# UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

## “PROCESOS DE RIESGO CON RECLAMOS DE COLA PESADA”

## TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

PRESENTA:

**ESTELA MARGARITA ARELLANES JIMÉNEZ**

DIRECTOR:

**M.C. JOSÉ DEL CARMEN JIMÉNEZ HERNÁNDEZ**

CO-DIRECTOR:

**DRA. EKATERINA TODOROVA KOLKOVSKA**

**Huajuapan de León, Oaxaca.** **Julio de 2011**

# Procesos de Riesgo con Reclamos de Cola Pesada.

Estela Margarita Arellanes Jiménez

Julio de 2011

*A mis padres, Avelino y Estela,*
*y hermanos.*
*Con todo mi amor y cariño.*

# Agredecimientos

Primero y antes que nada, dar gracias a Dios, quien me dio la fe, la fortaleza necesaria para salir siempre adelante pese a las dificultades, por estar conmigo en cada paso que doy, por permitirme vivir, y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

A mis padres Avelino Arellanes Arellanes y Estela Jiménez Arellanes, por todo el amor y el apoyo que hasta ahora me han brindado, por la confianza que depositaron en mí. Por haberme dado la vida y por permitirme formar parte de una familia maravillosa y unida. Por los sabios consejos que me han brindado y que no han pasado desapercibidos en mi vida, y que sin esperar nada a cambio, han sido pilares de mi camino.

Y como olvidar a mis hermanos y hermanas, a quines considero mis mejores amigos y guías a lo largo de mi camino, por su amor, cariño y amistad incondicional que me han brindado. A ellos por formar parte especial de mi vida.

Un agradecimiento especial a la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska a quien admiro por su inteligencia y sus conocimientos. Por la colaboración, por su invaluable y generoso apoyo brindado a lo largo de la tesis, por la confianza que deposito en mí. Ha sido para mí un auténtico privilegio y honor tenerla como co-directora.

Mis más sinceros agradecimientos para mi asesor de tesis, M. C. José del Carmen Jiménez Hernández, por su apoyo, paciencia, tiempo y por las valiosas aportaciones que me hicieron mejorar el presente trabajo. A mis sinodales, M. C. Marisol López Cerino, M. C. Miguel Ángel Ramírez Solano y M. M. José Margarito Hernández Morales por las observaciones y comentarios brindados.

Al Centro de Investigación de Matemáticas A. C. (CIMAT) por todo el apoyo económico y las facilidades que me brindaron para alcanzar este objetivo.

A Gladis, más que mi hermana mi mejor e incondicional amiga, por sus consejos y comprensión que he recibido de ella. Porque con ella he compartido momentos de alegría y tristeza a lo largo de mi vida. Hemos compartido tanto que mis logros son los tuyos, te quiero amiga y hermana. Agradezco también a Alma y Asunción, mis mejores amigas, por su amistad incondicional, confianza, por compartir momentos especiales de mi vida. Porque durante mis estancias en la Universidad, siempre estuvieron presente cuando más las necesitaba, me dieron ánimos cuando yo caía, me enseñaron que todo sueño es posible de realizarse por difícil, que este sea. Le doy gracias a la vida por haberlas puesto en mi camino.

A todos los profesores que en algún momento compartieron sus conocimientos conmigo, así como también a todos mis amigos y amigas le doy gracias a la vida por haber puesto en mi camino personas tan nobles y maravillosas, por permitirme conocerlas, por la confianza que me brindaron a la largo de esta etapa de mi vida gracias.

# Índice general

# Prefacio

La actividad aseguradora está difundida en el mundo entero, son de uso corriente los seguros de automóviles, incendios, robos, etc. Esta actividad responde a la incertidumbre que sienten los individuos ante ciertas situaciones que pueden provocar distintos daños, tanto materiales como personales. El miedo a la posibilidad de que ocurran dichos acontecimientos se intenta eliminar mediante la compra de un seguro que compensará al asegurado en el caso de producirse algún daño. A cambio de estar asegurados los clientes de la aseguradora pagan una prima constante por unidad de tiempo.

La incertidumbre a la cual se enfrentan las compañías de seguros es de gran interés en la teoría de riesgo, debido a la posibilidad de no poder pagar el costo de las reclamaciones, dado que estas son producidas en tiempos aleatorios y son cantidades aleatorias. El objetivo del presente trabajo es estudiar las aproximaciones de la probabilidad de ruina de una compañía de seguros cuando la distribución del tamaño de los reclamos que llegan a estas son de cola pesada, es decir, cuando la probabilidad de que la reclamación sea grande decrece más lento que cualquier función $\exp\{-cu\}$, $c \in \mathbb{R}$, en particular las distribuciones Pareto y Weibull cumplen con esto y son las que se utilizarán en el desarrollo de este trabajo.

El Capítulo 1, da una introducción a la teoría de riesgo actuarial.

En el Capítulo 2, se mencionan conceptos de probabilidad que serán usados en este trabajo.

En el Capítulo 3, se introducen las distribuciones de cola pesada y se demuestra que las distribuciones Pareto y Weibull pertenecen a esta clase.

El modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg se estudia en el Capítulo 4, además se expone el Teorema de Embrechts-Veraverbeke el cual da una aproximación de la probabilidad de ruina así como también el algoritmo de Panjer.

Ejemplos numéricos se exponen en el Capítulo 5. En el se obtienen aproximaciones de las probabilidades de ruina cuando el tamaño de las reclamaciones son Weibull y Pareto, además se realizan simulaciones de las trayectorias de riesgo para estos casos.

Por último en el Capítulo 6, se exponen conclusiones del trabajo.

El lenguaje de programación que se utiliza para realizar las aproximaciones, las simulaciones y las gráficas es **R project**, el cual se distribuye gratuitamente bajo los términos de la GNU *General Public License.*

Capítulo 1

# Introducción

Se dice que una acción determinada tiene riesgo, o es arriesgada, cuando no se conoce con certeza el resultado de la misma. Como éste último tiene lugar en un momento futuro del tiempo, prácticamente todas las acciones que se realizan tienden a conseguir un objetivo determinado pero estas son, más o menos arriesgadas. Solo el pasado carece de riesgo, por tanto, las decisiones empresariales, en cuanto pretenden conseguir unos objetivos determinados en el futuro están sometidas al riesgo.La palabra riesgo implica la posibilidad de pérdida. Podría referirse con pleno sentido al riesgo de pérdida, pero nunca lo tendría la frase "Riesgo de ganancia". La palabra riesgo utilizada en su sentido correcto significa la posibilidad de sufrir pérdida. La naturaleza de la pérdida física o monetaria es indiferente, pero tiene que darse su posibilidad, sin ninguna seguridad de que va a producirse, puesto que allí donde la pérdida es segura no hay riesgo de pérdida, sino certeza. Así como también los eventos catastróficos como son huracanes, terremotos, inundaciones, entre otros han estado presente a lo largo de la historia de la humanidad y estos han dejado grandes pérdidas tanto humanas como económicas. Lo anterior nos lleva a hablar del concepto de riesgo, que es uno de los principales temas de estudio dentro de los seguros. Por su parte, el sector asegurador no ha estado exento, desde sus inicios se ha visto afectado de igual manera, en donde a menudo no se contaba con las reservas necesarias para solventar las catástrofes ocurridas, principalmente por las deficiencias de las técnicas actuariales utilizadas.

Así, como en la empresa, en la vida cotidiana, se presentan ciertos riesgos pero, ¿qué es el riesgo?

## 1.1. Riesgo

La palabra riesgo en el latín *risicare* que significa atreverse y en el griego *rizha* que significa navegar por un acantilado para alcanzar la costa, se trata entonces de atreverse a navegar por un acantilado para alcanzar la costa, dicho término tiene muchos significados dependiendo del área de estudio que se trate, de manera imprecisa puede definirse como la posibilidad de experimentar ciertos eventos de interés, los cuales pueden tener un sentido positivo o negativo, por ejemplo el comprar un boleto de lotería conlleva el riesgo de perder el importe pagado por el boleto, y al mismo tiempo la posibilidad de ganar una gran cantidad de dinero.

El riesgo se considera como una amenaza para el hombre, por la incertidumbre de su realización, que es el no poder saber cuándo se presentará el evento que puede traernos un desequilibrio económico. De esta forma el riesgo es la posibilidad de sufrir una pérdida o daño, es una eventualidad, un acontecimiento incierto que de ocurrir traerá como consecuencia un desequilibrio económico para el individuo que la sufre. Existe un refrán popular que describe esta palabra *"El que no arriesga no gana"*, es decir, el que no arriesga no alcanza la costa. Básicamente los riesgos se clasifican en:

- Riesgo por la naturaleza de la pérdida: Se refiere a las consecuencias económicas que tiene el riesgo si ocurre.
  - Riesgo puro: Involucra solamente la probabilidad o posibilidad de pérdida. Por ejemplo, el desequilibrio económico que pueda sufrir una mujer por la pérdida de su esposo, la pérdida económica que pueda tener un comerciante a consecuencia del robo de su negocio, el desembolso que un automovilista tenga que hacer por los daños que le cause a una persona por atropellarla.
  - El riesgo especulativo: Es aquel donde pueden obtenerse mayores, menores o ninguna ganancia. Por ejemplo, jugar a la lotería puesto que podemos ganar, perder o tener un reintegro, es decir, permanecer igual, el iniciar un negocio puesto que podemos tener utilidades o perderlo todo porque nos vaya mal.
- Riesgo por su origen y su alcance: Este tipo de clasificación considera tanto la magnitud de la pérdida como el número de personas que serán afectadas.
  - Riesgo personal: Afecta a una persona en particular o a unos pocos. Por ejemplo, la muerte de un jefe de familia, los gastos médicos por alguna operación, etc.
  - Riesgo catastróficos: Se refiere al hecho o acontecimiento de carácter extraordinario por su naturaleza anormal y la elevada intensidad y cuantía de los daños que de él pueden derivarse. Por ejemplo, las pérdidas causadas por un huracán o terremoto.

Existe una diferencia entre riesgo e incertidumbre, el riesgo es asociado con peligro (o amenaza), mientras que la incertidumbre es asociado con el desconocimiento de eventos futuros.

Las finanzas, como rama de la economía, es la ciencia que estudia cómo en una sociedad los individuos intercambian activos y riesgos bajo condiciones de escasez. De esta forma, el estudio de riesgos posee la categoría de ciencia social empírica y positiva, la cual:

- es racional y objetiva;
- parte de los hechos y siempre regresa a ellos;

- produce nuevos hechos, es decir, transciende a los hechos;
- es analítica;
- es especializada, define sus propios conceptos y términos;
- es comunicable;
- trata de explicar los hechos a través de leyes generales y las leyes a través de los principios;
- es verificable y por lo tanto factible, es decir, es provisional.

Para verificar un enunciado sobre riesgos financieros o económicos no es posible recurrir a la experimentación en el laboratorio, como en el caso de la física, sino que hay que esperar a que el paso del tiempo proporcione observaciones suficientes para confirmar o rechazar algún enunciado y, aún así, nueva evidencia en el futuro podría cambiar los resultados.

El análisis de riesgo en el sentido amplio implica cualquier método, cualitativo o cuantitativo, para evaluar el impacto del riesgo en la toma de decisiones. Existen numerosas técnicas al respecto, y el objetivo es ayudar a quien debe tomar una decisión a seleccionar un curso de acción, una vez que se comprenden mejor los resultados posibles. Una vez que se reconoce una situación riesgosa, el paso siguiente es cuantificar el riesgo que involucra esa situación de incertidumbre. Cuantificar el riesgo significa determinar todos los valores posibles que una variable riesgosa puede tomar y determinar la probabilidad relativa de cada uno de esos valores.

Una vez que se ha cuantificado el riesgo, es decir, determinado los posibles resultados y la probabilidad respectiva de ocurrencia, se pueden usar distribuciones de probabilidad para describir la situación. Una distribución de probabilidad es una herramienta para presentar de modo resumido la cuantificación del riesgo para una determinada variable.

## 1.2. Teoría del riesgo actuarial

Una de las principales ramas de las matemáticas aplicadas donde se habla de teoría de riesgo es la matemática actuarial y dentro de esta se encuentra la teoría de riesgo. El objetivo de está es considerar un modelo de una compañía de seguros, y estudiar la probabilidad de ruina, es decir, la probabilidad de que el capital baje de un nivel especificado.

La teoría de riesgo nos ofrece una herramienta matemática para llevar a cabo un análisis más cuidadoso y más seguro del tratamiento financiero que afronta una compañía aseguradora, trata con modelos estocásticos, en cada uno de estos la ocurrencia de los reclamos es descrita por un proceso puntual de llegada de reclamaciones y las cantidades de dinero que serán pagadas por la compañía por una sucesión de variables aleatorias. Para que la compañía pueda ofrecer el servicio de aseguramiento, cobra una prima, es decir, una cierta cantidad de dinero por unidad de tiempo. Además, se supone que la aseguradora inicia sus actividades de aseguramiento con una cierta cantidad $u$, con la cual cubre las primeras reclamaciones, por lo que podemos llamar a ésta cantidad el *capital inicial*.

Un problema en la teoría de riesgo es estudiar la *probabilidad de ruina* de la empresa, es decir, la probabilidad de que la compañía registre en algún momento un saldo negativo. Esta depende del valor de la prima cobrada, de la intensidad de llegada de las reclamaciones y el monto promedio de las reclamaciones.

El actuario sueco Filip Lundberg fue el fundador de esta teoría y en 1903 en su tesis doctoral el propone aproximaciones de la probabilidad de ruina. En su trabajo Lundberg, uso el proceso de Poisson para modelar la llegada de reclamaciones.

Más tarde el actuario y estadístico Harald Crámer continua con los estudios y realiza otras aportaciones a la teoría de riesgo. Después H. U. Gerber (1979), aporta ideas originales para diseñar, dirigir y regular una empresa. Chistyatov (1964) introduce la clase de distribuciones subexponenciales, que se usan en teoría de riesgo para modelar reclamaciones muy grande que corresponden a eventos catastróficos. S. Asmussen y K. Binswanger (1997) presentan la simulación de la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones son subexponenciales.

El Teorema de Embrechts-Veraverbeke da la aproximación de la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones son de tipo subexponencial, es por ello que P. Embrechts y N. Veraverbeke (1982) dan una estimación de dicha probabilidad con especial énfasis cuando las reclamaciones son grandes. C. Klüpplerberg y Stadtmuller (1998) estudiaron el comportamiento asintótico de la probabilidad de ruina en modelos con reclamaciones de cola pesada y tasas de interés. En este trabajo se usa el libro de Rolski et. al.

### 1.2.1. Componentes del modelo clásico de riesgo

El proceso de riesgo con aplicación en la actividad de una compañía de seguros se construye a partir de un proceso de ocurrencia de siniestros o reclamos que transcurren en tiempo continuo. Entonces, el modelo se forma en base a un proceso estocástico con el número de acontecimientos discreto en los enteros no negativos y con parámetro continuo para el tiempo $t = 0$. El modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg, está basado en lo siguiente:

1. Los tiempos de las reclamaciones $0 = T_0, T_1, T_2, \ldots$, son tales que los tiempos entre reclamos $T_k - T_{k-1}$ para $k = 1, 2, \ldots$ son variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de parámetro $\lambda$. En este caso $N(t)$, el número de reclamos antes del tiempo $t$, forman un proceso de Poisson homogéneo de intensidad $\lambda$.

