



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**“SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO DE LA
TOMOGRFÍA DE CAPACITANCIAS, CUANDO SE
TIENE INFORMACIÓN A PRIORI SOBRE LA
SOLUCIÓN”**

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

PEDRO ALBERTO ANTONIO SOTO

DIRECTOR:

DRA. SILVIA REYES MORA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, MARZO DE 2013.

**TESIS REALIZADA EN EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS APLICADAS DE LA UTM,
APOYADA POR LOS BONOS DEL PROYECTO PROMEP/103.5/11/4427.**

A mi familia que tanto amo.

Agradecimientos

Muchas personas contribuyeron a la realización de este trabajo, mis más sinceros agradecimientos a cada uno de ellos por las palabras de apoyo que me sirvieron para seguir adelante con este proyecto. Gracias a mis padres y hermanos por su apoyo incondicional, gracias a toda mi familia que siempre estuvo alentándome, gracias a Citlalliy por su apoyo y gracias a mis amigos que hicieron más amena mi estancia en la universidad, aunque no mencione sus nombres en el desarrollo de la tesis, sin ellos no hubiera sido posible su realización.

Le debo un agradecimiento especial a la profesora Silvia Reyes Mora por haber sido mi directora de tesis, por su paciencia, tiempo y apoyo durante la elaboración de este trabajo, gracias por la confianza y la oportunidad que me brindó; al profesor Juan Carlos Mendoza Santos por su apoyo e inspiración para ser un gran matemático, además de su tiempo para revisar este trabajo; al profesor Adolfo Maceda Méndez por ser un excelente profesor, por su ejemplo y por su tiempo para revisar el presente trabajo; finalmente, al profesor Salvador Sánchez Perales por su valioso tiempo para revisar este escrito y por sus comentarios que me ayudaron a mejorar el mismo.

Gracias a todos los profesores de la licenciatura que fueron mis maestros y me ayudaron a descubrir el fascinante mundo de las matemáticas, por su apoyo e instrucción.

Índice general

1. Marco teórico	3
1.1. Problemas inversos	3
1.2. Problemas mal planteados	5
1.3. Tomografía de capacitancia eléctrica	7
2. El problema directo	11
2.1. El modelo	13
2.2. Solución del problema directo	15
2.2.1. Serie de Fourier de $\psi^{(i)}$	15
2.2.2. Desacoplamiento de $V_3^{(i)}$	16
2.2.3. Series de Fourier para $V_2^{(i)}$, $V_1^{(i)}$ y $V_0^{(i)}$	18
2.2.4. Capacitancias mutuas	21
2.3. Análisis de la serie	22
2.4. Cálculos numéricos	24
2.5. Sobre los espacios considerados	30
3. Sobre el problema inverso	31
3.1. Preliminares	34
3.2. El teorema principal	37
3.3. Algunos métodos de solución	45
3.3.1. Mínimos cuadrados	46
3.3.2. Métodos numéricos	48
3.3.3. Otro método	48

4. Conclusiones

49

Introducción

El presente trabajo se realizó inspirado en un problema actual de mucha importancia: la extracción de petróleo, ya que durante este proceso se desea conocer la calidad del crudo sin tener que interferir en el mismo, pues esto ocasionaría costos extras y pérdida de tiempo. Es por esto que interesan técnicas no invasivas confiables y rápidas que permitan conocer características y propiedades del flujo que atraviesa el interior del tubo al momento de la extracción.

Por esta razón, se analiza un modelo sobre un flujo que atraviesa un tubo, se hacen suposiciones adicionales sobre este flujo que simplifican el modelo y así, facilitan la solución del mismo. Una suposición importante que se hace es que el flujo está constituido únicamente por dos elementos, como agua y aceite, agua y gas o gas y aceite. A pesar de que esta hipótesis podría considerarse fuera de lugar dado que está lejos de la realidad, este trabajo sirve para conocer algunos métodos que se utilizan actualmente para resolver problemas relacionados con el que aquí se trata. Por otra parte; la solución del problema directo que se resuelve, servirá para calibrar los equipos de medición actualmente disponibles y, más aún; la solución del problema directo permitirá validar cualquier método de solución del problema inverso asociado.

La manera en que se distribuye el trabajo es la siguiente: en el primer capítulo se aborda el marco teórico, se introduce el tema de problemas inversos debido a que el problema que se investiga en este trabajo es uno de éstos. En seguida se toma el tema de problemas mal planteados ya que generalmente los problemas inversos son de este tipo, también se menciona un poco de la historia de estos problemas y finalmente se aborda el tema de la tomografía de capacitancias, que es la técnica que se utiliza en el modelo para resolver el problema planteado

anteriormente.

En el segundo capítulo se plantea el modelo con el que se resuelve el problema mencionado anteriormente, se detalla la solución del problema directo asociado al problema principal usando series de Fourier, también se hace un análisis de la solución encontrada y se realizan algunos cálculos numéricos con ayuda de un programa hecho en *Matlab* para hallar las llamadas capacitancias mutuas, las cuales son la solución del problema directo.

En el tercer capítulo se analiza el problema inverso, se estudia un artículo con un importante resultado que está íntimamente relacionado con el problema principal, para esto se estudia un poco la teoría relacionada con poliedros. Al final de este capítulo se mencionan algunos métodos que pueden ser utilizados para resolver el problema inverso. A pesar de que no se da una solución del problema inverso, este capítulo sirve como panorama general del estado del problema estudiado y sus métodos de solución, tanto teóricos como numéricos.

Finalmente, en el cuarto capítulo se mencionan las conclusiones obtenidas durante la realización de este trabajo y se mencionan algunos posibles caminos de estudio relacionados con este problema para trabajos futuros.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Problemas inversos

Desde el punto de vista matemático, el concepto de problema inverso puede formularse de la siguiente manera: para dos problemas, decimos que son inversos uno del otro si la formulación de uno involucra parte o toda la solución del otro.

Es general estos problemas están relacionados mediante una dualidad, en el sentido de que un problema puede ser obtenido del otro, intercambiando los roles de información y resultados, de esta manera los datos de uno son los resultados del otro y viceversa, por esta razón hay cierta ambigüedad en decidir cuál es el problema directo y cuál el inverso. Sin embargo, uno puede darse cuenta si un problema es inverso ya que los problemas inversos consisten en encontrar una propiedad desconocida de un objeto o de un medio a partir de las observaciones de una respuesta de este objeto o medio a una señal de prueba. Por lo tanto, la teoría de problemas inversos proporciona una base teórica para la detección lejana y la evaluación no destructiva. Por ejemplo, si una onda acústica es dispersada por un obstáculo y observamos el campo dispersado lejos del obstáculo o en alguna región exterior, entonces el problema inverso consiste en encontrar la forma y las propiedades materiales del obstáculo.

Para comprender mejor los problemas inversos consideremos los siguientes ejemplos obtenidos de [8]:

- Problema directo: Encontrar las n raíces de un polinomio de grado n con coeficientes complejos.

Problema inverso: Dados n números complejos hallar un polinomio de grado a lo más n , cuyas raíces sean dichos números.

- Problema directo: Encontrar los primeros m términos de una sucesión $\{a_n\}$ dada su regla de correspondencia.

Problema inverso: Dados los primeros m términos de la sucesión $\{a_n\}$ encontrar la regla de correspondencia.

- Problema directo: Encontrar el producto de m números.

Problema inverso: Dado un número encontrar una factorización de m términos.

En general, los problemas inversos son más difíciles, incluso no es posible asegurar la existencia de soluciones. En los ejemplos anteriores podemos apreciar que aunque existan soluciones, puede que éstas no sean únicas, que es una característica de estos problemas.

Los problemas inversos son parte importante de muchas disciplinas científicas: determinación de estructuras cristalinas, tomografía en medicina, prospección acústica y electromagnética en geofísica, determinación de estructuras internas en física de materiales, reconstrucción de sucesos pasados por mediciones hechas en el presente en arqueología. Las dificultades inherentes a cada aplicación son una base inagotable de problemas puramente matemáticos, al igual que lo fue la física en el pasado.

Se considera a los problemas inversos como una rama de las matemáticas a raíz de la aparición de los trabajos de Tikhonov en la década de los sesenta, sus ideas permitieron a la comunidad científica romper con lo que ahora se considera un prejuicio histórico y que tiene su origen en el concepto de “problema bien planteado” que ha hecho avanzar enormemente a las ecuaciones en derivadas parciales. Hadamard afirmó que los problemas de interés físico son aquellos que tienen una solución única y que dependen continuamente de los datos de entrada. Esto hizo que los problemas mal planteados se consideraran solo como una curiosidad

académica y sin interés real. Durante la segunda guerra mundial, el éxito del radar y del sonar hizo a la comunidad científica preguntarse si era posible determinar, a partir de las mediciones hechas, más información que exclusivamente la posición del objeto. En los sesenta Tikhonov introdujo los métodos de regularización para problemas mal planteados, abrió así una puerta al tratamiento numérico de estos, lo que junto con la gran capacidad computacional actual, ha lanzado el campo de los llamados problemas inversos como una rama muy activa y creciente de las matemáticas, no solamente desde el punto de vista numérico sino también teórico. Hay, sin embargo, otros antecedentes históricos de problemas inversos en los trabajos de Von Neumann y de Faddeev.

1.2. Problemas mal planteados

El concepto básico de problemas mal planteados fue introducido por el matemático francés Jacques Hadamard en un artículo publicado en 1902 acerca de ecuaciones diferenciales parciales para problemas con valores en la frontera y su interpretación física. En su primera formulación un problema bien planteado es uno donde su solución existe y es única para datos arbitrarios. En trabajos posteriores Hadamard enfatizó en el requerimiento de la dependencia continua de la solución sobre los datos, diciendo que una solución que varía considerablemente por una pequeña variación en los datos no es una solución en el sentido físico. Además, como los datos no son conocidos exactamente debido a errores de medición, entonces la solución no se conocería en absoluto. Debido a esto Hadamard concluyó que sólo los problemas cuya motivación eran fenómenos físicos eran bien planteados.

Así, se dice (en el sentido de Hadamard) que un problema que satisfaga los requerimientos de existencia, unicidad y dependencia continua es bien planteado, aunque el primero en dar esta formulación completa fue R. Courant. Los problemas que no satisfacen estos requerimientos se llaman mal planteados, es decir, aquellos en los que la solución no existe para algunos datos, que la solución no sea única o que no haya una dependencia continua de la solución sobre los datos.

El punto de vista de Hadamard diciendo que sólo aquellos problemas motivados por

fenómenos físicos eran bien planteados era muy compartido por los físicos del siglo XIX. En esa época estos problemas mal planteados se consideraban como anomalías matemáticas y no se les tomaba mucha importancia, sin embargo, cuando se descubrió que los problemas inversos eran mal planteados esta opinión cambio rotundamente.

Para dar rigurosidad matemática, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.2.1. Sean X e Y espacios normados, $K : X \rightarrow Y$ un operador (no necesariamente lineal). La ecuación $Kx = y$ se llama bien planteada si se cumple:

- *Existencia:* Para cada $y_0 \in Y$ existe $x_0 \in X$ tal que $Kx_0 = y_0$.
- *Unicidad:* Para cada $y_0 \in Y$ existe a lo más un $x_0 \in X$ tal que $Kx_0 = y_0$.
- *Estabilidad:* La solución x depende continuamente de y , es decir, para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} Kx_n = Ky$, se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Las ecuaciones para las cuales al menos una de las condiciones no se cumple se llaman mal planteadas.

Cabe señalar que, aunque cada una de las propiedades anteriores es muy importante, la tercera es la más esencial de todas, debido a que ésta no puede ser remediada con “trucos” matemáticos. Por ejemplo, el problema de existencia puede solucionarse buscando la solución en un espacio más “grande”, la unicidad puede solucionarse considerando información adicional. Si no se tiene estabilidad, entonces la solución no se conoce en absoluto, pues los errores de medición pueden ocasionar que la solución que encontremos no esté ni siquiera cerca de la real.

Para resolver los problemas mal planteados es necesario obtener información adicional que ayude a reducir las posibles soluciones que buscamos. Ésta se conoce como información *a priori*. Cabe señalar que esta información no se puede obtener del operador K o de la misma solución.

Una primera aproximación sería que la solución no debe ser muy grande, es decir, que esté acotada. También interesa que no varíe mucho en vecindades pequeñas, con lo que podríamos pedir que su derivada también sea acotada. Otro tipo de información adicional son las propiedades estadísticas, considerando al problema como una variable aleatoria y conociendo su distribución (por tanto su varianza), es posible reducir el espacio de búsqueda de las soluciones.

La idea de acotar los objetos fue introducida por C. Pucci en el problema de Cauchy, la restricción de positividad fue utilizada por F. John en la solución de la ecuación de propagación del calor. Una versión similar fue utilizada independientemente por V. K. Ivanov, su método y el de D. L. Philips son ejemplos de métodos de regularización para la solución de problemas mal planteados, teoría que sería formulada de manera rigurosa por A. N. Tikhonov un año más tarde [7].

