|F_n)|F_0].$$

Pero se tiene que $U_{\nu\wedge n} \geq E(U_{\nu\wedge N}|F_n) = E(U_\nu|F_n)$. Como sus esperanzas son iguales, entonces $U_{\nu\wedge n} = E(U_\nu|F_n)$. Por lo tanto $(U_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$. □

3.4. Descomposición de supermartingalas

La descomposición de Doob se usa en modelos de mercados financieros viables completos para asociar cualquier supermartingala con una estrategia de inversión para la cual el consumo está permitido.

Proposición 3.4.1. *Cada supermartingala* $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ *tiene una única descomposición, llamada la descomposición de Doob, definida como sigue:*

$$U_n = M_n - A_n, \tag{3.10}$$

donde $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *es una* F_n *– martingala y* $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ *es un proceso predecible no decreciente nulo en 0.*

Demostración. La solución para $n = 0$ es $U_0 = M_0$, pues $A_0 = 0$.

Para calcular M_n y A_n se usará (3.10), de donde

$$U_{n+1} - U_n = (M_{n+1} - M_n) - (A_{n+1} - A_n).$$

Condicionando ambos lados con respecto a F_n, y usando las propiedades de M_n y A_n, se tiene

$$E(U_{n+1} - U_n|F_n) = E(M_{n+1} - M_n|F_n) - E(A_{n+1} - A_n|F_n)$$

Con esto, se tiene

$$E(U_{n+1}|F_n) - U_n = -(A_{n+1} - A_n).$$

Así, se define la sucesión $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ recursivamente como

$$A_{n+1} = A_n + U_n - E(U_{n+1}|F_n),\ A_0 = 0.$$

Usando $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ definida de esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (M_{n+1} - M_n) - (A_{n+1} - A_n) \\ &= M_{n+1} - M_n + E(U_{n+1}|F_n) - U_n. \end{aligned}$$

Con esto, se tiene

$$M_{n+1} - M_n = U_{n+1} - E(U_{n+1}|F_n).$$

Así se define la sucesión $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ recursivamente como

$$M_{n+1} = M_n + U_{n+1} - E(U_{n+1}|F_n),\ M_0 = U_0.$$

Ahora se demostrará que esta descomposición es única. Suponga que existen $M_n^{'}$ y $A_n^{'}$ tales que $U_n = M_n^{'} - A_n^{'}$. Con esto $U_n = M_n - A_n = M_n^{'} - A_n^{'}$ $\forall n$. Entonces $M_n - M_n^{'} = A_n - A_n^{'}$ para cada n. Por las propiedades de $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ y $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} A_{n-1} - A_{n-1}^{'} &= M_{n-1} - M_{n-1}^{'} \\ &= E(M_n - M_n^{'}|F_{n-1}) \\ &= E(A_n - A_n^{'}|F_{n-1}) \\ &= A_n - A_n^{'}. \end{aligned}$$

Lo que equivale a $A_N - A_N^{'} = A_{N-1} - A_{N-1}^{'} = \ldots = A_0 - A_0^{'} = 0$. Por lo tanto $A_n = A_n^{'}$ y $M_n = M_n^{'}$, y así la representación (3.10) es única. $\square$

Suponga que $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ es la envoltura de Snell de una sucesión adaptada $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ a una filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$. Se puede así dar una caracterización del mayor tiempo de paro para $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ usando el proceso $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ de la descomposición de Doob de $(U_n)_{0\leq n\leq N}$.

Un criterio para encontrar el mayor tiempo de paro para ejercer la opción en términos de la envoltura de Snell correspondiente a $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ está dado por la siguiente proposición.

Proposición 3.4.2. *El mayor tiempo de paro para $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ está dado por:*

$$\nu_{max} = \begin{cases} N & si \quad A_N = 0 \\ \inf\{n|A_{n+1} \neq 0\} & si \quad A_N \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. ν_{max} es un tiempo de paro, pues

$$\{\nu_{max} = n\} = \{A_0 = 0, \ldots, A_n = 0, A_{n+1} > 0\} \in F_n, \ \forall n \leq N-1,$$

y para $n = N$

$$\{\nu_{max} = N\} = \{A_N = 0\} \in F_{N-1} \subset F_N.$$

Como $A_n = 0$ para $n \leq \nu_{max}$, se tiene que

$$U_n^{\nu_{max}} = U_{n\wedge\nu_{max}} = M_{n\wedge\nu_{max}} - A_{n\wedge\nu_{max}} = M_{n\wedge\nu_{max}} = M_n^{\nu_{max}}.$$

Por lo tanto $(U_n^{\nu_{max}})_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$. Además

$$E(U_{j+1}|F_j) = E(M_{j+1} - A_{j+1}|F_j) = M_j - A_{j+1},$$

y sobre el conjunto $\{\nu_{max} = j\}$ se cumple $A_j = 0$ y $A_{j+1} > 0$. Por lo tanto $U_j = M_j$. Entonces

$$E(U_{j+1}|F_j) = M_j - A_{j+1} = U_j - A_{j+1} < U_j.$$

De esto se sigue que $U_j = \max[Z_j, E(U_{j+1}|F_j)]$, así $U_{\nu_{max}} = Z_{\nu_{max}}$. Por lo tanto, ν_{max} es un tiempo de paro óptimo.

Suponga que ν es un tiempo de paro tal que $\nu > \nu_{max}$ y $P(\nu > \nu_{max}) > 0$, entonces

$$E(U_\nu) = E(M_\nu) - E(A_\nu) = E(M_0) - E(A_\nu) = E(U_0) - E(A_\nu) < E(U_0).$$

Con esto, $(U_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ no puede ser una $F_n - martingala$, y por lo tanto ν_{max} es el mayor tiempo de paro óptimo. □

3.5. Cobertura de opciones americanas

Al inicio de este Capítulo, en el Teorema 3.1.1, se definieron los valores $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ de una opción americana descrita por su proceso de pagos $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$.

Por definición, la sucesión $(\widetilde{U}_n)_{0\leq n\leq N}$ definida por $\widetilde{U}_n = \dfrac{U_n}{S_n^0}$ es la envoltura de Snell de la sucesión $(\widetilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$ bajo la medida P^*.

De (3.8) se tiene que

$$\widetilde{U}_n = \sup_{\nu\in\tau_{n,N}} E^*(\widetilde{Z}_\nu|F_n),$$

y por lo tanto

$$U_n = S_n^0 \sup_{\nu\in\tau_{n,N}} E^*\left(\frac{Z_\nu}{S_\nu^0}|F_n\right).$$

También de (3.10) se tiene

$$\widetilde{U}_n = \widetilde{M}_n - \widetilde{A}_n,$$

donde $(\widetilde{M}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $P^* - martingala$, y $(\widetilde{A}_n)_{0\leq n\leq N}$ es un proceso predecible creciente nulo al tiempo 0.

Como el mercado es completo, existe una estrategia autofinanciada φ tal que $V_N(\varphi) = S_N^0\widetilde{M}_N$, esto es, $\widetilde{V}_N(\varphi) = \widetilde{M}_N$.

Como la sucesión $(\widetilde{V}_n(\varphi))_{0\leq n\leq N}$ es una $F_n - martingala$ bajo la medida P^*, se obtiene

$$\widetilde{V}_n(\varphi) = E^*[\widetilde{V}_N(\varphi)|F_n] = E^*[\widetilde{M}_N|F_n] = \widetilde{M}_n.$$

Así $\widetilde{U}_n = \widetilde{M}_n - \widetilde{A}_n = \widetilde{V}_n(\varphi) - \widetilde{A}_n$, y por lo tanto $U_n = V_n(\varphi) - A_n$.

De la última igualdad se puede observar que el vendedor de la opción puede asegurarse perfectamente: una vez que recibe la prima $U_0 = V_0(\varphi)$, usando la estrategia φ y calculando P^*, puede generar una riqueza al tiempo n con valor

$$V_n(\varphi) = U_n + A_n \geq U_n,$$

y así asegurarse en cada momento.

Veamos cual es el mejor momento para el comprador para ejercer la opción. Si n es tal que $U_n > Z_n$, no tiene caso ejercer la opción, pues su valor U_n es mayor al valor de ejercicio de la opción Z_n al tiempo n. Así se debe buscar un tiempo óptimo τ tal que $U_\tau = Z_\tau$.

Por otro lado, se debe buscar que $A_n = 0$, es decir, $\tau \leq \nu_{max}$, ya que si no, a partir de este momento sería mejor ejercer la opción y siguiendo una estrategia φ en ese tiempo, crea un portafolio cuyo valor es mayor que el valor de la opción en los tiempos siguientes.

De modo que por el Teorema 3.3.1, se tienen las condiciones para que τ sea un tiempo de paro óptimo para $(\widetilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$.

Considere el punto de vista del vendedor: si se asegura usando la estrategia φ anterior, y si el comprador no ejerce la opción en un tiempo de paro óptimo, entonces $U_n > Z_n$ o $A_n > 0$. En ambos casos, el vendedor tendrá un beneficio con valor

$$V_n(\varphi) - Z_n = U_n + A_n - Z_n > 0.$$

3.6. Estrategias con consumo

Las estrategias con consumo pueden definirse como sigue: al tiempo n una vez que los nuevos precios $S_n^0, \dots, S_n^d$ son cotizados, el inversionista reajusta sus posiciones de φ_n a φ_{n+1} y selecciona la riqueza γ_{n+1} para ser consumida al tiempo $n+1$. Así, se deduce que

$$\langle \varphi_{n+1}, S_n \rangle = \langle \varphi_n, S_n \rangle - \gamma_{n+1} \tag{3.11}$$

De esta forma, una estrategia con consumo se puede definir como una pareja (φ, γ), donde φ es un proceso predecible que toma valores en $\mathbb{R}^{d+1}$, representando la cantidad de los activos tomados del portafolio, y $\gamma = (\gamma_n)_{1 \leq n \leq N}$ es un proceso predecible que toma valores en $\mathbb{R}^+$, representando la riqueza consumida en cada tiempo.

