



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**APROXIMACIÓN DE LAS NUEVAS SOLUCIONES DE LAS EDP'S DE
SEGUNDO ORDEN POR EL MÉTODO DE DESCOMPOSICION DE
ADOMIAN**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

JATZIRY AMBROSIO DELGADO

DIRECTOR:

JUAN CARLOS MENDOZA SANTOS

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, ABRIL DE 2012

**Aproximación de las nuevas soluciones
de las EDP's de segundo orden por el
método de Descomposición de Adomian.**

Jatziry Ambrosio Delgado

Abril 2012

A mis padres Lidia y José
A mis hermanos Tere, Liz, Lalo y Rosa
A mis sobrinos Susa, Ita, Juan, Miky y Hannia
J. A. D

Agradecimientos

Esta tesis representa un parteaguas entre una etapa muy enriquecedora y el camino que el tiempo obliga. En toda la experiencia universitaria y la conclusión del trabajo de tesis, han habido personas que merecen las gracias porque sin su valiosa aportación no hubiera sido posible este trabajo y también hay quienes las merecen por haber plasmado su huella en mi camino y que para no olvidar alguna de estas personas no haré mención de sus nombres. A todas ellas les doy mis más sinceros agradecimientos.

Contenido

Introducción	VII
1 Introducción a las EDP's	1
1.1 EDP's de primer orden	1
1.1.1 Clasificación de las EDP's de primer orden	1
1.1.2 Construcción de la ecuación de primer orden	2
1.1.3 El método de las características y solución general	3
1.1.4 Formas canónicas de las EDP's de primer orden	5
1.1.5 Método de separación de variables	7
1.2 EDP's de segundo orden	8
1.2.1 Ecuaciones de segundo orden con dos variables independientes	8
1.2.2 Formas canónicas	10
1.2.3 Ecuaciones con coeficientes constantes	13
1.2.4 Soluciones de la ecuación de Euler	14
2 Método de Harper y el Método de Stephenson- Radmore	23
2.1 Forma general del Método de Harper	23
2.2 El método de Stephenson- Radmore	30
2.2.1 Ecuaciones del tipo hiperbólico	33
2.2.2 Ecuaciones del tipo parabólico.	37
2.2.3 Ecuaciones del tipo elíptico.	41
3 El método de Descomposición de Adomian	47
3.1 El método de descomposición de Adomian	47
3.2 Evaluación del operador inverso L^{-1}	48
3.2.1 Condiciones de frontera homogéneas	49

3.2.2	Condiciones de frontera sobre el intervalo $[0, a]$	50
3.2.3	Condiciones iniciales	51
3.2.4	Condiciones iniciales diferentes de cero	52
3.2.5	Condiciones de frontera no homogéneas	53
3.2.6	Condiciones mixtas	54
3.3	Solución de la ecuación diferencial	55
3.4	Convergencia del método de Adomian	56
3.5	Análisis del método Homotópico	57
3.6	Derivación del método de descomposición de Adomian	59
4	Métodos de Aproximación de Soluciones	63
4.1	Método de diferencias finitas	63
4.1.1	Esquemas para EDP's	66
4.2	Método de algoritmos genéticos	68
4.2.1	Estructura de un algoritmo genético	70
4.2.2	Reemplazo de la población y condición de paro	77
4.2.3	Diseño del algoritmo genético para la solución de EDP's de segundo orden	78
5	Aplicación del Método de Harper para la Ecuación de Euler	83
5.1	Caso I	83
5.1.1	Caso hiperbólico	87
5.1.2	Caso parabólico	92
5.1.3	Caso elíptico	94
5.2	Caso II	98
5.3	Caso III	99
5.4	Caso IV	100
5.5	Caso V	100
6	Resultados Analíticos y Numéricos	101
6.1	Ecuación hiperbólica	101
6.2	Ecuación parabólica	108
6.3	Ecuación elíptica	115

Conclusiones	119
Apéndice A	121
Apéndice B	123
Apéndice C	125

Introducción

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), es una materia que forma parte esencial en la formación de ingenieros y matemáticos y últimamente, no han existido avances en la investigación de nuevos métodos de solución para las EDP's de segundo orden. El método más común de resolver una EDP de segundo orden consiste en transformar dicha ecuación a una EDP más sencilla, llamada comúnmente forma canónica. Además, de que el cálculo de estas formas canónicas es muy laborioso y tedioso, la principal desventaja de este método, consiste en que la ecuación de la forma canónica en general no puede ser resuelta por los métodos ya conocidos, excepto para aquellas formas canónicas, a partir de las cuales se obtienen las ecuaciones de onda, calor y de Laplace.

En 1990 Stephenson-Radmore [34] crearon un método, el cual permite encontrar soluciones de una EDP de segundo orden sin calcular su forma canónica, pero dicho método es difícil de aplicarlo, y solo se aplica para las EDP's de tipo hiperbólico.

Por otro lado, en 1994 J. Harper [21] desarrolla un método, el cual resuelve la ecuación de Black-Scholes en matemáticas financieras, esto permite encontrar nuevas soluciones para las EDP's de tipo parabólico. Este método ha resultado ser efectivo para resolver algunos problemas particulares de valores iniciales y de frontera [27, 29], pero no ha sido aplicado a otro tipo de EDP's.

Cabe mencionar que en el año 2006 J. Biazar y Z. Ayati [9] resuelven una EDP de segundo orden para el caso en que esta sea una EDP del tipo parabólico no lineal y utilizaron el método de descomposición de Adomian para aproximar sus soluciones, haciendo una comparación de sus resultados con el método de diferencias finitas, debido

a que la forma de las soluciones de una EDP de segundo orden nos permite aplicar el método de descomposición de Adomian.

En años recientes se han estado utilizando métodos numéricos para la solución de las EDP's, los cuales proporcionan frecuentemente información útil acerca del comportamiento de la solución. Uno de los métodos más conocidos es el de diferencias finitas y otro es el de algoritmos genéticos, éste último con muy buenos resultados en la aproximación de las soluciones.

La presenta tesis está organizada en seis capítulos distribuidos como sigue:

En el primer capítulo se da una introducción de las EDP's de primer y segundo orden, considerando su clasificación y proporcionando las soluciones generales para dichas ecuaciones. Además, se introduce las soluciones para el caso de la EDP de Euler cuando sus coeficientes son constantes.

En el segundo capítulo se presenta el método propuesto por J. F. Harper [21] y el método de Sthepenson-Radmore [34], el primero de ellos nos conducirá a una ecuación ya conocida y el segundo se propondrá una nueva solución general de una EDP para el caso cuando ésta sea del tipo hiperbólico, parabólico y elíptico, la cual estará en términos de funciones que son soluciones de alguna EDP conocida.

En el tercer capítulo se presenta el método de descomposición de Adomian propuesto por G. Adomian [3, 4, 5, 6], con la finalidad de resolver de forma analítica e iterativa la EDP de Euler de tipo hiperbólico, parabólico y elíptico.

Para el cuarto capítulo, se expondrán dos métodos numéricos, uno de ellos es el método de diferencias finitas y el segundo, el de algoritmos genéticos. Las implementaciones numéricas de los métodos de este capítulo es llevada a cabo en MATLAB. No obstante, los códigos no son dados explícitamente en este trabajo de tesis.

Dedicamos el quinto capítulo para presentar una aplicación del método de Harper a la ecuación de Euler, el cual nos ha permitido dar un **nuevo método** para resolver la EDP de Euler con coeficientes constantes del tipo hiperbólico, parabólico y elíptico.

Una vez obtenidas las nuevas soluciones de la EDP de segundo orden en el caso en que los coeficientes son constantes, en el sexto capítulo presentamos las comparaciones

de los dos métodos de aproximación (diferencias finitas y algoritmos genéticos) y de los resultados analíticos obtenidos en los capítulos anteriores, haciendo comparaciones entre los diferentes métodos que se describen, con la finalidad de demostrar que estas soluciones son equivalentes a las soluciones que se obtienen transformando la ecuación de Euler a su forma canónica.

Finalmente, en el apéndice, se proporciona información básica para la comprensión de términos que se ocupan en este documento, y que puede ser de gran ayuda para otras lecturas. Además, en el anexo se agregan los pseudocodigos que se emplearon para la aproximación numérica de los ejemplos resueltos a lo largo de esta tesis.

Capítulo 1

Introducción a las EDP's

Las EDP's son de gran interés a causa de su conexión con los fenómenos naturales del mundo. Los fenómenos más interesantes implican cambios y se pueden describir por medio de la construcción de modelos matemáticos, los cuales se han destacado como uno de los aspectos más importantes en el desarrollo teórico en las diferentes ramas de la ciencia.

A menudo estos modelos implican una ecuación en la que una función y sus derivadas desempeñan papeles decisivos. Tales ecuaciones son llamadas ecuaciones diferenciales parciales, las cuales surgen en relación con varios problemas físicos y geométricos, cuando las funciones que intervienen dependen de dos o más variables independientes.

El propósito de este capítulo introductorio es presentar las EDP's de primer y segundo orden, considerando su clasificación y sus soluciones generales. Además, se introducen las soluciones para el caso de la EDP de Euler.

1.1. EDP's de primer orden

1.1.1. Clasificación de las EDP's de primer orden

En general, las EDP's de primer orden de dos variables independientes x y y son de la forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (x, y) \in C^1(R) \quad (1.1)$$

donde F es una función arbitraria, y $u = u(x, y)$ es una función desconocida con variables independientes x y y . De manera similar, la forma general de las EDP's de primer grado con tres variables independientes x, y, z puede escribirse como:

$$F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0.$$

La ecuación (1.1) es una EDP casi-lineal si ésta es lineal en las primeras derivadas parciales de la función desconocida $u(x, y)$. Luego, la ecuación casi-lineal es de la

siguiente forma

$$Au_x + Bu_y = C, \quad (1.2)$$

donde los coeficientes A , B y C son funciones de x , y y u . La ecuación (1.2) es llamada EDP semilineal si A y B son independientes de u .

La ecuación (1.1) se dice que es lineal si F es lineal en la función desconocida u , y sus derivadas u_x y u_y , y los coeficientes de estas variables son funciones solo de las variables independientes x y y . Así, la EDP lineal de primer orden tiene la forma:

$$Au_x + Bu_y + Cu = D, \quad (1.3)$$

donde D es una función dada. Se dice que la ecuación de la forma (1.3) es homogénea si $D = 0$ y no homogénea si $D \neq 0$. La ecuación lineal es un caso particular de la ecuación casi-lineal (1.2) si A , B son independientes de u y C es una función lineal en la variable u . De forma similar, la ecuación semilineal se reduce a una ecuación lineal si C es lineal.

Una ecuación que no es lineal es llamada ecuación no lineal.

1.1.2. Construcción de la ecuación de primer orden

Para la construcción de la ecuación de primer orden [27], consideremos un sistema de ecuaciones que describe una superficie geométrica dada por la ecuación

$$f(x, y, u, a, b) = 0, \quad (1.4)$$

donde a y b son parámetros arbitrarios. Al derivar parcialmente la ecuación (1.4) con respecto de x y y , obtenemos

$$f_x + pf_u = 0, \quad f_y + qf_u = 0, \quad (1.5)$$

donde $p = u_x$ y $q = u_y$. La ecuación (1.5) relaciona los dos parámetros arbitrarios a y b . En general, las ecuaciones (1.4) y (1.5) forman un sistema de ecuaciones, donde estos dos parámetros pueden ser eliminados, obteniendo una ecuación de primer orden de la forma $F(x, y, u, p, q) = 0$.

Una ecuación de la forma (1.4) que contiene dos parámetros arbitrarios es llamada *solución completa* o *integral completa* de la ecuación (1.1).

Es importante notar que las soluciones de la EDP pueden ser representadas por *funciones suaves*.

Mas aún, quizá no todas las soluciones sean suaves. Una solución que no es diferenciable en todas partes es llamada *solución débil*. Las soluciones débiles más comunes, son las que tienen discontinuidades en las primeras derivadas parciales, esto es, la solución puede ser representada por superficies de discontinuidad. Este tipo de discontinuidades es usualmente llamada *onda de choque*.

Una característica importante de las EDP's casi-lineales y no lineales es que sus soluciones pueden desarrollar discontinuidades.

Teorema 1.1.1. Si $\phi = \phi(x, y, u)$ y $\psi = \psi(x, y, u)$ son funciones de x , y , u y si $f(\phi, \psi) = 0$, donde f es una función arbitraria de ϕ y ψ , entonces $u = u(x, y)$ satisface la EDP de primer orden

$$p \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)} + q \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, x)} = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}, \quad (1.6)$$

donde

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}.$$

Demostración.

Derivando parcialmente $f(\phi, \psi) = 0$ con respecto de x y y , respectivamente, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + p \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + q \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + q \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones no triviales para $\frac{\partial f}{\partial \phi}$ y $\frac{\partial f}{\partial \psi}$ pueden ser definidas si el determinante de este sistema de ecuaciones es igual a cero, esto es

$$\begin{vmatrix} \phi_x + p\phi_u & \psi_x + p\psi_u \\ \phi_y + q\phi_u & \psi_y + q\psi_u \end{vmatrix} = 0.$$

Al realizar este determinante, obtenemos la ecuación casi-lineal de primer orden (1.6). ■

1.1.3. El método de las características y solución general

Este método de solución de las ecuaciones casi-lineales [13, 20, 27] se puede describir por el siguiente resultado.

Teorema 1.1.2. La solución general de una EDP casi-lineal de primer orden, de la forma dada por la ecuación (1.2), es

$$f(\phi, \psi) = 0, \quad (1.7)$$

donde f es una función arbitraria de ϕ y ψ , y además $\phi = \text{const.} = c_1$ y $\psi = \text{const.} = c_2$ son soluciones del sistema de ecuaciones características asociadas a la ecuación (1.2)

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C}. \quad (1.8)$$

Las soluciones de las ecuaciones características $\phi = c_1$ y $\psi = c_2 = c_2(c_1) = \psi(c_1)$ son llamadas curvas características de la ecuación (1.2).

Demostración.

Puesto que $\phi = \text{const.} = c_1$ y $\psi = \text{const.} = c_2$ satisfacen las ecuaciones (1.8) y también satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}d\phi &= \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_u du = 0, \\d\psi &= \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_u du = 0.\end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones son equivalentes a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}a\phi_x + b\phi_y + c\phi_u &= 0, \\a\psi_x + b\psi_y + c\psi_u &= 0.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Al resolver las ecuaciones (1.9) para a , b y c , obtenemos que

$$\frac{a}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)}} = \frac{b}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, x)}} = \frac{c}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}}.$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación

$$p \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)} + q \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, x)} = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)},$$

obtenemos que $f(\phi, \psi) = 0$ es una solución de (1.2). ■

En el caso de las EDP's de primer orden, podemos determinar una solución específica del problema de valores iniciales o problema de Cauchy. Una manera simple de seleccionar una función $u(x, y)$ en el conjunto infinito de soluciones de la ecuación (1.2) consiste en prescribir una curva Γ en el espacio tridimensional que debe estar contenida en la superficie integral $z = u(x, y)$. Sea Γ una curva dada paramétricamente mediante $x = f(t)$, $y = g(t)$, $u = h(t)$. Entonces, se elige una solución $u(x, y)$ de la ecuación (1.2), tal que la relación

$$h(t) = u(f(t), g(t)),$$

sea una identidad.

Definición 1.1.1. (Problema de Cauchy). Sea dada la ecuación casi-lineal de primer orden (1.2). Un problema de Cauchy asociado a la ecuación (1.2) consiste en encontrar la función $u(x, y)$ asociada a los datos $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ mediante $x = f(t)$, $y = g(t)$, $u = h(t)$.

El problema de Cauchy determina una única solución de la ecuación (1.2) en una vecindad de Γ , ésta solución $u = u(x, y)$ toma valores $u_0(t)$ en Γ . La curva Γ es llamada curva inicial del problema, y $u_0(t)$ es llamada condición inicial.

Teorema 1.1.3. (Problema de Cauchy para EDP's casi-lineales) Sea la ecuación (1.2) y sea

$$\Gamma: \quad x = x_0(t), \quad y = y_0(t), \quad u = u_0(t),$$

una curva inicial, donde $0 \leq t \leq 1$, con la condición $(x'_0)^2 + (y'_0)^2 \neq 0$ (es decir x' y y' no ambas nulas simultáneamente). Sea, además

$$J = y'_0(t)A(x_0(t), y_0(t), u_0(t)) - x'_0(t)B(x_0(t), y_0(t), u_0(t)),$$

el determinante jacobiano. Se tiene entonces

- a) Si $J \neq 0$ en toda Γ , entonces existe una única solución del problema de Cauchy.
- b) Si $J = 0$ en toda Γ y Γ es una curva característica, entonces existen infinitas soluciones del problema de Cauchy.
- c) Si $J = 0$ en toda Γ y Γ no es una curva característica, entonces no existe solución del problema de Cauchy.

Lo anterior se puede interpretar de la siguiente forma: si el problema de Cauchy tiene solución y $J = 0$ a lo largo de Γ , entonces la curva Γ es ella misma una curva característica de la EDP. Pero si Γ es una curva característica, entonces infinitas superficies integrales pasan a través de Γ . Observemos, que si la función u no es de clase C^1 entonces no es posible deducir, a partir de $J = 0$, que la curva Γ es característica, ya que pueden existir soluciones de la EDP que pasen por una curva no característica Γ y para los cuales $J = 0$.

1.1.4. Formas canónicas de las EDP's de primer orden

A menudo es conveniente transformar la EDP de primer orden mas general (1.3), dada por la ecuación

$$Au_x + Bu_y + Cu = D,$$

a otra mas sencilla llamada forma canónica (o estándar), la cual puede ser mas fácil de integrar al hallar la solución general de (1.3). Introduciendo las siguientes variables, que en algunas ocasiones son llamadas variables canónicas [27],

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \tag{1.10}$$

donde ξ y η son funciones continuas diferenciables, tales que su Jacobiano $J(\xi, \eta) \equiv \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ es diferente de cero en el dominio donde x y y están definidas, las cuales pueden ser determinadas de manera única para el sistema de ecuaciones (1.10). Así, por la regla de la cadena, se sigue que

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

sustituyendo estas derivadas parciales en (1.3) obtenemos la ecuación

$$\bar{A}u_\xi + \bar{B}u_\eta + Cu = D, \tag{1.11}$$

donde, para este caso los coeficientes \bar{A} , \bar{B} están dados por:

$$\bar{A} = A\xi_x + B\xi_y, \quad \bar{B} = A\eta_x + B\eta_y. \quad (1.12)$$

De (1.12) podemos observar que $\bar{B} = 0$ si η es una solución de la ecuación de primer orden

$$A\eta_x + B\eta_y = 0. \quad (1.13)$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones. Puesto que $\eta(x, y)$ satisface la ecuación (1.13), entonces $\eta(x, y) = \text{const.}$, es una curva característica de dicha ecuación.

Por otro lado, tenemos que $\xi(x, y) = \text{const.}$, es también una curva característica de la ecuación (1.3). Así $\bar{A} \neq 0$ en donde $\eta(x, y)$ esta definida y $J(\xi, \eta) \neq 0$, ya que si $\bar{A} = 0$ y $\bar{B} = 0$ los coeficientes de la ecuación (1.12) tienen que ser cero. Esto significa, que si la variable $\eta = \eta(x, y)$ cumple con la ecuación (1.13) entonces podemos elegir a la variable $\xi = \xi(x, y)$ de tal manera que $J(\xi, \eta) \neq 0$, y viceversa. Finalmente, si $\bar{B} = 0$ y $\bar{A} \neq 0$, podemos dividir (1.11) por \bar{A} obteniendo la forma canónica

$$u_\xi + \alpha(\xi, \eta)u = \beta(\xi, \eta), \quad (1.14)$$

donde $\alpha(\xi, \eta) = \frac{C}{\bar{A}}$ y $\beta(\xi, \eta) = \frac{D}{\bar{A}}$.

La ecuación $u_\xi + \alpha(\xi, \eta)u = \beta(\xi, \eta)$ representa una ecuación diferencial ordinaria con variable independiente ξ y a la variable η como un parámetro, la cual puede ser tratada como constante. La ecuación (1.14) es llamada la forma canónica de la ecuación (1.3) en términos de ξ y η . Generalmente, la ecuación canónica (1.14) puede ser integrada fácilmente y la solución general de (1.3) puede ser obtenida reemplazando ξ y η por las variables originales x y y .

En la práctica, es conveniente hacer el cambio $\xi = \xi(x, y)$ y $\eta(x, y) = y$ o $\xi(x, y) = x$ y $\eta = \eta(x, y)$, tal que $J(\xi, \eta) \neq 0$.

Ejemplo 1.1.1. Reducir la ecuación $u_x - u_y = u$, a su forma canónica.

Solución. Para este caso tenemos que $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$ y $D = 0$, entonces las ecuaciones características están dadas por

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{u}.$$

Así, las curvas características son $\xi = x + y = c_1$ y $\eta = y = c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes. Derivando parcialmente obtenemos que

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta, \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación $u_x - u_y = u$, llegamos a la ecuación $u_\eta + u = 0$, la cual es su forma canónica. \square

1.1.5. Método de separación de variables

Durante los últimos dos siglos, varios métodos han sido desarrollados para solucionar EDP's. Entre estos, una técnica conocida como el método de separación de variables es quizá el método sistemático mas viejo para resolver EDP's. Su característica esencial es transformar la EDP en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. La solución requerida de las EDP's es entonces escrita como un producto $u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$, o una suma $u(x, y) = X(x) + Y(y)$, donde $X(x)$ y $Y(y)$ son funciones de x y y , respectivamente. Muchos problemas significativos en EDP's pueden ser resueltos por el método de separación de variables. Este método ha sido refinado y generalizado considerablemente sobre los últimos dos siglos y es una de las técnicas clásicas de la física matemática, las matemáticas aplicadas, y las ingenierías.

Consideremos la EDP (1.3) homogénea, proponiendo la solución general como un producto que tiene la siguiente forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0. \quad (1.15)$$

Sustituyendo (1.15) en la ecuación (1.3), obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$AX'Y + BXY' + CXY = 0,$$

dividiendo esta ecuación por XY tenemos

$$A \frac{X'}{X} = -B \frac{Y'}{Y} - C,$$

esta ecuación puede ser separada en dos ecuaciones, si se introduce una constante λ , la cual es llamada constante de separación, de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} AX' - \lambda X &= 0, \\ BY' + (C + \lambda)Y &= 0. \end{aligned}$$

Luego, las funciones X y Y están determinadas por este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Generalmente, las EDP's de primer orden pueden ser resueltas por el método de separación de variables, sin utilizar para este caso series de Fourier [20, 27].

Ejemplo 1.1.2. Resolver la ecuación diferencial parcial $u_x + 2u_y = 0$.

Solución. Proponemos una solución de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, derivando esta solución y sustituyendo en la ecuación dada, obtenemos que

$$X'(x)Y(y) + 2X(x)Y'(y) = 0,$$

también podemos expresar esta ecuación de la siguiente forma

$$\frac{X'(x)}{2X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

obteniendo dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'(x) - 2\lambda X(x) = 0, \quad Y'(y) + \lambda Y(y) = 0.$$

Integrando ambas ecuaciones, llegamos a que $X(x) = a_1 e^{2\lambda x}$ y $Y(y) = a_2 e^{-\lambda y}$ son soluciones de estas ecuaciones respectivamente, donde a_1 y a_2 son constantes de integración. Por lo que la solución pedida esta dada por

$$u(x, y) = a_1 a_2 e^{2\lambda x - \lambda y} = a_3 e^{\lambda(2x - y)},$$

donde $a_3 = a_1 a_2$ es una constante arbitraria. \square

1.2. EDP's de segundo orden

1.2.1. Ecuaciones de segundo orden con dos variables independientes

La EDP general lineal de segundo orden con una variable dependiente u se escribe como

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i u_{x_i} + Fu = G, \quad (1.16)$$

en la cual asumimos que $A_{ij} = A_{ji}$ y A_{ij}, B_i, F y G son funciones de valores reales definidas en alguna región del espacio Ω . La ecuación (1.16) con dos variables independientes puede ser escrita en la forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (1.17)$$

donde los coeficientes son funciones de x y y y ambas no pueden ser cero al mismo tiempo. La clasificación de las EDP's tiene su origen en la clasificación de la ecuación cuadrática de las secciones cónicas que se hace en geometría analítica [27]. La ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

representa una hipérbola, parábola o elipse en consecuencia de que si la cantidad

$$B^2 - 4AC,$$

es positiva, cero o negativa.

La clasificación de las ecuaciones de segundo orden se basa en la posibilidad de reducir la ecuación (1.17), mediante una transformación a su forma canónica o estándar [13, 27]. Una ecuación se dice que es hiperbólica, parabólica o elíptica dependiendo de como es $B^2 - 4AC$.

Para el caso de dos variables independientes, una transformación siempre puede ser encontrada para reducir la ecuación dada a su forma canónica [27]. Sin embargo, en el caso de varias variables independientes, no es en general posible encontrar dicha transformación [27].

Para transformar la ecuación (1.17) a su forma canónica, introducimos las siguientes variables independientes, que en algunas ocasiones se les llama variables canónicas [27]. Esto es

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \quad (1.18)$$

Asumimos que ξ y η son dos veces diferenciables y que $J(\xi, \eta) \neq 0$. Entonces x y y pueden ser consideradas únicas para el sistema de ecuaciones (1.18). Derivando parcialmente, tenemos que

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (1.17) obtenemos

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u = G^*, \quad (1.20)$$

donde

$$\begin{aligned} A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x \xi_y + C\xi_y^2, \\ B^* &= 2A\xi_x \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2C\xi_y \eta_y, \\ C^* &= A\eta_x^2 + B\eta_x \eta_y + C\eta_y^2, \\ D^* &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y, \\ E^* &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y, \\ F^* &= F, \\ G^* &= G. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La ecuación resultante (1.20) es de la misma forma que la ecuación original (1.17) bajo la transformación general (1.18). Así, la naturaleza de la ecuación permanece invariante bajo una transformación semejante si $J(\xi, \eta) \neq 0$. Esto puede verse del hecho que el signo del discriminante es invariante bajo la transformación

$$B^{*2} - 4A^*C^* = J^2(B^2 - 4AC).$$

La clasificación de la ecuación (1.17) depende de los coeficientes A , B y C , por consiguiente, la ecuación (1.17) podemos reescribirla como

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = H(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1.22)$$

y la ecuación (1.20) como

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} = H^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.23)$$

1.2.2. Formas canónicas

Consideremos la ecuación reducida (1.22) a transformar a su forma canónica, en donde A, B, C son distintos de cero. Sean los coeficientes A^* y B^* de la ecuación (1.23) iguales a cero. Así, por (1.21), obtenemos

$$\begin{aligned} A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0, \\ C^* &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0. \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones son del mismo tipo y por tanto podemos escribirlas en una sola ecuación de la forma

$$A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 = 0, \quad (1.24)$$

en la cual ζ es una función que puede ser ξ o η . Dividiendo por ζ_y^2 a la ecuación (1.24) obtenemos

$$A\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2 + B\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right) + C = 0. \quad (1.25)$$

A lo largo de la curva $\zeta = \text{const.}$, obtenemos

$$d\zeta = \zeta_x dx + \zeta_y dy = 0.$$

Así

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\zeta_x}{\zeta_y},$$

y por consiguiente, la ecuación (1.25) puede escribirse de la forma

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0, \quad (1.26)$$

cuyas raíces están dadas por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A}. \quad (1.27)$$

Estas ecuaciones son conocidas como las *ecuaciones características asociadas* a la ecuación (1.22), y son ecuaciones diferenciales ordinarias para familias de curvas a lo largo del plano xy , en el cual $\xi = \text{const.}$ y $\eta = \text{const.}$ Las integrales de las ecuaciones (1.26) son llamadas *curvas características*. Luego, las soluciones de las EDP's de primer orden dadas por la ecuación (1.24), se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= c_1 = \text{const.}, \\ \phi_2(x, y) &= c_2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Tomando la transformación $\xi = \phi_1(x, y)$ y $\eta = \phi_2(x, y)$, obtenemos la forma canónica de la ecuación (1.22). La tabla (1.1) nos indica los diferentes tipos de formas canónicas que existen.

Discriminante	Tipo de EDP
$B^2 - 4AC > 0$	Hiperbólica
$B^2 - 4AC = 0$	Parabólica
$B^2 - 4AC < 0$	Elíptica

Tabla 1.1: Formas canónicas

Ahora, para resolver la EDP es necesario especificar las condiciones de frontera y en algunos casos las condiciones iniciales [20, 29, 30]. En términos generales, las condiciones de frontera tienen la siguiente forma

$$\alpha u + \beta u_{\vec{n}} = \gamma,$$

donde α , β , u y $u_{\vec{n}}$ ¹ son funciones de x y y . Si $\gamma = 0$, la condición se denomina homogénea, de otra manera, es no homogénea. En la tabla (1.2) se muestran las formas y nombres de los distintos tipos de condiciones de frontera.

Nombre	Forma	Comentario
Dirichlet	$\beta = 0$	u especificado
Neumann	$\alpha = 0$	$u_{\vec{n}}$ especificada
Robin	$\alpha, \beta \neq 0$	se especifica al menos de forma homogénea
Cauchy	$\alpha = 0$ $\beta = 0$	dos ecuaciones: u y $u_{\vec{n}}$ especificados

Tabla 1.2: Condiciones de frontera

Ahora, obtengamos la forma canónica para cada uno de los diferentes tipos de EDP's de segundo orden.

Tipo hiperbólico

Si $B^2 - 4AC > 0$, entonces integrando la ecuación (1.27) obtenemos dos familias de características, las cuales son reales y distintas. Puede demostrarse que para este caso $A^* = C^* = 0$ y $B^* \neq 0$. Luego la ecuación (1.23) se reduce a

$$u_{\xi\eta} = H_1, \tag{1.28}$$

donde $H_1 = \frac{H^*}{B^*}$. Esta forma, dada por la ecuación (1.28), es llamada la primera forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas. Si introducimos ahora las nuevas variables independientes como

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta, \tag{1.29}$$

obtenemos entonces que la ecuación (1.28) es transformada en

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

Esta forma es llamada la segunda forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas.