1.3. Tomografía de capacitancia eléctrica

La tomografía industrial de procesos surge a partir de los años 80 y 90 del siglo XX como una técnica de visualización de presencia y distribución de elementos durante la producción de procesos en medios inestables. Existe una gran variedad de enfoques a la hora de implementar la tomografía de procesos, y todos ellos tienen en común su carácter no intrusivo y no invasivo, lo que hace de esta técnica una herramienta especialmente adecuada para el control de procesos en ambientes agresivos y/o no manipulables.

En esencia, la tomografía de procesos consiste en la realización de una serie de medidas en torno a la periferia de un conducto o recipiente, o incluso de un paciente humano, dentro del cual tiene lugar el proceso o reacción que se desea monitorizar. A partir de estas medidas y mediante técnicas tomográficas, se puede obtener una imagen del estado instantáneo del proceso, reflejando qué es lo que está ocurriendo en el interior del objeto de estudio. Es por tanto una técnica de medida que proporciona información del proceso en forma de imágenes que serán de mayor o menor resolución, dependiendo de la complejidad del sistema.

Desde su introducción, la tomografía de procesos se ha aplicado en múltiples variantes: tomografía por rayos γ y rayos X , tomografía por emisión de positrones, resonancia magnética, sistemas de ultrasonidos, sistemas ópticos y sistemas eléctricos. Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas, inconvenientes y limitaciones. La elección de una técnica particular depende de muchos factores, como las propiedades físicas de los componentes del proceso en estudio, la resolución espacial y temporal requerida, el coste y dimensiones del equipo, los recursos humanos, etc.

La tomografía eléctrica es uno de los métodos disponibles dentro de la tomografía de procesos. Es relativamente rápida (hasta 300 imágenes por segundo) y simple de operar, tiene una construcción robusta y es suficientemente sólida para hacer frente a la mayoría de los procesos industriales.

La tomografía de capacitancia eléctrica (TCE) ha sido probada recientemente para obtener imágenes en una sección transversal de una tubería en varios problemas industriales que involucran materiales dieléctricos. En particular, estamos interesados en visualizar una sección transversal de un flujo multifásico en tuberías, para poder determinar la distribución de permitividad y, por lo tanto, la distribución de las fases. Cuando la tubería está compuesta de un material dieléctrico y a su alrededor se coloca un arreglo de electrodos que actúan como superficies equipotenciales, fijando uno de ellos como referencia se pueden medir las capacitancias mutuas entre dicho electrodo y los restantes. Para un electrodo arbitrario E denotemos mediante CE la capacitancia mutua entre dicho electrodo y el electrodo de referencia. Entonces la relación entre la capacitancia CE , la distribución de permitividades ε y el potencial V generado por el campo de desplazamiento eléctrico, puede expresarse utilizando la ley de Gauss mediante

$$C_{ij} = K \int_S \varepsilon \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n} ds,$$

donde S es la superficie del electrodo E , el índice (i) se refiere al electrodo de referencia, K es una constante de potencial y el integrando es la derivada direccional con respecto al vector normal a la circunferencia donde se encuentran colocados los electrodos.

Con las mediciones de la capacitancia entre cada par de electrodos se aplica un algoritmo de reconstrucción de imágenes para generar la imagen transversal del sistema. Por ejemplo, consideremos un tubo por el cual pasa un flujo multifásico (véase Figura 1.1), es decir, un material que está compuesto por más de un estado como gas-líquido, líquido-sólido, etc. Deseamos conocer como se encuentra la distribución de los componentes del material (fases) dentro del tubo. Con el fin de no afectar el estado del sistema podemos usar la técnica de tomografía de capacitancia eléctrica, los electrodos son colocados alrededor del tubo y así podemos obtener imágenes del flujo y sus fases que se encuentran al interior del tubo.

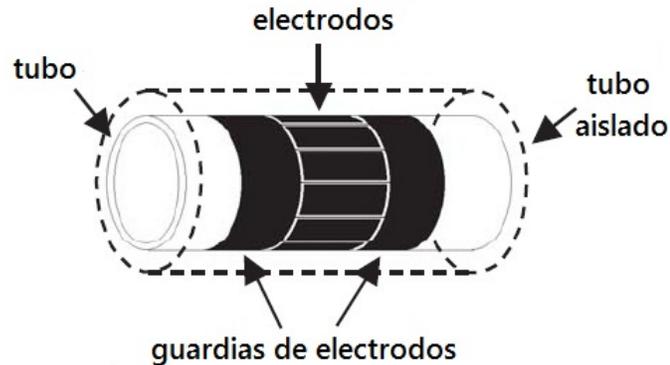


Figura 1.1: Tubo con electrodos colocados.

Los factores que se consideran son el número de electrodos que se utilizan, a medida que el número de electrodos aumenta se pueden obtener mejores imágenes, pero al aumentar el número de mediciones también se incrementa el tiempo. Sin embargo, al aumentar el número de electrodos se debe disminuir su longitud radial, lo cual implica menor sensibilidad en los electrodos. También debe considerarse el tamaño de los electrodos, tanto su longitud axial como radial, la longitud radial determina la sensibilidad del sensor ya que los electrodos más anchos tienen una mayor sensibilidad, en cuanto a la longitud axial, ésta debe ser lo más pequeña posible para que las imágenes transversales sean lo más aproximadas a las reales.

La principal ventaja de este método es su carácter no intrusivo que permite no interferir

en el funcionamiento del proceso. Otra característica a tener en cuenta es que se trata de una medida local e instantánea que, dado el avance actual de las técnicas tomográficas, permite establecer la imagen con tiempo suficiente para poder ejercer acciones de control sobre el proceso. Las imágenes se obtienen en un muy corto espacio de tiempo, del orden de 10 *ms* para 12 electrodos, lo que permite 100 imágenes por segundo. Si se disminuye el número de electrodos a 6 u 8 se pueden conseguir velocidades de hasta 300 imágenes por segundo. Entre las desventajas, está su resolución espacial limitada (del 3 al 10 % del diámetro de la tubería) y el hecho de utilizar una tecnología aún no madura y que requiere un importante trabajo de desarrollo. La resolución espacial depende del tamaño, la posición radial del objeto a estudiar y las diferencias de permitividad de éste con el resto de los materiales del lecho. Típicamente objetos con un diámetro del 5 % del recipiente pueden ser detectados si existe suficiente contraste entre su permitividad y la del medio circundante. La obtención de imágenes “on-line” depende en gran medida del algoritmo utilizado. Actualmente el único algoritmo de construcción de imágenes por medida de capacidades interelectrónicas, que permite su uso “on line” es el método de “linear back-projection”. Este sistema produce imágenes aproximadas que son de calidad aceptable en la mayoría de las aplicaciones de monitorización en línea. Si se quieren obtener mejores imágenes se deben utilizar métodos de análisis más refinados “off line” y mucho más costosos en tiempo. Este tipo de medidores están siendo estudiados por numerosos laboratorios dado su carácter prometedor y sus aplicaciones, no sólo en lechos fluidizados, sino también en el estudio del transporte de medios porosos, y en cualquier otro proceso de combustión¹.

¹La información de este párrafo puede ser encontrada de forma más detallada en es.wikipedia.org

Capítulo 2

El problema directo

En la tesis [9] se puede encontrar la solución del problema directo que se analizará, pues el modelo que se propone aquí se basa en dicho trabajo. La solución que se presenta a continuación fue obtenida de forma independiente al igual que el análisis, sin embargo, en [9] se puede encontrar una forma diferente de obtener la misma solución. Este ejercicio sirvió para comprobar que la solución del problema directo obtenido en [9] es correcto. Cabe mencionar que mejoramos la cota para el truncamiento de la serie, la cual es la solución del problema directo.

El problema directo consiste en medir la capacitancia entre cada par de electrodos conociendo la distribución de las fases (y por tanto la permitividad) en el interior del tubo. En este trabajo se supone que el flujo que pasa dentro del tubo está constituido únicamente por dos componentes, además, también se supone que estas componentes están distribuidas de tal manera que al hacer un corte transversal al tubo obtenemos círculos concéntricos como se puede ver en la Figura 2.1, donde una componente se encuentra únicamente en el círculo más pequeño mientras que la otra componente se encuentra en el anillo restante.

También, es posible separar el sistema en cuatro regiones definidas Ω_k ($k = 0, 1, 2, 3$) como se aprecia en la Figura 2.1. Así, para resolver el problema directo es necesario conocer la distribución de permitividad en el sistema, se asocia de forma natural a cada componente Ω_k una permitividad conocida y constante ε_k . Además, también se asocia una función de potencial V_k a cada región del sistema para poder medir la capacitancia entre cada par de

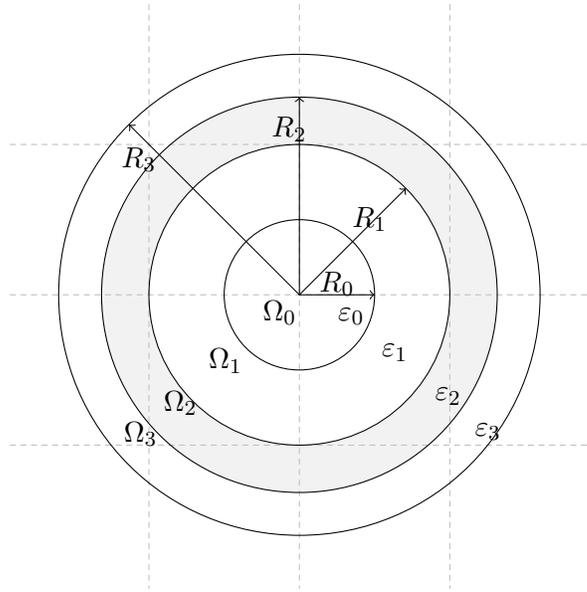


Figura 2.1: Esquema de la región de estudio para el modelo planteado.

electrodos usando la relación:

$$C_{ij} = K \int_{S_j} \varepsilon(z) \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n} ds. \quad (2.1)$$

Para resolver el problema se define una función auxiliar $\psi^{(i)}$ sobre la circunferencia de radio R_2 (véase Figura 2.1), esta función se obtiene al inyectar corriente al i -ésimo electrodo (de referencia) y manteniendo conectados a tierra los demás electrodos. De esta manera, la función tiene valor de 1 en el arco donde se encuentra colocado el i -ésimo electrodo, tiene un decaimiento lineal hasta 0 entre el electrodo de referencia y sus dos electrodos vecinos y, valor de 0 en la parte restante de la circunferencia. En la Figura 2.2 podemos observar el comportamiento de esta función.

De manera formal, la función de distribución de potencial para el i -ésimo electrodo está da-

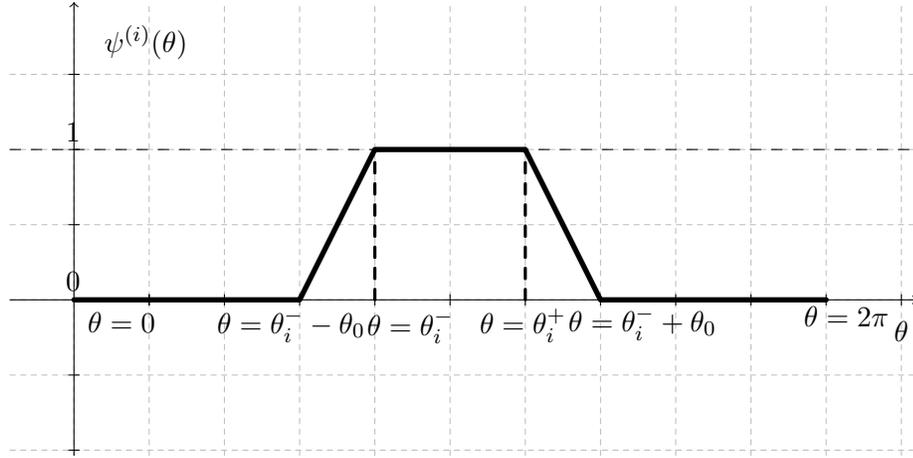


Figura 2.2: Función que representa la distribución de potencial en los electrodos, colocados en la frontera de la región de estudio.

da por:

$$\psi^{(i)}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \theta \leq \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2} \\ \frac{\theta - \theta_i^-}{\theta_0} + 1 & \text{para } \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \\ 1 & \text{para } \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2} \\ \frac{\theta_i^+ - \theta}{\theta_0} + 1 & \text{para } \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2} < \theta \leq \frac{2\pi i}{N} + \frac{\theta_0}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{2\pi i}{N} + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta, \end{cases}$$

donde $\theta_i^- = \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2}$, $\theta_i^+ = \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2}$ y θ_0 es la longitud del arco que separa dos electrodos consecutivos.