Se estudiarán varias propiedades de este modelo.

Proposición 3.6.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) La pareja (φ, γ) define una estrategia de inversión con consumo.

b) Para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, se tiene que

$$V_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta S_j \rangle - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j. \tag{3.12}$$

c) Para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, se tiene que

$$\widetilde{V}_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j}{S_{j-1}^0}. \tag{3.13}$$

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Suponga que (φ, γ) es una estrategia con consumo. Entonces

$$\begin{aligned}
V_n(\varphi) - V_0(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} [V_i(\varphi) - V_{i-1}(\varphi)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\langle \varphi_i, S_i \rangle - \langle \varphi_{i-1}, S_{i-1} \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\langle \varphi_i, S_i \rangle - \langle \varphi_i, S_{i-1} \rangle - \gamma_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, S_i - S_{i-1} \rangle - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i,
\end{aligned}$$

Con esto se tiene

$$V_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta S_j \rangle - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j.$$

b) $\Rightarrow$ a). Suponga que b) se cumple. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - \langle \varphi_n, S_n \rangle &= V_{n+1}(\varphi) - V_n(\varphi) \\ &= \langle \varphi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle - \gamma_{n+1} \end{aligned}$$

De donde

$$\langle \varphi_n, S_n \rangle = \langle \varphi_{n+1}, S_n \rangle + \gamma_{n+1},$$

lo cual equivale a que (φ, γ) sea una estrategia con consumo.

a) $\Rightarrow$ c). Suponga que (φ, γ) es una estrategia con consumo. Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_n(\varphi) - \widetilde{V}_0(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} [\widetilde{V}_i(\varphi) - \widetilde{V}_{i-1}(\varphi)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle \varphi_i, \widetilde{S}_i \rangle - \langle \varphi_{i-1}, \widetilde{S}_{i-1} \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle \varphi_i, \widetilde{S}_i \rangle - \langle \varphi_i, \widetilde{S}_{i-1} \rangle - \frac{\gamma_i}{S_{i-1}^0} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \widetilde{S}_i - \widetilde{S}_{i-1} \rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{S_{i-1}^0}, \end{aligned}$$

Con esto se tiene

$$\widetilde{V}_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j}{S_{j-1}^0}.$$

c) $\Rightarrow$ a). Suponga que c) se cumple. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{n+1}, \widetilde{S}_{n+1} \rangle - \langle \varphi_n, \widetilde{S}_n \rangle &= \widetilde{V}_{n+1}(\varphi) - \widetilde{V}_n(\varphi) \\ &= \langle \varphi_{n+1}, \widetilde{S}_{n+1} - \widetilde{S}_n \rangle - \frac{\gamma_{n+1}}{S_n^0} \end{aligned}$$

De donde

$$\langle \varphi_n, \widetilde{S}_n \rangle = \langle \varphi_{n+1}, \widetilde{S}_n \rangle + \frac{\gamma_{n+1}}{S_n^0},$$

lo cual equivale a que (φ, γ) sea una estrategia con consumo. $\square$

Suponga que el mercado es viable y completo y denote por P^* la única medida de probabilidad bajo la cual los precios descontados de los activos son martingalas.

Proposición 3.6.2. *Si la pareja (φ, γ) define una estrategia de inversión con consumo, entonces $(\widetilde{V}_n(\varphi))_{0 \le n \le N}$ es una F_n − supermartingala bajo la medida P^*.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
E^*(\widetilde{V}_{n+1}|F_n) &= E^*\left(V_0(\varphi)+\sum_{j=1}^{n+1}\langle\varphi_j,\Delta\widetilde{S}_j\rangle-\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\gamma_j}{S^0_{j-1}}|F_n\right)\\
&= V_0(\varphi)+\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_j,\Delta\widetilde{S}_j\rangle-\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j}{S^0_{j-1}}+\varphi_{n+1}E^*(\widetilde{S}_{n+1}-\widetilde{S_n}|F_n)-\frac{\gamma_{n+1}}{S^0_n}\\
&= \widetilde{V}_n(\varphi)-\frac{\gamma_{n+1}}{S^0_n}\\
&\leq \widetilde{V}_n(\varphi),
\end{aligned}$$

Con esto se tiene que $(\widetilde{V}_n(\varphi))_{0\leq n\leq N}$ es una F_n- *supermartingala* bajo P^*. □

Proposición 3.6.3. *Sea $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ una sucesión adaptada a la filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$ tal que $(\widetilde{U}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una F_n- supermartingala bajo la medida P^*, entonces existe una estrategia de inversión con consumo (φ,γ) tal que $V_n(\varphi)=U_n, \forall n\in\{0,\ldots,N\}$.*

Demostración. Defínase la sucesión $\widetilde{\gamma}_n$ como $\widetilde{\gamma}_1=\widetilde{A}_1$, y para $n>1$, $\widetilde{\gamma}_n=\widetilde{A}_n-\widetilde{A}_{n-1}$. Así se cumple $\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\gamma}_j=\widetilde{A}_n$.

Como el mercado es completo, existe una estrategia φ tal que

$$\widetilde{M_N}=V_0(\varphi)+\sum_{j=1}^{N}\langle\varphi,\Delta\widetilde{S}_j\rangle.$$

Usando la descomposición de Doob (3.10), $(\widetilde{M_n})_{0\leq n\leq N}$ es una F_n- *martingala*. Con esto

$$\widetilde{M_n}=E^*(\widetilde{M_N}|F_n)=E^*\left(V_0(\varphi)+\sum_{j=1}^{N}\langle\varphi,\Delta\widetilde{S}_j\rangle|F_n\right)=V_0(\varphi)+\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi,\Delta\widetilde{S}_j\rangle.$$

Por lo tanto, para cada n se cumple:

$$\widetilde{U_n}=\widetilde{M_n}-\widetilde{A}_n=V_0(\varphi)+\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi,\Delta\widetilde{S}_j\rangle-\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j}{S^0_{j-1}}=\widetilde{V}_n(\varphi).$$

□

Sea $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ una sucesión adaptada a una filtración $(F_n)_{0\leq n\leq N}$. Se dice que una estrategia de inversión con consumo (φ,γ) asegura la opción americana definida por $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ si $V_n(\varphi)\geq Z_n$ para cada $n\in\{0,\ldots,N\}$.

Proposición 3.6.4. *Existe al menos una estrategia de inversión con consumo que asegura $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$, cuyos valores son precisamente los valores $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ de la opción americana.*

Demostración. La sucesión $(\widetilde{V}_n)_{0\leq n\leq N}$ definida en la proposición 3.6.3 cumple $\widetilde{V}_n=\widetilde{U}_n\geq\widetilde{Z}_n$, y por lo tanto asegura la opción americana definida por $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$. □

Capítulo 4

Modelo de Cox-Ross-Rubinstein y métodos numéricos

En este capítulo, se presentará un caso específico de los modelos financieros a tiempo discreto: el modelo binomial, desarrollado en 1979 por John Cox, Stephen Ross y Mark Rubinstein. El modelo Cox-Ross-Rubinstein es una versión a tiempo discreto del modelo de valoración de opciones de Black-Scholes [5].

4.1. El modelo

Este modelo considera solamente un activo con riesgo cuyo precio es S_n al tiempo n, $0 \leq n \leq N$, y un activo sin riesgo cuyo interés es r sobre un periodo de tiempo. Recuérdese que $S_n^0 = (1+r)^n$.

El precio del activo con riesgo es modelado como sigue: entre dos periodos de tiempo consecutivos, el cambio de precios relativo es a ó b, con $-1 < a < b$.

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases}$$

El valor del precio inicial S_0 del activo con riesgo es dado.

Denótese al conjunto de posibles estados finales con

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_N) | x_i = 1+a \text{ o } x_i = 1+b,\ i = 1, \ldots, N\}.$$

donde cada N-tupla $(x_1, \ldots, x_N)$ representa los valores sucesivos de $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ para $n = 0, \ldots, N-1$.

Se asume también que $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $F = P(\Omega)$.

Por lo tanto, para $n = 1, \ldots, N$, la σ-álgebra F_n es igual a $\sigma(S_1, \ldots, S_n)$ generada por las variables aleatorias $S_1, \ldots, S_n$.

Definición 4.1.1. *Sea* $T_n = \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$*,* $n = 1, \ldots, N$*. Si* $(x_1, \ldots, x_N)$ *es un elemento arbitrario de* Ω*, denotamos con* $P\{(x_1, \ldots, x_N)\} = P(T_1 = x_1, \ldots, T_N = x_N)$ *a la medida de probabilidad correspondiente.*

Conocer P es equivalente a conocer la ley de la N-tupla $(T_1, \ldots, T_N)$.

Por lo tanto se tiene que para $n \geq 1$, $F_n = \sigma(T_1, \ldots, T_n)$.