¹ $u_{\vec{n}}$ es la derivada direccional en dirección del vector \vec{n} .

Tipo parabólico

En este caso, tenemos que $B^2 - 4AC = 0$, y la ecuación (1.26) tiene una solución. Así, existe una familia real de características, y obtenemos solo una integral $\xi = \text{const.}$ (ó $\eta = \text{const.}$). La otra variable $\eta = \text{const.}$ (ó $\xi = \text{const.}$) se elige de tal manera que $J(\xi, \eta) \neq 0$. Luego $B^2 = 4AC$ y $A^* = 0$, hallando

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = 0.$$

De esta ecuación se sigue que

$$\begin{aligned} B^* &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ &= 2\left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y\right) = 0. \end{aligned}$$

De aquí $A^* = B^* = 0$ y $C^* \neq 0$. Luego, dividiendo la ecuación (1.23) por C^* , obtenemos

$$u_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.30)$$

donde $H_3 = \frac{H^*}{C^*}$. La ecuación (1.30) es llamada forma canónica de las ecuaciones parabólicas. Además, la ecuación (1.23), también se puede asumir de la siguiente forma

$$u_{\xi\xi} = \overline{H}_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

para este caso, se tiene que $C^* = B^* = 0$ y $A^* \neq 0$, donde $\overline{H}_3 = \frac{H^*}{A^*}$.

Tipo Elíptico

Para una ecuación de tipo elíptico tenemos $B^2 - 4AC < 0$. Consecuentemente, la ecuación cuadrática (1.26) no tiene soluciones reales, pero tiene soluciones complejas conjugadas, las cuales son funciones continuas de valores complejos de las variables reales x y y . Así, en este caso, las curvas características no son reales. Sin embargo, si los coeficientes A , B y C son funciones analíticas de x y y , entonces se puede considerar la ecuación (1.26) para variables complejas x y y . Entonces ξ y η son complejas, introduciendo nuevas variables reales, tenemos que

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta),$$

tal que

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta. \quad (1.31)$$

Primero, transformemos la ecuación (1.22). Obtenemos

$$A^{**}(\alpha, \beta)u_{\alpha\alpha} + B^{**}(\alpha, \beta)u_{\alpha\beta} + C^{**}(\alpha, \beta)u_{\beta\beta} = H_4(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \quad (1.32)$$

donde suponemos que los coeficientes tienen la misma forma que los coeficientes de la ecuación (1.23). Con el uso de (1.31) y de la ecuación $A^* = C^* = 0$, se sigue que

$$(A^{**} - C^{**}) \pm iB^{**} = 0,$$

de esta última ecuación, obtenemos que $A^{**} = C^{**}$ y $B^{**} = 0$, luego la ecuación (1.32) se transforma en

$$A^{**}u_{\alpha\alpha} + A^{**}u_{\beta\beta} = H_4(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta),$$

dividiendo por A^{**} , se obtiene

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H_5(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \quad (1.33)$$

donde $H_5 = \frac{H_4}{A^{**}}$. La ecuación (1.33) es llamada forma canónica para las ecuaciones del tipo elíptico.

1.2.3. Ecuaciones con coeficientes constantes

La EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes se puede escribir en su forma general como

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \quad (1.34)$$

En este caso, el determinante de la ecuación (1.34) es una constante. Luego, sus ecuaciones características, las podemos escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

integrando, obtenemos que

$$y = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}x + c_i,$$

donde c_i son constantes con $i = 1, 2$. En consecuencia, tomamos la transformación de la siguiente forma

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x, \quad (1.35)$$

donde

$$\lambda_i = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (1.36)$$

Un caso particular, de la ecuación (1.34) es la ecuación

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = G, \quad (1.37)$$

la cual es llamada la *ecuación de Euler* no homogénea. Esta ecuación es la forma general de una EDP lineal de segundo orden.

1.2.4. Soluciones de la ecuación de Euler

Ecuación de Euler para el caso hiperbólico

Si $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación (1.37) es de tipo hiperbólico, en cuyo caso las características forman dos familias bien definidas dadas por la ecuación (1.27). Usando (1.35), la ecuación (1.34) se transforma en

$$u_{\xi\eta} = D_1 u_\xi + E_1 u_\eta + F_1 u + G_1, \quad (1.38)$$

donde D_1, E_1, F_1 y G_1 son constantes, y los términos de orden inferior son expresados explícitamente. Para el caso, cuando $A = 0$, la ecuación característica (1.24) se escribe como

$$B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 = 0,$$

y reescribiendo la ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{\zeta_x}{\zeta_y}$, como

$$\zeta_y = -\zeta_x \frac{dx}{dy},$$

se sigue que

$$\begin{aligned} -B \left(\frac{dx}{dy} \right) + C \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 &= 0, \\ \left(\frac{dx}{dy} \right) \left(-B + C \left(\frac{dx}{dy} \right) \right) &= 0, \end{aligned}$$

de esta última ecuación se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{y} \quad -B + C \left(\frac{dx}{dy} \right) = 0,$$

integrando ambas ecuaciones, se sigue que

$$x = c_1, \quad x = \left(\frac{B}{C} \right) y + c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración. Así

$$\xi = x, \quad \eta = x - \left(\frac{B}{C} \right) y,$$

bajo esta transformación, la ecuación (1.34) se reduce a la forma canónica

$$u_{\xi\eta} = D_1^* u_\xi + E_1^* u_\eta + F_1^* u + G_1^*, \quad (1.39)$$

donde D_1^*, E_1^*, F_1^* y G_1^* son constantes cuando $A = 0$ y la forma canónica de la ecuación de Euler (1.37) para el caso homogéneo está dada por

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

integrando esta ecuación, obtenemos que su solución está dada por

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta) = \phi(y - \lambda_1 x) + \psi(y - \lambda_2 x), \quad (1.40)$$

donde ϕ y ψ son funciones arbitrarias, y λ_1 y λ_2 están dadas por (1.36).

Ejemplo 1.2.1. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} = 0.$$

Solución. Tenemos que $A = 2$, $B = 1$, $C = -1$, y $B^2 - 4AC = 9$, por lo que la ecuación es de tipo hiperbólico. Así, las ecuaciones características toman la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2},$$

integrando, obtenemos que

$$y = x + c_1, \quad y = -\frac{x}{2} + c_2,$$

en consecuencia, las variables canónicas están dadas por

$$\begin{aligned} \xi &= y - x, \\ \eta &= y + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Con esta transformación, la ecuación dada tiene la siguiente forma canónica

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

integrando esta ecuación, obtenemos que la solución de la ecuación dada resulta ser

$$u = \phi(y - x) + \psi\left(y + \frac{x}{2}\right).$$

□

Ejemplo 1.2.2. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$u(x, 0) = 3x^2, \quad u_y(x, 0) = 0.$$

Solución. Tenemos que $A = 1$, $B = 2$, $C = -3$, y $B^2 - 4AC = 16$, por lo que la ecuación es de tipo hiperbólico. Así, las ecuaciones características toman la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = 3, \quad \frac{dy}{dx} = -1,$$

integrando, obtenemos que

$$y = 3x + c_1, \quad y = -x + c_2,$$

en consecuencia, las variables canónicas están dadas por

$$\begin{aligned} \xi &= y - 3x, \\ \eta &= y + x. \end{aligned}$$

Con esta transformación, la ecuación dada tiene la siguiente forma canónica

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos que la solución de la ecuación dada es

$$u = \phi(y - 3x) + \psi(y + x).$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -3\phi'(-3x) + \psi'(x) &= 6x, \\ \phi'(-3x) + \psi'(x) &= 0, \end{aligned}$$

resolviendo este sistema de ecuaciones e integrando, llegamos a que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{3}{4}x^2, \\ \psi(x) &= \frac{1}{4}x^2, \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación original, finalmente la solución pedida es

$$u(x, y) = 3x^2 + y^2.$$

□

Ecuación de Euler para el caso parabólico

Cuando $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación (1.37) es de tipo parabólico, como se vio en la sección [1.2.2] solo existe una familia real de características. Por la ecuación (1.36), encontramos que

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \left(\frac{B}{2A} \right). \quad (1.41)$$

Luego, la familia de las características está dada por

$$y = \left(\frac{B}{2A} \right)x + c_1,$$

donde c_1 es una constante de integración. Así, tenemos

$$\xi = y - \left(\frac{B}{2A} \right)x, \quad \eta = hy + kx, \quad (1.42)$$

donde η es parecido al Jacobiano, y h y k son constantes arbitrarias. Con la elección correcta de las constantes h y k en la transformación (1.42), la ecuación (1.34) se reduce a

$$u_{\eta\eta} = D_2u_\xi + E_2u_\eta + F_2u + G_2, \quad (1.43)$$

donde D_2 , E_2 , F_2 y G_2 son constantes. Si $B = 0$, podemos ver de inmediato de la relación

$$B^2 - 4AC = 0,$$

que C o A son diferentes de cero. Luego, la ecuación de Euler está ya en la forma canónica. Similarmente, en los otros casos cuando A o C son diferentes de cero, B es cero. La ecuación de Euler también ya está en forma canónica.

Así, la forma canónica de la ecuación de Euler es

$$u_{\eta\eta} = 0,$$

integrando dos veces esta ecuación, obtenemos que la solución de ésta ecuación está dada por

$$u = \phi(\xi) + \eta\psi(\xi), \quad (1.44)$$

donde ξ y η están dadas por (1.42). Tomando $h = 1$ y $k = 0$ ² de acuerdo a las secciones [1.1.2] y [1.1.4], la solución de la ecuación de Euler, en el caso parabólico es

$$u = \phi(y - \lambda x) + y\psi(y - \lambda x). \quad (1.45)$$

Ejemplo 1.2.3. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Solución. Tenemos que $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$, y $B^2 - 4AC = 0$, por lo que la ecuación es de tipo parabólico. Así, la familia de características toma la siguiente forma

$$y = -x + c_1,$$

en consecuencia, tomamos la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \xi &= y + x, \\ \eta &= y, \end{aligned}$$

con esta transformación, la ecuación dada tiene la siguiente forma canónica

$$u_{\eta\eta} = 0,$$

integrando esta ecuación, obtenemos que la solución de la ecuación dada resulta ser

$$u = \phi(y + x) + y\psi(y + x).$$

□

Ejemplo 1.2.4. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \cos x.$$

²Esto es equivalente a elegir $\eta = y$, de tal forma que $J(\xi, \eta) \neq 0$ [15, 27, 33, 35].

Solución. Tenemos que $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, y $B^2 - 4AC = 0$, por lo que la ecuación es de tipo parabólico. Así, la familia de características toma la siguiente forma

$$y = x + c_1,$$

en consecuencia, tomamos la siguiente transformación

$$\begin{aligned}\xi &= y - x, \\ \eta &= y.\end{aligned}$$

Con esta transformación, la ecuación dada tiene la siguiente forma canónica

$$u_{\eta\eta} = 0.$$

Al integrar esta ecuación, obtenemos que la solución de la ecuación dada resulta ser

$$u = \phi(y - x) + y\psi(y - x),$$

aplicando las condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 0, \\ \psi(x) &= \cos x,\end{aligned}$$

sustituyendo en la solución de la ecuación dada, llegamos a que

$$u(x, y) = y \cos(y - x),$$

ó

$$u(x, y) = y \cos(x - y).$$

□

Ecuación de Euler para el caso elíptico

Cuando $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación (1.37) es de tipo elíptico. En este caso, las características son complejas conjugadas.

Las ecuaciones características son

$$y = \lambda_1 x + c_1, \quad y = \lambda_2 x + c_2,$$

donde λ_1 y λ_2 son números complejos. En consecuencia, c_1 y c_2 pueden tomar valores complejos. Así

$$\xi = y - (a + ib)x, \quad \eta = y - (a - ib)x,$$

donde $\lambda_i = a \pm ib$ con a y b constantes reales, y

$$a = \frac{B}{2A}, \quad b = \frac{1}{2A} \sqrt{4AC - B^2}.$$

Introduciendo las nuevas variables

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = y - ax, \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = -bx.$$

La aplicación de esta transformación reduce la ecuación (1.37) a la forma canónica

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = D_3 u_\alpha + E_3 u_\beta + F_3 u + G_3,$$

donde D_3 , E_3 , F_3 y G_3 son constantes. Notemos que $B^2 - 4AC < 0$, donde A y C son distintos de cero. Luego, para el caso elíptico, las características de la ecuación de Euler resultan ser complejas y están dadas por

$$\xi = (y - ax) - ibx, \quad \bar{\xi} = (y - ax) + ibx.$$

Por lo que, la forma canónica de la ecuación de Euler resulta ser

$$u_{\xi\bar{\xi}} = 0.$$

Integrando dos veces, obtenemos que su solución está dada por

$$u = \phi(\xi) + \psi(\bar{\xi}). \quad (1.46)$$

Observemos, que la apariencia de los argumentos complejos en la solución (1.46) es una característica general de las ecuaciones elípticas.

Ejemplo 1.2.5. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Solución. Tenemos que $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, y $B^2 - 4AC = -3$, por lo que la ecuación es de tipo elíptico. Así, las ecuaciones características, toman la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

integrando, obtenemos que

$$y = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x + c_1,$$

$$y = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x + c_2,$$

en consecuencia, las variables canónicas están dadas por

$$\xi = y - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x,$$

$$\eta = y - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x,$$

ó

$$\begin{aligned}\xi &= \left(y - \frac{x}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}x, \\ \eta &= \left(y - \frac{x}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}x,\end{aligned}$$

de donde, se puede observar que η es el conjugado de ξ . Con esta transformación, la ecuación dada tiene la siguiente forma canónica

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Integrando dos veces esta ecuación, obtenemos que la solución de la ecuación dada resulta ser

$$u = \phi\left(\left(y - \frac{x}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \psi\left(\left(y - \frac{x}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

□

Ejemplo 1.2.6. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0,$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 4e^{-2x}.$$

Solución. Tenemos que $A = 1$, $B = 2$, $C = 2$, y $B^2 - 4AC = -4$, por lo que la ecuación es de tipo elíptico. Así, las ecuaciones características toman la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = 1 + i, \quad \frac{dy}{dx} = 1 - i,$$

integrando, obtenemos que

$$\begin{aligned}y &= (1 + i)x + c_1, \\ y &= (1 - i)x + c_2,\end{aligned}$$

en consecuencia, las variables canónicas están dadas por

$$\begin{aligned}\xi &= y - (1 + i)x, \\ \eta &= y - (1 - i)x,\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}\xi &= (y - x) + ix, \\ \eta &= (y - x) - ix,\end{aligned}$$

con esta transformación, la ecuación dada tiene la siguiente forma canónica

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

integrando esta ecuación, obtenemos que la solución de la ecuación dada resulta ser

$$u = \phi((y - x) + ix) + \psi((y - x) - ix).$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(i - 1)\phi'(x(i - 1)) - (i + 1)\psi'(-x(i + 1)) &= 0, \\ \phi'(x(i - 1)) + \psi'(-x(i + 1)) &= 4e^{-2x}.\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones e integrando, llegamos a que

$$\begin{aligned}\phi(x) &= -2ie^{x(i+1)}, \\ \psi(x) &= 2ie^{-2x(i-1)}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la solución de la ecuación dada, obtenemos que

$$u(x, y) = 4e^{y-2x} \sin(y).$$

□

Capítulo 2

Método de Harper y el Método de Stephenson- Radmore

En el capítulo anterior, se mostraron algunos métodos para la solución de las EDP's de primer y segundo orden, como fue el método de separación de variables y el método de las características. También se dedujeron las soluciones generales para la ecuación de Euler homogénea con coeficientes constantes.

En este capítulo se presentan dos métodos analíticos no convencionales, uno de ellos es propuesto por J. Harper [21], el cual nos permitirá reducir una EDP de segundo orden del tipo parabólico a una ecuación de calor.

El otro método, propuesto por Stephenson y Radmore [34], consiste en transformar una EDP de segundo orden a una ya conocida, sin necesidad de calcular su forma canónica.

Ambos métodos dan solución matemática a muchos problemas físicos en que aparecen dichas EDP's.

2.1. Forma general del Método de Harper

El método de J. Harper [21], permite resolver EDP's lineales de la forma

$$Au_{xx} + Bu_x + Cu_y + Du = E, \quad (2.1)$$

donde los coeficientes A , B , C , D y E son funciones de las variables x , y . Observemos que la ecuación (2.1) corresponde a la forma canónica de las EDP's de segundo orden el tipo parabólico. El método propone ignorar la segunda derivada, por lo que consideramos la siguiente ecuación *diferencial parcial auxiliar*

$$Bv_x + Cv_y + Dv = E, \quad (2.2)$$

cuyo sistema de ecuaciones características asociado está dado por $\frac{dx}{B} = \frac{dy}{C} = \frac{dv}{E-Dv}$.

Tomando, el primer par de ecuaciones $\frac{dx}{B} = \frac{dy}{C}$, el cual se puede escribir como $\frac{dx}{B} - \frac{dy}{C} = 0$, integrando esta ecuación, obtenemos la primera curva característica,

$$\varphi(x, y) = \int \frac{dx}{B} - \int \frac{dy}{C} = c_0 = \text{const.} \quad (2.3)$$

Además, de la ecuación (2.3), esta curva característica cumple con la siguiente EDP,

$$B\varphi_x + C\varphi_y = 0. \quad (2.4)$$

Supongamos ahora, que se pueden obtener las variables x y y de la ecuación (2.3), de tal forma que

$$x = \phi_0(y, c_0), \quad (2.5)$$

$$y = \phi_1(x, c_0). \quad (2.6)$$

Para obtener la segunda curva característica, tomemos el otro par de ecuaciones características, $\frac{dx}{B} = \frac{dv}{E-Dv}$, el cual puede escribirse como la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dv}{dx} + \frac{D}{B}v = \frac{E}{B}.$$

Utilizando la ecuación (2.6), esta última ecuación se escribe como

$$\frac{dv(x, \phi_1(x, c_0))}{dx} + \frac{D(x, \phi_1(x, c_0))}{B(x, \phi_1(x, c_0))}v = \frac{E(x, \phi_1(x, c_0))}{B(x, \phi_1(x, c_0))}. \quad (2.7)$$

El factor integrante de esta ecuación está dado por,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{D(x, \phi_1(x, c_0))}{B(x, \phi_1(x, c_0))} dx}. \quad (2.8)$$

Observemos, que este factor integrante cumple con la siguiente ecuación

$$\mu_x = \frac{D}{B}\mu.$$

Multiplicando la ecuación (2.7) por este factor integrante, se sigue que

$$e^{\int \frac{D}{B} dx} \frac{dv}{dx} + v e^{\int \frac{D}{B} dx} \frac{D}{B} = \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx},$$

esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{d}{dx} (e^{\int \frac{D}{B} dx} v) = \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx},$$

integrando esta última ecuación, tenemos

$$e^{\int \frac{D}{B} dx} v = \int \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx} dx + c_1,$$

donde c_1 es una constante de integración. Luego, la solución de la ecuación (2.2) está dada por,

$$v = e^{-\int \frac{D}{B} dx} \int \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx} dx + e^{-\int \frac{D}{B} dx} c_1.$$

Esta solución también se puede escribir como

$$v = e^{-\int \frac{D}{B} dx} \int \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx} dx + e^{-\int \frac{D}{B} dx} \psi(c_0),$$

donde, para este caso, $c_1 = \psi(c_0)$. Por lo tanto, de la ecuación anterior se sigue que la solución dada para la ecuación (2.2), está dada por

$$v(x, y) = e^{-\int \frac{D}{B} dx} \int \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx} dx + e^{-\int \frac{D}{B} dx} \psi(\varphi(x, y)).$$

En términos del factor integrante, dado por la ecuación (2.8) y considerando a $\varsigma = \int \frac{dx}{B} - \int \frac{dy}{C}$ y a $\sigma(x, y) = e^{\int \frac{D(x,y)}{B(x,y)} dx}$, obtenemos

$$v(x, y) = e^{-\int \frac{D}{B} dx} \int \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx} dx + \sigma^{-1}(\phi_0(y, c_0), y) \psi(\varsigma). \quad (2.9)$$

Harper propuso el siguiente procedimiento, el cual consiste en representar la solución de la ecuación (2.1), análoga a la ecuación (2.9), de la siguiente forma

$$u(x, y) = f(x) + g(y)F(X, Y), \quad (2.10)$$

y las nuevas variables X y Y , están dadas por

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{dx}{B} - \int \frac{dy}{C}, \\ Y &= Y(y), \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde las funciones $f(x)$ y $g(y)$ son arbitrarias.

La función f se introduce para eliminar el término no homogéneo en la ecuación (2.1), esto significa que, si $E \equiv 0$, implica que $f = 0$. Además, la nueva variable X , en forma análoga a la ecuación (2.4), cumple con la siguiente ecuación

$$BX_x + CX_y = 0. \quad (2.12)$$

Derivando parcialmente la nueva solución, dada por la ecuación (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned} u_x &= f_x + g_x F + g(F_X X_x + F_Y Y_x), \\ u_y &= f_y + g_y F + g(F_X X_y + F_Y Y_y), \\ u_{xx} &= g(X_x^2 F_{XX} + X_{xx} F_X + Y_x^2 F_{YY} + Y_{xx} F_Y) + 2g_x(F_X X_x + F_Y Y_x) + g_{xx} F + f_{xx}, \end{aligned}$$

aplicando la ecuación (2.11), estas derivadas se escriben como

$$\begin{aligned} u_x &= f_x + g F_X X_x, \\ u_y &= g_y F + g(F_X X_y + F_Y Y_y), \\ u_{xx} &= g(X_x^2 F_{XX} + X_{xx} F_X) + f_{xx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación (2.1), obtenemos

$$A(g(X_x^2 F_{XX} + X_{xx} F_X) + f_{xx}) + B(f_x + g F_X X_x) + C(g_y F + g(F_X X_y + F_Y Y_y)) + D(f + g F) = E,$$

factorizando términos semejantes, se tiene que

$$gAX_x^2 F_{XX} + (gAX_{xx} + gBX_x + gCX_y)F_X + gCY_y F_Y + (Cg_y + Dg)F + Af_{xx} + Bf_x + Df = E. \quad (2.13)$$

Ahora, supongamos que las funciones f y g cumplen con las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$Cg_y + Dg = 0, \quad (2.14)$$

$$Af_{xx} + Bf_x + Df = E. \quad (2.15)$$

Entonces, la ecuación (2.13) se escribe como

$$AX_x^2 F_{XX} + (AX_{xx} + BX_x + CX_y)F_X + CY_y F_Y = 0. \quad (2.16)$$

Utilizando la ecuación (2.12), esta última ecuación se escribe como

$$AX_x^2 F_{XX} + AX_{xx} F_X + CY_y F_Y = 0. \quad (2.17)$$

Introduciendo las siguiente cantidades

$$\begin{aligned} A_1 &= AX_x^2, \\ B_1 &= AX_{xx}, \\ C_1 &= C, \end{aligned} \quad (2.18)$$

y haciendo $Y_y = 1$, se tiene que la ecuación (2.17) se escribe como

$$A_1 F_{XX} + B_1 F_X + C_1 F_Y = 0. \quad (2.19)$$

Además, de la ecuación $Y_y = 1$, obtenemos que

$$Y = y. \quad (2.20)$$

Repetiendo el mismo procedimiento para la ecuación (2.19), ahora la *ecuación diferencial parcial auxiliar* toma la forma

$$B_1 v_X + C_1 v_Y = 0. \quad (2.21)$$

Para este caso, tenemos que las ecuaciones características están dadas por $\frac{dX}{B_1} = \frac{dY}{C_1}$, tomando, el primer par de ecuaciones $\frac{dX}{B_1} = \frac{dY}{C_1}$, el cual se puede escribir como $\frac{dX}{B_1} - \frac{dY}{C_1} = 0$, integrando, obtenemos la primera curva característica, la cual está dada por

$$\varphi_1(X, Y) = \int \frac{dX}{B_1} - \int \frac{dY}{C_1} = c_2 = const. \quad (2.22)$$

Además, en forma análoga a la ecuación (2.4), esta curva característica cumple con la siguiente EDP

$$B_1\varphi_{1X} + C_1\varphi_{1Y} = 0. \quad (2.23)$$

Tomemos, ahora el otro par de ecuaciones características $\frac{dX}{B_1} = \frac{dv}{0}$, para obtener la otra curva característica, la cual está dada por $v(X, Y) = c_3 = \text{const.}$

Esta solución también se puede escribir como $v(X, Y) = \psi_1(c_2)$, donde para este caso, se tiene que $c_3 = \psi_1(\varphi_1(X, Y))$ y haciendo $\varsigma = \int \frac{dX}{B_1} - \int \frac{dY}{C_1}$, la solución toma la forma

$$v(X, Y) = \psi_1(\varsigma).$$

Ahora, proponemos la siguiente solución para la ecuación (2.19), la cual es análoga a la ecuación (2.10) con $f = 0$ y $g = 1$, es decir

$$F(X, Y) = G(Z, W). \quad (2.24)$$

Para este caso, las nuevas variables Z y W , las definimos como

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{dX}{B_1} - \int \frac{dY}{C_1} = c_4. \\ W &= W(Y). \end{aligned} \quad (2.25)$$

En este paso, suponemos, ahora, que la nueva variable Z , cumple con la siguiente ecuación

$$Z_{XX} = 0. \quad (2.26)$$

Derivando parcialmente esta nueva solución, dada por la ecuación (2.24), se tiene que

$$\begin{aligned} F_X &= G_Z Z_X + G_W W_X, \\ F_Y &= G_Z Z_Y + G_W W_Y. \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (2.25), estas derivadas se escriben como

$$\begin{aligned} F_X &= G_Z Z_X, \\ F_Y &= G_Z Z_Y + G_W W_Y, \end{aligned}$$

derivando parcialmente obtenemos,

$$F_{XX} = G_{ZZ} Z_X^2 + G_Z Z_{XX},$$

sustituyendo estas derivadas en la ecuación (2.19) y aplicando las ecuaciones (2.25) y (2.26) se sigue que

$$A_1(G_{ZZ} Z_X^2) + B_1(G_Z Z_X) + C_1(G_Z Z_Y + G_W W_Y) = 0.$$

Factorizando términos semejantes, se tiene que

$$A_1 Z_X^2 G_{ZZ} + (B_1 Z_X + C_1 Z_Y) G_Z + C_1 W_Y G_W = 0. \quad (2.27)$$

Por otro lado, de la ecuación (2.23) con $Z = \varphi_1(X, Y)$, se escribe como

$$B_1 Z_X + C_1 Z_Y = 0,$$

luego la ecuación (2.27), resulta ser

$$A_1 Z_X^2 G_{ZZ} + C_1 W_Y G_W = 0,$$

esta ecuación se puede escribir como,

$$A_1 Z_X^2 G_{ZZ} = -C_1 W_Y G_W,$$

es decir,

$$G_{ZZ} = -\frac{C_1 W_Y}{A_1 Z_X^2} G_W.$$

Haciendo

$$W_Y = -\frac{A_1 Z_X^2}{C_1}, \quad (2.28)$$

obtenemos la ecuación de calor (véase apéndice C),

$$G_{ZZ} = G_W. \quad (2.29)$$

La nueva variable W se obtiene de la ecuación (2.28), es decir, está dada por

$$W = -\int \frac{A_1 Z_X^2}{C_1} dY. \quad (2.30)$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones (2.10) y (2.24) la solución de la ecuación (2.1), se escribe como

$$u(x, y) = f(x) + g(y)G(Z(X(x, y), Y(y)), W(Y(y))), \quad (2.31)$$

donde la función F es la solución de la ecuación de calor $G_{XX} = G_Y$, y las funciones $f(x)$ y $g(y)$ son soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias respectivamente dadas por

$$\begin{aligned} Af_{xx} + Bf_x + Df &= E, \\ Cg_y + Dg &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.1. Resolver la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{1}{2}v^2 x^2 u_{xx} + rxu_x + u_t - ru = 0.$$

Solución. De la ecuación anterior tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}v^2 x^2, \\ B &= rx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 1, \\D &= -r, \\E &= 0.\end{aligned}$$

Proponemos la solución

$$w = g(t)F(X, T),$$

donde las variables X y T están dadas por

$$\begin{aligned}X &= \int \frac{dx}{rx} - \int \frac{dt}{1} = \frac{1}{r} \ln x - t, \\T &= t,\end{aligned}$$

y la función g , dada por la ecuación diferencial $g_t - rg = 0$, cuya solución es

$$g = e^{rt}.$$

Sustituyendo estas variables llegamos a la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} F_{XX} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{r} F_X + F_T = 0.$$

Repetimos el procedimiento, de la ecuación anterior tenemos que

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2}, \\B_1 &= -\frac{1}{2} \frac{v^2}{r}, \\C_1 &= C = 1.\end{aligned}$$

Ahora, proponemos la siguiente solución

$$F(X, T) = G(Z, W),$$

donde las variables Z y W están dadas por

$$\begin{aligned}Z &= -\frac{2r}{v^2} X - T, \\W &= \frac{v^2}{2r} T,\end{aligned}$$

sustituyendo estas variables, llegamos a que la solución de la ecuación de Black-Scholes está dada por la siguiente ecuación

$$u(x, y) = e^{rt} G(Z, W),$$

donde G es la solución de la ecuación de calor $G_{ZZ} = G_W$. □

2.2. El método de Stephenson- Radmore

En el capítulo anterior, se vio que la EDP de segundo orden no homogénea, en general se escribe como

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (2.32)$$

donde, para esta sección, consideramos que los coeficientes A, B, C, D, E, F y G son todos constantes. También en la sección [1.2.1], la ecuación (2.32) fue reducida a su forma canónica, y que ésta forma se clasifica en hiperbólica, parabólica y elíptica.