2.1. El modelo

Con las hipótesis descritas anteriormente se puede considerar un problema de ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera, al hacer un corte transversal al tubo por donde pasa el flujo se tiene un sistema como el que se muestra en la Figura 2.1, donde R_i denota el radio del círculo i -ésimo, al cual se le asocia de manera natural la región Ω_i . Además se supone que la permitividad en la región Ω_i es constante y conocida, la cual esta dada por ε_i .

Cabe mencionar que en la Figura 2.1 se puede apreciar una región sombreada con gris, esta región representa el grosor del tubo por donde pasa el flujo, y el círculo más grande representa un tubo lleno de aceite que sirve para contener la presión que ejerce el flujo durante la extracción.

El modelo que satisfacen los potenciales es el siguiente:

$$\nabla(\varepsilon_k(z)\nabla V_k^{(i)}) = 0 \text{ en } \Omega_k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

donde $z = (x, y)$. También se cumplen las condiciones de frontera:

$$V_3^{(i)}(z) = 0 \text{ en } |z| = R_3, \quad (2.3)$$

$$V_0^{(i)}(z) = V_1^{(i)}(z) \text{ en } |z| = R_0, \quad (2.4)$$

$$V_1^{(i)}(z) = V_2^{(i)}(z) \text{ en } |z| = R_1, \quad (2.5)$$

$$V_2^{(i)}(z) = V_3^{(i)}(z) = \psi^{(i)}(z) \text{ en } |z| = R_2. \quad (2.6)$$

Adicionalmente se tiene:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial V_0^{(i)}}{\partial n}(z) = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n}(z) \text{ en } |z| = R_0, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n}(z) = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n}(z) \text{ en } |z| = R_1, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n}(z) = \varepsilon_3 \frac{\partial V_3^{(i)}}{\partial n}(z) \text{ en } |z| = R_2, \quad (2.9)$$

donde n es el vector normal unitario exterior a cada círculo.

Las condiciones (2.4)-(2.6) garantizan la continuidad de la distribución del potencial en el sistema, además la condición (2.6) se debe a que ambas funciones $V_2^{(i)}$ y $V_3^{(i)}$ coinciden con la función auxiliar $\psi^{(i)}$ en la circunferencia de radio R_2 . Las condiciones (2.7)-(2.9) garantizan

la continuidad de las corrientes normales de potencial y finalmente la condición (2.3) se debe a que el sistema está aislado en la parte exterior.

2.2. Solución del problema directo

El problema directo consiste en suponer conocidos los valores de las permitividades $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 en las respectivas regiones y los valores de los radios de cada región; calcular el valor de las capacitancias mutuas dadas en la Ecuación (2.1).

Considerando por separado a cada función de potencial en su respectiva región asociada, es posible desarrollar cada una de estas funciones en series de Fourier, debido a que la ecuación (2.2) se transforma en la ecuación de Laplace para estas funciones. Así, dado que las funciones de potencial satisfacen la ecuación de Laplace, son armónicas y por tanto sus desarrollos en series de Fourier existen.

Para poder resolver el problema directo se encuentran las series de Fourier de cada función de potencial y utilizando la ecuación (2.1) podemos encontrar la capacitancia entre cada par de electrodos. Para esto se utiliza la función auxiliar $\psi^{(i)}$, cuyo desarrollo se encuentra primero.

2.2.1. Serie de Fourier de $\psi^{(i)}$

Dado que la función $\psi^{(i)}$ sólo está definida en la circunferencia de radio R_2 ; ésta sólo depende del ángulo θ y podemos considerarla como una función de una sola variable, además, debido a la manera como se construye el modelo, el periodo de $\psi^{(i)}$ es igual a 2π , por lo cual su serie de Fourier tiene la siguiente forma:

$$\psi^{(i)}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sen n\theta).$$

Nos interesa encontrar los coeficientes a_n y b_n , utilizando la ortogonalidad de las familias de funciones $\{1, \cos \theta, \cos 2\theta, \dots\}$ y $\{1, \sen \theta, \sen 2\theta, \dots\}$ es posible calcular estos coeficientes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi^{(i)}(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\theta_i^- - \theta_0}^{\theta_i^-} \left(\frac{\theta - \theta_i^-}{\theta_0} + 1 \right) d\theta + \int_{\theta_i^-}^{\theta_i^+} 1 d\theta + \int_{\theta_i^+}^{\theta_i^+ + \theta_0} \left(\frac{\theta_i^+ - \theta}{\theta_0} + 1 \right) d\theta \right] \\
&= \frac{2}{N},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi^{(i)}(\theta) \cos n\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\theta_i^- - \theta_0}^{\theta_i^-} \left(\frac{\theta - \theta_i^-}{\theta_0} + 1 \right) \cos n\theta d\theta + \int_{\theta_i^-}^{\theta_i^+} \cos n\theta d\theta + \int_{\theta_i^+}^{\theta_i^+ + \theta_0} \left(\frac{\theta_i^+ - \theta}{\theta_0} + 1 \right) \cos n\theta d\theta \right] \\
&= \frac{1}{\pi\theta_0 n^2} \left[\cos n\theta_i^+ + \cos n\theta_i^- - \cos n(\theta_i^- - \theta_0) - \cos n(\theta_i^+ + \theta_0) \right] \\
&= \frac{1}{\pi\theta_0 n^2} 2 \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \left[\operatorname{sen} \frac{2n\pi i}{N} - \operatorname{sen} \frac{2n\pi(i-1)}{N} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi^{(i)}(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\theta_i^- - \theta_0}^{\theta_i^-} \left(\frac{\theta - \theta_i^-}{\theta_0} + 1 \right) \operatorname{sen} n\theta d\theta + \int_{\theta_i^-}^{\theta_i^+} \operatorname{sen} n\theta d\theta + \int_{\theta_i^+}^{\theta_i^+ + \theta_0} \left(\frac{\theta_i^+ - \theta}{\theta_0} + 1 \right) \operatorname{sen} n\theta d\theta \right] \\
&= \frac{1}{\pi\theta_0 n^2} \left[\operatorname{sen} n\theta_i^+ + \operatorname{sen} n\theta_i^- - \operatorname{sen} n(\theta_i^- - \theta_0) - \operatorname{sen} n(\theta_i^+ + \theta_0) \right] \\
&= \frac{1}{\pi\theta_0 n^2} 2 \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \left[\cos \frac{2n\pi(i-1)}{N} - \cos \frac{2n\pi i}{N} \right].
\end{aligned}$$

Una vez encontrados los coeficientes de la serie de Fourier de $\psi^{(i)}$, se puede utilizar esta función auxiliar como una condición de frontera en la circunferencia de radio R_2 .

2.2.2. Desacoplamiento de $V_3^{(i)}$

Debido a que la función $V_3^{(i)}$ posee un desarrollo en series de Fourier y está definida en el anillo $R_2 < |z| < R_3$, su desarrollo se propone de la siguiente manera (este hecho puede verse en [4]):

$$V_3^{(i)}(r, \theta) = a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n^{(i)} r^n + b_n^{(i)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left(c_n^{(i)} r^n + d_n^{(i)} r^{-n} \right) \operatorname{sen} n\theta \right].$$

Además, es posible resolver este problema por separado, ya que contamos con dos condiciones de frontera. En la circunferencia de radio R_3 tenemos la condición (2.3) y en la circunferencia de radio R_2 se utilizan los coeficientes de Fourier encontrados para la función $\psi^{(i)}$ y la condición (2.6). A este problema se le conoce como *Problema de Cauchy para la ecuación de Laplace*.

Al evaluar $V_3^{(i)}$ en $r = R_3$, tenemos que los coeficientes de la serie resultante deben ser igual a cero por la independencia lineal de las funciones $\sin n\theta$ y $\cos n\theta$. De donde se obtienen las ecuaciones:

$$a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \log R_3 = 0,$$

$$a_n^{(i)} R_3^n + b_n^{(i)} R_3^{-n} = 0,$$

$$c_n^{(i)} R_3^n + d_n^{(i)} R_3^{-n} = 0.$$

Si ahora se evalúa en $r = R_2$ e igualamos los coeficientes de la serie resultante con los coeficientes de la serie de $\psi^{(i)}$ obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \log R_2 = \frac{1}{N},$$

$$a_n^{(i)} R_2^n + b_n^{(i)} R_2^{-n} = \frac{1}{\pi\theta_0 n^2} 2 \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \left[\operatorname{sen} \frac{2n\pi i}{N} - \operatorname{sen} \frac{2n\pi(i-1)}{N} \right],$$

$$c_n^{(i)} R_2^n + d_n^{(i)} R_2^{-n} = \frac{1}{\pi\theta_0 n^2} 2 \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \left[\cos \frac{2n\pi(i-1)}{N} - \cos \frac{2n\pi i}{N} \right].$$

Al resolver este sistema de ecuaciones es posible hallar los coeficientes deseados, a saber, son los siguientes:

$$a_0^{(i)} = \frac{\log R_3}{\log \frac{R_3}{R_2} N},$$

$$b_0^{(i)} = \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_3} N},$$

$$a_n^{(i)} = \frac{R_2^n}{R_2^{2n} - R_3^{2n}} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{\pi\theta_0 n^2} \left[\operatorname{sen} \frac{2n\pi i}{N} - \operatorname{sen} \frac{2n\pi(i-1)}{N} \right],$$

$$b_n^{(i)} = \frac{R_2^n R_3^{2n}}{R_3^{2n} - R_2^{2n}} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{\pi\theta_0 n^2} \left[\operatorname{sen} \frac{2n\pi i}{N} - \operatorname{sen} \frac{2n\pi(i-1)}{N} \right],$$

$$c_n^{(i)} = \frac{R_2^n}{R_2^{2n} - R_3^{2n}} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{\pi\theta_0 n^2} \left[\cos \frac{2n\pi(i-1)}{N} - \cos \frac{2n\pi i}{N} \right],$$

$$d_n^{(i)} = \frac{R_2^n R_3^{2n}}{R_3^{2n} - R_2^{2n}} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2}}{\pi\theta_0 n^2} \left[\cos \frac{2n\pi(i-1)}{N} - \cos \frac{2n\pi i}{N} \right].$$

2.2.3. Series de Fourier para $V_2^{(i)}$, $V_1^{(i)}$ y $V_0^{(i)}$

De igual forma se buscan las series de Fourier para $V_0^{(i)}$, $V_1^{(i)}$ y $V_2^{(i)}$, en las regiones Ω_0 , Ω_1 y Ω_2 respectivamente.

Dado que $V_2^{(i)}$ y $V_1^{(i)}$ están definidas en un anillo y $V_0^{(i)}$ está definida en el disco $|z| \leq R_0$, las series de Fourier se proponen de la siguiente manera (este hecho puede verse en [4]):

$$V_0^{(i)}(r, \theta) = a_{0,0}^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_{n,0}^{(i)} \cos n\theta + b_{n,0}^{(i)} \operatorname{sen} n\theta \right],$$

$$V_1^{(i)}(r, \theta) = a_{0,1}^{(i)} + b_{0,1}^{(i)} \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_{n,1}^{(i)} r^n + A_{n,1}^{(i)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left(b_{n,1}^{(i)} r^n + B_{n,1}^{(i)} r^{-n} \right) \operatorname{sen} n\theta \right],$$

$$V_2^{(i)}(r, \theta) = a_{0,2}^{(i)} + b_{0,2}^{(i)} \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_{n,2}^{(i)} r^n + A_{n,2}^{(i)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left(b_{n,2}^{(i)} r^n + B_{n,2}^{(i)} r^{-n} \right) \operatorname{sen} n\theta \right].$$

Para poder hallar los coeficientes de estas series se utilizan las condiciones de frontera definidas en las circunferencias. Para $V_2^{(i)}$, se evalúa en $r = R_2$, los coeficientes resultantes se igualan con los coeficientes encontrados para la función $\psi^{(i)}$. También se evalúan $V_2^{(i)}$ y $V_1^{(i)}$ en $r = R_1$, dado que estas funciones deben coincidir en esta circunferencia (véase ecuación 2.5) se igualan los coeficientes resultantes. De igual forma las funciones $V_1^{(i)}$ y $V_0^{(i)}$ se evalúan

en $r = R_0$ y se igualan los coeficientes resultantes debido a que estas funciones coinciden en dicha circunferencia (véase ecuación 2.4).

Es posible acomodar las ecuaciones anteriores para obtener tres sistemas de ecuaciones que involucren los coeficientes buscados. A continuación se presentan las matrices aumentadas de los sistemas obtenidos.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\log R_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \log R_1 & -\log R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon_1}{R_1} & -\frac{\varepsilon_2}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \log R_2 & \frac{a_0^{(i)}}{2} \end{pmatrix},$$

donde las columnas representan los coeficientes $a_{0,0}^{(i)}$, $a_{0,1}^{(i)}$, $a_{0,2}^{(i)}$, $b_{0,1}^{(i)}$, $b_{0,2}^{(i)}$ y el término independiente respectivamente.