Proposición 4.1.1. *Los precios descontados* $(\widetilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ *son* F_n-*martingalas bajo la medida* P *si y sólo si*

$$E(T_{n+1}|F_n) = 1 + r, \ \forall \ n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Demostración. $\Rightarrow]$ Suponga que los precios descontados $(\widetilde{S_n})_{0 \leq n \leq N}$ son $F_n - martingalas$ bajo la medida P, entonces se cumple

$$E(\widetilde{S}_{n+1}|F_n) = \widetilde{S}_n \Rightarrow \frac{1}{\widetilde{S}_n} E(\widetilde{S}_{n+1}|F_n) = 1.$$

Como $\widetilde{S}_n$ es F_n-medible, se tiene que

$$E\left(\frac{\widetilde{S}_{n+1}}{\widetilde{S}_n}|F_n\right) = 1.$$

Con esto se tiene que

$$\begin{aligned} E(T_{n+1}|F_n) &= E\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}|F_n\right) \\ &= \frac{S^0_{n+1}}{S^0_n} E\left(\frac{S_{n+1}/S^0_{n+1}}{S_n/S^0_n}|F_n\right) \\ &= (r+1) E\left(\frac{\widetilde{S}_{n+1}}{\widetilde{S}_n}|F_n\right) \\ &= r + 1. \end{aligned}$$

$\Leftarrow]$ Suponga que $E(T_{n+1}|F_n) = 1 + r$, $\forall n \in \{0, \ldots, N-1\}$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 + r &= E(T_{n+1}|F_n) \\ &= E\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}|F_n\right) \\ &= \frac{S^0_{n+1}}{S^0_n} E\left(\frac{S_{n+1}/S^0_{n+1}}{S_n/S^0_n}|F_n\right) \\ &= (1+r) E\left(\frac{\widetilde{S}_{n+1}}{\widetilde{S}_n}|F_n\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = E\left(\frac{\widetilde{S}_{n+1}}{\widetilde{S}_n}|F_n\right) = \frac{1}{\widetilde{S}_n} E(\widetilde{S}_{n+1}|F_n) \Rightarrow E(\widetilde{S}_{n+1}|F_n) = \widetilde{S}_n.$$

Por lo tanto, los precios descontados $(\widetilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ son $F_n - martingalas$ bajo la medida P. $\square$

Proposición 4.1.2. *La tasa de interés r debe pertenecer al intervalo abierto (a, b) para que el mercado sea viable.*

Demostración. Si el mercado es viable, por el primer teorema fundamental de valuación de opciones existe una medida de probabilidad P^* equivalente a P, bajo la cual los precios descontados $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ son $F_n - martingalas$.

De acuerdo a la Proposición 4.1.1, se tiene que

$$E^*(T_{n+1}|F_n) = 1 + r,$$

y por lo tanto $E^*(T_{n+1}) = 1 + r$. Como $P^*(T_{n+1} = 1 + a) > 0$ o $P^*(T_{n+1} = 1 + b) > 0$, se tiene que $(1 + r) \in (1 + a, 1 + b)$, y por lo tanto $r \in (a, b)$. $\square$

Suponga que $r \leq a$. Pidiendo prestado una cantidad S_0 al tiempo 0, se puede comprar una acción del activo con riesgo. Al tiempo N, se paga el préstamo y se vende el activo con riesgo. Se logra una ganancia

$$\begin{aligned} S_N - S_0(1 + r)^N &\geq S_N - S_0(1 + a)^N \\ &\geq S_0(1 + a)^N - S_0(1 + a)^N \\ &= 0, \end{aligned}$$

además $P^*(S_N > S_0(1 + a)^N) = 1 - P(T_1 = 1 + a, \ldots, T_N = 1 + a) > 0$.

Por lo tanto existe oportunidad de arbitraje. Lo mismo ocurre si $r \geq b$.

A partir de esto, se asumirá que $r \in (a, b)$.

Definición 4.1.2. *La probabilidad libre de arbitraje se denotará como* $p = \dfrac{b - r}{b - a}$.

Proposición 4.1.3. *Los precios descontados $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ son $F_n - martingalas$ bajo la medida P^* si y sólo si las variables aleatorias $T_1, \ldots, T_N$ son independientes e idénticamente distribuidas y su distribución de probabilidad está dada por:*

$$P^*(T_1 = 1 + a) = p = 1 - P^*(T_1 = 1 + b).$$

En este caso el mercado es libre de arbitraje y completo.

Demostración. $\Leftarrow$] Si las variables aleatorias T_i son independientes e idénticamente distribuidas y su distribución de probabilidad está dada por

$$P^*(T_i = 1 + a) = p = 1 - P^*(T_i = 1 + b),$$

entonces

$$\begin{aligned} E^*(T_{n+1}|F_n) &= E^*(T_{n+1}) \\ &= p(1 + a) + (1 - p)(1 + b) \\ &= \left(\frac{b - r}{b - a}\right)(1 + a) + \left(1 - \frac{b - r}{b - a}\right)(1 + b) \\ &= \frac{(b - r) + a(b - r) + (r - a) + b(r - a)}{b - a} \\ &= 1 + r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Proposición 4.1.1, los precios descontados $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ son $F_n-martingalas$ bajo la medida P^*.

$\Rightarrow$] Si para $n = 0, \ldots, N-1$ se tiene que $E^*(T_{n+1}|F_n) = 1 + r$, entonces se puede escribir,

$$(1+a)E^*(1_{T_{n+1}=1+a}|F_n) + (1+b)E^*(1_{T_{n+1}=1+b}|F_n) = 1 + r$$

También, se tiene que

$$E^*(1_{T_{n+1}=1+a}|F_n) + E^*(1_{T_{n+1}=1+b}|F_n) = 1.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene

$$E^*(1_{T_{n+1}=1+a}|F_n) = P^*(T_{n+1} = 1+a|F_n) = p$$
$$E^*(1_{T_{n+1}=1+b}|F_n) = P^*(T_{n+1} = 1+b|F_n) = 1-p$$

y por inducción se puede demostrar que

$$P^*(T_1 = x_1, \ldots, T_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

donde $p_i = p$ si $x_i = 1 + a$ y $p_i = 1 - p$ si $x_i = 1 + b$.

En efecto: si $n = 1$, se cumple

$$E^*(1_{T_1=1+a}|F_0) = P^*(T_1 = 1+a) = p = \prod_{i=1}^{1} p_i,$$

$$E^*(1_{T_1=1+b}|F_0) = P^*(T_1 = 1+b) = 1-p = \prod_{i=1}^{1} p_i.$$

Suponga que se cumple para $k = n$. Demostremos que se cumple para $k = n + 1$.

$$\begin{aligned}
P^*(T_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, T_1 = x_1) &= P^*(T_{n+1} = x_{n+1}|T_n = x_n, \ldots, T_1 = x_1)P^*(T_n = x_n, \ldots, T_1 = x_1) \\
&= P^*(T_{n+1} = x_{n+1}|F_n)P^*(T_n = x_n, \ldots, T_1 = x_1) \\
&= p_{n+1}\prod_{k=1}^{n} p_k \\
&= \prod_{k=1}^{n+1} p_k.
\end{aligned}$$

Por inducción matemática, se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con esto se muestra que las variables aleatorias T_i son independientes e idénticamente distribuidas bajo la medida P^*.

Como los precios descontados $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ son $F_n - martingalas$ bajo la medida P^*, y determinan la distribución de la N-tupla $(T_1, \ldots, T_N)$ bajo la medida de probabilidad P^*, por el segundo teorema fundamental de valuación de opciones, se tiene que el mercado es viable y completo. $\square$

Denote por C_n y P_n el valor al tiempo n de un call y un put europeo, respectivamente, en una acción del activo, con precio de ejercicio K y madurez N.

Proposición 4.1.4. *La ecuación de paridad put/call está dada por*

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}. \tag{4.1}$$

Demostración. Si denotamos por E^* la esperanza con respecto a la medida de probabilidad P^* bajo la cual $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ son $F_n - martingalas$, se tiene que

$$\begin{aligned}
C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)}E^*[(S_N-K)_+|F_n] - (1+r)^{-(N-n)}E^*[(K-S_N)_+|F_n] \\
&= (1+r)^{-(N-n)}E^*((S_N-K)_+ - (K-S_N)_+|F_n) \\
&= (1+r)^{-(N-n)}E^*(S_N-K|F_n) \\
&= (1+r)^{n}E^*(\widetilde{S}_N|F_n) - K(1+r)^{-(N-n)} \\
&= (1+r)^{n}\widetilde{S}_n - K(1+r)^{-(N-n)} \\
&= S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.1.5. *El valor de un call europeo al tiempo n está dado por*

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)}\sum_{j=0}^{N-n}\binom{N-n}{j}p^j(1-p)^{N-n-j}[S_n(1+a)^j(1+b)^{N-n-j}-K]_+. \tag{4.2}$$

Por lo tanto, se puede escribir $C_n = c(n, S_n)$, donde c es una función de K, a, b, r y p.

Demostración. Se puede escribir S_N como

$$S_N = S_n\prod_{i=n+1}^{N}T_i.$$

Con esto se obtiene

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)}E^*\left[\left(S_n\prod_{i=n+1}^{N}T_i - K\right)_+ |F_n\right].$$

Dado que bajo la probabilidad P^*, la variable aleatoria $\prod_{i=n+1}^{N}T_i$ es independiente de F_n, y S_n es F_n-medible, se puede ver que C_n tiene la forma siguiente

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)}\sum_{j=0}^{N-n}\binom{N-n}{j}p^j(1-p)^{N-n-j}[S_n(1+a)^j(1+b)^{N-n-j}-K]_+.$$

□

De la misma forma, se puede obtener el valor de un put europeo al tiempo n mediante

$$P_n = (1+r)^{-(N-n)} \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j (1-p)^{N-n-j} [K - S_n(1+a)^j(1+b)^{N-n-j}]_+. \tag{4.3}$$

Proposición 4.1.6. *La estrategia $\varphi_n = (\varphi_n^1, \varphi_n^0)$ que replica un call europeo al tiempo n está dada por*

$$\varphi_n^1 = \frac{c(n, S_{n-1}(1+b)) - c(n, S_{n-1}(1+a))}{S_{n-1}(b-a)}, \tag{4.4}$$

$$\varphi_n^0 = -\frac{(1+a)c(n, S_{n-1}(1+b)) - (1+b)c(n, S_{n-1}(1+a))}{(b-a)(1+r)^n}. \tag{4.5}$$

donde $c(n,x)$ está dada por (4.2).