Consideremos la EDP de Euler homogénea, dada por la ecuación

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \quad (2.33)$$

donde los coeficientes A, B y C son constantes diferentes de cero. Notemos que esta ecuación se obtiene de la ecuación (2.33) haciendo $D = E = F = G = 0$. Luego, las formas canónicas de la ecuación (2.33) para los casos hiperbólico, parabólico y elíptico, están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= 0, \\ u_{\eta\eta} &= 0, \\ u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por otro lado, para encontrar la solución de la ecuación (2.33), Stephenson-Radmore [34] sin necesidad de realizar el procedimiento normal para calcular las formas canónicas de la ecuación (2.33), crearon el siguiente método para encontrar las soluciones cuando la ecuación de Euler es del tipo hiperbólico. Se introducen las nuevas variables independientes

$$\xi = ax + by, \quad \eta = rx + sy, \quad (2.35)$$

donde a, b, r y s son constantes. Aplicando la regla de la cadena, se sigue que las derivadas parciales de u con respecto a estas nuevas variables, son

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = au_\xi + ru_\eta, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = bu_\xi + su_\eta, \\ u_{xx} &= a^2 u_{\xi\xi} + 2rau_{\xi\eta} + r^2 u_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= abu_{\xi\xi} + (as + br)u_{\xi\eta} + rsu_{\eta\eta}, \\ u_{yy} &= b^2 u_{\xi\xi} + 2bsu_{\xi\eta} + s^2 u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación (2.33) se tiene

$$\begin{aligned} A(a^2 u_{\xi\xi} + 2aru_{\xi\eta} + r^2 u_{\eta\eta}) + B(abu_{\xi\xi} + (as + br)u_{\xi\eta} + rsu_{\eta\eta}) + \\ C(b^2 u_{\xi\xi} + 2bsu_{\xi\eta} + s^2 u_{\eta\eta}) = 0, \end{aligned}$$

la cual se puede escribir como

$$(Aa^2 + Bab + Cb^2)u_{\xi\xi} + (2Aar + B(as + br) + 2Cbs)u_{\xi\eta} + (Ar^2 + Brs + Cs^2)u_{\eta\eta} = 0. \quad (2.36)$$

Para obtener la forma canónica de la ecuación de Euler para el caso hiperbólico $u_{\xi\eta} = 0$, de la ecuación (2.36), suponemos que se cumple el siguiente sistema de ecuaciones

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = 0, \quad (2.37)$$

$$2Aar + B(as + br) + 2Cbs \neq 0, \quad (2.38)$$

$$Ar^2 + Brs + Cs^2 = 0. \quad (2.39)$$

Y con el objetivo de simplificar los cálculos, Stephenson-Radmore propusieron que

$$a = r = 1. \quad (2.40)$$

Entonces, las ecuaciones (2.37) y (2.39) se escriben como una sola ecuación, dada por

$$C\mu^2 + B\mu + A = 0, \quad (2.41)$$

y elegimos a los otros coeficientes b y s como las raíces de esta ecuación. Es decir,

$$\mu_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} = -\frac{B}{2C} \pm \frac{1}{2C} \sqrt{B^2 - 4AC}, \quad i = 1, 2.$$

luego,

$$\begin{aligned} b = \mu_1 &= -\frac{B}{2C} + \frac{1}{2C} \sqrt{B^2 - 4AC}, \\ s = \mu_2 &= -\frac{B}{2C} - \frac{1}{2C} \sqrt{B^2 - 4AC}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

estas raíces cumplen con las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= -\frac{B}{C}, \\ \mu_1 \mu_2 &= \frac{A}{C}, \\ \mu_1 - \mu_2 &= \frac{1}{C} \sqrt{B^2 - 4AC} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (2.40) y (2.42) en la ecuación (2.38) se sigue que

$$2Aar + B(as + br) + 2Cbs = -\frac{1}{C}(B^2 - 4AC) \neq 0.$$

Luego, obtenemos que $u_{\xi\eta} = 0$, cuya solución está dada por

$$u = \Psi(\xi) + \Phi(\eta),$$

donde las variables ξ y η resultan ser,

$$\xi = x + \mu_1 y, \quad \eta = x + \mu_2 y,$$

donde μ_1 y μ_2 están dadas por la ecuación (2.42), las cuales resultan ser las ecuaciones características de la ecuación (2.33).

Ejemplo 2.2.1. Resolver la ecuación

$$2u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} = y.$$

Solución. Para este caso, la ecuación cuadrática asociada a esta ecuación es $2 - 3\mu + \mu^2 = 0$, cuyas raíces están dadas por

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1, \\ \mu_2 &= 2.\end{aligned}$$

Por lo que las curvas características son

$$\begin{aligned}\xi &= x + 2y = \text{const.} \\ \eta &= x + y = \text{const.}\end{aligned}$$

Luego, la ecuación dada se reduce a la siguiente forma

$$\frac{4}{1} \left(\frac{1}{4} \right) u_{\xi\eta} = y = \xi - \eta,$$

o

$$u_{\xi\eta} = \xi - \eta.$$

Esta ecuación puede ser fácilmente integrada. Su primera integral es

$$u_\xi = -\frac{1}{2}\eta^2 + \xi\eta + h(\xi),$$

donde h es una función arbitraria, y la segunda integral es

$$u = -\frac{1}{2}\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \Upsilon(\xi) + \Omega(\eta),$$

donde Υ y Ω son funciones arbitrarias. Expresando esta solución en términos de x y y tenemos, que la solución de la ecuación dada es

$$u = \frac{1}{2}y(x+y)(x+2y) + \Upsilon(x+2y) + \Omega(x+y).$$

□

El método anterior solo determina la solución para el caso hiperbólico y cuando las constantes a y r que aparecen en la ecuación (2.35) toman el valor de uno, es decir $a = r = 1$. En la siguiente sección, generalizaremos dicho método para los otros dos tipos de ecuaciones, es decir, cuando la ecuación de Euler es del tipo parabólico y elíptico, y además para cualquier valor de los coeficientes de la ecuación (2.35).

2.2.1. Ecuaciones del tipo hiperbólico

Para este tipo de ecuaciones, sus coeficientes cumplen con $B^2 - 4AC > 0$.

Primero, observemos que la aplicación de las ecuaciones (2.37), (2.38) y (2.39) a la ecuación (2.36) nos lleva a la siguiente ecuación

$$(2Aar + B(as + br) + 2Cbs)u_{\xi\eta} = 0. \quad (2.44)$$

Obsérvese, que el coeficiente que está entre el paréntesis de la ecuación (2.44) no lo podemos eliminar debido a que no conocemos aun los valores de las constantes a , b , r y s . Aunque, de esta ecuación podemos suponer que $(2Aar + B(as + br) + 2Cbs) \neq 0$. Para obtener estas constantes, observemos que las ecuaciones (2.37) y (2.39) se pueden factorizar como

$$\begin{aligned} (Aa - \frac{1}{2}(-B - \sqrt{B^2 - 4AC})b)(Aa - \frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2 - 4AC})b) &= 0, \\ (Ar - \frac{1}{2}(-B - \sqrt{B^2 - 4AC})s)(Ar - \frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2 - 4AC})s) &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Introduciendo las siguientes cantidades,

$$\lambda_i = \frac{1}{2}(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}), \quad (2.46)$$

las cuales se pueden escribir en términos de los coeficientes μ_i , dados por la ecuación (2.42), como

$$\lambda_i = C\mu_i. \quad (2.47)$$

Observemos que, la ecuación (2.46) cumple con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -B, \\ \lambda_1\lambda_2 &= AC, \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= \sqrt{B^2 - 4AC}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Utilizando la ecuación (2.46), tenemos que la ecuación (2.45) se escribe como

$$\begin{aligned} (Aa - \lambda_1b)(Aa - \lambda_2b) &= 0, \\ (Ar - \lambda_1s)(Ar - \lambda_2s) &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} Aa - \lambda_1b &= 0, \\ Aa - \lambda_2b &= 0, \end{aligned}$$

y de la segunda ecuación, obtenemos también el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} Ar - \lambda_1s &= 0, \\ Ar - \lambda_2s &= 0, \end{aligned}$$

para resolver estos sistemas de ecuaciones, consideremos los siguientes casos para obtener así, las nuevas variables ξ y η , tales que $\xi \neq \eta$.

Caso I.

Primero consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} Aa - \lambda_1 b &= 0, \\ Ar - \lambda_2 s &= 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} b &= \frac{A}{\lambda_1} a, \\ s &= \frac{A}{\lambda_2} r. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Sustituyendo la ecuación (2.50) en la ecuación (2.44) se sigue que,

$$\frac{1}{C}(B^2 - 4AC)aru_{\xi\eta} = 0. \quad (2.51)$$

Finalmente, de la ecuación (2.51) obtenemos la siguiente ecuación

$$ar = \frac{1}{B^2 - 4AC}. \quad (2.52)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a = r$, entonces tenemos que la ecuación (2.52) se escribe como:

$$a^2 = \frac{1}{B^2 - 4AC}.$$

Luego, utilizando la ecuación (2.48), se obtiene

$$a = r = \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} b &= \frac{A}{\lambda_1} a = \frac{A}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ s &= \frac{A}{\lambda_2} r = \frac{A}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para el caso hiperbólico las nuevas variables ξ y η ahora están definidas por

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{A}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} y, \\ \eta &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{A}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} y, \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde λ_1 y λ_2 están dadas por la ecuación (2.46). En términos de μ_1 y μ_2 , la ecuación (2.53) se escribe como

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{C(\mu_1 - \mu_2)} x + \frac{A}{C^2 \mu_1 (\mu_1 - \mu_2)} y, \\ \eta &= \frac{1}{C(\mu_1 - \mu_2)} x + \frac{A}{C^2 \mu_2 (\mu_1 - \mu_2)} y. \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos $u_{\xi\eta} = 0$, cuya solución está dada por

$$u(x, y) = \phi \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{A}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} y \right) + \psi \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{A}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} y \right),$$

donde ϕ y η son funciones arbitrarias, λ_i está dada por la ecuación (2.46).

Caso II.

Como segundo caso, consideremos el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} Aa - \lambda_2 b &= 0, \\ Ar - \lambda_1 s &= 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

de aquí obtenemos

$$\begin{aligned} b &= \frac{A}{\lambda_2} a, \\ s &= \frac{A}{\lambda_1} r. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Sustituyendo la ecuación (2.55) en la ecuación (2.44) se sigue que,

$$\frac{1}{C}(B^2 - 4AC)aru_{\xi\eta} = 0. \quad (2.56)$$

Luego, podemos suponer que $a = r$, así se obtiene la siguiente ecuación

$$a = r = \frac{1}{\sqrt{4AC - B^2}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} b &= \frac{A}{\lambda_2} a = \frac{A}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ s &= \frac{A}{\lambda_1} r = \frac{A}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para el caso hiperbólico las nuevas variables ξ y η ahora están definidas por

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{A}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} y, \\ \eta &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{A}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} y, \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde λ_1 y λ_2 están dadas por la ecuación (2.46). Por lo tanto, tenemos que la ecuación (2.57) es equivalente a la ecuación (2.53), ya que solo las variables ξ y η intercambian su valor, luego, solo se tiene una transformación de variables.

De aquí, obtenemos $u_{\xi\eta} = 0$, cuya solución está dada por

$$u(x, y) = \phi\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{A}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} y\right) + \psi\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \frac{A}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} y\right),$$

donde ϕ y η son funciones arbitrarias, λ_i está dada por la ecuación (2.46).

Caso III.

Se puede demostrar que para los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} Aa - \lambda_1 b = 0 & \quad Aa - \lambda_2 b = 0 & \quad Aa - (\lambda_1 + \lambda_2)b = 0 \\ Ar - \lambda_1 s = 0 & \quad Ar - \lambda_2 s = 0 & \quad Ar - (\lambda_1 + \lambda_2)s = 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

junto con la ecuación (2.44) conducen a que las variables ξ y η satisfacen la ecuación $\xi = \eta$. Lo cual no es posible ya que para el caso hiperbólico, estas variables deben ser reales y distintas.

Ejemplo 2.2.2. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} = 0.$$

Solución. Consideremos la ecuación $\lambda_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}$, cuya solución está dada por

$$\lambda_i = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Luego, la ecuación es de tipo hiperbólico. Para el caso hiperbólico, las características de la ecuación dada son

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{3}(x + 2y), \\ \eta &= \frac{1}{3}(x - y). \end{aligned}$$

Por lo que, la forma canónica de la ecuación es

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

cuya solución es

$$u(x, y) = \phi\left(\frac{1}{3}(x + y)\right) + \psi\left(\frac{1}{6}(2x - y)\right).$$

□

Ejemplo 2.2.3. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 3x^2, \quad u_y(x, 0) = 0.$$

Solución. Consideremos la ecuación $\lambda_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}$, cuya solución está dada por

$$\lambda_i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}.$$

La ecuación es de tipo hiperbólico. Sus características son

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{4}(x + y), \\ \eta &= \frac{1}{12}(3x - y).\end{aligned}$$

Por lo que, la forma canónica de la ecuación dada es

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

cuya solución es

$$u(x, y) = \phi\left(\frac{1}{4}(x + y)\right) + \psi\left(\frac{1}{12}(3x - y)\right).$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\phi'(z) + \psi'(z) &= 96z, \\ 3\phi'(z) - \psi'(z) &= 0,\end{aligned}$$

donde $z = \frac{1}{4}x$, resolviendo este sistema de ecuaciones, llegamos a que

$$\begin{aligned}\phi(z) &= 12z^2, \\ \psi(z) &= 36z^2,\end{aligned}$$

sustituyendo en la solución de la ecuación dada, finalmente se sigue que

$$u(x, y) = 3x^2 + y^2.$$

□

2.2.2. Ecuaciones del tipo parabólico.

Para el caso parabólico, los coeficientes de la ecuación (2.33) cumplen con $B^2 - 4AC = 0$. Para este caso, tenemos que la ecuación (2.46) se reduce a la ecuación $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-B}{2}$. Entonces, para escribir la forma canónica de la ecuación (2.33), la cual puede estar dada por $u_{\xi\xi} = 0$ o $u_{\eta\eta} = 0$.

Para obtener la ecuación $u_{\xi\xi} = 0$, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}Aa^2 + Bab + Cb^2 &\neq 0, \\ 2Aar + B(as + br) + 2Cbs &= 0, \\ Ar^2 + Brs + Cs^2 &= 0.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Y para obtener la forma canónica $u_{\eta\eta} = 0$, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}Aa^2 + Bab + Cb^2 &= 0, \\ 2Aar + B(as + br) + 2Cbs &= 0, \\ Ar^2 + Brs + Cs^2 &\neq 0.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Entonces, para el sistema dado por la ecuación (2.59) obtenemos la ecuación

$$(Aa^2 + Bab + Cb^2)u_{\xi\xi} = 0, \quad (2.61)$$

y para el sistema dado por la ecuación (2.60) obtenemos la siguiente ecuación

$$(Ar^2 + Brs + Cs^2)u_{\eta\eta} = 0. \quad (2.62)$$

Analicemos primero el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (2.59). Para este caso, la ecuación $Ar^2 + Brs + Cs^2 = 0$, la multiplicamos por $4A$ y usando la ecuación $B^2 = 4AC$, se sigue que

$$\begin{aligned} 4A^2r^2 + 4ABrs + 4ACs^2 &= 0, \\ 4A^2r^2 + 4ABrs + B^2s^2 &= 0, \\ (2Ar + Bs)^2 &= 0, \end{aligned}$$

de aquí, obtenemos la siguiente ecuación,

$$2Ar + Bs = 0. \quad (2.63)$$

Ahora, multiplicando la ecuación (2.61) por $4C$

$$\begin{aligned} (4ACa^2 + 4BCab + 4C^2b^2)u_{\xi\xi} &= 0, \\ (B^2a^2 + 4BCab + 4C^2b^2)u_{\xi\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede escribir como,

$$(Ba + 2Cb)^2u_{\xi\xi} = 0.$$

Entonces, podemos elegir las constantes a y b de tal manera que

$$Ba + 2Cb = 1, \quad (2.64)$$

con esto obtenemos la ecuación $u_{\xi\xi} = 0$. Por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2Ar + Bs &= 0, \\ Ba + 2Cb &= 1. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que a , b , r y s están dadas por

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ b &= \frac{1}{2C}, \\ r &= -\frac{B}{2A}, \\ s &= 1. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Así, a , b , r y s cumplen con la ecuación (2.65). Se puede demostrar que la ecuación (2.63) cumple con la ecuación (2.59).

Finalmente, para el caso parabólico, las nuevas variables ξ y η ahora están definidas por

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2C}y, \\ \eta &= -\frac{B}{2A}x + y.\end{aligned}\tag{2.67}$$

De aquí, obtenemos $u_{\xi\xi} = 0$, cuya solución está dada por

$$u(\xi, \eta) = \phi(\eta) + \xi\psi(\eta).$$

Por último, analicemos el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (2.60). Para este caso, a la ecuación $Aa^2 + Bab + Cb^2 = 0$, la multiplicamos por $4A$ y usando la ecuación $B^2 = 4AC$, se sigue que

$$\begin{aligned}4A^2a^2 + 4ABab + 4ACb^2 &= 0, \\ 4A^2a^2 + 4ABab + B^2b^2 &= 0, \\ (2Aa + Bb)^2 &= 0,\end{aligned}$$

de aquí obtenemos la siguiente ecuación,

$$2Aa + Bb = 0.\tag{2.68}$$

Ahora, multiplicando la ecuación (2.62) por $4C$

$$\begin{aligned}(4ACr^2 + 4BCrs + 4C^2s^2)u_{\eta\eta} &= 0, \\ (B^2r^2 + 4BCrs + 4C^2s^2)u_{\eta\eta} &= 0.\end{aligned}$$

Esta ecuación se puede escribir como,

$$(Br + 2Cs)^2u_{\eta\eta} = 0.$$

Entonces, podemos elegir las constantes r y s de tal manera que

$$Br + 2Cs = 1,\tag{2.69}$$

con esto obtenemos la ecuación $u_{\eta\eta} = 0$. Por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2Aa + Bb &= 0, \\ Br + 2Cs &= 1.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que a , b , r y s están dadas por

$$\begin{aligned}a &= -\frac{B}{2A}, \\ b &= 1, \\ r &= 0, \\ s &= \frac{1}{2C}.\end{aligned}\tag{2.71}$$

Así, a , b , r y s cumplen con la ecuación (2.70). Se puede demostrar que la ecuación (2.68) cumple con la ecuación (2.60).

Finalmente, para el caso parabólico las nuevas variables ξ y η ahora están definidas por

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2C}y, \\ \eta &= -\frac{B}{2A}x + y.\end{aligned}\tag{2.72}$$

De aquí, obtenemos $u_{\eta\eta} = 0$, cuya solución está dada por

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \eta\psi(\xi).$$

Ejemplo 2.2.4. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Solución. Consideremos la ecuación $\lambda_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}$, cuyo valor está dado por

$$\lambda = \frac{2}{2} = 1,$$

luego, la ecuación es de tipo parabólico. Luego, para el caso parabólico, las características de la ecuación dada son

$$\begin{aligned}\xi &= x + y, \\ \eta &= \frac{1}{2}y,\end{aligned}$$

por lo que, la forma canónica de la ecuación dada es

$$u_{\eta\eta} = 0,$$

cuya solución es

$$u(x, y) = \phi(x + y) + \frac{1}{2}y\psi(x + y).$$

□

Ejemplo 2.2.5. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \cos x.$$

Solución. Consideremos la ecuación $\lambda_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}$, cuya solución está dada por

$$\lambda = \frac{-2}{2} = -1,$$

luego, la ecuación es de tipo parabólico. Luego, para el caso parabólico, las características de la ecuación dada son

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}y, \\ \eta &= y - x,\end{aligned}$$

por lo que, la forma canónica de la ecuación dada es

$$u_{\xi\xi} = 0,$$

cuya solución es

$$u(x, y) = \phi(y - x) + \frac{1}{2}y\psi(y - x).$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 0, \\ \phi'(x) + \frac{1}{2}\psi(x) &= \cos x,\end{aligned}$$

resolviendo este sistema, llegamos a que

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 0, \\ \psi(x) &= 2 \cos x,\end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación original, obtenemos la siguiente solución

$$u(x, y) = y \cos(x - y).$$

□

2.2.3. Ecuaciones del tipo elíptico.

Para el caso elíptico, los coeficientes de la ecuación (2.33) cumplen con $B^2 - 4AC < 0$. De la ecuación (2.36), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 \neq 0, \quad (2.73)$$

$$2Aar + B(as + br) + 2Cbs = 0, \quad (2.74)$$

$$Ar^2 + Brs + Cs^2 \neq 0. \quad (2.75)$$

Para obtener la ecuación canónica de la forma $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, podemos igualar las ecuaciones (2.73) y (2.75). Así, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$2Aar + B(as + br) + 2Cbs = 0, \quad (2.76)$$

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = Ar^2 + Brs + Cs^2. \quad (2.77)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos hacer $s = b$ en la ecuación (2.76). Luego, se sigue que

$$2Cb^2 + B(a + r)b + 2Aar = 0. \quad (2.78)$$

Introduciendo las siguientes cantidades

$$\begin{aligned}\beta^2 &= 2C, \\ \alpha\beta &= \frac{B}{2}(a+r), \\ \alpha^2 &= 2Aar,\end{aligned}\tag{2.79}$$

tenemos que la ecuación (2.78) se escribe como

$$\begin{aligned}\beta^2 b^2 + 2\alpha\beta b + \alpha^2 &= 0, \\ (\beta b + \alpha)^2 &= 0, \\ \beta b + \alpha &= 0,\end{aligned}$$

por lo que

$$\alpha = -\beta b.\tag{2.80}$$

Utilizando la ecuación (2.79), tenemos que la ecuación (2.80) se escribe como

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \beta^2 b^2, \\ 2Aar &= \beta^2 b^2, \\ 2Aar &= 2Cb^2,\end{aligned}$$

de donde

$$ar = \frac{C}{A}b^2.\tag{2.81}$$

Por otro lado, la ecuación (2.77) en términos de λ_1 y λ_2 dadas por la ecuación (2.46) se puede escribir como

$$(Aa - \lambda_1 b)(Aa - \lambda_2 b) = (Ar - \lambda_1 s)(Ar - \lambda_2 s).\tag{2.82}$$

Desarrollando la ecuación (2.82) se sigue que

$$A^2 a^2 - A\lambda_2 ab - A\lambda_1 ab + \lambda_1 \lambda_2 b^2 = A^2 r^2 - A\lambda_2 rs - A\lambda_1 rs + \lambda_1 \lambda_2 s^2,$$

haciendo $s = b$ en esta última ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}A^2 a^2 - A(\lambda_1 + \lambda_2)ab &= A^2 r^2 - A(\lambda_1 + \lambda_2)rb, \\ A^2(a^2 - r^2) - A(\lambda_1 + \lambda_2)(a-r)b &= 0, \\ A(a+r) - (\lambda_1 + \lambda_2)b &= 0, \\ A(a+r) &= (\lambda_1 + \lambda_2)b,\end{aligned}$$

pero $\lambda_1 + \lambda_2 = -B$, luego esta última ecuación se escribe como

$$A(a+r) = -Bb.\tag{2.83}$$

Ahora, usando la ecuación (2.81), la ecuación (2.83) se escribe como

$$\begin{aligned}
 A^2(a+r)^2 &= B^2b^2, \\
 A^2(a+r)^2 &= \frac{AB^2}{C}ar, \\
 AC(a^2 + 2ar + r^2) &= B^2ar, \\
 a^2 + 2ar - \frac{B^2}{AC}ar + r^2 &= 0, \\
 a^2 + \left(\frac{2AC - B^2}{AC}\right)ar + r^2 &= 0, \\
 a &= \frac{-\left(\frac{2AC - B^2}{AC}\right)r \pm \sqrt{\left(\frac{2AC - B^2}{AC}\right)^2 r^2 - 4r^2}}{2},
 \end{aligned}$$

luego,

$$a = \bar{\lambda}_i r, \quad (2.84)$$

donde,

$$\bar{\lambda}_i = \frac{B^2 - 2AC \pm B\sqrt{B^2 - 4AC}}{2AC}. \quad (2.85)$$

Sustituyendo la ecuación (2.84) en la ecuación (2.83) obtenemos

$$A(\bar{\lambda}_i + 1)r = -Bb,$$

luego

$$r = -\frac{B}{A(\bar{\lambda}_i + 1)}b, \quad (2.86)$$

de donde $\bar{\lambda}_i + 1 = -\frac{B}{AC}\lambda_i$ y λ_i está dada por la ecuación (2.46), por lo que la ecuación (2.86) resulta ser

$$r = \frac{C}{\lambda_i}b. \quad (2.87)$$

De donde,

$$\begin{aligned}
 a &= -C \left(\frac{B}{AC} + \frac{1}{\lambda_i} \right) b, \\
 b &= b, \\
 r &= \frac{C}{\lambda_i} b, \\
 s &= b.
 \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que para el caso elíptico las nuevas variables ξ y η están definidas por

$$\xi = y - C \left(\frac{B}{AC} + \frac{1}{\lambda_i} \right) x, \quad (2.88)$$

$$\eta = y + \frac{C}{\lambda_i} x, \quad (2.89)$$

donde λ_i está definida por la ecuación (2.46). Observemos que

$$\frac{C}{\lambda_i} = -\frac{B}{2A} \mp \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}, \quad (2.90)$$

haciendo este cambio en las nuevas variables ξ y η llegamos a que

$$\xi = \left(y - \frac{B}{2A}x \right) \pm \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}x, \quad (2.91)$$

$$\eta = \left(y - \frac{B}{2A}x \right) \mp \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}x, \quad (2.92)$$

de donde se puede observar que η es el conjugado de ξ , por lo que ahora la forma canónica de la ecuación elíptica está dada por $u_{\xi\bar{\xi}} = 0$, cuya solución es

$$u(\xi, \bar{\xi}) = \phi(\xi) + \psi(\bar{\xi}), \quad (2.93)$$

donde ϕ y ψ son funciones arbitrarias.

Ejemplo 2.2.6. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Solución. Consideremos la ecuación $\lambda_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}$, cuyas solución está dada por

$$\lambda_i = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

luego, la ecuación es de tipo elíptico. Así, para el caso elíptico, las características de la ecuación dada son

$$\begin{aligned} \xi &= \left(y - \frac{x}{2} \right) - i \frac{\sqrt{3}}{2}x, \\ \eta &= \left(y - \frac{x}{2} \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2}x, \end{aligned}$$

por lo que la forma canónica de la ecuación dada es

$$u_{\xi\eta} = u_{\xi\bar{\xi}} = 0,$$

cuya solución es

$$u(x, y) = \phi \left(\left(y - \frac{x}{2} \right) - i \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \psi \left(\left(y - \frac{x}{2} \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

□

Ejemplo 2.2.7. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 4e^{-2x}.$$

Solución. Consideremos la ecuación $\lambda_i = \frac{1}{2}(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})$ cuya solución está dada por

$$\lambda_i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm i2}{2},$$

luego, la ecuación es de tipo elíptico. Para, el caso elíptico, las características de la ecuación dada son

$$\begin{aligned} \xi &= (y - x) - ix, \\ \eta &= (y - x) + ix, \end{aligned}$$

por lo que la forma canónica de la ecuación dada es

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

cuya solución es

$$u(x, y) = \phi((y - x) - ix) + \psi((y - x) + ix),$$

aplicando las condiciones iniciales, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -(i + 1)\phi'(-x(i + 1)) + (i - 1)\psi'(x(i - 1)) &= 0, \\ \phi'(-x(i + 1)) + \psi'(x(i - 1)) &= 4e^{-2x}, \end{aligned}$$

resolviendo este sistema de ecuaciones, llegamos a que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 2ie^{-2x(i-1)}, \\ \psi(x) &= -2ie^{x(i+1)}, \end{aligned}$$

sustituyendo en la solución de la ecuación dada, obtenemos que

$$u(x, y) = 4e^{y-2x} \sin(y).$$

□

Capítulo 3

El método de Descomposición de Adomian

El método de descomposición de Adomian no cambia la naturaleza del problema, en particular no efectúa ninguna linealización ni discretización. Está basado en la búsqueda de una solución en forma de serie y en la descomposición de un operador lineal en serie en los que los términos se calculan de forma recurrente utilizando unos polinomios llamados los polinomios de Adomian. Bajo ciertas condiciones de convergencia, la suma de la serie dará la solución exacta, pero en general la serie se truncará para dar una buena aproximación. El error de truncamiento puede ser estimado la mayoría de las veces.

Esta técnica permite resolver una extensa gama de ecuaciones lineales y no lineales (algebraicas, diferenciales, integrales, en derivadas parciales, . . . , etc). En este método la solución está dada por una serie, en la que cada término se obtiene sin dificultad puesto que los polinomios de Adomian se adaptan a la no linealidad.

En este capítulo se expondrá el método de descomposición de Adomian, el cual es usado para introducir algunos métodos iterativos definidos en las referencias [1, 11, 36].

3.1. El método de descomposición de Adomian

El método de descomposición de Adomian [4, 5, 6] considera, la ecuación no lineal $Fu = g$, donde g es una función arbitraria y F representa el operador diferencial. Fu puede tener parte lineal y no lineal, el cual lo escribimos de la siguiente forma

$$\mathcal{L}u + Nu = g,$$

donde el término lineal \mathcal{L} se descompone por $L + R$, mientras que los términos no lineales son representados por N , el operador L es invertible, R es el resto del operador

lineal L y g una función arbitraria.

A continuación daremos una descripción a grandes rasgos del método de Adomian [4, 5, 6].

Primero se resuelve la ecuación para el operador Lu . En segundo lugar, escribimos el operador lineal en términos de los polinomios conocidos como los polinomios de Adomian A_n . Así, $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ es un conjunto especial de polinomios generados por la no linealidad $Nu = f(u)$. Estos cálculos son tan simples como escribir los polinomios de Hermite o de Legendre. Como tercer punto, asumimos la descomposición de u en términos de una suma, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Cabe mencionar que la solución no es la serie completa de u , pero es la aproximación del n -término $\phi_n = \sum_{t=0}^{n-1}$, para un n conveniente.