También se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} R_0^n & -R_0^n & 0 & -R_0^n & 0 & 0 \\ \varepsilon_0 R_0^{n-1} & \varepsilon_1 R_0^{n-1} & 0 & \varepsilon_1 R_0^{-n-1} & 0 & 0 \\ 0 & R_1^n & -R_1^n & R_1^{-n} & -R_1^{-n} & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 R_1^{n-1} & -\varepsilon_2 R_1^{n-1} & -\varepsilon_1 R_1^{-n-1} & \varepsilon_2 R_1^{-n-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_2^n & 0 & R_2^{-n} & a_n^{(i)} \end{pmatrix},$$

donde las columnas representan los coeficientes $a_{n,0}^{(i)}$, $a_{n,1}^{(i)}$, $a_{n,2}^{(i)}$, $A_{n,1}^{(i)}$, $A_{n,2}^{(i)}$ y el término independiente respectivamente y $a_n^{(i)}$ es el coeficiente de Fourier de $\psi^{(i)}$.

Finalmente, tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} R_0^n & -R_0^n & 0 & -R_0^n & 0 & 0 \\ \varepsilon_0 R_0^{n-1} & \varepsilon_1 R_0^{n-1} & 0 & \varepsilon_1 R_0^{-n-1} & 0 & 0 \\ 0 & R_1^n & -R_1^n & R_1^{-n} & -R_1^{-n} & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 R_1^{n-1} & -\varepsilon_2 R_1^{n-1} & -\varepsilon_1 R_1^{-n-1} & \varepsilon_2 R_1^{-n-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_2^n & 0 & R_2^{-n} & b_n^{(i)} \end{pmatrix},$$

donde las columnas representan los coeficientes $b_{n,0}^{(i)}$, $b_{n,1}^{(i)}$, $b_{n,2}^{(i)}$, $B_{n,1}^{(i)}$, $B_{n,2}^{(i)}$ y el término independiente respectivamente y $b_n^{(i)}$ es el coeficiente de Fourier de $\psi^{(i)}$.

Resolviendo los sistemas anteriores encontramos los coeficientes deseados. Definiendo las siguientes constantes:

$$\alpha = \frac{2\varepsilon_2}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left[R_0^{-2n} R_1^{2n} R_2^{-n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} + R_1^{-2n} R_2^n \right] + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left[R_0^{-2n} R_2^n \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} + R_2^{-n} \right]},$$

$$\beta = \frac{R_1^{-2n} + R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left[R_0^{-2n} R_2^{-n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} + R_1^{-4n} R_2^n \right] + R_1^{-2n} \left[R_0^{-2n} R_2^n \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} + R_2^{-n} \right]},$$

$$\gamma = R_2^{-n} \left[1 - \frac{R_1^{-2n} + R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left[R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} + R_1^{-4n} R_2^{2n} \right] + R_1^{-2n} \left[R_0^{-2n} R_2^{2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} + 1 \right]} \right].$$

Se tiene que los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned}
a_{0,0}^{(i)} &= a_{0,1}^{(i)} = a_{0,2}^{(i)} = \frac{1}{N}, \\
A_{n,1}^{(i)} &= a_0^{(i)} \alpha, \\
A_{n,2}^{(i)} &= a_0^{(i)} \beta, \\
a_{n,0}^{(i)} &= a_0^{(i)} [\gamma + (\beta - \alpha)R_1^{-2n} + \alpha R_0^{-2n}], \\
a_{n,1}^{(i)} &= a_0^{(i)} [\gamma + (\beta - \alpha)R_1^{-2n}], \\
a_{n,2}^{(i)} &= a_0^{(i)} \gamma, \\
b_{0,1}^{(i)} &= b_{0,2}^{(i)} = 0, \\
B_{n,1}^{(i)} &= b_0^{(i)} \alpha, \\
B_{n,2}^{(i)} &= b_0^{(i)} \beta, \\
b_{n,0}^{(i)} &= b_0^{(i)} [\gamma + (\beta - \alpha)R_1^{-2n} + \alpha R_0^{-2n}], \\
b_{n,1}^{(i)} &= b_0^{(i)} [\gamma + (\beta - \alpha)R_1^{-2n}], \\
b_{n,2}^{(i)} &= b_0^{(i)} \gamma.
\end{aligned}$$

donde $a_0^{(i)}$ y $b_0^{(i)}$ son los coeficientes encontrados anteriormente para $\psi^{(i)}$.

2.2.4. Capacitancias mutuas

La capacitancia mutua entre el i -ésimo electrodo (de referencia) y el j -ésimo electrodo ($j \neq i$) está dada por:

$$C_{ij} = K \int_{S_j} \varepsilon(z) \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n} ds,$$

donde n es el vector unitario normal exterior al círculo de radio R_2 , K es una constante de unidades de potencial inverso y S_j es el arco donde está colocado el j -ésimo electrodo. Para poder usar la relación anterior es necesario expresar C_{ij} en términos de las funciones $V_k^{(i)}$ que se encontraron en la sección anterior, para esto utilizamos la ley de Gauss, con la cual se puede expresar C_{ij} de la siguiente forma:

$$C_{ij} = K \left[\varepsilon_3 \int_{S_j} \frac{\partial V_3^{(i)}}{\partial n} ds - \varepsilon_2 \int_{S_j} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n} ds \right]. \quad (2.10)$$

Realizando los cálculos en (2.10), es posible encontrar la capacitancia entre el i -ésimo y

j -ésimo electrodo.

Definiendo:

$$\Phi_n = \varepsilon_2 \frac{R_1^{-2n} + R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} - R_1^{2n} R_2^{-2n} \right] - R_2^{-2n} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}{R_1^{-2n} + R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + R_1^{2n} R_2^{-2n} \right] + R_2^{-2n} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} + \varepsilon_3 \frac{R_3^{2n} + R_2^{2n}}{R_3^{2n} - R_2^{2n}},$$

se tiene que la capacitancia C_{ij} está dada por la siguiente relación:

$$C_{ij} = \frac{K \frac{\varepsilon_3}{N} \left(\frac{2\pi}{N} - \theta_0 \right)}{\log \frac{R_2}{R_3}} - \frac{8K}{\pi \theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\theta_0}{2} \right) \cos \frac{2n(i-j)\pi}{N}. \quad (2.11)$$

2.3. Análisis de la serie

Se sigue de la ecuación (2.11) que $C_{ij} = C_{ji}$, es decir, la capacitancia entre el i -ésimo y j -ésimo electrodo es la misma sin importar cual de estos electrodos sea el electrodo de referencia. Esta propiedad no es rara, debido a las suposiciones que se hacen en el problema, pues la hipótesis sobre la distribución de las fases en el interior del tubo llevan a un modelo con cierta simetría.

A pesar de haber encontrado una expresión para la capacitancia C_{ij} , no es posible calcular ésta con la expresión resultante debido a la serie que aparece. Además, no parece sencillo encontrar una expresión de C_{ij} con funciones elementales. Debido a este problema se busca una buena aproximación para C_{ij} . Se plantea aproximar C_{ij} truncando la serie hasta cierto punto.

Como es de esperarse, al realizar las mediciones de capacitancias los equipos cometen un cierto error; entonces denotemos por δ a dicho error. Por tal razón y dado que al truncar la serie estaremos dando una aproximación a C_{ij} ; entonces debemos truncar la serie de forma tal que dicho error de truncamiento sea menor que el error que comete el equipo de medición, por lo que debemos encontrar un número natural $M \in \mathbb{N}$, de tal forma que el resto de dicha serie este acotado por δ , es decir;

$$\left| \frac{8K}{\pi \theta_0} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\Phi_n}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\theta_0}{2} \right) \cos \frac{2n(i-j)\pi}{N} \right| < \delta. \quad (2.12)$$

Así, se puede intentar acotar la expresión en la parte izquierda de (2.12), se cumple:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{8K}{\pi\theta_0} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\Phi_n}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\theta_0}{2} \right) \cos \frac{2n(i-j)\pi}{N} \right| \\
& < \frac{8K}{\pi\theta_0} \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{\Phi_n}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\theta_0}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{N} \operatorname{sen} n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\theta_0}{2} \right) \cos \frac{2n(i-j)\pi}{N} \right| \\
& < \frac{8K}{\pi\theta_0} \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{\Phi_n}{n^2} \right|.
\end{aligned}$$

Analizando $|\Phi_n|$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{R_1^{-2n} + R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} - R_1^{2n} R_2^{-2n} \right] - R_2^{-2n} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}{R_1^{-2n} + R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + R_1^{2n} R_2^{-2n} \right] + R_2^{-2n} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} + \varepsilon_3 \frac{R_3^{2n} + R_2^{2n}}{R_3^{2n} - R_2^{2n}} \right| \\
& = \left| \frac{\left(\frac{R_0}{R_1} \right)^{2n} + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \right] - \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^{2n} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}{\left(\frac{R_0}{R_1} \right)^{2n} + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \right] + \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^{2n} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} + \varepsilon_3 \frac{1 + \left(\frac{R_2}{R_3} \right)^{2n}}{1 - \left(\frac{R_2}{R_3} \right)^{2n}} \right|.
\end{aligned}$$

Dado que $0 < R_0 < R_1 < R_2 < R_3$ se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n| = |\varepsilon_2 + \varepsilon_3|.$$

Más aún, se puede ver que $|\Phi_n| < |\varepsilon_2 + \varepsilon_3| = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, de donde:

$$\frac{8K}{\pi\theta_0} \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{\Phi_n}{n^2} \right| \leq \frac{8K(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\pi\theta_0} \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \right| = \frac{8K(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\pi\theta_0} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Por otro lado, es fácil ver que:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=M+1}^k \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=M+1}^k \frac{1}{n-1} - \sum_{n=M+1}^k \frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=M}^{k-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=M+1}^k \frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{M}.
\end{aligned}$$

Así, se tiene:

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{M},$$

Lo cual implica:

$$\frac{8K}{\pi\theta_0} \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{\Phi_n}{n^2} \right| \leq \frac{8K(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\pi\theta_0 M}$$

De las desigualdades anteriores, se puede obtener la cota buscada, eligiendo $M \in \mathbb{N}$ tal que:

$$M > \frac{8K(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\pi\theta_0\delta},$$

se garantiza que se satisface la desigualdad (2.12).

2.4. Cálculos numéricos

Se realizaron algunos cálculos numéricos con ayuda de un programa escrito en *Matlab*, a pesar de no tener una forma de comparar los resultados obtenidos para probar la precisión de la aproximación encontrada, se puede verificar la simetría esperada de las capacitancias. Los datos que se utilizaron aparecen en el Cuadro 2.1, donde K es la permitividad del vacío.

Las permitividades de los elementos están dadas por:

Variable	Valor
δ	0.025×10^{-15}
K	$8.841941283 \times 10^{-12}$
N	12
ε_2	$2.82K$
ε_3	$3K$
R_0	0.0225
R_1	0.045
R_2	0.0509
R_3	0.074
θ_0	0.0246045

Cuadro 2.1: Valores utilizados, lo más cercanos a la realidad.

- Agua: $80K$
- Aceite: $3K$
- Gas: K

Se hicieron los cálculos numéricos para cada combinación de dos elementos. Debido a que los resultados son numerosos sólo se presentan algunos en los siguientes cuadros. Cabe mencionar que aunque los datos obtenidos para las capacitancias mutuas, corresponden a resultados de un modelo sencillo, estos datos deberán ser muy aproximados a los valores que se obtendrían si en la practica se tienen todas las condiciones de fluido bifásico concéntrico y distribución de potencial en el exterior. Por lo que pueden considerarse como exactos y por lo que servirán para calibrar los equipos de medición disponibles. Además, para el problema inverso supondremos que no conocemos los valores de ε_0 , ε_1 , ε_2 y ε_3 ; por lo que cualquier solución del problema inverso, con estos valores de capacitancias mutuas, deberá ser capaz de dar como resultado una distribución de permitividades como la planteada en este trabajo, de lo contrario el método de solución al problema inverso no será aceptable.

Los cálculos se obtuvieron muy rápido usando un programa codificado en *Matlab*, alrede-

Agua y aceite	
C_{ij}	Valor
$C_{1,2}$	$-3.2716335 \times 10^{-12}$
$C_{1,3}$	$-2.9904308 \times 10^{-12}$
$C_{1,4}$	$-2.6063007 \times 10^{-12}$
$C_{1,5}$	$-2.2221707 \times 10^{-12}$
$C_{1,6}$	$-1.9409680 \times 10^{-12}$
$C_{1,7}$	$-1.8380406 \times 10^{-12}$
$C_{1,8}$	$-1.9409680 \times 10^{-12}$
$C_{1,9}$	$-2.2221707 \times 10^{-12}$
$C_{1,10}$	$-2.6063007 \times 10^{-12}$
$C_{1,11}$	$-2.9904308 \times 10^{-12}$
$C_{1,12}$	$-3.2716335 \times 10^{-12}$

Cuadro 2.2: Capacitancias mutuas para agua(interior) y aceite(anillo), cuando el electrodo de referencia es el electrodo $i = 1$.

dor de un segundo.

