UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

EL MODELO BINOMIAL DE VALUACIÓN DE OPCIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

JOSÉ JAIME SAN JUAN CASTELLANOS

DIRECTOR DE TESIS

DR. GUILLERMO ARTURO LANCHO ROMERO

Huajuapan de León, Oaxaca, marzo de 2012.

Prefacio

El desarrollo de la matemática aplicada a la teoría financiera se tornó serio con la aparición del famoso modelo de Black-Scholes-Merton en 1973 y desde entonces no han cesado los trabajos relacionados con aplicaciones a la teoría de las finanzas, en particular a la valuación de seguros derivados. Pero, ¿Cómo fue que comenzó esto? Es conocido[1] que en 1900 Louis Bachelier presentó en su tesis doctoral lo que sería el primer modelo matemático que intentara representar conceptos financieros. En su trabajo que tituló *Théorie de la Spéculation*, Bachelier propuso que los precios de las acciones siguen un movimiento Browniano. Al parecer en ese tiempo nadie le dió mucha importancia. El trabajo de Bachelier permaneció oculto hasta 1960, año en el cual Paul Samuelson visita la universidad *La Sorbonne* de París y se encuentra con la tesis de Bachelier, la cual toma como base para su investigación posterior. Samuelson notó que proponer un movimiento Browniano como el comportamiento del valor de una acción tenía el inconveniente de tomar valores negativos y en su lugar introdujo el concepto de movimiento Browniano geométrico. Años después y retomando el trabajo previo de Bachelier y de Samuelson, aparece el modelo de Black-Scholes-Merton y causa un revuelo tal que los hace acreedores al premio Nobel de economía en el año 1997.

En la actualidad, los avances de la investigación científica han permitido construir modelos cada vez más exactos (y a su vez, complejos) de los fenómenos que se representan. Sin embargo, los modelos propuestos no tienen por qué ser de un nivel elevado, sino pueden ser también modelos sencillos que consideren solo los conceptos necesarios y cuyos resultados sean aceptables. El presente trabajo se centra en un ejemplo de tales modelos. El Modelo Binomial de valuación de opciones aparece por primera vez el año de 1979 en el artículo *Option Pricing: A Simplified Approach* de Cox, Ross y Rubinstein, en donde se desarrolla el enfoque en tiempo discreto aplicado al problema de la valuación de seguros derivados sugerido inicialmente por William Sharpe. En tal artículo, se presenta una versión simplificada del modelo de Black-Scholes-Merton a un nivel más accesible. En ambos trabajos el modelo desarrollado solo contempla un tipo particular de seguros derivados, que son las opciones europeas. El presente trabajo tiene como objetivo principal desarrollar los fundamentos matemáticos del modelo binomial para poder valuar otros seguros derivados.

[1]Para una exposición más detallada de la historia de las matemáticas financieras, consúltese, por ejemplo [10].

El desarrollo se lleva a cabo en 5 partes: En el capítulo 1 se explican los conceptos financieros que son necesarios para comprender el modelo, prestando atención especial al concepto de arbitraje, cuya consideración en un modelo financiero permiten la valuación de seguros derivados, llamada a veces valuación por arbitraje. En el capítulo 2 se presenta el modelo binomial de uno y varios periodos en donde se describe como construir un portafolio que replique un seguro con tal de cubrir la posición corta. También se muestra como se debe construir un portafolio que cubra la posición larga sobre el seguro. El resultado principal de este capítulo es el teorema de replicación que nos permite diseñar un método para poder hallar el valor de cualquier seguro derivado que dependa de la posible trayectoria que pueda tomar el precio de un activo subyacente. En el capítulo 3 se sientan las bases teóricas del modelo así como los conceptos que nos son útiles al momento de disminuir la complejidad exponencial del algoritmo que trae consigo el resultado obtenido en el capítulo anterior. En el capítulo 4 se muestra que la distribución que sigue el precio del subyacente en el modelo binomial tiene como límite la distribución que se asume en el modelo de Black-Scholes-Merton. Hay que aclarar que la prueba que aquí se presenta (y que aparece como ejercicio en [9]) no es la que aparece en [4] o en [10], en donde se demuestra que la fórmula de valuación de una opción europea converge a la fórmula obtenida por Black-Scholes-Merton, sino que se prueba algo más general, con lo que el modelo en si (sin importar el seguro derivado en particular que se considere) converge al modelo de Black-Scholes-Merton. Finalmente en el capítulo 5 se muestra como con el desarrollo previo es posible valuar seguros derivados distintos a las opciones europeas, como las opciones americanas, opciones asiáticas, opciones lookback y opciones con barreras.

José Jaime San Juan Castellanos,
marzo de 2012.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La finalidad de este capítulo es desarrollar algunos conceptos de la teoría de finanzas que son necesarios para comprender el trabajo en los capítulos posteriores. También se discute el concepto de arbitraje. Los conceptos aquí discutidos pueden ser hallados en [6].

1.1. Seguros derivados

Una de las actividades más importantes en el mercado financiero es la cobertura del riesgo[1]. Esto se debe a que los inversionistas siempre buscan proteger su capital, tratando así de disminuir el riesgo de una inversión tanto como les sea posible. Para esto, el mercado financiero cuenta con ciertos instrumentos capaces de transferir riesgo. A tales instrumentos financieros se les llama seguros derivados, pues su valor se deriva del precio de otro instrumento, llamado activo subyacente o simplemente subyacente. Un ejemplo de seguro derivado bien conocido es el contrato forward, cuya definición se da a continuación:

Definición 1.1.1. *Un* **contrato forward** *es un acuerdo que se lleva a cabo entre dos partes en una fecha inicial $t = 0$ (llamada el presente) para comprar una cierta cantidad de algún activo en una fecha futura $t = T$ a un precio determinado K. Se dice que el comprador asume una posición larga y el vendedor asume una posición corta.*

El valor de K es llamado precio de ejercicio y T es llamado fecha de ejercicio, no solo para el contrato forward, sino para cualquier seguro derivado. Como podemos ver, un contrato forward no ofrece garantía a ninguna de las partes, por lo que si al tiempo T el precio del activo el mercado, que denotaremos por S_T, es mayor que el precio pactado K, el comprador obtiene una ganancia de $S_T - K$. El mismo análisis puede ser hecho para la posición corta.