Demostración. Por (2.1) se tiene que

$$\varphi_n^0(1+r)^n + \varphi_n^1 S_n = c(n, S_n).$$

Dado que $S_n = S_{n-1}(1+a)$ o $S_n = S_{n-1}(1+b)$, la igualdad anterior implica

$$\varphi_n^0(1+r)^n + \varphi_n^1 S_{n-1}(1+a) = c(n, S_{n-1}(1+a))$$

$$\varphi_n^0(1+r)^n + \varphi_n^1 S_{n-1}(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b)).$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para φ_n^1 y φ_n^0 se obtiene:

$$\varphi_n^1 = \frac{c(n, S_{n-1}(1+b)) - c(n, S_{n-1}(1+a))}{S_{n-1}(b-a)},$$

$$\varphi_n^0 = -\frac{(1+a)c(n, S_{n-1}(1+b)) - (1+b)c(n, S_{n-1}(1+a))}{(b-a)(1+r)^n}.$$

□

Proposición 4.1.7. *El precio P_n^A al tiempo n de un put americano en un activo con madurez N puede ser escrito como $P_n^A = P^A(n, S_n)$, donde $P^A(n,x)$ está definido por*

$$P^A(N,x) = (K-x)_+, \tag{4.6}$$

y para $n \leq N-1$

$$P^A(n,x) = \text{máx}\left[(K-x)_+, \frac{f(n+1,x)}{1+r}\right], \tag{4.7}$$

donde

$$f(n+1,x) = pP^A[n+1, x(1+a)] + (1-p)P^A[n+1, x(1+b)] \tag{4.8}$$

y $p = \dfrac{b-r}{b-a}$.

Demostración. Para $n = N$, se tiene que

$$P^A(N, S_n) = U_N = Z_N = (K - S_N)_+.$$

Por lo tanto, se cumple $P^A(N, x) = (K - x)_+$.

Para $n \leq N - 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} P^A(n, S_n) &= U_n \\ &= \max\left[Z_n, \frac{1}{1+r}E^*(U_{n+1}|F_n)\right] \\ &= \max\left[(K - S_n)_+, \frac{1}{1+r}[pP^A(n+1, S_n(1+a)) + (1-p)P^A(n+1, S_n(1+b))]\right] \\ &= \max\left[(K - S_n)_+, \frac{f(n+1, S_n)}{1+r}\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple $P^A(n, x) = \max\left[(K - x)_+, \dfrac{f(n+1, x)}{1+r}\right]$. □

De igual forma, el precio C_n^A al tiempo n de un call americano en un activo con madurez N puede ser escrito como $C_n^A = C^A(n, S_n)$, donde $C^A(n, x)$ está definido por

$$C^A(N, x) = (x - K)_+, \tag{4.9}$$

y para $n \leq N - 1$

$$C^A(n, x) = \max\left[(x - K)_+, \frac{f(n+1, x)}{1+r}\right], \tag{4.10}$$

con $f(n+1, x) = pC^A[n+1, x(1+a)] + (1-p)C^A[n+1, x(1+b)]$ y $p = \dfrac{b-r}{b-a}$.

4.2. Aplicaciones y cálculos numéricos

4.2.1. Opciones europeas

En el modelo de Cox-Ross-Rubinstein, considere un call europeo con precio de ejercicio $K = 120$ y tiempo de expiración $N = 2$. Sean $S_0 = 120$, $b = 0.2$, $a = -0.1$ y $r = 0.1$. Encontremos el precio de la opción y la estrategia que lo replica.

Los árboles de información del valor del activo y del proceso de pagos de la opción están representados en las Figuras 4.1 y 4.2 respectivamente.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & & S_2 = 172.8 \\
 & S_1 = 144 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
S_0 = 120 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & S_2 = 129.6 \\
 & S_1 = 108 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & S_2 = 97.2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & & Z_2 = 52.8 \\
 & Z_1 = 24 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
Z_0 = 0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & Z_2 = 9.6 \\
 & Z_1 = 0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & Z_2 = 0
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1. Precio del activo. Figura 4.2. Proceso de pagos.

Usando (4.2), calculemos el valor del call europeo en los tiempos 0, 1 y 2.

El valor inicial del call europeo está dado por

$$\begin{aligned}
c(0,120) &= (1.1)^{-2}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-j}[120(0.9)^{j}(1.2)^{2-j}-120]_{+} \\
&= \frac{1}{1.21}\left[\frac{4}{9}(52.8)+\frac{4}{9}(9.6)\right] \\
&= 22.92.
\end{aligned}$$

El valor del call europeo al tiempo $n=1$ cuando $S_1 = 144$ está dado por

$$\begin{aligned}
c(1,144) &= (1.1)^{-1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-j}[144(0.9)^{j}(1.2)^{1-j}-120]_{+} \\
&= \frac{1}{1.1}\left[\frac{2}{3}(52.8)+\frac{1}{3}(9.6)\right] \\
&= \frac{384}{11} \approx 34.91.
\end{aligned}$$

El valor del call europeo al tiempo $n=1$ cuando $S_1 = 108$ está dado por

$$\begin{aligned}
c(1,108) &= (1.1)^{-1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-j}[108(0.9)^{j}(1.2)^{1-j}-120]_{+} \\
&= \frac{1}{1.1}\left[\frac{2}{3}(9.6)\right] \\
&= \frac{64}{11} \approx 5.82.
\end{aligned}$$

Al tiempo $n=2$, el valor del call europeo está dado por Z_2 para cada uno de los posibles estados finales del activo.

Usando la Proposición 4.1.6, calculemos ahora la estrategia que replica el valor del call europeo en cada uno de los tiempos.

Para replicar el valor del call europeo al tiempo $n = 1$, cuando $S_0 = 120$, usando (4.4) y (4.5), la estrategia de inversión a seguir es

$$\begin{aligned} \varphi_1^1(120) &= \frac{c(1,144) - c(1,108)}{120(0.3)} & \varphi_1^0(120) &= -\frac{(0.9)c(1,144) - (1.2)c(1,108)}{(0.3)(1.1)} \\ &= \frac{\frac{384}{11} - \frac{64}{11}}{36} & &= -\frac{(0.9)\frac{384}{11} - (1.2)\frac{64}{11}}{1.1} \\ &= 0.808. & &= \text{-}74.05. \end{aligned}$$

Para replicar el valor del call europeo al tiempo $n = 2$, cuando $S_1 = 144$, usando (4.4) y (4.5), la estrategia de inversión a seguir es

$$\begin{aligned} \varphi_2^1(144) &= \frac{c(2,172.8) - c(2,129.6)}{144(0.3)} & \varphi_2^0(144) &= -\frac{(0.9)c(2,172.8) - (1.2)c(2,129.6)}{(0.3)(1.1)^2} \\ &= \frac{52.8 - 9.6}{43.2} & &= -\frac{(0.9)(52.8) - (1.2)(9.6)}{0.363} \\ &= 1. & &= \text{-}99.17. \end{aligned}$$

Para replicar el valor del call europeo al tiempo $n = 2$, cuando $S_1 = 108$, usando (4.4) y (4.5), la estrategia de inversión a seguir es

$$\begin{aligned} \varphi_2^1(108) &= \frac{c(2,129.6) - c(2,97.2)}{108(0.3)} & \varphi_2^0(108) &= -\frac{(0.9)c(2,129.6) - (1.2)c(2,97.2)}{(0.3)(1.1)^2} \\ &= \frac{9.6 - 0}{32.4} & &= -\frac{(0.9)(9.6) - (1.2)(0)}{0.363} \\ &= 0.296. & &= \text{-}23.8. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el árbol de información que muestra el valor del call europeo en cada tiempo se representa en la Figura 4.3.

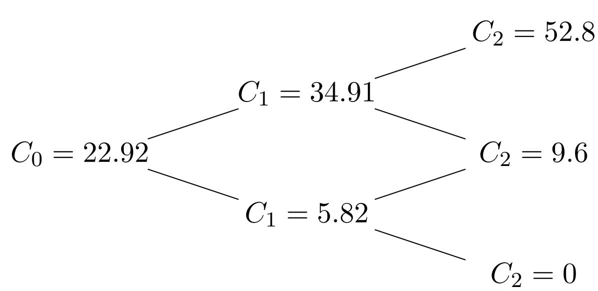

Figura 4.3. Valor del call europeo.

4.2.2. Opciones americanas

En el modelo de Cox-Ross-Rubinstein, considere un put americano que expira al tiempo $N = 3$ con precio de ejercicio $K = 62$ en un activo con precio inicial $S_0 = 60$. Sean $b = 0.1$, $a = -0.05$ y $r = 0.03$. Encontremos el valor de la opción en cada tiempo.

Los árboles de información del valor del activo y del proceso de pagos de la opción están representados en las Figuras 4.4 y 4.5, respectivamente.