2. Los valores de las reclamaciones correspondientes $Z_1, Z_2, \ldots$, son descritas por variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada $F$, donde $F(0) = 0$, media $\mu$, y varianza $\sigma^2$. Estas variables denotarán el tamaño de las reclamaciones de la compañía.

3. Las sucesiones de variables aleatorias $\{T_i\}$ y $\{Z_i\}$ son independientes.

Entonces el modelo clásico de riesgo ésta definido como sigue:

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,$$

donde $u = 0$ es el capital inicial, $c$ es una constante positiva y llamada la prima del proceso de riesgo. El proceso $N(t)$ puede ser interpretado como el número de reclamaciones contra la compañía de seguros durante el intervalo de tiempo $(0, t]$. Por cada incremento de $N$ (i.e., cada reclamación) la compañía debe pagar cierta cantidad de dinero y se supone que la compañía recibe $c$ unidades de dinero por unidad de tiempo. La probabilidad de ruina $\Psi(u)$ de la compañía, con un capital inicial $u \geq 0$ esta definida por

$$\Psi(u) = \mathbb{P}\{X(t) < 0 \text{ para algún } t > 0 | X(0) = u\}.$$

En este trabajoq se va estudiar la probabilidad de ruina considerando el modelo clásico de Cramér-Lundberg, cuando las reclamaciones que llegan son de cola pesada.

## Capítulo 2

# Conceptos de probabilidad

El concepto de probabilidad nace con el deseo del hombre de medir con cierta certeza la posibilidad de ocurrencia de eventos futuros, es por ello que su estudio surge como una herramienta utilizada por los nobles para ganar en los juegos y pasatiempos de la época. Además, muchos de los eventos que ocurren en la vida diaria no pueden ser predichos con exactitud, pues la mayoría están afectados por factores externos. Sin embargo, la probabilidad permite acercarnos a esos sucesos y estudiarlos, ponderando las posibilidades de su ocurrencia.

Con los trabajos de B. Pascal (1654) y de P. Fermat (1657) se da origen a la teoría de probabilidad cuando lograron obtener probabilidades exactas para ciertos problemas relacionados con juegos de azar. En 1685, Jacques Bernoulli propuso problemas de probabilidad para los cuales fue necesario desarrollar una teoría que permitiera resolverlos, por ello J. Bernoulli (1706) y A. De Moivre (1738) empiezan a desarrollar dicha teoría, más tarde C. F. Gauss (1809) y P. S. Laplace (1812) empezaron a trabajar sobre los problemas de probabilidad.

Actualmente, la teoría de probabilidad es una herramienta útil en la mayoría de las áreas de ingeniería, ciencias y administración, el objetivo de ésta es predecir y describir sucesos, además del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Dicha teoría ayuda a analizar los posibles resultados que podrían observarse y los posibles sucesos que podrían ocurrir cuando se realiza un experimento.

## 2.1. Definiciones

Un experimento aleatorio es un experimento que nos describe un proceso cuyos resultados no se conocen con certeza, este puede repetirse indefinidamente, una característica es que tiene al menos dos resultados posibles.

Algunos ejemplos de experimentos aleatorios son:

a) lanzar una moneda;

b) lanzar un dado.

**Definición 2.1.1.** *El espacio muestral (ó espacio muestra) asociado a un experimento aleatorio es el conjunto que consta de todos los posibles resultados de éste. El espacio muestral se denotará por $\Omega$, los elementos de éste se les conoce como puntos muestrales.*

En otras palabras el espacio muestral de un experimento aleatorio se considera como un conjunto o colección de diferentes resultados, y cada resultado es un punto o un elemento del espacio muestral. Los eventos o sucesos en un experimento aleatorio son subconjuntos de un espacio muestral $\Omega$, estos se denotan con letras mayúsculas. El espacio muestral $\Omega$ discreto contiene un número finito ó infinito numerable de puntos muestrales, es decir, cuando $\Omega$ es finito se denotan los puntos muestrales como $E_1, E_2, \ldots, E_n$, y en el otro caso se denotan como $E_1, E_2, \ldots$. El número $\mathbb{P}(A)$ representa una forma de medir la posibilidad de observar la ocurrencia del evento $A$, al efectuar una vez el experimento aleatorio. Cuando se tiene el suceso lo que interesa es saber si hay muchas o pocas posibilidades de que al realizar el experimento éste ocurra. Por lo tanto, sería interesante el tener una función que midiera el grado de confianza a depositar que verifique el suceso, ésta se llama *función de probabilidad*, la cual se define a continuación.

**Definición 2.1.2.** *Sea $\mathcal{F}$=$\{A \subset \Omega\}$ tal que cumple con las siguientes propiedades:*

*a)* $\emptyset \in \mathcal{F}$;

*b) Si* $A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \ldots$ *y* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *con* $i \neq j$ *entonces* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$;

*c) Si* $A \in \mathcal{F}$ *entonces* $A^c = \Omega - A \in \mathcal{F}$ *y* $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c$.

*El conjunto $\mathcal{F}$ es conocido como la $\sigma$-álgebra, a los elementos de $\mathcal{F}$ se les conoce como eventos.*

**Función de probabilidad**

A cada evento $A \in \mathcal{F}$ es necesario asignarle un número que indique la ocurrencia de $A$, este número se le llama probabilidad de $A$ y se denota por $\mathbb{P}(A)$.

**Definición 2.1.3.** *Dado un experimento aleatorio con un espacio muestral $\Omega$, la función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:*

*a)* $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \ \ \forall\, A \in \mathcal{F}$;

*b)* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

*c) Para cualquier sucesión infinita de eventos disjuntos, $A_1, A_2, \ldots$, se cumple que*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

*se llama función de probabilidad sobre $\Omega$.*

## 2.2. Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

Una variable aleatoria (v.a) es una relación funcional entre los elementos del espacio muestral asociados al experimento y los números reales, la definición formal es la siguiente:

**Definición 2.2.1.** *Una (v.a) $X$, es una función con valores reales definida sobre $\Omega$, es decir, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que $X^{-1}(a, b) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a, b)\} \in \mathcal{F}$.*

En general las variables aleatorias (v.a's) se denotan con letras mayúsculas $X, Y, \ldots$.

**Ejemplo 2.2.2.** *Considere el experimento de lanzar una moneda 5 veces, nos interesa $X :=$ número de caras en los 5 lanzamientos, entonces se tiene $X(\omega) = x, \ \ x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.*

Se definen dos tipos de v.a's que se clasifican de acuerdo al conjunto de valores que pueden tomar, que son las discretas y absolutamente continuas.

**Definición 2.2.3.** *Una v.a $X$ se dice que es discreta si solamente puede tomar un número finito o infinito numerable de valores distintos.*

Toda v.a $X$ tiene asociada una función de distribución de probabilidad. Una v.a. discreta $X$ representa los resultados de un espacio muestral en forma tal que por $\mathbb{P}(X = x)$ se entenderá como la probabilidad de que $X$ tome el valor $x$, se denota por:

$$\mathbb{P}(X = x) = p_X(x) = p(x),$$

a $p(x)$ se le llama *función de densidad de probabilidad* de la v.a $X$ discreta, y cumple lo siguiente:

a) $p(x) \geq 0 \ \ \forall \ \ x$;

b) $\sum_x p(x) = 1$.

Otra función de interés para la v.a $X$ es la función de distribución acumulada, dicha función mide la probabilidad acumulada de la v.a hasta un cierto $x$.

**Definición 2.2.4.** *La función de distribución acumulada (FDA) de una v.a $X$, denotada por $F_X(x)$, es la probabilidad de que $X$ sea menor o igual a un valor específico de $x$ y está dada por:*

$$F_X(x) = F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{R}.$$

La FDA cumple las siguientes propiedades:

a) $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = F_X(\infty) = 1$;

b) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$;

c) si $x_1 < x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

Con base en la definición anterior se puede definir una v.a absolutamente continua.

**Definición 2.2.5.** *Sea $X$ una v.a con FDA $F_X(x)$, se dice que $X$ es una v.a absolutamente continua si $F_X(x)$ es absolutamente continua para todo $x \in \mathbb{R}$.*

La distribución de probabilidad de una v.a absolutamente continua $X$ no representa la probabilidad de que $X$ sea igual a un cierto $x$. Más bien, proporciona un medio para determinar la probabilidad de un intervalo, $a \leq X \leq b$.

**Definición 2.2.6.** *Sea $F_X(x)$ la FDA de una v.a absolutamente continua $X$, entonces la función $f(x)$ dada por:*

$$f(x) = f_X(x) = \frac{d}{dx}[F_X(x)],$$

*siempre y cuando la derivada exista, se le llama función de densidad de probabilidad (fdp) de la v.a $X$.*

Sea $X$ una v.a absolutamente continua con fdp $f(x)$, entonces ésta función cumple lo siguiente:

(a) $f(x) \geq 0$;

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$;

(c) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$.

El valor esperado es un concepto fundamental en el estudio de las distribuciones de probabilidad, es un promedio ponderado de los resultados que se esperan en el futuro.

**Definición 2.2.7.** *El valor esperado de una v.a $X$ denotado por $E(X)$, esta dado por:*

$$E[X] = \begin{cases} \sum\limits_{x} xp(x) & \textit{si } X \textit{ es discreta;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)\, dx & \textit{si } X \textit{ es absolutamente continua.} \end{cases} \tag{2.1}$$

*en donde $p(x)$ es la densidad de probabilidad y $f(x)$ es la fdp de $X$.*

Sea $X$ una v.a con FDA $F_X(x)$. El valor esperado de la función $g(X)$, está dado por:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum\limits_{x} g(x)p(x) & \text{si } X \text{ es discreta;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x)\, dx & \text{si } X \text{ es absolutamente continua.} \end{cases} \tag{2.2}$$

El valor esperado también se conoce como esperanza, media, valor promedio o valor medio y se denota por $\mu$.

**Propiedades del valor esperado**

Sea $X$ una v.a con valor esperado finito y sea $c$ una constante, entonces se cumple lo siguiente:

a) $E(c) = c$;

b) $E(cX) = cE(X)$;

c) si $g_i(X), i = 1, \ldots, n$ son funciones de $X$, entonces $E\left[\sum_{i=1}^{n} g_i(X)\right] = \sum_{i=1}^{n} E[g_i(X)]$.

**Definición 2.2.8.** *El r-ésimo momento de una v.a $X$ con respecto al origen denotado por $\mu'_r$ se define como*

$$\mu'_r = E[X^r].$$

*Y el r-ésimo momento de una v.a $X$ con respecto de su media ó momento central se define como*

$$E[(X-\mu)^r],$$

*y se denota por $\mu_r$.*

La varianza de una v.a $X$ es una de las medidas más útiles de dispersión o variación, es en esencia, el promedio del cuadrado de las distancias entre cada observación y la media del conjunto de observaciones.

**Definición 2.2.9.** *La varianza de una v.a $X$ denotada por $V(X)$, está definida como el valor esperado de $(X-\mu)^2$, es decir,*

$$V(X) = E[(X-\mu)^2].$$

La varianza se denotada por $V(X) = \sigma^2$ y la raíz cuadrada positiva de $V(X)$ se conoce como la desviación estándar.

**Propiedades de la varianza**
Sea $X$ una v.a con varianza finita y sea $c$ una constante, entonces se cumple:

a) $V(c) = 0$;

b) $V(cX) = c^2V(X)$;

c) $V(X + c) = V(X)$;

d) $V(X) = E[X^2] - [E(X)]^2$.

**Definición 2.2.10.** *Para una v.a $X$ discreta con función de distribución de probabilidad $p(x)$. La función generadora de probabilidades $\hat{g} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ se define como,*

$$\hat{g}_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x)s^x.$$

Otra función que se puede asociar a algunas v.a's es la función generadora de momentos, su existencia no está garantizada en todos los casos, pero cuando existe, determina de manera única la densidad de probabilidad de la v.a. Esta función se define tanto para variables aleatorias discretas como absolutamente continuas, y como su nombre lo indica genera todos los momentos respecto al origen.

**Definición 2.2.11.** *La función generadora de momentos (fgm) de una v.a $X$, denotada por $m_X(s)$, se define como:*

$$m_X(s) = E[\exp(sX)],$$

*donde $m_X : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{I} = \{s \in \mathbb{R} : m_X(s) < \infty\}$; cuando $s = 0$, $m_X(0) = 1$.*

**Definición 2.2.12.** *La transformada de Laplace de una v.a continua $X$ con FDA $F_X(x)$, denotada por $\hat{L}_X(s)$ se define como:*

$$\hat{L}_X(s) = E[\exp(-sX)] = \int_R \exp(-sx) dF_X(x),$$

*para valores de $s$ cuando $\hat{L}$ existe.*

**Observación:** En ocasiones se dice que es la transformada de Laplace de la FDA $F_X(x)$, de la v.a $X$, en tal caso se denota por $\hat{L}_F(s)$.

En general si $C(x)$, $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces la transformada de Laplace esta dada por:

$$\hat{L}_C(s) = \int_R \exp(-sX) C(x)\, dx.$$

Si $X$ es una v.a no negativa,

$$X \geq 0,\ \hat{L}_X(s) \text{ esta definida } \forall \ \ s \geq 0;$$

$$\hat{L}_X(s) = E[\exp(-sX)] \leq 1 \ \forall \ \ s \geq 0,$$

$$E[X^n] = m_X^{(n)}(0) = (-1)^n \hat{L}_X^n(0).$$

La relación que hay entre la fgm y la transformada de Laplace es:

$$m_X(-s) = \hat{L}_X(s),\ s \in I.$$

A continuación se presentan algunas distribuciones de probabilidad tanto discretas como continuas.

### Distribuciones discretas

a) Distribución de probabilidad de Bernoulli: Una v.a $X$ tiene distribución Bernoulli de parámetro $p$, y se escribe, $X \sim Ber(p)$, si y sólo si, su densidad de probabilidad esta dada por:

$$p(x) = (1-p)p^x, \text{ con } x = 0, 1.$$

b) Distribución de probabilidad binomial: Una v.a $X$ tiene densidad de probabilidad binomial basada en $n$ ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito $p$, y se escribe, $X \sim Bin(n,p)$, si y sólo si,

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \; x = 0,1,2,\ldots,n, \; 0 \leq p \leq 1.$$

c) Distribución de probabilidad de Poisson: Una v.a $X$ tiene densidad de probabilidad de Poisson, con parámetro $\lambda > 0$, y se escribe, $X \sim Poi(\lambda)$, si y sólo si,

$$p(x) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}, \quad x = 0,1,\ldots.$$

d) Distribución de probabilidad geométrica: Una v.a $X$ tiene densidad de probabilidad geométrica (Véase [9]), con parámetro $p \in (0,1)$, y se escribe, $X \sim Geo(p)$, si y sólo si,

$$p(x) = p(1-p)^x, \; x = 0,1,\ldots.$$

**Distribuciones continuas**

a) Distribución exponencial: La v.a $X$ tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$, se escribe, $X \sim \exp(\lambda)$ si su fdp está dada por:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x > 0.$$

b) Distribución Weibull: La v.a $X$ tiene distribución Weibull (Véase [7]) con parámetro de forma $\beta > 0$ y parámetro de escala $\alpha > 0$, se escribe, $X \sim W(\alpha,\beta)$ si su fdp está dada por:

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} \quad x > 0.$$

c) Distribución Pareto: La v.a $X$ tiene una distribución Pareto (Véase [7]), esto es, $X \sim Par(\alpha,\beta)$, si su fdp está dada por:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha+1}, \quad x > 0,$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de forma y $\beta > 0$ el parámetro de escala.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra, para la distribución de Poisson, como se obtiene el valor esperado, la varianza y la fmg.