Gas y aceite	
C_{ij}	Valor
$C_{1,2}$	$-2.8789278 \times 10^{-12}$
$C_{1,3}$	$-2.7637020 \times 10^{-12}$
$C_{1,4}$	$-2.6063007 \times 10^{-12}$
$C_{1,5}$	$-2.4488994 \times 10^{-12}$
$C_{1,6}$	$-2.3336737 \times 10^{-12}$
$C_{1,7}$	$-2.2914981 \times 10^{-12}$
$C_{1,8}$	$-2.3336737 \times 10^{-12}$
$C_{1,9}$	$-2.4488994 \times 10^{-12}$
$C_{1,10}$	$-2.6063007 \times 10^{-12}$
$C_{1,11}$	$-2.7637020 \times 10^{-12}$
$C_{1,12}$	$-2.8789278 \times 10^{-12}$

Cuadro 2.3: Capacitancias mutuas para gas(interior) y aceite(anillo), cuando el electrodo de referencia es el electrodo $i = 1$.

Agua y gas	
C_{ij}	Valor
$C_{1,2}$	$-3.2682287 \times 10^{-12}$
$C_{1,3}$	$-2.9884650 \times 10^{-12}$
$C_{1,4}$	$-2.6063007 \times 10^{-12}$
$C_{1,5}$	$-2.2241364 \times 10^{-12}$
$C_{1,6}$	$-1.9443727 \times 10^{-12}$
$C_{1,7}$	$-1.8419721 \times 10^{-12}$
$C_{1,8}$	$-1.9443727 \times 10^{-12}$
$C_{1,9}$	$-2.2241364 \times 10^{-12}$
$C_{1,10}$	$-2.6063007 \times 10^{-12}$
$C_{1,11}$	$-2.9884650 \times 10^{-12}$
$C_{1,12}$	$-3.2682287 \times 10^{-12}$

Cuadro 2.4: Capacitancias mutuas para agua(interior) y gas(anillo), cuando el electrodo de referencia es el electrodo $i = 1$.

En la Figura 2.3 se puede ver una gráfica de los valores de las capacitancias mutuas haciendo variar ε_0 y dejando fijos a ε_1 y R_0 . Es importante mencionar que las trayectorias que se observan la gráfica corresponden a las capacitancias mutuas que se listan frente a ellas, pues, dada la simetría del modelo planteado, es fácil ver que si se hace una rotación sobre el origen las regiones que se aprecian en la Figura 2.1 no se alteran, ni tampoco la distribución de permitividad ε . Este hecho importante se corroboró con el programa codificado en *Matlab* y se aprecia en la Figura 2.3, donde se puede ver que la capacitancia entre dos electrodos puede ser distinguida tomando en cuenta sólo la distancias entre dichos electrodos.

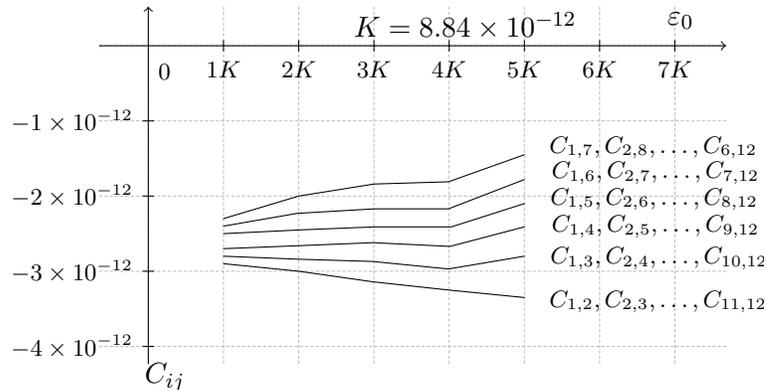


Figura 2.3: Gráficas de las capacitancias mutuas para valores fijos de R_0 y ε_1 , haciendo variar ε_0 .

De la Figura 2.3 se nota que el problema directo es bien planteado, en el sentido de Hadamard, note que aunque se cambien los valores de ε_0 , los valores de C_{ij} se encuentran cerca, además, al realizar incrementos más pequeños a ε_0 (de 10^{-15}) no se modifican los valores de C_{ij} debido a la precisión de la computadora. Cabe mencionar que el error porcentual es aproximadamente 10%, este hecho puede observarse dada la desigualdad obtenida anteriormente 2.12, dado que $\delta \approx 10^{-16}$ y los valores obtenidos son de orden 10^{-12} . Y más aún, si sólo comparamos dos valores consecutivos de una sola trayectoria se puede apreciar que la diferencia entre estos es aproximadamente 0.2×10^{-12} , lo que muestra que el error porcentual varía aproximadamente 2% entre estos valores, lo cual reafirma el buen planteamiento del problema directo.

2.5. Sobre los espacios considerados

Se puede observar que el operador y los espacios considerados en el problema directo son $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}$, donde $K \equiv C_{ij}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, R_0)$ debido a que $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, R_0)$ determinan por completo la distribución de permitividades en la región estudiada, y N es el número de electrodos colocados alrededor del tubo. Con este operador es posible recuperar las $\frac{N(N-1)}{2}$ capacitancias entre cada par de electrodos, las cuales son la solución del problema directo. En la Figura 2.4 se muestra un esquema de los espacios. Cabe señalar que para el problema inverso que se estudia en el siguiente capítulo, el operador K' no es fácil de describir, pues, hasta la fecha no se conoce ninguna solución para el problema que se considera.

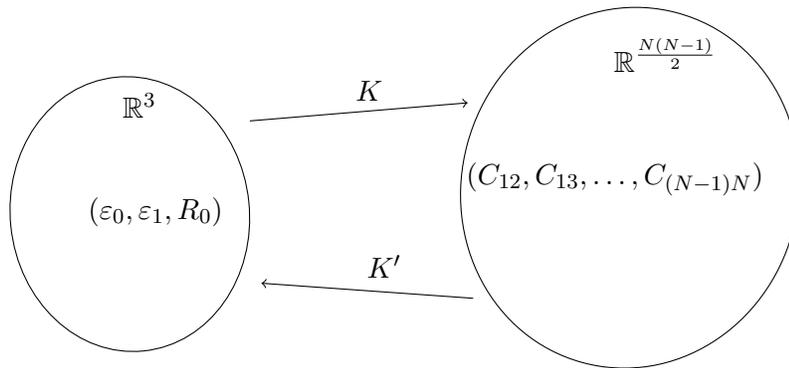


Figura 2.4: Esquema de los espacios y operadores considerados para los problemas directo e inverso.

Capítulo 3

Sobre el problema inverso

Observemos que la fórmula de las capacitancias mutuas es:

$$C_{ij} = K \int_{S_j} \varepsilon(z) \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n} ds. \quad (3.1)$$

El problema inverso que nos planteamos es el siguiente: Si se conocen los valores $\{C_{ij}\}$, con $i, j \in \{1, \dots, N\}, i < j$ que vienen dados por la expresión (3.1), entonces debemos determinar de manera aproximada el valor de ε en $\Omega_0 \cup \Omega_1$.

Se puede ver que una versión simplificada de este problema conduce al llamado “Problema de Calderón” o “problema de conductividad inverso” que corresponde a hallar la función ε en la ecuación $\operatorname{div}(\varepsilon \nabla u(x, y)) = 0$ en la región de flujo $\Omega_0 \cup \Omega_1$ a partir del conocimiento de ciertos pares de Cauchy $(u, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n})$ en la frontera de Ω .

Cabe aclarar que el problema de Calderón es en cierto sentido “más fácil”, ya que en ese problema, los datos sobre la frontera son la corriente $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}$ y el potencial u . Mientras que los datos para el problema inverso de la tomografía de capacitancias son: capacitancias mutuas y cuyos valores en la frontera del problema planteado aparecen dentro de la integral (3.1), cuestión que lo hace más difícil.

El problema de conductividad inverso tiene una respuesta teórica que fue dada por Nachman en [10], y que en esencia nos dice que se puede reconstruir ε a partir del conocimiento

del correspondiente operador Dirichlet-Neumann.

Sin embargo, hasta la fecha sólo existen dos resultados teóricamente fundamentados que muestran cómo recuperar la función ε a partir del conocimiento de un número finito de datos de Cauchy en la frontera. Uno de estos resultados se presenta en [11] donde se muestra una implementación numérica al algoritmo de reconstrucción propuesto por A. Nachman, sin embargo, la implementación práctica de este algoritmo es poco viable, ya que para obtener una buena aproximación de ε se requiere una gran cantidad de datos de Cauchy que corresponden a un número grande de mediciones que no siempre son posible realizar en la práctica. Una vertiente más práctica para resolver este complejo problema de identificación se obtiene cuando se imponen “condiciones a priori” a la función ε que se desea recuperar. Esta información a priori depende del contexto práctico en que se requiere identificar a ε . En [3] se presenta un teorema de unicidad para la recuperación de ε a partir del conocimiento de un solo par de Cauchy, bajo la suposición a priori de que ε puede tomar únicamente dos valores distintos y se propone un algoritmo de identificación para un problema sintético en el que además se supone que uno de los valores lo toma en una región convexa contenida en Ω y el otro valor en el complemento de esa región.

Como ya se había mencionado anteriormente, el problema de estudio se limita a un fluido bifásico concéntrico, y es por ello que revisamos la teoría sobre el problema inverso dado en el artículo [3]. Aunque existen otros métodos que se plantean para resolver el problema inverso, no existe hasta la fecha un método que dé la solución teórica del problema inverso de la tomografía de capacitancias para el caso tan sencillo como lo es el problema planteado en esta tesis.

En este capítulo se analiza un resultado importante relacionado con el problema principal y está basado en el artículo [3]. El problema que se estudia en este artículo es un problema relacionado con el problema de conductividad inverso; y que se relaciona con el de la tomografía de capacitancias mediante la fórmula de capacitancias mutuas. El artículo que se revisa trata acerca de un dominio acotado Ω con frontera suave en \mathbb{R}^n y que contiene a la clausura de un poliedro convexo D . Sea χ_D la función característica de D , se demuestra que los autores

encuentran una función g , tal que si u es la solución del problema:

$$\operatorname{div}((1 + \chi_D)\nabla u) = 0 \text{ en } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ en } \partial\Omega,$$

entonces D está determinada de manera única por un sólo par de Cauchy $g, f \equiv u|_{\partial\Omega}$.

Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n $n \geq 2$ con frontera suave y sea D un subdominio en Ω . Asumimos que ambos Ω y D son conductores de electricidad. Consideremos la siguiente pregunta: ¿podemos hallar un campo magnético \vec{E} alrededor de Ω con un flujo conocido g sobre $\partial\Omega$, tal que al calcular el potencial del campo sobre $\partial\Omega$ podamos determinar D ? En la Figura 3.1 se puede ilustrar el problema que se considera.

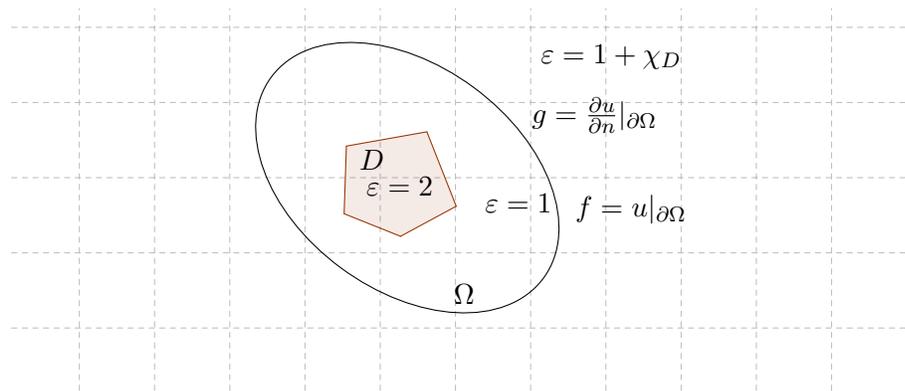


Figura 3.1: Ilustración de la región donde se plantea el problema.