Para iniciar con el procedimiento que el método de descomposición de Adomian [3] propone, consideremos la ecuación $Fu = g$ de la siguiente forma

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (3.1)$$

donde L , R , N y g son como los anteriores. Ahora podemos escribir la ecuación (3.1) como

$$Lu = g - Ru - Nu,$$

y aplicando el operador invertible L^{-1} a ambos lados de la ecuación anterior obtenemos la siguiente ecuación

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (3.2)$$

3.2. Evaluación del operador inverso L^{-1}

Consideremos la ecuación diferencial lineal $Lu = h$ [3], con $L = \frac{d^2}{dt^2}$. Definamos el operador inverso como $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t G(t, \tau)(\cdot)d\tau$, donde G es la función de Green la cual satisface

$$\frac{d^2G(t, \tau)}{dt^2} = \delta(t - \tau), \quad (3.3)$$

donde δ , es la función delta de Dirac. Una razón para definir la función de Green por medio de la ecuación diferencial es que esto nos proporciona una forma alternativa (y con frecuencia más fácil) de calcularla. Integrando (3.3) resulta

$$\frac{dG}{dt} = H(t - \tau) + \alpha(\tau), \quad (3.4)$$

donde H es la función Heaviside o mejor conocida como **función escalón** y α es una función arbitraria. Integrando nuevamente la ecuación (3.4), tenemos que

$$G(t, \tau) = (t - \tau)H(t - \tau) + t\alpha(\tau) + \beta(\tau), \quad (3.5)$$

donde β es una función arbitraria, entonces

$$\begin{aligned} u(x, t) &= L^{-1}h(t) = \int G(t, \tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int (t - \tau)H(t - \tau)h(\tau)d\tau + t \int \alpha(\tau)h(\tau)d\tau + \int \beta(\tau)h(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (3.6)$$

las funciones arbitrarias α y β deben ser evaluadas usando las condiciones iniciales o condiciones de frontera sobre la solución obtenida (3.6). Ahora consideremos algunas posibilidades para evaluarlas.

3.2.1. Condiciones de frontera homogéneas

Tomando las condiciones homogéneas acotadas, las cuales están dadas por $u(x, 0) = u(x, 1) = 0$, sustituimos estas condiciones en la ecuación (3.6) de la cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} - \int \tau H(-\tau) h(\tau) d\tau + \int \beta(\tau) h(\tau) d\tau &= 0, \\ \int (1 - \tau) H(1 - \tau) h(\tau) d\tau + t \int \alpha(\tau) h(\tau) d\tau + \int \beta(\tau) h(\tau) d\tau &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \beta(\tau) &= \tau H(-\tau), \\ (1 - \tau) H(1 - \tau) + \alpha(\tau) + \tau H(-\tau) &= 0, \\ \alpha(\tau) &= (\tau - 1) H(1 - \tau) - \tau H(-\tau), \end{aligned}$$

de modo que

$$G(t, \tau) = (t - \tau) H(1 - \tau) + t(\tau - 1) H(1 - \tau) + \tau(1 - t) H(-\tau). \quad (3.7)$$

Podemos observar que $H(1 - \tau)$ es positivo en el intervalo $[0, 1]$ si $\tau < 1$, en este caso el último término de la ecuación (3.7) desaparece ya que τ no puede ser negativo en el intervalo $[0, 1]$ y para el primer término este desaparece excepto cuando $t > \tau$, es decir, en el intervalo $\tau < t < 1$. Obtenemos la siguiente ecuación

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \tau(t - 1), & \text{para } t > \tau \\ t(\tau - 1) & \text{para } t < \tau. \end{cases} \quad (3.8)$$

También podemos aplicar las condiciones de frontera directamente a la función G como una función de t . Así

$$\begin{aligned} G(0, \tau) &= -\tau H(-\tau) + \beta(\tau) = 0, \\ G(1, \tau) &= (1 - \tau) H(1 - \tau) + \alpha(\tau) + \beta(\tau) = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

la cual produce los mismos resultados. Aplicando las condiciones de frontera a la ecuación (3.8), tenemos $G(0, \tau) = 0$, lo que implica $\tau = 0$. De modo similar, $G(1, \tau) = 0$, implica que $\tau = 1$, obteniendo con esto

$$G(t, \tau) = \begin{cases} t, & \text{para } t < \tau \\ 1 - t & \text{para } t > \tau. \end{cases} \quad (3.10)$$

Para hacer que la función de Green sea continua en $t = \tau$, simplemente multiplicamos la primera expresión por el valor de la segunda expresión con $t = \tau$ y viceversa [20], esto es

$$G(t, \tau) = \begin{cases} t(1 - \tau), & \text{para } t < \tau \\ (1 - t)\tau & \text{para } t > \tau. \end{cases} \quad (3.11)$$

Por lo que la solución la podemos escribir de la siguiente forma

$$G(t, \tau) = t(1 - \tau)H(t - \tau) + \tau(1 - t)H(t - \tau), \quad (3.12)$$

y con esta función de Green

$$u(x, t) = \int_0^t G(t, \tau)h(\tau)d\tau,$$

se resuelve la ecuación $Lu = h$.

3.2.2. Condiciones de frontera sobre el intervalo $[0, a]$

Tomando las condiciones de frontera en el intervalo $[0, a]$, las cuales están dadas por $u(x, 0) = u(x, a) = 0$, G debe satisfacer las condiciones de frontera, es decir, $G(0, \tau) = G(a, \tau) = 0$ para el cual α y β pueden ser evaluadas como antes. Tenemos que la función G satisface la ecuación homogénea $Lu = 0$ para $t \neq \tau$. En consecuencia, la función G satisface $\frac{d^2G}{dt^2} = 0$ excepto en $t = \tau$. Por lo que, G debe ser lineal

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{A}t + \tilde{B}, & \text{para } t < \tau \\ \tilde{C}t + \tilde{D}, & \text{para } t > \tau \end{cases} \quad (3.13)$$

para ciertas constantes \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} y \tilde{D} . Aplicando la condición de contorno en $t = 0$ para $t < \tau$, tenemos $G(0, \tau) = 0$, lo que implica $\tilde{A} = 0$. De modo similar, $G(a, \tau) = 0$ implica que $\tilde{C}a + \tilde{D} = 0$. Así

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{A}t, & \text{para } t < \tau \\ \tilde{C}(t - a) & \text{para } t > \tau. \end{cases} \quad (3.14)$$

Las dos constantes restantes se determinan por medio de otras dos condiciones en $t = \tau$. La función G debe ser una función continua en $t = \tau$,

$$G(\tau - 0, \tau) = G(\tau + 0, \tau), \quad (3.15)$$

y existe un salto en la derivada de G ,

$$\frac{dG(\tau + 0, \tau)}{dt} - \frac{dG(\tau - 0, \tau)}{dt} = 1, \quad (3.16)$$

de la ecuación (3.15) implica que

$$\tilde{A}\tau = \tilde{C}(\tau - a),$$

mientras que de la ecuación (3.16) se convierte en

$$\tilde{A} - \tilde{C} = -1.$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \frac{\tau}{a}, \\ \tilde{A} &= \frac{\tau - a}{a},\end{aligned}$$

y por tanto,

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{t(\tau - a)}{a}, & \text{cuando } 0 \leq t < \tau \\ \frac{\tau(t - a)}{a}, & \text{cuando } \tau < t \leq a \end{cases}$$

equivalentemente,

$$G(t, \tau) = \frac{t(\tau - a)}{a}H(\tau - t) + \frac{\tau(t - a)}{a}H(t - \tau). \quad (3.17)$$

3.2.3. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales están dadas por $u(x, 0) = u'(x, 0) = 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d^2G(t, \tau)}{dt^2} &= 0, \\ G(0, \tau) &= 0, \\ G'(0, \tau) &= 0.\end{aligned}$$

La función de Green es la solución de la ecuación homogénea excepto en $t = \tau$. En el punto $t = \tau$, la función G debe ser continua y tener una discontinuidad de -1 en esta derivada. La condición inicial, implica que para $t < \tau$, $G = 0$. Para $t > \tau$, asumimos $G = \tilde{A}t + \tilde{B}$. La condición sobre la derivada requiere que $\tilde{A} = -1$. Luego, G es continua en $t = \tau$, $\tilde{B} = \tau$. Por lo que, $G = -(t - \tau)$ para $t > \tau$ o

$$G(t, \tau) = -(t - \tau)H(t - \tau),$$

para toda t .

Ahora, consideremos $L^{-1}Lu$ ó $L^{-1}\frac{d^2u}{dt^2}$, de donde obtenemos

$$L^{-1}Lu = \int G(t, \tau) \frac{d^2u}{dt^2} d\tau,$$

integrando por partes dos veces, llegamos a la siguiente ecuación

$$L^{-1}Lu = G(t, \tau)u'(x, \tau)|_0^t - G'(t, \tau)u(x, \tau)|_0^t + \int G''u(x, \tau)d\tau,$$

el último término de esta última ecuación es $u(x, t)$ ya que G'' está dada por la ecuación (3.3), de donde

$$L^{-1}Lu = G(t, t)u'(x, t) - G(t, 0)u'(x, 0) - G'(t, t)u(x, t) + G'(t, 0)u(x, 0) + u(x, t), \quad (3.18)$$

de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} G(t, t) &= 0, \\ G'(t, t) &= 0, \\ G'(t, 0) &= 1, \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (3.18), obtenemos la siguiente ecuación

$$L^{-1}Lu = u(x, t). \quad (3.19)$$

Ahora, consideremos las condiciones no homogéneas.

3.2.4. Condiciones iniciales diferentes de cero

De la ecuación (3.2) tomemos solo la parte izquierda ($L^{-1}Lu$) y consideremos las condiciones iniciales diferentes de cero para su evaluación, si el operador diferencial es de segundo orden, es decir, $L = \frac{d^2}{dt^2}$, tenemos que $L^{-1}Lu$ se va a integrar dos veces de 0 a t . La primera integral está dada por

$$\int \frac{d^2u}{dt^2} dt = u_t(x, t) - u_t(x, 0),$$

y por último la segunda integral está dada por

$$\begin{aligned} \int (u_t(x, t) - u_t(x, 0)) dt &= \int u_t(x, t) dt - \int u_t(x, 0) dt \\ &= \int u_t(x, t) dt - u_t(x, 0) \int dt \\ &= u(x, t) - u(x, 0) - tu_t(x, 0). \end{aligned}$$

Así

$$L^{-1}Lu = u(x, t) - u(x, 0) - tu_t(x, 0). \quad (3.20)$$

Otra forma de resolver la ecuación (3.2) es tomando la forma general de la función de Green G , para $L = \frac{d^2}{dt^2}$, es decir

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= (t - \tau)H(t - \tau) + t\alpha(\tau) + \beta(\tau), \\ G'(t, \tau) &= H(t - \tau) + \alpha(\tau), \end{aligned}$$

donde H es la función Heaviside, α y β son funciones arbitrarias y determinemos α y β si $u(x, 0)$ y $u'(x, 0)$ son constantes distintos de cero. Por conveniencia, escribimos $u(x, 0) = a$, $u'(x, 0) = b$. Ahora escribamos $u = u_1 + u_2$, donde u_1 satisface $Lu_1 = g$

con $u_1(x, 0) = u_1'(x, 0) = 0$ y u_2 satisface $Lu_2 = 0$ con $u_2(x, 0) = a$ y $u_2'(x, 0) = b$. Para las condiciones homogéneas (es decir para u_1), claramente $G_1(0, \tau)$ y $G_1'(0, \tau)$ son cero, así

$$\begin{aligned} -\tau H(-\tau) + \beta(\tau) &= 0, \\ H(-\tau) + \alpha(\tau) &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= (t - \tau)H(t - \tau) - tH(-\tau) + \tau H(-\tau), \\ G'(t, \tau) &= H(t - \tau) - H(-\tau). \end{aligned}$$

Para u_2 tenemos que $\frac{d^2 u_2}{dt^2} = 0$, así, $u_2 = \tilde{A}t + \tilde{B}$. Entonces $u_2'(x, 0) = b$, $u_2(x, 0) = a$ y $u_2 = bt + a$. Con esto tenemos que

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2, \\ &= \int_0^t [(t - \tau)H(t - \tau) - tH(-\tau) + \tau H(-\tau)]x(\tau)d\tau + bt + a, \\ &= \int_0^t (t - \tau)H(t - \tau)x(\tau)d\tau + bt + a, \end{aligned}$$

pero este último lo podemos escribir como

$$u = u(x, 0) + tu'(x, 0) + L^{-1}g,$$

donde $L^{-1}g = \int_0^t (t - \tau)H(t - \tau)g(\tau)d\tau$ para $t > \tau$. Los primeros términos son exactamente los que usamos anteriormente. El término L^{-1} , como se puede observar, es una integral simple.

3.2.5. Condiciones de frontera no homogéneas

Para este caso las condiciones de frontera no homogéneas están dadas por $u(x, 0) = a$, $u(x, 1) = b$, tomando el mismo procedimiento que se utilizó en las condiciones de frontera homogéneas consideremos la siguiente ecuación $u = u_1 + u_2$, tal que

$$\begin{aligned} Lu_1 &= h, \\ Lu_2 &= 0, \end{aligned}$$

donde

$$u_1 = \int_0^1 G_1(t, \tau)h(\tau)d\tau,$$

las cuales satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_1(x, 1) = 0, \\ u_2(x, 0) &= a, \quad u_2(x, 1) = b. \end{aligned}$$

Tomando estas condiciones y sustituyendo en la ecuación (3.5), obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} G_1(0, \tau) &= -\tau H(-\tau) + \beta(\tau) = 0, \\ G_1(1, \tau) &= (1 - \tau)H(1 - \tau) + \alpha(\tau) + \beta(\tau) = 0. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \beta(\tau) &= \tau H(-\tau), \\ \alpha(\tau) &= -(1 - \tau)H(1 - \tau) - \tau H(-\tau), \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (3.5), se sigue que

$$G_1 = (t - \tau)H(t - \tau).$$

Ahora, consideremos las condiciones de u_2 la cual satisface $Lu_2 = 0$ o $\frac{d^2 u_2}{dt^2} = 0$, $u_2 = \tilde{A}t + \tilde{B}$. Para la primera condición de u_2 , $\tilde{B} = a$. Para la segunda condición, $\tilde{A} + \tilde{B} = b$ o $\tilde{A} + a = b$ o $\tilde{A} = b - a$. Por lo que,

$$u_2 = a + (b - a)t = u(x, 0) + t(u(x, 1) - u(x, 0)),$$

de donde, la solución está dada por

$$u(x, t) = \int_0^1 G_1(t, \tau)h(\tau) + u(x, 0) + t(u(x, 1) - u(x, 0)).$$

3.2.6. Condiciones mixtas

Estas condiciones están dadas por $u(x, 0) = a$, $u'(x, 1) = b$. Consideremos a u de la siguiente forma $u = u_1 + u_2$ con $Lu_1 = h$, $u_1(x, 0) = 0$, $u_1'(x, 1) = 0$ y $Lu_2 = 0$, $u_2(x, 0) = a$, $u_2'(x, 1) = b$. Para $Lu_2 = 0$ o $\frac{d^2 u_2}{dt^2} = 0$, $u_2 = \tilde{A}t + \tilde{B}$, de donde

$$u_2 = a + t(b - a) = u(x, 0) + t(u'(x, 1) - u(x, 0)).$$

Así

$$u = u(x, 0) + t(u'(x, 1) - u(x, 0)) + L^{-1}h, \quad (3.21)$$

donde la función de Green para $L^{-1}h$ satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} G(0, \tau) &= 0, \\ G'(1, \tau) &= 0. \end{aligned}$$

3.3. Solución de la ecuación diferencial

De la ecuación (3.2) y la ecuación (3.20), tenemos que

$$u = u(x, 0) + tu_t(x, 0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (3.22)$$

Ahora, si se toma la ecuación (3.2) y la ecuación (3.19), tenemos que

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu.$$

Por otro lado, el método de Adomian descompone a $u(x, t)$ como una serie de la siguiente forma

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t),$$

y al operador no lineal Nu lo descompone como

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

donde los términos A_n son los polinomios de Adomian, sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en (3.3), tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

donde

$$u_0 = u(x, 0) + tu_t(x, 0) + L^{-1}g.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos observar que el método de descomposición resuelve ecuaciones diferenciales de la forma $Fu = g$, escribiendo a u como una suma de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ y tomando a u_0 como la solución de la parte lineal.

En consecuencia, podemos reescribir como

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

donde A_n son los polinomios de Adomian [4, 5, 6] de u_0, u_1, \dots, u_n y son obtenidos por la fórmula

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k\right)_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Los polinomios de Adomian son generados por cada componente no lineal y están dados por

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0), \\ A_1 &= u_1 f'(u_0), \\ A_2 &= u_2 f'(u_0) + \frac{u_1^2}{2} f''(u_0), \\ A_3 &= u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f'(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} f''(u_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde $f(u)$ está dado por

$$f(u(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n.$$

Podemos observar que la aproximación de $u(x, t)$ aumenta rápidamente, por lo que la aproximación del n -término es aproximadamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = u(x, t),$$

donde

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x, t), \quad n \geq 0,$$

este último puede ser usado para la aproximación de la solución.

3.4. Convergencia del método de Adomian

Para esto asumiremos que $\{g - Nu\}$ es continua, y u es *región convexa* [15] y que $\frac{\partial Nu}{\partial u}$ existe y es acotada.

Consideremos la ecuación $Fu = g$, que se escribe como $Lu + Nu = g$, donde L es un operador lineal. Nosotros escribiremos

$$\begin{aligned} Lu &= g - Nu, \\ u &= u_0 - L^{-1}Nu = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \end{aligned}$$

donde A_n son los polinomios de Adomian, definidos anteriormente, y tenemos además que

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}A_0, \\ u_2 &= -L^{-1}A_1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u = F^{-1}g = u_0 - L^{-1}A_0 - L^{-1}A_0 - \dots$$

Operando con F , tenemos que

$$\begin{aligned} Fu &= F(F^{-1}g), \\ &= F(u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n), \\ &= L(u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n) + N(u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n), \\ &= L(u_0) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \end{aligned}$$

donde los B_n son los polinomios para la operación no lineal representada por N sobre la función $\{u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\}$, definida como u . Estos son una suma de polinomios donde cada término después de u_0 representa una integración L^{-1} de uno de los polinomios originales A_n .

Claramente, un método simple sería sustituir ϕ_n para algún n relativamente pequeño y verificar que cuando $n \rightarrow \infty$, la solución satisface la ecuación original. El n -término de la aproximación de ϕ_n está dado por

$$\begin{aligned} \phi_n &= u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} A_i, \\ \phi_{n+1} &= u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^n A_i = u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} A_i - L^{-1} A_n, \\ |\phi_{n+1} - \phi_n| &= -|L^{-1} A_n| = -|u_{n+1}| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3.5. Análisis del método Homotópico

A continuación daremos una descripción del método de análisis homotópico [4]. Consideremos el operador diferencial no lineal N . Sea $h \neq 0$ y λ un número complejo. Sean además $A\lambda$ y $B\lambda$ dos funciones analíticas complejas en la región $|\lambda| \leq 1$, tales que

$$A(0) = B(0) = 0, \quad A(1) = B(1) = 1. \quad (3.24)$$

Además, sean

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1,k} \lambda^k, \\ B(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1,k} \lambda^k, \end{aligned}$$

las series de Maclaurin de $A\lambda$ y $B\lambda$ respectivamente. Como $A\lambda$ y $B\lambda$ son analíticas en la región $|\lambda| \leq 1$, tenemos que

$$A(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1,k} = 1,$$

$$B(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1,k} = 1.$$

Las funciones complejas antes definidas, son llamadas *funciones incrustadas* y λ es el *parámetro incrustado*. Consideremos la ecuación diferencial parcial no lineal en su forma general

$$Nu = 0, \quad (3.25)$$

donde N es un operador diferencial, y u es solución de la ecuación (3.1). Resolviendo la ecuación anterior y usando el método homotópico, construimos la siguiente ecuación

$$(1 - \beta(\lambda))L(u(x, \lambda) - u_0(x)) = hA(\lambda)N(u(x, \lambda)), \quad (3.26)$$

donde L es un operador lineal auxiliar, que satisface

$$L(0) = 0, \quad (3.27)$$

y $h \neq 0$ es un parámetro auxiliar, $u_0(x)$ es una condición inicial. Usando el hecho de que $A(0) = 0$ y que $B(0) = 0$, y sustituyendo en la ecuación (3.26), tenemos que

$$L(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad (3.28)$$

esto es

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.29)$$

De forma similar, cuando $\lambda = 1$, la ecuación (3.26) es igual a esta última, teniendo

$$u(x, 1) = u(x). \quad (3.30)$$

Tenemos que $u(x, \lambda)$ converge en el intervalo $0 \leq \lambda \leq 1$, esto es, por como se han definido h , $A\lambda$ y $B\lambda$. Más aun, supóngase que

$$u_0(x) = \left. \frac{\partial^k u(x, \lambda)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

Podemos observar que λ se incrementa de 0 a 1. La solución $u(x, \lambda)$ de la ecuación varía continuamente hacia $u_0(x)$ de la solución $u(x)$ de la ecuación (3.1). Claramente se da una relación entre $u_0(x)$ y $u(x)$. El análisis homotópico debe de encontrar una relación directa entre estas dos soluciones, la cual se describe a continuación.

Consideremos la serie de Maclaurin de $u(x, \lambda)$ sobre $\lambda = 0$, esto es

$$u(x, \lambda) = u(x, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left. \frac{\partial^k u(x, \lambda)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} \right) \frac{\lambda^k}{k!}. \quad (3.32)$$

Asumiendo, que la serie converge cuando $\lambda = 1$, obtenemos de (3.29) y (3.30) la siguiente relación

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x), \quad (3.33)$$

donde

$$u_m(x) = \frac{u_0^m(x)}{m!} = \frac{\partial^m u(x, \lambda) |_{\lambda=0}}{m!}, \quad m \geq 1. \quad (3.34)$$

Derivemos $u_m(x)$, m -veces con respecto a λ , para obtener

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k(1-B(\lambda))}{d\lambda^k} \frac{d^{m-k}}{d\lambda^{m-k}} (Lu(x, \lambda) - Lu_0(x)) = h \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k A(\lambda)}{d\lambda^k} \frac{d^{m-k} Nu(x, \lambda)}{d\lambda^{m-k}}, \quad (3.35)$$

dividiendo la ecuación anterior por $m!$ y haciendo $\lambda = 0$, obtenemos la siguiente ecuación, conocida como **ecuación de deformación de orden m** , esto es

$$L \left(u_m(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{1,k} u_{m-k}(x) \right) = R_m(x), \quad (3.36)$$

donde $R_m(x)$ depende de los valores $u_0(x)$, $u(x)$, \dots , y está dada por

$$R_m(x) = h \sum_{k=1}^m \alpha_{1,k} h_{m-k}(x). \quad (3.37)$$

Además, $h_k(x)$ está dada por

$$h_k(x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k Nu(x, \lambda)}{d\lambda^k} |_{\lambda=0}, \quad (3.38)$$

estas funciones $h_k(x)$ son conocidas como **polinomios homotópicos** [8].

3.6. Derivación del método de descomposición de Adomian

El método de descomposición de Adomian puede ser derivado por el análisis homotópico usando el siguiente teorema [8].

Teorema 3.6.1. Sean los operadores $A\lambda$ y $B\lambda$ dados por $A(\lambda) = \lambda$ y $B(\lambda) = \lambda$ y sea un parámetro auxiliar $h = -1$. Entonces

$$A_n(x) = h_n(x).$$

Demostración.

Asumimos que la solución de la ecuación (3.1) depende del parámetro λ , ($0 \leq \lambda \leq 1$), es más, supongamos también que la solución esta dada por $w(x, \lambda)$ y esta solución es analítica en $\lambda = 0$, tal que

$$w(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\partial^k w(x, \lambda)}{\partial \lambda^k} \Big|_{\lambda=0}. \quad (3.39)$$

Luego, sustituyendo los valores en (3.26), tenemos que

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)L(w(x, \lambda) - u_0(x)) &= -\lambda Fw(x, \lambda), \\ (1 - \lambda)(L(w(x, \lambda)) - L(u_0)) &= -\lambda Fw(x, \lambda), \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde la condición inicial u_0 es la solución del operador lineal

$$L(w(x, 0)) = 0. \quad (3.41)$$

Podemos ver, que cuando $\lambda = 0$, la solución es u_0 y cuando $\lambda = 1$, la solución es $u(x)$, que es la solución de la ecuación no lineal original $F(w(x, \lambda))$.

Derivando la ecuación (3.40) a ambos lados con respecto de λ obtenemos

$$(1 - \lambda) \left(\frac{\partial L(w(x, \lambda))}{\partial \lambda} \right) - (L(w(x, \lambda)) - L(u_0)) = -F(w(x, \lambda)) - \lambda \frac{\partial F(w(x, \lambda))}{\partial \lambda},$$

y cuando $\lambda = 0$ obtenemos la ecuación para u_1 , esto es

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial(w(x, \lambda))}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0}\right) + L(u_0) &= -F(w(x, \lambda)), \\ L\left(\frac{\partial(w(x, \lambda))}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0}\right) &= -L(u_0) - F(w(x, \lambda)), \\ L\left(\frac{\partial(w(x, \lambda))}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0}\right) &= L(u_1), \\ &= -F(u_0) = -A_0, \end{aligned}$$

o

$$u_1(x) = -L^{-1}(A_0). \quad (3.42)$$

Derivando la ecuación (3.41) n -veces con respecto de λ tenemos

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k (1 - \lambda)}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial \lambda^{n-k}} (L(w(x, \lambda)) - L(u_0)) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k (\lambda)}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^{n-k} F(w(x, \lambda))}{\partial \lambda^{n-k}}. \quad (3.43)$$

Simplificando la ecuación anterior y dividiendo por $n!$, con $\lambda = 0$, obtenemos la siguiente ecuación lineal para u_n

$$\begin{aligned} L(u_n) &= -A_{n-1}, \\ u_n &= -L^{-1}(A_{n-1}), \end{aligned}$$

de donde

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F(w(x, \lambda))}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = h_n(x). \quad (3.44)$$

■

En el siguiente teorema [8] se verá la convergencia del método de descomposición de Adomian.

Teorema 3.6.2. *Si la serie*

$$u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x), \quad (3.45)$$

es convergente, entonces es solución de la ecuación $F(x, u) = 0$.

Demostración.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} L \left(u_m - \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{1,k} u_{m-k}(x) \right), \\ &= L \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{1,k} u_{m-k}(x) \right), \\ &= L \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{m-1} \beta_{1,k} u_{m-k}(x) \right), \\ &= L \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1,k} \sum_{m=1}^{m-1} u_{m-k}(x) \right), \\ &= L \left(\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1,k} \right) \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) \right). \end{aligned}$$

Recordemos que $B(\lambda) = \lambda$. Así

$$\beta_{1,k} = \begin{cases} 0 & \text{cuando } k = 0 \\ 1 & \text{cuando } k = 1 \\ 0 & \text{cuando } k \neq 1 \end{cases},$$

están dadas por la ecuación anterior, luego

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) = 0. \quad (3.46)$$

De otra manera

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} h \sum_{k=1}^m \alpha_{1,k} h_{m-k}(x), \\ &= h \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1,k} \sum_{m=k}^{\infty} h_{m-k}(x), \\ &= h \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x), \\ &= h \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N(u(x, \lambda))}{\partial \lambda^m} \Big|_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

Ahora, recordemos que $A(\lambda) = \lambda$. Así

$$\alpha_{1,k} = \begin{cases} 0 & \text{cuando } k=0 \\ 1 & \text{cuando } k=1 \\ 0 & \text{cuando } k \neq 1 \end{cases}.$$

Luego $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1,k} = 1$. Así la expresión toma la forma

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) = h \sum_{m=1}^{\infty} h_m(x) = h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F u(x, \lambda)}{\partial \lambda^m} \Big|_{\lambda=0}. \quad (3.47)$$

Nótese que $h = -1$, luego tenemos que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F u(x, \lambda)}{\partial \lambda^m} \Big|_{\lambda=0} = 0. \quad (3.48)$$

En consecuencia, $u(x, \lambda)$ no es solución de $F(x, u)$ en general cuando $\lambda \neq 1$.

Ahora definamos $\Delta(x, \lambda) = F u(x, \lambda) - F u(x) = F u(x, \lambda)$ como el error de la ecuación $F(x, u)$. La serie de Maclaurin de este error alrededor de $\lambda = 0$ está dada por

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^m \Delta(x, \lambda)}{\partial \lambda^m} \Big|_{\lambda=0} \frac{1}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^m F(x, \lambda)}{\partial \lambda^m} \Big|_{\lambda=0} \frac{1}{m!}. \quad (3.49)$$

De acuerdo a la ecuación (3.45), la serie de Maclaurin converge a $\lambda = 1$, se dice que

$$\Delta(x, 1) = F u(x, 1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Delta(x, \lambda)}{\partial \lambda^m} \Big|_{\lambda=0}, \quad (3.50)$$

tal que

$$u(x) = u(x, 1) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x), \quad (3.51)$$

es solución de la ecuación $F(x, u)$. ■

Capítulo 4

Métodos de Aproximación de Soluciones

Los métodos de aproximación analítica a la solución de EDP's, proporcionan frecuentemente información útil acerca del comportamiento de la solución en valores críticos de la variable dependiente, pero tienden a ser más difíciles de aplicar que los métodos numéricos. Entre las consideraciones que justifican el uso de métodos numéricos para solucionar ciertos tipos de EDP's se encuentran

- Los datos de los problemas reales presentan siempre errores de medición, y el trabajo aritmético para la solución está limitado a un número finito de cifras significativas que resultan en errores de redondeo.
- La evaluación numérica de las soluciones analíticas es a menudo una tarea laboriosa y computacionalmente ineficiente, mientras que los métodos numéricos generalmente proporcionan soluciones numéricas adecuadas, de manera más simple y eficiente.