**Ejemplo 2.2.13.** *Sea* $X \sim Poi(\lambda)$, *entonces,* $p(x) = \dfrac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}$.
*Usando (2.1), se tiene,*

$$\begin{aligned}
\mu &= E[X] = \sum_x xp(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{(x-1)!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}\lambda \exp(-\lambda)}{(x-1)!} = \lambda \exp(-\lambda) \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} \\
&= \lambda \exp(-\lambda) \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \exp(-\lambda)\lambda \exp(\lambda) = \lambda.
\end{aligned}$$

*Ahora se obtiene la varianza usando la propiedad d), primero se calcula*

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X],$$

*pero antes se calcula* $E[X(X-1)]$,

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} = \exp(-\lambda) \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} \\
&= \lambda^2 \exp(-\lambda) \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-2)}}{(x-2)!} \\
&= \lambda^2 \exp(-\lambda)\exp(\lambda) = \lambda^2.
\end{aligned}$$

*Entonces se tiene que* $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$, *ahora se puede calcular la varianza por la propiedad d)*

$$V(X) = E[X^2] + [E[X]]^2 = \lambda^2 + \lambda - [\lambda]^2 = \lambda.$$

*Por último se calcula la fgm para la v.a* $X$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}_X(s) &= E[\exp(sx)] = \sum_x \exp(sx)p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \exp(sx)\frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} \\
&= \exp(-\lambda) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[\exp(s)\lambda]^x}{x!} = \exp(-\lambda)\exp[\exp(s)\lambda] = \exp\{[\exp(s)-1]\lambda\}.
\end{aligned}$$

## 2.3. Variables aleatorias multidimensionales

En esta sección se muestran algunos conceptos para el caso de $n$ v.a's $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

**Definición 2.3.1.** *Un vector aleatorio* $n$*-dimensional está formado por* $n$ *v.a's y es una función de un espacio muestral* $\Omega$ *en* $\mathbb{R}^n$.

Se dice que un vector aleatorio es discreto o absolutamente continuo si las $n$ v.a's son discretas o absolutamente continuas.

**Definición 2.3.2.** *Sea $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ un vector aleatorio discreto, la función denotada por $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definida como*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = p_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

*se conoce como la distribución de probabilidad conjunta (dpc) del vector $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.*

Supóngase $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces se cumple

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in A) = \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n).$$

**Propiedades de la distribución de probabilidad conjunta** Se cumplen las siguiente dos propiedades:

- $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
- $\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1.$

En este caso también se define la función de distribución acumulada de esta forma.

**Definición 2.3.3.** *La función de distribución acumulada conjunta (FDAC) para el vector $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, denotada por $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está definida como:*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n).$$

En el caso que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sea discreto se tiene

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{t_1=0}^{x_1} \sum_{t_2=0}^{x_2} \ldots \sum_{t_n=0}^{x_n} p(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

**Definición 2.3.4.** *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a's continuas con FDAC $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si existe una función no negativa $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1\, dt_2 \, \cdots \, dt_n,$$

*para cualesquiera números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Entonces a la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se conoce como la fdp conjunta.*

**Definición 2.3.5.** *Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ la fdp conjunta de las $n$ v.a's, entonces se puede obtener la distribución de probabilidad marginal de cualquiera de ellas, por ejemplo la de $X_1$ en cualquier valor de $x_1$, esta dada por:*

$$f(x_1) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Más general, la fdp marginal de $k$ v.a's de las $n$ se puede obtener integrando la fdp conjunta sobre todos los posibles valores de las $(n-k)$. Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a's discretas las marginales se obtienen, de manera similar reemplazando la integral por la suma.

**Definición 2.3.6.** *Sea $f(x_i)$ la fdp marginal de $X_i$, $i = 1 \ldots, n$. Entonces se dice que $X_1, \ldots, X_n$ son v.a's independientes si*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n), \text{ en el caso de v.a's absolutamente continuas,}$$

*O*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n), \text{ en el caso de v.a's discretas}$$

*donde $p(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ es la distribución de probabilidad marginal de $X_i$.*

Si se tienen $n$ v.a's independientes que tienen la misma distribución de probabilidad marginal se dice que son v.a's independientes e idénticamente distribuidas y se denotan por v.a's iid.

Un caso particular, cuando $n = 2$ se tiene un vector aleatorio bi-dimensional y se escribe como $(X, Y)$. Para éste caso se tienen las siguientes dos definiciones.

**Definición 2.3.7.** *Sean $X$, $Y$ v.a's discretas, la distribución de probabilidad condicional de $X$ dado $Y = y$ esta dada por:*

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}, \text{ cuando } \mathbb{P}(Y = y) \neq 0.$$

*Para el caso en el que las v.a's sean continuas $X$, $Y$ la fdp condicional de $X$ dado $Y = y$, se define como:*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \text{ cuando } f_Y(y) \neq 0.$$

**Definición 2.3.8.** *Sean $X$, $Y$ v.a's continuas y $g(X)$ una función de $X$, se define la ley de esperanza total como:*

$$E[g(X)] = \int E[g(X)|Y = y] f_Y(y)\, dy.$$

*En el caso de que las v.a's sean discretas la ley de esperanza total se define:*

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} E[X|Y = n]\mathbb{P}(Y = n).$$

Sean $n$ v.a's iid, entonces la fgm y la transformada de Laplace cumplen lo siguiente:

a) $m_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(s)$;

b) $\hat{L}_{X_1+X_2+\ldots+X_n} = \prod_{i=1}^{n} \hat{L}_{X_i}(s)$.

**Definición 2.3.9.** *Sean $X$, $Y$ v.a's continuas con FDA $F_X$ y $G_Y$, entonces la convolución de $X$ y $Y$ es una v.a cuya distribución $F * G$ está dada por:*

$$(F_X * G_Y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x - u)\, dG_Y(u), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

*Si $X$ y $Y$ tienen fdp $f(x)$ y $g(y)$ respectivamente, entonces la convolución esta dada por:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u)g(u)\, du, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

*La convolución $n$-ésima de la FDA $F$, denotada por $F^{*n}$, está definida inductivamente de la siguiente manera: para $n = 0$, $F^{*0}(x) = \delta_0(x)$, donde*

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

*$\delta_0$ se conoce como la delta de Kronecker, mientras que para $n \geq 1$,*

$$F^{*n} = F^{*(n-1)} * F = \underbrace{F * \ldots * F}_{n-veces}.$$

**Definición 2.3.10.** *Sea $N$ una v.a con valores enteros no negativos, y $U_1, U_2, \ldots$, una sucesión de variables aleatorias iid, y $N$ es independiente de $U_1, U_2, \ldots$. Entonces la variable aleatoria*

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} U_i & si \quad N \geq 1; \\ 0 & si \quad N = 0, \end{cases}$$

*se llama variable aleatoria compuesta.*

**Teorema 2.3.11.** *Si $X$ tiene una distribución compuesta determinada por la densidad de probabilidad $p(k) = p_k$, $k \in \mathbb{N}$ de $N$ y por la FDA $F_U$, de $U_i$, entonces la FDA de $X$ esta dada por:*

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_U^{*k},$$

*donde $F_U^{*k}$ denota la $k$-ésima convolución de $F_U$. La distribución compuesta de $X$ se denota por $(p_k, F_U)$.*

**Prueba**
Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}\left(\sum^{N} U_i \leq x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} U_i \leq x | N = k\right) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} U_i \leq x\right) \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} F_U^{*k} p_k. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

En particular cuando $N \sim Geo(p)$, y $X$ tiene distribución geométrica compuesta con parámetros $(p, F_U)$, entonces la FDA esta dada por:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)p^k F_U^{*k}(x).$$

## 2.4. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico describe el comportamiento de una variable aleatoria a través del tiempo.Para entender mejor este concepto se presenta la definición.

**Definición 2.4.1.** *Un proceso estocástico es una colección de v.a's $\{X_t : t \in T\}$, con valores en $S$, parametrizada por un conjunto $T$, llamado espacio parametral y un conjunto $S$ llamado espacio de estados.*

Si se toma como espacio parametral $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, se dice que el proceso es a tiempo discreto, en general este tipo de procesos se denotan por $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$, y se dice que el proceso es a tiempo continuo si $T = [0, \infty)$ y se denota por $\{X(t) : t \geq 0\}$. Algunos tipos de procesos estocásticos son:

**Procesos de ensayos independientes:** El proceso a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$, esta constituido por variables aleatorias iid. Este modelo corresponde al experimento de realizar una sucesión de ensayos iid de un mismo experimento aleatorio.

**Procesos con incrementos independientes:** Se dice que un proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$, tiene incrementos independientes si para cualesquiera tiempos $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ las variables $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ son independientes.

**Procesos de Markov:** En este tipo de procesos suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema.

Esta condición se llama propiedad de Markov y puede expresarse de la siguiente forma: Para cualesquiera estados $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ (pasado), $x_n$ (presente), $x_{n+1}$ (futuro), se cumple

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

Es decir, la probabilidad del evento futuro $(X_{n+1} = x_{n+1})$ sólo depende del evento anterior $(X_n = x_n)$, mientras que la información dada por el evento $(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$ es irrelevante.

**Procesos estacionarios:** Se dice que un proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ es estacionario si para cualesquiera tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ la distribución del vector $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ es la misma que la del vector $(X(t_1 + h), \ldots, X(t_n + h))$ para cualquier valor de $h > 0$. En particular la distribución de $X(t)$ es la misma que la de $X(t + h)$ para cualquier $h > 0$ y para cualquier valor de $t$.

**Procesos con incrementos estacionarios:** Se dice que un proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios si para cualesquiera tiempos $s < t$, y cualquier $h > 0$, las variables $X(t + h) - X(s + h)$ y $X(t) - X(s)$ tienen la misma distribución de probabilidad, es decir, el incremento que sufre el proceso entre los tiempos $s$ y $t$, depende de la diferencia $t - s$ y no de los valores específicos de $s$ y $t$.

### 2.4.1. Proceso de Poisson

Un proceso de Poisson, nombrado así por el matemático francés Siméon-Denis Poisson (1781-1840), es un proceso estocástico en tiempo continuo que se describe por medio de conteo de eventos raros que ocurren a lo largo del tiempo. Suponga que un cierto evento ocurre repetidas veces de manera aleatoria a lo largo del tiempo y que las variables aleatorias $W_1, W_2, \ldots,$ representan los tiempos que transcurren entre una ocurrencia del evento y la otra, suponga también que estos tiempos son independientes uno del otro, entonces el proceso de Poisson al tiempo $t$ es el número de ocurrencias del evento que se han observado hasta el instante $t$. Unos ejemplos donde se presenta el proceso de Poisson son los siguientes:

- La cantidad de clientes que entran a una tienda.
- El número de coches que pasan por una autopista.
- La llegada de personas a una fila de espera.
- El número de llamadas que llegan a una central telefónica.
- Partículas emitidas por un material radiactivo.

El proceso de Poisson es una colección de variables aletorias, donde $N(t)$ es el número de los acontecimientos que han ocurrido hasta el tiempo $t$ (a partir del tiempo 0).

**Definición 2.4.2.** *Un proceso estocástico $\{N(t),\ t \geq 0\}$, se llama proceso de Poisson homogéneo de parámetro ó intensidad $\lambda > 0$, si satisface las siguientes condiciones:*

*a)* $\mathbb{P}(N(0) = 0) = 1$.

*b)* *Para toda sucesión finita de tiempos* $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *los incrementos* $N(t_1),\ N(t_2) - N(t_1), \ldots,\ N(t_n) - N(t_{n-1})$ *son variables aleatorias independientes.*

*c)* *Para todo* $s \geq 0$ *y* $t > 0$ *la variable aleatoria* $N(s+t) - N(s)$ *tiene distribución de Poisson de parámetro* $\lambda t$.

La propiedad b) se conoce como incrementos independientes y la propiedad c) se conoce como incrementos estacionarios. $N(t)$ se puede interpretar como el número de eventos aleatorios hasta el tiempo $t$.

Se define $W_n$ como el tiempo en el que ocurre el $n$-ésimo evento, $n \geq 0$, donde por definición se tiene $W_0 = 0$. Para $n \geq 0$ se define $S_n := W_{n+1} - W_n$, $S_n$ se interpreta como el tiempo durante el cual el proceso $N(t)$ permanece en el estado $n$.

**Teorema 2.4.3.** *Para cada* $n \geq 1$, *el* $n$*-ésimo tiempo de espera* $W_n$ *tiene distribución gamma, con función de densidad de probabilidad*

$$f_{W_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda t) \quad n = 1, 2, \ldots, t \geq 0.$$

*En particular* $W_1$, *el tiempo del primer evento, tiene una distribución exponencial:*

$$f_{W_1}(t) = \lambda \exp(-\lambda t),\ \ t \geq 0.$$

**Prueba**

El evento $W_n \leq t$ ocurre si y sólo si han ocurrido al menos $n$ eventos en el intervalo $(0, t]$. Como el número de eventos sobre el intervalo $(0, t]$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda t$, se tiene

$$\begin{aligned} F_{W_n}(t) &= \mathbb{P}(W_n \leq t) = \mathbb{P}(X(t) \geq n) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!}, \quad n = 1, 2, \ldots, t \geq 0. \end{aligned}$$

Derivando, se obtiene

$$\begin{aligned} f_{W_n}(t) &= \frac{d}{dt} F_{W_n}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left\{1 - \exp(-\lambda t)\left[1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\right\} \\ &= -\exp(-\lambda t)\left[\lambda + \frac{\lambda(\lambda t)}{1!} + \frac{\lambda(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}\right] \\ &\quad + \lambda \exp(-\lambda t)\left[1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &= \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda t),\ n = 1, 2, 3, \ldots,\ t \geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definición 2.4.4.** *Se define el proceso de Poisson compuesto como:*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k, \tag{2.3}$$

*donde,* $U_k$ *son v.a's iid, y* $N(t)$ *es un proceso de Poisson homogéneo con intensidad* $\lambda > 0$*, independiente de* $U_k$*. A* $X(t)$ *se conoce como el proceso de Poisson compuesto con característica* $(\lambda, F_U)$*.*

**Lema 2.4.5.** *Sea* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *un proceso de Poisson compuesto con característica* $(\lambda, F_U)$*. Entonces, el proceso* $X(t)$ *tiene incrementos independientes y estacionarios.*

La demostración del Lema se encuentra en [8].

