



# UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

“PROBABILIDAD DE RUINA  
CON EL MODELO CLÁSICO DE CRAMER-LUNDBERG  
PARA DISTRIBUCIONES DE COLA LIGERA”

**T E S I S**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

**ALMA DELIA MALDONADO SANTIAGO**

DIRECTOR:

**M.C. JOSE DEL CARMEN JIMÉNEZ HERNÁNDEZ**

CO-DIRECTOR:

**DRA. EKATERINA TODOROVA KOLKOVSKA**

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA, JULIO DE 2011.



# **Probabilidad de ruina con el modelo clásico de Cramer-Lundberg para distribuciones de cola ligera.**

Maldonado Santiago Alma Delia

Julio de 2011

# Dedicatoria

---

A mis padres  
Pedro y Maria.  
Por que a ellos les debo todo lo que soy.

# Agradecimientos

---

---

Mi más sincero agradecimiento es para la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska por haber compartido conmigo parte de su amplio conocimiento en la realización de esta tesis, por todo su apoyo y paciencia.

Deseo agradecer al M.C Jose Del Carmen Jiménez Hernández por toda su dedicación, apoyo incondicional y enseñanzas que me brindo a lo largo del presente trabajo.

A mis padres Pedro y Maria les agradezco sus consejos, su guía y su confianza en la realización de mis sueños. Soy afortunada por contar siempre con su amor, comprensión y ejemplo.

A mis hermanos Victor y Miguel por que me han dado lecciones importantes de vida e inspirado a lograr grandes cosas aún sin darse cuenta, me han amado y llenado de felicidad.

A mis mejores amigos Cristian, Fredy, Estela y Luis por ser unos amigos increíbles y con quienes he compartido momentos maravillosos que siempre llevaré en mi corazón, ustedes han enriquecido mi vida con su cariño y alegría. Gracias por recordarme que hay personas valiosas en el mundo y gracias por estar en el mio.

A mis sinodales M.C. Vulfrano Tochihuitl Bueno, M.C. Marisol López Cerino y Dra. Virginia Berron Lara por su tiempo y comentarios para mejorar este trabajo. Muy en especial a la Dra. Virginia por no ser solamente una profesora sino una amiga incondicional, una consejera y una aliada en todo lo que necesitaba.

Al CIMAT, por que sin conocerme me brindaron todo su apoyo, durante mis estancias profesionales y durante la realización del presente trabajo.



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Riesgo y su relación con las compañías aseguradoras . . . . .	2
1.2. Algunos conceptos de seguros y finanzas . . . . .	4
1.2.1. Modelo de riesgo . . . . .	5
<b>2. Conceptos Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Variables aleatorias . . . . .	8
2.2. Variables aleatorias multivariadas . . . . .	14
2.3. Procesos estocásticos . . . . .	16
2.4. Procesos de Poisson . . . . .	18
2.5. Teoría de renovación . . . . .	20
2.6. Distribuciones de Cola Ligera . . . . .	22
<b>3. Modelo clásico de Cramer-Lundberg y probabilidad de ruina</b>	<b>25</b>
3.1. Modelo clásico de Cramer-Lundberg . . . . .	25
3.2. Aproximación de Cramer-Lundberg . . . . .	28
3.2.1. Caso exponencial . . . . .	36
3.3. Transformadas de Laplace y fórmula de Pollaczek-Khinchin . . . . .	40
3.4. Fórmula recursiva de Panjer . . . . .	44
3.5. Cotas para la probabilidad de ruina . . . . .	47
<b>4. Aproximaciones numéricas y simulaciones</b>	<b>53</b>
4.1. Cálculos numéricos y exactos de la probabilidad de ruina . . . . .	53
4.1.1. Reclamos que son mezcla de exponenciales . . . . .	53
4.1.2. Reclamos que se distribuyen de acuerdo a una gamma . . . . .	59
4.2. Simulaciones . . . . .	61
4.2.1. Caso exponencial . . . . .	62
4.2.2. Caso gamma . . . . .	63
<b>Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>A. Cotas bilaterales</b>	<b>69</b>

<b>B. Fórmulas de Cardan</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>



# Prefacio

El riesgo, es un término al que diariamente se enfrenta el ser humano, existen distintas formas de considerar el riesgo, dependiendo el área o el enfoque en el cual se esté considerando. La palabra riesgo se emplea para describir sucesos o eventos desconocidos con cierto grado de incertidumbre, dicha incertidumbre puede ser negativa o positiva.

Es difícil encontrar un solo campo de actividades humanas donde se pueda tener el control absoluto de lo que sucederá en el futuro. Dentro del ámbito financiero esto no es la excepción, constantemente se necesitan hacer predicciones para maximizar los recursos utilizados.

Particularmente para las compañías aseguradoras el término riesgo y saber medirlo correctamente es de vital importancia para su supervivencia. Dentro del área de las matemáticas, la rama que se encarga de esta tarea es la teoría de riesgo.

Justamente uno de los problemas más estudiados dentro de la teoría de riesgo es la probabilidad de ruina de la compañía. Este problema fue principalmente estudiado en los trabajos de Lundberg y Cramer. Lundberg introdujo un modelo para estudiar el flujo del capital de una compañía aseguradora conocido como el modelo clásico de riesgo.

Esta tesis busca exhibir parte de la teoría de riesgo para distribuciones de probabilidad de cola ligera, basada en el modelo clásico de Cramer-Lundberg.

En el primer Capítulo se proporciona una introducción acerca del riesgo, su relación con las compañías aseguradoras y se describe brevemente las consideraciones hechas en el modelo de riesgo.

En el segundo Capítulo se muestran conceptos de probabilidad, necesarios para poder comprender el modelo de Cramer-Lundberg, se definen las distribuciones de cola ligera, valor esperado, transformada de Laplace entre otros. También se incluyen algunos teoremas y resultados útiles de Teoría de renovación.

En el tercer Capítulo se describe el modelo clásico de riesgo, así como la aproximación de Cramer-Lundberg, la fórmula de Pollaczek-Khinchin que proporciona una forma cerrada de la probabilidad de ruina, el algoritmo de Panjer, el cual obtiene distribuciones de proba-

bilidad de variables aleatorias de manera recursiva y algunas cotas de probabilidades de ruina.

Finalmente en el Capítulo cuatro, con el objetivo de emplear la teoría descrita en los Capítulos anteriores, se muestran algunas aproximaciones de probabilidades de ruina considerando distribuciones de cola ligera y simulaciones de trayectorias de riesgo.

# Capítulo 1

## Introducción

Todos nuestros pensamientos, decisiones y en general todas las acciones humanas conllevan un riesgo, el riesgo se considera como una amenaza para el hombre, ya que no se sabe con certeza que consecuencias ocasionará. Es por ello, que siempre es importante analizar la magnitud e intensidad de los riesgos a los que diariamente el ser humano se enfrenta. Formalmente el riesgo se define como:

- La contingencia en la proximidad de un daño, es decir, la incertidumbre que existe de que un hecho negativo o peligroso ocurra.
- Una medida de pérdida potencial y económica en términos de la posibilidad de ocurrencia de un evento no deseado, aunado con la magnitud de sus consecuencias.

Por representar algo negativo para el hombre, éste se ha dado a la tarea de clasificarlos, ya que en todas las ramas de las ciencias se presentan o se tienen contemplados riesgos. Algunos de ellos son los riesgos económicos, sociales, físicos, biológicos, psicológicos y financieros.

Particularmente, el riesgo es un concepto importante en economía, debido a que día con día es necesario contar con estrategias y métodos para el buen manejo de nuestros bienes y recursos, así se han diseñado herramientas para tratar de reducir las pérdidas económicas que ayuden a la economía de los individuos. Nuestro interés estará particularmente centrado en el riesgo financiero y en el riesgo económico.

El riesgo económico hace referencia a la incertidumbre en el rendimiento de la inversión debido a los cambios producidos en la situación económica de una empresa. A modo de ejemplo, dicho riesgo puede provenir de:

- La política de gestión de la empresa.
- La política de distribución de productos o servicios.
- La aparición de nuevos competidores.
- La alteración en los gustos de los consumidores.

El riesgo económico es consecuencia directa de las decisiones de inversión que previamente se determinaron por una empresa.

Por otra parte, el riesgo financiero se refiere a la incertidumbre asociada al rendimiento de la inversión debido a que la empresa no puede hacer frente a sus obligaciones financieras. Es decir, es la posibilidad de obtener resultados diferentes a los esperados como consecuencia de las distintas variables de inversión.

Cuando la empresa que se ve involucrada es una compañía aseguradora se habla de un riesgo actuarial, el riesgo actuarial se refiere a la incertidumbre que existe de que una compañía aseguradora, sea capaz de cumplir o solventar las reclamaciones de todos sus asegurados.

Particularmente la teoría de riesgo se ha centrado en estudiar el manejo de reservas de una compañía aseguradora y de estimar las posibilidades de ruina de dicha aseguradora. Considerando distintos factores, como el capital inicial, el número de reclamos y el tamaño de los reclamos, con el propósito de ponderar las consecuencias del riesgo de interés.

## 1.1. Riesgo y su relación con las compañías aseguradoras

A lo largo de la historia siempre han existido tanto accidentes y desastres naturales, situaciones en las que el término riesgo se ve involucrado, puesto que en muchas ocasiones no se está preparado para tales emergencias y en consecuencia no se pueden solventar económicamente, por tal motivo, se suelen contratar a compañías aseguradoras para prepararse en estas situaciones.

De manera general una compañía de seguros opera de la siguiente manera: existe un grupo de personas que reconocen estar expuestos a algún tipo de riesgo (algo peligroso) hacia su persona o en sus propiedades y que dichos riesgos pueden causarles consecuencias graves, en su economía o inclusive la pérdida de sus vidas.

Entonces, contratan un seguro donde cada una de estas personas pagan una cantidad de dinero llamada prima a la compañía aseguradora, la que en dicho momento hace la firme promesa de apoyar monetariamente a todas aquellas personas que sufran algún tipo de daño, en el tiempo de vigencia del seguro. Por lo tanto aunque no se conozca con certeza cuantas personas requerirán la protección de la compañía, el capital obtenido de manera colectiva debe ser suficiente para solventar los gastos que se presenten, sin duda alguna la pregunta de mayor interés para la compañía aseguradora es la siguiente:

¿ Hasta qué punto la compañía aseguradora se puede solventarse?

Es decir, ¿cuál es la probabilidad de no ruina en la compañía?, esta interrogante ha hecho que se desarrollen investigaciones acerca de lo lejos o cerca que una compañía de seguros se encuentra de la ruina, empleando de manera formal conceptos matemáticos para describir los movimientos de la compañía.

Las compañías de seguros, aparecieron en el siglo XV en Italia y Holanda. Al principio aseguraban el transporte de bienes por vías marítimas y posteriormente ampliaron su cober-

## 1.1. RIESGO Y SU RELACIÓN CON LAS COMPAÑÍAS ASEGURADORAS

tura a envíos por rutas a través de continentes, ríos y lagos. Para fijar las primas de seguro, estas compañías evaluaban los riesgos a los que estaban sometidos los envíos, y como resulta natural, a un riesgo mayor le asignaban una prima mayor, de hecho, la prima para envíos marítimos oscilaba entre 12 % y 15 % del valor de los bienes asegurados, mientras que para los envíos continentales la prima variaba entre 6 % y el 8 %.

Desde hace ya bastante tiempo, la principal característica en una compañía de seguros es la incertidumbre asociada al tamaño de los reclamos que la compañía recibe por parte de sus asegurados, en un determinado tiempo. Una de las mejores formas de calcular dicho riesgo o incertidumbre es a través de la teoría de la probabilidad.

La probabilidad recientemente se ha dedicado de manera muy formal a estudiar este tipo de fenómenos de riesgo, es así que del riesgo actuarial se ha desprendido el estudio de la teoría de riesgo, la cual estudia la vulnerabilidad de una compañía aseguradora a la insolvencia o ruina.

El punto de partida de la teoría de riesgo fue sin duda el modelo clásico de riesgo introducido en 1903 por el actuario sueco Filip Lundberg en su tesis doctoral. Desde este año, él proponía algunas fórmulas asintóticas para la probabilidad de ruina de una compañía aseguradora en la que los siniestros o reclamos de sus asegurados eran pequeños. Este modelo fue estudiado más tarde por el estadístico y probabilista Harald Cramer (1930), introduciendo nuevos métodos en teoría de riesgo, para publicar su libro “On the mathematical theory of risk”.

El modelo clásico fue extendido más adelante para relajar supuestos sobre la distribución del tiempo de la inter-demanda, la distribución de los tamaños de los reclamos, etc., en la mayoría de los casos, el objetivo principal del modelo clásico y sus extensiones era calcular la probabilidad de ruina.

Más tarde Cramer (1932) también propuso fórmulas asintóticas para la probabilidad de ruina, retomando algunas ideas de Lundberg y dos años más tarde propone algunas aplicaciones numéricas a la teoría de riesgo.

Una de las fórmulas más famosas dentro del campo de la teoría de riesgo es sin duda la de Pollaczek-Khinchin, la cual surge en el contexto de teoría de colas por N.U. Pabhu (1965), dicha fórmula permite realizar cálculos de probabilidades de ruina para casos generales de acumulación, puesto que en ella no se especifica si los reclamos son grandes (cola pesada) o pequeños (cola ligera).

La aproximación de Panjer (1980) fue útil para que Gerber empleara aplicaciones por medio del algoritmo de Panjer, para calcular reaseguros tipo stop-loss. En general dicho algoritmo es bastante famoso en el estudio de la teoría de riesgo, por que proporciona probabilidades de ruina de forma recursiva, comúnmente la aplicación del algoritmo emplea la fórmula de Pollaczek-Khinchin.

J. Abate y W. Whitt (1992) realizan estudios sobre métodos para transformadas de probabilidad, por medio de series de Fourier y transformadas de Laplace, lo que proporcionó un método exacto para calcular la probabilidad de ruina en algunos casos. Taylor (1976) obtuvo cotas por arriba y por abajo de las probabilidades de ruina.

Se estudian probabilidades de ruina para procesos de riesgo más generales donde se consideran incrementos independientes y estacionarios, al momento de tomar en cuenta la llegada de los reclamos y en donde dichos reclamos se discuten en intervalos finitos e infinitos estudiados por Dufresne y Gerber, además de estos temas, ellos estudiaron distribuciones conjuntas del tiempo de ruina del surplus antes y el deficit al tiempo de ruina.

Los libros de Rolski et al (1999) y Jan Grandell (1991) serán usados en esta tesis para poder obtener información más completa sobre el modelo clásico de Cramer-Lundberg.

## 1.2. Algunos conceptos de seguros y finanzas

Para cumplir con el objetivo de brindar protección a sus asegurados, la aseguradora entra en un proceso para determinar cuanto será el monto de la prima a cobrar y los intervalos de tiempo en los que la recibirá, a fin de solventarse. Dentro de esta discusión de asignaciones entran en juego factores tanto deterministas como estocásticos de diversa índole. Entre los factores que tienen un comportamiento estocástico y que se analizarán a lo largo de esta tesis se pueden mencionar los siguientes.

- *Época o periodos de reclamos.*

Denotados por  $W_1, W_2, \dots$ , son los reclamos que llegan a la aseguradora.

- *Número de llegada de reclamos al tiempo  $t$ .*

Denotado por  $N(t)$ , donde  $N(t) = \sup\{n : W_n \leq t\}$ . Se refiere al número de reclamaciones que llegan a la aseguradora en un determinado periodo de tiempo.

- *Tamaño de los reclamos.*

Los reclamos ocurridos al tiempo  $W_n$  tienen un tamaño denotado como  $Z_n$ .

- *Cantidad de reclamos hasta el tiempo  $t$ .*

Denotado por  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ , donde para  $N(t) = 0$ , el valor de  $S(t)$  será 0.

$S(t)$  es el monto que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante un periodo completo de tiempo.

### 1.2.1. Modelo de riesgo

Muchas veces se piensa que los resultados teóricos, son difíciles de aplicar en la vida real. Sin embargo, el cálculo de aproximación y de probabilidades de ruina han sido una fuente constante de inspiración en el desarrollo de las matemáticas actuariales.

El momento de ruina de una compañía ocurre cuando su capital es negativo, debido a que no fue posible que cumpliera con todas las reclamaciones hechas por sus asegurados. Como ya se ha mencionado existen distintos factores a considerar, pero quizás uno de los más importante sea el tamaño de los reclamos, es decir, que tan grandes o pequeños son. Con base en dicha observación se ha hecho una clara división entre suponer reclamaciones grandes y pequeñas, puesto que en una compañía no se sabrá a ciencia cierta que tipo de reclamación llegara.

Particularmente en este trabajo se asumirá que las reclamaciones son pequeñas, en base a este supuesto se explicará el modelo clásico de riesgo. Básicamente el modelo hace los siguientes supuestos:

- i) La llegada de los reclamos a la compañía, son descritos por medio de un proceso puntual, el elegido es el proceso de Poisson.
- ii) El tamaño de los reclamos se asume que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.
- iii) El proceso puntual y las variables aleatorias son independientes.
- iv) La prima es constante y se recibe por cada unidad de tiempo.

En el siguiente Capítulo se estudiarán algunos conceptos básicos de teoría de la probabilidad tales como variable aleatoria, procesos de Poisson, entre otros, los cuales servirán de ayuda para entender el modelo clásico de riesgo descrito en el Capítulo 3.





## Capítulo 2

# Conceptos Preliminares

Existe una gran variedad de fenómenos y experimentos naturales, sociales y de diversa índole en la que se tiene la característica de obtener resultados u observaciones que son difíciles de pronosticar con certeza, aunque se realice un estudio detallado repetidas veces y bajo las mismas condiciones, como por ejemplo los juegos de azar. Precisamente a la imposibilidad de predecir con exactitud resultados se llama aleatoriedad y a los fenómenos que cumplen con esta característica se les llama fenómenos o experimentos aleatorios.

En el siglo XX surge de manera formal la rama de las matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios llamada probabilidad, la cual propone modelos con bases matemáticas que ajustan tales fenómenos, para posteriormente estudiar sus consecuencias lógicas.

En este Capítulo se mencionarán conceptos básicos de probabilidad, los cuales proporcionarán la ayuda suficiente para poder desarrollar el presente trabajo.

### Experimento aleatorio

El término clave que propicia o impulsa el nacimiento de la teoría de probabilidad es precisamente la observación de un experimento aleatorio.