En años recientes las técnicas más populares para resolver EDP's de forma numérica son el método de diferencias finitas y los Algoritmos Genéticos. Ambos métodos pueden ser usados para más problemas, incluyendo ecuaciones con coeficientes constantes o no constantes, ecuaciones no lineales, entre otros. En este capítulo nos limitaremos a introducir las ideas básicas de estos dos métodos tan populares.

4.1. Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas consiste en que la región de variación continua de los argumentos se sustituye por un conjunto finito (discreto) de puntos (nodos), llamado *malla*; en lugar de las funciones de argumento continuo, se consideran las de argumento discreto, definidas en los nodos de la malla y llamadas *funciones de malla*. Las

derivadas que figuran en la ecuación diferencial se sustituyen (se aproximan) mediante los cocientes respectivos de diferencias, es decir, combinaciones lineales de valores de la función de malla en varios nodos de la red; entonces, la ecuación diferencial se sustituye por un sistema de ecuaciones algebraicas (ecuación en diferencias). Las condiciones iniciales y de frontera también se sustituyen por condiciones iniciales y de contorno en diferencias, para la función de malla.

Los métodos numéricos no persiguen determinar la expresión analítica de la solución, simplemente persiguen determinar los valores nodales de la solución, es decir, una aproximación de los valores que la solución toma en los nudos del mallado realizado.

Consideremos la expansión en series de Taylor [10] de la función $u(x, y)$ de dos variables independientes x y y esto es

$$\begin{aligned} u(x_i \pm h, y_j) &= u_{i \pm 1, j} \\ &= u_{i, j} \pm h(u_x)_{i, j} + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_{i, j} \pm \frac{h^3}{3!}(u_{xxx})_{i, j} + \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} u(x_i, y_j \pm k) &= u_{i, j \pm 1} \\ &= u_{i, j} \pm k(u_y)_{i, j} + \frac{k^2}{2!}(u_{yy})_{i, j} \pm \frac{k^3}{3!}(u_{yyy})_{i, j} + \dots, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} u(x_i + h, y_j \pm k) &= u_{i+1, j \pm 1} \\ &= u_{i, j} + h(u_x)_{i, j} \pm \\ &\quad k(u_y)_{i, j} + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_{i, j} \pm hk(u_{xy})_{i, j} + \frac{k^2}{2}(u_{yy})_{i, j} + \dots, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} u(x_i - h, y_j \pm k) &= u_{i-1, j \pm 1} \\ &= u_{i, j} - h(u_x)_{i, j} \pm \\ &\quad k(u_y)_{i, j} + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_{i, j} \mp hk(u_{xy})_{i, j} + \frac{k^2}{2}(u_{yy})_{i, j} + \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde,

$$\begin{aligned} u_{i, j} &= u(x, y), \\ u_{i \pm 1, j} &= u(x \pm h, y), \\ u_{i, j \pm 1} &= u(x, y \pm k), \\ u_{i+1, j \pm 1} &= u(x + h, y \pm 1), \\ u_{i-1, j \pm 1} &= u(x - h, y \pm 1). \end{aligned}$$

La combinación de estas fórmulas de diferencia nos pueden conducir a muy diferentes formas de aproximar las derivadas parciales (de primer y segundo orden) de la función $u(x, y)$. Pero no todas las formas posibles de combinar distintas fórmulas nos conducirá a esquemas de cálculo que tengan un buen comportamiento, es decir, la aproximación de la solución de la EDP es cercana a la de la solución analítica.

Ahora, elijamos un conjunto de rectángulos con vértices espaciados uniformemente en $P_{i, j}$ con coordenadas (ih, jk) , donde i, j son enteros positivos, negativos o cero, h, k ,

k es el tamaño del espaciado que hay entre cada i y j , como se muestra en la Figura (4.1).

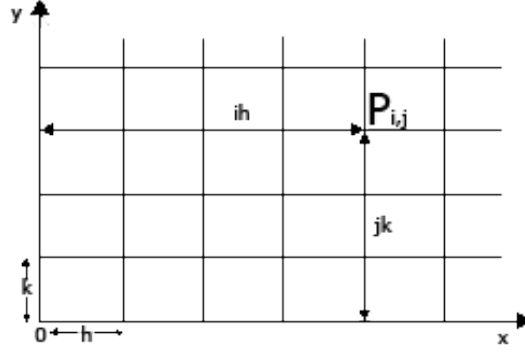


Figura 4.1: Rectángulos con espaciado uniforme.

Ahora, denotemos a $u(ih, jk)$ por $u_{i,j}$. Con la anterior expansión en series de Taylor, podemos expresar de forma aproximada a u_x en el vértice $P_{i,j}$ en términos de $u_{i,j}$, $u_{i\pm 1,j}$

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1}{h}[u(x+h, y) - u(x, y)] \sim \frac{1}{h}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + O(h), \\
 u_x &= \frac{1}{h}[u(x, y) - u(x-h, y)] \sim \frac{1}{h}(u_{i,j} - u_{i-1,j}) + O(h), \\
 u_x &= \frac{1}{2h}[u(x+h, y) - u(x-h, y)] \\
 &\sim \frac{1}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + O(h^2).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Estas expresiones son llamadas diferencias hacia adelante, diferencias hacia atrás y diferencia central de u_x , respectivamente. Las cantidades $O(h)$ o $O(h^2)$ son conocidas como el error de truncamiento en este proceso de discretización (véase apéndice A).

Un resultado de aproximación similar, tomado de la expansión en series de Taylor dadas por la ecuación (4.1) para u_{xx} en el vértice $P_{i,j}$, es

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= \frac{1}{h^2}[u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)] \\
 &\sim \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}] + O(h^2).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

De forma similar las aproximaciones para u_y , u_{yy} y u_{xy} en $P_{i,j}$ tomadas de las

ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.4), son

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1}{k}[u(x, y+k) - u(x, y)] \sim \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + O(k), \\ u_y &= \frac{1}{k}[u(x, y) - u(x, y-k)] \sim \frac{1}{k}(u_{i,j} - u_{i,j-1}) + O(k), \\ u_y &= \frac{1}{2k}[u(x, y+k) - u(x, y-k)] \\ &\sim \frac{1}{2k}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + O(k^2), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \frac{1}{k^2}[u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)] \\ &\sim \frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + O(k^2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -\frac{1}{hk}[u(x+h, y-k) - u(x+h, y) - u(x, y-k) + u(x, y)] \\ &\sim -\frac{1}{hk}(u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i,j}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Todas estas fórmulas de diferencia son extremadamente útiles en la búsqueda de soluciones numéricas de EDP's de primer o segundo orden.

Representemos a $U(x, y)$ como la solución exacta de la EDP dada por $L(U) = 0$, donde $L(U)$ es un operador diferencial con variables independientes x y y , y $u_{i,j}$ es la solución exacta de la correspondiente ecuación en diferencias finitas $F(u_{i,j}) = 0$. Entonces, el esquema de diferencias finitas se dice que es convergente si $u_{i,j}$ tiende a U cuando h y k tienden a cero. La diferencia $d_{i,j} \equiv (U_{i,j} - u_{i,j})$, es llamada el **error de truncamiento acumulativo (o discretización)** [27].

4.1.1. Esquemas para EDP's

Consideremos la ecuación de Euler introducida en el capítulo 1 con coeficientes constantes, la cual está dada por

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \quad (4.10)$$

donde A , B y C son constantes diferentes de cero. Tomando las ecuaciones en diferencias dadas por las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.9), sustituimos en la ecuación (4.10) y por simplicidad, tomemos un mismo espaciado h en las dos direcciones, esto es, haciendo

$k = h$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
& A \left(\frac{1}{h^2} (u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)) \right) + \\
& B \left(-\frac{1}{h^2} (u(x+h, y-h) - u(x+h, y) - u(x, y-h) + u(x, y)) \right) + \\
& C \left(\frac{1}{h^2} (u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)) \right) = 0, \\
& A(u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)) + \\
& B(u(x+h, y-h) - u(x+h, y) - u(x, y-h) + u(x, y)) + \\
& C(u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)) = 0, \\
& Au(x-h, y) - (2A + B + 2C)u(x, y) + (A + B)u(x+h, y) - \\
& Bu(x+h, y-h) + (B + C)u(x, y-h) + Cu(x, y+h) = 0, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

despejando a $u(x, y+h)$ podemos escribir la ecuación (4.10) en diferencias de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
u(x, y+h) = \frac{1}{C} & (-Au(x-h, y) + (2A + B + 2C)u(x, y) - \\
& (A + B)u(x+h, y) + Bu(x+h, y-h) - (B + C)u(x, y-h)), \quad (4.12)
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
u_{i,j+1} = \frac{1}{C} & (-Au_{i-1,j} + (2A + B + 2C)u_{i,j} - (A + B)u_{i+1,j} + \\
& Bu_{i+1,j-1} - (B + C)u_{i,j-1}). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Para el caso cuando $A \neq 0$, $B = 0$ y $C \neq 0$, la ecuación en diferencias queda de la siguiente forma

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{C} (-Au_{i-1,j} + (2A + 2C)u_{i,j} - Au_{i+1,j} - Cu_{i,j-1}). \quad (4.14)$$

Para el caso cuando $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$,

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{B} (-Au_{i-1,j+2} + (2A + B)u_{i,j+2} - (A + B)u_{i+1,j+2} + Bu_{i+1,j+1}). \quad (4.15)$$

Y finalmente tenemos que para el caso cuando $A = 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$,

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{C} ((B + 2C)u_{i,j} - Bu_{i+1,j} + Bu_{i+1,j-1} - (B + C)u_{i,j-1}). \quad (4.16)$$

En particular para las siguientes ecuaciones, sus esquemas están dados de la siguiente forma [10, 25]

- Ecuación hiperbólica (ecuación de onda): la cual está dada por la siguiente ecuación

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (4.17)$$

cuya solución en diferencias finitas está dada por

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

- Ecuación parabólica (ecuación de calor): cuya ecuación es la siguiente

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad (4.18)$$

la cual tiene por solución en diferencias finitas la siguiente ecuación

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

- Crank Nicolson: cálculo de las medias de las diferencias centrales

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \alpha \frac{[(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j-1}) + (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})]}{2},$$

$$\text{donde } \alpha = \frac{c^2 k}{h^2}.$$

- Ecuación elíptica (ecuación de Laplace): la cual está dada por

$$u_{xx} = -u_{yy}, \quad (4.19)$$

y que tiene por solución en forma de diferencias finitas la siguiente ecuación

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0.$$

4.2. Método de algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son métodos evolutivos que pueden usarse para resolver problemas de búsqueda y optimización que consisten básicamente en encontrar un grupo de valores x_1, x_2, \dots, x_n tales que la función $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sea máxima ó mínima, la cual depende de la naturaleza del problema, pudiendo ser esta función, lineal o no lineal, continua o discontinua con respecto a cada una de sus variables independientes. Están basados en el proceso evolutivo de los organismos vivos, los cuales son: selección natural de los mejores individuos de una población, reproducción de los individuos más fuertes y herencia a nivel genético de las mejores características de estos individuos.

En un algoritmo genético cada solución potencial constituye un individuo de la población, a cada individuo se le asigna un valor de aptitud, para que los mejores individuos tengan mayor probabilidad de reproducirse, transmitiendo parte de su información a sus descendientes.

En un algoritmo genético, se llama *cromosoma* a la agrupación de todas las variables $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ de la solución de un problema, donde i es el índice de la solución y n es el tamaño del cromosoma, es decir, es el número de variables de la solución i . La codificación numérica de una solución al problema, se le conoce como *genotipo*. Un genotipo representa una solución al problema en forma codificada y puede verse como un arreglo de valores numéricos. Cada genotipo constituye el material genético de un individuo de la población.

A la función $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se le conoce como *función aptitud* y el valor que esta función devuelve se llama *fenotipo* del individuo; el fenotipo consiste en un valor numérico que indica qué tan buena es esa solución al problema. Para resolver un problema mediante un algoritmo genético, primero se debe determinar de que parámetros depende el problema y asignar una variable a cada parámetro, estas variables x_1, x_2, \dots, x_n constituyen el cromosoma del algoritmo genético; después debe construirse la función de aptitud $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que permita evaluar qué tan buena es una solución.

La población inicial consiste en un grupo de soluciones al problema (individuos) codificadas en genotipos; estos genotipos pueden especificarse o ser generados aleatoriamente entre un intervalo determinado de valores para cada variable del cromosoma. Cuando se tiene la población inicial, se evalúan todos los genotipos de los individuos, por medio de la función aptitud, para determinar el fenotipo de cada individuo; luego se asigna un valor de probabilidad a cada individuo, según su fenotipo, de forma que los mejores individuos de la población tengan mayor valor de probabilidad.

Después de que cada individuo tiene asignado un valor de probabilidad, se crea un determinado número de parejas de individuos al azar, según la probabilidad de cada uno y pudiendo participar, en la creación de cada pareja, todos los individuos de la población, sin importar si ya fue seleccionado en otra pareja. Luego cada pareja se reproduce, produciendo un determinado número de hijos, que constituyen un intercambio de la información de los padres.

Los hijos de todas las parejas, luego de su creación, pueden sufrir mutaciones, esto es, cambios en los valores de su genotipo; para un funcionamiento adecuado de un algoritmo genético, la probabilidad de mutación de un individuo debe ser baja. Los hijos de todas las parejas de individuos formarán parte de la segunda generación, estos nuevos individuos pueden sustituir a todos los de la generación anterior o solamente a los que tengan menor valor de probabilidad; también puede calcularse el fenotipo de estos nuevos individuos, para que sólo los mejores sustituyan a otros de la generación anterior.

Cuando los nuevos individuos han sustituido a otros de la generación anterior, se habrá formado una nueva población o generación de individuos; después se vuelve a realizar el mismo proceso de emparejamiento, reproducción y sustitución de individuos de la población, hasta que aparezca el individuo que constituya la solución al problema.

De lo anterior, puede verse que los individuos de cada generación compiten para ver cual constituye la mejor solución al problema, de forma que sólo los mejores sobrevivan o lleven parte de su material genético (genotipo) a las siguientes generaciones.

Algunas de las ventajas que tienen los algoritmos genéticos son:

- Trabajan con un conjunto de puntos, no con un unico punto y su entorno.
- No necesitan conocimientos específicos sobre el problema a resolver.

4.2.1. Estructura de un algoritmo genético

Un algoritmo genético contiene una serie de procesos, similares a los observados en la evolución biológica de las especies, que permiten solucionar un problema; éstos se describen a continuación.

Codificación de datos en un cromosoma

El cromosoma es la estructura que nos permite representar las posibles soluciones al problema dentro del algoritmo genético; a cada posible solución representada en un cromosoma se le conoce como genotipo. Para diseñar la estructura del cromosoma deben considerarse todas las variables de las que depende la solución del problema; estas variables pueden ser discretas o continuas y sus valores deben estar dentro de un intervalo determinado para cada variable. Se llaman genes a los componentes individuales del cromosoma; cuando las variables de las que depende el problema son discretas, los genes pueden ser de tipo entero o binario; cuando estas variables son continuas, los genes son de tipo real.

El diseño correcto de la estructura del cromosoma puede ser la clave para resolver adecuadamente el problema; un criterio usado para diseñar la estructura del cromosoma, es que las variables relacionadas entre sí, deben de estar cercanas en el cromosoma. El tamaño del cromosoma n varía con cada problema a resolver, ya que éste es proporcional a la cantidad de variables de las cuales depende la solución del problema.

Representación

Una representación debe ser capaz de identificar las características constituyentes de un conjunto de soluciones. Pero la representación binaria no es la única tambien existen otros tipos de representaciones básicas como representación entera y la representación real. Para el caso de la representación entera el gen es un valor entero y para el real es un valor real, véase tabla (4.1)

real	entera	binaria
3.00	3	1 1
2.00	2	1 0

Tabla 4.1: Representación.

Tamaño de la población

La población es el conjunto de individuos con los que se trabaja en el algoritmo genético, estos individuos constituyen posibles soluciones al problema. Los individuos que constituyen la población van cambiando durante el funcionamiento del algoritmo genético, pero el tamaño de la población puede permanecer constante.

Una de las inquietudes más importantes en algoritmos genéticos es el tamaño de la población ya que al parecer las poblaciones que son pequeñas corren el riesgo de no cubrir adecuadamente el espacio de búsqueda, mientras que las poblaciones de gran tamaño nos pueden llevar a problemas relacionados con el costo excesivo. Por lo que el tamaño de la población se determina según el criterio del diseñador, tomando en cuenta la cantidad de genes del cromosoma y el intervalo de valores que éstos pueden adquirir.

Población inicial

La población inicial generalmente es creada asignando valores aleatorios a los genes de cada individuo, dentro de un intervalo determinado y con la misma probabilidad de ocurrencia.

La población inicial de un algoritmo genético puede ser creada de muy diversas formas, desde generar aleatoriamente el valor de cada gen para cada individuo, utilizar una función, generar alguna parte de cada individuo, o partir de la solución de otro algoritmo heurístico y luego aplicar una búsqueda local.

Función aptitud

La función aptitud es la herramienta que permite medir que tan buena es una solución. Al construir una función aptitud nos interesaría que este verifique que para dos individuos que se encuentren cercanos en el espacio de búsqueda, sus respectivos valores en las funciones aptitud sean similares.

Una buena función aptitud debe reflejar el valor del individuo de una manera real, pero en muchos problemas de optimización combinatoria, donde existe gran cantidad de restricciones, buena parte de los puntos del espacio de búsqueda representan individuos no válidos [18].

Un problema habitual en las ejecuciones de los algoritmos genéticos surge debido a la velocidad con la que el algoritmo converge. En algunos casos la convergencia es muy rápida, lo que suele denominarse convergencia prematura, en la cual el algoritmo converge hacia óptimos locales, mientras que en otros casos el problema es justo lo contrario, es decir se produce una convergencia lenta del algoritmo. Una posible solución a estos problemas pasa por efectuar transformaciones en la función aptitud. El problema de la convergencia prematura, surge a menudo cuando la selección de individuos se realiza de manera proporcional a su función aptitud. En tal caso, pueden existir individuos con una adaptación al problema muy superior al resto, que a medida que avanza

el algoritmo dominan a la población. Por medio de una transformación de la función aptitud, en este caso una comprensión del rango de variación de la función aptitud, se pretende que dichos superindividuos no lleguen a dominar a la población. El problema de la lenta convergencia del algoritmo, se resolvería de manera análoga, pero en este caso efectuando una expansión del rango de la función aptitud.

Selección de individuos

La selección es el proceso en el cual, se escogen los individuos que integrarán las parejas que van a reproducirse. El operador de selección es el encargado de transmitir y conservar aquellas características de las soluciones que se consideran valiosas a lo largo de las generaciones. El principal medio para que la información útil se transmita es que aquellos individuos mejor adaptados (mejor valor de función aptitud) tengan más probabilidades de reproducirse. Sin embargo, es necesario también incluir un factor aleatorio que permita reproducirse a individuos que aunque no estén muy bien adaptados, puedan contener alguna información útil para posteriores generaciones. Esto con el objeto de mantener así también una cierta diversidad en cada población. Algunas de las técnicas de las cuales se dispone son las siguientes[19]:

- **Ruleta o selección proporcional.** Con este método la probabilidad que tiene un individuo de reproducirse es proporcional a su valor de función adaptación. En este método se define un rango con las características de la selección por sorteo. El número al azar será un número aleatorio forzosamente menor que el tamaño del rango. El elemento escogido será aquel en cuyo rango este el número resultante de sumar el número aleatorio con el resultado total que sirvió para escoger el elemento anterior. El comportamiento es similar al de una ruleta, donde se define un avance cada tirada a partir de la posición actual.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos los siguientes datos

Individuo	Aptitud	Valor e
(1)	25	0.35
(2)	81	1.13
(3)	36	0.51
(4)	144	2.01
$\sum = 286$		$\sum = 4.00$

$$\bar{f} = \frac{286}{4}, \quad \text{Valor } e_i = \frac{f_i}{f},$$

$$T = \sum \text{Valor } e.$$

Generar $r \in [0.0, 4.0]$, tomemos $r = 1.3$. Luego

- (1) $\text{suma} = 0.35 < r$,
- (2) $\text{suma} = 1.48 > r$,

de donde se selecciona al individuo (2).

□

- **Selección por Ranking.** Consiste en calcular las probabilidades de reproducción atendiendo a la ordenación de la población por el valor de adaptación, esto es, los cromosomas se ordenan de acuerdo a sus valores para la función de adaptación. Luego, se seleccionan para la reproducción a los primeros n cromosomas.
- **Selección por Torneo.** Reporta un valor computacional muy bajo debido a su sencillez. Se selecciona un grupo de t individuos y se genera un número aleatorio entre 0 y 1. Si este número es menor que un cierto umbral K , se selecciona para reproducirse al individuo con mejor adaptación, y si este número es mayor que K , se selecciona, por el contrario, al individuo con peor adaptación.

Ejemplo 4.2.2. Considere los siguientes datos

<i>Orden</i>	<i>Aptitud</i>
(1)	254
(2)	47
(3)	457
(4)	194
(5)	85
(6)	310

de forma aleatoria escoger $r \in (0, 1)$, luego podemos obtener los siguientes resultados

	<i>Ganador</i>
<i>Selecciona</i> $t1 = r = (3)$	
$t2 = r = (6)$	(3)
<i>Selecciona</i> $t1 = r = (1)$	
$t2 = r = (4)$	(1)

y se continua este proceso.

□

Operador de cruce

El operador cruce realiza la reproducción de cada pareja de individuos. Este operador nos permite crear individuos nuevos, combinando el material genético de los padres. Dentro de los métodos habituales destacamos los siguientes:

- **Cruce de un punto.** Se selecciona una posición en las cadenas de los progenitores, y se intercambian los genes a la izquierda de esta posición.

Ejemplo 4.2.3. Consideremos los siguientes cromosomas progenitores

$$\begin{array}{l} P1 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \mid 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ P2 = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \mid 1 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

considerando a la posición 4 como el punto de cruce, los hijos resultantes son

$$\begin{array}{l} H1 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ H2 = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

□

- **Cruce de 2 puntos.** Es una generalización del método anterior. Se seleccionan dos posiciones en las cadenas de los progenitores y se intercambian los genes a ambos lados de estas posiciones.

Ejemplo 4.2.4. Consideremos los siguientes cromosomas

$$\begin{array}{l} P1 = 1 \ 0 \mid 1 \ 1 \ 0 \ 1 \mid 0 \ 1 \\ P2 = 1 \ 1 \mid 1 \ 0 \ 1 \ 1 \mid 1 \ 0 \end{array}$$

considerando a las posiciones 2 y 6 como los puntos de cruce, los hijos resultantes son

$$\begin{array}{l} H1 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ H2 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

□

- **Cruce Uniforme.** Se realiza un test aleatorio para decidir de cual de los progenitores se toma cada posición de la cadena.

Ejemplo 4.2.5. Consideremos los siguientes cromosomas progenitores

$$\begin{array}{l} P1 = 1 \mid 0 \mid 1 \ 0 \mid 1 \ 1 \ 0 \mid 1 \\ P2 = 1 \mid 1 \mid 1 \ 0 \mid 1 \ 1 \ 1 \mid 0 \end{array}$$

considerando a las posiciones 1, 2, 4 y 7 como los puntos de cruce, los hijos resultantes son

$$\begin{array}{l} H1 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ H2 = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

□

- **Cruces para permutación:** Existe una familia de cruces específicos para los problemas de permutación, la cual es usada frecuentemente en problemas de optimización combinatoria [12], como el del viajero frecuente, siendo algunas técnicas las siguientes:

- **Cruce de mapeamiento parcial (PMX).** Toma una subsecuencia del gen del padre y procura preservar el orden absoluto de las variables, es decir, orden y posición en el gen- del resto del cromosoma lo mas parecido posible de la madre.

Ejemplo 4.2.6. *Los padres son:*

$$\begin{aligned} P1 &= 9 \ 8 \ 4 \ | \ 5 \ 6 \ 7 \ | \ 1 \ 3 \ 2 \ 10 \\ P2 &= 8 \ 7 \ 1 \ | \ 2 \ 3 \ 10 \ | \ 9 \ 5 \ 4 \ 6 \end{aligned}$$

Los hijos son:

$$\begin{aligned} H1 &= X \ X \ X \ | \ 2 \ 3 \ 10 \ | \ X \ X \ X \\ H2 &= X \ X \ X \ | \ 5 \ 6 \ 7 \ | \ X \ X \ X \end{aligned}$$

Para completar H1 y H2, copiamos primero los valores que no están en el segmento intercambiando:

$$\begin{aligned} H1 &= 9 \ 8 \ 4 \ | \ 2 \ 3 \ 10 \ | \ 1 \ X \ X \ X \\ H2 &= 8 \ X \ 1 \ | \ 5 \ 6 \ 7 \ | \ 9 \ X \ 4 \ X \end{aligned}$$

Por último mapeamos los valores restantes

$$\begin{aligned} H1 &= 9 \ 8 \ 4 \ 2 \ 3 \ 10 \ 1 \ 6 \ 5 \ 7 \\ H2 &= 8 \ 10 \ 1 \ 5 \ 6 \ 7 \ 9 \ 2 \ 4 \ 3 \end{aligned}$$

□

- **Cruce de orden (OX).** Toma una subsecuencia del gen del padre y procura preservar el orden relativo de las variables del resto del gen lo mas parecido posible de la madre.

Ejemplo 4.2.7. *Los padres*

$$\begin{aligned} P1 &= 9 \ 8 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 1 \ 3 \ 2 \ 10 \\ P2 &= 8 \ 7 \ 1 \ 2 \ 3 \ 10 \ 9 \ 5 \ 4 \ 6 \end{aligned}$$

Sub-cadena elegida: 5 6 7 1 de P1.

Primer hijo

$$H1 = X \ X \ X \ 5 \ 6 \ 7 \ 1 \ X \ X \ X$$

Borrar de P2 la sub-cadena tomada de P1

$$P2' = 8 \ X \ X \ 2 \ 3 \ 10 \ 9 \ X \ 4 \ X$$

Determinar los valores faltantes de H1 sustituyendo de izquierda a derecha los valores que aparecen en P2'

$$H1 = 8 \ 2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 7 \ 1 \ 10 \ 9 \ 4$$

Para obtener H2, el procedimiento es similar, aunque ahora la sub-cadena se tomará de P2 y la sustitución de hará a partir de P1'.

□

- **Cruce de ciclo (CX).** Tomamos el primer gen del genoma del padre, poniéndolo en la primera posición del hijo, y el primer gen del genoma de la madre, poniéndolo dentro del cromosoma del hijo en la posición que ocupe en el genoma del padre. La variable que este en la posición que ocupa el gen del genoma del padre igual al primer gen del genoma de la madre se va a colocar en la posición que ocupe en el genoma del padre, y así hasta rellenar el genoma del hijo.

Ejemplo 4.2.8. *Los padres*

$$\begin{aligned} P1 &= 8 \ 11 \ 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2 \ 12 \ 1 \ 9 \ 7 \ 10 \\ P2 &= 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \end{aligned}$$

Posiciones 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12.

Tomemos las posición 1 para iniciar el ciclo: Los elementos del ciclo serán entonces (1, 8). Por 1 y 8 también aparecen en las posiciones 9 y 8. Por lo tanto, el ciclo ahora incluye los elementos (1, 8, 12). Pero 12 aparece también en la posición 12. Por lo tanto, el ciclo ahora incluye los elementos (1, 8, 12, 10). Pero 10 aparece también en la posición 10. Por lo tanto, el ciclo ahora incluye los elementos (1, 8, 12, 10, 9). Ya no hay nuevos elementos que agregar, por lo que se concluye el ciclo.

Para general al primer hijo, tomamos a P1, removiéndole los elementos que no sean parte del ciclo

$$H1 = 8 \ X \ X \ X \ X \ X \ X \ 12 \ 1 \ 9 \ X \ 10$$

Remover de P2 los valores del ciclo

$$P2' = X \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ X \ X \ X \ 11 \ X$$

Rellenar H1 usando los valores restantes de P2'.

$$H1 = 8 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 12 \ 1 \ 9 \ 11 \ 10$$

□

Es una buena idea que, tanto la codificación como la técnica de cruce, se hagan de manera que las características buenas se hereden; o, al menos, no sea mucho peor que el peor de los padres. En problemas en los que, por ejemplo, la adaptación es función de los pares de genes colaterales, el resultante del cruce uniforme tiene una adaptación completamente aleatoria [18].

Operador de mutación

La mutación se considera un operador básico, que proporciona un pequeño elemento de aleatoriedad en la vecindad (entorno) de los individuos de la población. El operador mutación cambia el valor de uno o varios genes de un individuo, alterando su material genético.

El operador mutación se aplica, con muy baja probabilidad, a los individuos recién creados por el operador cruce; la probabilidad de mutación se establece según el criterio del diseñador, pero ésta debe ser bastante baja, ya que puede reducir el algoritmo genético a una búsqueda local; generalmente la probabilidad de mutación es de 0.1.

El objetivo del operador de mutación es producir nuevas soluciones a partir de la modificación de un cierto número de genes de una solución existente, con la intención de fomentar la variabilidad dentro de la población.

Existen diferentes formas de realizar la mutación, desde la más sencilla (Puntual), donde cada gen muta aleatoriamente con independencia del resto de los genes, hasta configuraciones más complejas donde se tienen en cuenta la estructura del problema y la relación entre los distintos genes [12, 18].

4.2.2. Reemplazo de la población y condición de paro

Cada vez que se aplica el operador de cruce, nos encontramos con un número de nuevos individuos (la descendencia) que se han de integrar en la población para formar la siguiente generación. Esta operación se puede hacer de diversas formas, pero en general existen tres métodos fundamentales para realizar el reemplazo:

- *Cuando el número de individuos llega a un cierto número*, se elimina un subconjunto de la población conteniendo a los individuos peor adaptados.
- *Cada vez que se crea un nuevo individuo*, en la población se elimina el peor adaptado para dejar su lugar a este nuevo individuo.
- *Cada vez que se crea un nuevo individuo*, en la población se elimina aleatoriamente una solución, independientemente de su adaptación.