**Lema 2.4.6.** *Sea* $X = \sum_{i=1}^{N} U_i$*, donde* $N$ *es una variable aleatoria discreta con densidad de probabilidad* $p_i = p(i),\ i = 0, 1, \ldots$*. Si* $U_i$ *son variables aleatorias discretas iid con densidad de probabilidad* $q(k) = q_k$*, entonces*

$$\mathbb{P}(X = j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k q^{*k}(j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

**Prueba**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = j) &= \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{N} U_i = j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{N} U_i = j | N = k\Big)\mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{N} U_i = j\Big)\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k q^{*k}(j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Capítulo 3

# Distribuciones de Cola Pesada

Las distribuciones de cola pesada son de gran interés para la modelación de eventos en el área de seguros y finanzas, como por ejemplo para modelar reclamaciones causadas por eventos catastróficos, como son incendios, huracanes, terremotos, etc.

Las variables con distribución de cola pesada se caracterizan por tomar valores extremos, con probabilidades altas. Dichas distribuciones tienen propiedades muy distintas de las distribuciones más comúnmente usadas en estadística, por ejemplo sus colas decaen más lentamente que una exponencial, y a veces tienen media o varianza infinita.

## 3.1. Definición y propiedades básicas

**Definición 3.1.1.** *Sea $X$ una v.a con FDA $F_X$, la cola de la distribución $F_X$, denotada por $\overline{F}(x)$ se define como $\overline{F}(x) = 1 - F_X(x)$. La v.a $X$ se dice que tiene distribución de cola ligera si:*

$$m_X(s) < \infty \text{ para algún } s > 0,$$

*y $X$ tiene cola pesada si*

$$m_X(s) = \infty \text{ para todo } s > 0.$$

**Ejemplo 3.1.2.** *A continuación se demuestran dos distribuciones que tienen cola pesada:*

*a) La distribución Pareto, $X \sim Par(\alpha, \beta)$, con fdp*

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\Big(\frac{\beta}{\beta + x}\Big)^{\alpha+1}, \quad x > 0,$$

*donde $\alpha > 0$ es el parámetro de forma, y $\beta > 0$ el parámetro de escala.*

*En efecto, para $n > 2\alpha + 3$ y $x > \max\{\beta, 2\} = M$ se tiene,*

$$x^{n-\alpha-2} > 2^{n-\alpha-2} > 2^{\alpha+1} > [(\beta/x) + 1)]^{\alpha+1}$$

*de donde*

$$\frac{x^{\alpha+1}}{(\beta+x)^{\alpha+1}} > \frac{1}{[(\beta/x)+1]^{\alpha+1}} > x^{\alpha-n+2}$$

*y por lo tanto para* $x > M$*,*

$$\frac{x^n}{(\beta+x)^{\alpha+1}} > x.$$

*Entonces para todo* $s > 0$*,*

$$\begin{aligned} m_X(s) &= \int_0^\infty \exp(sx)f(x)dx = \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta} exp(sx)\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha+1} dx \\ &> \int_M^\infty \frac{(sx)^n}{n!}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha+1} dx = C\int_M^\infty \frac{x^n}{(\beta+x)^{\alpha+1}}\, dx > C\int_M^\infty x\, dx = \infty. \end{aligned}$$

*Entonces la fgm* $m_X(s)$ *de* $X$ *es infinita para todo* $s > 0$*, luego por definición la distribución de Pareto es de cola pesada.*

*b) La distribución Weibull,* $X \sim W(\alpha, \beta)$ *con fdp*

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}$$

*con parámetro de forma* $\beta > 0$ *y parámetro de escala* $\alpha > 0$*. Para* $\beta < 1$ *entonces la distribución es de cola pesada.*

*En efecto, para* $0 < \beta < 1$*, sea* $n$ *tal que* $(n+1)\beta > 2$*, y* $s > 0$*. Entonces existe una constante* $M > 0$ *tal que para* $x > M$*, se cumple* $sx > 2\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$*. Entonces* $sx - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$*, y por lo tanto para* $x > M$*,*

$$\exp\left\{sx - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} > \exp\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} > \frac{\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]^n}{n!} > C_1 x^{(2-\beta)}, \text{ para } C_1 = \frac{1}{n!\alpha^{\beta n}}$$

*Por lo tanto*

$$\begin{aligned} m_X(s) &= \int_0^\infty \exp(sx)f(x)dx = \int_0^\infty \exp(sx)\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} dx \\ &= \frac{\beta}{\alpha^\beta}\int_0^\infty x^{\beta-1}\exp\left\{sx - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} dx > \frac{\beta}{\alpha^\beta} C_1 \int_M^\infty x = \infty. \end{aligned}$$

*Así, la distribución Weibull es de cola pesada.*

**Definición 3.1.3.** *La función de riesgo de $F_X$, denotada por $\alpha_F$ se define como*

$$\alpha_F = \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x},$$

*donde* $M(x) = -\log \overline{F}(x)$.

**Teorema 3.1.4.** *Si $\alpha_F = 0$, entonces $F$ es de cola pesada.*

**Prueba**

La prueba se hace por contradicción. Supóngase que $\alpha_F = 0$ y que $F$ es de cola ligera, entonces se cumple

$$0 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = 0,$$

de donde $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{M(x)}{x} = 0$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $x' > 0$ tal que, para todo $x \geq x'$ se tiene $\dfrac{M(x)}{x} < \epsilon$. Por lo tanto

$$\overline{F}(x) \geq \exp(-\epsilon x), \text{ para todo } \ x \geq x'.$$

Se verifica que existe $c_1 > 0$ tal que, se cumple $\overline{F}(x) \geq c_1 \exp(-\epsilon x)$ para todo $x \in [0, x']$, esto se verifica por contradicción. Se supone que no se cumple lo anterior, es decir, existe un $\epsilon > 0$, tal que para todo $c_1 > 0$, en particular para $c_1 = \dfrac{1}{n}$, existe $x_n \in [0, x']$ tal que, $\overline{F}(x_n) < \dfrac{1}{n}\exp(-\epsilon x_n)$. Entonces como $\{x_n\}$ es acotada, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente, $x_{n_k} \to x_0$, donde $x_0 \in [0, x']$. Haciendo tender $n \to \infty$ se tiene $0 \leq \overline{F}(x_0) \leq 0$, de donde $\overline{F}(x_0) = 0$.
Entonces $\overline{F}(x) = 0$ para todo $x \geq x'$, esto contradice al hecho que

$$\overline{F}(x) \geq \exp(-\epsilon x) \text{ para todo } x \geq x'.$$

Por lo tanto,

$$\overline{F}(x) \geq c\exp(-\epsilon x) \quad \text{para todo } x \geq 0, \text{ donde } c = \min\{1, c_1\},$$

de donde,

$$\int_0^x \exp(sx)\overline{F}(x)\, dx = \infty \quad \text{para todo } s \geq \epsilon,$$

y

$$\int_0^\infty \exp(sx)\overline{F}(x)\, dx = \infty \text{ para todo } s > 0.$$

Pero esto no cumple con la definición definición de que $F$ es de cola ligera, entonces $F$ es de cola pesada. ■

## 3.2. Distribuciones subexponenciales

Las distribuciones subexponenciales son una clase de distribuciones usadas en la teoría de riesgo, porque se emplean para modelar el comportamiento de reclamaciones grandes.

**Definición 3.2.1.** *Una FDA $F_X$ sobre $\mathbb{R}_+$, se llama subexponencial si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F^{*2}(x)}{1-F(x)} = 2. \tag{3.1}$$

Se denota por $S$ a la clase de las distribuciones subexponenciales. No todas las distribuciones tienen esta propiedad. Por ejemplo la distribución exponencial no es subexponencial, en efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{1-F^{*2}(x)}{1-F(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\int\limits_0^x (1-e^{-\lambda(x-u)})d(1-e^{-\lambda u})}{1-\int_0^x e^{-\lambda u}\,du} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\lambda x}(1+\lambda x)}{e^{-\lambda x}} = +\infty. \end{aligned}$$

El siguiente Lema muestra que cuando las v.a's son de clase subexponencial la suma puede ser grande debido a que sólo una de ellas lo sea, en el contexto de teoría de riesgo, asegura que la ruina de una compañía de seguros puede ocurrir con sólo una reclamación grande.

**Lema 3.2.2.** *Si $F$ es subexponencial y $X_1$, $X_2$ son v.a's iid, con FDA $F$, entonces cuando $x\to\infty$,*

$$\mathbb{P}(X_1+X_2>x) \approx \mathbb{P}(\max\{X_1,X_2\}>x), \tag{3.2}$$

*es decir,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1+X_2>x)}{\mathbb{P}(\max\{X_1,X_2\}>x)} = 1.$$

**Prueba**
Por un lado, se tiene

$$\mathbb{P}(X_1+X_2>x) = 1-\mathbb{P}(X_1+X_2\le x) = 1-F^{*2}(x)$$

Por otro lado, y por la independencia de $X_1$ y $X_2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max\{X_1,X_2\}>x) &= 1-\mathbb{P}(X_1\le x, X_2\le x) \\ &= 1-F^2(x) = (1+F(x))(1-F(x)). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\mathbb{P}(\max\{X_1, X_2\} > x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F^2(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{(1 - F(x))(1 + F(x))} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + F(x)} = 1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Lema 3.2.3.** *Se cumple la siguiente identidad*

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y), \quad x \geq 0. \tag{3.3}$$

**Prueba**
Para la prueba se desarrolla el lado derecho de la igualdad y se verifica que coincide con la expresión del lado izquierdo.

$$\begin{aligned}
1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) &= 1 + \int_0^x \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} dF(y) \\
&= 1 + \int_0^x \frac{dF(y)}{1 - F(x)} - \int_0^x \frac{F(x-y)}{1 - F(x)} dF(y) \\
&= 1 + \frac{1}{1 - F(x)} F(x) - \frac{F^{*2}(x)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{\overline{F}(x) + F(x) - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1 - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

La identidad (3.3) se usará para la prueba del siguiente Lema.

**Lema 3.2.4.** *Para toda FDA $F_X$, se cumple*

$$\lim_{x\to\infty} \inf \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2. \tag{3.4}$$

**Prueba**
Como $F$ es monótona, $F(x-y) \leq F(x)$, de donde usando (3.3),

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \geq 1 + \int_0^x 1 \, dF(y) = 1 + F(x).$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \inf \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2. \quad \blacksquare$$

**Lema 3.2.5.** *Si $F$ es subexponencial entonces para todo $x' > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} = 1, \tag{3.5}$$

*y*

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = 1. \tag{3.6}$$

**Prueba**
Para $x' \leq x$, por la identidad (3.3) se tiene

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^{x'} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + \int_{x'}^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y).$$

Para $0 \leq y \leq x'$, se cumple $1 \leq \dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}$, y para $x' < y < x$ se cumple

$$\frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^{x'} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + \int_{x'}^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \\
&\geq 1 + \int_0^{x'} dF(y) + \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} \int_{x'}^x dF(y) \\
&\geq 1 + F(x') + \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} (F(x) - F(x')).
\end{aligned}$$

Así,

$$1 \leq \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} \leq \left[ \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(x') \right] [F(x) - F(x')]^{-1},$$

de donde,

$$\begin{aligned}
1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} &\leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} \\
&\leq \limsup_{x\to\infty} \left[ \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(x') \right] [F(x) - F(x')]^{-1}.
\end{aligned}$$

Como,

$$\limsup_{x\to\infty} \left[ \frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(x') \right] (F(x) - F(x'))^{-1} = 1,$$

se tiene (3.5). La ecuación (3.6) se satisface de (3.3),

$$2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\, dF(y). \quad \blacksquare$$

**Lema 3.2.6.** *Sea $F \in S$ y $F'$ una FDA con $F'(0) = 0$, tal que $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F'}(x)}{\overline{F}(x)} = c$ para alguna constante $c \in [0, \infty)$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F * F'}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + c. \tag{3.7}$$

**Prueba**

Probar (4.15) es equivalente a probar que

$$\lim_{x\to\infty} \left[ \frac{\overline{F * F'}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 \right] = c,$$

puesto que,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F * F'}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 &= \frac{1 - \int_0^x F'(x-y)dF(y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= \frac{F(x) - \int_0^x F'(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \\
&= \frac{\int_0^x dF(y) - \int_0^x F'(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \\
&= \frac{\int_0^x F'(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)},
\end{aligned}$$

entonces, para probar el lema basta probar que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} = c.$$

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe un $x_0$ tal que, $\overline{F'}(x) \le (c+\epsilon)\overline{F}(x)$ para $x \ge x_0$. Así,

$$\frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} = \frac{\int_0^{x-x_0} \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} + \frac{\int_{x-x_0}^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)},$$

y entonces para $0 \le y \le x - x_0$, $\overline{F'}(x-y) \le (c+\epsilon)\overline{F}(x-y)$. Además, $\overline{F'}(x-y) \le 1$, para $y \ge x - x_0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} &\le (c+\epsilon)\frac{\int_0^{x-x_0} \overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}dF(y) + \frac{\int_{x-x_0}^x dF(y)}{\overline{F}(x)} \\
&\le (c+\epsilon)\frac{\int_0^x \overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}dF(y) + \frac{\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Por el Lema 3.2.5 se tiene

$$(c+\epsilon)\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)\,dF(y)}{\overline{F}(x)} = (c+\epsilon) \text{ y } \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-x_0)}{\overline{F}(x)} - \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 1-1=0.$$

Haciendo $x\to\infty$ en (3.8) se obtiene que, para todo $\epsilon>0$,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \leq (c+\epsilon),$$

de donde,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \leq c. \tag{3.9}$$

De manera similar se puede ver el límite inferior. Sea un $\epsilon>0$, entonces existe un $x_1$ tal que $\overline{F'}(x)\geq(c-\epsilon)\overline{F}(x)$ para $x\geq x_1$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} &= \frac{\int_0^{x-x_1} \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} + \frac{\int_{x-x_1}^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \\ &\geq (c-\epsilon)\frac{\int_0^{x-x_1} \overline{F}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)},\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable $z=x-x_1$ y recuérdese que

$$F(z-y+x_1)\leq F(x_1+z), \text{ y además } \overline{F}(z-y+x_1)\geq\overline{F}(x_1-z),$$

$$\begin{aligned}(c-\epsilon)\frac{\int_0^{x-x_1} \overline{F}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} &= (c-\epsilon)\frac{\int_0^{z} \overline{F}(z-y+x_1)dF(y)}{\overline{F}(x_1+z)} \\ &\geq (c-\epsilon)\int_0^z dF(y).\end{aligned}$$

Así,

$$\liminf_{x\to\infty}(c-\epsilon)\int_0^{x-x_1}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}dF(y) \geq \lim_{z\to\infty}(c-\epsilon)F(z) = (c-\epsilon)$$

de donde,

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \overline{F}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \geq c-\epsilon,$$

haciendo tender $\epsilon$ a cero,

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \geq c. \tag{3.10}$$

De (3.9) y (3.10) se obtiene el resultado. ■

El siguiente Teorema muestra que la clase de distribuciones subexponenciales es subconjunto de la clase de distribuciones de cola pesada.