Un experimento aleatorio  $\varepsilon$ , es un experimento que presenta las siguientes tres características.

- (i) Tiene al menos dos posibles resultados;
- (ii) el conjunto de posibles resultados se conoce antes de que el experimento se realice y;
- (iii) puede repetirse esencialmente bajo las mismas condiciones.

Se puede notar que dentro de un experimento aleatorio se observan varios puntos a discutir, se tienen dos o más posibles resultados, por ejemplo, el evento de observar la evaporación del agua, no se considera experimento aleatorio, puesto que se sabe que se va a evaporar y es la única posibilidad, sin embargo, lanzar un dado, es un experimento aleatorio por que se tienen seis posibles resultados.

Dentro de un experimento aleatorio también se hacen supuestos, como se menciona en (ii), es decir, se debe saber exactamente que casos se tendrán contemplados antes de realizar

el experimento, así, por ejemplo el suceso de observar una bóveda celeste a través de un telescopio nuevo, el cual tiene una potencia superior a todos los anteriores, en este caso es difícil inferir que resultados se obtendrán y especificar los posibles resultados que se encontrarán, por lo que este suceso no es un experimento aleatorio.

## Espacio muestral

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados o estados de la naturaleza de un experimento aleatorio  $\varepsilon$ , se denota mediante el símbolo  $\Omega$ . Los subconjuntos de  $\Omega$  son llamados eventos o sucesos y se denota por letras mayúsculas  $A, B, \dots$ . Por ejemplo si  $\varepsilon$  es el experimento aleatorio de lanzar un dado, entonces  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , será el conjunto de todos los valores que se pueden obtener como resultado de arrojar el dado. El subconjunto  $A = \{1\}$  de  $\Omega$  es el evento de lanzar el dado y observar el número 1.

## Medida de probabilidad

El concepto de medida de probabilidad cuantifica la creencia sobre la ocurrencia de los eventos que se encuentran en el espacio muestral.

**Definición 2.0.1.** Sea  $\Omega$  un espacio muestral y  $\mathcal{F} = \{A \in \Omega\}$ , tal que cumple lo siguiente,

a)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ,

b) Si  $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, 3, \dots, A_i \cap A_j = \emptyset$  con  $i \neq j$  entonces  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ ,

c) Si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $A^c = \Omega/A \in \mathcal{F}$ ,  
 $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n \dots)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c \cap \dots \in \mathcal{F}$ .

Entonces una medida de probabilidad es una función  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , la cual satisface lo siguiente,

(i)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,

(ii) si  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión inyectiva de eventos en  $\Omega$  con  $A_n \cap A_m = \emptyset$  para  $n \neq m$ , entonces  $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ .

## 2.1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria se define de la siguiente manera:

**Definición 2.1.1.** Supóngase que se tiene un espacio muestral  $\Omega$ , asociado a un experimento aleatorio, una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $X^{-1} = \{w \in \Omega : X(w) \in \mathcal{F}\}$  para todo  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ , es una variable aleatoria.

Existen dos tipos importantes de variables aleatorias: discretas y absolutamente continuas, para cada una de ellas se tiene una forma de calcular sus respectivas probabilidades.

## Distribuciones Discretas

Cuando se tiene una variable aleatoria discreta, la probabilidad de que ésta tome todos y cada uno de sus posibles valores se llama función de densidad de probabilidad y se define de la siguiente manera:

**Definición 2.1.2.** *La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria discreta  $X$ , denotada por  $p(x)$  o  $p_X(x)$ , se define como  $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ , la cual satisface las siguientes propiedades:*

- $p(x) \geq 0$  para todo  $x$ .
- $\sum_x p(x) = 1$ .

Entre las principales variables aleatorias discretas, se pueden mencionar las siguientes

- *Distribución de Probabilidad Bernoulli.* Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución de probabilidad Bernoulli, si  $\mathbb{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$  para  $x = 0, 1$ ,  $0 < p < 1$ , se denota como  $X \sim Ber(p)$ .
- *Distribución de Probabilidad Binomial.* Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución de probabilidad binomial basada en  $n$  variables aleatorias de Bernoulli, con probabilidad de éxito  $p$ , si  $\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ ,  $x = 0, 1, \dots, n$ ,  $0 \leq p \leq 1$ ; se denota  $X \sim Bin(n, p)$ .
- *Distribución de probabilidad Geométrica.* Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de probabilidad geométrica si esta definida como  $\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1}$ ,  $x = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq p \leq 1$ , se denota  $X \sim Geo(p)$ .
- *Distribución de Probabilidad Binomial Negativa.* Una variable aleatoria  $X$  igual al número de la prueba en la cual aparece el  $r$ -ésimo éxito se dice que tiene una distribución binomial negativa si  $\mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r(1-p)^{x-r}$ ,  $x = r, r+1, \dots$ ,  $0 \leq p \leq 1$  y se denota como  $X \sim BN(r, p)$ .
- *Distribución de Probabilidad Hipergeométrica.* Una variable aleatoria  $X$  igual al número de éxitos en una muestra de tamaño  $n$ , tiene distribución hipergeométrica si  $\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ ,  $x = 0, 1, \dots, x \leq k, n-x \leq N-k$  y se denota como  $X \sim Hiper(N, k, n)$ .
- *Distribución de Probabilidad de Poisson.* Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de Poisson si  $\mathbb{P}(X = x) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}$ ,  $x = 0, 1, \dots, \lambda > 0$ , y se escribe como  $X \sim Poi(\lambda)$ .

## Función de distribución acumulada

Esta función como su nombre lo indica acumula todas las probabilidad de que la variable aleatoria  $X$ , sea menor o igual que un valor de  $x$  dado, formalmente se define a continuación.

**Definición 2.1.3.** *La función de distribución acumulada (FDA), de la variable aleatoria  $X$  denotada por  $F_X(x)$  o simplemente como  $F(x)$ , se define como:*

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{w : X(w) \leq x\} = \mathbb{P}\{X^{-1}(-\infty, x]\}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Así, se tiene que  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  y tiene las siguientes propiedades:

- a)  $F_X(x)$  es una función creciente, es decir, si  $a < b$  entonces  $F_X(a) \leq F_X(b)$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ .
- c)  $F_X(x)$  es continua por la derecha con límites a la izquierda, esto quiere

$$\lim_{a_n \rightarrow a_+} = F_X(a_+),$$

siempre y cuando exista el limite anterior.

## Distribuciones absolutamente continuas

**Definición 2.1.4.** *Sea  $F_X(x)$  la FDA de una variable aleatoria absolutamente continua  $X$ , entonces la función de densidad de probabilidad (fdp), denotada como  $f_X(x)$  o  $f(x)$ , cumple que*

- $f_X(x) \geq 0$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ .
- $(X^{-1}([a, b])) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$ .

y esta dada por

$$f(x) = f_X(x) = \frac{d}{dx} [F_X(x)],$$

siempre y cuando la derivada exista.

Entre las principales distribuciones continuas, se pueden mencionar las siguientes.

- **Distribución Normal.** Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución de probabilidad normal si y sólo si, la fdp de  $X$  es  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$ ;  $\sigma > 0$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $-\infty < x < \infty$  y se denota como  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- *Distribución gamma.* La variable aleatoria  $X$ , tiene distribución gamma con parámetros  $\alpha$  y  $\theta$ , si su fdp está dada por:  $f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\theta})}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}$ ;  $\alpha > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $x > 0$  y se denota como  $X \sim \text{gamma}(\alpha, \theta)$ .
- *Distribución Exponencial.* La variable aleatoria  $X$ , tiene distribución exponencial si su fdp está dada por:  $f(x) = \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{x}{\theta})$ ,  $x > 0$  y se denota  $X \sim \exp(\theta)$ .
- *Distribución Beta.* Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución beta si  $f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}$  para todo  $0 < x < 1$ , donde  $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ , y se denota como  $X \sim \text{Beta}(a,b)$ .
- *Distribución Weibull.* Una variable aleatoria  $X$  tiene esta distribución con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  si y sólo si su fdp está dada por:  $f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\}$  se denota como  $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$ .
- *Distribución Uniforme.* Una variable aleatoria  $X$  en un intervalo  $[a, b]$ , donde  $a < b$  tiene distribución de probabilidad uniforme si y sólo si tiene la siguiente fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se denota como  $X \sim U(a, b)$ .

## Valor Esperado

El valor esperado o esperanza de una variable aleatoria tuvo sus orígenes en los juegos de azar, ya que los jugadores deseaban estimar cual era la esperanza de ganar en repetidas ocasiones un juego.

El valor esperado de una variable aleatoria  $X$ , denotado por  $E(X)$ , se define de la siguiente manera:

$$E(X) = \int_{\Omega} x dP = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x) = \begin{cases} \sum xp(x) & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int x f_X(x) dx & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Siempre que la serie (integral) converja.

## Observación

- Si  $X$  es una variable aleatoria absolutamente continua no negativa entonces,

$$\mu = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] dx.$$

El valor esperado también se denota con la letra griega  $\mu$ . De manera general para una función arbitraria  $g(x)$  de  $x$ :

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x) = \begin{cases} \sum g(x)p(x) & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int_0^x g(x)f_X(x) dx & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Si  $g(x) = X^r$  entonces  $E(X^r) = \mu_r$ , se llama el  $r$ -ésimo momento de  $X$  con respecto al origen.

## Varianza

La varianza de una variable aleatoria mide el grado de dispersión alrededor de su media.

**Definición 2.1.5.** Sea  $X$  una variable aleatoria con  $\mu = E(X) < \infty$ , la varianza de  $X$ , denotada por  $V(X)$ , se define como,

$$V(X) = E[(X - \mu)^2].$$

La varianza de un variable aleatoria se denota como  $\sigma^2$  en lugar de  $V(X)$ .

## Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos como su nombre lo indica genera todos los momentos respecto al origen de una variable aleatoria, formalmente se define de la siguiente manera.

**Definición 2.1.6.** Sea  $X$  una variable aleatoria. La función generadora de momentos, denotada por  $m_X$ , es la función  $m_X : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida como

$$m_X(s) = E[\exp(sX)],$$

donde  $I = \{s \in \mathbb{R} : m_X(s) < \infty\}$  es el intervalo de definición de  $m_X$ <sup>1</sup>.

La importancia de la función generadora de momentos, radica en que si se tienen dos o más variables aleatorias con la misma función generadora de momentos, entonces es posible demostrar que tienen la misma distribución de probabilidad.

---

<sup>1</sup>Algunas veces cuando  $F$  es la FDA de  $X$ , la función generadora de momentos puede denotarse como  $m_F$  en lugar de  $m_X$ .

## Función Generadora de probabilidades

Es posible también definir la función generadora de probabilidades para variables aleatorias que tomen valores sobre los números naturales.

**Definición 2.1.7.** *Sea  $X$  una variable aleatoria que toma valores en  $\mathbb{N}$  y con distribución de probabilidad  $p(k)$ , la función generadora de probabilidades de  $X$ , es una función  $g_X : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)s^k.$$

Si  $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$  es una sucesión arbitraria de números reales, no necesariamente una distribución de probabilidad, entonces la función generatriz  $g(z)$  de  $\{a_k\}$ , está dada por

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

## Transformada de Laplace

**Definición 2.1.8.** *La transformada de Laplace de la variable aleatoria  $X$ , denotada por  $\ell_X^2$  se define como*

$$\ell_X(s) = E[\exp(-sX)]$$

$\ell_X : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ , donde  $J$  es el intervalo donde  $\ell_X$  está definida.

### Observaciones

- $m_X(s) = \ell_X(-s)$ ,  $s \in I$ .
- En general, si se tiene una función  $C : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ , entonces la transformada de Laplace se define como:

$$\ell_C(s) = \int \exp(sx)C(x) dx,$$

para los valores de  $s$  donde  $\ell_C$  existe.

---

<sup>2</sup>Cuando  $F$  es la FDA de  $X$ , la transformada de Laplace de  $X$ , también se denota como  $\ell_F(s)$ .

## 2.2. Variables aleatorias multivariadas

Hasta este momento se han definido conceptos para el caso en el que se tiene solo una variable aleatoria, pero en la mayoría de los casos o experimentos no solo se ve involucrada una variable aleatoria, por tal razón a continuación se mencionarán los principales conceptos para el caso de  $n$  variables aleatorias tanto continuas como discretas.

Un vector aleatorio de dimensión  $n$  es un vector de la forma  $(X_1, X_2, \dots, X_n)^3$ , en donde cada coordenada es una variable aleatoria.

Se dice que un vector aleatorio es discreto o continuo si todas sus componentes son variables aleatorias discretas o continuas, respectivamente. Un vector aleatorio  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  puede considerarse como una función del espacio muestral  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$ . Es decir, el vector  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  evaluado en  $\omega$  es  $(X_1, X_2, \dots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ .

### Distribución de densidad conjunta

**Definición 2.2.1.** Sea  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vector discreto. La probabilidad de que  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$  está determinada por la función de distribución de densidad conjunta multivariada,

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n),$$

la función  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cumple con las siguientes propiedades:

- a)  $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ .
- b)  $\sum_{x_1, \dots, x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ .

### Función de distribución acumulada

Para un vector aleatorio se define la función de distribución acumulada como sigue:

**Definición 2.2.2.** La función de distribución acumulada de un vector  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , es una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , denotada por  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ó  $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y se define como

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n).$$

### Función de densidad de probabilidad conjunta

Se dice que la función integrable y no negativa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  es la función de densidad de probabilidad conjunta de un vector continuo  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  si para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se cumple la igualdad:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \cdots du_n,$$

esta función satisface

---

<sup>3</sup>Cuando se consideran una o más variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , se suelen llamar variables aleatorias multivariadas.



$$\blacksquare \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 = 1.$$

### Probabilidad condicional

La probabilidad condicional de dos variables aleatorias permite conocer la probabilidad de que un evento ocurra dado que previamente se ha observado la ocurrencia de otro evento.

Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias discretas entonces la distribución de probabilidad de  $X = x$  dado  $Y = y$ , se denota por  $p(x|y)$  y se define para el caso discreto como:

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)},$$

siempre que  $p(y) \neq 0$ , no se define si  $p(y) = 0$

Para el caso continuo se denota por  $f_{X|Y}$  y está dado por:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f(y)},$$

siempre que  $f(y) \neq 0$ , no se define si  $f(y) = 0$ .

### Independencia

La independencia de dos o más variables aleatorias indica que la ocurrencia de un evento no depende de otros eventos, se define de la siguiente manera.

**Definición 2.2.3.** Las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes, si y sólo si,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2, \dots, X_n \leq a_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq a_1)\mathbb{P}(X_2 \leq a_2) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq a_n),$$

para todo  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , o equivalentemente,

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n),$$

donde  $F_{X_1, \dots, X_n}$  es la FDA de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  y  $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots, F_{X_n}$  son las FDA de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , respectivamente.

Es importante mencionar que si las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes y además tienen la misma distribución de probabilidad, se dice que dichas variables son *aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid)*.

**Teorema 2.2.4.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes se cumple

$$m_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = m_{X_1}(s) \cdot m_{X_2}(s) \cdots m_{X_n}(s).$$

Análogamente

$$\ell_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^n \ell_{X_i}(s).$$

La demostración del teorema anterior es inmediata de la definición de función generadora de momentos y de la definición de transformada de Laplace.

## Convolución

La convolución de dos variables aleatorias independientes  $X, Y$  con FDA dadas por  $F_X$  y  $F_Y$ , respectivamente, permite calcular la distribución de probabilidad de la suma de estas. Formalmente la convolución se define de la siguiente manera:

**Definición 2.2.5.** Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias con FDA dadas por  $F_X$  y  $F_Y$ , respectivamente. La convolución de  $F_X$  y  $F_Y$ <sup>4</sup>, denotada por  $F_X * F_Y$ , se define como

$$(F_X * F_Y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x - u) dF_Y(u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La  $n$ -ésima convolución de  $F$ , denotada por  $F^{*n}$ , se define iterativamente, de la siguiente manera: para  $n = 0$ ,  $F^{*0}(x)$  es la delta de Kronecker, dada por,

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Mientras que para  $n \geq 1$ ,  $F^{*n} = F^{*(n-1)} * F = F * \dots * F$  ( $n$  veces).

**Definición 2.2.6.** Se define la cola de una FDA  $F_X$ , denotada por  $\bar{F}$ , como  $\bar{F}(x) = 1 - F_X(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Para la función de cola de  $F^{*n}$  se escribirá  $\overline{F^{*n}}(x) = 1 - F^{*n}(x)$ .

## 2.3. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es un modelo matemático que analiza el comportamiento de fenómenos no deterministas en cuanto a su evolución en el tiempo.

El concepto de proceso estocástico es fundamental en el desarrollo de la teoría financiera, puesto que son ideales para describir conceptos y precios que varían en el tiempo. En otras palabras un proceso estocástico es una serie de eventos que se mueven a través del tiempo y que se rigen por medio de leyes de probabilidad.

Muchas aplicaciones de procesos estocásticos ocurren en la física, las ingenierías, la biología, la medicina, la psicología y otras áreas.

**Definición 2.3.1.** Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X(t) : t \in T\}$  parametrizada por un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral y un conjunto  $S$  llamado espacio de estados.

---

<sup>4</sup>Algunas veces se suele decir la convolución de dos variables aleatorias, aunque realmente se realiza la convolución entre sus FDA.

Un ejemplo de un espacio parametral es el conjunto  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  ó  $T = [0, \infty)$ , los elementos de cada conjunto con frecuencia suelen ser interpretados como tiempos. En el primer caso se dice que el proceso es a tiempo discreto y se denota como  $\{X(n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ , para el segundo caso se dice que es a tiempo continuo, y se denota como  $\{X(t) : t \geq 0\}$ .

El espacio de estados contiene todos los posibles valores del proceso, es decir, en el caso discreto contiene todos los valores de  $X(n)$  y para el caso continuo contiene todos los posibles de  $X(t)$ .

Más específicamente, un proceso estocástico se considera como una función  $X : T \times \Omega \rightarrow S$  donde a la pareja  $(t, \omega)$  se le asocia el estado  $X(t, \omega)$ . Para cada valor de  $t$  en  $T$ , el mapeo  $\omega \rightarrow X(t, \omega)$  se llama trayectoria del proceso.

Por ejemplo si  $A$  es un conjunto de estados, entonces el evento  $(X(t) \in A)$  corresponderá al caso donde al tiempo  $t$  el proceso toma algún valor dentro del conjunto  $A$ . En particular si  $X(t) = x$  indica el evento en donde al tiempo  $t$ , el proceso se encuentra en el estado  $x$ .