En cuanto a la condición de paro, por lo general viene determinado por criterios a priori sencillos, como un número máximo de generaciones o un tiempo máximo de resolución, o más eficientemente por estrategias relacionadas con indicadores del estado de evolución de la población, como por la pérdida de diversidad dentro de la población o por no haber mejora en un cierto número de iteraciones. Siendo por lo general una condición mixta lo más utilizado, es decir, limitar el tiempo de ejecución a un número de iteraciones y tener en cuenta algún indicador del estado de la población para considerar la convergencia antes de alcanzar tal limitación.

Funcionamiento de un algoritmo genético

El funcionamiento de un algoritmo genético se resume en el diagrama de flujo mostrado en la figura (4.2)

En muchas aplicaciones se presenta el caso, que los individuos creados mediante la operación de cruce o alterados por la operación de mutación, no representan soluciones válidas al problema; para resolver este inconveniente, debe ajustarse el genotipo de cada

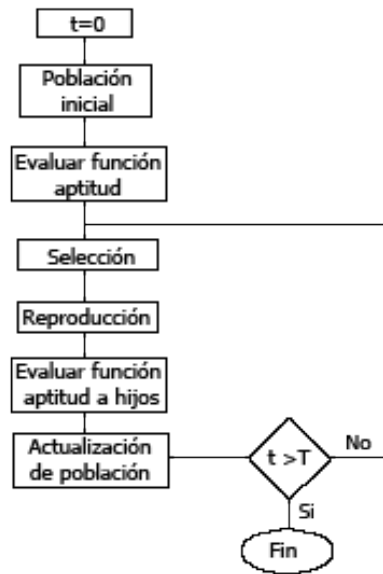


Figura 4.2: Diagrama de flujo

individuo, luego de aplicar las operaciones de cruce y mutación; este ajuste consiste en alterar los genes del individuo, de forma que sea válida la solución que éste represente. En algunas aplicaciones, todos los individuos que se producen, luego de la operación de cruce y mutación, contienen soluciones válidas al problema; en estas aplicaciones no es necesario ajustar los genotipos de los individuos, aunque en algunos casos sus valores se ajustan para evitar que la población se aleje de la solución. El ajuste que debe realizarse al genotipo de cada individuo, varía con el tipo de problema que se intenta resolver; el objetivo de este ajuste es hacer que la solución, que el individuo representa, sea válida.

4.2.3. Diseño del algoritmo genético para la solución de EDP's de segundo orden

Teniendo en cuenta lo anterior, ahora nos enfocaremos en la solución de la EDP de segundo orden dada por la ecuación (4.10) mediante algoritmos genéticos, para esto, se presentan los principales tópicos que se utilizaron para la realización de este trabajo.

Codificación de datos

En un algoritmo genético orientado a resolver EDP's de segundo orden, los datos que se codificarán, utilizando la estructura del cromosoma, son la posición (x, y) . Cada gen del cromosoma contendrá un valor binario de las posiciones, ya que la posición se calculará en forma real y se tendrá que hacer una conversión a su forma binaria, por lo que los genes del cromosoma serán de tipo binario. El orden en que se colocan los valores de las posiciones (x, y) , dependerán de la precisión decimal que se desee. La

estructura del cromosoma de un algoritmo genético orientado a solucionar una EDP se muestra en la Tabla (4.2)

Posición x	representación binaria x	Posición y	representación binaria y
0.0001	00000000000001	0.0010	00000000001010

Tabla 4.2: Estructura de cromosoma

Para este caso presentado en la Tabla (4.2), la precisión es a 4 decimales por lo que, se tiene que hacer una multiplicación del número real por 10,000 para la conversión a su número binario.

Generación de la población inicial

El tamaño de la población debe establecerse cuidadosamente, ya que la búsqueda de la solución no mejorará al aumentar demasiado el tamaño de la población y si la población es pequeña, el algoritmo genético no podrá encontrar la solución al problema, esto es consecuencia de que no existe un método para establecer el tamaño óptimo de la población en un algoritmo genético. Al establecer el tamaño de la población, debe tomarse en cuenta el tamaño del cromosoma, ya que al aumentar la cantidad de genes, también debe aumentarse el tamaño de la población. En la resolución de EDP's de segundo orden, la cantidad de genes depende de la precisión de los puntos x y y , por lo que para resolver una EDP, con una buena precisión, se necesita una población mayor que la necesaria para resolver un problema con una menor precisión, y como consecuencia al tener una población grande, el tiempo requerido por el algoritmo genético para encontrar la solución será mayor. Se han realizado diversos experimentos con la finalidad de obtener un tamaño adecuado para la población, llegando a la conclusión que para la mayoría de los problemas considerados, un tamaño entre 50 y 100 individuos proporciona buenos resultados. La población inicial se genera en forma aleatoria en el intervalo $[a, b]$, este intervalo depende de las condiciones iniciales del problema

Función aptitud

La función aptitud debe asignar un valor numérico a cada individuo, de acuerdo a su cercanía con la solución del problema, este valor nos permitirá comparar dos individuos y determinar qué tan bueno es uno de ellos con respecto al otro, en su capacidad de resolver el problema.

Para determinar si un individuo soluciona la EDP de segundo orden, se deben calcular los valores aproximados de la EDP de segundo orden en las posiciones (x, y) , para este cálculo se utilizan los esquemas en diferencias finitas adaptadas para la forma cuadrática de la EDP de segundo orden, es decir, se emplea la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, si el esquema calculado en la posición (x, y) son iguales a los especificados por la solución analítica, entonces solucionan la EDP's de segundo orden.

Con el fin de poder tener una buena aproximación se ha definido una función aptitud que depende del error relativo, esto es

$$F_{Aptitud} = e_r = \frac{|u_t(i) - u_{num}(i)|}{|u_t(i)|}, \quad (4.20)$$

donde $u_t(i)$ y $u_{num}(i)$ es la solución analítica y numérica en el punto i .

Selección de individuos

En la solución de EDP's de segundo orden por medio de algoritmos genéticos, se puede utilizar cualquier método de selección para escoger a los individuos que integrarán las parejas que van a reproducirse, es preferible utilizar el método de selección por ruleta, ya que éste asigna a cada individuo una probabilidad de selección de acuerdo con su valor de aptitud. En el método de selección por ruleta, a cada individuo se le asigna una probabilidad de selección por medio de la siguiente ecuación

$$Probabilidad_i = \frac{F_{Aptitud_i}}{\sum_{j=1}^N F_{Aptitud_j}}, \quad (4.21)$$

donde $Probabilidad_i$ es la probabilidad de selección del i -ésimo individuo, $Aptitud_i$ es el valor de aptitud del i -ésimo individuo, $Aptitud_j$ es el valor de aptitud del j -ésimo individuo y N es el número de individuos en la población. El resultado de la suma de las probabilidades de selección de todos los individuos de la población debe ser uno.

Operadores de Reproducción

La reproducción tiene por objeto la obtención de nuevos individuos mediante la utilización de los denominados operadores genéticos. Todo algoritmo genético hace uso de, al menos, dos operadores genéticos en la fase de reproducción : cruce y mutación [19].

Los operadores genéticos deben ser capaces de acercar el algoritmo genético a la solución del problema, el más importante de estos es el operador de cruce, ya que éste puede crear nuevos individuos, con buenas capacidades para solucionar el problema, a partir de dos individuos existentes. El operador de mutación debe tener una baja probabilidad de aplicación, este operador debe alterar un gen de un individuo de forma que éste o su descendencia, mejore su aptitud para resolver el problema. Se consideran los siguientes operadores genéticos,

- **Operador de cruce.** El operador de cruce debe ser capaz de crear, a partir de dos individuos, otros individuos mejores que los anteriores. En un algoritmo genético orientado a resolver EDP's de segundo orden, los genes de los individuos poseen valores de tipo binario. En la solución de una EDP, para acercar el algoritmo genético a la solución, a partir de dos buenos individuos, se pueden

intercambiar o promediar los valores de sus genes, los cuales representan la posición (x, y) . El operador de cruce puede ser uniforme o realizarse en uno o varios puntos y además de intercambiar los valores de los genes de los padres. También se deben promediar estos valores, para que el algoritmo genético pueda acercarse a la solución de la EDP.

El operador de cruce utilizado para resolver EDP's de segundo orden puede variar según el criterio del diseñador, pero dependerá de un cruce adecuado, que obtenga la solución del problema, el operador de cruce que se ocupa es el cruce uniforme el cual lo dividimos en tres puntos, los cuales se encuentran en las posiciones 4, 7, 10, 19, 21 y 25. Esto es debido a que el tamaño del cromosoma es de 30, obteniendo de este operador de cruce, dos nuevos individuos.

- **Operador de mutación.** La operación de mutación se aplica a los nuevos individuos, luego de su creación. Esta operación debe alterar, en una pequeña cantidad, el valor de un gen escogido al azar, es decir, la probabilidad de mutación.

El operador de mutación para resolver una EDP de segundo orden, alterará dos genes que correspondan a la parte binaria, el cual su valor va a variar entre 0 y 1, la posición que va alterarse se escogerá de forma aleatoria entre 1 y 14 y la otra posición entre 16 y 30, las cuales corresponden a las partes binarias de cada posición. De no ser así, el valor de aptitud de ese individuo podría decrecer grandemente y esto provocaría que el individuo desapareciera sin legar su material genético.

Capítulo 5

Aplicación del Método de Harper para la Ecuación de Euler

En este capítulo presentaremos una aplicación del método de Harper a la ecuación de Euler dada en el capítulo 1, el cual nos permitirá dar un nuevo método para resolver las EDP's de tipo hiperbólico, parabólico y elíptico .

Para la aplicación del método a la ecuación de Euler se consideran 5 casos, es decir, los coeficientes de la ecuación son de la siguiente forma

- **Caso I.** $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$.
- **Caso II.** $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$.
- **Caso III.** $A = 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$.
- **Caso IV.** $A = 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$.
- **Caso V.** $A \neq 0$, $B = 0$ y $C \neq 0$.

Teniendo en cuenta los casos anteriores, y sabiendo que el factor más importante en el método de Harper es no considerar alguna de las segundas derivadas, a continuación daremos el procedimiento que se realizó para la obtención de las nuevas soluciones para cada caso mencionado anteriormente.

5.1. Caso I

Como primer caso, supongamos que los coeficientes A , B y C de la ecuación de Euler (2.33) son de la forma $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$. Para poder aplicar el método de

Harper, consideremos la siguiente *EDP auxiliar* de segundo orden

$$Av_{xx} + Bv_{xy} = 0, \quad (5.1)$$

haciendo el cambio de variable $w = v_x$ esta ecuación se escribe como

$$Aw_x + Bw_y = 0. \quad (5.2)$$

Las ecuaciones características asociadas a la ecuación (5.2), están dadas por

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dw}{0}.$$

El primer par de ecuaciones $\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}$ tiene como curva característica $\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = c_0 = \text{const.}$, y a partir del otro par de ecuaciones $\frac{dx}{A} = \frac{dw}{0}$ obtenemos la otra curva característica, dada por $w = c_1 = \text{const.}$ Por lo tanto, la solución de la ecuación (5.2) resulta ser

$$w = c_1 = \varphi_1(c_0) = \varphi_1\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right),$$

integrando ésta ecuación, obtenemos la solución de la ecuación (5.1),

$$v = \int \varphi_1\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right) dx + c_0(y),$$

introduciendo la nueva variable $X = \frac{x}{A} - \frac{y}{B}$, esta solución ¹ se escribe como

$$v = \frac{1}{A} \int \varphi_1(X) dX + c_0(y).$$

Ahora, siguiendo el procedimiento de Harper [21], proponemos la siguiente solución de la ecuación diferencial parcial de Euler con $c_0(y) = 0$,

$$u = G(X, Y), \quad (5.3)$$

donde las nuevas variables X y Y están dada por

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{A} - \frac{y}{B}, \\ Y &= Y(x, y). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ademas la variable Y cumple con la siguiente ecuación ²

$$Y_{xx} = Y_{xy} = Y_{yy} = 0. \quad (5.5)$$

Derivando parcialmente la nueva solución y usando la ecuación (5.4) se sigue que,

¹Para el caso en que se tome la ecuación $Bv_{xy} + Cv_{yy} = 0$, se puede demostrar que la solución a esta ecuación esta dada por $v = -c \int \varphi_1(Y) dY + c_0(x)$, donde, ahora la variable Y esta definida por $Y = \frac{x}{B} - \frac{y}{C}$, y la variable $X = X(x, y)$ esta por determinarse.

²Esta ecuación se cumple ya que las ecuaciones de las características de la ecuación (2.49) son lineales en las variables independientes x y y .

$$\begin{aligned}
u_x &= G_X X_x + G_Y Y_x = \frac{1}{A} G_X + Y_x G_Y, \\
u_y &= G_X X_y + G_Y Y_y = -\frac{1}{B} G_X + Y_y G_Y, \\
u_{xx} &= \frac{1}{A} \left(\frac{1}{A} G_{XX} + G_{XY} Y_x \right) + Y_x \left(\frac{1}{A} G_{YX} + G_{YY} Y_x \right) \\
&= \frac{1}{A^2} G_{XX} + \frac{2}{A} Y_x G_{XY} + Y_x^2 G_{YY} + Y_{xx} G_Y, \\
u_{xy} &= Y_{xy} G_Y - \frac{1}{AB} G_{XX} + \left(\frac{1}{A} Y_y - \frac{1}{B} Y_x \right) G_{XY} + Y_x Y_y G_{YY} \\
&= -\frac{1}{AB} G_{XX} + \left(\frac{1}{A} Y_y - \frac{1}{B} Y_x \right) G_{XY} + Y_x Y_y G_{YY} + Y_{xy} G_Y, \\
u_{yy} &= -\frac{1}{B} \left(-\frac{1}{B} G_{XX} + G_{XY} Y_y \right) + Y_y \left(-\frac{1}{B} G_{YX} + G_{YY} Y_y \right) \\
&= \frac{1}{B^2} G_{XX} - \frac{2}{B} Y_y G_{XY} + Y_y^2 G_{YY} + Y_{yy} G_Y.
\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (5.5), estas derivadas resultan ser

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{A} G_X + Y_x G_Y, \\
u_y &= -\frac{1}{B} G_X + Y_y G_Y, \\
u_{xx} &= \frac{1}{A^2} G_{XX} + \frac{2}{A} Y_x G_{XY} + Y_x^2 G_{YY}, \\
u_{xy} &= -\frac{1}{AB} G_{XX} + \left(\frac{1}{A} Y_y - \frac{1}{B} Y_x \right) G_{XY} + Y_x Y_y G_{YY}, \\
u_{yy} &= \frac{1}{B^2} G_{XX} - \frac{2}{B} Y_y G_{XY} + Y_y^2 G_{YY},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

sustituyendo las ecuaciones (5.6) en la ecuación (2.33), se sigue que,

$$\begin{aligned}
&A \left(\frac{1}{A^2} G_{XX} + \frac{2}{A} Y_x G_{XY} + Y_x^2 G_{YY} \right) \\
&+ B \left(-\frac{1}{AB} G_{XX} + \left(\frac{1}{A} Y_y - \frac{1}{B} Y_x \right) G_{XY} + Y_x Y_y G_{YY} \right) \\
&+ C \left(\frac{1}{B^2} G_{XX} - \frac{2}{B} Y_y G_{XY} + Y_y^2 G_{YY} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{C}{B^2} G_{XX} + \left(\frac{ABY_x + (B^2 - 2AC)Y_y}{AB} \right) G_{XY} + (AY_x^2 + BY_x Y_y + CY_y^2) G_{YY} &= 0, \\
\frac{AC}{B} G_{XX} + (ABY_x + (B^2 - 2AC)Y_y) G_{XY} + AB(AY_x^2 + BY_x Y_y + CY_y^2) G_{YY} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Introduciendo la siguientes cantidades

$$\beta = ABY_x + (B^2 - 2AC)Y_y, \tag{5.8}$$

y suponiendo que la variable Y cumple con la EDP,

$$AY_x^2 + BY_xY_y + CY_y^2 = 0, \quad (5.9)$$

tenemos que la ecuación (5.7) se escribe como

$$\frac{AC}{B}G_{XX} + \beta G_{XY} = 0. \quad (5.10)$$

Por otro lado, para poder determinar la variable Y , debemos encontrar la solución de la ecuación diferencial parcial no lineal (5.9). Para utilizar el Método de Charpit(veáse apéndice B), consideremos la siguiente función

$$F(p, q) = Ap^2 + Bpq + Cq^2 = 0, \quad (5.11)$$

donde $p = Y_x, q = Y_y$. Las ecuaciones características asociadas con esta ecuación están dadas por

$$\frac{dx}{2Ap + Bq} = \frac{dy}{2Cq + Bp} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = \frac{dY}{p(2Ap + Bq) + q(2Cq + Bp)}.$$

De esta ecuación se sigue que $dq = 0$, de aquí resulta que $q = a = const.$ y utilizando la ecuación (5.11), obtenemos

$$p = \frac{-Ba \pm \sqrt{B^2a^2 - 4ACa^2}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}a.$$

Ahora, utilizando la ecuación $dY = pdx + qdy$, se sigue que

$$dY = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}adx + ady,$$

integrando esta ecuación y tomando $a = 1$, tenemos que la variable Y está dada por

$$Y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}x + y. \quad (5.12)$$

Introduciendo las siguientes cantidades

$$\alpha_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (5.13)$$

la ecuación (5.12) se escribe como

$$Y = \alpha_i x + y, \quad (5.14)$$

donde $i = 1, 2$. A continuación, analicemos los casos que corresponden a las ecuaciones del tipo hiperbólico, parabólico y elíptico para la ecuación (5.14).

5.1.1. Caso hiperbólico

Para este caso, tenemos que $B^2 - 4AC > 0$ y las cantidades α_i son distintas y reales. Luego, con estos valores, las cantidades β_i , están dadas por la siguiente ecuación

$$\beta_i = ABY_x + (B^2 - 2AC)Y_y = AB\alpha_i + B^2 - 2AC. \quad (5.15)$$

Así que, para el caso hiperbólico, a partir de la ecuación (5.10) obtenemos la siguiente EDP³

$$\frac{AC}{B}G_{XX} + \beta_i G_{XY} = 0. \quad (5.16)$$

Ahora, repetimos el procedimiento una vez más. Entonces, proponemos la solución de la ecuación (5.16) de la forma

$$G = H(Z, W), \quad (5.17)$$

donde las nuevas variables Z, W están definidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Z &= \frac{BX}{AC} - \frac{Y}{\beta_i}, \\ W &= W(X, Y). \end{aligned} \quad (5.18)$$

En forma análoga a la ecuación (5.5), la nueva variable W cumple con la condición

$$W_{XX} = W_{XY} = W_{YY} = 0. \quad (5.19)$$

Utilizando las ecuaciones (5.6) y la ecuación (5.19) (con los coeficientes $\frac{AC}{B}$ y β_i), tenemos que las derivadas parciales de la nueva solución son

$$\begin{aligned} G_X &= \frac{B}{AC}H_Z + W_X H_W, \\ G_Y &= -\frac{1}{\beta_i}H_Z + W_Y H_W, \\ G_{XX} &= \left(\frac{B}{AC}\right)^2 H_{ZZ} + \frac{2B}{AC}W_X H_{ZW} + W_X^2 H_{WW}, \\ G_{XY} &= -\frac{B}{AC\beta_i}H_{ZZ} + \frac{B}{AC}W_Y H_{ZW} - \frac{1}{\beta_i}W_X H_{WZ} + W_X W_Y H_{WW}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

sustituyendo las ecuaciones (5.20) en la ecuación (5.16), se sigue que

$$\begin{aligned} &\frac{AC}{B} \left(\left(\frac{B}{AC}\right)^2 H_{ZZ} + \frac{2B}{AC}W_X H_{ZW} + W_X^2 H_{WW} \right) + \\ &\beta_i \left(-\frac{B}{AC\beta_i}H_{ZZ} + \frac{B}{AC}W_Y H_{ZW} - \frac{1}{\beta_i}W_X H_{WZ} + W_X W_Y H_{WW} \right) = 0, \end{aligned}$$

³Para esta ecuación se puede tener una solución haciendo el cambio de variable $w = G_X$, la cual esta dada por $w = \varphi_2 \left(\frac{BX}{AC} - \frac{Y}{\beta_i} \right)$. Para obtener una solución explícita es necesario tener una condición inicial dada.

reduciendo términos semejantes, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{B}{AC} - \frac{B}{AC}\right) H_{ZZ} + \left(2W_X + \frac{B\beta_i}{AC}W_Y - W_X\right) H_{WZ} \\ + \left(\frac{AC}{B}W_X^2 + \beta_i W_X W_Y\right) H_{WW} = 0, \\ \left(W_X + \frac{B\beta_i}{AC}W_Y\right) H_{WZ} + \left(\frac{AC}{B}W_X^2 + \beta_i W_X W_Y\right) H_{WW} = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Observemos que la ecuación (5.21) se puede escribir de una manera más sencilla

$$H_{ZW} = 0, \quad (5.22)$$

si es que se cumplen las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} \frac{AC}{B}W_X^2 + \beta_i W_X W_Y = 0, \\ W_X + \frac{B\beta_i}{AC}W_Y = 1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

La solución de la ecuación (5.22) está dada por $H_Z = c_1(Z)$, integrando esta ecuación, tenemos que

$$H(Z, W) = \int c_1(Z)dZ + \phi(W) = \psi(Z) + \phi(W), \quad (5.24)$$

donde $\psi(Z) = \int c_1(Z)dZ$. Luego, utilizando las ecuaciones (5.3) y (5.17), obtenemos la solución de la ecuación de Euler para el caso hiperbólico, la cual está dada por

$$u(x, y) = \psi(Z(X(x, y), Y(x, y))) + \phi(W(X(x, y), Y(x, y))), \quad (5.25)$$

donde la nueva variable $W(X, Y)$ está definida por la ecuación (5.23). Para obtener la variable W resolvemos la ecuación (5.23), dicha ecuación la podemos escribir como

$$\begin{aligned} \frac{B}{AC}\left(\frac{AC}{B}W_X + \beta_i W_Y\right) = 1, \\ W_X\left(\frac{AC}{B}W_X + \beta_i W_Y\right) = 0, \end{aligned}$$

de estas ecuaciones concluimos que $W_X = 0$. Luego, obtenemos la nueva solución $\frac{B\beta_i}{AC}W_Y = 1$. Finalmente, se obtiene que la variable W esta dada por

$$W = \frac{AC}{B\beta_i}Y. \quad (5.26)$$

Esta nueva solución nos permite dar un nuevo método para encontrar una solución de la ecuación de Euler sin necesidad de reducirla a su forma canónica. Este nuevo método se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.1.1. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} = 0.$$

Solución. Para este caso, la ecuación cuadrática asociada a esta ecuación es $2\alpha_i^2 + \alpha_i - 1 = 0$, cuyas raíces están dadas por

$$\alpha_i = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)2}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}.$$

Luego, la ecuación dada es de tipo hiperbólico. Por lo tanto, proponemos la solución $u = H(Z, W)$, donde las nuevas variables Z y W están dadas por

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2}X + \frac{1}{\alpha_i}Y, \\ W &= -\frac{2}{\beta_i}Y, \end{aligned}$$

donde β_i esta dada por

$$\beta_i = 2(1)\alpha_i + 1^2 - 2(2)(-1) = 2\alpha_i + 5,$$

con esta nueva solución obtenemos la ecuación $H_{ZW} = 0$, cuya solución esta dada por

$$u = H(Z(X, Y), W(X, Y)) = \psi(Z(X, Y)) + \phi(W(X, Y)),$$

donde,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}x - y, \\ Y &= \alpha_i x + y. \end{aligned}$$

Luego, la solución para $\alpha_1 = -1$, resulta ser ($\beta_1 = -2 + 5 = 3$)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2}X + \frac{1}{\beta_i}Y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - y \right) + \frac{1}{3}(-x + y) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) y = -\frac{1}{12}x - \frac{1}{6}y, \\ W &= -\frac{2}{3}(-x + y) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y, \\ u_1(x, y) &= \psi_1 \left(-\frac{1}{12}x - \frac{1}{6}y \right) + \phi_1 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y \right). \end{aligned}$$

La solución para $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, esta dada por ($\beta_2 = 2(\frac{1}{2}) + 5 = 1 + 5 = 6$)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - y \right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}x + y \right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) y \\ &= \frac{4}{12}x - \frac{2}{6}y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y, \\ W &= -\frac{2}{6}Y = -\frac{2}{6} \left(\frac{1}{2}x + y \right) = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y, \\ u_2(x, y) &= \psi_2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \right) + \phi_2 \left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y \right). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.1.2. Resolver la siguiente EDP

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$$

que satisface las siguientes condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 3x^2, \quad u_y(x, 0) = 0.$$

Solución. Para este caso, la ecuación cuadrática asociada a esta ecuación es $\alpha_i^2 + 2\alpha_i - 3 = 0$, cuyas raíces están dadas por

$$\alpha_i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = -1 \pm 2.$$

Luego, la ecuación dada es de tipo hiperbólico. Por lo tanto, proponemos la solución $u = H(Z, W)$, donde las nuevas variables Z y W están dadas por

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{2}{3}X - \frac{1}{\beta_i}Y, \\ W &= -\frac{3}{2\beta_i}Y, \end{aligned}$$

donde β_i está dada por $\beta_i = (1)(2)\alpha_i + 4 - (2)(1)(-3) = 2\alpha_i + 10$. Con esta nueva solución obtenemos la ecuación $H_{ZW} = 0$, cuya solución está dada por

$$u(x, y) = H(Z(X, Y), W(X, Y)) = \Psi(Z(X, Y)) + \Phi(W(X, Y)),$$

donde,

$$\begin{aligned} X &= x - \frac{1}{2}y, \\ Y &= \alpha_i x + y. \end{aligned}$$

Luego, la solución para $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 12$, resulta ser

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{1}{4}(3x - y), \\ W &= -\frac{1}{8}(x + y), \\ u_1(x, y) &= \Psi\left(-\frac{1}{4}(3x - y)\right) + \Phi\left(-\frac{1}{8}(x + y)\right). \end{aligned}$$

La solución para $\alpha_2 = -3$, $\beta_2 = 4$, está dada por

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{12}(x + y), \\ W &= \frac{3}{8}(3x - y), \\ u_2(x, y) &= \Psi\left(\frac{1}{12}(x + y)\right) + \Phi\left(\frac{3}{8}(3x - y)\right). \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones iniciales a $u_1(x, y)$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 6\Psi'(6z) + \Phi'(z) &= 384z, \\ 2\Psi'(6z) - \Phi'(z) &= 0, \end{aligned}$$

donde $z = -\frac{1}{8}x$, de este sistema de ecuaciones obtenemos que

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= 4z^2, \\ \Phi(z) &= 48z^2, \end{aligned}$$

sustituyendo en u_1 , llegamos a que la solución está dada por

$$u_1(x, y) = 3x^2 + y^2.$$

Aplicando las condiciones iniciales a $u_2(x, y)$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{27}{2}\Psi'\left(\frac{27}{2}z\right) + \Phi'(z) &= 864z, \\ -\frac{3}{8}\Psi'\left(\frac{27}{2}z\right) + \frac{1}{12}\Phi'(z) &= 0, \end{aligned}$$

donde $z = \frac{1}{12}x$, al resolver este sistema de ecuaciones, obtenemos que

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{16}{9}z^2, \\ \Phi(z) &= 108z^2, \end{aligned}$$

sustituyendo en u_2 , llegamos a que la solución está dada por

$$u_2(x, y) = 3x^2 + y^2.$$

□

5.1.2. Caso parabólico

Para este caso se cumple que $B^2 - 4AC = 0$ y los valores de α_i son iguales y distintos de cero, dados por

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{B}{2A}.$$

Siguiendo con el procedimiento de Harper, proponemos la solución de la forma $u = G(X, Y)$; donde las nuevas variables X y Y están dadas por la ecuación (5.4) y (5.14), es decir

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{A}x - \frac{1}{B}y, \\ Y &= -\frac{B}{2A}x + y. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Así, la ecuación (2.33) se escribe como

$$\frac{AC}{B}G_{XX} + \beta G_{XY} = 0.$$

Para este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} \beta &= ABY_x + (B^2 - 2AC)Y_y \\ &= AB\left(-\frac{B}{2A}\right) + B^2 - 2AC \\ &= -\frac{B^2}{2} + B^2 - 2AC \\ &= \frac{B^2}{2} - 2AC = 0, \end{aligned}$$

en esta ecuación se usó el hecho de que $B^2 = 4AC$. Así que, para el caso parabólico, tenemos la siguiente ecuación diferencial parcial

$$G_{XX} = 0. \quad (5.28)$$

Cuya solución está dada por

$$G = \int \chi(Y) dX. \quad (5.29)$$

Por otro lado, de la ecuación (5.27) se sigue que $x = \frac{2A(y-Y)}{B}$; sustituyendo este valor en la ecuación de (5.27), obtenemos

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{A} - \frac{y}{B} = \frac{1}{A} \left(\frac{2A(y-Y)}{B} - \frac{y}{B} \right) \\ &= -\frac{2}{B}Y + \frac{2}{B}y - \frac{y}{B} = \frac{1}{B}y - \frac{2}{B}Y, \end{aligned}$$

con esta ecuación, la ecuación (5.29) se escribe como

$$\begin{aligned} G &= \int \chi(Y) d\left(\frac{1}{B}y - \frac{2}{B}Y\right) \\ &= \frac{1}{B} \int \chi(Y) dy - \frac{2}{B} \int \chi(Y) dY \\ &= \frac{1}{B} \chi(Y) \int dy - \frac{2}{B} \int \chi(Y) dY. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la solución de la ecuación de Euler para el caso parabólico, la cual está dada por

$$u = \frac{1}{B}y\chi(Y) - \frac{2}{B}\Psi(Y), \quad (5.30)$$

donde, para este caso $\Psi(Y) = \int \chi(Y) dY$.