**Teorema 3.2.7.** *Cada distribución subexponencial es de cola pesada.*

**Prueba**
Sea $F \in S$, por el Teorema 3.1.4, basta probar que $\alpha_F = 0$. Tomando el logaritmo en (3.5) resulta

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\right) &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} (\log \overline{F}(x-y) - \log \overline{F}(x)) &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} [M(x) - M(x-y)] &= 0 \text{ para todo } y \geq 0.
\end{aligned}$$

Entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que para todo $x \geq x_0$ se cumple,

$$M(x) - M(x-1) < \epsilon.$$

Si se sigue iterando se obtiene

$$M(x) \leq M(x-1) + \epsilon \leq M(x-2) + 2\epsilon \leq \ldots \leq M(x-n) + n\epsilon,$$

donde $n$ es tal que, $x_0 \leq x - n < x_0 + 1$.
Así,

$$M(x) \leq \sup_{x_0 \leq x' \leq x_0+1} M(x') + (x - x_0)\epsilon, \quad x \geq x_0.$$

Entonces para todo $\epsilon > 0$,

$$0 \leq \frac{\limsup_{x\to\infty} M(x)}{x} \leq \frac{\limsup_{x_0 \leq x' \leq x_0+1} M(x') + (x-x_0)\epsilon}{x} = \epsilon,$$

de donde $\alpha_F = 0$. ■

**Teorema 3.2.8.** *Sea $F$ una FDA. Entonces $F$ es subexponencial si y sólo si, para cada $n = 2, 3, \ldots,$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n. \tag{3.11}$$

**Prueba**
Supóngase que se cumple (3.11) para todo $n \geq 2$. Entonces en particular se cumple para $n = 2$, y así $F$ es subexponencial por definición. Ahora suponga que $F$ es subexpoenencial, entonces aplicando inducción sobre $n$, para $n = 2$ se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2,$$

por definición. Suponga que es valido para $n-1$, es decir, se satisface

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*(n-1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = n-1.$$

Sea $F' = F^{*(n-1)}$ y tomando $c = n-1$ en el Lema 3.2.6 se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F * F'}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + n - 1 = n. \quad \blacksquare$$

**Lema 3.2.9.** *Si $F$ es subexponencial y $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias iid, con FDA $F$ entonces cuando $x \to \infty$,*

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots, X_n > x) \approx \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots X_n\} > x), \tag{3.12}$$

*es decir,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq x)}{\mathbb{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, x_n\} \geq x)} = 1.$$

**Prueba**

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq x)}{\mathbb{P}(\max(X_1, X_2, \ldots X_n) \geq x)} &= \frac{1 - F^{*n}(x)}{1 - [F(x)]^n} \\
&= \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)[1 + F(x) + F^2(x) + \ldots + F^{n-1}(x)]}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq x)}{\mathbb{P}(\max(X_1, X_2, \ldots X_n) \geq x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&* \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + F(x) + F^2(x) + \ldots + F^{n-1}(x)} = n\frac{1}{n} = 1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Lema 3.2.10.** *Si $F \in S$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una constante $c < \infty$, tal que, para todo $n \geq 2$ y todo $x \geq 0$, se cumple*

$$\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq c(1+\epsilon)^n. \tag{3.13}$$

**Prueba**
Sea

$$\alpha_n = \sup_{x\geq 0} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}.$$

Por Teorema 3.2.8, se tiene $\alpha_n < \infty$. Además, se satisface que

$$\begin{aligned}
\overline{F^{*(n+1)}}(x) &= 1 - F^{*(n+1)} = 1 - F(x) + F(x) - F^{*(n+1)}(x) \\
&= \overline{F}(x) + F * (1 - F^{*n})(x) = \overline{F}(x) + F * \overline{F^{*n}}(x).
\end{aligned}$$

Así, para todo $a > 0$,

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \sup_{x\geq 0}\frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = \sup_{x\geq 0}\frac{\overline{F}(x)+F*\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}\\ &\leq 1+\sup_{0\leq x\leq a}\frac{F*\overline{F^{*n}}(x-y)}{\overline{F}(x)}+\sup_{x\geq a}\frac{F*\overline{F^{*n}}(x-y)}{\overline{F}(x)},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha_{n+1}\leq 1+\sup_{0\leq x\leq a}\int_0^x\frac{\overline{F^{*n}}(x-y)}{\overline{F}(x)}\,dF(y)+\sup_{x\geq a}\int_0^x\frac{\overline{F^{*n}}(x-y)}{\overline{F}(x-y)}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\,dF(y)$$

$$\begin{aligned}&\leq 1+\sup_{0\leq x\leq a}\int_0^x\frac{dF(y)}{\overline{F}(x)}+\sup_{x\geq a}\left[\frac{\overline{F^{*n}}(x-y)}{\overline{F}(x-y)}\right]\sup_{x\geq a}\int_0^x\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\,dF(y)\\ &\leq 1+\sup_{0\leq x\leq a}\frac{F(x)}{\overline{F}(x)}+\alpha_n\sup_{x\geq a}\int_0^x\frac{1-F(x-y)}{\overline{F}(x)}\,dF(y).\end{aligned}$$

Notando que, para $x\leq a$ se cumple $F(x)\leq 1$ y $\overline{F}(x)\geq\overline{F}(a)$, se tiene,

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &\leq 1+\frac{1}{\overline{F}(a)}+\alpha_n\sup_{x\geq a}\left[\frac{F(x)-F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)}\right]\\ &= 1+c_a+\alpha_n\sup_{x\geq a}\left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}\right],\end{aligned}$$

donde $c_a=\dfrac{1}{\overline{F}(a)}<\infty$. Como, $F\in S$, para cada $\epsilon>0$ existe $a>0$ tal que,

$$\alpha_{n+1}\leq 1+c_a+\alpha_n(1+\epsilon).$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\alpha_2 &\leq 1+c_a+(1+\epsilon),\\ \alpha_3 &\leq 1+c_a+\alpha_2(1+\epsilon)=1+c_a+(1+c_a+(1+\epsilon))(1+\epsilon)\\ &= (1+c_a)(1+(1+\epsilon))+(1+\epsilon)^2.\end{aligned}$$

Entonces por inducción

$$\begin{aligned}\alpha_n &\leq (1+c_a)(1+(1+\epsilon)+\ldots+(1+\epsilon)^{n-2})+(1+\epsilon)^{n-1}\\ &= (1+c_a)\left[\frac{(1+\epsilon)^{n-1}-1}{\epsilon}\right]+(1+\epsilon)^{n-1}\\ &\leq (1+c_a)\left[\frac{(1+\epsilon)^{n-1}}{\epsilon}\right]+(1+c_a)\frac{\epsilon}{\epsilon}(1+\epsilon)^{n-1}\\ &\leq (1+c_a)\epsilon^{-1}(1+\epsilon)^n=c(1+\epsilon)^n,\end{aligned}$$

con $c=(1+c_a)\epsilon^{-1}$. ■

**Teorema 3.2.11.** *Sea* $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k G^{*k}(x)$*, donde,* $p_k$ *es distribución de probabilidad y* $G \in S$*. Si* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(1+\epsilon)^n < \infty$ *para algún* $\epsilon > 0$*, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{H}(x)}{\overline{G}(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k. \tag{3.14}$$

**Prueba**
Sea

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{H}(x)}{\overline{G}(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-H(x)}{\overline{G}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k G^{*k}(x)}{\overline{G}(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k G^{*k}(x)}{\overline{G}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(1-G^{*k}(x))}{\overline{G}(x)}.
\end{aligned}$$

Del Lema 3.2.10 se tiene

$$\frac{\overline{G^{*k}}(x)}{\overline{G}(x)} \leq c(1+\epsilon)^n,$$

por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{H}(x)}{\overline{G}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k \overline{G^{*k}}(x)}{\overline{G}(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{G^{*k}}(x)}{\overline{G}(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k.$$

donde en la última igualdad se uso el Teorema 3.2.8. ■

Capítulo 4

# Modelo de riesgo clásico de Cramer-Lundberg

En este Capítulo se estudia el modelo clásico de riesgo de Cramer-Lundberg y las propiedades de este modelo. Además, se presenta el Teorema Embrechts-Veraverbeke, este se usa cuando la distribución de la cola integrada de la distribución es subexponencial.

## 4.1. El modelo de riesgo clásico

Se tiene una compañía de seguros con un capital inicial $u \geq 0$ (fijo), se supone que $T_1, T_2, \ldots, T_n$ son los tiempos entre reclamaciones que llegan a una compañía aseguradora, los cuales son v.a's independientes, dicho tiempos llegan según un proceso de Poisson homogéneo $\{N(t),\ t \geq 0\}$ de parámetro $\lambda > 0$. Los tamaños de las reclamaciones $Z_1, Z_2, \ldots$ son variables aleatorias iid con distribución común $F$, con $F(0) = 0,\ E(Z_k) = \mu > 0$, y son independientes de $N(t)$. Adicionalmente la compañía recibe una prima (seguro) $c > 0$ constante por unidad de tiempo.

**Definición 4.1.1.** *Sea $c > 0$ la prima del asegurador y $u \geq 0$ el capital inicial. El proceso clásico de riesgo de Cramer-Lundberg se define como:*

$$X(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k,$$

*donde $X(t)$ es el capital de la compañía al tiempo $t$, $N(t)$ es el número de reclamaciones que llegan a la compañía en el intervalo $(0, t]$. Por cada incremento de $N(t)$, es decir, por cada reclamación la compañía debe pagar cierta cantidad de dinero y se supone que la compañía recibe $c$ unidades de dinero por unidad de tiempo.*

Interesa conocer en que momento la empresa se arruina, es decir, en que momento el modelo $X(t)$ toma valores negativos, esto se define a continuación.

**Definición 4.1.2.** *El tiempo de ruina se define como:*

$$T = \text{mín}\{t \geq 0 : X(t) < 0\}.$$

**Definición 4.1.3.** *La probabilidad de ruina $\Psi(u)$ de la compañía, con un capital inicial $u \geq 0$ esta definida por*

$$\Psi(u) = \mathbb{P}\{X(t) < 0 \text{ para algún } t > 0 | X(0) = u\}$$

*y la probabilidad de no ruina ó sobrevivencia como* $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$.

**Observación**
Si $u = 0$, entonces

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E\Big[ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k\Big] \\ &= ct - E(Z_k)E(N(t)) \\ &= ct - \mu\lambda t = t(c - \lambda\mu) \geq 0, \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se usa la independencia de $Z_k$ y $N(t)$, de aquí se tiene que $c > \lambda\mu$.

**Teorema 4.1.4.** *Sea $\Psi(u)$ la probabilidad de ruina, se cumple lo siguiente.*

*a) Si $c - \lambda\mu \leq 0$, entonces $\Psi(u) = 1$ para todo $u \geq 0$.*

*b) Si $c - \lambda\mu > 0$, entonces $\Psi(u) < 1$ para todo $u \geq 0$.*

Demostración Veáse [8].

**Definición 4.1.5.** *La carga de seguridad se define como*

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}.$$

Si $\rho > 0$ entonces $\frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0$, es decir, $c > \lambda\mu$, esto implica que la probabilidad de ruina será menor que 1, si la suma total de las reclamaciones (en promedio) no debe exceder a la prima recibida por la compañía en el intervalo $[0, t]$. Entonces, por el Teorema 4.1.4, se tiene que $\rho > 0$.

El siguiente Teorema describe una expresión para la probabilidad de que la compañía no se vaya a la ruina.

**Teorema 4.1.6.** *Sea $\Phi(u)$ la probabilidad de no ruina, entonces se cumple que su derivada, $\Phi'(u)$, esta dada por*

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u - z)\, d(1 - F(z)), \quad u \geq 0. \tag{4.1}$$

**Prueba**

Se condiciona sobre $Z_1 = z$ (la primera reclamación), y $T_1 = t$ (el primer tiempo de reclamación). Por lo tanto $X(T_1) \geq 0$, $X(T_1) = u + ct - z \geq 0$, entonces para que no ocurra ruina $0 \leq z \leq u + ct$ y despejando $z$ se tiene $z = u + ct$, así

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \mathbb{P}(\text{“}\textit{no ruina en}\text{”}\ [0,\infty)|X(0)=u) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X(t) \geq 0 \ \text{ para todo } \ t \geq 0|T_1 = t, Z_1 = z, X(0) = u)\, \lambda \exp(-\lambda t) dF(z) dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} \mathbb{P}(X(t) \geq 0 \ \text{ para todo } \ t \geq T_1|T_1 = t, Z_1 = z, X(0) = u)\, \lambda \exp(-\lambda t) dF(z) dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} \mathbb{P}(X(t) \geq 0 \ \text{ para todo } \ t \geq 0|X(0) = u + ct - z)\, \lambda \exp(-\lambda t) dF(z) dt,
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se usa el hecho que $X(t)$ tiene incrementos independientes y estacionarios, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X(t) \geq 0 \ \text{ para todo } \ t \geq 0|X(0) = u + ct - z)\, \lambda \exp(-\lambda t) dF(z) dt \\
&= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} \Phi(u + ct - z)\, dF(z) dt.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable, $x = u + ct$, $t = \dfrac{x-u}{c}$, $x(0) = u$, $dt = \dfrac{dx}{c}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_0^\infty \lambda \exp\left\{-\lambda\Big(\frac{x-u}{c}\Big)\right\} \int_0^x \Phi(x-z)\, dF(z) \frac{dx}{c} \\
&= \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \int_u^\infty \exp\left(\frac{-\lambda x}{c}\right) \int_0^x \Phi(x-z)\, dF(z) dx. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Se toma

$$\begin{aligned}
h(u) &= \int_u^\infty \exp\left(\frac{-\lambda x}{c}\right) \int_0^x \Phi(x-z)\, dF dx \\
&= -\int_{-\infty}^u \exp\left(\frac{-\lambda x}{c}\right) \int_0^x \Phi(x-z)\, dF\, dx.
\end{aligned}$$

Cuya derivada es

$$h'(u) = -\exp\left(\frac{-\lambda u}{c}\right) \int_0^u \Phi(x-z)\, dF.$$

Derivando respecto a $u$ en (4.2),

$$\begin{aligned}
\Phi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\Big[\frac{\lambda}{c}\exp\Big(\frac{\lambda u}{c}\Big)\Big]\int_u^\infty \exp\Big(\frac{-\lambda x}{c}\Big)\int_0^x \Phi(x-z)\,dF dx \\
&- \frac{\lambda}{c}\exp\Big(\frac{\lambda u}{c}\Big)\Big[\exp\Big(\frac{-\lambda u}{c}\Big)\int_0^u \Phi(u-z)\,dF(z)\Big] \\
&= \frac{\lambda}{c}\Big[\frac{\lambda}{c}\exp\Big(\frac{\lambda u}{c}\Big)\Big]\int_u^\infty \exp\Big(\frac{-\lambda u}{c}\Big)\int_0^x \Phi(x-z)\,dF(z) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\,dF(z) \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\,dF(z) \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\,d(1-F(z)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple (4.1). ■