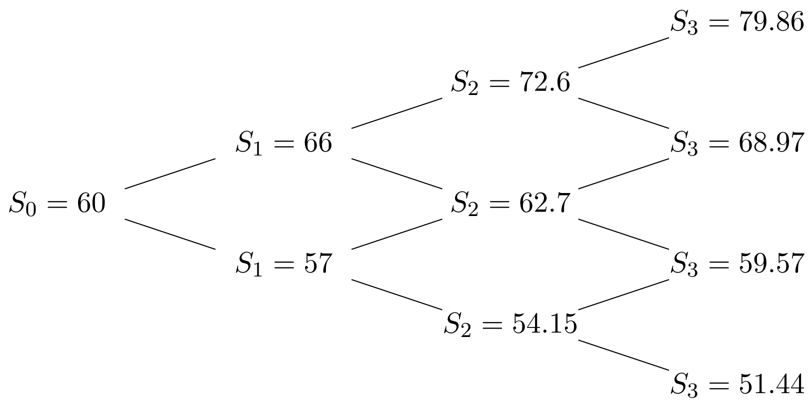

Figura 4.4. Precio del activo.

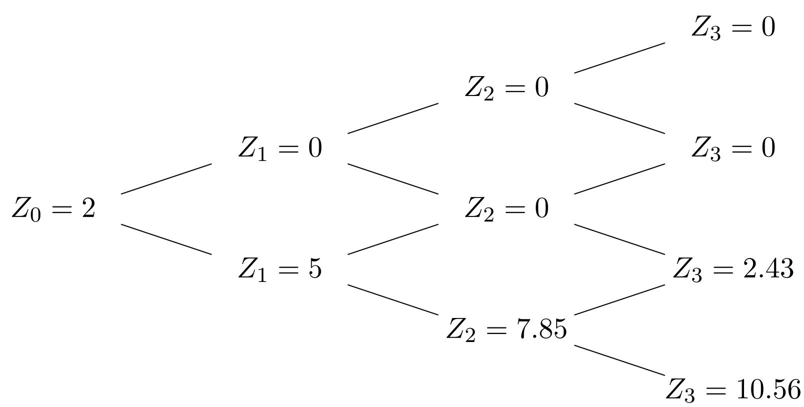

Figura 4.5. Proceso de pagos.

Usando la Proposición 4.1.7, calculemos el valor del put americano en cada tiempo.

Al tiempo $n = 3$, el valor del put americano es $U_3 = Z_3$ para cada uno de los posibles estados finales del activo.

Para el tiempo $n = 2$, calculamos primero $E^*(U_3|F_2)$ para cada uno de los valores S_2 del activo en ese tiempo, usando (4.8)

$$E^*(U_3|F_2) = \begin{cases} \frac{8}{15}(0) + \frac{7}{15}(0) = 0 & \text{si} \quad S_2 = 72.6 \\ \frac{8}{15}(0) + \frac{7}{15}(2.43) = 1.14 & \text{si} \quad S_2 = 62.7 \\ \frac{8}{15}(2.43) + \frac{7}{15}(10.56) = 6.23 & \text{si} \quad S_2 = 54.15. \end{cases}$$

Con esto, calculamos la envoltura de Snell para el tiempo $n = 2$

$$U_2 = \text{máx}\left[Z_2, \frac{1}{1.03}E^*(U_3|F_2)\right] \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S_2 = 72.6 \\ 1.10 & \text{si} \quad S_2 = 62.7 \\ 7.85 & \text{si} \quad S_2 = 54.15. \end{cases}$$

Para el tiempo $n = 1$, calculamos primero $E^*(U_2|F_1)$ para cada uno de los valores S_1 del activo en ese tiempo, usando (4.8)

$$E^*(U_2|F_1) \quad = \quad \begin{cases} \frac{8}{15}(0) + \frac{7}{15}(1.10) = 0.51 & \text{si} \quad S_1 = 66 \\ \frac{8}{15}(1.10) + \frac{7}{15}(7.85) = 4.25 & \text{si} \quad S_1 = 57. \end{cases}$$

Con esto, calculamos la envoltura de Snell para el tiempo $n = 1$

$$U_1 = \text{máx}\left[Z_1, \frac{1}{1.03}E^*(U_2|F_1)\right] \quad = \quad \begin{cases} 0.51 & \text{si} \quad S_1 = 66 \\ 5 & \text{si} \quad S_1 = 57. \end{cases}$$

Finalmente calculamos la envoltura de Snell para el tiempo $n = 0$

$$\begin{aligned} U_0 &= \text{máx}\left[Z_0, \frac{1}{1.03}E^*(U_1|F_0)\right] \\ &= \text{máx}\left[2, \frac{1}{1.03}\left(\frac{8}{15}(0.51) + \frac{7}{15}(5)\right) = 2.53\right] \\ &= 2.5319. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el árbol de información que muestra el valor del put americano en cada tiempo se representa en la Figura 4.6.

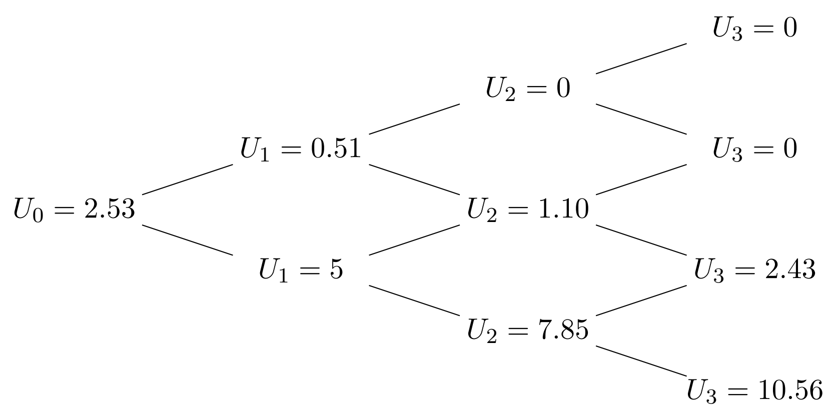

Figura 4.6. Valor del put americano.

4.2.3. Comparación entre opciones europeas y opciones americanas

Teorema 4.2.1. *Sea C_n^A el valor al tiempo n de una opción americana descrita por el proceso de pagos $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ y sea C_n^E el valor al tiempo n de la opción europea definida por la variable aleatoria F_N- medible $h = Z_N$. Entonces $C_n^A \geq C_n^E$. Más aún, si $C_n^E \geq Z_n$ $\forall n$, entonces $C_n^E = C_n^A$ $\forall n \in \{0, \ldots, N\}$.*

Demostración. Los valores descontados $(\widetilde{C}_n^A)_{0\le n\le N}$ son $F_n - supermartingalas$ bajo la medida P^*. Entonces

$$\widetilde{C}_n^A \ge E^*(\widetilde{C}_N^A|F_n) = E^*(\widetilde{C}_N^E|F_n) = \widetilde{C}_n^E.$$

Por lo tanto $C_n^A \ge C_n^E$.

Suponga que $C_n^E \ge Z_n$ para cada n. Entonces la sucesión $(\widetilde{C}_n^E)_{0\le n\le N}$, como es una $F_n - martingala$ bajo la medida P^*, entonces es también una $F_n - supermartingala$ bajo la medida P^* y domina a la sucesión $(Z_n)_{0\le n\le N}$. Como $(\widetilde{C}_n^A)_{0\le n\le N}$ es la menor $F_n - supermartingala$ que domina a la sucesión $(\widetilde{Z}_n)_{0\le n\le N}$, entonces $\widetilde{C}_n^A \le \widetilde{C}_n^E$, así $C_n^A = C_n^E$ $\forall n \in \{0,\dots,N\}$. □

Teorema 4.2.2. *En el modelo de Cox-Ross-Rubinstein, el precio del call americano es igual al precio del call europeo.*

Demostración. Considere un mercado con un solo activo con riesgo con precio S_n al tiempo n, y una tasa de interés sin riesgo constante con valor $r \ge 0$ en cada periodo, así que $S_n^0 = (1+r)^n$.

El pago de un call al tiempo n es $Z_n = (S_n - K)_+$. Si C_n^E es el precio al tiempo n de un call europeo con madurez N y precio de ejercicio K en una unidad del activo con riesgo y C_n^A es el precio del correspondiente call americano, entonces

$$\begin{array}{rcl}
\widetilde{C}_n^E & = & (1+r)^{-N}E^*((S_N-K)_+|F_n) \\
& \ge & (1+r)^{-N}E^*(S_N-K|F_n) \\
& = & E^*(\widetilde{S}_N - K(1+r)^{-N}|F_n) \\
& = & \widetilde{S}_n - K(1+r)^{-N}.
\end{array}$$

Así para $r \ge 0$

$$C_n^E \ge S_n - K(1+r)^{-(N-n)} \ge S_n - K.$$

Como $C_n^E \ge 0$, se sigue que

$$C_n^E \ge (S_n-K)_+ = Z_n$$

y por el Teorema 4.2.1, $C_n^A = C_n^E$. □

Ejemplo 1. En el modelo Cox-Ross-Rubinstein comparemos los precios de un call americano y un call europeo con precio de ejercicio $K = 120$ que expira al tiempo $N = 2$ en un activo con precio inicial $S_0 = 120$ con $b = 0.2$, $a = -0.1$ y $r = 0.1$.

Los árboles de información del valor del activo y del proceso de pagos están representados en la Figuras 4.7 y 4.8, respectivamente.

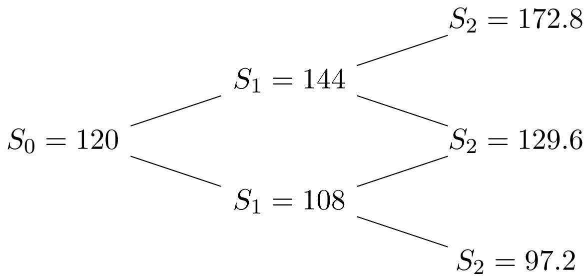

Figura 4.7. Precio del activo.