Es importante mencionar la relación entre el resultado que se presenta con el problema que se estudia en este trabajo. Lo primero que se debe mencionar es que en el resultado de unicidad se utilizan polígonos convexos, a pesar de que en el problema principal se tiene un disco, sin embargo, es posible aproximar un círculo con tanta precisión como se desee con polígonos convexos aumentando el número de lados del polígono. También es importante mencionar que usando la función característica χ_D del polígono se obtienen sólo dos valores en la región Ω que son los mismos que se buscan en el problema principal. Finalmente, en este resultado de unicidad se supone que el campo \vec{E} es conservativo, luego existe una función u

derivable, tal que $\vec{E} = \nabla u$, y para el cual se cumple:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $\gamma(x)$ es la conductividad en Ω y $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota la derivada normal de u en $\partial\Omega$. La pregunta ahora es: ¿Se puede escoger g tal que g y $f = u|_{\partial\Omega}$ determinen D de manera única?

Si ocurre que $\gamma(x) = 1 + \chi_D(x)$, donde χ_D denota la función característica de D . En este caso, Friedman e Isakov (véase referencia [5]) probaron que existe un flujo g y un potencial f que determinan D de forma única si se asume que D es un poliedro convexo no tangente a la frontera de Ω , es decir, si $\operatorname{diam}(D) < \operatorname{dist}(D, \partial\Omega)$.

En este artículo se demuestra que es posible quitar esta condición, específicamente se prueba el siguiente resultado de unicidad: Sea Ω un dominio acotado con frontera conexa en \mathbb{R}^2 y sean D_1 y D_2 poliedros convexos contenidos compactamente¹ en Ω y en la cual se cumple el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((1 + \chi_{D_i}(x))\nabla u_i(x)) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \int_{\Omega} u_i dx &= 0 \text{ y } \frac{\partial u_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g. \end{aligned}$$

Si u_1 y u_2 son soluciones del problema anterior y además $u_1|_{\partial\Omega} \equiv u_2|_{\partial\Omega}$, entonces $D_1 = D_2$. El resultado se prueba para polígonos convexos, la prueba para poliedros convexos en \mathbb{R}^n se sigue del Lema 3.2.1 usando argumentos similares.

3.1. Preliminares

Definición 3.1.1. *Un poliedro convexo \mathcal{P} en \mathbb{R}^n es una intersección finita de hiper-semiplanos.*

Es decir, si

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_i) \cdot n_i > 0\},$$

para algunos puntos $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ y vectores unitarios $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{P} = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_k.$$

¹Un subconjunto D de Ω está compactamente contenido si $\bar{D} \subset \operatorname{int}(\Omega)$ y \bar{D} es compacto.

Definición 3.1.2. Una arista γ de un poliedro \mathcal{P} es la intersección de dos caras, es decir, la intersección de dos hiper-semiplanos usados en la definición de \mathcal{P} .

Definición 3.1.3. Un poliedro D en \mathbb{R}^n es un conjunto conexo y abierto que es la unión de poliedros convexos.

Supongamos que tenemos una función $f(x_1, \dots, x_n)$ definida sobre un subconjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde cada α_i es un estero no negativo, denotamos con $D^\alpha f$ la derivada parcial

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}};$$

de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Sea $m \geq 0$, sobre $C^m(\overline{\Omega})$ se define un producto escalar como:

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} := \sum \left(\int_{\Omega} D^\alpha f \cdot \overline{D^\alpha g} : |\alpha| \leq m \right) \forall f, g \in C^m(\overline{\Omega}).$$

Definición 3.1.4. Se llama espacio de Sobolev de orden m y se denota por $H^m(\Omega)$ al completamiento del espacio lineal $C^m(\overline{\Omega})$ con la norma $|\cdot|_{H^m(\overline{\Omega})}$.

Definición 3.1.5. (Derivada en sentido de distribuciones o en sentido de Sobolev) Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones localmente integrables en Ω , $v(x)$ se llama en sentido de Sobolev o derivada generalizada de orden $|\alpha|$ de $u(x)$ y se denota por $D^\alpha u$, si para cualquier función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se satisface la igualdad:

$$\int_{\Omega} v(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x)D^\alpha \phi(x)dx.$$

Algunos ejemplos de derivadas en sentido de Sobolev o de distribuciones son:

- La función salto $\Theta(x)$ tiene por derivada la función delta de Dirac: $\Theta'(x) = \delta(x)$.
- La derivada en sentido de las distribuciones de una función diferenciable coincide con su derivada ordinaria.

Dado un dominio Ω en \mathbb{R}^n y un poliedro compactamente soportado² en Ω , consideremos

²El soporte de una función se define y se denota como $\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ Una función tiene soporte compacto si la adherencia de su soporte es un conjunto compacto.

el problema de Neumann

$$\begin{cases} Lu := \operatorname{div}((1 + \chi_D(x))\nabla u) = 0, & \text{en } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{en } \partial\Omega; \end{cases} \quad (3.2)$$

donde n es el vector unitario normal a la frontera y u está normalizado por $\int_{\Omega} u = 0$.

Por una solución débil del Problema (3.2) se entiende una función $u \in L^2(\Omega)$ cuyas derivadas parciales u_{x_i} , en el sentido de distribución, pertenecen a $L^2(\Omega)$ y tal que

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (1 + \chi_D) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = 0,$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, la clase de funciones C^∞ con soporte compacto en Ω .

Se sabe que si $g \in L^\infty(\partial\Omega)$, entonces existe una única solución u de (3.2) tal que $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ para algún $\alpha > 0$ [6]; donde $C^\alpha(\bar{\Omega})$ es el completamiento del espacio de Sobolev de orden α .

Si denotamos al potencial den el exterior e interior de D respectivamente por:

$$u^e = u|_{\Omega - \bar{D}} \text{ y } u^i = u|_D,$$

entonces $\Delta u^e = 0$ en $\Omega - \bar{D}$, $\Delta u^i = 0$ en D y $u^e = u^i$ en ∂D .

También, por continuidad de las corrientes normales se obtiene

$$\frac{\partial u^e}{\partial n} = 2 \frac{\partial u^i}{\partial n} \quad (3.3)$$

en la parte suave de ∂D .

También es necesario conocer el siguiente teorema que será útil para demostrar el resultado principal de la siguiente sección.

Teorema 3.1.1. Cauchy-Kovalevskaya Para un sistema de k ecuaciones diferenciales parciales con k funciones desconocidas $u_1(x, x_0), \dots, u_k(x, x_0)$, de la forma:

$$\frac{\partial^m u_i}{\partial x_0^m} = F_i \left(x_0, x, u, \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n} u}{\partial x_0^{m_0} \dots \partial x_n^{m_n}} \right),$$

donde $i = 1, \dots, k$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_k)$, $\sum m_j \leq m$, $m_0 < m$ y $m \geq 1$. Entonces, el problema de Cauchy dado por las siguientes condiciones iniciales:

$$\frac{\partial^j u_i}{\partial x_0^j} \Big|_{\sigma} = \Phi_{ij}(x), \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

donde $\sigma = \{(x, x_0) : x_0 = 0, x \in \Omega_0\}$, tiene una solución analítica única $u(x, x_0)$ en algún dominio $\Omega \subset \Omega_0 \times \{x_0\}$, si F_i y Φ_{ij} son funciones analíticas.

3.2. El teorema principal

Con lo mencionado anteriormente, es posible presentar el resultado principal de este capítulo. Sin embargo, es importante mencionar que el resultado que se menciona a continuación se trata de un problema de conductividad inverso y no de tomografía de capacitancias, que es el problema estudiado. El problema de conductividad inverso es más sencillo que el problema considerado en la tesis, debido a que se supone que en las regiones se tienen elementos conductores y no es necesario construir funciones auxiliares para su solución. Para poder utilizar este resultado en nuestro problema es necesario conocer teoría que no se considera en el presente trabajo.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado convexo con frontera conexa. Sean D_1, D_2 dos poliedros compactamente soportados en Ω , para $i = 1, 2$ considere

$$\begin{cases} L_{\gamma_i} u_i = \operatorname{div}((1 + \chi_{D_i}(x)) \nabla u_i) = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde también se cumple $\int_{\Omega} u_i dx = 0$, pues u_i pertenece al espacio ortogonal a las constantes, ya que $\langle u_i, cte \rangle = \int_{\Omega} u_i \cdot cte dx = cte \int_{\Omega} u_i dx = 0$, esto es; el producto interno es cero.

Podemos fijar una función g en $L^{\infty}(\partial\Omega)$, tal que no exista función armónica u en cualquier vecindad \mathcal{V} de cualquier punto de $\partial\Omega$ con $g = \nabla u \cdot n$ en $\mathcal{V} \cap \partial\Omega$. Por ejemplo, tomando una sucesión densa de puntos $\{p_k\}$ en $\partial\Omega$ y considerando la función

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x - p_k| - c, \quad (3.5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y c se escoge de tal forma que $\int_{\partial D} g d\sigma = 0$. La función g es de Lipschitz pero no de clase C^1 en cualquier bola de la frontera $B(p) \cap \partial\Omega$. Si u es armónica en $B(p)$, entonces $\nabla u \cdot n$ es $C^1(B(p)) \cap \partial\Omega$, así que no es posible tener $\nabla u \cdot n = g$ ahí.

Teorema 3.2.1. Sean D_1, D_2 polígonos convexos en \mathbb{R}^2 . Asuma que u_i , $i = 1, 2$, son las soluciones al problema de Neumann (3.4) con g como en (3.5). Si $u_1 = u_2$ en $\partial\Omega$, entonces $D_1 = D_2$.

Demostración.

Si D_1 y D_2 tienen los mismos vértices no hay nada que probar. Supongamos que P es un vértice de D_1 pero no de D_2 . También, por simplicidad supongamos que P está en el origen de \mathbb{R}^2 y que en coordenadas polares, si B_{r_0} es una bola centrada en el origen de radio r_0 se tiene

$$B_{r_0} \cap D_1 = \{(r, \theta) : 0 < r < r_0, 0 < \theta < \theta_0\},$$

y

$$B_{r_0} \cap D_2 = \emptyset.$$

Se puede apreciar el argumento anterior en la Figura 3.2.

Note que $0 < \theta_0 < \pi$ porque D_1 es convexo. Dado que $u_1 = u_2$ en $\partial\Omega$ y $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = g$ en $\partial\Omega$, por la propiedad de continuación armónica de funciones se sigue que $u_1 = u_2$ en la componente conexa de $\Omega - (D_1 \cup D_2)$, cerca de la frontera de $\partial\Omega$. Dado que u_2 es armónica en B_{r_0} , $u_1|_{B_{r_0} - \overline{D_1}}$ tiene extensión armónica a la bola completa B_{r_0} (de hecho, esta extensión es u_2). Llamemos u_1^{ext} a esta extensión armónica, en la Figura 3.2 podemos apreciar las regiones D_1 y D_2 con distintos vértices y donde u_1^{ext} coincide con u_2 .

Del Lema 3.2.1, en coordenadas polares, tenemos

$$u_1^{ext}(r, \theta) = u_1^{ext}(r, \theta \pm 2\theta_0), \quad (3.6)$$

para todo $(r, \theta) \in B_\epsilon$, para algún ϵ suficientemente pequeño.

Denotemos por \tilde{u}_1 la rotación de u_1 por el ángulo $2\theta_0$, esto es,

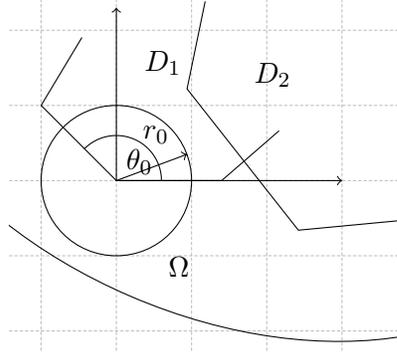


Figura 3.2: Regiones D_1 y D_2 con distintos vértices y donde $B_{r_0} \cap D_2 = \emptyset$

$$\tilde{u}_1(r, \theta) \equiv u_1(r, \theta - 2\theta_0),$$

y denotemos por $\tilde{\Omega}, \tilde{D}_1$ la rotación de los correspondientes dominios, esto es,

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta + 2\theta_0) : (r, \theta) \in \Omega\},$$

$$\tilde{D}_1 = \{(r, \theta + 2\theta_0) : (r, \theta) \in D_1\}.$$

Dado que

$$u_1(r, \theta) = u_1^{ext}(r, \theta) \text{ para } (r, \theta) \in B_\epsilon - D_1,$$

$$\tilde{u}_1(r, \theta) = u_1^{ext}(r, \theta - 2\theta_0) \text{ para } (r, \theta) \in B_\epsilon - \tilde{D}_1,$$

de (3.6) tenemos

$$u_1 = \tilde{u}_1 \text{ en } (B_{\epsilon-D_1}) \cap (B_\epsilon - \tilde{D}_1).$$

Por unicidad de la continuación armónica, tenemos que $u_1 = \tilde{u}_1$ en todas las componentes abiertas conexas cerca al origen de $(\Omega \cap \tilde{\Omega}) - (D_1 \cup \tilde{D}_1)$. La Figura 3.3 muestra la región D_1 y su rotación \tilde{D}_1 , las líneas más gruesas representan las rotaciones mencionadas anteriormente.