**Lema 4.1.7.** *Sea $\Phi(u)$ la probabilidad de no ruina, si $u = 0$,*

$$\Phi(0) = \frac{c-\lambda\mu}{c}.$$

**Prueba**
Integrando (4.1) de $[0,t]$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \Phi'(u) &= \int_0^t \Big[\frac{\lambda}{c}\Phi(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\,d(1-F(z))\Big] \\
\Phi(t) - \Phi(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(u)\,du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \Phi(u-z)\,d(1-F(z))\,du,
\end{aligned}$$

pero $\dfrac{d\Phi(u-z)}{dz} = -\Phi'(u-z)$, luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \Phi(u-z)\,d(1-F(z))\,du &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t [\Phi(u-z)(1-F(z))\Big|_0^u \\
&- \int_0^u (1-F(z))\,\Phi'(u-z)\,dz]du,
\end{aligned}$$

además $0 < z < u < t$ entonces se tiene,

$$\begin{aligned}
\Phi(t)-\Phi(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(u)\,du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Big[\Phi(0)(1-F(u)) - \Phi(u)(1-F(0)) \\
&\quad + \int_0^u (1-F(z))\,\Phi'(u-z)\,dz\Big]du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(0)(1-F(u))\,du + \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-F(z))\,dz \int_z^t \Phi'(u-z)\,du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(0)(1-F(u))\,du + \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-F(z))\,dz\,\left[\Phi(u-z)|_z^t\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(0)\int_0^t (1-F(u))\,du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t (1-F(z))\,dz\Big[\Phi(t-z)-\Phi(0)\Big] \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(t-z)(1-F(z))\,dz.
\end{aligned}$$

Tomando $t = u$ se tiene

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)(1-F(z))dz.$$

Haciendo $u \to \infty$ además, $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = 1$ y recordando que $\int_0^\infty (1-F(z))\,dz = \mu$, entonces,

$$\Phi(\infty)-\Phi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Phi(\infty)(1-F(z))\,dz = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F(z))\,dz = \frac{\lambda}{c}\mu,$$

de donde

$$\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}\mu. \quad \blacksquare$$

### 4.1.1. Transformada de Laplace de $\Phi$

En esta sección se obtiene la transformada de Laplace para la probabilidad de ruina y con base en está, se obtiene la transformada de Laplace para la probabilidad de no ruina.

**Teorema 4.1.8.** *Sea $\hat{L}_\Phi(s)$ y $\hat{L}_\Psi(s)$ la transformada de Laplace para la función $\Phi$ y $\Psi$ respectivamente, entonces,*

$$\begin{aligned}
\hat{L}_\Phi(s) &= \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-\hat{L}_F(s))}, \quad s>0, \\
&y \\
\hat{L}_\Psi(s) &= \frac{1}{s} - \hat{L}_\Phi(s), \quad s>0.
\end{aligned}$$

**Prueba**
De (4.1)

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\,d(1-F(z)),$$

multiplicando por $\exp(-su)$ e integrando de 0 a $\infty$,

$$\int_0^\infty \Phi'(u)\exp(-su)\,du = \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\,dF(z)\right]\exp(-su)\,du. \tag{4.3}$$

Integrando por partes el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Phi'(u)\exp(-su)\,du &= \Phi(u)\exp(-su)\Big|_{u=0}^{\infty} + \int_0^\infty s\exp(-su)\Phi(u)\,du \\
&= -\Phi(0) + s\int_0^\infty \exp(-su)\Phi(u)\,du \\
&= -\Phi(0) + s\hat{L}_\Phi(s).
\end{aligned}$$

Para las integrales del lado derecho de (4.3),

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}\Phi(u)\exp(-su)\,du = \frac{\lambda}{c}\hat{L}_\Phi(s), \tag{4.4}$$

y sea

$$I := \int_0^\infty \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\,dF(z)\exp(-su)\,du,$$

haciendo el cambio de variable $u - z = y$, y después cambiando los límites de integración,

$$I = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_{u-y}^\infty \exp\{-s(y+z)\}\,dF(y)\Phi(u)\,du,$$

tomando $u = y$, se tiene,

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Phi(u)\exp(-su)\,du\int_0^\infty \exp(-sz)\,dF(z) = \frac{\lambda}{c}\hat{L}_\Phi(s)\hat{L}_F(s),$$

Sustituyendo en (4.3) el valor de cada integral se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
-\Phi(0) + s\hat{L}_\Phi(s) &= \frac{\lambda}{c}\left[\hat{L}_\Phi(s) - \hat{L}_\Phi(s)\hat{L}_F(s)\right] \\
cs\hat{L}_\Phi(s) - c\Phi(0) &= \lambda\hat{L}_\Phi(s)[1 - \hat{L}_F(s)] \\
\hat{L}_\Phi(s)[cs - (1 - \lambda\hat{L}_F(s))] &= c\Phi(0) \\
\hat{L}_\Phi(s) &= \frac{c\Phi(0)}{cs - \lambda(1 - \hat{L}_F(s))}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Por el Lema 4.1.7, se tiene $\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$. Entonces sustituyendo $\Phi(0)$ en (4.5), se tiene

$$\hat{L}_\Phi(s) = \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - \hat{L}_F(s))}.$$

La segunda igualdad se obtiene a partir de la primera

$$\hat{L}_\Psi(s) = \int_0^\infty \exp(-su)(1 - \Phi(u)) = \frac{1}{s} - \hat{L}_\Phi(s). \quad \blacksquare$$

### 4.1.2. Fórmula de Pollaczek-Khinchin

La fórmula de Pollaczek-Khinchin es una forma para describir la probabilidad de no ruina de la compañía por medio de una serie infinita y la convolución.

**Definición 4.1.9.** *Sea $F_X$ una FDA con $F_X(0) = 0$ y media $\mu > 0$. Se define*

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy. \tag{4.6}$$

*Si $F_I(x)$ cumple:*

- $F_I(0) = 0$,
- *es monótona creciente y continua,*
- $F_I(\infty) = 1$ *y* $F_I(-\infty) = 0$,

*entonces $F_I$ es una FDA. Se tiene que $F_I$ se conoce como la distribución de cola integrada de $F_X$.*

El siguiente Teorema nos proporciona la probabilidad de ruina, aquí las distribuciones pueden ser discretas y absolutamente continuas.

**Teorema 4.1.10.** ***Fórmula de Pollaczek-Khinchin***
*Para cada $u \geq 0$, se cumple*

$$\Phi(u) = \Big(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n F_I^{*n}(u). \tag{4.7}$$

**Observación**
Este Teorema se cumple para procesos de riesgo clásico con carga de seguridad positiva, donde no hay restricciones para las reclamaciones, éstas pueden ser de cola ligera o pesada.

**Prueba**
Para la prueba se calculó la transformada de Laplace de ambos lados de (4.7) y se verifica que ambas son iguales, para esto multiplicamos por $\exp(-su)$ e integramos de $(0,\infty)$.

$$\int_0^\infty \exp(-su)\Phi(u)\,du = \int_0^\infty \exp(-su)\Big(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n F_I^{*n}(u)\,du.$$

Obsérvese que del lado derecho se tiene por definición la transformada de Laplace y por el Teorema (4.1.8) se tiene que, $\hat{L}_\Phi(s) = \dfrac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda(1 - \hat{L}_F(s))}$. Luego se calculó la transformada de Laplace del lado derecho de (4.7),

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \exp(-su)\Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n F_I^{*n}(u)\,du \\
= &\Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n \int_0^\infty \exp(-su)F_I^{*n}(u)\,du \\
= &\Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n \int_0^\infty F_I^{*n}(u)\Big(-\frac{1}{s}\Big)d[\exp(-su)] \\
= &\Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n \Big[-\frac{\exp(-su)}{s}F_I^{*n}(u)\Big|_{u=0}^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \exp(-su)dF_I^{*n}(u)\Big] \\
= &\Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n \Big[\frac{1}{s}\int_0^\infty \exp(-su)\,dF_I^{*n}(u)\Big],
\end{aligned}
$$

la integral que aparece en la última igualdad es la transformada de Laplace de la suma de $n$ variables aleatorias independientes con FDA común $F_I$, es decir,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \exp(-su)\,dF_I^{*n}(u) &= \int_0^\infty \exp(-su)d(X_1+\ldots+X_n) \\
&= E[\exp[-s(X_1+\ldots X_n)]] = E[\exp(-sX_1)]\ldots E[\exp(-sX_n)] \\
&= \hat{L}_{F_I}(s)\ldots\hat{L}_{F_I}(s) = (\hat{L}_{F_I}(s))^n.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n \Big[\frac{1}{s}\int_0^\infty \exp(-su)\,dF_I^{*n}(u)\Big] &= \Big(\frac{c-\lambda\mu}{c}\Big)\Big(\frac{1}{s}\Big)\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n\Big(\hat{L}_{F_I}(s)\Big)^n \\
&= \Big(\frac{c-\lambda\mu}{c}\Big)\Big(\frac{1}{s}\Big)\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{\lambda\mu}{c}\hat{L}_{F_I}(s)\Big)^n \\
&= \Big(\frac{c-\lambda\mu}{c}\Big)\Big(\frac{1}{s}\Big)\frac{1}{1-\frac{\lambda\mu}{c}\hat{L}_{F_I}(s)} \\
&= \frac{c-\lambda\mu}{s(c-\lambda\mu\hat{L}_{F_I}(s))}. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Resta probar que

$$
s\mu\hat{L}_{F_I}(s)) = 1-\hat{L}_F(s). \qquad (4.9)
$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
s\mu\hat{L}_{F_I}(s)) &= s\mu\int_0^\infty \exp(-su)\,dF_I(u)\\
&= s\mu\int_0^\infty \exp(-su)d\left[\frac{1}{\mu}\int_0^u \overline{F}(y)\,dy\right]\\
&= s\int_0^\infty \exp(-su)\overline{F}(u)\,du\\
&= s\int_0^\infty \exp(-su)(1-F(u))du\\
&= s\left[-\frac{1}{s}\exp(-su)\right]\Big|_0^\infty - s\left[-\frac{1}{s}\exp(-su)F(u)\Big|_{s=0}^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s}\exp(-su)\,dF(u)\right]\\
&= 1-\hat{L}_F(s),
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se usa integración por partes. Entonces

$$\hat{L}_\Phi(s) = \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-\hat{L}_F(s))} = \frac{c-\lambda\mu}{s(c-\lambda\mu\hat{L}_{F_I}(s))}. \quad \blacksquare$$

### 4.1.3. Teorema de Embrechts-Veraverbeke

En muchas casos las reclamaciones que llegan a la compañía muestran un comportamiento de cola pesada, que son un subconjunto de las distribuciones subexponenciales. El siguiente Teorema describe la probabilidad de ruina cuando la distribución de cola integrada de la distribución es de tipo subexponencial.

**Teorema 4.1.11.** *Sea $F_I \in S$, $0 < \rho' = \frac{\lambda\mu}{c} < 1$. Entonces*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Psi(u)}{1-F_I(u)} = \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu} = \frac{\rho'}{1-\rho'}. \tag{4.10}$$

**Prueba**
De la fórmula de Pollaczek-Khinchine se tiene

$$\Phi(u) = \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u),$$

además

$$1 = \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n,$$

luego

$$\begin{aligned}
1-\Phi(u) &= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (1-F_I^{*n})(u)\\
\Psi(u) &= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{F_I^{*n}}(u). \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\Psi(u)}{1-F_I(u)} = \Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n \frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{1-F_I(u)}. \tag{4.12}$$

Como $\rho' < 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\rho'(1+\epsilon) < 1$. Usando el Lema 3.2.10 se tiene que existe una constante $0 < k < \infty$ tal que para todo $u \geq 0$, $\;n = 1, 2, \ldots$ se cumple,

$$\frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\overline{F_I}(u)} \leq k(1+\epsilon)^n.$$

Entonces de (4.12)

$$\frac{\Psi(u)}{\overline{F}_I(u)} \leq \Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n k(1+\epsilon)^n < \infty.$$

Cuando $u \to \infty$, se obtiene

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\Psi(u)}{\overline{F}_I(c)} = \Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n \lim_{u\to\infty}\frac{\overline{F^{*n}(u)}}{\overline{F}(u)} = \Big(1-\frac{\lambda\mu}{c}\Big)\sum_{n=0}^{\infty} n\Big(\frac{\lambda\mu}{c}\Big)^n,$$

sustituyendo $\rho'$ se tiene,

$$\begin{aligned}
(1-\rho')\sum_{n=0}^{\infty} n(\rho')^n &= (1-\rho')\sum_{n=0}^{\infty}\rho' n(\rho')^{n-1} \\
&= (1-\rho')\rho'\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho'}(\rho')^n \\
&= (1-\rho')\rho'\frac{d}{d\rho'}\sum_{n=1}^{\infty}(\rho')^n = (1-\rho')\rho'\frac{d}{d\rho'}\Big(\frac{1}{1-\rho'}-1\Big) \\
&= (1-\rho')\rho'\frac{d}{d\rho'}\Big(\frac{\rho'}{1-\rho'}\Big) = \frac{\rho'}{1-\rho'} = \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu}.\blacksquare
\end{aligned}$$

Del Teorema anterior se obtiene una fórmula aproximada que describe la función de ruina y dicha función se ocupa en el siguiente Capítulo para realizar los cálculos de la probabilidad de ruina,

$$\Psi_{E-V}(u) \sim \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu}(1-F_I(u)), \;\; u \to \infty. \tag{4.13}$$

La función $\Psi_{E-V}(u)$ tiene el comportamiento asintótico de la cola de una v.a subexponencial, es decir, decrece mucho más lento que cualquier función exponencial. Por lo tanto la función $\Psi(u)$ es mucho más grande que la probabilidad de ruina en caso de cola ligera.

**Observación**

Si $G$ es una v.a geométrica compuesta con parámetros $p$ y $X = \sum_{i=1}^{G} Z_i$ es tal que $Z_i$ es una sucesión de v.a's independientes con distribución $F$, entonces $X$ se llama geométrica compuesta con parámetros $(p, G)$. Para su distribución se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq x | G = n)(1-p)p^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_I^{*n}(x)(1-p)p^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la fórmula de Pollackzek-Khintchine se tiene que, en el caso de reclamaciones con media finita, la probabilidad de no ruina $\Phi(u)$ tiene distribución geométrica compuesta con parámetros $(\frac{\lambda\mu}{c}, F_I)$.

## 4.2. Distribución del número de reclamaciones

Ahora interesa obtener o aproximar la función de distribución de los reclamos que llegan a la compañía. En esta sección se estudia el algoritmo de Panjer el cual describe la probabilidad de no ruina.