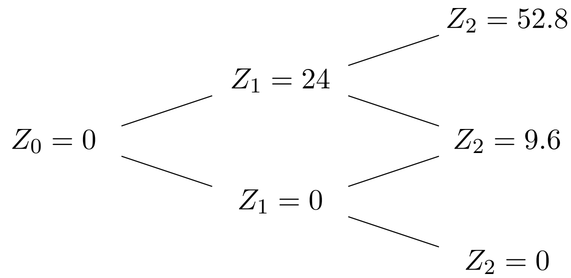

Figura 4.8. Proceso de pagos.

Usando (4.2), calculemos el valor del call europeo en los tiempos 0, 1 y 2.

El valor inicial del call europeo está dado por

$$\begin{aligned} C^E(0,120) &= (1.1)^{-2}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^{2-j}[120(0.9)^j(1.2)^{2-j}-120]_+ \\ &= \frac{1}{1.21}\left[\frac{4}{9}(52.8)+\frac{4}{9}(9.6)\right] \\ &= 22.92. \end{aligned}$$

El valor del call europeo al tiempo $n = 1$ cuando $S_1 = 144$ está dado por

$$\begin{aligned} C^E(1,144) &= (1.1)^{-1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^{1-j}[144(0.9)^j(1.2)^{1-j}-120]_+ \\ &= \frac{1}{1.1}\left[\frac{2}{3}(52.8)+\frac{1}{3}(9.6)\right] \\ &= \frac{384}{11}\approx 34.91. \end{aligned}$$

El valor del call europeo al tiempo $n = 1$ cuando $S_1 = 108$ está dado por

$$\begin{aligned} C^E(1,108) &= (1.1)^{-1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^{1-j}[108(0.9)^j(1.2)^{1-j}-120]_+ \\ &= \frac{1}{1.1}\left[\frac{2}{3}(9.6)\right] \\ &= \frac{64}{11}\approx 5.82. \end{aligned}$$

Al tiempo $n = 2$, el valor del call europeo está dado por Z_2 para cada uno de los posibles estados finales del activo.

Ahora, usando la Proposición 4.1.7, calculemos el valor del call americano en cada tiempo.

Al tiempo $n = 2$, el valor del call americano es $U_2 = Z_2$ para cada uno de los posibles estados finales del activo.

Para el tiempo $n = 1$, calculamos primero $E^*(U_2|F_1)$ para cada uno de los valores S_1 del activo en ese tiempo, usando (4.8)

$$E^*(C_2^A|F_1) = \begin{cases} \frac{2}{3}(52.8) + \frac{1}{3}(9.6) = 38.4 & \text{si} \quad S_1 = 144 \\ \frac{2}{3}(9.6) + \frac{1}{3}(0) = 6.4 & \text{si} \quad S_1 = 108. \end{cases}$$

Con esto, calculamos la envoltura de Snell para el tiempo $n = 1$

$$C_1^A = \text{máx}\left[Z_1, \frac{1}{1.1}E^*(C_2^A|F_1)\right] = \begin{cases} 34.91 & \text{si} \quad S_1 = 144 \\ 5.82 & \text{si} \quad S_1 = 108. \end{cases}$$

Finalmente calculamos la envoltura de Snell para el tiempo $n = 0$

$$\begin{aligned} C_0^A &= \text{máx}\left[Z_0, \frac{1}{1.1}E^*(C_1^A|F_0)\right] \\ &= \text{máx}\left[0, \frac{1}{1.1}\left(\frac{2}{3}(34.91) + \frac{1}{3}(5.82)\right) = 22.92\right] \\ &= 22.92. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el árbol de información correspondiente a los valores del call europeo y del call americano en cada tiempo, están representados en las Figuras 4.9 y 4.10, respectivamente.

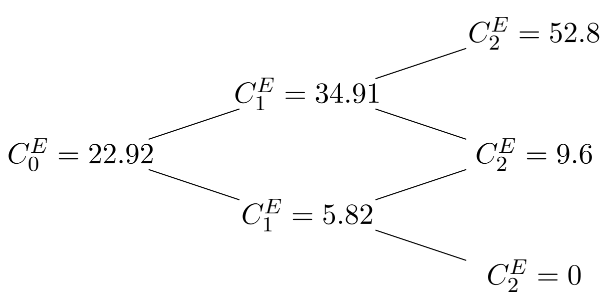

Figura 4.9. Valor del call europeo.

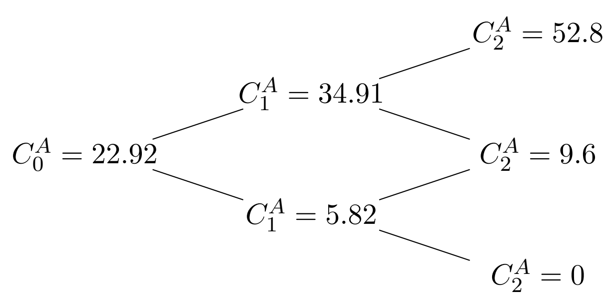

Figura 4.10. Valor del call americano.

Se puede ver que el precio del call europeo coincide con el precio del call americano en cada uno de los tiempos, como se demostró en el Teorema 4.2.2.

Ejemplo 2. En el modelo Cox-Ross-Rubinstein comparemos los precios de un put americano y un put europeo con precio de ejercicio $K = 62$ que expira al tiempo $N = 3$ en un activo con precio inicial $S_0 = 60$ con $b = 0.1$, $a = -0.05$ y $r = 0.03$.

Los árboles de información del valor del activo y del valor de ejercicio del put americano están representados en las Figuras 4.11 y 4.12 respectivamente.

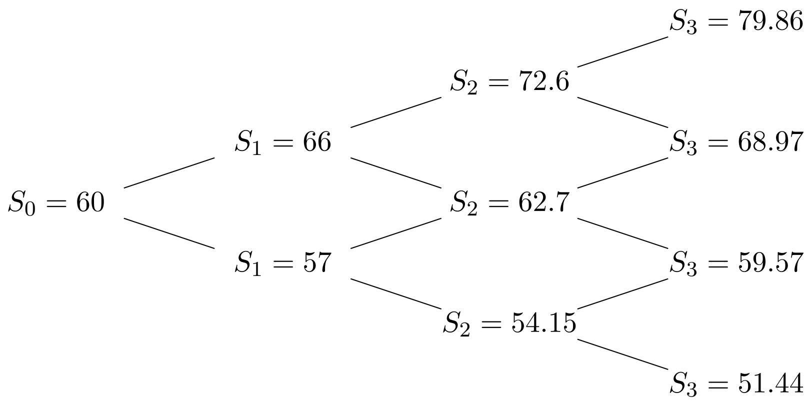

Figura 4.11. Precio del activo.

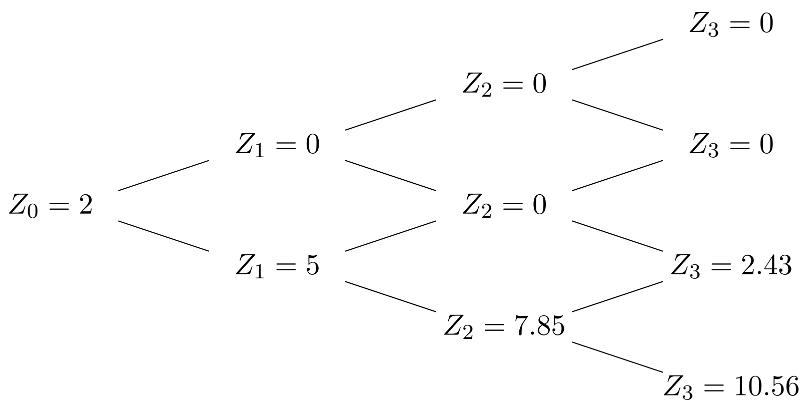

Figura 4.12. Precio de ejercicio.

Usando la Proposición 4.1.7, calculemos el valor del put americano en cada tiempo.

Al tiempo $n = 3$, el valor del put americano es $U_3 = Z_3$ para cada uno de los posibles estados finales del activo.

Para el tiempo $n = 2$, calculamos primero $E^*(U_3|F_2)$ para cada uno de los valores S_2 del activo en ese tiempo, usando (4.8)

$$E^*(U_3|F_2) \quad = \quad \begin{cases} \frac{8}{15}(0) + \frac{7}{15}(0) = 0 & \text{si} \quad S_2 = 72.6 \\ \frac{8}{15}(0) + \frac{7}{15}(2.43) = 1.14 & \text{si} \quad S_2 = 62.7 \\ \frac{8}{15}(2.43) + \frac{7}{15}(10.56) = 6.23 & \text{si} \quad S_2 = 54.15. \end{cases}$$

Con esto, calculamos la envoltura de Snell para el tiempo $n = 2$

$$U_2 = \max\left[Z_2, \frac{1}{1.03}E^*(U_3|F_2)\right] \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S_2 = 72.6 \\ 1.10 & \text{si} \quad S_2 = 62.7 \\ 7.85 & \text{si} \quad S_2 = 54.15. \end{cases}$$

Para el tiempo $n = 1$, calculamos primero $E^*(U_2|F_1)$ para cada uno de los valores S_1 del activo en ese tiempo, usando (4.8)

$$E^*(U_2|F_1) \quad = \quad \begin{cases} \frac{8}{15}(0) + \frac{7}{15}(1.10) = 0.51 & \text{si} \quad S_1 = 66 \\ \frac{8}{15}(1.10) + \frac{7}{15}(7.85) = 4.25 & \text{si} \quad S_1 = 57. \end{cases}$$

Con esto, calculamos la envoltura de Snell para el tiempo $n = 1$

$$U_1 = \max\left[Z_1, \frac{1}{1.03}E^*(U_2|F_1)\right] \quad = \quad \begin{cases} 0.51 & \text{si} \quad S_1 = 66 \\ 5 & \text{si} \quad S_1 = 57. \end{cases}$$

Finalmente calculamos la envoltura de Snell para el tiempo $n = 0$

$$\begin{aligned} U_0 &= \max\left[Z_0, \frac{1}{1.03}E^*(U_1|F_0)\right] \\ &= \max\left[2, \frac{1}{1.03}\left(\frac{8}{15}(0.51) + \frac{7}{15}(5)\right) = 2.53\right] \\ &= 2.53. \end{aligned}$$

Usando (4.3), calculemos el valor del put europeo en los tiempos 0, 1, 2 y 3.