## Clasificación de los procesos estocásticos

Existen distintos tipos de procesos estocásticos de acuerdo a su relación con  $X(t)$ . A continuación se mencionaran algunos de estos:

- *Procesos con incrementos independientes*

Se dice que un proceso  $\{X(t) : t \geq 0\}$  tiene incrementos independientes si para cada tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  son independientes.

- *Procesos estacionarios*

Un proceso  $\{X(t) : t \geq 0\}$  es un proceso estocástico estacionario si para cualesquiera tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , la distribución del vector  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  es la misma que la del vector  $(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h))$  para cualquier  $h > 0$ . En particular la distribución de  $X(t)$  es igual a la distribución de la variable aleatoria  $X(t + h)$ ,  $h \geq 0$ .

- *Procesos con incrementos estacionarios*

Un proceso  $\{X(t) : t \geq 0\}$  tiene incrementos estacionarios si para cualesquiera tiempos  $s < t$ , y para cualquier  $h > 0$ , las variables  $X(t + h) - X(s + h)$  y  $X(t) - X(s)$  tienen la misma distribución de probabilidad.

- *Procesos de renovación*

Un proceso de renovación es una sucesión  $T_n$  de variables aleatorias iid que representan los tiempos de vida de unidades. La primera unidad empieza su ciclo de vida en el cero, y cuando falla al tiempo  $T_1$  es reemplazada inmediatamente por una nueva unidad, la cual posteriormente falla al tiempo  $T_1 + T_2$  y es reemplazada nuevamente por una nueva

unidad y así sucesivamente, es decir, se van dando o renovando unidades, de ahí que se llamen procesos de renovación. El tiempo de la  $n$ -ésima renovación se denotará por  $W_n$  y está dado por  $W_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ .

## 2.4. Procesos de Poisson

Supóngase que están llegando eventos en tiempos aleatorios, si se denota con  $\{N(t) : t \geq 0\}$  el número de eventos hasta el tiempo  $t$ , entonces se define el proceso de Poisson homogéneo de la siguiente manera.

**Definición 2.4.1.** Sea  $\lambda > 0$  una constante arbitraria dada. Un proceso estocástico  $\{N(t) : t \geq 0\}$  se llama proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$  si satisface las siguientes propiedades:

- 1)  $\mathbb{P}(N(0) = 0) = 1$ .
- 2) Para toda sucesión  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ,  $n \geq 1$  de tiempos, las variables aleatorias  $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$  son independientes.
- 3) Para todo  $s > t$  se tiene que  $N(t) - N(s)$  es una variable aleatoria de Poisson de parámetro  $\lambda(t - s)$ , es decir,

$$\mathbb{P}(N(t) - N(s) = k) = \frac{[\lambda(t - s)]^k \exp[-\lambda(t - s)]}{k!},$$

para  $k = 0, 1, \dots$

Observese que la propiedad 2) es la propiedad de incrementos independientes y la propiedad 3), la de incrementos estacionarios.

**Teorema 2.4.2.** Los tiempos de llegada  $W_n$  del proceso de Poisson  $\{N(t) : t \geq 0\}$ , tienen distribución gamma con fdp  $f_{W_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $t \geq 0$ .

En particular  $W_1$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .

### Demostración

La FDA de  $W_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , está dada por

$$F_{W_n}(t) = \mathbb{P}(W_n \leq t) = \mathbb{P}(X(t) \geq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!},$$

y la fdp de  $W_n$  es

$$\begin{aligned} f_{W_n}(t) &= \frac{d}{dt} F_{W_n}(t) \\ &= \lambda \exp(-\lambda t) \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) \\ &= \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda t) \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 2.4.3.** *Los tiempos entre llegada de eventos  $S_0 = W_1, S_1 = W_1 - W_0, \dots, S_{n-1} = W_{n-1} - W_{n-2}, n \geq 1$  son variables aleatorias iid, con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .*

### Demostración

Se probará que la función de densidad de probabilidad conjunta de  $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ , es el producto de funciones de densidades exponenciales, es decir,

$$f_{S_0, S_1, \dots, S_{n-1}}(s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) = [\lambda \exp(-\lambda s_0)][\lambda \exp(-\lambda s_1)] \dots [\lambda \exp(-\lambda s_{n-1})] \quad (2.1)$$

Para el caso de  $n = 2$ .

Considérese el conjunto de ocurrencia de la siguiente manera  $s_1 < S_1 < s_1 + \Delta s_1$  y  $s_2 < S_2 < s_2 + \Delta s_2$ . En los intervalos  $(0, s_1]$  y  $(s_1 + \Delta s_1, s_1 + \Delta s_1 + s_2]$  no ocurren eventos y en los intervalos  $(s_1, s_1 + \Delta s_1]$  y  $(s_2, s_1 + \Delta s_1 + s_2 + \Delta s_2]$  solo ocurre un evento. Así,

$$\begin{aligned} f_{S_1, S_2}(S_1, S_2) \Delta s_1 \Delta s_2 &= \mathbb{P}(s_1 < S_1 < s_1 + \Delta s_1, s_2 < S_2 < s_2 + \Delta s_2) + o(\Delta s_1 \Delta s_2) \quad (\text{Véase [8]}) \\ &= \mathbb{P}(N((0, s_1]) = 0) \\ &\quad \times \mathbb{P}(N((s_1 + \Delta s_1, s_1 + \Delta s_1 + s_2]) = 0) \\ &\quad \times \mathbb{P}(N((s_1, s_1 + \Delta s_1]) = 1) \\ &\quad \times \mathbb{P}(N((s_1 + \Delta s_1 + s_2, s_1 + \Delta s_1 + s_2 + \Delta s_2]) = 1) + o(\Delta s_1 \Delta s_2) \\ &= \exp(-\lambda s_1) \exp(-\lambda s_2) \exp(-\Delta \lambda s_1) \exp(-\lambda \Delta s_2) \lambda(\Delta s_1) \lambda(\Delta s_2) \\ &\quad + o(\Delta s_1 \Delta s_2) \\ &= [\lambda \exp(-\lambda s_1)][\lambda \exp(-\lambda s_2)](\Delta s_1)(\Delta s_2) + o(\Delta s_1 \Delta s_2). \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $\Delta s_1 \Delta s_2$  y tomando el limite cuando  $\Delta s_1 \rightarrow 0, \Delta s_2 \rightarrow 0$ . Se obtiene el resultado en el caso  $n = 2$ . La prueba para el caso general se hace de manera similar ■

## Distribuciones Compuestas

Las variables aleatorias compuestas son sumas aleatorias de variables aleatorias, formalmente se define de la siguiente manera.

**Definición 2.4.4.** *Sea  $N$  una variable aleatoria no negativa con valores en  $\{0, 1, 2, \dots\}$  y  $Z_1, Z_2, \dots$  una colección de variables aleatorias idénticamente distribuidas y  $\{Z_i\}$  es independiente de  $N$ . Entonces la variable aleatoria*

$$X(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i & \text{si } N(t) \geq 1, \\ 0 & \text{si } N(t) = 0, \end{cases}$$

se llama variable aleatoria compuesta. Si se dice que  $X$  tiene una distribución compuesta determinada por la distribución de probabilidad  $p(k) = \mathbb{P}(N = k)$  de  $N$  y por la FDA  $F_Z$  de  $Z_i$  entonces la FDA de  $X$  está dada por

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) F_Z^{*k}(x), \quad (2.2)$$

donde  $F_Z^{*k}(x)$  denota la  $k$ -ésima convolución de  $F_Z$ , es decir,  $F_Z^{*k}(x) = \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k \leq x)$  y se denota como  $(p(k), F_Z)$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} p(k) = \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^N Z_i = k\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m Z_i = k \mid N = m\right) \mathbb{P}(N = m) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m Z_i = k\right) \mathbb{P}(N = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} q(m) p^{*m}(k), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $q(m)$  es la distribución de probabilidad de  $\{Z_i\}$ .

**Definición 2.4.5.** Sean  $\{Z_n\}$  variables aleatorias iid con FDA  $F_Z$  y sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$ , tales que  $\{Z_n\}$  y  $\{N(t) : t \geq 0\}$  son independientes. El proceso  $\{X(t) : t \geq 0\}$  definido como  $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k$  se llama proceso de Poisson compuesto con parámetros  $(\lambda t, F_Z)$ .

Se puede probar que  $\{X(t); t \geq 0\}$  tiene incrementos estacionarios e independientes. (Veáse [6], pág 161)

## 2.5. Teoría de renovación

Los procesos de renovación son procesos de Poisson mas generales, son útiles para describir intervalos de renovación de sucesiones de variables aleatorias.

**Definición 2.5.1.** Sea  $T_1, T_2, \dots$  una sucesión no negativa de variables aleatorias iid. La sucesión  $\{W_n, n \in \mathbb{N}\}$  con  $W_0 = 0$  y  $W_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$  para  $n = 1, 2, \dots$  se llama proceso de renovación puntual, donde  $W_n$  es la  $n$ -ésima renovación.

**Definición 2.5.2.** El proceso de conteo de renovación  $\{N(t), t \geq 0\}$ , donde  $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}(W_n \leq t)$ <sup>5</sup> es el número de renovaciones en el intervalo  $(0, t]$ .

<sup>5</sup>La función indicadora  $\mathbb{I} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\mathbb{I}(A, w) = 1$  si  $w \in A$  y  $\mathbb{I}(A, w) = 0$  en otro caso.

La relación entre los procesos  $\{W_n\}$  y  $\{N(t), t \geq 0\}$  está dada por

$$N(t) = n \text{ si y sólo si } \{W_n \leq t < W_{n+1}\}.$$

**Definición 2.5.3.** El número esperado de renovaciones  $H(t) = E[N(t)]$  se llama función de renovación de  $\{N(t), t \geq 0\}$ .

### Observación

$$H(t) = E \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}(W_n \leq t) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[\mathbb{I}(W_n \leq t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t), \quad t \geq 0.$$

**Definición 2.5.4.** Una ecuación de la forma

$$g(x) = z(x) + \int_0^{\infty} g(x-v) dF(v), \quad (2.4)$$

donde  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  es localmente acotada,  $z(x) = 0$  para  $x < 0$  y  $F$  es una función de distribución acumulada sobre  $\mathbb{R}^+$ , se llama ecuación de renovación.

### Observación

- En algunos casos  $F$  es FDA defectiva, esto significa que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) < 1.$$

- Si  $F$  es FDA defectiva entonces (2.4) es llamada ecuación de renovación defectiva.
- La solución a la ecuación de renovación acotada en intervalos finitos es única.

**Lema 2.5.5.** La ecuación de renovación (2.4) tiene una única solución que es acotada sobre intervalos acotados, y se cumple que  $g(x) = 0$  para  $x < 0$ . Esta solución está dada por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x z(x-v) dF^{*k}(v) = \int_0^{\infty} z(x-v) dH_0(v) \quad x \geq 0,$$

donde  $H_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$ .

**Definición 2.5.6.** Una FDA  $F$  es aritmética, si existe  $\gamma$  tal que para  $L = \{n\gamma, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  se tiene que  $\mathbb{P}(X \in L) = 1$ .

Para  $h > 0$  y  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  se define  $\bar{z}(h)$  y  $\underline{z}(h)$  como,

$$\begin{aligned} \bar{z}(h) &= h \sum_{n=1}^{\infty} \sup\{z(x) : (n-1) \leq x \leq nh\}, \\ \underline{z}(h) &= h \sum_{n=1}^{\infty} \inf\{z(x) : (n-1) \leq x \leq nh\}. \end{aligned}$$

La función  $z(x)$  se llama directamente Riemman-integrable si  $\bar{z}(h) < \infty$  para todo  $h > 0$  y si  $\lim_{h \rightarrow +0} (\bar{z}(h) - \underline{z}(h)) = 0$ .

El lema que a continuación se cita da una condición suficiente para que una función sea directamente Riemann-integrable.

**Lema 2.5.7.** *Sea  $z_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty)$  creciente mientras que  $z_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es decreciente tal que*

$$\int_0^\infty z_1(x)z_2(x) dx < \infty$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup \left\{ \frac{z_1(x+y)}{z_1(x)} : x \geq 0, 0 \leq y \leq h \right\} = 1.$$

Entonces, el producto  $z(x) = z_1(x)z_2(x)$  es directamente Riemman- integrable.

**Teorema 2.5.8.** *Sea  $z(x)$  una función directamente Riemman- integrable y  $F$  es no aritmética. Entonces para la solución  $g(x) = \int_0^\infty z(x, v) dH_0(v)$  de la ecuación (2.4) se tiene*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty z(v) d(v) & \text{si } \mu < \infty, \\ 0 & \text{si } \mu = \infty. \end{cases}$$

Para la demostración véase [6]. Este teorema también es conocido como el teorema de renovación.

## 2.6. Distribuciones de Cola Ligera

Una FDA  $F_X$  se puede clasificar, con base en la función generadora de momentos de la variable aleatoria  $X$ , como distribución de cola ligera o de cola pesada.

A continuación se dará la definición y propiedades de distribuciones de cola ligera, ya que nuestro interés estará centrado en estas.

**Definición 2.6.1.** *Sea  $F_X$  la FDA de la variable aleatoria  $X$  con valores sobre el intervalo  $[0, \infty)$ . Se dice que  $F_X$  tiene cola ligera si para algún  $s > 0$ ,*

$$m_X(s) < \infty.$$

Ejemplos de distribuciones continuas de cola ligera se encuentran la distribución exponencial y la Gamma.

### Observación

Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $m_X(s) < \infty$  para  $s > 0$ , entonces

$$m_X(s) - 1 = -s \int_{-\infty}^0 F_X(y) \exp(sy) dy + s \int_0^\infty \bar{F}_X(y) \exp(sy) dy. \quad (2.5)$$



En efecto:

$$\begin{aligned}
m_X(s) - 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) dF_X(x) - 1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(sx) - 1] dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^0 [\exp(sx) - 1] dF_X(x) + \int_0^{\infty} [\exp(sx) - 1] dF_X(x) \\
&= -s \int_{-\infty}^0 \frac{1}{s} [\exp(s_0) - \exp(sx)] dF_X(x) + s \int_0^{\infty} \frac{1}{s} [\exp(sx) - \exp(s_0)] dF_X(x) \\
&= -s \int_{-\infty}^0 \int_x^0 \exp(sy) dy dF_X(x) + s \int_0^{\infty} \int_0^x \exp(sy) dy dF_X(x) \\
&= -s \int_{-\infty}^0 F_X(y) \exp(sy) dy + s \int_0^{\infty} \bar{F}_X(y) \exp(sy) dy.
\end{aligned}$$

En general es difícil decidir si una distribución es de cola ligera, directamente de la definición. Sin embargo la observación anterior permite obtener una condición suficiente y necesaria para identificar una distribución de este estilo.

**Lema 2.6.2.** *Supóngase que  $m_X(s_0) < \infty$  para algún  $s_0 > 0$ . Entonces existe  $b > 0$  tal que para todo  $x \geq 0$ ,*

$$1 - F_X(x) \leq b \exp(-s_0 x). \quad (2.6)$$

*Recíprocamente si (2.6) se satisface, entonces  $m_X(s) < \infty$  para todo  $0 \leq s < s_0$ .*

### Demostración

Supóngase que la condición (2.6) se cumple. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{m_X(s) - 1}{s} &= - \int_{-\infty}^0 F_X(y) \exp(sy) dy + \int_0^{\infty} \bar{F}_X(y) \exp(sy) dy \\
&\leq \int_0^{\infty} \bar{F}_X(y) \exp(sy) dy \\
&\leq \int_0^{\infty} b \exp(-s_0 y) dy \\
&= \frac{b \exp[(s - s_0)y]}{s - s_0} \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{b}{s - s_0}, \quad 0 \leq s < s_0,
\end{aligned}$$

de donde  $m_X(s)$  es finito para todo  $0 < s < s_0$ .

Si ahora se asume que  $m_X(s)$  es finito para  $s = s_0$ , entonces para cualquier  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
\infty &> \frac{m_X(s_0) - 1}{s_0} \\
&= \int_0^\infty \bar{F}_X(y) \exp(s_0 y) dy - \int_{-\infty}^0 F_X(y) \exp(s_0 y) dy \\
&= \int_0^x \bar{F}_X(y) \exp(s_0 y) dy + \int_x^\infty \bar{F}_X(y) \exp(s_0 y) dy - \int_{-\infty}^0 F_X(y) \exp(s_0 y) dy \\
&\geq \int_0^x \bar{F}_X(y) \exp(s_0 y) dy - \int_{-\infty}^0 F_X(y) \exp(s_0 y) dy \\
&= \int_0^x [1 - F_X(y)] \exp(s_0 y) dy - \int_{-\infty}^0 F_X(y) \exp(s_0 y) dy \\
&= [1 - F_X(y)] \frac{\exp(s_0 y)}{s_0} \Big|_0^x - \frac{1}{s_0} \int_0^x \exp(s_0 y) dF_X(y) \\
&\quad - \frac{F_X(y) \exp(s_0 y)}{s_0} \Big|_{-\infty}^x + \frac{1}{s_0} \int_{-\infty}^x \exp(s_0 y) dF_X(y) \\
&= -\frac{1}{s_0} + \frac{[1 - F_X(x)]}{s_0} \exp(s_0 x) + \frac{1}{s_0} \int_{-\infty}^x \exp(s_0 y) dF_X(y) \\
&\geq -\frac{1}{s_0} + \frac{[1 - F_X(x)]}{s_0} \exp(s_0 x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{m_X(s_0) - 1}{s_0} \geq -\frac{1}{s_0} + \frac{[1 - F_X(x)]}{s_0} \exp(s_0 x).$$

Entonces

$$1 - F_X(x) \leq m_X(s_0) \exp(s_0 x),$$

de donde se obtiene el resultado ■

Hasta aquí se han mostrado los conceptos para escribir y entender el modelo clásico de Cramer-Lundberg que se describirá en el siguiente Capítulo.

## Capítulo 3

# Modelo clásico de Cramer-Lundberg y probabilidad de ruina

Actualmente la preocupación de mayor interés para las personas y las empresas en cuanto a la administración de sus recursos es la maximización de sus bienes disponibles, lo que da como resultado la necesidad de conocer el mayor número de movimientos disponibles para su capital a través del tiempo, con el propósito de solventar adecuadamente sus gastos. El principal objetivo del estudio de la teoría de riesgo tradicional es analizar el riesgo en el caso de una compañía de seguros a fin de calcular la probabilidad de que el capital de la empresa baje de un nivel específico, considerando los siguientes elementos:

- La llegada de los reclamos.
- El tamaño de los reclamos.