### 4.2.1. Relación de recurrencia de Panjer

Supongamos que para $a < 1$ y $b \in \mathbb{R}$, constantes que no son cero simultáneamente y $p_k = P(X = k)$, se cumple

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.14}$$

A la expresión (4.14) se le conoce como la relación de recurrencia de Panjer.

La distribución binomial, Poisson y geométrica son distribuciones que satisfacen la relación de recurrencia de Panjer.

### 4.2.2. Algoritmo de Panjer

Sea $X = \sum_{i=1}^{N} Z_i$ una v.a compuesta donde $Z_1, Z_2, \ldots$ son variables aleatorias iid, y es independiente de $N$. Sin perdida de generalidad se supone que $Z_i$ y $N$ toman valores en $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Se denota la densidad de probabilidad de $Z_1, Z_2, \ldots$ por $q_k$ y la v.a $N$ tiene densidad de probabilidad $p_k$ la cual satisface la relación de recurrencia de Panjer (4.14).

**Lema 4.2.1.** *Para todo $j, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ y $n = 1, 2, \ldots$*

$$\mathbb{E}\left[Z_1 \Big| \sum_{i=1}^{n} Z_i = j\right] = \frac{j}{n}, \tag{4.15}$$

*y*

$$\mathbb{P}\Big(Z_1 = k \Big| \sum_{i=1}^{n} Z_i = j\Big) = \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_k^{*n}}, \tag{4.16}$$

*donde $q_k^{*n}$ denota la n-ésima convolución de $q_k$.*

**Prueba**
Como $Z_1, Z_2, \ldots$ son iid, entonces se tiene

$$n\mathbb{E}\left[Z_1 \Big| X = j\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[Z_k \Big| X = j\right] = \mathbb{E}\left[Z_1 \Big| X = j\right] = j.$$

Además, $Z_1, Z_2, \ldots$ son independientes, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = k | Z_2 + \ldots + Z_n = j) &= \frac{\mathbb{P}(Z_1 = k, Z_2 + \ldots + Z_n = j - k)}{\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z_1 = k)\mathbb{P}(Z_2 + \ldots + Z_n = j - k)}{\mathbb{P}(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = j)} \\ &= \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En el siguiente Teorema se establece un método recursivo, llamado algoritmo de Panjer que permite calcular la densidad de probabilidad de $p_k^X = \mathbb{P}(X = k)$ de una variable aleatoria compuesta $X = \sum_{i=1}^{N} Z_i$, donde $N$ satisface la relación de Panjer (4.14).

**Teorema 4.2.2.** *Se asume que se satisface (4.14). Entonces*

$$p_j^X = \begin{cases} \hat{g}_N(q_0) & \textit{para} \quad j = 0, \\ (1 - aq_0)^{-1} \sum_{k=1}^{j} (a + bkj^{-1}) q_k p_{j-k}^X & \textit{para} \quad j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{4.17}$$

*donde $p_j^X = \mathbb{P}(X = k)$ y $\hat{g}_N$ es la función generadora de probabilidades de $N$.*

**Prueba**
Para $j = 0$,

$$\begin{aligned} p_0^X = \mathbb{P}(X = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k q_0^{*k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k (q_0)^n = \hat{g}_N(q_0). \end{aligned}$$

Mientras que si $j \geq 1$, por definición $q_j^{*0} = 0$, y como se satisface la relación de recurrencia de Panjer, entonces

$$p_j^X = \mathbb{P}(X = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n q_j^{*n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a + \frac{b}{n}\Big) p_{n-1} q_j^{*n},$$

usando (4.15) se tiene,

$$\begin{aligned} p_j^X &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a + \frac{b}{j}\mathbb{E}\Big[Z_1 | \sum_{i=1}^{n} Z_i = j\Big]\Big] p_{n-1} q_j^{*n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a + \frac{b}{j}\sum_{k=0}^{j} k\mathbb{P}\Big(Z_1 = k \Big| \sum_{i=1}^{n} Z_i = j\Big)\Big] p_{n-1} q_j^{*n}, \end{aligned}$$

y de (4.16),

$$\begin{aligned} p_j^X &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{j}\sum_{k=0}^{j} k \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}\right) p_{n-1} q_j^{*n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a p_{n-1} q_j^{*n} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \frac{bk}{j} p_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} a p_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \frac{bk}{j} p_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \Big(a + \frac{bk}{j}\Big) p_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{j} \Big(a + \frac{bk}{j}\Big) q_k \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} q_{j-k}^{*(n-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{j} \Big(a + \frac{bk}{j}\Big) q_k p_{j-k}^X \\ &= a q_0 p_j^X + \sum_{k=1}^{j} \Big(a + \frac{bk}{j}\Big) q_k p_{j-k}^X, \end{aligned}$$

despejando $p_j^X$ resulta

$$\begin{aligned} p_j^X (1 - a q_0) &= \sum_{k=1}^{j} \Big(a + \frac{bk}{j}\Big) q_k p_{j-k}^X \\ p_j^X &= (1 - a q_0)^{-1} \sum_{k=1}^{j} \Big(a + \frac{bk}{j}\Big) q_k p_{j-k}^X. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Capítulo 5

# Cálculos numéricos y simulaciones

En este Capítulo se obtienen aproximaciones para la probabilidad de ruina cuando la compañía recibe reclamaciones muy grandes, como es el caso de la distribución Weibull y Pareto. Estas distribuciones se usan para modelar reclamaciones causadas por incendios y otros eventos catastróficos. Además, se realizan simulaciones para el proceso de riesgo con estas distribuciones, para visualizar el comportamiento general del proceso al tiempo de ruina.

## 5.1. Cálculos aproximados de la probabilidad de ruina

En esta sección se usa el algoritmo de Panjer (4.17) y el Teorema de Embrechts-Veraverbeke (4.10) para obtener las aproximaciones de la probabilidad de ruina cuando las distribuciones de las reclamaciones son Weibull y Pareto.

### 5.1.1. Reclamaciones que tienen distribución Weibull

La distribución Weibull como se mencionó antes, es de cola pesada, si el parámetro de forma es menor que uno, con fdp dada por;

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}, \tag{5.1}$$

y FDA

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}, \tag{5.2}$$

y su media es $\mu = \alpha\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$.

Así la cola de la distribución es,

$$\overline{F}(x) = 1 - F_X(x) = 1 - \left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}\right] = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}.$$

Ahora por (4.6) la distribución de cola integrada es,

$$F_I(x) = \int_0^x \overline{F}(y)\, dy = \frac{1}{\mu} \int_0^x \exp\left\{ -\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta} \right\} dy.$$

Se toma $z = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}$, se tiene que $z = \alpha z^{\frac{1}{\beta}}$ y $dy = \frac{\alpha}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz$. Luego,

$$F_I(u) = \frac{\alpha}{\beta\mu} \int_0^{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\beta}} \exp(-z) z^{\frac{1}{\beta}-1}\, dz,$$

de donde se sustituye $\mu$ y simplificando,

$$F_I(u) = \frac{\alpha}{\alpha\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \int_0^{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\beta}} \exp(-z) z^{\frac{1}{\beta}-1}\, du = \int_0^{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\beta}} \frac{\exp(-z) z^{\frac{1}{\beta}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}\, dz.$$

Nótese que $F_I$ es la FDA de una v.a con distribución gamma de parámetros $\frac{1}{\beta}$ y 1. Usando el Teorema 4.2.2, se realiza la aproximación para la probabilidad de ruina. Para ello se divide el intervalo $(0, 50)$ en subintervalos disjuntos de longitud $\frac{1}{1000}$ y se aproxima $F_I(u)$ a una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad $q_k$, tal que,

$$\begin{aligned} q_k &= P\left(Y = \frac{k}{1000}\right) = P\left(\frac{k}{1000} < F_I < \frac{k+1}{1000}\right) \\ &= F_I\left(\frac{k+1}{1000}\right) - F_I\left(\frac{k}{1000}\right), \quad k = 0, 1 \ldots. \end{aligned}$$

Se toma el caso particular de $c = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}9$, $\lambda = 2$, $\mu = \Gamma\left(1 + \frac{1}{0{,}9}\right)$, la distribución de cola integrada esta dada por,

$$F_I(u) = \int_0^{u^{0,9}} \frac{z^{\frac{1}{0,9}-1} \exp(-z)}{\Gamma\left(\frac{1}{0,9}\right)}\, dz.$$

Recuérdese que para usar el Teorema Embrechts-Veraverbeke es necesario verificar que $F_I$ sea de tipo subexponencial, lo cual se muestra en el Apéndice A. Ejemplo A.0.6, a).

Por lo tanto, de (4.13), con $\rho' = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{2}{3}\Gamma\left(1 + \frac{1}{0{,}9}\right)$, se tiene que

$$\Psi_{E-V}(u) = \frac{\rho'}{1-\rho'}(1 - F_I(u)) = \frac{\frac{2}{3}\Gamma\left(1+\frac{1}{0,9}\right)}{1 - \frac{2}{3}\Gamma\left(1+\frac{1}{0,9}\right)} \left(1 - \int_0^{u^{0,9}} \frac{z^{\frac{1}{0,9}-1} \exp(-z)}{\Gamma\left(\frac{1}{0,9}\right)}\, dz\right), \quad u \to \infty.$$

En la Tabla 5.1 se presentan las aproximaciones de la probabilidad de ruina usando el algoritmo de Panjer ($\Psi_{Panjer}(u)$), la aproximación de Embrechts-Veraverbeke ($\Psi_{E-V}(u)$),

| $u$ | $\Psi_{Panjer}(u)$ | $\Psi_{E-V}(u)$ | Error |
|---|---|---|---|
| 1 | 5.381e-01 | 9.763e-01 | 81.42 |
| 2 | 4.174e-01 | 4.294e-01 | 2.88 |
| 3 | 3.248e-01 | 1.945e-01 | -40.11 |
| 4 | 2.531e-01 | 8.991e-02 | -64.47 |
| 5 | 1.973e-01 | 4.220e-02 | -78.61 |
| 10 | 5.704e-02 | 1.123e-03 | -98.03 |
| 20 | 4.774e-03 | 1.231e-06 | -99.97 |
| 30 | 3.996e-04 | 1.871e-09 | -99.99 |
| 40 | 3.345e-05 | 3.498e-12 | -99.99 |
| 50 | 2.800e-06 | 7.564e-15 | -100.00 |

Tabla 5.1: Probabilidad de ruina cuando las reclamaciones tienen distribución Weibull.

y el error relativo (Error) $\dfrac{\Psi_{Panjer}(u) - \Psi_{E-V}(u)}{\Psi_{Panjer}(u)} * 100.$

Se considera la aproximación de Panjer como la probabilidad de ruina casi exacta, se puede observar que la fórmula de Embrechts-Veraverbeke no da buenas aproximaciones, aun para valores grandes de $u$. Este fenómeno se observa en todos los casos de aproximaciones de probabilidades de ruina, (Véase [9]), y se debe a que en este caso las reclamaciones son de tipo subexponencial, es decir, fluctúan mucho para valores grandes de $u$. Por lo tanto la fórmula de Embrechts-Veraverbeke no es útil para obtener buenas aproximaciones de la probabilidad de ruina.

### 5.1.2. Reclamaciones con distribución Pareto

Se asume que las reclamaciones que llegan a la compañía tienen distribución Pareto con parámetro de forma $\alpha > 0$ y de escala $\beta > 0$, con fdp

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\Big(\frac{\beta}{x+\beta}\Big)^{(\alpha+1)} \quad x > 0, \tag{5.3}$$

y FDA

$$F_X(x) = 1 - \Big(\frac{\beta}{\beta + x}\Big)^{\alpha}, \tag{5.4}$$

en este caso $\mu = \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$.

La cola de la distribución es,

$$\overline{F}(x) = 1 - F_X(x) = \Big(\frac{\beta}{\beta + x}\Big)^{\alpha}.$$

Ahora de (4.6) la distribución de cola integrada es,

$$\begin{aligned}
F_I(x) &= \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy = \frac{1}{\mu}\int_0^x \Big(\frac{\beta}{\beta+y}\Big)^{\alpha} dy = \frac{\beta^\alpha}{\mu}\int_0^x (\beta+y)^{-\alpha}\,dy \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\mu}\Big[\frac{(\beta+y)^{(-\alpha+1)}}{-\alpha+1}\Big]\Big|_0^x = \frac{\beta^\alpha}{-(\alpha-1)\mu}[(\beta+x)^{-(\alpha-1)} - \beta^{-(\alpha-1)}] \\
&= \frac{\beta^\alpha}{(\alpha-1)\Big(\frac{\beta}{\alpha-1}\Big)}\Big[\frac{1}{\beta^{(\alpha-1)}} - \frac{1}{(\beta+x)^{(\alpha-1)}}\Big] = 1 - \Big(\frac{\beta}{\beta+x}\Big)^{(\alpha-1)}.
\end{aligned}$$

Para usar el algoritmo de Panjer, al igual que el caso Weibull se discretiza el intervalo $(0,50)$, y se aproxima $F_I(x)$ a una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad $q_k$ definida como antes. El caso particular de $\beta = 1$, $\lambda = 2$, $c = 2$, $\alpha = 3$, $\mu = \dfrac{\beta}{\alpha-1} = \dfrac{1}{2}$, obtenemos

$$F_I(x) = 1 - \Big(\frac{1}{1+x}\Big)^2.$$

En el Ejemplo A.0.6, b) del Apéndice A se verifica que $F_I(x)$ es de tipo subexponencial, y por (4.13) para $\rho' = \dfrac{\lambda\mu}{c} = \dfrac{1}{2}$, se tiene que,

$$\Psi_{E-V}(u) = \frac{\rho'}{1-\rho'}(1-F_I(u)) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\left[1 - \Big(1 - \Big(\frac{\beta}{\beta+u}\Big)^{(\alpha-1)}\Big)\right] = (1+u)^{-2}.$$

En la Tabla 5.2 se muestran los valores de la aproximación de la probabilidad de ruina usando el algoritmo de Panjer ($\Psi_{Panjer}(u)$), la aproximación de Embrechts-Veraverbeke ($\Psi_{E-V}(u)$), y el error relativo (Error).

| $u$ | $\Psi_{Panjer}(u)$ | $\Psi_{E-V}(u)$ | Error |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.387e-01 | 2.500e-01 | 4.87 |
| 2 | 1.405e-01 | 1.111e-01 | -20.92 |
| 3 | 9.058e-02 | 6.250e-02 | -31.00 |
| 4 | 6.187e-02 | 4.000e-02 | -35.35 |
| 5 | 4.412e-02 | 2.777e-02 | -37.04 |
| 10 | 1.241e-02 | 8.264e-03 | -33.41 |
| 20 | 2.885e-03 | 2.267e-03 | -21.40 |
| 30 | 1.220e-03 | 1.040e-03 | -14.76 |
| 40 | 6.690e-04 | 5.948e-04 | -11.08 |
| 50 | 4.216e-04 | 3.844e-04 | -8.82 |

Tabla 5.2: Probabilidad de ruina cuando las reclamaciones tienen distribución Pareto.