El valor inicial del put europeo está dado por

$$\begin{aligned} P^E(0,60) &= (1.03)^{-3}\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\left(\frac{7}{15}\right)^j\left(\frac{8}{15}\right)^{3-j}[62 - 60(0.95)^j(1.1)^{3-j}]_+ \\ &= \frac{1}{1.09}\left[3\frac{392}{3375}(2.43) + \frac{343}{3375}(10.56)\right] \\ &= 1.76. \end{aligned}$$

El valor del put europeo al tiempo $n = 1$ cuando $S_1 = 66$ está dado por

$$\begin{aligned} P^E(1,66) &= (1.03)^{-2}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left(\frac{7}{15}\right)^j\left(\frac{8}{15}\right)^{2-j}[62 - 66(0.95)^j(1.1)^{2-j}]_+ \\ &= \frac{1}{1.06}\left[\frac{49}{225}(2.43)\right] \\ &= 0.50. \end{aligned}$$

El valor del put europeo al tiempo $n = 1$ cuando $S_1 = 57$ está dado por

$$\begin{aligned} P^E(1,57) &= (1.03)^{-2}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\left(\frac{7}{15}\right)^j\left(\frac{8}{15}\right)^{2-j}[62 - 57(0.95)^j(1.1)^{2-j}]_+ \\ &= \frac{1}{1.06}\left[2\frac{56}{225}(2.43) + \frac{49}{225}(10.56)\right] \\ &= 3.31. \end{aligned}$$

El valor del put europeo al tiempo $n = 2$ cuando $S_2 = 72.6$ está dado por

$$\begin{aligned} P^E(2, 72.6) &= (1.03)^{-1} \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} \left(\frac{7}{15}\right)^j \left(\frac{8}{15}\right)^{1-j} [62 - 72.6(0.95)^j (1.1)^{1-j}]_+ \\ &= 0. \end{aligned}$$

El valor del put europeo al tiempo $n = 2$ cuando $S_2 = 62.7$ está dado por

$$\begin{aligned} P^E(2, 62.7) &= (1.03)^{-1} \sum_{j=0}^{1} \binom{2}{j} \left(\frac{7}{15}\right)^j \left(\frac{8}{15}\right)^{1-j} [62 - 62.7(0.95)^j (1.1)^{1-j}]_+ \\ &= \frac{1}{1.03} \left[\frac{7}{15}(2.43)\right] \\ &= 1.10. \end{aligned}$$

El valor del put europeo al tiempo $n = 2$ cuando $S_2 = 54.15$ está dado por

$$\begin{aligned} P^E(2, 54.15) &= (1.03)^{-1} \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} \left(\frac{7}{15}\right)^j \left(\frac{8}{15}\right)^{1-j} [62 - 54.15(0.95)^j (1.1)^{1-j}]_+ \\ &= \frac{1}{1.03} \left[\frac{8}{15}(2.43) + \frac{7}{15}(10.56)\right] \\ &= 6.04. \end{aligned}$$

Al tiempo $n = 3$, el valor del put europeo está dado por Z_3 para cada uno de los posibles estados finales del activo.

Por lo tanto, el árbol de información correspondiente a los valores del put americano y del put europeo en cada tiempo, están representados en las Figuras 4.13 y 4.14, respectivamente.

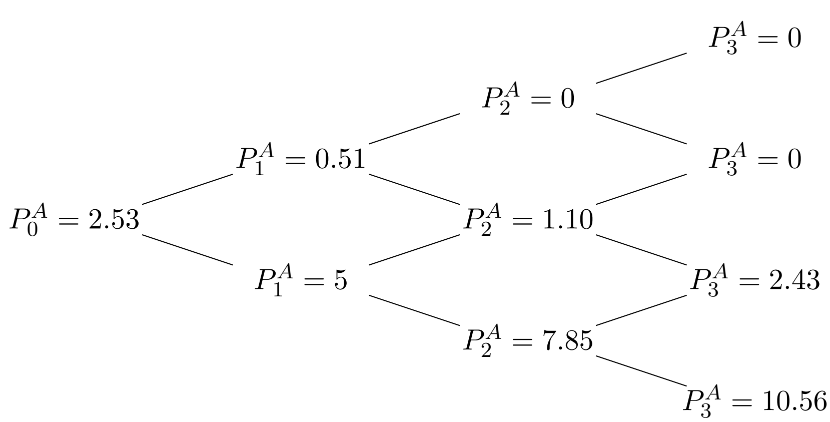

Figura 4.13. Valor del put americano.

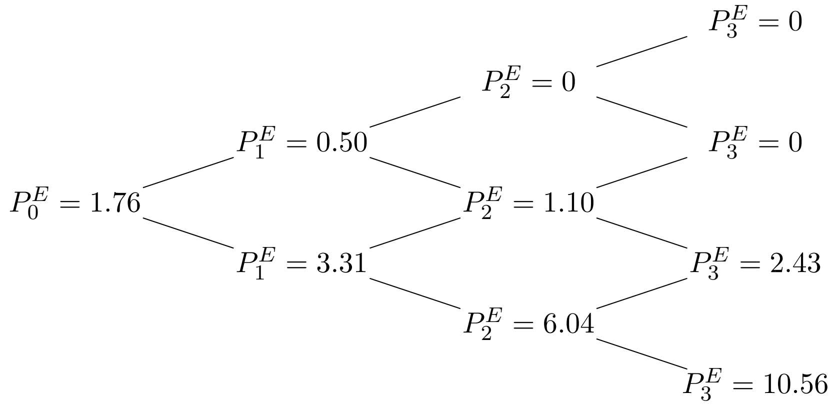

Figura 4.14. Valor del put europeo.

En este caso, se puede ver que el valor del put americano es mayor o igual que el valor del put europeo en cada uno de los tiempos, a diferencia de los valores entre el call americano y el call europeo, donde los valores son iguales en cada tiempo [1].

4.3. Convergencia al modelo de Black-Scholes

Se puede usar el modelo binomial para valorar un call o un put con madurez T fijo en un solo activo, y se fijará una constante $R > 0$. Para esto, se estudiará el caso asintótico cuando N converge al infinito, donde $r_N = \frac{RT}{N}$, y sean a_N y b_N tales que

$$\ln\left(\frac{1+a_N}{1+r_N}\right) = \frac{-\sigma}{\sqrt{N}} \ y \ \ln\left(\frac{1+b_N}{1+r_N}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

donde σ es una constante fija.

A σ^2 se le puede ver como la varianza límite, bajo la medida P^*, de la variable $\ln(S_N)$, cuando N converge al infinito.

El número real R es interpretado como la tasa de interés a tiempo continuo, dado que

$$e^{RT} = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N = \lim_{N\to\infty}(1+r)^N.$$

Lema 4.3.1. *Sea $(Y_N)_{N\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias igual a $Y_N = X_1^N + \ldots + X_N^N$, donde para cada N, las variables aleatorias X_i^N son independientes e idénticamente distribuidas, cuyos valores que toman son $\left\{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}$, y su media es igual a μ_N, tal que $\lim_{N\to\infty}(N\mu_N) = \mu$. Entonces la sucesión (Y_N) converge en distribución a una variable normal con media μ y varianza σ^2 (Ver Apéndice A).*

Demostración. Veamos la convergencia de la función característica ϕ_{Y_N} de Y_N. Como las variables aleatorias X_i^N son independientes e idénticamente distribuidas, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\phi_{Y_N}(u) &= E(\exp(iuY_N)) \\
&= \prod_{j=1}^{N} E(\exp(iuX_j^N)) \\
&= [E(\exp(iuX_1^N))]^N \\
&= \left[\sum_{j=0}^{N} \frac{(iu)^j}{j!} m^{(j)}(X_1^N) + o(1/N)\right]^N \\
&= \left[1 + iu\mu_N - \frac{\sigma^2 u^2}{2N} + o(1/N)\right]^N \\
&= \left[1 + \frac{iuN\mu_N - \sigma^2 u^2/2}{N} + o(1/N)\right]^N .
\end{aligned}$$

Usando que $\lim_{N\to\infty} (N\mu_N) = \mu$, se tiene que $\lim_{N\to\infty} \phi_{Y_N}(u) = \exp\left(iu\mu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$, la cual coincide con la función característica de una variable aleatoria normal, lo cual prueba la convergencia en distribución. □

Teorema 4.3.1. *El precio asintótico de un put europeo al tiempo 0 está dado por*

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} = Ke^{-RT}F(-d_2) - S_0F(-d_1), \tag{4.11}$$

donde $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + RT + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$, $d_2 = d_1 - \sigma$ *y* $F(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

Demostración. Para N fijo, el precio del put al tiempo 0 está dado por

$$\begin{aligned}
P_0^{(N)} &= \left(1 + \frac{RT}{N}\right)^{-N} E^*\left(K - S_0 \prod_{n=1}^{N} T_n\right)_+ \\
&= E^*\left(\left(1 + \frac{RT}{N}\right)^{-N} K - S_0 \exp(Y_N)\right)_+ ,
\end{aligned}$$

donde $Y_N = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{T_n}{1 + r_N}\right)$.