En este Capítulo se explicará el modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg, el coeficiente de ajuste relacionado con la probabilidad de ruina de este proceso, la fórmula de Pollaczek-Khinchin y el algoritmo de Panjer, así como algunas cotas para calcular la probabilidad de ruina.

### 3.1. Modelo clásico de Cramer-Lundberg

Para poder definir el modelo clásico de riesgo se tienen en cuenta aspectos como el capital inicial de la compañía, el monto que se recibe por unidad de tiempo, el tamaño y el número de reclamos que llegan a la compañía en determinado tiempo.

Supóngase que se tiene una compañía de seguros, con un capital inicial  $u \geq 0$ , llegan reclamaciones en tiempos  $W_1, W_2, \dots$ , de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo  $\{N(t) : t \geq 0\}$  de intensidad  $\lambda > 0$ , supóngase también que los tamaños de las reclamaciones  $Z_1, Z_2, \dots$ , son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una cierta distribución común  $F$ , con  $F(0) = 0$  y  $E(Z_k) = \mu > 0$ , la compañía recibe de sus asegurados

una prima constante  $c > 0$  por unidad de tiempo.

Si se denota con  $X(t)$ , el capital de la compañía al tiempo  $t$  entonces,

$$X(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k.^1$$

Donde por definición  $\sum_{k=1}^0 Z_k = 0$  y  $N(t)$  es el número de reclamaciones que llegan a la compañía en el intervalo  $(0, t]$ .  $X(t)$  se llama modelo clásico de riesgo y tiene incrementos independientes y estacionarios.

La Figura 3.1 muestra una trayectoria del modelo clásico de riesgo empezando con un capital inicial  $u$ , al inicio  $X(t)$  va creciendo, por que recibe las primas de sus asegurados, pero al recibir las primeras reclamaciones,  $X(t)$  decrece, debido al desembolso de dinero que la compañía tiene que hacer, para responder las reclamaciones de sus clientes. Al termino del primer periodo de tiempo,  $X(t)$  empieza a crecer nuevamente posteriormente recibe reclamaciones de sus asegurados y el capital de la compañía decrece, y así sucesivamente.

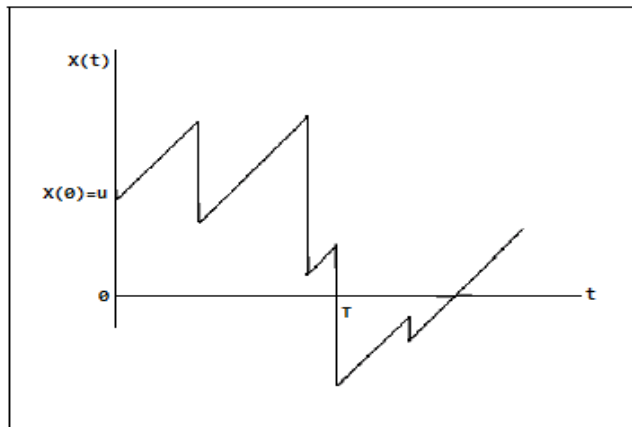


Figura 3.1: Trayectoria del modelo de riesgo.

Se dice que una compañía aseguradora está en ruina cuando para algún  $t \geq 0$ ,  $X(t)$  se encuentre por debajo de cero y el momento de ruina está dado por:

$$T = \text{mín}\{t \geq 0, X(t) < 0\}.$$

Cabe mencionar que aunque el estado de ruina haya llegado no significa que la compañía vaya a quebrar, es importante entender que este estado se utiliza para fijar un límite inferior en los fondos de la compañía que en un momento dado nos ayudará a tomar medidas

<sup>1</sup>El capital de la compañía en el instante  $t$ , es igual al capital inicial más la suma de todas las primas recolectadas por parte de sus asegurados en ese periodo de tiempo, menos la suma de todas las reclamaciones hechas por sus asegurados, es decir se descuenta los desembolsos que hizo la compañía a causa de los siniestro ocurridos en ese tiempo.

contra pérdidas excesivas de recursos. Claramente resulta de interés saber en qué momento sucederá dicho estado y qué probabilidad existe de que se llegue a este estado.

Si se denota por  $\psi(u)$ , la probabilidad de ruina de la compañía aseguradora, empezando con capital inicial  $u$ , entonces

$$\psi(u) = \mathbb{P}\{X(t) < 0, \text{ para algún } t > 0 \mid X(0) = u\}.$$

Luego la probabilidad de no ruina o de supervivencia de la compañía será denotada por

$$\phi(u) = 1 - \psi(u).$$

No siempre están disponibles soluciones explícitas para la probabilidad de ruina, esta depende del proceso de riesgo, específicamente de las distribuciones escogidas para modelar los montos y el número de reclamos.

### Observaciones

- La función  $\phi(u)$  es creciente.

#### Demostración

Sea  $u_1 \leq u_2$  entonces para todo  $t \geq 0$ ,

$$u_1 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq u_2 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i.$$

Luego

$$\left\{ u_2 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\} \subseteq \left\{ u_1 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\}.$$

Así para algún  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( u_2 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right) \leq \mathbb{P} \left( u_1 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right),$$

de donde

$$\psi(u_2) \leq \psi(u_1),$$

por lo tanto  $\psi(u)$  es decreciente y en consecuencia  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$  es creciente ■

- Se puede probar que <sup>2</sup>

$$\phi(\infty) = 1. \tag{3.1}$$

Para la demostración de este hecho véase [6].

---

<sup>2</sup> $\phi(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u)$

- Si se supone  $u = 0$  y usando la independencia de  $N(t)$  y  $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ , se deduce que

$$E[X(t)] = E\left(ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k\right) = ct - E(Z_k)E[N(t)] = ct - \mu \cdot \lambda t = t(c - \lambda\mu) \geq 0,$$

entonces se supondrá de ahora en adelante que

$$c > \lambda\mu. \tag{3.2}$$

Esto es por que en caso contrario se tendría que  $\psi(u) = 1$  para todo  $u \geq 0$ . ( Véase [6])

Este supuesto es natural ya que indica que la prima que recibe la compañía es mayor que, la intensidad de la llegada de los reclamos por el valor esperado de estos últimos. Esto es adecuado para el buen funcionamiento de una compañía.

**Definición 3.1.1.** *La carga de seguridad de la compañía, denotada por  $\rho$ , se define como*

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0. \tag{3.3}$$

Esta condición es necesaria para asegurar la solvencia de la compañía ya que si no se cumpliera, es decir, si  $\rho \leq 0$  significa que  $c \leq \lambda\mu$ , lo cual sería contradictorio con (3.2).

**Definición 3.1.2.** *Se define la función  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$h(r) = \int_0^\infty \exp(rz) dF(z) - 1. \tag{3.4}$$

*Se asume que existe  $0 < r_\infty \leq \infty$  tal que  $h(r) \uparrow +\infty$  cuando  $r \uparrow r_\infty$ .*

Esto significa que para algún  $r > 0$ ,  $m_Z(r) < \infty$ , y por lo tanto  $F$  es de cola ligera. Observe que  $h(0) = 0$ ,  $h$  es creciente, convexa y continua.

## 3.2. Aproximación de Cramer-Lundberg

La aproximación de Cramer-Lundberg está dada por

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(Ru)\psi(u) = \frac{\rho\mu}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}}. \tag{3.5}$$

Donde  $R$ , es llamado coeficiente de ajuste y se definirá mas adelante.

Para poder obtener la aproximación antes mencionada, se condicionará sobre el tiempo y sobre el tamaño de la primera reclamación, primero se obtendrá una ecuación integro-diferencial para  $\phi(u)$ .

Suponiendo que  $W_1$  no es tiempo de ruina se tiene,  $X(W_1) = u + ct - z \geq 0$ , de donde  $0 \leq z \leq u + ct$  y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \phi(u) &= \mathbb{P}(\text{No ruina en } [0, \infty] \mid X(0) = u) \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(\text{No ruina en } [0, \infty] \mid W_1 = t_1, Z_1 = z, X(0) = u) \lambda \exp(-\lambda t) dF(z) dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X(t) \geq 0 \text{ para todo } t \geq W_1 \mid W_1 = t_1, Z_1 = z, X(0) = u) \lambda \exp(-\lambda t) dF(z) dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} \mathbb{P}(X(t) \geq 0 \text{ para todo } t \geq W_1 \mid T_1 = t_1, Z_1 = z, X(0) = u) \lambda \exp(-\lambda t) dF(z) dt.
 \end{aligned}$$

Como  $X(t)$  tiene incrementos independientes y estacionarios, entonces

$$\begin{aligned}
 \phi(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X(t) \geq 0, t \geq 0 \mid X(0) = u + ct - z) dF(z) \lambda \exp(-\lambda t) dt \\
 &= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - z) dF(z) dt.
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $x = u + ct$ , se tiene  $t = \frac{x - u}{c}$ ,  $x(0) = u$ ,  $dx = c dt$ ,  $\frac{dx}{c} = dt$ , así

$$\begin{aligned}
 \phi(u) &= \int_u^\infty \lambda \exp\left[-\lambda \left(\frac{x - u}{c}\right)\right] \int_0^x \phi\left(u + c \left[\frac{x - u}{c}\right] - z\right) dF(z) \frac{dx}{c} \\
 &= \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \int_u^\infty \exp\left(-\lambda \frac{x}{c}\right) \int_0^x \phi(x - z) dF(z) dx.
 \end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned}
 g(u) &= \int_u^\infty \exp\left(-\lambda \frac{x}{c}\right) \int_0^x \phi(x - z) dF(z) dx \\
 &= - \int_{-\infty}^u \exp\left(-\lambda \frac{x}{c}\right) \int_0^x \phi(x - z) dF(z) dx \\
 g'(u) &= - \exp\left(-\frac{\lambda u}{c}\right) \int_0^u \phi(u - z) dF.
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) g(u)$$

y

$$\begin{aligned}
 \phi'(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \int_u^\infty \exp\left(\frac{-\lambda x}{c}\right) \int_0^x \phi(x-z) dF dx - \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \exp\left(\frac{-\lambda u}{c}\right) \int_0^u \phi(u-z) dF \right] \\
 &= \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \int_u^\infty \exp\left(\frac{-\lambda x}{c}\right) \int_0^x \phi(x-z) dF dx \right] - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z) dF \\
 &= \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z) dF.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por lo tanto,

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\lambda \frac{x}{c}\right) \int_0^x \phi(x-z) dF(z) dt$$

y

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c} \phi(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z) d(1-F). \tag{3.7}$$

Integrando de  $[0, t]$  la ecuación (3.6) se obtiene,

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \phi'(u) du &= \int_0^t \left[ \frac{\lambda}{c} \phi(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z) d(1-F) \right] du \\
 \phi(u) \Big|_0^t &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \phi(u-z) d(1-F) du.
 \end{aligned}$$

Integrando por partes la doble integral de la derecha,

$$\int_0^t \int_0^u \phi(u-z) d(1-F) du = \int_0^t \left( \phi(u-z)(1-F(z)) \Big|_0^u - \int_0^u (1-F(z)) \phi'(u-z) dz \right) du.$$



Entonces

$$\begin{aligned}
\phi(t) - \phi(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \{\phi(0)(1 - F(u)) - \phi(u)[1 - F(0)]\} du \\
&\quad - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u [1 - F(z)] \phi'(u - z) dz du \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(u) du + \frac{\lambda}{c} \phi(0) \int_0^t [1 - F(u)] du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(u) du \\
&\quad + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_z^t [1 - F(z)] \phi'(u - z) dz du \\
&= \frac{\lambda}{c} \phi(0) \int_0^t [1 - F(u)] du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - F(z)] dz \int_z^t \phi'(u - z) du \\
&= \frac{\lambda}{c} \phi(0) \int_0^t [1 - F(u)] du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - F(z)] dz \left[ \phi(u - z) \Big|_z^t \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \phi(0) \int_0^t [1 - F(u)] du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - F(z)] dz \left[ \phi(t - z) - \phi(0) \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \phi(0) \int_0^t [1 - F(u)] du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(t - z) [1 - F(z)] dz - \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - F(z)] \phi(0) dz \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(t - z) [1 - F(z)] dz.
\end{aligned}$$

De donde haciendo  $t = u$ ,

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u - z) [1 - F(z)] dz. \quad (3.8)$$

Haciendo  $u \rightarrow \infty$  en (3.8) y (3.1),

$$\begin{aligned}
\phi(\infty) &= \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \phi(\infty - z) [1 - F(z)] dz \\
1 &= \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F(z)] dz,
\end{aligned}$$

dado que

$$\mu = \int_0^\infty [1 - F(z)] dz.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
1 &= \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \mu \\
&= [1 - \psi(0)] + \frac{\lambda}{c} \mu \\
\psi(0) &= \frac{\lambda}{c} \mu.
\end{aligned}$$

De (3.3) se tiene,

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \\ 1 + \rho &= \frac{c}{\lambda\mu}.\end{aligned}$$

Tomando recíprocos,

$$\frac{1}{1 + \rho} = \frac{\lambda\mu}{c} = \psi(0).$$

Así,

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \rho} = \frac{\lambda\mu}{c}. \quad (3.9)$$

Nótese que la probabilidad de ruina no depende de la elección particular de  $F$ , solo de su media  $\mu$ . Cuando más grande es el coeficiente de ajuste  $\rho$ , más pequeña es la probabilidad de ruina  $\psi(0)$ .

Ahora sustituyendo (3.9) en (3.8), se tiene el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}1 - \psi(u) &= \phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z)[1 - F(z)] dz \\ &= 1 - \psi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z)[1 - F(z)] dz \\ &= 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-z)[1 - F(z)] dz \\ &= 1 - \frac{\lambda}{c} \left\{ \mu - \int_0^u [1 - \psi(u-z)][1 - F(z)] dz \right\} \\ &= 1 - \frac{\lambda}{c} \left\{ \mu - \int_0^u [1 - F(z)] dz + \int_0^u \psi(u-z)[1 - F(z)] dz \right\} \\ &= 1 - \frac{\lambda}{c} \left\{ \int_0^\infty [1 - F(z)] dz + \int_u^0 [1 - F(z)] dz + \int_0^u \psi(u-z)[1 - F(z)] dz \right\} \\ &= 1 - \frac{\lambda}{c} \left\{ \int_u^\infty [1 - F(z)] dz + \int_0^u \psi(u-z)[1 - F(z)] dz \right\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1 - F(z)] dz + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-z)[1 - F(z)] dz. \quad (3.10)$$

Obsérvese que (3.10) es una ecuación de renovación defectiva, debido a que

$$\frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1 - F(z)] dz = \frac{\lambda\mu}{c} < 1.$$

Supóngase que existe una constante  $R > 0$  tal que:

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \exp(Rz)[1 - F(z)] dz = 1. \quad (3.11)$$

Cuando esta constante existe, es única y se llama coeficiente de Cramer-Lundberg o coeficiente de ajuste, mas adelante se definirá formalmente.

Para poder demostrar la aproximación de Cramer-Lundberg, es necesario multiplicar (3.10) por  $\exp(Ru)$ , de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \exp(Ru)\psi(u) &= \frac{\lambda}{c} \exp(Ru) \int_u^{\infty} [1 - F(z)] dz \\ &+ \frac{\lambda}{c} \int_0^u \exp[R(u - z)]\psi(u - z) \exp(Rz)[1 - F(z)] dz, \end{aligned} \quad (3.12)$$

que es una ecuación de renovación del tipo (2.4), donde

$$\begin{aligned} g(u) &= \exp(Ru)\psi(u) = \underbrace{\frac{\lambda}{c} \exp(Ru) \int_u^{\infty} [1 - F(z)] dz}_{z(u)} \\ &+ \frac{\lambda}{c} \int_0^u \underbrace{\exp[R(u - z)]\psi(u - z)}_{g(u-z)} \underbrace{\exp(Rz)[1 - F(z)]}_{f(u)} dz. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Luego utilizando el Teorema 2.5.8 (Teorema de renovación),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{c} \exp(Ru) \int_u^{\infty} [1 - F(z)] dz}{\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} z \exp(Rz)[1 - F(z)] dF} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (3.14)$$

donde  $c_1 = \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{c} \exp(Ru) \int_u^{\infty} [1 - F(z)] dz$  y  $c_2 = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} z \exp(Rz)[1 - F(z)] dF$ , son dos constantes.

Ahora se darán expresiones más cortas para  $c_1$  y  $c_2$ .