Ejemplo 5.1.3. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Solución. Para este caso, consideremos la ecuación $\alpha_i^2 - 2\alpha_i + 1 = 0$, cuyas raíces están dadas por

$$\alpha_i = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1,$$

luego, la ecuación es de tipo parabólico. Proponemos, entonces la solución de la forma $u = G(X, Y)$, donde las nuevas variables están dadas por

$$X = x + \frac{1}{2}y, \quad Y = x + y,$$

con esta solución, la ecuación original se escribe como $G_{XX} = 0$, cuya solución está dada por $G_X = \chi(Y)$, integrando esta ecuación se sigue que

$$\begin{aligned} G &= \int \chi(Y) dY = \int \chi(Y) d\left(Y - y + \frac{1}{2}y\right) = \int \chi(Y) d\left(Y - \frac{1}{2}\right) \\ &= \int \chi(Y) dY - \frac{1}{2} \int \chi(Y) dy = \int \chi(Y) dY - \frac{1}{2} \chi(Y) \int dy. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución de la ecuación dada, resulta ser

$$u(x, y) = \phi(x + y) - \frac{y}{2}\chi(x + y),$$

donde $\phi(x + y) = \int \chi(x + y) d(x + y)$. □

Ejemplo 5.1.4. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \cos x.$$

Solución. Para este caso, consideremos la ecuación $\alpha_i^2 + 2\alpha_i + 1 = 0$, cuyas raíces están dadas por

$$\alpha_i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(1)}}{2} = -1,$$

luego, la ecuación es de tipo parabólico. Proponemos, entonces la solución de la forma $u = G(X, Y)$, donde las nuevas variables están dadas por

$$\begin{aligned} X &= x - \frac{1}{2}y, \\ Y &= -x + y, \end{aligned}$$

con esta solución, la ecuación original se escribe como $G_{XX} = 0$, cuya solución está dada por

$$\begin{aligned} G &= \int \chi(Y) dX = \int \chi(Y) d\left(\frac{1}{2}y - Y\right) \\ &= - \int \chi(Y) dY + \frac{1}{2} \chi(Y) \int dy \\ &= \Phi(Y) - \frac{y}{2} \Psi(Y) \\ &= \Phi(-x + y) - \frac{y}{2} \Psi(-x + y). \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 0, \\ \Psi(x) &= -2 \cos x, \end{aligned}$$

sustituyendo en $\Phi(-x + y) - \frac{1}{2} \Psi(-x + y)$, obtenemos que la solución es

$$u(x, y) = y \cos(x - y).$$

□

5.1.3. Caso elíptico

Finalmente, para este caso se cumple que $B^2 - 4AC < 0$. Esto implica que los coeficientes α_i son números complejos, los cuales están dados por

$$\alpha_i = \frac{-B \pm i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}.$$

Con estos valores y utilizando la ecuación (5.14), la variable Y está dada por

$$Y_i = \left(-\frac{B}{2A}x + y\right) \pm i\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}x,$$

y la variable X , como antes, esta dada por $X = \frac{1}{A}x - \frac{1}{B}y$. En forma análoga, proponemos la solución de la forma $u = G(X, Y)$, luego la ecuación (2.33) se reduce a la ecuación (5.16), es decir, obtenemos la ecuación

$$\frac{AC}{B}G_{XX} + \bar{\beta}_i G_{XY} = 0, \quad (5.31)$$

donde el coeficiente $\bar{\beta}_i$ esta dado por la ecuación (5.8), la cual se escribe como

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_i &= ABY_x + (B^2 - 2AC)Y_y \\ &= \frac{1}{2}(B^2 - 4AC \pm iB\sqrt{4AC - B^2}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Repetimos el procedimiento nuevamente, y entonces proponemos la siguiente solución $G = H(Z, W)$, donde, en forma análoga a la ecuación (5.18), las variables Z y W están dadas por

$$\begin{aligned} Z &= \frac{B}{AC}X - \frac{Y}{\bar{\beta}_i}. \\ W &= W(X, Y). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Así, con esta solución se obtiene la ecuación $H_{ZW} = 0$, cuya solución está dada por la ecuación (5.24) y la variable W esta dada por la ecuación (5.23)

$$\frac{AC}{B}W_X^2 + \bar{\beta}_i W_X W_Y = 0, \quad (5.34)$$

$$W_X + \frac{B\bar{\beta}_i}{AC}W_Y = 1, \quad (5.35)$$

de la ecuación (5.34), obtenemos que

$$\frac{AC}{B} \left(W_X + \frac{B\bar{\beta}_i}{AC} W_Y \right) W_X = 0,$$

sustituyendo la ecuación (5.35) es esta última ecuación, se sigue que

$$W_X = 0,$$

de donde

$$W_Y = -\frac{1}{B^3}\bar{\beta}_i,$$

integrando esta última ecuación con respecto de Y , llegamos a que la variable W esta dada por la siguiente ecuación

$$W = -\frac{1}{B^3}\bar{\beta}_i Y. \quad (5.36)$$

Así, obtenemos la solución de la ecuación de Euler para el caso elíptico, la cual está dada por

$$u(x, y) = \chi(Z(X(x, y), Y(x, y))) + \phi\left(-\frac{1}{B^3}\bar{\beta}_i Y(x, y)\right). \quad (5.37)$$

Ejemplo 5.1.5. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Solución. Para este caso, consideremos la ecuación cuadrática $\alpha_i^2 + \alpha_i + 1 = 0$, cuyas raíces están dadas por

$$\alpha_i = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

luego la ecuación es de tipo elíptica. Proponemos, entonces la solución de la forma $u = H(Z, W)$, donde las nuevas variables están dadas por

$$\begin{aligned} Z &= X - \frac{Y_i}{\bar{\beta}_i}, \\ W &= -\bar{\beta}_i Y_i, \end{aligned}$$

donde $\bar{\beta}_i$ está dado por $\bar{\beta}_i = \frac{1}{2}(-3 \pm i\sqrt{3})$. Con esta nueva solución, obtenemos la ecuación $H_{ZW} = 0$, cuya solución está dada por

$$u(x, y) = \Phi(Z(X, Y)) + \Psi(W(X, Y)),$$

donde

$$\begin{aligned} X &= x - y, \\ Y_i &= -\frac{1}{2}x + y \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}x. \end{aligned}$$

Luego, la solución para $Y_1 = -\frac{1}{2}x + y + i\frac{\sqrt{3}}{2}x$ con $\bar{\beta}_1 = -\frac{1}{2}(3 - i\sqrt{3})$, resulta ser

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{6}(3(x - y) + \sqrt{3}i(x + y)), \\ W &= \frac{1}{2}(-3(x - y) + \sqrt{3}i(x + y)), \\ u(x, y)_1 &= \Phi\left(\frac{1}{6}(3(x - y) + \sqrt{3}i(x + y))\right) + \Psi\left(\frac{1}{2}(-3(x - y) + \sqrt{3}i(x + y))\right). \end{aligned}$$

Y la solución para $Y_2 = -\frac{1}{2}x + y - i\frac{\sqrt{3}}{2}x$ con $\bar{\beta}_2 = -\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3})$, está dado por

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{6}(9(x - y) + \sqrt{3}i(x + y)), \\ W &= \frac{1}{2}(3(x - y) + \sqrt{3}i(x + y)), \\ u(x, y)_2 &= \Phi\left(\frac{1}{6}(9(x - y) - \sqrt{3}i(x + y))\right) + \Psi\left(\frac{1}{2}(3(x - y) + \sqrt{3}i(x + y))\right). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.1.6. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0,$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 4e^{-2x}.$$

Solución. Consideremos la ecuación cuadrática $\alpha_i^2 + 2\alpha_i + 2 = 0$, cuyas raíces están dadas por

$$\alpha_i = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2} = -1 \pm i,$$

luego la ecuación es de tipo elíptica. Proponemos, entonces la solución de la forma $u = H(Z, W)$, donde las nuevas variables están dadas por

$$Z = X - \frac{Y_i}{\bar{\beta}_i},$$

$$W = -\frac{1}{8}\bar{\beta}_i Y_i,$$

donde $\bar{\beta}_i$ está dado por $\bar{\beta}_i = -2 \pm 2i$. Con esta nueva solución, obtenemos la ecuación $H_{ZW} = 0$, cuya solución está dada por

$$u(x, y) = \Phi(Z(X, Y)) + \Psi(W(X, Y)),$$

donde

$$X = x - \frac{1}{2}y,$$

$$Y_i = -x + y \pm ix.$$

Luego, la solución para $Y_1 = -x + y + ix$ con $\bar{\beta}_1 = -2 + 2i$, resulta ser

$$Z = \frac{1}{4}(2x - y + iy),$$

$$W = \frac{1}{4}(-2x + y + iy),$$

$$u_1(x, y) = \Phi\left(\frac{1}{4}(2x - y + iy)\right) + \Psi\left(\frac{1}{4}(-2x + y + iy)\right).$$

Y la solución para $Y_2 = -x + y - ix$ con $\bar{\beta}_2 = -2 - 2i$, está dada por

$$Z = \frac{1}{4}(2x - y - iy),$$

$$W = \frac{1}{4}(-2x + y - iy),$$

$$u_2(x, y) = \Phi\left(\frac{1}{4}(2x - y - iy)\right) + \Psi\left(\frac{1}{4}(-2x + y - iy)\right).$$

Aplicando las condiciones iniciales a $u_1(x, y)$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Phi' \left(\frac{1}{2}x \right) - \Psi' \left(-\frac{1}{2}x \right) &= 0, \\ -(1-i)\Phi' \left(\frac{1}{2}x \right) + (1+i)\Psi' \left(-\frac{1}{2}x \right) &= 16e^{-2x},\end{aligned}$$

de este sistema de ecuaciones obtenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= 2ie^{-4x}, \\ \Psi(x) &= -2ie^{4x},\end{aligned}$$

sustituyendo en u_1 , llegamos a que la solución está dada por

$$u(x, y) = 4e^{y-2x} \sin y.$$

Ahora, aplicando las condiciones iniciales a $u_2(x, y)$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Phi' \left(\frac{1}{2}x \right) - \Psi' \left(-\frac{1}{2}x \right) &= 0, \\ -(1+i)\Phi' \left(\frac{1}{2}x \right) + (1-i)\Psi' \left(-\frac{1}{2}x \right) &= 16e^{-2x},\end{aligned}$$

de este sistema de ecuaciones obtenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -2ie^{-4x}, \\ \Psi(x) &= 2ie^{4x},\end{aligned}$$

sustituyendo estas cantidades en u_2 , llegamos a que la solución está dada por

$$u(x, y) = 4e^{y-2x} \sin y.$$

□

5.2. Caso II

Ahora, consideremos el caso cuando $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$. Luego, la ecuación (2.33) dada por $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$ se escribe como

$$Au_{xx} + Bu_{xy} = 0. \quad (5.38)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (5.16). Utilizando la ecuación (5.18) para este caso, las variables X y Y están dadas por

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{A}x - \frac{1}{B}y, \\ Y &= Y(x, y),\end{aligned}$$

donde la ecuación cumple con la ecuación (5.19). Utilizando la ecuación (5.26), la ecuación (5.38) se escribe como

$$\left(Y_x + \frac{B}{A}Y_y\right)H_{XY} + (AY_x^2 + BY_xY_y)H_{YY} = 0,$$

donde como antes, suponemos que la solución está dada por $H = H(X, Y)$. Esta ecuación se escribe como $H_{XY} = 0$, si es que se cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} Y_x + \frac{B}{A}Y_y &= 1, \\ AY_x^2 + BY_xY_y &= 0. \end{aligned}$$

En forma análoga a la ecuación (5.16), la solución de la ecuación (5.38) está dada por

$$u(x, y) = \chi(X(x, y)) + \phi(Y(x, y)), \quad (5.39)$$

donde las variables X , Y están dadas por

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{A}x - \frac{1}{B}y, \\ Y &= \frac{A}{B}y. \end{aligned} \quad (5.40)$$

5.3. Caso III

Ahora, supongamos que se cumple que $A = 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$. Con esto la ecuación (2.33) se escribe como

$$Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0. \quad (5.41)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (5.16). Utilizando la ecuación (5.18), para este caso las variables X y Y están dadas por

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{B}x - \frac{1}{C}y, \\ Y &= Y(x, y), \end{aligned}$$

donde la ecuación cumple con la ecuación (5.19). Utilizando, la ecuación (5.26), la ecuación (5.41) se escribe como

$$\left(Y_x + \frac{B}{A}Y_y\right)H_{XY} + (AY_x^2 + BY_xY_y)H_{YY} = 0,$$

donde, como antes, suponemos que la solución está dada por $H = H(X, Y)$. Esta ecuación se escribe como $H_{XY} = 0$, si es que se cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} Y_x + \frac{B}{A}Y_y &= 1, \\ AY_x^2 + BY_xW_y &= 0. \end{aligned}$$

En forma análoga a la ecuación (5.16), la solución de la ecuación (5.41) esta dada por

$$u(x, y) = \chi(X(x, y)) + \phi(Y(x, y)), \quad (5.42)$$

donde las variables X , Y están dadas por

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{B}x - \frac{1}{C}y, \\ Y &= \frac{B}{C}y. \end{aligned} \quad (5.43)$$

5.4. Caso IV

Supongamos que se cumple que $A = 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$, la ecuación (2.33) ya está en forma canónica y para el caso hiperbólico se escribe como

$$u_{xy} = 0. \quad (5.44)$$

Esta coincide con la ecuación (5.22) con $A = 0$ y $C = 0$, cuya solución está dada por

$$u(x, y) = \phi(x) + \psi(y). \quad (5.45)$$

5.5. Caso V

Ahora, supongamos que se cumple que $A \neq 0$, $B = 0$ y $C \neq 0$. Con esto la ecuación (2.33) se escribe como

$$Au_{xx} + Cu_{yy} = 0, \quad (5.46)$$

mejor conocida como la ecuación de Laplace. Para este caso los coeficientes α_i son números complejos, los cuales están dados por

$$\alpha_i = \pm i \frac{\sqrt{AC}}{A}.$$

Con estos valores y utilizando la ecuación (5.14), la variable X y Y están dadas por

$$\begin{aligned} X &= y + i \frac{\sqrt{AC}}{A}x, \\ Y &= y - i \frac{\sqrt{AC}}{A}x. \end{aligned}$$

Proponemos la solución de la forma $u = G(X, Y)$, luego la ecuación (5.46) se reduce a la siguiente ecuación

$$G_{XY} = 0, \quad (5.47)$$

integrando dos veces esta ecuación, la solución está dada por

$$u(x, y) = \phi(X) + \psi(Y). \quad (5.48)$$

Capítulo 6

Resultados Analíticos y Numéricos

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos mediante los diferentes métodos que se han presentado en los capítulos 2 y 3, a fin de comparar con las soluciones obtenidas en el capítulo 5. Además se ilustrará el método de descomposición de Adomian con los ejemplos utilizados en el transcurso de este trabajo de tesis.

Para realizar esto, tomaremos en cuenta los diferentes ejemplos de EDP's de segundo grado con condiciones iniciales presentados a lo largo de esta tesis.

6.1. Ecuación hiperbólica

Consideremos a continuación la EDP de Euler de segundo orden para el caso hiperbólico, cuyas soluciones analíticas mediante el método de las variables canónicas, Stephenson-Radmore y Harper, respectivamente están dadas por

$$u(x, y) = \phi(y - \lambda_1 x) + \psi(y - \lambda_2 x), \quad (6.1)$$

$$u(x, y) = \phi\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}x + \frac{A}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}y\right) + \psi\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}x + \frac{A}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}y\right), \quad (6.2)$$

$$u(x, y) = \phi(Z) + \psi(W), \quad (6.3)$$

donde λ_i para la ecuación (6.1) está dada por $\lambda_i = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, y para la ecuación (6.2) está dada por $\lambda_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}$, para la ecuación (6.3), las variables Z y W , están dadas por las ecuaciones (5.18) y (5.26).

Ahora, tomemos el ejemplo (1.2.2) de la página 15 y resolvamos por medio del método de descomposición de Adomian, el cual es un método analítico. De acuerdo a las condiciones iniciales, podemos reescribir a la ecuación del ejemplo (1.2.2) de la

siguiente forma

$$u_{yy} = \frac{1}{3}(u_{xx} + 2u_{xy}). \quad (6.4)$$

Usando el operador $L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$L_{yy}u = \frac{1}{3}(u_{xx} + 2u_{xy}). \quad (6.5)$$

Aplicando el operador inverso $L_{yy}^{-1} = \int_0^y \int_0^y (\cdot) dy dy$ a ambos lados de la ecuación (6.5), obtenemos

$$u = u(x, 0) + u_y(x, 0)y + \frac{1}{3} \int_0^y \int_0^y (u_{xx} + 2u_{xy}) dy dy,$$

y la solución por el método de descomposición de Adomian consiste en el siguiente esquema

$$\begin{aligned} u_0 &= 3x^2, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3} \int_0^y \int_0^y ((u_n)_{xx} + 2(u_n)_{xy}) dy dy, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} u_0 &= 3x^2, \\ u_1 &= y^2, \\ u_2 &= 0, \\ &\vdots \\ u_n &= 0, \end{aligned}$$

por lo que la solución del ejemplo (1.2.2) por medio de este método resulta ser

$$u(x, y) = 3x^2 + y^2. \quad (6.6)$$

□

Esta solución coincide con la aplicación de las ecuaciones (6.1), (6.2) y (6.3).

Por lo anterior, podemos observar que las soluciones mediante los distintos métodos analíticos para el caso hiperbólico son las mismas, para verificar esto, haremos una comparación para algunos valores dados de los resultados obtenidos, las cuales se pueden observar en la Tabla 6.1

Ahora, veamos los resultados que se obtuvieron mediante los métodos numéricos presentados en el capítulo 4.

Para esto, tomemos valores dados, los cuales se presentan en las tablas (6.2) y (6.3), los resultados obtenidos del ejemplo (1.2.2) por el método de diferencias finitas y algoritmos genéticos, así como la comparación con los resultados analíticos obtenidos.

x	y	Método Adomian	Stephenson- Radmore	Aplicación de Harper
0.1	0.00	0.0300	0.0300	0.0300
0.3	0.01	0.2701	0.2701	0.2701
0.5	0.02	0.7504	0.7504	0.7504
0.7	0.03	1.4709	1.4709	1.4709
0.9	0.04	2.4316	2.4316	2.4316

Tabla 6.1: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

x	y	Aplicación de Harper	Diferencias finitas	Error relativo
0.3	0.1	0.2800	0.2800	0.0000
0.3	0.3	0.3600	0.3556	0.0122
0.4	0.2	0.5200	0.5200	0.0000
0.4	0.5	0.7300	0.7244	0.0076
0.5	0.6	1.1100	1.1078	0.0019

Tabla 6.2: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

Se puede observar de la tabla anterior, que los resultados obtenidos mediante este método son aceptables, ya que el error relativo para los puntos dados es pequeño.

También se puede decir que, al elegir otros valores se sigue conservando un error relativamente pequeño, como también si se escogiera una gran variedad de puntos, por lo que la eficiencia del algoritmo empleado para el ejemplo dado es bueno.

En la siguiente tabla, veamos ahora el resultado obtenido mediante algoritmos genéticos con los mismos datos usados para el de diferencias finitas.

x	y	Aplicación de Harper	Algoritmo genético	Error relativo
0.3	0.1	0.2800	0.2820	0.0007
0.3	0.3	0.3600	0.3601	0.0002
0.4	0.2	0.5200	0.5203	0.0005
0.4	0.5	0.7300	0.7199	0.0138
0.5	0.6	1.1100	1.0339	0.0685

Tabla 6.3: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

De la tabla anterior, ahora podemos ver que el error relativo obtenido mediante el método de algoritmos genéticos es aceptable, con esto tenemos que para los valores tomados el algoritmo empleado nos dá resultados favorables.

Cabe mencionar que, al tomar otros valores el algoritmo sigue manteniendo un error pequeño teniendo así un algoritmo eficiente para el ejemplo.

Para una mejor visualización de los resultados obtenidos, a continuación se presentan las gráficas obtenidas por los diferentes métodos numéricos así como la del método analítico.

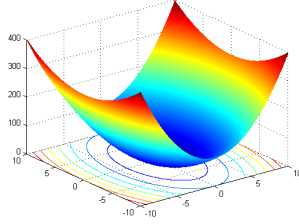


Figura 6.1: Solución de la ecuación hiperbólica método tradicional.

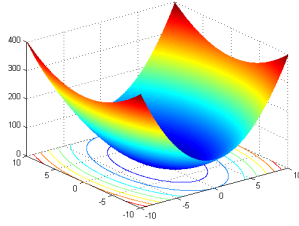


Figura 6.2: Solución de la ecuación hiperbólica método algoritmos genéticos.

Tenemos que tomar en cuenta que el método de descomposición de Adomian no solo obtiene la aproximación de la solución considerando una única condición, por lo que a continuación se presentan algunos ejemplos con diferentes condiciones iniciales y de frontera.

Ejemplo 6.1.1. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0,$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$u(0, y) = e^y, \quad u_x(0, y) = y^2.$$

Solución. De acuerdo a las condiciones iniciales, podemos reescribir a la ecuación dada de la siguiente forma

$$u_{xx} = -\frac{1}{3}(10u_{xy} + 3u_{yy}). \quad (6.7)$$

Usando el operador $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$L_{xx}u = -\frac{1}{3}(10u_{xy} + 3u_{yy}). \quad (6.8)$$

Aplicando el operador inverso $L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$ a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$u = u(x, 0) + u_x(x, 0)x - \frac{1}{3} \int_0^x \int_0^x (10u_{xx} + 3u_{xy}) dx dx,$$

y la solución por el método de descomposición de Adomian consiste en el siguiente esquema

$$u_0 = e^y + xy^2,$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{3} \int_0^x \int_0^x (10(u_n)_{xx} + 3(u_n)_{xy}) dx dx,$$

es decir,

$$u_0 = e^y + xy^2,$$

$$u_1 = -x^2y,$$

$$u_2 = \frac{x^2(x + 10y)}{3},$$

$$u_3 = -\frac{20x^2(x + 5y)}{9},$$

$$u_4 = \frac{100x^2(3x + 10y)}{27},$$

$$u_5 = -\frac{2000x^2(2x + 5y)}{81},$$

$$u_6 = \frac{50000x^2(x + 2y)}{243},$$

$$\vdots$$

por lo que la aproximación sexta de la ecuación dada resulta ser

$$u(x, y) = e^y + xy^2 + x^2 \left(-y - \frac{2000(2x + 5y)}{81} + \frac{100(3x + 10y)}{27} + \frac{50000(x + 2y)}{243} - \frac{20(x + 5y)}{9} + \frac{x + 10y}{3} \right).$$

□

Ahora, para el ejemplo anterior veamos los resultados obtenidos mediante los métodos numéricos presentados en el capítulo 4.

Considerando valores dados, en las tablas (6.4) y (6.5), se presentan los resultados obtenidos del ejemplo (6.1.1) por el método de diferencias finitas y algoritmos genéticos, así como la comparación con los resultados analíticos obtenidos.

Para este ejemplo, se puede apreciar que para los valores dados, el error relativo se sigue conservando pequeño, al igual que cualquier otro valor que se le sea asignado el error será nuevamente pequeño, con esto el algoritmo para este ejemplo también es favorable.

x	y	Aplicación de Harper	Diferencias finitas	Error relativo
0.0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.2	0.1	1.1029	1.1988	0.0869
0.3	0.1	1.1328	1.2895	0.1383
0.4	0.5	1.6102	1.6944	0.0522
0.5	0.6	1.7857	1.6078	0.0996

Tabla 6.4: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

x	y	Aplicación de Harper	Algoritmo genético	Error relativo
0.0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.2	0.1	1.1029	1.1075	0.0041
0.3	0.1	1.1328	1.1086	0.0213
0.4	0.5	1.6102	1.7497	0.0866
0.5	0.6	1.7857	1.8205	0.0194

Tabla 6.5: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

Ahora veamos en la siguiente tabla el resultado obtenido mediante algoritmos genéticos con los mismos datos usados para el de diferencias finitas.

De los datos obtenidos, mediante el método de algoritmos genéticos podemos ver que el algoritmo empleado es eficiente ya que esto lo podemos observar a partir del error relativo obtenido y este error como se puede apreciar, es pequeño. Además, al ocupar valores distintos a los empleados el algoritmo arroja resultados aceptables, pues el error sigue siendo mínimo.

Ahora, visualicemos los resultados obtenidos presentados en las gráficas obtenidas por los diferentes métodos numéricos así como la del método analítico.

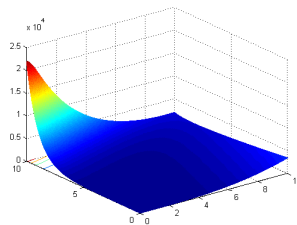


Figura 6.3: Solución de la ecuación hiperbólica método tradicional.

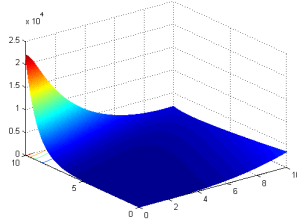


Figura 6.4: Solución de la ecuación hiperbólica método algoritmos genéticos.

Ejemplo 6.1.2. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0,$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 1.$$

Solución. De acuerdo a las condiciones iniciales, podemos reescribir a la ecuación dada de la siguiente forma

$$u_{xy} = \frac{1}{3}(u_{xx} + 2u_{yy}). \quad (6.9)$$

Usando el operador $L_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$L_{xy}u = \frac{1}{3}(u_{xx} + 2u_{yy}). \quad (6.10)$$

Aplicando el operador inverso $L_{xy}^{-1} = \int_0^y \int_0^x (\cdot) dx dy$ a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$u = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \frac{1}{3} \int_0^y \int_0^x (u_{xx} + 2u_{yy}) dx dy,$$

y la solución por el método de descomposición de Adomian consiste en el siguiente esquema

$$\begin{aligned} u_0 &= x^2, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3} \int_0^y \int_0^x ((u_n)_{xx} + 2(u_n)_{yy}) dx dy, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} u_0 &= x^2, \\ u_1 &= \frac{2xy}{3}, \\ u_2 &= 0, \\ &\vdots \\ u_n &= 0, \end{aligned}$$

por lo que la solución de la ecuación está dada por

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2yx}{3}. \quad (6.11)$$

□

6.2. Ecuación parabólica

Para el caso parabólico, consideremos la EDP de Euler de segundo orden, cuyas soluciones analíticas mediante el método de las variables canónicas, Stephenson-Radmore y Harper, respectivamente están dadas por

$$u(x, y) = \phi(y - \lambda x) + y\psi(y - \lambda x), \quad (6.12)$$

$$u(x, y) = \phi(\xi) + \eta\psi(\xi), \quad (6.13)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{B}y\phi(Y) - \frac{2}{B}\psi(Y), \quad (6.14)$$

donde para la ecuación (6.13) la variable ξ está dado por la ecuación (2.67) y para la ecuación (6.14) la variable Y está definida por la ecuación (5.27).

Tomemos ahora, el ejemplo (1.2.4) de la página 18 y resolvámoslo por medio del método de descomposición de Adomian. De acuerdo a las condiciones iniciales, podemos reescribir a la ecuación del ejemplo (1.2.4) de la siguiente forma

$$u_{yy} = -(u_{xx} + 2u_{xy}). \quad (6.15)$$

Usando el operador $L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$L_{yy}u = -(u_{xx} + 2u_{xy}). \quad (6.16)$$

Aplicando el operador inverso $L_{yy}^{-1} = \int_0^y \int_0^y (\cdot) dy dy$ a ambos lados de la ecuación (6.16), obtenemos

$$u = u(x, 0) + u_y(x, 0)y - \int_0^y \int_0^y (u_{xx} + 2u_{xy}) dy dy,$$

y la solución por el método de descomposición de Adomian consiste en el siguiente esquema

$$u_0 = y \cos x,$$

$$u_{n+1} = - \int_0^y \int_0^y ((u_n)_{xx} + 2(u_n)_{xy}) dy dy,$$

es decir,

$$u_0 = y \cos x,$$

$$u_1 = \frac{y^3 \cos x}{6} + y^2 \sin x,$$

$$u_2 = y^4 \left(\frac{\sin x}{6} + \frac{y \cos x}{120} \right) - \frac{2y^3 \cos x}{3},$$

$$u_3 = -y^5 \left(\frac{\cos x}{10} - y \left(\frac{\sin x}{5!} + \frac{y \cos x}{7!} \right) \right) - \frac{y^4 \sin x}{3},$$

$$u_4 = \frac{2y^5 \cos x}{15} - y^6 \left(\frac{2 \sin x}{45} + y \left(\frac{\cos x}{210} - y \left(\frac{\sin x}{7!} + \frac{y \cos x}{9!} \right) \right) \right),$$

$$u_5 = y^7 \left(\frac{\cos x}{63} - y \left(\frac{\sin x}{504} + y \left(\frac{\cos x}{9072} - y \left(\frac{\sin x}{9!} + \frac{y \cos x}{11!} \right) \right) \right) \right) + \frac{2y^6 \sin x}{45},$$

$$u_6 = y^8 \left(\frac{\sin x}{210} + y \left(\frac{\cos x}{1512} - y \left(\frac{\sin x}{22680} + y \left(\frac{\cos x}{665280} - y \left(\frac{\sin x}{11!} + \frac{y \cos x}{13!} \right) \right) \right) \right) \right) - \frac{4y^7 \cos x}{315},$$

⋮

por lo que la aproximación sexta del ejemplo (1.2.4) resulta ser

$$\begin{aligned} u(x, y) = & y^7 \left(\frac{\cos x}{63} - y \left(\frac{\sin x}{504} + y \left(\frac{\cos x}{9072} - y \left(\frac{\sin x}{9!} + \frac{y \cos x}{11!} \right) \right) \right) \right) \\ & - y^5 \left(\frac{\cos x}{10} - y \left(\frac{\sin x}{5!} + \frac{y \cos x}{7!} \right) \right) - \frac{y^3 \cos x}{2} + \frac{2y^5 \cos x}{15} - \frac{4y^7 \cos x}{315} \\ & + y^2 \sin x - \frac{y^4 \sin x}{3} + \frac{2y^6 \sin x}{45} - y^6 \left(\frac{2 \sin x}{45} + y \left(\frac{\cos x}{210} - y \left(\frac{\sin x}{7!} + \frac{y \cos x}{9!} \right) \right) \right) \\ & + y^4 \left(\frac{\sin x}{6} + \frac{y \cos x}{120} \right) + y \cos x \\ & + y^8 \left(\frac{\sin x}{210} + y \left(\frac{\cos x}{1512} - y \left(\frac{\sin x}{22680} + y \left(\frac{\cos x}{665280} - y \left(\frac{\sin x}{11!} + \frac{y \cos x}{13!} \right) \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

□

Esta solución no coincide con la aplicación de las ecuaciones (6.12), (6.13) y (6.14).