Como se puede observar la probabilidad de ruina en ambos casos va disminuyendo conforme $u$ va creciendo, es decir, cuando el capital inicial es grande la probabilidad de ruina es pequeña. Sin embargo, se observa que aun para valores grande de $u$ el error relativo usando la fórmula de Embrechts-Veraverbeke es muy alto, como se puede notar el error relativo sigue siendo grande aun para $u = 50$.

## 5.2. Simulación

La simulación es uno de los procesos cuantitativos más ampliamente utilizado en la toma de decisiones. En este caso las simulaciones se usan para obtener el comportamiento del proceso de riesgo cuando los reclamos son de tipo subexponencial.

### 5.2.1. Simulación para el caso Weibull

Se muestran 20 simulaciones de las trayectorias del modelo clásico de riesgo considerando 50 periodos de tiempo el cual se estudio en los Capítulos anteriores.

Se toman los mismos parámetros que se usaron en la aproximación de la probabilidad de ruina, es decir, la prima $c = 3$, con el proceso de Poisson de intensidad $\lambda = 2$ y los tamaños de las reclamaciones con distribución Weibull de parámetros $\beta = 0{,}9$, $\alpha = 1$ y un capital inicial $u = 1$. En la Figura 5.1, se observan varias trayectorias por debajo del cero a lo largo del tiempo.

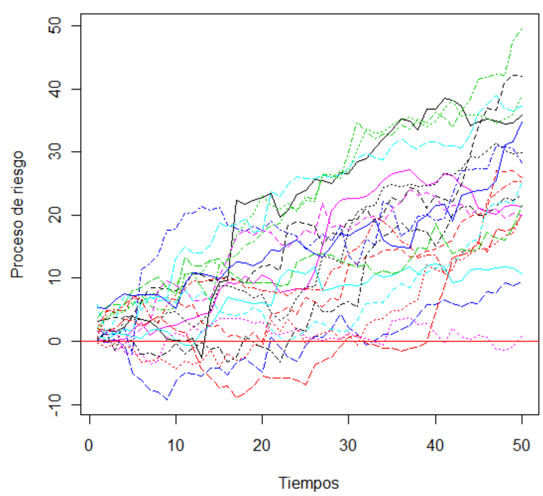


Figura 5.1: Simulación del proceso de riesgo con un capital inicial $u = 1$.

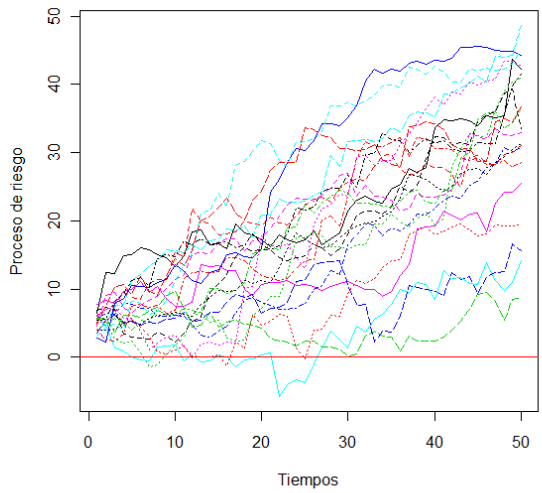


Figura 5.2: Simulación del proceso de riesgo con un capital inicial $u = 5$.

Si la compañía inicia con un capital de 5 unidades, se observa en la Figura 5.2 que la mayoría de las trayectorias simuladas no presentan ruina hasta el tiempo 50, es decir, la probabilidad de ruina de la compañía es pequeña.

Ahora, si se toma un capital inicial $u = 0$, es decir, dado que la compañía no tiene un capital inicial invertido, la ruina se presenta más rápido, esto se muestra en la Figura 5.3 pues un número considerable de trayectorias simuladas están por debajo del cero a lo largo del tiempo. Se observa que cuando hay ruina el valor del proceso al tiempo de ruina es muy grande en valor absoluto.

### 5.2.2. Simulación para el caso Pareto

Se realiza las simulaciones de las trayectorias del proceso de riesgo asumiendo que el tamaño de las reclamaciones tienen un distribución Pareto con los parámetros $\beta = 1,\ \lambda = 2,\ c = 2,\ \alpha = 3$. Se simulan 20 trayectorias del modelo clásico de riesgo, con 50 periodos de tiempo y con capital inicial de una unidad.

En la Figura 5.4 se observa que son mínimas las trayectorias de riesgo simuladas que están por debajo del cero. Ahora, si se considera un capital inicial de cinco unidades, en la Figura 5.5 se muestra que la probabilidad de que llegue a la ruina es pequeña, pues de las 50 trayectorias simuladas solo una esta por debajo del cero en un periodo de tiempo corto.

En la Figura 5.6 se muestra que con $u = 0$, es decir, dado que la compañía no invirtió capital inicial, la probabilidad de ruina es grande pues aproximadamente la mitad de las

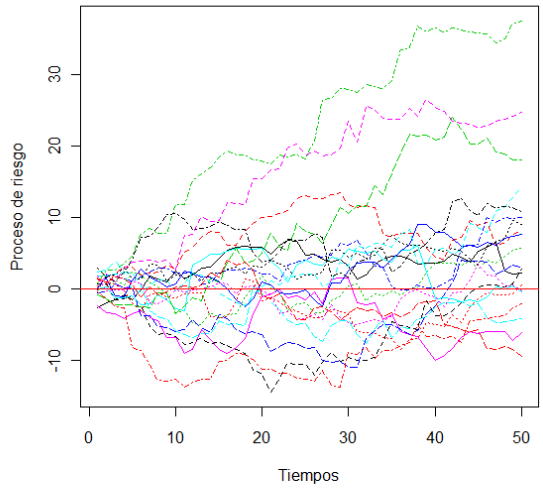


Figura 5.3: Simulación del proceso de riesgo con un capital inicial $u = 0$.

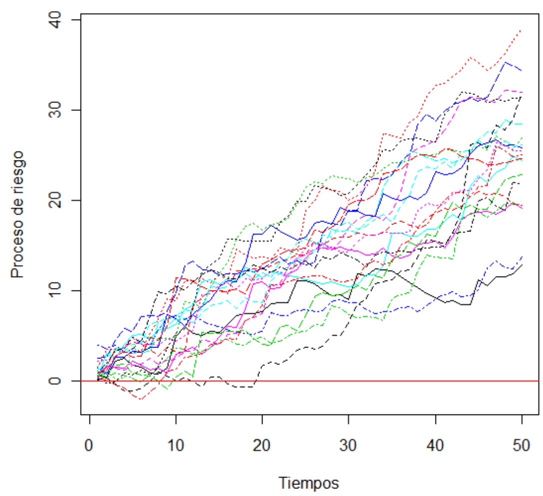


Figura 5.4: Simulación del proceso de riesgo con un capital inicial $u = 1$.

trayectorias de riesgo simuladas están por debajo del cero a la largo del tiempo.

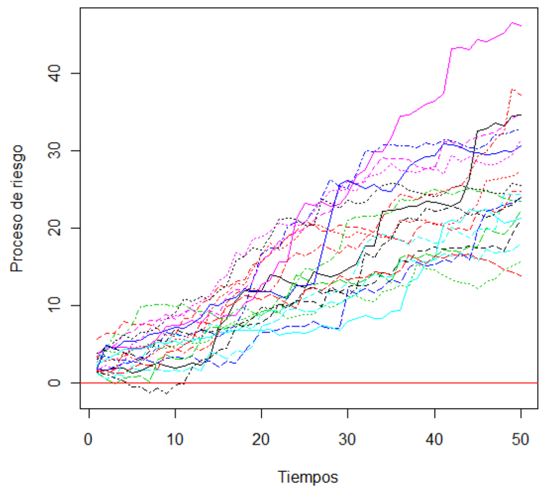


Figura 5.5: Simulación del proceso de riesgo con un capital inicial $u = 5$.

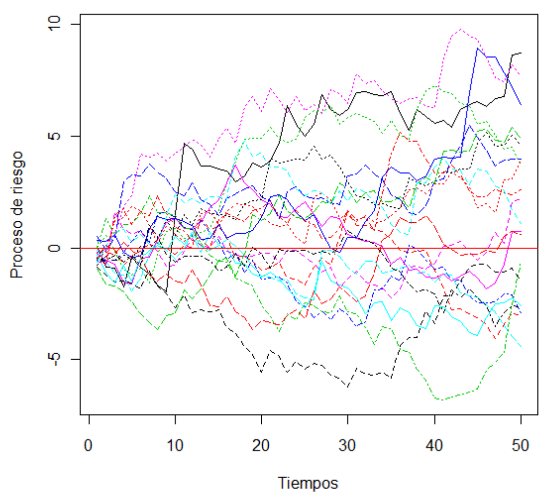


Figura 5.6: Simulación del proceso de riesgo con un capital inicial $u = 0$.

## Capítulo 6

# Conclusiones

El estudio de la solvencia en una compañía de seguros, es el principal objetivo de la teoría de riesgo, sobre todo cuando la ruina se debe a eventos catastróficos. Por esta razón en el presente trabajo se analizaron las aproximaciones de la probabilidad de ruina cuando los tamaños de los reclamos son de cola pesada y pertenecen a la clase subexponencial.

Se presentaron las definiciones y conceptos de teoría de riesgo del modelo clásico de Cramer-Lundberg. Además se hizo un estudio profundo y extenso de la teoría de distribuciones de tipo subexponencial. Finalmente se demostraron los Teorema de Pollaczek-Khinchin, de Embrechts-Veraverbeke y el algoritmo de Panjer. Estos Teoremas se usaron para los resultados numéricos de la tesis.

Se obtuvieron aproximaciones numéricas de la probabilidad de ruina en los casos particulares, cuando las reclamaciones tienen distribución Pareto y Weibull. Así mismo se analizó el error relativo que presentan dichas fórmulas. Lo que se observo es que para valores grandes del capital inicial la probabilidad de ruina no es tan pequeña como en el caso de proceso de riesgo cuando las distribuciones son de otro tipo, y la fórmula de Embrechts-Veraverbeke no trabaja bien, comparada con la aproximación de Panjer que es casi exacta, debido a que la probabilidad de ruina es más grande que en el caso de reclamaciones que no son de cola pesada, en este caso se necesita usar reaseguros, es decir, las compañías contratan a otras compañías aseguradoras que cubren parte de las reclamaciones a cambio de una prima fija que paga la primera compañía.

Por último se realizaron simulaciones de las trayectorias del modelo clásico de riesgo, para los ejemplos considerados en la parte numérica. En ambos se observó una gran porción de trayectorias con ruina en corto tiempo y valores muy grandes del proceso al tiempo de ruina.

# Apéndice A

# Criterios para subexponencialidad

En la mayoría de los casos no es tarea fácil probar directamente que dada una distribución, ésta sea subexponencial. Para aplicaciones de teoría de riesgo se necesita que la distribución de cola integrada de la distribución $F$ sea subexponencial.

Sea $S^*$ un subconjunto de $S$. Se dice que la FDA $F_X$ pertenece a la clase $S^*$ si tiene media finita, $\mu < \infty$ y

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \overline{F}(y)\, dy = 2\mu.$$

**Definición A.0.1.** *Sea $X$ una v.a continua con FDA $F_X(x)$ y fdp $f(x)$, la función intensidad de riesgo denotada por $h_F(x)$, se define como:*

$$h_F(x) = \frac{f(x)}{1 - F_X(x)}.$$

**Definición A.0.2.** *La FDA $F$ pertenece a la clase $S^*$ si $F$ tiene esperanza finita $\mu$ y*

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \overline{F}(y)\, dy = 2\mu$$

El siguiente Teorema asegura que si la FDA pertenece a la clase $S^*$, entonces la distribución de cola integrada es de tipo subexponencial.

**Teorema A.0.3.** *Si $F \in S^*$, entonces $F \in S$ y $F_I \in S$.*

**Prueba** Véase [8]. Pág.58

**Corolario A.0.4.** *Se asume que la función intensidad de riesgo $h_F(x)$ de $F$ existe y $\mu < \infty$. Si $\limsup_{x\to\infty} xh_F(x) < \infty$, entonces $F \in S$ y $F_I \in S$.*

**Prueba** Véase [8]. Pág. 60

**Teorema A.0.5.** *Se asume que la función intensidad de riesgo $h_F(x)$ de $F$ existe y es decreciente a 0. Si $\int_0^\infty \exp(xh_F(x))\overline{F}(x)\, dx < \infty$, entonces $F \in S^*$.*

**Prueba** Véase [8]. Pág. 60

**Ejemplo A.0.6.** *Se verifica que la cola integrada de la distribución Weibull y Pareto pertenece a la clase de las distribuciones subexponenciales.*
*En efecto.*

*a) Primero se calcula la función intensidad de riesgo $h_F(x)$, usando (5.1) y (5.2)*

$$h_F(x) = \frac{f(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\}}{\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]} = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}.$$

*Nótese que la función $h_F(x)$ decrece conforme $x \to \infty$. Ahora se calcula la siguiente integral.*

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \exp[xh_F(x)]\overline{F}(x)\, dx &= \int_0^{\infty} \exp\left[x\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\right]\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx \\ &= \int_0^{\infty} \exp\left[(\beta-1)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx < \infty.\end{aligned}$$

*Con lo anterior se verifica que se cumplen las hipótesis del Teorema A.0.5, entonces se concluye que $F \in S^*$. Y haciendo uso del Teorema A.0.3, se tiene que $F_I(x) \in S$.*

*b) A partir de (5.3) y (5.4), se obtiene la función de intensidad de riesgo*

$$h_F(x) = \frac{f(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{(\alpha+1)}}{\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha}} = \frac{\alpha}{\beta + x}. \tag{A.1}$$

*Como*

$$\limsup_{x\to\infty} xh_F(x) = \limsup_{x\to\infty} x\frac{\alpha}{\beta+x} < \infty, \tag{A.2}$$

*se verifica que se cumplen las hipótesis del Corolario A.0.4 por lo tanto $F_I(u) \in S$.*

# Bibliografía


[1] Asmussen S. *Ruin Probabilities.* World Scientific. 2000.

[2] Dickson C. M. *Insurance Risk and Ruin.* Cambridge University Press. 2006.

[3] Development Core Team, R: A *language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, URL http://www.R-project.org, 2010.

[4] Grübel R., Hermesmeier R. *Computation of compound distributions I: Aliasing errors and exponential tilting.* ASTIN Bulletin, 29, No.2. 197-214, 1999.

[5] Grübel R., Hermesmeier R. *Computation of compound distributions II: Discretization errors and Richardson extrapolation.* ASTIN Bulletin, Vol. 30, No.2. 309-331, 2000.

[6] Klüppelberg C., Stadtmüller U. *Ruin probabilities in the presence of heavy tails and interest rates.* Scandinavian Actuarial Journal, 49-58, 1998.

[7] Meeker W. Q. Escobar L. A. *Statistical methods for reliability data.* Wiley series in probability and statistics. John Wiley & Sons, Inc. 1998.

[8] Luis Rincón. *Introducción a la Teoria de Riesgo.* 2010.

[9] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* John Wiley & Sons. 1999.

[10] Sheldon M. Ross. *Simulation.* Academic Press. 2002.