Primero se encontrará una ecuación más sencilla para  $R$  de (3.11) y usando (2.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} &= \int_0^{\infty} \exp(Rz)[1 - F(z)] dz \\ &= \frac{[1 - F(z)] \exp(Rz)}{R} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \exp(Rz) d[1 - F(z)] \\ &= -\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \exp(Rz) dF(z). \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{R} \left[ \int_0^{\infty} \exp(Rz) dF(z) - 1 \right] = \frac{h(R)}{R}.$$

Entonces

$$h(R) = \frac{cR}{\lambda},$$

y por tanto  $R$  es una solución positiva de la ecuación

$$h(r) = \frac{cr}{\lambda}. \quad (3.15)$$

Como  $0 \leq u \leq z \leq \infty$ , entonces para  $c_1$  se tiene,

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^\infty \frac{\lambda}{c} \exp(Ru) \int_u^\infty [1 - F(z)] dz \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^z \exp(Ru) du [1 - F(z)] dz \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F(z)] dz \left[ \frac{1}{R} \exp(Ru) \Big|_0^\infty \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{R} \exp(Rz) - \frac{1}{R} \right] [1 - F(z)] dz \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty \exp(Rz) [1 - F(z)] dz - \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty [1 - F(z)] dz \\ &= \frac{1}{R} \left( \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \exp(Rz) [1 - F(z)] dz - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F(z)] dz \right) \\ &= \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{\lambda}{c} \mu \right) = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{1}{1 + \rho} \right) \\ &= \frac{1}{R} \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right). \end{aligned}$$

Por (3.4)

$$h'(R) = \int_0^\infty z \exp(Rz) dF(z) \quad (3.16)$$

y

$$\begin{aligned} \int z \exp(Rz) dz &= \frac{z}{R} \exp(Rz) - \frac{1}{R} \int \exp(Rz) dz \\ &= \frac{z}{R} \exp(Rz) - \frac{1}{R^2} \exp(Rz) = \left( \frac{z}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \exp(Rz). \end{aligned}$$

Para  $c_2$  se tiene,

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty z \exp(Rz)(1 - F(z)) dF \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[ (1 - F(z)) \left( \frac{z}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \exp(Rz) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left( \frac{z}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \exp(Rz) d(1 - F(z)) \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[ -1 \left( -\frac{1}{R^2} \right) + \int_0^\infty \left( \frac{z}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \exp(Rz) dF(z) \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \int_0^\infty z \exp(Rz) dF(z) - \frac{1}{R^2} \int_0^\infty \exp(Rz) dF(z) \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{1}{R^2} + \frac{h'(R)}{R} - \frac{1 + \int_0^\infty \exp(Rz) dF(z) - 1}{R^2} \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{1}{R^2} + \frac{h'(R)}{R} - \frac{h(R) + 1}{R^2} \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{h'(R)}{R} - \frac{h(R)}{R^2} \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{h'(R)}{R} - \frac{c}{\lambda R} \right] \\
&= \frac{\lambda}{cR} \left[ h'(R) - \frac{c}{\lambda} \right] \\
&= \frac{\lambda\mu}{c} \cdot \frac{1}{R\mu} \left[ h'(R) - \frac{c}{\lambda} \right] = \frac{1}{1+\rho} \cdot \frac{1}{R\mu} \left[ h'(R) - \frac{c}{\lambda} \right].
\end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{\frac{1}{R} \left( \frac{\rho}{1+\rho} \right)}{\frac{1}{1+\rho} \cdot \frac{1}{R\mu} \left[ h'(R) - \frac{c}{\lambda} \right]} \\
&= \frac{\rho R \mu (1 + \rho)}{R(1 + \rho) \left[ h'(R) - \frac{c}{\lambda} \right]} \\
&= \frac{\rho \mu}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(Ru) \psi(u) = \frac{\rho \mu}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}}. \quad (3.17)$$

La fórmula asintótica (3.17) se llama aproximación de Cramer-Lundberg, para el modelo clásico de riesgo.

De esta fórmula se sigue que,

$$\psi(u) \sim \frac{\rho \mu}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}} \exp(-Ru). \quad (3.18)$$

Nótese que se puede controlar  $\psi(u)$  a través de las constantes  $c$ ,  $R$  y  $u$ .

### 3.2.1. Caso exponencial

A continuación se muestra la aproximación de Cramer-Lundberg considerando la distribución exponencial.

Suponga que el tamaño de las reclamaciones que llegan a la compañía en un cierto período de tiempo sigue una distribución exponencial, es decir,  $F(x) = 1 - \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)$ .

Entonces

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(Ru)\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho}.$$

En efecto de la ecuación (3.6), se obtiene

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \int_0^u \phi(u-z) \exp\left(-\frac{z}{\mu}\right) dz.$$

Haciendo

$h = u - z$ ,  $z = u - h$ ,  $dh = -dz$ ,  $h(0) = u$ ,  $h(u) = 0$ , se tiene

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) + \frac{\lambda}{c\mu} \int_u^0 \phi(h) \exp\left(-\frac{u-h}{\mu}\right) dh.$$

Haciendo  $h = z$ ,

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \underbrace{\int_0^u \phi(z) \exp\left(-\frac{u-z}{\mu}\right) dz}_{F(u)}.$$

Haciendo

$$F(u) = \int_0^u \underbrace{\phi(z) \exp\left(-\frac{u-z}{\mu}\right) dz}_{f(z,u)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} F'(u) &= \int_0^u -\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{u-z}{\mu}\right) \phi(z) dz + f(u, u)(1) - f(0, u)(0) \\ &= -\frac{1}{\mu} \int_0^u \phi(z) \exp\left(-\frac{u-z}{\mu}\right) dz + \phi(u). \\ -\frac{\lambda}{c\mu} F'(u) &= \frac{\lambda}{c\mu} \left[ \frac{1}{\mu} \int_0^u \phi(z) \exp\left(-\frac{u-z}{\mu}\right) dz \right] - \frac{\lambda}{c\mu} \phi(u) \\ &= \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \phi(u) + \frac{\lambda}{c\mu} \int_0^u \phi(z) \exp\left(-\frac{u-z}{\mu}\right) dz \right] - \frac{\lambda}{c\mu} \phi(u) \\ &= \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \left( \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \int_0^u \phi(z) \exp\left(-\frac{u-z}{\mu}\right) dz \right) \right] - \frac{\lambda}{c\mu} \phi(u) \\ &= \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \phi'(u) \right] - \frac{\lambda}{c\mu} \phi(u). \end{aligned}$$

Y por lo tanto;

$$\begin{aligned}\phi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\phi'(u) + \frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \phi'(u)\right] - \frac{\lambda}{c\mu}\phi(u) \\ &= \frac{\lambda}{c}\phi'(u) + \frac{\lambda}{\mu c}\phi(u) - \frac{1}{\mu}\phi'(u) - \frac{\lambda}{\mu c}\phi(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)\phi'(u).\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} &= \frac{\lambda\mu - c}{c\mu} \\ &= \frac{\lambda\mu(\lambda\mu - c)}{\lambda\mu\mu c} \\ &= -\frac{(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu^2} \cdot \frac{\lambda\mu}{c} \\ &= \frac{-\frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu}}{\mu} \cdot \frac{\lambda\mu}{c} \\ &= -\frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{1}{(1 + \rho)} = -\frac{\rho}{\mu(1 + \rho)}.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\phi''(u) = -\frac{\rho}{\mu(1 + \rho)}\phi'(u).$$

Haciendo

$$c = \frac{\rho}{\mu(1 + \rho)} \text{ y } Y = \phi',$$

luego

$$\begin{aligned}Y'(u) &= -cY(u), \\ \frac{Y'(u)}{Y(u)} &= -c.\end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned}\int \frac{Y'(u)}{Y(u)} du &= -\int c du \\ \ln Y(u) &= -cu + c_0 \\ Y(u) &= \exp(-cu) \exp(c_0) = c_3 \exp(-cu) \\ \phi'(u) &= Y(u) = c_3 \exp(-cu) \\ \int \phi'(u) du &= \int c_3 \exp(-cu) \\ \phi(u) &= -\frac{c_3}{c} \exp(-cu) + c_1 \\ \phi(u) &= c_1 - c_2 \exp(-cu),\end{aligned}$$

por lo que se tiene  $\phi(u) = c_1 - c_2 \exp(-cu)$ .

Para  $\rho > 0$ , por (3.1) y dado que  $\phi(0) = 1 - \psi(0) = 1 - \frac{1}{1+\rho}$ , se obtiene,

$$\begin{aligned}\phi(\infty) &= c_1 = 1 \\ 1 - \frac{1}{1+\rho} &= \phi(0) = c_1 - c_2 = 1 - c_2 \\ c_2 &= \frac{1}{1+\rho}.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\phi(u) &= 1 - \frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}\right); \\ \phi(u) &= 1 - \psi(u). \\ \psi(u) &= 1 - \phi(u) = 1 - 1 + \frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}\right); \\ \psi(u) &= \frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}\right).\end{aligned}$$

Por otro lado, de (3.4)

$$\begin{aligned}h(R) &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \exp(Rz) \exp\left(-\frac{z}{\mu}\right) dF(z) - 1 \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \exp\left[-z\left(\frac{1}{\mu} - R\right)\right] dF(z) - 1 \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \exp\left[-z\left(1 - \frac{R\mu}{\mu}\right)\right] dF(z) - 1.\end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned}x &= z\left(\frac{1 - R\mu}{\mu}\right); \\ dx &= \frac{1 - R\mu}{\mu} dz.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(R) &= -\frac{1}{1 - R\mu} \exp(-x) \Big|_0^\infty - 1 \\ &= \frac{1}{1 - R\mu} - 1 = \frac{R\mu}{1 - R\mu}.\end{aligned}$$



Así de (3.15), se obtiene que  $R$  es una solución positiva de  $\frac{\mu R}{1 - R\mu} = \frac{cR}{\lambda}$ .

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\mu R}{cR} &= 1 - R\mu; \\ \frac{\lambda\mu}{c} &= 1 - R\mu; \\ \frac{\lambda\mu}{c} - 1 &= -R\mu; \\ \frac{1}{1 + \rho} - 1 &= -R\mu; \\ \frac{1 - 1 - \rho}{1 + \rho} &= -R\mu; \\ \frac{-\rho}{1 + \rho} &= -R\mu; \\ \frac{\rho}{1 + \rho} &= R\mu;\end{aligned}$$

$$R = \frac{\rho}{\mu(1 + \rho)}.$$

Además,

$$\begin{aligned}h(R) &= \frac{\mu R}{1 - \mu R}; \\ h'(R) &= \frac{\mu(1 - \mu R) - \mu R(-\mu)}{(1 - \mu R)^2} \\ &= \frac{\mu - \mu^2 R + \mu^2 R}{(1 - \mu R)^2} = \frac{\mu}{(1 - \mu R)^2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $R$ ,

$$\begin{aligned}h'(R) &= \frac{\mu}{\left[1 - \frac{\mu\rho}{\mu(1+\rho)}\right]^2} \\ &= \frac{\mu}{\left[\frac{1+\rho-\rho}{(1+\rho)}\right]^2} \\ &= \frac{\mu}{1} = \mu(1 + \rho)^2.\end{aligned}$$

Así, por (3.17) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(Ru)\psi(u) &= \frac{\rho\mu}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}} \\
 &= \frac{\rho\mu}{\mu(1+\rho)^2 - \frac{c}{\lambda}} \\
 &= \frac{\rho\mu}{\mu \left[ (1+\rho)^2 - \frac{c}{\lambda\mu} \right]} \\
 &= \frac{\rho}{(1+\rho)^2 - \frac{1}{\frac{\lambda\mu}{c}}} \\
 &= \frac{\rho}{(1+\rho)^2 - \frac{1}{1+\rho}} \\
 &= \frac{\rho}{(1+\rho)^2 - (1+\rho)} \\
 &= \frac{\rho}{1+2\rho+\rho^2-1-\rho} \\
 &= \frac{\rho}{\rho+\rho^2} \\
 &= \frac{\rho}{\rho(1+\rho)} = \frac{1}{1+\rho}.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que para este ejemplo la aproximación de Cramer-Lundberg es exacta.

### 3.3. Transformadas de Laplace y fórmula de Pollaczek-Khinchin

La fórmula de Pollaczek-Khinchin es usada en el estudio de teoría de colas, describe la probabilidad de no ruina de la compañía aseguradora en donde el número de reclamos se distribuyen de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo. En esta sección se mostrará en que consiste tal fórmula y en donde radica su importancia.

**Teorema 3.3.1.** *Las transformadas de Laplace para  $\psi$  y  $\phi$  denotadas por  $L_\psi(s)$  y  $L_\phi(s)$  son*

$$L_\phi(s) = \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - \ell_F(s))}, \quad s > 0,$$

$$L_\psi(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - \ell_F(s))}, \quad s > 0, \quad (3.19)$$

donde  $\ell_F(s) = \int_0^\infty \exp(-sy) dF(y)$ .

**Demostración**

Integrando de 0 a  $\infty$  y multiplicando la ecuación (3.6) por  $\exp(-su)$

$$\int_0^{\infty} \phi'(u) \exp(-su) du = \int_0^{\infty} \exp(-su) \left[ \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-y) dF(y) \right] du. \quad (3.20)$$

Integrando por partes la integral de la izquierda

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \phi'(u) \exp(-su) du &= \phi(u) \exp(-su) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \exp(-su) \phi(u) du \\ &= -\phi(0) + s \int_0^{\infty} \exp(-su) \phi(u) du \\ &= -\phi(0) + sL_{\phi}(s). \end{aligned}$$

Mientras que para el lado derecho, haciendo el cambio de variable  $u - y = z$ ,  $u - z = y$ ,

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \int_{u-z}^{\infty} \exp[-s(z+y)] \phi(z) dz dF(y).$$

Haciendo  $z = u$

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \exp(-sy) dF(y) \int_0^{\infty} \exp(-su) \phi(u) du = \frac{\lambda}{c} L_{\phi}(s) \ell_F(s),$$

sustituyendo en (3.20), las integrales obtenidas

$$\begin{aligned} -\phi(0) + sL_{\phi}(s) &= \frac{\lambda}{c} [L_{\phi}(s) - L_{\phi}(s) \ell_F(s)] \\ cL_{\phi}(s) - c\phi(0) &= \lambda L_{\phi}(s) [1 - \ell_F(s)] \\ L_{\phi}(s) [cs - \lambda(1 - \ell_F(s))] &= c\phi(0), \end{aligned}$$

de donde

$$L_{\phi}(s) = \frac{c\phi(0)}{cs - \lambda[1 - \ell_F(s)]}.$$

Observese que  $\phi(0) = 1 - \psi(0)$  y por (3.9), se obtiene que  $\phi(0) = \frac{c - \lambda\mu}{c}$ .

Por lo tanto

$$L_{\phi}(s) = \frac{c \frac{c - \lambda\mu}{c}}{cs - \lambda[1 - \ell_F(s)]} = \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda[1 - \ell_F(s)]}.$$

La segunda igualdad se deriva de la primera

$$L_{\psi}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-su)(1 - \phi(u)) du = \frac{1}{s} - L_{\phi}(s) \blacksquare$$

**Definición 3.3.2.** Sea  $Z$  una variable aleatoria con FDA  $F$ , entonces la cola integrada de  $F$ , denotada por  $F_Z^s(y)$ , se define como

$$F_Z^s(y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}_Z(y) dy & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

**Teorema 3.3.3** (Fórmula de Pollaczek-Khinchin). Para todo  $u \geq 0$ ,

$$\phi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u). \quad (3.21)$$

### Demostración

Se demostrará que

$$\int_0^{\infty} \exp(-su)\phi(u) du = \int_0^{\infty} \exp(-su) \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u) du. \quad (3.22)$$

Es decir, por demostrar

$$\frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda[1 - \ell_F(s)]} = \int_0^{\infty} \exp(-su) \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u) du.$$

Por lo que<sup>3</sup>

$$\int_0^{\infty} \exp(-su) \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u) du =$$

---

<sup>3</sup>Para una sucesión de funciones medibles no negativas  $f_n$ , se cumple que  $\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n dm = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n dm$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} (F_Z^s)^{*n}(u) \left[-\frac{1}{s}\right] d[\exp(-su)] \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left(\frac{1}{s}\right) \left[ -(F_Z^s)^{*n}(u) \exp(-su) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-su) d(F_Z^s)^{*n}(u) \right] \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left(\frac{1}{s}\right) \int_0^{\infty} \exp(-su) d(F_Z^s)^{*n}(u) \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} \exp(-su) d(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} \exp(-su) (dX_1 + dX_2 + \cdots + dX_n) \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} [\exp(-su) dX_1 + \exp(-su) dX_2 + \cdots + \exp(-su) dX_n] \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n E\{\exp[-s(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)]\} \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n E[\exp(-sX_1)] E[\exp(-sX_2)] \cdots E[\exp(-sX_n)] \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \ell_{F_Z^s}(s) \cdots \ell_{F_Z^s}(s) \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c} \ell_{F_Z^s}(s)\right)^n \\
 &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c} \ell_{F_Z^s}(s)}\right) \\
 &= \frac{c - \lambda\mu}{s[c - \lambda\mu \ell_{F_Z^s}(s)]}.
 \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$s\mu \ell_{F_Z^s}(s) = 1 - \ell_{F_Z^s}(s).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 s\mu\ell_{F_Z^s}(s) &= s\mu \int_0^\infty \exp(-su) d(F_Z^s)(s) \\
 &= s\mu \int_0^\infty \exp(-su) d\left(\frac{1}{\mu}\bar{F}(y)\right) \\
 &= s \int_0^\infty \exp(-su)\bar{F}(u) du \\
 &= s \int_0^\infty \exp(-su)(1 - F(u)) du \\
 &= s \int_0^\infty \exp(-su) du - s \left[ -\frac{1}{s} \exp(-su)F(u) \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty \exp(-su) dF(u) \right] \\
 &= 1 - \int_0^\infty \exp(-su) dF(u) = 1 - \ell_F(s).
 \end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$\frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda[1 - \ell_F(s)]} = \int_0^\infty \exp(-su) \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u) du \blacksquare$$

La serie infinita dada en (3.21) es particularmente útil para consideraciones teóricas, debido a la dificultad que conlleva su cálculo. Sin embargo es utilizada ampliamente para calcular aproximaciones de probabilidades de ruina, puesto que obsérvese que  $1 - \psi(u)$  es la distribución de una variable aleatoria geométrica compuesta con parámetros  $\left(\frac{\lambda\mu}{c}, F_Z^s\right)$ .

En efecto si  $N$  es una variable aleatoria geométrica de parámetro  $p$  y  $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ , tal que  $Z_1, Z_2, \dots$  son variables aleatorias independientes con distribución  $F_Z$ , entonces:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(X \leq x | N = n) p(1-p)^n = \sum_{n=0}^\infty p(1-p)^n F^{*n}.$$

De donde haciendo  $p = \frac{\lambda\mu}{c}$  y reemplazando  $F_Z$  por  $F_Z^s$ , se obtiene que

$$1 - \psi(u) = \sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u).$$

Así, después de discretizar la distribución  $F_Z^s$ , se puede emplear el algoritmo de Panjer, para obtener aproximaciones de probabilidades de ruina, el cual se describe a continuación.

### 3.4. Fórmula recursiva de Panjer

Calcular o aproximar la función de distribución de los reclamos acumulados ha sido uno de los puntos centrales en matemática de seguros.

En esta sección se desarrollará la fórmula recursiva de Panjer para calcular numéricamente las

distribuciones de probabilidad de ruina de funciones de distribuciones compuestas en casos útiles en actuaría.

Algunos ejemplos para la distribución del número de reclamos de procesos de riesgo son:

- a) La distribución de Poisson. El proceso de riesgo clásico de Cramer-Lundberg que se desarrolla en esta tesis supone que los reclamos se dan de acuerdo a un proceso de Poisson.
- b) La distribución binomial negativa o distribución de Pascal.
- c) La distribución binomial.

Estas distribuciones de probabilidad  $p_k^4$ ,  $k = 1, 2, \dots$  cumplen la relación recursiva de Panjer:

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.23)$$

donde  $a < 1$  y  $b \in R$  son constantes fijas.