De acuerdo a lo asumido, las variables $X_j^N = \ln\left(\frac{T_j}{1 + r_N}\right)$ toman valores en $\left\{\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}$, y son independientes e idénticamente distribuidas bajo la medida de probabilidad P^*.

Más aún:

$$
\begin{aligned}
E^*(X_j^N) &= p\left(\frac{-\sigma}{\sqrt{N}}\right) + (1-p)\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \\
&= (1-2p)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
&= \left[1 - 2\left(\frac{b_N - r_N}{b_N - a_N}\right)\right]\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
&= \left[\frac{(2+2r_N) - (1+b_N) - (1+a_N)}{(1+b_N) - (1+a_N)}\right]\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
&= \left[\frac{2 - \dfrac{1+b_N}{1+r_N} - \dfrac{1+a_N}{1+r_N}}{\dfrac{1+b_N}{1+r_N} - \dfrac{1+a_N}{1+r_N}}\right]\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
&= \left[\frac{2 - e^{\ln(\frac{1+b_N}{1+r_N})} - e^{\ln(\frac{1+a_N}{1+r_N})}}{e^{\ln(\frac{1+b_N}{1+r_N})} - e^{\ln(\frac{1+a_N}{1+r_N})}}\right]\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
&= \left[\frac{2 - e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}\right]\frac{\sigma}{\sqrt{N}}.
\end{aligned}
$$

Entonces, la sucesión (Y_N) satisface las condiciones anteriores, con $\mu = \dfrac{-\sigma^2}{2}$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} N\left[\frac{2 - e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}\right]\frac{\sigma}{\sqrt{N}} &= \lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\sigma\left[\frac{2 - \sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{(\sigma/\sqrt{N})^i}{i!} - \sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-\sigma/\sqrt{N})^j}{j!}}{\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(\sigma/\sqrt{N})^k}{k!} - \sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-\sigma/\sqrt{N})^l}{l!}}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\sigma\left[\frac{-\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{(\sigma/\sqrt{N})^i}{i!} - \sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{(-\sigma/\sqrt{N})^j}{j!}}{\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(\sigma/\sqrt{N})^k}{k!} - \sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-\sigma/\sqrt{N})^l}{l!}}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} -\sqrt{N}\sigma\left[\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{(\sigma/\sqrt{N})^{2i}}{(2i)!}}{\sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{(\sigma/\sqrt{N})^{2j-1}}{(2j-1)!}}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} -\left[\frac{\dfrac{(\sigma)^3}{2!\sqrt{N}} + \dfrac{(\sigma)^5}{4!\sqrt{N^3}} + \dfrac{(\sigma)^5}{6!\sqrt{N^5}} + \dots}{\dfrac{\sigma}{1!\sqrt{N}} + \dfrac{(\sigma)^3}{3!\sqrt{N^3}} + \dfrac{(\sigma)^5}{5!\sqrt{N^5}} + \dots}\right] \\
&= \frac{-\sigma^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Si escribimos $\psi(y) = (Ke^{-RT} - S_0 e^y)_+$, entonces para cada N se tiene

$$\begin{aligned} |P_0^{(N)} - E^*(\psi(Y_N))| &= |E^*\left[\left(\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N} K - S_0\exp(Y_N)\right)_+ - (Ke^{-RT} - S_0\exp Y_N)_+\right]| \\ &\leq K|\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N} - e^{-RT}| \end{aligned}$$

Así se tiene por la convergencia en distribución de la sucesión (Y_N)

$$\lim_{N\to\infty} E^*(\psi(Y_N)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y}\right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy,$$

y de la desigualdad anterior se obtiene que

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} = \lim_{N\to\infty} E^*(\psi(Y_N)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y}\right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

Si $Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y} > 0$, entonces $y < \dfrac{\ln(\frac{K}{S_0}) - RT + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} = d$. Así

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y}\right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d}\left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y}\right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d}^{\infty}\left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y}\right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d}\left(Ke^{-RT} - S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma y}\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &= Ke^{-RT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right) - S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2}}\,dy\right) \\ &= Ke^{-RT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right) - S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d-\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right) \\ &= Ke^{-RT}F(-d_2) - S_0F(-d_1) \end{aligned}$$

donde $d_1 = \dfrac{\ln(\frac{S_0}{K}) + RT + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$, $d_2 = d_1 - \sigma$ y $F(d) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$. □

De igual forma, se puede obtener que el precio asintótico de un call europeo al tiempo 0 está dado por

$$C_0^{(N)} = S_0F(d_1) - Ke^{-RT}F(d_2). \tag{4.12}$$

donde $d_1 = \dfrac{\ln(\frac{S_0}{K}) + RT + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$, $d_2 = d_1 - \sigma$ y $F(d) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$.

Definición 4.3.1. *La fórmula dada en (4.11) se llama la fórmula de Black-Scholes para un put europeo en el caso de un modelo de mercado a tiempo continuo.*
La fórmula dada en (4.12) se llama la fórmula de Black-Scholes para un call europeo en el caso de un modelo de mercado a tiempo continuo.

Capítulo 5

Conclusiones

La valoración de derivados es un problema muy importante en el área financiera, por tal motivo en esta tesis se trabajó sobre la aplicación de los procesos estocásticos a los modelos financieros a tiempo discreto, en particular al modelo de Cox-Ross-Rubinstein.

Se inició revisando algunos conceptos básicos de probabilidad, como procesos estocásticos, filtraciones y martingalas, entre otros, que son muy utilizados para la modelación de los mercados financieros.

Se describió el modelo básico de los mercados financieros, además de las estrategias de inversión que nos permiten replicar el valor de una alternativa, sin permitir el uso del arbitraje. Con esto se llegó a los dos teoremas fundamentales de la valuación de opciones, en los que se caracterizan los mercados viables completos a través de la existencia de una única medida de probabilidad bajo la cual los precios cumplen la propiedad de martingala.

Además de las opciones europeas, se trabajó sobre las opciones americanas, opciones donde el comprador de éstas tienen una mayor ventaja sobre las europeas, pues éstas se pueden ejercer en cualquier momento y no solamente hasta la fecha de expiración de la opción. Se mostraron resultados sobre cuando es el momento óptimo para ejercer estas opciones, para obtener una ganancia mayor que en cualquier otro momento. Se consideran los puntos de vista del vendedor y del comprador de la opción.

Se presentó como caso particular de estos modelos financieros el modelo binomial desarrollado por John Cox, Stephen Ross y Mark Rubinstein. Aquí se desarrollaron ejemplos numéricos particulares para la valoración de una opción, ya sea de compra o de venta, además para comparar las semejanzas y diferencias entre los valores de las opciones americanas y las opciones europeas.

Finalmente se muestra como el modelo de Cox-Ross-Rubinstein a tiempo discreto cuando el tiempo de expiración se divide infinitamente, converge hacia el modelo de valuación de opciones de Black-Scholes a tiempo continuo.

Apéndice A

Variables aleatorias normales

Definición A.0.2. *Una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal de parámetros μ y σ si su función de densidad está dada por*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ x \in \mathbb{R},$$

donde μ es la media y σ es la desviación estándar.

Si se estandariza la variable aleatoria X de la forma $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, la distribución de esta variable aleatoria Z se conoce como distribución normal estándar, donde sus parámetros toman los valores $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. En este caso, su función de densidad es de la siguiente forma

$$f(z) = \frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},\ z \in \mathbb{R}.$$

Definición A.0.3. *La función de distribución acumulada de la variable aleatoria normal está definida como*

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du,\ x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la función de distribución acumulada de la variable aleatoria normal estándar está definida como

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du,\ z \in \mathbb{R}.$$

Definición A.0.4. *Para una distribución normal, la función generadora de momentos es*

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{tx} dx = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Definición A.0.5. *La función característica para una distribución normal es*

$$M_X(it) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{itx} dx = e^{\mu it - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Definición A.0.6. *Una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$, converge en distribución a una variable aleatoria X si*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

en todos los puntos x donde $F_X(x)$ es continua.

A pesar de que se habla de que la sucesión de variables aleatorias converge en distribución, es en realidad la función de distribución acumulada la que converge, no las variables aleatorias.

Si la función generadora de momentos de una variable aleatoria X_n se aproxima a la función generadora de momentos de una variable aleatoria X cuando $n \to \infty$, entonces la función de distribución acumulada de X_n se aproxima a la de X cuando $n \to \infty$. Si dos variables aleatorias tienen la misma función generadora de momentos, entonces ambas deben tener la misma distribución de probabilidad.

Bibliografía

[1] Capinski Marek, Zastawniak Tomasz. *“Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering”*. Great Britain: Springer. (2003).

[2] Cox John, Ross Stephen, Rubinstein Mark. *“Option pricing: A simplified Approach”*. USA: Journal of Financial Economics. (1979)

[3] Lamberton Damien, Lapeyre Bernard. *“Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance”*. Great Britian: Chapman & Hall. 1996.

[4] Roman Steven. *“Introduction to the Mathematics of Finance. From Risk Management to Options Pricing”*. USA. Springer. (2004).

[5] Shreve Stephen E. *“Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model”*. USA: Springer. (2004).

[6] Venegas Martínez Francisco. *“Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre.”*. México: Cengage Learning. (2008).