Dado que $\theta_0 < \pi$, existen θ_1 y $\delta > 0$ tal que si $\theta_1 < \phi < \theta_1 + \delta$, entonces el rayo

$$T_\phi = \{(r, \theta) : r > 0, \theta = \phi\},$$

no interseca a $D_1 \cup \tilde{D}_1$. Sean Q_ϕ y \tilde{Q}_ϕ los puntos en $\partial\Omega$ y $\partial\tilde{\Omega}$ respectivamente, tales que

$$(0, Q_\phi) \subset \Omega \cap T_\phi \text{ y } (0, \tilde{Q}_\phi) \subset \tilde{\Omega} \cap T_\phi,$$

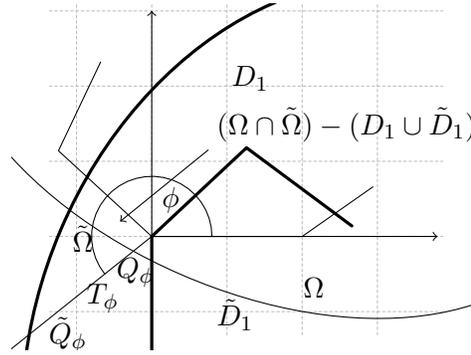


Figura 3.3: Regiones \tilde{D}_1 y D_1 , el ángulo ϕ y el rayo T_ϕ .

donde $(0, Q_\phi)$ denota el segmento lineal abierto que une el origen con Q_ϕ y $(0, \tilde{Q}_\phi)$ el segmento lineal que une el origen con \tilde{Q}_ϕ . Probaremos que

$$Q_\phi = \tilde{Q}_\phi \text{ para todo } \theta_1 < \phi < \theta_1 + \delta.$$

En caso contrario, podemos asumir que $(0, Q_\phi) \subset (0, \tilde{Q}_\phi)$. Dado que u_i y \tilde{u}_i coinciden en $(0, Q_\phi)$ y \tilde{u}_i es armónica en una vecindad de Q_ϕ , surge una contradicción porque u_i no puede ser armónicamente extendida a través de cualquier vecindad del punto Q_ϕ , por la definición de g , esto se debe a la forma como se construye la función g . Esto prueba que si

$$\mathcal{J} = \bigcup_{\theta_1 < \phi < \theta_1 + \delta} (0, Q_\phi),$$

entonces

$$\Omega \cap \mathcal{J} = \tilde{\Omega} \cap \mathcal{J} = \mathcal{J} \text{ y } \bigcup_{\theta_1 < \phi < \theta_1 + \delta} \{Q_\phi\} \subset \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega}.$$

Ahora probaremos que $\partial\Omega = \partial\tilde{\Omega}$. Sea $P_0 \in \bigcup_{\theta_1 < \phi < \theta_1 + \delta} \{Q_\phi\}$, y sea $d = \frac{1}{2} \text{dist}(D_1, \partial\Omega)$. Definiendo

$$s(P_0) = \sup_{0 \leq r \leq d} \{r : B_r(P_0) \text{ tiene la propiedad de que para todo } P \in B_r(P_0) \cap \partial\Omega$$

existe una bola $B_\epsilon(P)$ tal que $B_\epsilon(P) = B_\epsilon(P) \cap \tilde{\Omega}$ y $B_\epsilon(P) \cap \Omega^c = B_\epsilon(P) \cap \tilde{\Omega}^c\}$.

Aseguramos que $s(P_0) = d$. Supongamos que $s < d$, podemos elegir $\bar{P} \in \partial B_s(P_0) \cap \partial\Omega$. Claramente $\bar{P} \in \partial\Omega \cap \partial\bar{\Omega}$ y $\bar{P} \in \partial(\Omega \cup \bar{\Omega})$, dado que Ω es conexo. Luego, podemos escoger una pequeña bola $B(\bar{P})$ tal que existen funciones Ψ y $\tilde{\Psi}$, tales que

$$B(\bar{P}) \cap \Omega = \{(x, y) : y < \Psi(x)\} \cap B(\bar{P}),$$

y

$$B(\bar{P}) \cap \tilde{\Omega} = \{(x, y) : y < \tilde{\Psi}(x)\} \cap B(\bar{P}).$$

De la unicidad de la extensión armónica, se sigue que:

$$u_1 = \tilde{u}_1 \text{ en } B_s(P_0) \cap \Omega \cap \tilde{\Omega}.$$

Así,

$$u_1 = \tilde{u}_1 \text{ en } B(\bar{P}) \cap \Omega \cap \tilde{\Omega}.$$

Sea $\bar{P} = (x_0, \Psi(x_0))$. Existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$(x, \Psi(x)), (x, \tilde{\Psi}(x)) \in B(\bar{P}) \text{ siempre que } |x - x_0| < \epsilon_1.$$

Mostraremos que $B_{\epsilon_1}(\bar{P}) \cap \Omega = B_{\epsilon_1}(\bar{P}) \cap \bar{\Omega}$, para ello es suficiente con mostrar que $\psi(x) = \tilde{\psi}(x)$ para $|x - x_0| < \epsilon_1$.

En caso contrario, existe x con $|x - x_0| < \epsilon_1$ tal que $\Psi(x) < \tilde{\Psi}(x)$ o $\tilde{\Psi}(x) < \Psi(x)$. Supongamos que $\Psi(x) < \tilde{\Psi}(x)$, entonces $(x, \Psi(x)) \in \tilde{\Omega} \cap B(\bar{P})$, y así existe una pequeña bola $B_{\epsilon_2}(Q)$, donde $Q = (x, \Psi(x))$ y tal que $B_{\epsilon_2}(Q) \subset B(\bar{P}) \cap \tilde{\Omega}$. Dado que

$$u_1 = \tilde{u}_1 \text{ en } B_{\epsilon_2}(Q) \cap \Omega \subset B(\bar{P}) \cap \Omega \cap \tilde{\Omega},$$

y \tilde{u}_1 es armónica en $B_{\epsilon_2}(Q)$, u_1 tiene una extensión armónica a $B_{\epsilon_2}(Q)$, lo cual no es posible por la definición de g . Esto prueba que $s(P_0) = d$.

Ahora escogemos $P_1 \in \partial\Omega \cap \partial B_{d/2}(P_0)$. Luego, con los mismos argumentos mostrados anteriormente se muestra que $s(P_1) = d$, y repitiendo este proceso concluimos que $\partial\Omega = \partial\tilde{\Omega}$

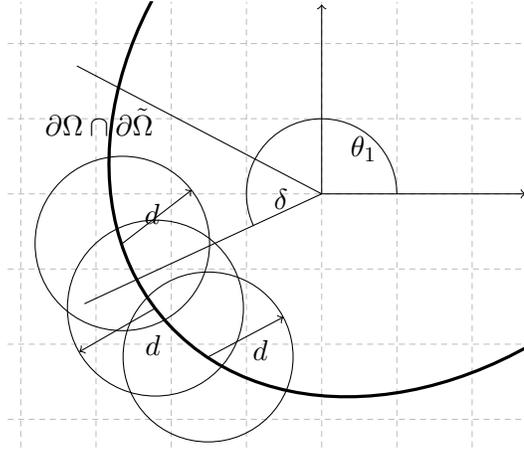


Figura 3.4: Cubrimiento de las fronteras.

o $\Omega = \tilde{\Omega}$. Así, u_1 tiene una extensión armónica a $(\Omega - \overline{D_1}) \cup (\Omega - \overline{\tilde{D}_1})$. En la Figura 3.4 se ilustra el proceso, se muestra como con un número finito de bolas de radio d se llega a cubrir por completo parte de las fronteras donde estas coinciden, así, llegamos a la conclusión de que las fronteras son las mismas.

Podemos repetir los mismos argumentos que antes para la k -ésima rotación de u_1

$$\tilde{u}_1^k(r, \theta) = u_1(r, \theta - 2k\theta_0),$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ de tal forma que dos rotaciones consecutivas \tilde{u}_1^k y \tilde{u}_1^{k+1} jueguen el papel de u_1 y \tilde{u}_1 respectivamente, concluyendo finalmente que u_1 tiene una extensión armónica a

$$(\Omega - \overline{D_1}) \cup (\Omega - \overline{\tilde{D}_1}) \cup \dots \cup (\Omega - \overline{\tilde{D}_1^k}),$$

donde $\tilde{D}_1^k = \{(r, \theta + 2k\theta_0) : (r, \theta) \in D_1\}$.

Aseguramos que este último conjunto es $\Omega - \{0\}$ para algún k finito. Dado que $2\theta_0 < 2\pi$, existe un entero positivo k_0 tal que

$$(2k_0 + 1)\theta_0 < 2k_0\pi \text{ y } (2k + 1)\theta_0 \geq 2k\pi \text{ para } k = 0, 1, \dots, k_0 - 1. \quad (3.7)$$

Mostraremos que

$$\Omega = (\Omega - \overline{D_1}) \cup (\Omega - \overline{\tilde{D}_1}) \cup \dots \cup (\Omega - \overline{\tilde{D}_1^{k_0}}) \cup \{0\}. \quad (3.8)$$

En efecto, en caso contrario, existiría $(r, \theta) \in \Omega$ tal que

$$(r, \theta) \in \overline{D_1} \cap \overline{\tilde{D}_1} \cap \overline{\tilde{D}_1^{k_0}},$$

además, de (3.7) podemos obtener

$$0 \leq (2k_0 - 1)\theta_0 - 2(k_0 - 1)\pi < (2k_0 + 1)\theta_0 - 2(k_0 - 1)\pi < 2\pi, \quad (3.9)$$

donde la primera desigualdad viene de la segunda afirmación en (3.7) haciendo $k = k_0 - 1$ y la última desigualdad viene de la primera afirmación en (3.7).

También, podemos reescribir la primera desigualdad en (3.9) como

$$\theta_0 \leq 2k_0\theta_0 - 2(k_0 - 1)\pi. \quad (3.10)$$

Si $(r, \theta) \in \overline{\tilde{D}_1^{k_0}}$, entonces

$$2k_0\theta_0 - 2(k_0 - 1)\pi \leq \theta \leq (2k_0 + 1)\theta_0 - 2(k_0 - 1)\pi. \quad (3.11)$$

Esto implica, usando (3.9), que $\theta \geq \theta_0$. Pero $(r, \theta) \in \overline{D_1}$ implica $\theta \leq \theta_0$, luego $\theta = \theta_0$. Pero entonces (r, θ_0) no puede pertenecer a $\overline{\tilde{D}_1}$, lo cual es una contradicción. Esto prueba la identidad (3.8).

Así, hemos extendido $u_1|_{\Omega - \overline{D_1}}$ armónicamente a $\Omega - \{0\}$. Pero se había probado anteriormente que $u_1|_{\Omega - \overline{D_1}}$ tiene una extensión armónica a $B_\epsilon(0)$, luego $u_1|_{\Omega - \overline{D_1}}$ tiene extensión armónica a Ω . Si v denota esta continuación. Por la unicidad en el problema de Dirichlet, $v = u_1$ en D_1 . Luego, las condiciones de transmisión (3.3) implican $\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0$ en ∂D_1 , así u_1 es constante en Ω . De donde $g \equiv 0$, lo cual es una contradicción.

Con el Lema 3.2.1 y la idea de la demostración en el Teorema 3.2.1 podemos obtener el siguiente resultado en \mathbb{R}^n .

Teorema 3.2.2. *Sea $n \geq 2$. Asuma que D_1 y D_2 son poliedros convexos. Bajo las condiciones del Teorema 3.2.1, $D_1 = D_2$.*

A continuación se presenta la prueba del lema usado para la demostración del teorema principal, cuyas ideas fueron presentadas por Friedman e Isakov (véase referencia [5]).

Lema 3.2.1. *Sea $n \geq 2$. Asuma que u es la solución de (3.4). Sea γ una arista de D con ángulo θ_1 . Supongamos que existe $Q \in \gamma$ tal que $B_{r_0}(Q) \subset \Omega$ para algún $r_0 > 0$ y además $u|_{B_{r_0}(Q)-\bar{D}}$ tiene continuación armónica a la bola entera $B_{r_0}(Q)$. Entonces existe una rotación $R_{2\theta_1}$ en el plano bidimensional \mathbb{R}^2 perpendicular a γ en Q tal que $u(x) = u(R_{2\theta_1}(x))$ para todo $x \in B_\epsilon$ y algún $\epsilon < r_0$.*

Demostración.