Considérese la variable aleatoria compuesta

$$X = \sum_{i=1}^N Z_i,$$

donde  $Z_1, Z_2, \dots$  son variables aleatorias discretas iid, se asume también que la sucesión  $Z_1, Z_2, \dots$  es independiente del número de reclamos  $N$ . Se asume que los  $Z_i$  y  $N$  toman valores en  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Se denotará la distribución de probabilidad de  $Z_1, Z_2, \dots$ , por  $q_k$  y la distribución de probabilidad del número de reclamos por  $p_k$ , la cual satisface (3.23).

En base a estas consideraciones se tiene el siguiente lema.

**Lema 3.4.1.** *Para todo  $j, k \in \mathbb{N}$  y  $n = 1, 2, \dots$*

$$\mathbb{E} \left( Z_1 \mid \sum_{i=1}^n Z_i = j \right) = \frac{j}{n}, \quad (3.24)$$

y

$$\mathbb{P} \left( Z_1 = k \mid \sum_{i=1}^n Z_i = j \right) = \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}, \quad (3.25)$$

donde  $q_k^{*n}$  denota la  $n$ -ésima convolución de  $q_k$ .

#### Demostración

Como  $Z_1, Z_2, \dots$  son iid, se tiene que para  $X = \sum_{i=1}^n Z_i$ ,

$$n\mathbb{E} \left( Z_1 \mid \sum_{i=1}^n Z_i = j \right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k \mid X = j) = \mathbb{E}[X \mid X = j] = j,$$

<sup>4</sup>En esta sección  $p_k$  denotará  $p(k) = \mathbb{P}(X = k)$ .

de donde se obtiene (3.24).

Debido a que  $Z_1, Z_2, \dots$  son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = k | X = j) &= \frac{\mathbb{P}(Z_1 = k, Z_1 + \dots + Z_n = j - k)}{\mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_n = j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z_1 = k)\mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_n = j - k)}{\mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_n = j)} \\ &= \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}} \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente teorema muestra un método recursivo para calcular la distribución de probabilidad  $r_j = \mathbb{P}(X = j)$  de la variable aleatoria compuesta  $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ , donde la distribución de  $N$  satisface la relación de Panjer. Este método recursivo se llama algoritmo de Panjer.

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $X = \sum_{i=1}^N Z_i$  y supóngase que la distribución de  $N$  satisface (3.23), entonces*

$$r_j = \begin{cases} g_N(q_0) & j = 0, \\ (1 - aq_0)^{-1} \sum_{k=1}^j (a + bkj^{-1}) q_k r_{j-k} & j = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

donde  $g_N$  es la función generadora de probabilidades de  $N$ .

### Demostración

Para  $j = 0$  se tiene de (2.3), que

$$\begin{aligned} r_0 &= \mathbb{P}(X = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_Z^{*k}(0) \\ &= p_0 + p_1 F_Z^{*2} + p_2 F_Z^{*3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (q_0)^k = g_N(q_0). \end{aligned}$$

Para  $j \geq 1$ ,  $q_j^{*0} = 0$  y utilizando el hecho que  $N$  satisface la relación de Panjer, se sigue:

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n q_j^{*n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} q_j^{*n}. \end{aligned}$$

Usando (3.24), para  $j \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a + b \frac{1}{j} \mathbb{E} \left( Z_1 \mid \sum_{i=1}^n Z_i = j \right) \right] p_{n-1} q_j^{*n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a + b \frac{1}{j} \sum_{k=0}^j \mathbb{P} \left( Z_1 = k \mid \sum_{i=1}^n Z_i = j \right) \right] p_{n-1} q_j^{*n}. \end{aligned}$$



Utilizando (3.25),

$$\begin{aligned}
r_j &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a + b \frac{1}{j} k \sum_{k=0}^j \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}} \right) p_{n-1} q_j^{*n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a p_{n-1} q_j^{*n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{bk}{j} p_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j a p_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{bk}{j} p_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \left( a + \frac{bk}{j} \right) p_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} \\
&= \sum_{k=0}^j \left( a + \frac{bk}{j} \right) q_k \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} q_{j-k}^{*(n-1)} \\
&= \sum_{k=0}^j \left( a + \frac{bk}{j} \right) q_k r_{j-k} \\
&= a q_0 r_j + \sum_{k=1}^j \left( a + \frac{bk}{j} \right) q_k r_{j-k} \\
&= (1 - a q_0)^{-1} \sum_{k=1}^j \left( a + \frac{bk}{j} \right) q_k r_{j-k} \blacksquare
\end{aligned}$$

### 3.5. Cotas para la probabilidad de ruina

En general es difícil calcular  $\phi(u)$  por medio de la fórmula de Pollaczek, ya que está dada por medio de una suma infinita de convoluciones.

Debido a esta dificultad es importante conocer cotas y aproximaciones para  $\phi(u)$ , así como analizar su comportamiento a lo largo del tiempo para obtener información acerca del riesgo interior en una compañía.

En esta sección se definirá el coeficiente de Cramer-Lundberg y obtendrán condiciones suficientes para su existencia, así como cotas bilaterales para la probabilidad de ruina.

### Coeficiente de Cramer-Lundberg

El coeficiente de ajuste  $R$ , da una medida del riesgo que posee un portafolio<sup>5</sup> como el de las compañías de seguros. Aunque dicho coeficiente no siempre existe, se sabe que este hecho depende directamente de la distribución usada para modelar el tamaño de las reclamaciones, así, para asegurar la existencia de este coeficiente, la distribución de los montos de reclamación deberá ser de cola ligera.

**Definición 3.5.1.** *La suma de los reclamos al tiempo  $t \geq 0$ , se denota como  $S(t)$  y se define como*

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} Z_i - ct.$$

La función generadora de momentos de  $S(t)$  es

$$m_{S(t)} = \exp\{t[\lambda(m_Z(s) - 1) - cs]\}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} m_{S(t)}(s) &= E\{\exp[sS(t)]\} = E\left\{\exp\left[s\left(\sum_{i=0}^{N(t)} Z_i - ct\right)\right]\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{\exp\left[s\left(\sum_{i=0}^n Z_i - ct\right)\right]\right\} \mathbb{P}[N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-cts) E\left[\exp\left(\sum_{i=0}^n sZ_i\right)\right] \left[\frac{(\lambda t)^n \exp(-\lambda t)}{n!}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-cts) \prod_{i=1}^n E[\exp(sZ_i)] \left[\frac{(\lambda t)^n \exp(-\lambda t)}{n!}\right] \\ &= \exp(-cts) \exp(-\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[m_Z(s)]^n (\lambda t)^n}{n!} \\ &= \exp(-cts) \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t m_Z(s)) \\ &= \exp\{t[\lambda(m_Z(s) - 1) - cs]\}. \end{aligned}$$

**Definición 3.5.2.** *Si existe  $R$  tal que es la única raíz positiva de la ecuación*

$$\lambda(m_Z(s) - 1) = cs,$$

*entonces  $R$  se llama coeficiente de ajuste o coeficiente de Cramer-Lundberg.*

Si  $m_Z(s_0) < \infty$  para algún  $s_0 > 0$ , entonces la función  $\theta(s) = \lambda(m_Z(s) - 1) - cs = \lambda h(s) - cs$  es infinitamente diferenciable en el intervalo  $(-\infty, s_0)$ .

---

<sup>5</sup>Se denomina portafolio o cartera al conjunto de inversiones, o combinación de activos financieros que constituyen el patrimonio de una persona o entidad.

A continuación se muestra que existe una sola raíz positiva para esta ecuación, cuando ésta existe.

- a) Obsérvese que  $\theta'(0) = \lambda m_Z'(0) - c = \lambda\mu - c < 0$ , lo que indica que la función es decreciente en una vecindad de cero, puesto que se ha supuesto con anterioridad que  $c > \lambda\mu$ .
- b) Además,  $\theta''(s) = \lambda m_Z''(s) = \lambda \mathbb{E}[Z^2 \exp(sZ)] > 0$ , el cual muestra que  $\theta(s)$  es una función convexa.
- c) También se cumple que  $\theta(0) = 0$ .

Con base en estas tres observaciones se puede concluir que existe algún  $s_1 \in (0, s)$  tal que

$$\theta'(s_1) = 0,$$

entonces para  $s > s_1$ ,  $\theta(s)$  crece y para  $s < s_1$ ,  $\theta(s)$  decrece.

El coeficiente de ajuste existe bajo las siguientes condiciones.

**Lema 3.5.3.** *Supóngase que existe una constante  $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  tal que  $m_Z(s) < \infty$  si  $s < s_\infty$  y  $\lim_{s \rightarrow s_\infty} m_Z(s) = \infty$ . Entonces existe el coeficiente de Cramer-Lundberg( $R$ ) para el proceso de riesgo.*

#### Demostración

Por las observaciones hechas anteriormente, es suficiente demostrar que  $\theta(s)$  tiene a infinito, conforme  $s \rightarrow s_\infty$ .

Para  $s_\infty < \infty$ , se cumple dada las observaciones anteriores.

Para  $s_\infty = \infty$ . Considere  $x' > 0$  tal que  $F_Z(x') < 1$ , entonces,

$$\begin{aligned} m_Z(s) &= \int_0^\infty \exp(sx) dF_Z \\ &= \int_0^{x'} \exp(sx) dF_Z + \int_{x'}^\infty \exp(sx) dF_Z \\ &> \int_{x'}^\infty \exp(sx') dF_Z \\ &= \exp(sx') \int_{x'}^\infty dF_Z = \exp\{sx' [1 - F_Z(x')]\}. \end{aligned}$$

Así

$$m_Z(s) \geq \exp\{sx' [\bar{F}_Z(x')]\},$$

de donde se deduce que  $\theta(s)$  tiende a infinito ■

Por lo tanto existe un solo valor  $s = R > 0$  el cual satisface que

$$\theta(R) = 0. \tag{3.26}$$

La Figura 3.2 muestra el comportamiento de la función  $\theta(s)$ , lo que explica intuitivamente la unicidad del coeficiente de Cramer-Lundberg.

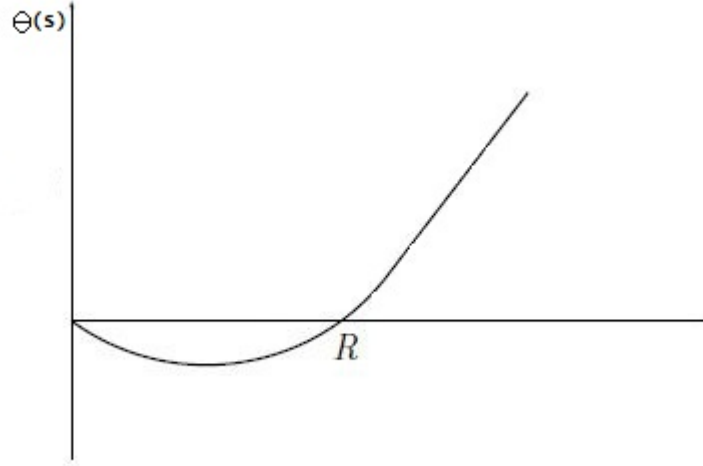


Figura 3.2: Gráfica del comportamiento de la función  $\theta(s)$ .

**Teorema 3.5.4.** *Si se asume que existe el coeficiente de ajuste  $R$  de Cramer-Lundberg del proceso de riesgo clásico. Entonces para todo  $u \geq 0$*

$$a_- \exp(-Ru) \leq \psi(u) \leq a_+ \exp(-Ru), \quad (3.27)$$

donde

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0)} \frac{\exp(Rx) \int_x^\infty \bar{F}_Z(y) dy}{\int_x^\infty \exp(Ry) \bar{F}_Z(y) dy}$$

$$a_+ = \sup_{x \in [0, x_0)} \frac{\exp(Rx) \int_x^\infty \bar{F}_Z(y) dy}{\int_x^\infty \exp(Ry) \bar{F}_Z(y) dy}$$

y  $x_0 = \sup\{x : F_Z^s(x) < 1\}$ .

#### Demostración

Se usará el Teorema A.0.2 (Véase apéndice A), ya que

$$\psi(u) = 1 - \phi(u).$$

Se considera  $\psi(u)$ , como en (3.21), se aplica el Teorema A.0.2, donde  $F_Z$  se reemplaza por

$F_Z^s$  y  $p = \rho = \frac{\lambda\mu}{c}$ , de donde se deduce (3.27), por que

$$\begin{aligned}
 m_{F_Z^s}(s) &= \int_0^\infty \exp(sy) dF_Z^s(y) \\
 &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \exp(sy) \bar{F}(y) d(y) \\
 &= \frac{m_X(s) - 1}{s\mu} = \frac{h(s)}{s\mu} \text{ por (2.5)} \\
 &= \frac{\frac{cs}{\lambda}}{s\mu} = \frac{1}{\frac{\lambda\mu}{c}} \text{ por (3.15)} \\
 &= \frac{1}{\rho},
 \end{aligned}$$

esto implica que existe una raíz positiva  $\gamma$  de

$$m_{F_Z^s}(\gamma) = \frac{1}{\rho},$$

que es una raíz positiva de (3.26) ■

Naturalmente dicho teorema es válido cuando se ven involucradas distribuciones de cola ligera, puesto que como se ha mencionado antes, solo para estas distribuciones se puede asegurar que existe el coeficiente de ajuste.



## Capítulo 4

# Aproximaciones numéricas y simulaciones

En este Capítulo se desarrollarán cálculos numéricos, aproximaciones y simulaciones de probabilidades de ruina empleando distribuciones de cola ligera, mas específicamente se considera la distribución mezcla de exponenciales (para la cual es posible calcular la probabilidad de ruina de manera exacta) y la distribución gamma.

Para desarrollar los cálculos numéricos se empleará la transformada de Laplace, pero únicamente en el caso mezcla de exponenciales, puesto que para esta distribución es posible hallar la inversa de su transformada.

Para calcular las aproximaciones se empleará el algoritmo de Panjer, junto con la fórmula de Pollaczek-Khinchin, ambos descritos en el Capítulo anterior.

Finalmente las simulaciones se harán para analizar el comportamiento de la probabilidad de ruina de una aseguradora, suponiendo distintos capitales iniciales, se empleará también la distribución gamma y la exponencial, para desarrollar las simulaciones.

### 4.1. Cálculos numéricos y exactos de la probabilidad de ruina

Los cálculos numéricos son resultados de las variables de interés que permiten medir el comportamiento de un proceso, en este caso se harán estos para aproximaciones de ruina, considerando distribuciones de cola ligera.

#### 4.1.1. Reclamos que son mezcla de exponenciales

A continuación se hará el calculo de la probabilidad de ruina utilizando el algoritmo de Panjer, la aproximación de Cramer-Lundberg y la transformada de Laplace, considerando que el tamaño de los reclamos tienen distribución de probabilidad mezcla de exponenciales.

Para este caso, se supondrá que tanto el capital inicial como la intensidad del proceso de Poisson, asociado al número de reclamos es una unidad monetaria, es decir,  $c = \lambda = 1$ , tal

que la FDA  $F(x)$ , del tamaño de los reclamos, está dada por:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{3}(e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x}). \quad (4.1)$$

Obsérvese que como (4.1) es mezcla de distribuciones exponenciales entonces, la media está dada por

$$\mu = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{36}.$$

### Transformada de Laplace

Se calculará  $\phi(u)$  de manera exacta a través de la inversa de la transformada de Laplace. Primero se obtendrá  $L_\psi$  usando (3.19).

$$\begin{aligned} \ell_F(s) &= \int_0^\infty \exp(-sx) dF(x) \\ &= \int_0^\infty \exp(-sx) \left\{ \frac{1}{3} [2 \exp(-2x) + 3 \exp(-3x) + 4 \exp(-4x)] \right\} dx \\ &= \frac{1}{3} \left\{ -\frac{2 \exp[-x(2+s)]}{2+s} - \frac{3 \exp[-x(3+s)]}{3+s} - \frac{4 \exp[-x(4+s)]}{4+s} \right\} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{2+s} + \frac{3}{3+s} + \frac{4}{4+s} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{9s^2 + 52s + 72}{(s+2)(s+3)(s+4)} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 - \ell_F(s) &= 1 - \frac{1}{3} \left[ \frac{9s^2 + 52s + 72}{(s+2)(s+3)(s+4)} \right] \\ &= \frac{s(3s^2 + 18s + 26)}{3(s+2)(s+3)(s+4)}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - \ell_F(s))} = \frac{23(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}{12s(3s^3 + 24s^2 + 60s + 46)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L_\psi(s) &= \frac{1}{s} - \frac{23(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}{12s(3s^3 + 24s^2 + 60s + 46)} \\ &= \frac{39s^2 + 243s + 366}{36(3s^3 + 24s^2 + 60s + 46)} \\ &= \frac{\frac{13}{36}s^2 + \frac{9}{4}s + \frac{61}{18}}{s^3 + 8s^2 + 20s + \frac{46}{3}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$



Calculando las raíces del polinomio  $s^3 + 8s^2 + 20s + \frac{46}{3}$  por medio de las ecuaciones de Cardan, (Véase Apéndice B) se obtiene que están dadas por

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{4}{3} \cos \left( \frac{\arccos \sqrt{\frac{1}{64}}}{3} \right) - \frac{8}{3}, \\ s_2 &= -\frac{4}{3} \cos \left( \frac{\pi + \arccos \sqrt{\frac{1}{64}}}{3} \right) - \frac{8}{3}, \\ s_3 &= -\frac{4}{3} \cos \left( \frac{\pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{64}}}{3} \right) - \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Una vez que las raíces se conocen, es posible escribir  $L_\psi(s)$  de la siguiente manera

$$L_\psi(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \frac{C}{s - s_3}, \quad (4.3)$$

para algunas constantes  $A, B, C$ .