De lo anterior, podemos observar que las soluciones mediante los distintos métodos analíticos para el caso parabólico varían, por lo que compararemos las soluciones para algunos valores dados. Esto se puede observar en la Tabla 6.4.

Ahora, veamos los resultados que se obtuvieron mediante los métodos numéricos del capítulo 4.

En las tablas (6.5) y (6.6), se presentan soluciones de valores dados, los resultados obtenidos del ejemplo (1.2.4) por el método de diferencias finitas y el de algoritmos genéticos, se compararán con los resultados analíticos obtenidos.

De la tabla anterior, los resultados obtenidos mediante el método de diferencias finitas es aceptable, aunque el error relativo para los puntos dados ya no es tan pequeño para el ejemplo.

x	y	Método Adomian	Stephenson- Radmore	Aplicación de Harper
0.1	0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.3	0.1	0.0980	0.0999	0.0999
0.5	0.2	0.1911	0.1999	0.1999
0.7	0.3	0.2763	0.2999	0.2999
0.9	0.4	0.3510	0.3999	0.3999

Tabla 6.6: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

x	y	Aplicación de Harper	Diferencias finitas	Error relativo
0.3	0.1	0.0999	0.0985	0.0140
0.3	0.2	0.1999	0.2029	0.0150
0.4	0.2	0.1999	0.1998	0.0005
0.4	0.3	0.2999	0.3090	0.0303
0.5	0.4	0.3999	0.4182	0.0457

Tabla 6.7: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

Se puede decir que, al elegir otros valores este error se comporta de la misma forma, esto también sucede si se escogen más puntos, por lo que la eficiencia del algoritmo empleado para el ejemplo del caso parabólico es bueno.

Ahora, veamos los resultados obtenidos para los mismos valores de la Tabla 6.5 con el algoritmo genético.

x	y	Aplicación de Harper	Algoritmos genéticos	Error relativo
0.3	0.1	0.0999	0.1008	0.0096
0.3	0.2	0.1999	0.2011	0.0060
0.4	0.2	0.1999	0.2014	0.0075
0.4	0.3	0.2999	0.3017	0.0063
0.5	0.4	0.3999	0.4025	0.0065

Tabla 6.8: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

De la tabla anterior, ahora podemos ver que el error relativo obtenido mediante el método de algoritmos genéticos es pequeño, con esto tenemos que para los valores tomados el algoritmo empleado nos da resultados favorables.

Cabe mencionar que, al tomar otros valores el algoritmo sigue teniendo un error relativo significativamente pequeño teniendo así un algoritmo eficiente para el caso parabólico.

Para una mejor visualización de los resultados obtenidos, a continuación se presentan las gráficas obtenidas por los diferentes métodos numéricos así como la del método analítico.

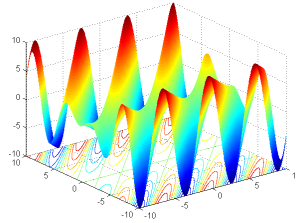


Figura 6.5: Solución de la ecuación parabólica método tradicional.

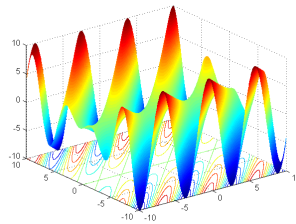


Figura 6.6: Solución de la ecuación parabólica método algoritmos genéticos.

A continuación, se presentan más ejemplos del método de descomposición de Adomian aplicando diferentes condiciones iniciales y de frontera.

Ejemplo 6.2.1. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0,$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$u(0, y) = 1 - y^2, \quad u_x(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0.$$

Solución. De acuerdo a las condiciones iniciales, podemos reescribir a la ecuación dada de la siguiente forma

$$u_{xx} = 6u_{xy} - 9u_{yy}. \quad (6.17)$$

Usando el operador $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$L_{xx}u = 6u_{xy} - 9u_{yy}. \quad (6.18)$$

Aplicando el operador inverso $L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$ a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$u = u(x, 0) + u_x(x, 0)x + \int_0^x \int_0^x (6u_{xy} - 9u_{yy}) dx dx,$$

y la solución por el método de descomposición de Adomian consiste en el siguiente esquema

$$u_0 = 1 - y^2,$$

$$u_{n+1} = \int_0^x \int_0^x (6(u_n)_{xy} - 9(u_n)_{yy}) dx dx,$$

es decir,

$$u_0 = 1 - y^2,$$

$$u_1 = 9x^2,$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = 0,$$

$$\vdots$$

$$u_n = 0,$$

por lo que la solución de la ecuación dada resulta ser

$$u(x, y) = 9x^2 - y^2 + 1. \quad (6.19)$$

□

Ahora, veamos los resultados que se obtuvieron mediante los métodos numéricos presentados en el capítulo 4.

Para esto, tomemos valores dados, los cuales se presentan en las tablas (6.2) y (6.3), los resultados obtenidos del ejemplo (6.2.2) por el método de diferencias finitas y algoritmos genéticos, así como la comparación con los resultados analíticos obtenidos.

x	y	Aplicación de Harper	Diferencias finitas	Error relativo
0.2	0.1	1.3500	0.2800	0.0000
0.3	0.1	1.8000	0.3556	0.0000
0.4	0.5	2.1900	0.5200	0.0000
0.6	0.5	3.9900	0.7244	0.0000
0.8	0.9	5.9500	1.1078	0.0000

Tabla 6.9: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

Para este ejemplo, se puede apreciar que para los valores dados, el error relativo se sigue conservando pequeño, al igual que cualquier otro valor que se le sea asignado el error será nuevamente pequeño, con esto el algoritmo para este ejemplo es favorable.

Ahora veamos en la siguiente tabla el resultado obtenido mediante algoritmos genéticos con los mismos datos usados para el de diferencias finitas.

De los datos obtenidos, mediante el método de algoritmos genéticos podemos ver que el algoritmo empleado es eficiente ya que esto lo podemos observar a partir del

x	y	Aplicación de Harper	Algoritmo genético	Error relativo
0.2	0.1	1.3500	1.3510	0.0007
0.3	0.1	1.8000	1.9600	0.0888
0.4	0.5	2.1900	2.1600	0.0136
0.6	0.5	3.9900	4.0051	0.0037
0.8	0.9	5.9500	5.8910	0.0099

Tabla 6.10: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

error relativo obtenido y este error como se puede ver, es pequeño. Además, al ocupar valores distintos a los empleados el algoritmo arroja resultados aceptables, pues el error sigue siendo mínimo.

Ahora, visualicemos los resultados obtenidos presentados en las gráficas obtenidas por los diferentes métodos numéricos así como la del método analítico.

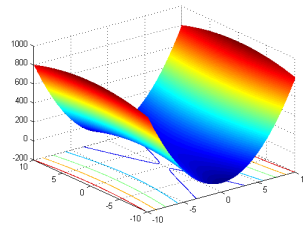


Figura 6.7: Solución de la ecuación parabólica método tradicional.

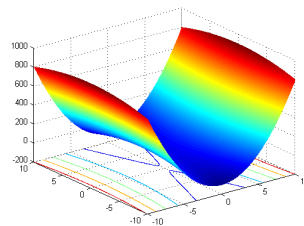


Figura 6.8: Solución de la ecuación parabólica método algoritmos genéticos.

Ejemplo 6.2.2. Resolver la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0,$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$u(x, 0) = 2 \ln x, \quad u_y(x, 0) = x, \quad u(1, y) = 1.$$

Solución. De acuerdo a las condiciones iniciales, podemos reescribir a la ecuación dada de la siguiente forma

$$u_{yy} = \frac{1}{4}(-u_{xx} + 4u_{xy}). \quad (6.20)$$

Usando el operador $L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$L_{yy}u = \frac{1}{4}(-u_{xx} + 4u_{xy}). \quad (6.21)$$

Aplicando el operador inverso $L_{yy}^{-1} = \int_0^y \int_0^y (\cdot) dy dy$ a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$u = u(x, 0) + u_y(x, 0)y + \frac{1}{4} \int_0^y \int_0^y (-u_{xx} + 4u_{xy}) dy dy,$$

y la solución por el método de descomposición de Adomian consiste en el siguiente esquema

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \ln x + xy, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{4} \int_0^y \int_0^y (-(u_n)_{xx} + 4(u_n)_{xy}) dy dy, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \ln x + xy, \\ u_1 &= y^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2 \right), \\ u_2 &= -\frac{y^3(16x + 3y)}{6x^4}, \\ u_3 &= \frac{y^4(120x^2 + 48xy + 5y^2)}{15x^6}, \\ u_4 &= -\frac{y^5 \left(\frac{128x^3}{5} + 16x^2y + \frac{24xy^2}{7} + \frac{y^3}{4} \right)}{x^8}, \\ u_5 &= \frac{y^6 \left(\frac{256x^4}{3} + \frac{512x^3y}{7} + 24x^2y^2 + \frac{32xy^3}{9} + \frac{y^4}{5} \right)}{x^{10}}, \\ u_6 &= -\frac{y^7 \left(\frac{2048x^5}{7} + 320x^4y + \frac{1280x^3y^2}{9} + 32x^2y^3 + \frac{40xy^4}{11} + \frac{y^5}{6} \right)}{x^{12}}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

por lo que la solución aproximada de la ecuación dada resulta ser

$$\begin{aligned}
u(x, y) = & 2 \ln x + xy + y^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2 \right) - \frac{y^3(16x + 3y)}{6x^4} \\
& + \frac{y^4(120x^2 + 48xy + 5y^2)}{15x^6} - \frac{y^5 \left(\frac{128x^3}{5} + 16x^2y + \frac{24xy^2}{7} + \frac{y^3}{4} \right)}{x^8} \\
& + \frac{y^6 \left(\frac{256x^4}{3} + \frac{512x^3y}{7} + 24x^2y^2 + \frac{32xy^3}{9} + y^4/5 \right)}{x^{10}} \\
& - \frac{y^7 \left(\frac{2048x^5}{7} + 320x^4y + \frac{1280x^3y^2}{9} + 32x^2y^3 + \frac{40xy^4}{11} + \frac{y^5}{6} \right)}{x^{12}}.
\end{aligned}$$

□

6.3. Ecuación elíptica

Finalmente, para el caso elíptico consideremos la EDP de Euler de segundo orden con coeficientes constantes, cuyas soluciones analíticas mediante el método de las variables canónicas, Stephenson-Radmore y Harper, están dadas respectivamente por las siguientes ecuaciones

$$u(x, y) = \phi(\xi) + \psi(\bar{\xi}), \quad (6.22)$$

$$u(x, y) = \phi(\xi) + \psi(\bar{\xi}), \quad (6.23)$$

$$u(x, y) = \phi(Z) + \psi(W), \quad (6.24)$$

donde, para la ecuación (6.22) la variable ξ está dada por la ecuación $\xi = (y - ax) + ibx$, para la ecuación (6.23) la variable ξ está dada por la ecuación (2.88), y finalmente para la ecuación (6.24), las variables Z y W están dadas por las ecuaciones (5.33) y (5.36) respectivamente.

Tomemos el ejemplo (1.2.6) de la página 20 y resolvámoslo por medio del método de descomposición de Adomian. De acuerdo a las condiciones iniciales, podemos reescribir a la ecuación del ejemplo (1.2.6) de la siguiente forma

$$u_{yy} = -\frac{1}{2}(u_{xx} + 2u_{xy}). \quad (6.25)$$

Usando el operador $L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$L_{yy}u = -\frac{1}{2}(u_{xx} + 2u_{xy}). \quad (6.26)$$

Aplicando el operador inverso $L_{yy}^{-1} = \int_0^y \int_0^y (\cdot) dy dy$ a ambos lados de la ecuación (6.26), obtenemos

$$u = u(x, 0) + u_y(x, 0)y - \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^y (u_{xx} + 2u_{xy}) dy dy,$$

y la solución por el método de descomposición de Adomian consiste en el siguiente esquema

$$u_0 = 4ye^{-2x},$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} \int_0^y \int_0^y ((u_n)_{xx} + 2(u_n)_{xy}) dy dy,$$

es decir,

$$u_0 = 4ye^{-2x},$$

$$u_1 = -\frac{8y^2(y-3)}{3e^{2x}},$$

$$u_2 = \frac{8y^3(y^2-10y+20)}{15e^{2x}},$$

$$u_3 = -\frac{16y^4(y^3-21y^2+126y-210)}{315e^{2x}},$$

$$u_4 = \frac{8y^5(y^4-36y^3+432y^2-2016y+3024)}{2835e^{2x}},$$

$$u_5 = -\frac{16y^6(y^5-55y^4+1100y^3-9900y^2+39600y-55440)}{155925e^{2x}},$$

$$u_6 = \frac{16y^7(y^6-78y^5+2340y^4-34320y^3+257400y^2-926640y+1235520)}{6081075e^{2x}},$$

$$\vdots$$

por lo que la aproximación sexta del ejemplo (1.2.6) resulta ser

$$u(x, y) = 4ye^{-2x} - \frac{16y^6(y^5-55y^4+1100y^3-9900y^2+39600y-55440)}{155925e^{2x}} - \frac{8y^2(y-3)}{3e^{2x}}$$

$$+ \frac{16y^7(y^6-78y^5+2340y^4-34320y^3+257400y^2-926640y+1235520)}{6081075e^{2x}} +$$

$$\frac{8y^3(y^2-10y+20)}{15e^{2x}} - \frac{16y^4(y^3-21y^2+126y-210)}{315e^{2x}}$$

$$+ \frac{8y^5(y^4-36y^3+432y^2-2016y+3024)}{2835e^{2x}}.$$

□

Esta solución no coincide con la aplicación de las ecuaciones (6.23), (6.24) y (6.25). Tomemos algunos números en específico para comparar las soluciones obtenidas en los métodos analíticos con las obtenidas a partir de los métodos numéricos

Ahora, veamos los resultados que se obtuvieron mediante los métodos numéricos presentados en el capítulo 4.

En las tablas (6.7) y (6.8), se presentan los resultados obtenidos del ejemplo (1.2.6) por el método de diferencias finitas y algoritmos genéticos

x	y	Método Adomian	Stephenson- Radmore	Aplicación de Harper
0.1	0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.3	0.1	0.2681	0.2422	0.2422
0.5	0.2	0.4390	0.3571	0.3571
0.7	0.3	0.5392	0.3935	0.3935
0.9	0.4	0.5885	0.3841	0.3841

Tabla 6.11: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

x	y	Aplicación de Harper	Diferencias finitas	Error relativo
0.3	0.1	0.2422	0.2416	0.0024
0.3	0.2	0.5327	0.5222	0.0197
0.4	0.2	0.4361	0.4275	0.0197
0.4	0.3	0.7170	0.6903	0.0372
0.5	0.4	0.8549	0.8080	0.0548

Tabla 6.12: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

Se puede observar de la tabla anterior, que los resultados obtenidos mediante este método son aceptables, ya que el error relativo para los puntos dados es pequeño.

Al elegir otros valores el error obtenido se considera aceptable, como también si se escogen más puntos, por lo que la eficiencia del algoritmo empleado para el ejemplo en el caso elíptico es bueno.

En la siguiente tabla, veamos ahora el resultado obtenido mediante algoritmos genéticos con los mismos datos usados para el de diferencias finitas.

x	y	Aplicación de Harper	Algoritmos genéticos	Error relativo
0.3	0.1	0.2422	0.2420	0.0008
0.3	0.2	0.5327	0.5321	0.0011
0.4	0.2	0.4361	0.4364	0.0006
0.4	0.3	0.7170	0.6089	0.1507
0.5	0.4	0.8549	0.8440	0.0127

Tabla 6.13: Solución de $u(x, y)$ para diferentes valores de x y y .

De la tabla anterior, ahora podemos ver que el error relativo obtenido mediante el método de algoritmos genéticos es pequeño, con esto tenemos que para los valores tomados el algoritmo empleado nos da resultados favorables.

Cabe mencionar que, al tomar otros valores el algoritmo sigue teniendo un error relativo significativamente pequeño teniendo así un algoritmo eficiente para el caso hi-

perbólico.

Para una mejor visualización de los resultados obtenidos, a continuación se presentan las gráficas obtenidas por los diferentes métodos numéricos así como la del método analítico.

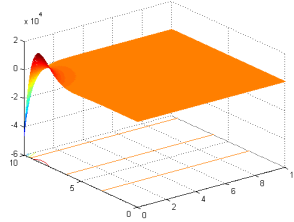


Figura 6.9: Solución de la ecuación elíptica método tradicional.

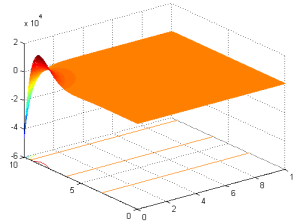


Figura 6.10: Solución de la ecuación elíptica método algoritmos genéticos.

□

Conclusiones

A pesar de no contar con mucha literatura acerca de los métodos mencionados en los capítulos 2 y 3, por ser métodos no convencionales, se pudo lograr el desarrollo de soluciones para las EDP's de Euler de segundo orden con coeficientes constantes, de tipo hiperbólico, parabólico y elíptico. Siendo esto, una aportación de este trabajo de tesis consistiendo en presentar con detalle cada uno de estos métodos, y que posteriormente son aplicados para la obtención de soluciones.

Las EDP's resulta ser en muchas ocasiones difíciles de resolver, por lo que el proponer nuevos métodos para resolverlas y que sean de fácil implementación, nos abre un amplio panorama para la aplicación de las EDP's en diversos problemas de ingenierías y ciencias, adquiriendo con esto un interés peculiar por ellos.

Una de las principales contribuciones de este trabajo de tesis, y que no se puede encontrar en la literatura, es la obtención de soluciones de la ecuación de Euler con coeficientes constantes del tipo hiperbólico, parabólico y elíptico, sin hacer uso de los métodos clásicos y tampoco de los métodos sofisticados que generalmente suelen ser tan complicados. Es necesario hacer mención que las soluciones fueron obtenidas mediante la aplicación del método de J. Harper, las cuales son detalladas en el capítulo 5.

Podemos mencionar que, al aplicar las condiciones iniciales y de frontera a las soluciones obtenidas mediante el método propuesto, se llega a que el resultado es el mismo que el que proponen otros autores. Esto prueba la efectividad del método, aunado con la comparación de resultados mediante los métodos de aproximación.

Al aplicar los métodos numéricos a la ecuación de Euler con coeficientes constantes, pudimos observar que de los resultados obtenidos las dos técnicas empleadas son capaces de obtener valores adecuados, es decir, ambos métodos acercan a la solución analítica propuesta por los métodos tradicionales y las soluciones propuestas por Stephenson-Radmore, sin embargo la más eficiente para resolver el problema planteado es el de diferencias finitas puesto que el tiempo del cálculo es mucho menor. Esto es debido a la forma que presenta la función de error, la cual hace que el algoritmo genético presente problemas de convergencia prematura.

Por otro lado, el método de descomposición de Adomian resulta ser complicado si las condiciones iniciales y de frontera son diferentes a las ocupadas en el desarrollo de este trabajo de tesis, ya que estas condiciones dependen de la función de Green, y en la mayoría de los casos no es fácil aplicarlo.

Podemos decir, que este trabajo de tesis se puede considerar como una base para abordar nuevos métodos de solución para las EDP's. Por ejemplo, ahora estamos en condiciones de empezar a analizar la ecuación de Euler para coeficientes no constantes, siendo esto una posible continuación de este trabajo.

Apéndice A

Definiciones y tipos de soluciones

Definición 1. Una función en el conjunto de las funciones continuas C^2 que satisface una EDP de orden dos, le llamaremos *solución clásica*.

Definición 2. Llamaremos *solución completa* o integral de la EDP de primer orden

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

a toda relación con la ecuación

$$f(x, y, u, a, b) = 0, \quad (2)$$

entre las variables x, y, u que contenga dos constantes arbitrarias a, b y que sea una solución de la EDP (1).

Definición 3. Una función se dice que es *suave* si todas sus derivadas existen y son continuas.

Definición 4. Una solución que no es diferenciable en todas partes se llama *solución débil*.

Definición 5. Se dice que $f(h)$ es de orden $g(h)$ cuando $h \rightarrow 0$ y $h \neq 0$, se denotará por $f(h) = O(g(h))$, si existen números reales $M > 0$ y $k > 0$ tales que,

$$|f(h)| \leq M|g(h)|, \text{ siempre que } |h| < k.$$

El error de truncamiento suele asociarse también con la convergencia (o la velocidad de convergencia), que suele representarse como $O(n)$ (generalmente, como $O(h^n)$), siendo n el parámetro que determina la velocidad o la convergencia.

Definición 6. Se llama *derivada direccional* de la función $u = f(x, y)$ en el punto $P(x, y)$ en el sentido del vector $\vec{n} = \cos \theta i + \sin \theta j$ al siguiente límite, si existe y es finito

$$u_{\vec{n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\vec{n}) - f(P)}{t}, \quad (3)$$

donde t es la magnitud del vector \vec{n} .

Definición 7. Una *onda de choque* es una curva en la cual, la solución $u(x, y)$ presenta una discontinuidad.

Definición 8. Se dice que es una región S es *convexa* si toda línea recta que une cualquier par de puntos de la región está completamente contenida en S .

Apéndice B

Método de Charpit [16]

Sea la EDP de primer orden de dos variables independientes x y y dada por

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad (4)$$

donde $p = u_x$ y $q = u_y$. Sea $u = u(x, y)$ la superficie integral de la ecuación (4), derivando la identidad (4) con respecto a x y a y , obtenemos

$$\begin{aligned} F_x + pF_u + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ F_y + qF_u + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

donde $p = u_x$ y $q = u_y$, o bien, como $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$,

$$\begin{aligned} F_x + pF_u + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ F_y + qF_u + F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Las ecuaciones características para el sistema de ecuaciones (5), tiene la forma de la ecuación (1.8) (véase la pág. 3)

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u} = dt \quad (6)$$

Por otro lado, como u está relacionada con p y q mediante la ecuación

$$du = p dx + q dy, \quad (7)$$

entonces

$$\frac{du}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q,$$

o bien

$$\frac{du}{pF_p + qF_q} = dt, \quad (8)$$

lo cual nos da la posibilidad de aumentar el sistema (6) con una ecuación más.

De esta manera, bajo la hipótesis de que $u = u(x, y)$ es solución de la ecuación (4), se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = dt. \quad (9)$$

De las ecuaciones (7) y (9) se puede hallar las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, $p = p(t)$ y $q = q(t)$, es decir, se puede hallar las curvas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$ llamadas características, y determinar en cada punto de la característica los números $p = p(t)$ y $q = q(t)$ que proporcionan la dirección de plano

$$U - u = p(X - x) + q(Y - y).$$

Con lo anterior podemos observar que las variables $p = u_x$ y $q = u_y$ verifican cierta ecuación cuasilineal, y por tanto, (4) puede resolverse por el método de las características.

Apéndice C

Soluciones fundamentales de la ecuación de calor

Consideremos los siguientes problemas de frontera y valor inicial para la ecuación de calor

1. Problema de valor inicial en $(-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned}u_t &= ku_{xx}, & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \\u(x, 0) &= g(x).\end{aligned}$$

La solución de este problema está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) g(y) dy.$$

2. Problema de valor inicial en $(0, \infty)$ con condiciones homogéneas de límite de Dirichlet

$$\begin{aligned}u_t &= ku_{xx}, & -\infty \leq x < \infty, 0 < t < \infty \\u(x, 0) &= g(x), \\u(0, t) &= 0,\end{aligned}$$

La solución para este caso, es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4kt}\right) \right) g(y) dy.$$

3. Problema de valor inicial en $(0, \infty)$ con condiciones homogéneas de límite de Neumann

$$\begin{aligned}u_t &= ku_{xx}, & 0 \leq x < \infty, 0 < t < \infty \\u(x, 0) &= g(x), \\u_x(0, t) &= 0,\end{aligned}$$

Su solución, está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^\infty \left(\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4kt}\right) \right) g(y) dy.$$

4. Problema en $(0, \infty)$ con condiciones iniciales homogéneas y no homogéneas de las condiciones de límite de Dirichlet

$$\begin{aligned}u_t &= ku_{xx}, & 0 \leq x < \infty, 0 < t < \infty \\u(x, 0) &= 0, \\u(0, t) &= h(t).\end{aligned}$$

Tiene por solución la siguiente función

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi k(t-s)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k(t-s)}\right) h(s) ds. \quad \forall x > 0$$

Bibliografía

- [1] S. Abbasbandy. Improving newton-raphson method for nonlinear equations by modified adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 145(2-3):887–893, 2003.
- [2] C. Abdoukadi. Numerical implementation of adomian decomposition method for volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernels. *African Institute for Mathematical Sciences*, 1975.
- [3] G. Adomian. *Nonlinear stochastic operator equations*. Academic Press San Diego, CA, 1986.
- [4] G. Adomian. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135(2):501–544, 1988.
- [5] G. Adomian. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [6] G. Adomian. Solution of the thomas-fermi equation. *Applied Mathematics Letters*, 11(3):131–133, 1998.
- [7] M. Affenzeller, S. Winkler, S. Wagner, and A. Beham. Genetic algorithms and genetic programming: Modern concepts and practical applications. 2009.
- [8] F.M. Allan. Derivation of the adomian decomposition method using the homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation*, 190(1):6–14, 2007.
- [9] J. Biazar and Z. Ayati. An approximation to the solution of parabolic equation by adomian decomposition method and comparing the result with crank-nicolson method. In *International Mathematical Forum*, volume 1, pages 1925–1933, 2006.
- [10] R.L. Burden and J.D. Faires. *Análisis numérico*. Cengage Learning Latin America, 2001.
- [11] C. Chun. A new iterative method for solving nonlinear equations. *Applied mathematics and computation*, 178(2):415–422, 2006.

-
- [12] C. Coello Coello. Introducción a la computación evolutiva (notas del curso), 2009.
- [13] L. Debnath. *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. Birkhauser, 2005.
- [14] P. Dita and N. Grama. On adomian's decomposition method for solving differential equations. *Arxiv preprint solv-int/9705008*, 1997.
- [15] A. Dou. *Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden e introducción a las de segundo orden*. Dossat, 1970.
- [16] E. Elsgoltz. Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. *Ed. Mir Moscu*, 1975.
- [17] D.J. Evans and K.R. Raslan. The adomian decomposition method for solving delay differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(1):49–54, 2005.
- [18] N. Gil. Algoritmos genéticos, 2006.
- [19] D.E. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Addison-wesley, 1989.
- [20] R. Haberman, A. de Pablo Martínez, D.P. Galván, and E.R. Colmenarejo. *Ecuaciones en derivadas parciales: Con series de Fourier y problemas de contorno*. Prentice-Hall, 2003.
- [21] J.F. Harper. Reducing parabolic partial differential equations to canonical form. *European Journal of Applied Mathematics*, 5(02):159–164, 1994.
- [22] M. Inc. On numerical solutions of partial differential equations by the decomposition method. *Kragujevac Journal of Mathematics*, (26):153–164, 2004.
- [23] P.K. Kythe. *Partial differential equations and boundary value problems with Mathematica*. CRC press, 2010.
- [24] A. Marrero, L. Pedroso, and J. Barrios. Algoritmos evolutivos en la solución de problemas de estimación de parámetros. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 13(2):139–150, 2006.
- [25] J.H. Mathews and K.D. Fink. *Numerical methods using MATLAB*, volume 3. Prentice Hall Upper Saddle River, 1999.
- [26] M. Mitchell. *An introduction to genetic algorithms*. The MIT press, 1998.
- [27] T. Myint-U and L. Debnath. *Linear partial differential equations for scientists and engineers*. Birkhäuser, 2007.
-

-
- [28] S.R. Otto and J.P. Denier. *An introduction to programming and numerical methods in MATLAB*. Springer Verlag, 2005.
- [29] Y. Pinchover and J. Rubinstein. *An introduction to partial differential equations*, volume 10. Cambridge Univ Pr, 2005.
- [30] M.A. Pinsky and J.H.P. Castellanos. *Introducción al análisis de Fourier y las ondas*. International Thomson, 2003.
- [31] E.C. Rentería. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. Ed. Universidad de Cantabria, 1992.
- [32] W. Sengupta. A novel analytical operator method to solve linear ordinary differential equations with variable coefficients. *Arxiv preprint arXiv:0902.0910*, 2009.
- [33] M. M. Smirnov. *Ejercicios sobre las Ecuaciones Diferenciales Parciales de la física matemática*. Ed. Mir, 1996.
- [34] G. Stephenson and P.M. Radmore. *Advanced mathematical methods for engineering and science students*. Cambridge Univ Pr, 1990.
- [35] A. Tijonov and A. Samarsky. *Ecuaciones de la física matemática*, ed, 1983.
- [36] N. Ujevic. A method for solving nonlinear equations. *Applied mathematics and computation*, 174(2):1416–1426, 2006.
-