Daremos una prueba para $n \geq 3$, con los cambios obvios para $n = 2$. Podemos asumir que Q está en el origen de \mathbb{R}^n , γ es el segmento de dimensión $(n - 2)$

$$\gamma = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = 0\} \cap B_1(0),$$

obtenida al intersectar F_1 y F_2 , dos caras del polígono, \mathbb{R}^2 es el plano bidimensional $x_3 = \dots = x_n = 0$, en coordenadas polares tenemos

$$E \cap D \cap B_{r_0}(0) = \{(r, \theta) : 0 < r < r_0, 0 < \theta < \theta_1\}.$$

Observemos primero que si $u|_{B_{r_0}-\bar{D}}$ tiene extensión armónica a la bola $B_{r_0}(0)$, entonces existe $\epsilon > 0$ con $\epsilon < r_0$ tal que $u|_{B_\epsilon \cap D}$ tiene continuación armónica a la bola completa $B_\epsilon(0)$. Para ver esto, denotemos por u^{ext} la extensión armónica de $u|_{B_{r_0}-\bar{D}}$ a B_{r_0} , y consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } B_\epsilon(0) \\ w = u, \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^{ext}}{\partial n} & \text{en } \pi_1 \cap B_\epsilon(0), \end{cases} \quad (3.12)$$

donde π_1 es el plano de dimensión $(n - 1)$ que contiene a la cara F_1 . Dado que u^{ext} es analítica en $B_\epsilon(0)$, por el teorema de Cauchy-Kovalevskaya existe una única solución analítica de (3.12) en $B_\epsilon(0)$ para ϵ suficientemente pequeño. Pero $u|_{B_\epsilon \cap D}$ satisface la misma ecuación en $D \cap B_\epsilon(0)$ con la misma información de Cauchy en $F_1 \cap B_\epsilon(0)$. Luego, $w = u$ en $B_\epsilon \cap D$ por la unicidad de la extensión armónica. Denotando $u^{int} = w$ en B_ϵ .

Consideremos ahora

$$v_1 = u^{ext} - u^{int}, \quad v_2 = u^{ext} - 2u^{int}.$$

Por la continuidad de la solución a través de las caras y las relaciones (3.3) en ∂D , tenemos

$$v_1 = 0 \text{ y } \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \text{ para } 0 < r < \tilde{\epsilon}, \theta = 0, \theta_1. \quad (3.13)$$

Dado que v_1, v_2 son armónicas en $B_{\tilde{\epsilon}}(0)$, podemos escribir para cada $x' = (x_3, \dots, x_n) \in R^{n-2}$

$$v_1(r, \theta, x') = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^1(x') \cos(k\theta) + b_k^1(x') \sin(k\theta)) r^k,$$

$$v_2(r, \theta, x') = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^2(x') \cos(k\theta) + b_k^2(x') \sin(k\theta)) r^k.$$

de (3.13), obtenemos

$$a_k^1(x') = 0, \quad b_k^1 \sin(k\theta_1) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots,$$

$$a_k^2(x') \sin(k\theta_1) = 0, \quad b_k^2(x') = 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots,$$

de donde, $v_i(r, \theta + 2\theta_1, x') = v_i(r, \theta, x')$ para $i = 1, 2$. Luego, se cumple lo mismo para u^{ext} y u^{int} , y la prueba termina.

Hay que señalar que si D_1 y D_2 en el teorema (3.2.1) son poliedros generales, la prueba anterior muestra que $\text{convexhull}(D_1) = \text{convexhull}(D_2)$. Aquí, convexhull denota la cubierta convexa de un poliedro, la cual se define como el poliedro convexo más pequeño que lo contiene.

3.3. Algunos métodos de solución

Antes de presentar algunos métodos que se pueden utilizar para la solución del problema inverso, es importante mencionar que este problema es mal planteado, por lo que cualquier intento para solucionarlo debe considerar este factor. También es importante mencionar que el mal planteamiento del problema es inherente debido a que se trata de un problema inverso, pues, no se ha probado que el problema que se considera en este trabajo sea un problema mal planteado.

En la sección anterior se ha dado un resultado de unicidad, pero no de existencia. En esta sección se describirán algunos métodos para resolver el problema inverso y se mencionaran las dificultades que tienen por ser un problema mal planteado.

Como se había visto, el problema inverso consiste en recuperar la distribución de las fases del fluido en la sección transversal del tubo utilizando sólo un número finito de mediciones (capacitancias) entre los electrodos.

Al obtener la distribución de permitividades es posible hallar la distribución de las fases en el tubo. Para intentar resolver este problema debemos hallar una relación entre las mediciones que tenemos y la distribución de la permitividad, un resultado conocido de la física llamada ley de Gauss nos muestra que la relación entre la capacitancia C , la distribución de permitividad en la sección transversal del tubo $\varepsilon(x, y)$ y el potencial generado V se puede expresar de la siguiente manera:

$$C(\varepsilon) = -\frac{1}{V} \int_S \varepsilon(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial n} ds \quad (3.14)$$

donde S es la superficie del electrodo y n el vector normal al círculo de radio R_2 .

Cuando se resolvió el problema directo se encontró una expresión para las capacitancias mutuas en el i -ésimo (de referencia) y j -ésimo electrodo usando la relación (3.14) y los desarrollos en series de las funciones de potencial $V_1^{(i)}$ y $V_2^{(i)}$:

$$C_{ij} = \frac{K \frac{\varepsilon_3}{N} \left(\frac{2\pi}{N} - \theta_0 \right)}{\log \frac{R_2}{R_3}} - \frac{8K}{\pi \theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n}{n^2} \sin \frac{n\theta_0}{2} \sin \frac{n\pi}{N} \sin n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\theta_0}{2} \right) \cos \frac{2n(i-j)\pi}{N},$$

donde

$$\Phi_n = \varepsilon_2 \frac{R_1^{-2n} + R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} - R_1^{2n} R_2^{-2n} \right] - R_2^{-2n} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}{R_1^{-2n} + R_0^{-2n} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left[\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + R_1^{2n} R_2^{-2n} \right] + R_2^{-2n} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} + \varepsilon_3 \frac{R_3^{2n} - R_2^{2n}}{R_3^{2n} + R_2^{2n}}.$$

3.3.1. Mínimos cuadrados

Una posibilidad para resolver el problema inverso es encontrar la distribución de permitividad resolviendo el problema clásico de mínimos cuadrados:

$$\min_{\varepsilon} f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \|C(\varepsilon) - C_{med}\|^2. \quad (3.15)$$

donde $C(\varepsilon)$ es la capacitancia calculada para una distribución de permitividad ε y C_{med} son las mediciones realizadas con los electrodos.

Sin embargo, la solución del problema (3.15) tiene las siguientes dificultades:

- La función objetivo puede ser no lineal.
- El número de mediciones de capacitancias independientes $\frac{N(N-1)}{2}$ es muy pequeño para la discretización de la distribución de permitividad, lo que puede ocasionar que la solución no sea única.
- Cualquier método para resolver el problema será inestable a los errores de medición por tratarse de un problema mal planteado.

Dadas las suposiciones sobre el problema se tiene que $C(\varepsilon) = C(R_0, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$, y el problema queda:

$$\min_{R_0, \varepsilon_0, \varepsilon_1} f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \|C(R_0, \varepsilon_0, \varepsilon_1) - C_{med}\|^2. \quad (3.16)$$

Así, la solución del problema (3.15) consiste en encontrar R_0, ε_0 y ε_1 que minimizen:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_j (C_{ij} - C_{med})^2, \quad (3.17)$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ (electrodo de referencia) y tomar la mejor solución.

Al tratar de minimizar para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ se puede intentar resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \sum_j (C_{ij} - C_{med}) \frac{\partial C_{ij}}{\partial R_0} &= 0, \\ \sum_j (C_{ij} - C_{med}) \frac{\partial C_{ij}}{\partial \varepsilon_0} &= 0, \\ \sum_j (C_{ij} - C_{med}) \frac{\partial C_{ij}}{\partial \varepsilon_1} &= 0. \end{aligned}$$

que resulta ser una tarea muy complicada.

3.3.2. Métodos numéricos

Otra forma de resolver (3.17) es usando métodos numéricos de minimización para problemas no lineales, como el método de Gauss-Newton y otros. Sin embargo, dado que el problema es mal planteado, estos métodos suelen ser inestables, lo que puede ocasionar que las soluciones que se encuentran pueden estar muy lejos de la solución real.

Para que las soluciones que se encuentran con estos métodos sean suficientemente buenas se deben usar métodos de regularización. Una forma de hacer esto es transformar el problema de la siguiente manera:

$$\min_{\varepsilon} f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \|C(\varepsilon) - C_{med}\|^2 + \alpha \|L(\varepsilon)\|^2.$$

El problema aquí es encontrar el parámetro de regularización α . Sin embargo, este parámetro varia considerablemente de un régimen de fluido a otro, dado que en una tubería no se puede asegurar que este régimen no varíe, el parámetro α debe calcularse en cada iteración, lo cuál resulta ser muy costoso. Cabe mencionar que para intentar resolver el problema con este método es necesario conocer teoría de regularización de Tikhonov y espacios de Sobolev, la cual no se estudio con profundidad debido a que está fuera del alcance de este trabajo.

3.3.3. Otro método

En [2] se propone otro método para resolver el problema inverso. Primero se encuentran V_1 y V_2 en series de Fourier usando las condiciones de contorno. Una vez que se tienen expresados V_1 y V_2 en series se usan métodos numéricos para obtener de forma aproximada la distribución de permitividad ε en el interior del tubo. Con esta finalidad desarrollan la siguiente relación:

$$\varepsilon_1^{(i)} |\nabla V_1^{(i)}| = \frac{\varepsilon_2}{\pi} \left| \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) \nabla_z (\ln |z - \xi|) ds_\xi \right|,$$

que puede ser obtenida con la fórmula de representación de Green [1]. Este proceso se realiza fijando el i -ésimo electrodo y al hacer variar este electrodo se elige la solución que mejor aproxime a las mediciones de capacitancias C_{med} .

Capítulo 4

Conclusiones

Las conclusiones más importantes de este trabajo se listan a continuación:

- El presente trabajo se ha inspirado en un problema actual de mucha importancia, la extracción de petróleo. Además, con su desarrollo se han alcanzado los objetivos del trabajo de esta tesis.
- Para la realización de este trabajo se consultaron algunos artículos y libros relacionados con el tema, en estos se puede apreciar que el problema es, en cierto sentido, nuevo en su estudio, además de prometer muchos temas para su investigación.
- Hay mucho campo de estudio teórico en esta área, por ejemplo, en los problemas inversos y mal planteados se tiene aún mucho por investigar y demostrar matemáticamente.
- Se da una solución explícita al problema directo asociado al problema principal, aquí se puede ver la dificultad del problema ya que a pesar de tener hipótesis que simplifican el problema, la solución sigue siendo complicada.
- Se puede apreciar que el problema inverso es aún mucho más complicado, ya que no solamente se necesita conocer teoría matemática avanzada, sino que las técnicas de solución no son nada sencillas.
- A pesar de no haber dado solución al problema inverso, el presente trabajo ilustra algunos posibles métodos para dar solución a este problema. Además de que se pueden

observar problemas que surgen durante la investigación en este trabajo, los cuales podrían servir como inspiración para trabajos futuros.

Bibliografía

- [1] J. Oliveros A. Fraguera and S. Gómez. A new method for the solution of the inverse problem of electrical capacitance tomography and its application to image reconstruction of multiphase flows. 2005.
- [2] L. Cervantes M. Morín A. Fraguera, J. Oliveros and S. Gómez. Un algoritmo no iterativo para la tomografía de capacitancia eléctrica. *REVISTA MEXICANA DE FÍSICA*, pages 236–242, 2005.
- [3] Jin Keun Seo Bartolomé Barceló, Eugene Fabes. The inverse conductivity problem with one measurement: Uniqueness for convex polyhedra. *American Mathematical Society*, 122(1):183–189, September 1994.
- [4] Eugene Butkov. *Mathematical physics*. Addison-Wesley Pub. Co., January 1968.
- [5] A. Friedman e V. Isakov. On the uniqueness in the inverse conductivity problem with one measurement. *Indiana Univ. Math.*, 38, 1989.
- [6] JC Gamio, C. Ortiz-Alemán, and R. Martin. Electrical capacitance tomography two-phase oil-gas pipe flow imaging by the linear back-projection algorithm. *Geofísica Internacional*, 44:265–273, 2005.
- [7] Bahadır Kursat Gunturk and Xin Li. *Image Restoration: Fundamentals and Advances*. CRC Press, September 2012.
- [8] Andreas Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer, April 2011.

- [9] Silvia Reyes Mora. *Construcción de un problema sintético de tomografía de capacitancias para un flujo dieléctrico bifásico anular en un ducto*. Tesis de licenciatura, 2004.
- [10] A. I. Nachman. Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. *Ann of Math*, 143:71–96, 1996.
- [11] J. Mueller y D. Isaacson S. Siltanen. An implementation of the reconstruction algorithm of a nachman for the 2d inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, 16:681–699, 2000.