Comparando (4.2) y (4.3) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{13}{36} &= A + B + C \\ \frac{9}{4} &= (-s_2 - s_3)A + (-s_1 - s_3)B + (-s_1 - s_2)C \\ \frac{61}{18} &= s_2s_3A + s_1s_3B + s_1s_2C. \end{aligned}$$

Haciendo  $k_1 = -s_2 - s_3$ ,  $k_2 = -s_1 - s_3$ ,  $k_3 = -s_1 - s_2$ ,  $k_4 = s_2s_3$ ,  $k_5 = s_1s_3$  y  $k_6 = s_1s_2$  se obtienen las soluciones del sistema,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{13}{36} [k_1(k_5 - k_1) - k_4(k_2 - k_1)] - \frac{9}{4}(k_5 - k_1) + \frac{61}{18}(k_2 - k_1)}{(k_6 - k_4)(k_2 - k_1) - (k_3 - k_1)(k_5 - k_1)}, \\ B &= \frac{-\frac{13}{36}k_4 + \frac{61}{18} + C(k_6 - k_4)}{k_5 - k_4}, \\ A &= \frac{13}{36} - B - C. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L_\psi(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \frac{C}{s - s_3},$$

de donde

$$\psi(u) = 0.2955835 \exp(-1.48513u) + 0.0454190 \exp(-2.72235u) + 0.0201058 \exp(-3.79251u). \quad (4.4)$$

La expresión (4.4) muestra la probabilidad de ruina de manera exacta. En general, no siempre es posible aplicar este método, puesto que se necesita calcular explícitamente la inversa de la transformada de Laplace  $\psi$ .

Alternativamente existen otros métodos que permiten hallar aproximaciones de probabilidades de ruina, como el algoritmo de Panjer y la aproximación de Cramer-Lundberg. A continuación se obtendrán estas aproximaciones, para posteriormente hacer una tabla comparativa sobre las tres probabilidades de ruina obtenidas.

### Aproximación de Cramer-Lundberg

Se calcula la probabilidad de ruina, empleando la aproximación de Cramer-Lundberg.

De (3.18) se obtiene una forma aproximada de conocer la probabilidad de ruina,

$$\psi_{C-L}(u) = \frac{c1}{c2} \exp(-Ru), \quad u \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

donde  $R$  satisface (3.11). Dado que para este caso  $\lambda = c = 1$ , entonces  $R$  ésta definida por

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(Rz)[1 - F(z)] dz &= 1 \\ \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \{\exp[-z(2 - R)] + \exp[-z(3 - R)] + \exp[-z(4 - R)]\} dz &= 1 \\ \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2 - R} + \frac{1}{3 - R} + \frac{1}{4 - R} \right] &= 1. \end{aligned}$$

Observé que para que cada uno de los cocientes anteriores sean positivos, es necesario que  $R$  sea menor que 2, esta observación será útil para elegir una raíz adecuada para el coeficiente de Cramer-Lundberg.

Simplificando la última ecuación, se obtiene

$$R^3 - 8R^2 + 20R - \frac{46}{3} = 0. \quad (4.6)$$

Resolviendo (4.6) por medio de las fórmulas de Cardan se obtiene:

$$\begin{aligned} R_1 &= 3.4209423307; \\ R_2 &= 2.722799016; \\ R_3 &= 1.48492599. \end{aligned}$$

Debido a que  $R < 2$  entonces la única posible raíz es  $R_3$ .

Una vez determinado el coeficiente de ajuste, el siguiente paso es calcular las constantes  $c_1$ ,  $c_2$  y  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{R} \left( \frac{\rho}{1 + \rho} \right), \\ \rho &= \frac{c}{\lambda\mu} = \frac{23}{13}, \\ c_2 &= \frac{1}{(1 + \rho)R} [h'(R) - 1]. \end{aligned}$$

Pero por (3.16)

$$h'(R) = \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{(2 - R)^2} + \frac{3}{(3 - R)^2} + \frac{4}{(4 - R)^2} \right].$$

Finalmente se obtiene la aproximación de Cramer-Lundberg:

$$\psi_{C-L}(u) = \frac{c_1}{c_2} \exp(-Ru) = 0.3030395 \exp(-1.48492599u). \quad (4.7)$$

### Algoritmo de Panjer

Se calcularán aproximaciones de probabilidades de ruina utilizando el algoritmo de Panjer y el Teorema 3.3.3 (Fórmula de Pollaczek-Khinchin). Dado que la fórmula de Panjer se utiliza solamente para variables aleatorias discretas, se hará una discretización de la función de cola integrada  $F_Z^s$ , para emplear el algoritmo. La función de cola integrada en este caso es

$$\begin{aligned} F_Z^s(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \frac{1}{3} [\exp(-2y) + \exp(-3y) + \exp(-4y)] dy \\ &= \frac{1}{3\mu} \left[ -\frac{1}{2} \exp(-2x) - \frac{1}{3} \exp(-3x) - \frac{1}{4} \exp(-4x) + \frac{13}{12} \right]. \end{aligned}$$

Se dividirá el intervalo  $[0, \infty)$  en subintervalos de longitud  $\frac{1}{1000}$  y se aproximará  $F_Z^s$  sobre los intervalos  $[\frac{k}{1000}, \frac{k+1}{1000})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  con una distribución  $q_k$  de una variable aleatoria discreta  $Y$ , donde

$$q_k = \mathbb{P} \left( Y = \frac{k}{1000} \right) = F_Z^s \left( \frac{k+1}{1000} \right) - F_Z^s \left( \frac{k}{1000} \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

En las Tablas 4.1 y 4.2 se muestran los cálculos numéricos para las aproximaciones de ruina  $(\phi(u)_{C-L})$  que se obtuvieron, así como la fórmula exacta  $(\phi(u))$  y los resultados obtenidos del algoritmo de Panjer  $(\phi(u)_{Panjer})$ , empleando distintos capitales iniciales, también se muestran los errores relativos para la fórmula de Cramer-Lundberg  $(Error_{C-L} = \frac{\psi(u)_{C-L} - \psi(u)}{\psi(u)} * 100)$  y para la fórmula de Panjer  $(Error_{Panjer} = \frac{\psi(u)_{Panjer} - \psi(u)}{\psi(u)} * 100)$ .

$u$	0	0.25	0.5	0.75	1
$\psi(u)_{Panjer}$	0.36047254	0.23425208	0.15501462	0.10387948	0.07021934
$\psi(u)$	0.36111100	0.23469585	0.15532818	0.10410319	0.07037981
$\psi(u)_{C-L}$	0.30303950	0.20906217	0.14422869	0.09950110	0.06864424
$Error_{Panjer}$	-0.1768038	-0.2018671	-0.1890836	-0.2148935	-0.2280097
$Error_{C-L}$	-16.08134341	-10.92208437	-7.14583138	-4.42070524	-2.46601050

Tabla 4.1: Probabilidad de ruina para el caso mezcla de exponenciales.

$u$	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\psi(u)_{Panjer}$	0.04775115	0.03260713	0.02233047	0.01532379	0.01053075
$\psi(u)$	0.04786657	0.03269023	0.02239031	0.01536685	0.01056172
$\psi(u)_{C-L}$	0.04735658	0.03267055	0.02253890	0.01554923	0.01072717
$Error_{Panjer}$	-0.2411340	-0.2542272	-0.2672737	-0.2802705	-0.2932205
$Error_{C-L}$	-1.06545474	-0.06019931	0.66362828	1.18681437	1.56651561

Tabla 4.2: Probabilidad de ruina para el caso mezcla de exponenciales.

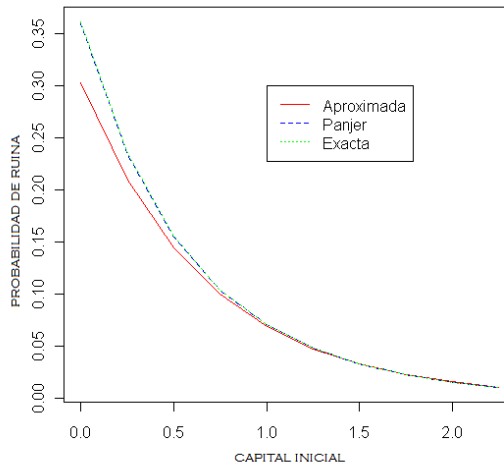


Figura 4.1: Gráfica comparativa.

Obsérvese que en las Tablas 4.1 y 4.2, el algoritmo de Panjer proporciona mejores aproximaciones que el método de Cramer-Lundberg para capitales iniciales  $\leq 1$ , sin embargo, la aproximación de Cramer-Lundberg arroja datos cercanos a  $\psi$  exacta, aunque cabe mencionar que cuanto mayor sea el capital inicial, la probabilidad de ruina disminuye. En este caso la probabilidad de ruina en general es pequeña si se mide el capital de la compañía en unidades.

En efecto, como lo muestra la Figura 4.1, la línea que representa la aproximación de Panjer, está relativamente cerca de la línea que representa la probabilidad de ruina exacta. Se aprecia también que en cuanto mayor sea el capital inicial, las aproximaciones de Panjer y la de Cramer-Lundberg se aproxima mucho a la probabilidad de ruina exacta.

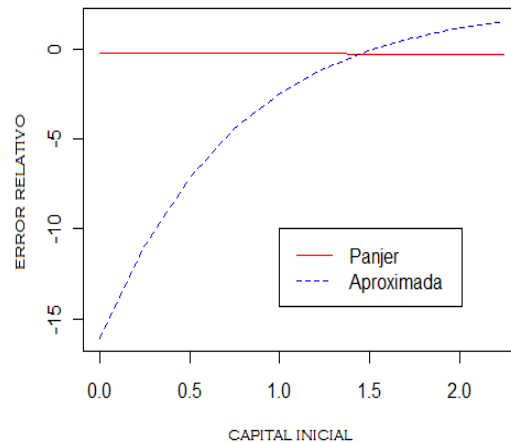


Figura 4.2: Error relativo.

El error relativo calculado permite conocer el comportamiento de las aproximaciones a lo largo de los distintos capitales y evaluar su optimalidad. En la Figura 4.2, se muestra el comportamiento del error relativo, se puede observar que el error para la aproximación de Cramer-Lundberg en valor absoluto disminuye lo que implica que las aproximaciones son buenas, mientras que el error de Panjer permanece cerca de cero.

#### 4.1.2. Reclamos que se distribuyen de acuerdo a una gamma

Otro tipo de variable aleatoria que tiene la propiedad de que su FDA es de cola ligera, es la distribución gamma. Para esta distribución no es posible hallar la inversa de la transformada de Laplace de la probabilidad de ruina, así que solamente se harán aproximaciones de probabilidades de ruina, por medio del algoritmo de Panjer y usando la aproximación de Cramer-Lundberg.

#### Algoritmo de Panjer

Se Asume en este caso que la intensidad del proceso de Poisson y la prima por unidad de tiempo son  $\lambda = 1$  y  $c = 3$  respectivamente, además de que el tamaño de los reclamos tienen

$u$	0	0.25	0.5	0.75	1
$\psi(u)_{Panjer}$	0.6665555	0.6378430	0.6080636	0.5780875	0.5484917
$\psi(u)_{C-L}$	0.7031345	0.6552037	0.6105402	0.5689213	0.5301395

Tabla 4.3: Probabilidad de ruina para el caso gamma.

una distribución  $gamma(2, 1)$ , así

$$F_Z(x) = 1 - [\exp(-x) + x \exp(-x)], \quad x \geq 0.$$

Con  $\mu = 2$ , luego su función de cola integrada esta dada por

$$F_Z^s(x) = \frac{1}{2}[2 - \exp(-x)(x + 2)], \quad x > 0.$$

Se aplicó el algoritmo de Panjer a  $F_Z^s$ , bajo la misma discretización que en el caso exponencial.

### Aproximación de Cramer-Lundberg

De acuerdo con (3.18), se deduce la ecuación que describe el coeficiente de ajuste,

$$\int_0^\infty \exp(Rz)[\exp(-z) + z \exp(-z)] dz = 3$$

$$\frac{1}{1-R} + \frac{1}{(1-R)^2} = 3,$$

de lo anterior se deriva que  $R < 1$ , y simplificando

$$-3R^2 + 5R - 1 = 0.$$

Entonces

$$R \approx 0.232408,$$

y de (3.18) se obtiene la aproximación de Cramer-Lundberg:

$$\psi_{C-L}(u) = 0.7031345 \exp(-0.282408u).$$

Las Tablas 4.3 y 4.4 presentan los resultados obtenidos, se observa en general que la probabilidad de ruina es grande en todos los casos, esto se puede ver en la Figura 4.3. La aproximación de Cramer-Lundberg decrece más rápido que los resultados obtenidos del algoritmo de Panjer

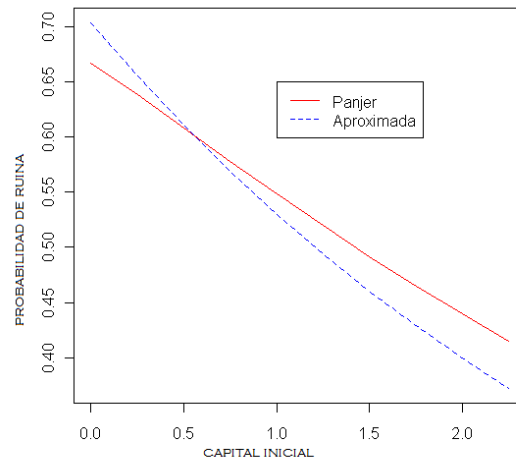


Figura 4.3: Gráfica comparativa.

$u$	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\psi(u)_{Panjer}$	0.5196501	0.4917962	0.4650674	0.4395350	0.4152256
$\psi(u)_{C-L}$	0.4940013	0.4603266	0.4289474	0.3997072	0.3724602

Tabla 4.4: Probabilidad de ruina para el caso gamma.

En general en las Tablas 4.3 y 4.4 se observa que las probabilidades de ruina en el caso que se tenga contemplada una distribución tipo gamma, es mayor que en el caso de la distribución mezcla de exponenciales (Tablas 4.1 y 4.2). Cuando se empieza sin capital inicial, es decir, solo con lo recolectado de las primas, la probabilidad de ruina es más de 0.5, al igual que en el caso anterior, entre mayor sea el capital inicial invertido menor será la probabilidad de ruina que se tenga. Cabe recalcar que la probabilidad de ruina disminuye más lentamente comparada con las Tablas 4.1 y 4.2.

## 4.2. Simulaciones

Las simulaciones se desarrollan con el objetivo de crear modelos que aproximen aspectos sobre la realidad, se usan para crear historias artificiales del sistema, con el propósito de predecir ciertos aspectos del comportamiento de lo que se esté analizando. Se usará el lenguaje de programación R para imitar el comportamiento del capital de una compañía aseguradora a través del tiempo.

### 4.2.1. Caso exponencial

Para este caso se supone que el tamaño de las reclamaciones se distribuyen exponencialmente con parámetro  $\lambda = 0.9$ ,  $c = 1$  y  $\mu = 1$ , el número de periodos que se analizaron fueron  $n = 50$ .

a) Considerando el capital inicial  $u = 0$ .

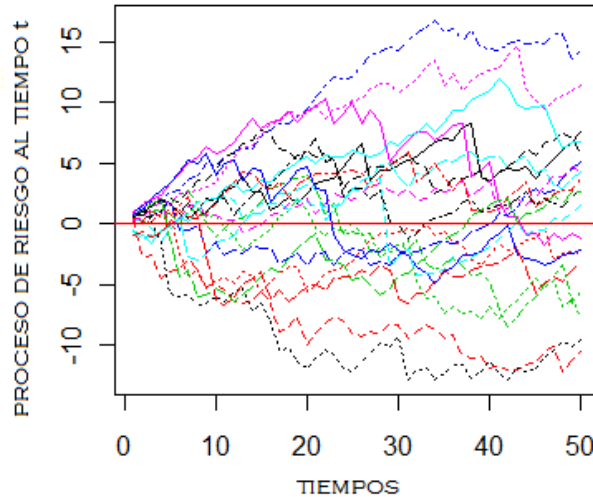


Figura 4.4: Simulación de los reclamos para el caso exponencial.

En la Figura 4.4, se muestran trayectorias simuladas, correspondientes al proceso de riesgo, en la cual se puede observar que dado que no se invirtió capital inicial, la mitad de las trayectorias simuladas están por debajo del cero.

b) Con un capital inicial de 8 unidades, en las simulaciones obtenidas en la Figura 4.5, se observa que al invertirse un mayor capital inicial, las trayectorias resultantes en su mayoría se encuentran por arriba del cero.

A continuación se mostraran las simulaciones obtenidas con los mismos parámetros usados en la sección 4.1.1, es decir,  $\mu = \frac{13}{36}$ ,  $\lambda = c = 1$ , asumiendo que  $u = 0$  y  $u = 2$  respectivamente. Obsérvese que en la Figura 4.7 las trayectorias de riesgo simuladas, tienen un comportamiento tentativamente creciente a lo largo del tiempo y los procesos de riesgo simulados se encuentran por arriba del cero.



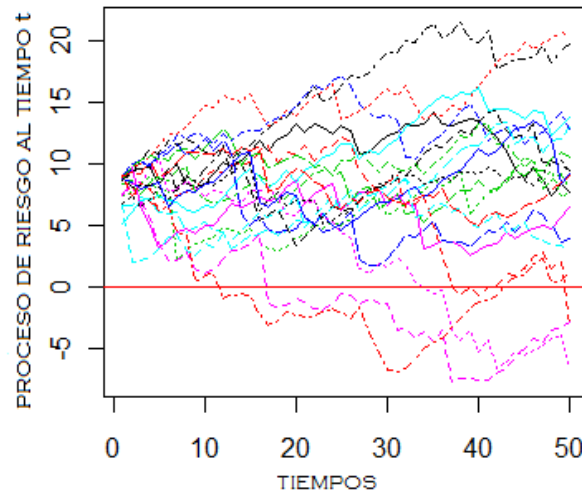


Figura 4.5: Simulación de los reclamos, caso exponencial  $u=8$ .

#### 4.2.2. Caso gamma

En las simulaciones mostradas a continuación se supone que el tamaño de los reclamos se distribuye con una distribución  $gamma(2, 1)$ , con  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1$  y  $c = 2$  unidades (mismos datos que los considerados en la sección 4.1.2).

- a) Con capital inicial igual de 1 unidad, en la Figura 4.8 se ven los procesos de riesgo simulados, se observa que la mitad de las trayectorias obtenidas para un tiempo de 30 periodos se encuentran por arriba del cero.
- b) Ahora con un capital inicial de 2.25 unidades, las simulaciones obtenidas se muestran en la Figura 4.9, se observa que la mayoría de los procesos de riesgo que simulan el comportamiento de la compañía se encuentran por arriba del cero, al igual que en el caso anterior.

Aunque en general no se puede decir con certeza a partir de las trayectorias simuladas cual será la probabilidad de ruina, estas proporcionan un panorama general del comportamiento de los procesos de riesgo.

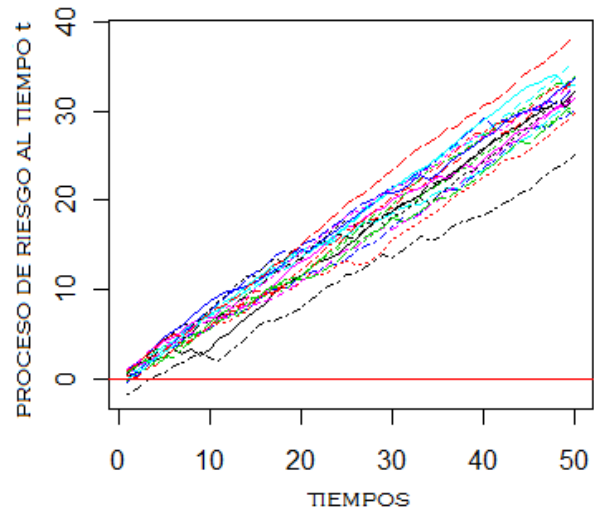


Figura 4.6: Simulación reclamos exponencial  $u=0$ .

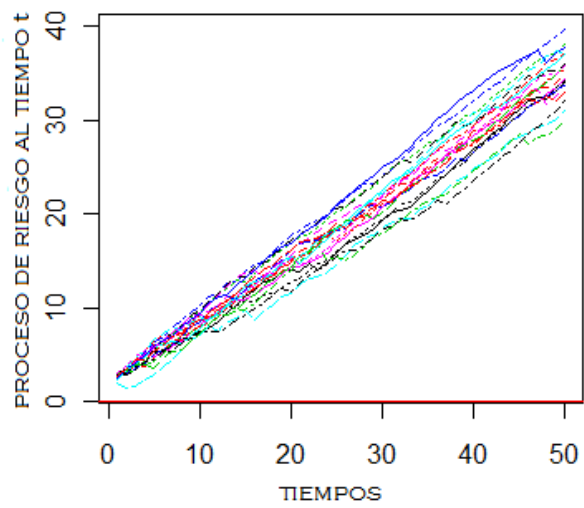
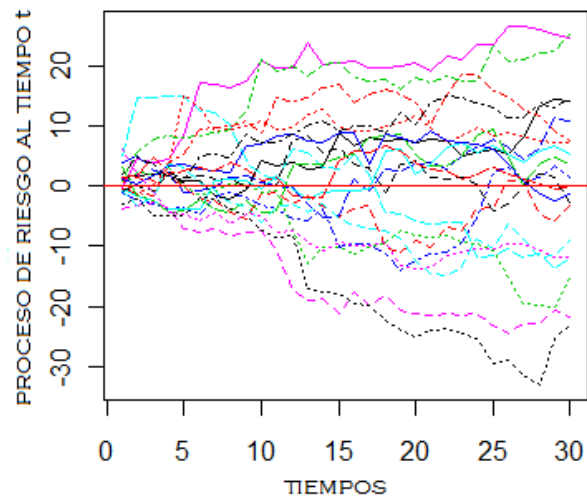
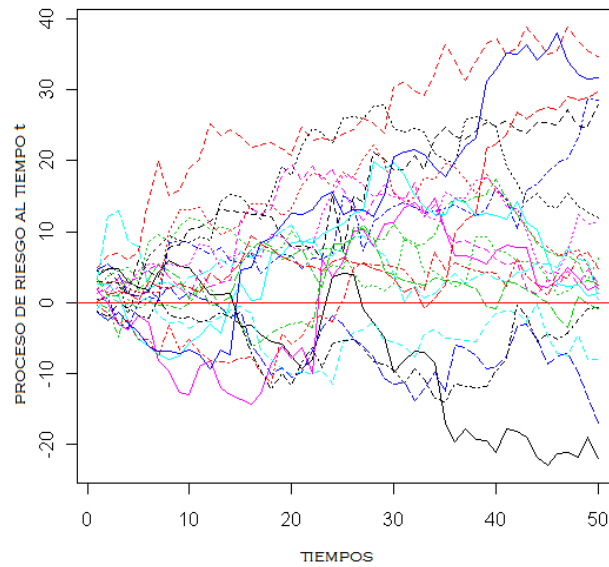


Figura 4.7: Simulación reclamos exponencial  $u=2$ .

Figura 4.8: Simulación reclamos gamma,  $u=1$ .Figura 4.9: Simulación reclamos gamma  $u=2.25$ .



## Conclusiones

La incertidumbre a la que las compañías de seguros se enfrentan es de gran interés dentro del área de probabilidad, motivo por el cual en este trabajo se mostraron métodos para calcular la probabilidad de ruina de una compañía de seguros, en el caso en que el tamaño de los reclamos son de cola ligera.

Se hizo una revisión de conceptos básicos de probabilidad, como variables aleatorias compuestas, procesos estocásticos, transformada de Laplace, entre otros, con el propósito de entender el modelo de Cramer-Lundberg.

Se describió el modelo clásico de riesgo, así como la aproximación de Cramer-Lundberg en la cual se emplean distribuciones de cola ligera. Se pudo observar que el coeficiente de ajuste es de gran importancia dentro de esta aproximación, ya que en base a este coeficiente se puede manipular la probabilidad de ruina. En el caso de distribuciones de cola ligera, una de las ventajas que se tiene es que se pueden establecer cotas para las probabilidades de ruina. Estos resultados teóricos construyen la base del comportamiento de las distribuciones de cola ligera.

Además de la aproximación de Cramer-Lundberg, se describió el algoritmo de Panjer que proporciona otra técnica para calcular aproximaciones de probabilidades de ruina.

Una vez estudiados estos métodos, se analizaron casos en los cuales el tamaño de los reclamos es mezcla de exponenciales y gamma. Para el primer caso fue posible encontrar de manera exacta la probabilidad de ruina, lo que permitió hacer comparaciones con los resultados obtenidos por medio del algoritmo de Panjer y la aproximación de Cramer-Lundberg. Se pudo observar que la aproximación de Panjer dio mejores resultados que la aproximación de Cramer-Lundberg.

Para el caso gamma debido a que no es posible obtener una fórmula exacta para la probabilidad de ruina, solo se pudieron obtener aproximaciones de la probabilidad de ruina, similarmente por ambos métodos (Panjer y Cramer-Lundberg). Estas aproximaciones son muy buenas en este caso y mejoran cuando el capital inicial crece.

Se hicieron simulaciones de trayectorias del proceso de riesgo, las cuales muestran algu-

nos posibles comportamientos sobre el capital de la compañía a lo largo de un cierto periodo, usando distintos capitales iniciales y considerando la distribución mezcla de exponenciales y la gamma. Una de las ventajas de las simulaciones es que permiten observar el comportamiento del capital de una compañía a lo largo del tiempo, en base a ellas se pueden hacer estimaciones sobre el comportamiento de los procesos de riesgo, puesto que crean comportamientos artificiales del capital de la compañía.

Finalmente cabe mencionar que a pesar de que el modelo descrito usado en este trabajo, no toma en cuenta muchos aspectos realistas en cuanto al funcionamiento de una aseguradora, sirve como modelo para estudio en muchos casos reales.

## Apéndice A

# Cotas bilaterales

Se obtendrán cotas bilaterales para  $\bar{F}_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$ , se asumirá que  $X$  es una variable aleatoria geométrica compuesta  $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ , donde las  $Z_i$ 's son iid con FDA  $F$ , tal que  $F$  es de cola ligera, además de que la sucesión  $Z_1, Z_2, \dots$  y  $N$  son independientes.

### Geométrica Compuesta

**Definición A.0.1.** *Una variable aleatoria  $X$  es geométrica compuesta de parámetros  $(p, F_X)$ , si es una variable aleatoria compuesta y  $N$  tiene una distribución geométrica de parámetro  $p$ . Su FDA es:*

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)p^k F_Z^{*k}(x), \quad (\text{A.1})$$

Si se escribe la ecuación (A.1), separando el primer término se obtiene

$$\begin{aligned} F_X(x) &= (1-p)\delta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)p^{k+1} F_Z^{*(k+1)}(x) \\ &= (1-p)\delta_0 + pF_Z \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)p^k F_Z^{*k}(x) \\ &= (1-p)\delta_0 + pF_Z * F_X, \end{aligned}$$

de donde

$$F_X(x) = (1-p)\delta_0 + pF_Z * F_X. \quad (\text{A.2})$$

Se puede demostrar (Véase [6]) que esta ecuación tiene una única solución acotada en intervalos finitos. Reemplazando la distribución  $F_X$  del lado derecho de la igualdad (A.2) por el término  $(1-p)\delta_0 + pF_Z * F_X$  e iterando este procedimiento, se obtiene que

$$F_X(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x), \quad x \geq 0, \quad (\text{A.3})$$

donde  $F_n$  está dada por

$$F_n = (1 - p)\delta_0 + pF_Z(x) * F_{n-1},$$

$n \geq 1$  y  $F_0$  es una distribución inicial arbitraria sobre  $\mathbb{R}^+$ .

Se asume adicionalmente que  $F_Z$  es tal que la ecuación

$$m_Z(\gamma) = \frac{1}{p}, \quad (\text{A.4})$$

tiene una solución  $\gamma \geq 0$ , la cual es usualmente llamada *Coefficiente de Ajuste*.

Si se sabe que (A.4) tiene una solución  $\gamma > 0$ , entonces esta solución es única y  $m_Z(s) < \infty$  para todo  $s < \gamma$ .

Dadas estas condiciones se pueden encontrar cotas para la cola de la distribución compuesta  $F_X$  llamadas *Limites de Lundberg*.

Considerando  $X_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_Z(x) < 1\}$ , se tienen las siguientes cotas bilaterales para  $\overline{F}_Z$ , llamadas cotas de tipo Lundberg.

**Teorema A.0.2.** *Si  $X$  tiene una distribución geométrica compuesta con parámetros  $(p, F_Z)$  tal que (A.4), admite una solución positiva  $\gamma$ , entonces*

$$a_- \exp(\gamma x) \leq \overline{F}_X(x) \leq a_+ \exp(\gamma x), x \geq 0,$$

donde

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0)} \frac{\exp(\gamma x) \overline{F}_Z(x)}{\int_0^\infty \exp(\gamma y) dF_Z(y)}$$

$$a_+ = \sup_{x \in [0, x_0)} \frac{\exp(\gamma x) \overline{F}_Z(x)}{\int_0^\infty \exp(\gamma y) dF_Z(y)}$$

### Demostración

Primero se obtendrá el límite superior. Nuestro objetivo es encontrar una distribución inicial  $F_0$ , tal que para  $n = 1$ , la distribución correspondiente  $F_1 = (1 - p)\delta_0 + pF_U * F_0$  satisfaga

$$F_1(x) \geq F_0(x). \quad (\text{A.5})$$

Se puede probar por inducción que  $F_Z * F_1(x) \geq F_Z * F_0(x)$  y que  $F_{n+1}(x) \geq F_n(x)$ ,  $x \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$  para todo  $x \geq 0$ .

De (A.3) se sigue

$$\begin{aligned} \overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - F_n(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - F_0) = \overline{F}_0(x). \end{aligned}$$



Por lo tanto

$$\overline{F_X}(x) \leq \overline{F_0}(x), \quad x \geq 0. \quad (\text{A.6})$$

Sea  $F_0 = 1 - a \exp(-\gamma x)$ , donde  $a \in (0, 1]$ . Dado que  $x \geq 0$ , se tiene  $\delta_0(x) = 1$ , entonces  $F_0(x) = 1 - a \exp(-\gamma x) = \delta_0(x) - a\delta_0 + a - a \exp(-\gamma x) = (1 - a)\delta_0 + a[1 - \exp(-\gamma x)]$ .

Definase  $G(x) = 1 - \exp(-\gamma x)$ . Luego

$$F_0(x) = (1 - a)\delta_0 + aG(x),$$

para  $x \geq 0$ . Así

$$\begin{aligned} F_1(x) &= (1 - p)\delta_0(x) + p(F_Z * F_0)(x) \\ &= (1 - p)\delta_0 + pF_Z * [(1 - a)\delta_0 + aG](x) \\ &= (1 - p)\delta_0(x) + p \left[ (1 - a)F_Z(x) + a \int_0^x G(x - y) dF_Z(y) \right] \\ &= 1 - p + p \left[ (1 - a)F_Z(x) + a \int_0^x \{1 - \exp[-\gamma(x - y)]\} dF_Z(y) \right]. \end{aligned}$$

Se busca  $a$  tal que cumpla (A.5), entonces

$$\begin{aligned} 1 - p + p \left[ F_Z(x) - a \int_0^x (1 - \exp[-\gamma(x - y)]) dF_Z(y) \right] &\geq 1 - a \exp(-\gamma x) \quad x \geq 0; \\ a \exp(-\gamma x) - a \exp(-\gamma x) \int_0^x \exp(-\gamma y) dF_Z(y) &\geq p - pF_Z(x); \\ a \exp(-\gamma x) \left[ 1 - p \int_0^x \exp(-\gamma y) dF_Z(y) \right] &\geq p(1 - F_Z) = p\overline{F_Z}(x); \\ a \left( 1 - p \int_0^x \exp(-\gamma y) dF(y) \right) &\geq p \exp(-\gamma x) \overline{F_Z}(x). \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que  $m_Z(x) = \frac{1}{p}$ , se tiene

$$1 = p \int_0^x \exp(\gamma y) dF_Z(y) + p \int_x^\infty \exp(\gamma y) dF_Z(y),$$

de donde

$$1 - p \int_0^x \exp(\gamma y) dF_Z(y) = p \int_x^\infty \exp(\gamma y) dF_Z(y), \quad x \geq 0.$$

Entonces (A.7) es equivalente a

$$\begin{aligned} ap \int_x^\infty \exp(\gamma y) dF_Z(y) &\geq p \exp(\gamma x) \overline{F_Z}(x); \\ a &\geq \frac{\exp(\gamma x) \overline{F_Z}(x)}{\int_x^\infty \exp(\gamma y) dF_Z(y)}. \end{aligned}$$

Haciendo  $a = a_+$  se obtiene (A.5) y de (A.6) se deduce que  $\overline{F_X}(x) \leq \overline{F_0}(x)$ . Por lo tanto

$$\overline{F_X}(x) \leq a_+ \exp(-\gamma x), \quad x \geq 0,$$

que es la cota superior del teorema que se desea probar.

Similarmente se obtiene la cota inferior buscando  $a$  de tal forma que  $F_1(x) \leq F_0(x)$  para todo  $x \geq 0$  ■

**Corolario A.0.3.** *Supóngase que  $F_Z$  es exponencial con parámetro  $\delta$ . Entonces  $\gamma = \delta(1-p)$ ,  $a_- = a_+ = p$  y en consecuencia*

$$\overline{F_X}(x) = p \exp[-(1-p)\delta x]$$

### Demostración

Dado que  $F_Z$  es exponencial  $F_Z(x) = \int_0^x \delta \exp(-\delta y) dy = 1 - \exp(-\delta x)$ ,  $x \geq 0$ .

Entonces resolviendo  $\frac{1}{p} = m_Z(\gamma) = \frac{\delta}{\delta-\gamma}$ .

Además, se tiene

$$e^{\gamma x} \overline{F_Z}(x) \left[ \int_x^\infty \exp(\gamma y) dF_Z(y) \right]^{-1} = p.$$

Del Teorema (A.0.2)

$$p \exp[-s\delta(1-p)] \leq \overline{F_X}(x) \leq p \exp[-s\delta(1-p)],$$

y por lo tanto  $\overline{F_X}(x) = p \exp[-s\delta(1-p)]$ , para todo  $x \geq 0$  ■

## Apéndice B

# Fórmulas de Cardan

Sea la ecuación cúbica  $x^3+ax^2+bx+c=0$ , donde el coeficiente de  $x^3$  es 1 (de lo contrario se puede dividir toda la ecuación entre dicho coeficiente). Si  $a, b$  y  $c$  son números reales, entonces el polinomio tiene tres raíces reales, o bien, una real y dos complejas conjugadas.

El procedimiento para encontrar dichas raíces consiste en evaluar:

$$t_1 = \frac{3b - a^2}{9}, \quad t_2 = \frac{ab - 3c}{6} - \frac{a^3}{27}, \quad t_3 = t_1^3, \quad t_4 = t_2^2 + t_3.$$

Si  $t_4 \geq 0$ , entonces evaluar:

$$t_5 = \sqrt{t_4}, \quad t_6 = \sqrt[3]{t_2 + t_5}, \quad t_7 = \sqrt[3]{t_2 - t_5}$$

y entonces el polinomio tiene una raíz real y dos complejas conjugadas:

$$x_1 = t_6 + t_7 - \frac{a}{3} \quad y \quad x_{2,3} = \left( -\frac{t_6 + t_7}{2} - \frac{a}{3} \right) \pm (t_6 - t_7) \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Pero si  $t_4 < 0$ , entonces evaluar

$$t_5 = \operatorname{signo}(t_2) \sqrt{-\frac{t_2^2}{t_3}}, \quad t_6 = \arccos(t_5), \quad t_7 = 2\sqrt{-t_1},$$

y entonces el polinomio tiene tres raíces reales:

$$x_1 = t_7 \cos\left(\frac{t_6}{3}\right) - \frac{a}{3}, \quad x_{2,3} = -t_7 \cos\left(\frac{\pi \mp t_6}{3}\right) - \frac{a}{3}.$$

Las soluciones anteriores son llamada fórmulas de Cardan, en honor al matemático italiano Girolamo Cardan y son de gran ayuda para resolver ecuaciones de tercer grado.



## Bibliografía

- [1] Asmussen S. *“Ruin Probabilities”*. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. Vol. 2. World Scientific. 2000.
- [2] Dickson David C. M. *“Insurance Risk and Ruin”*. International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press. 2006.
- [3] Jan Grandell. *“Aspects of Risk Theory”*. Springer-Verlag. 1991.
- [4] Luis Rincón. *“Introducción a la Teoría de Riesgo”*. UNAM. 2010.
- [5] R Development Core Team , *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, URL <http://www.R-project.org>, 2011.
- [6] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. *“Stochastic Processes for Insurance and Finance”*. John Wiley & Sons 1999.
- [7] Sheldon M. Ross. *“Simulation”*. Academic Press. 2002.
- [8] Taylor, Howard M., Karlin, Samuel. *“An introduction to Stochastic Modeling”*. Third Edition. Academic Press. 1998.