Otro seguro derivado más interesante que el contrato forward es una opción:

[1]Como se explica en [6], existen tres grandes tipos de operaciones en un mercado: operaciones de cobertura, en donde se busca cubrir un riesgo sobre un posible movimiento contrario, operaciones de especulación, donde se apuesta a que el mercado tomará alguna dirección particular en el futuro y operaciones de arbitraje, las cuales buscan generar ganancias libres de riesgo.

Definición 1.1.2. *Una* **opción** *es un seguro que da a su portador el derecho mas no la obligación de comprar (o vender) una unidad de un activo (llamado activo subyacente o simplemente subyacente) S en una fecha futura T a un precio previamente pactado K. La opción suele llamarse* **call** *si es de compra y* **put** *si es una opción de venta.*

Es importante notar que una opción, a diferencia de un contrato forward, debe tener un cierto valor por el seguro que ofrece y para poder hallar tal valor se deben considerar algunos aspectos importantes como el precio de ejercicio y la duración del contrato, así como también el comportamiento de la acción (qué tan volátil es y cuales valores puede tomar). Las opciones varían dependiendo de las condiciones que se le impongan. Por ejemplo, si el portador de la opción tiene el derecho de ejercerla en cualquier momento desde su compra hasta la fecha de ejercicio se dice que la opción es de tipo **americana**, si por el contrario, solo se le permite ejercer la opción en la fecha de ejercicio, se dice que la opción es de tipo **europea**.

Tanto los contratos forward como las opciones pueden ser vistos como seguros que al tiempo de ejercicio ofrecen cierto pago a su portador, por ejemplo, el contrato forward ofrece a la fecha de ejercicio un pago de $S_T - K$, donde S_T y K son los valores discutidos previamente. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.3. *Un* **seguro derivado** *es un seguro que depende de un activo subyacente y que al tiempo de ejercicio ofrece como pago una cantidad $V(\omega)$, donde ω es un estado posible en la fecha de ejercicio del seguro.*

El pago que los seguros ofrecen a la fecha de expiración puede ser considerado como su valor o precio a la fecha de expiración. Por ejemplo, supongamos que somos los dueños de una opción de compra europea sobre una acción y que a la fecha de expiración el valor del activo subyacente S es mayor que el precio de ejercicio pactado K. En este caso, somos capaces de generar una ganancia de $S - K$ ejerciendo la opción y después vendiendo el activo subyacente en el mercado, o bien transfiriendo la opción a algún inversionista por el pago de una prima de valor $S - K$. Por tanto, nos será indiferente hablar del pago, precio o valor de un seguro derivado.

Con esta definición a la mano, podemos ver que un contrato forward es un seguro cuyo pago $V(\omega)$ esta dado por $S_T(\omega) - K$. De igual forma una opción europea de compra tiene como pago al tiempo de ejercicio $(S_T(\omega) - K)^+ = \text{máx}\{S_T(\omega) - K, 0\}$.

Podemos notar que hemos introducido un espacio muestral sin ser definido explícitamente. Es necesario, pues, que aclaremos qué elementos son utilizados en los modelos financieros e ir sentando bases para el desarrollo posterior.

1.2. Características de un modelo financiero

El objetivo de esta tesis es revisar el modelo binomial para valuar un seguro derivado. Los modelos en tiempo continuo suelen ser más exactos con respecto a los resultados obtenidos, no obstante, la teoría necesaria para comprenderlos tiende a ser más sofisticada.

Por tal razón, nos limitaremos a hablar de modelos en tiempo discreto, comenzando con un modelo de solo un periodo, esto es, el valor del activo subyacente cambia de valor solo una vez en la vida del contrato. Un modelo que considere todos los instrumentos financieros que existen en el mercado sería demasiado complejo, por tanto, hay que definir cuales serán los elementos a considerar en el modelo preliminar. De acuerdo a nuestro objetivo, tales elementos son:

- Un activo con riesgo; por simplicidad asumiremos que es una acción, que denotaremos por S y cuyo valor en el tiempo t será denotado por S_t.
- Un seguro derivado cuyo valor al tiempo t será denotado por V_t.
- Un mercado de dinero en el cual es posible prestar y pedir prestado dinero a una tasa de interés constante r; a tal inversión se le llamará *inversión libre de riesgo*.
- Un espacio muestral Ω, que represente los posibles valores que puede tomar la acción S al final del periodo. Asumiremos que Ω consta de un número finito de elementos.

En un modelo con las características descritas anteriormente, cualquier estrategia posible puede ser descrita en términos de un portafolio X formado por una inversión libre de riesgo y una inversión con riesgo. La inversión libre de riesgo consiste de una cantidad C invertida en el mercado de dinero y la inversión con riesgo consiste en poseer Δ unidades de una acción S [2].

1.3. Valuación por arbitraje

Las opciones son seguros que las instituciones financieras brindan a sus clientes. Como se mencionó anteriormente, tales seguros ofrecen al portador la ventaja de decidir, en la fecha en que expira el contrato, si ejerce la opción o no. Como tal, debe tener un costo inicial, el cual debe ser "justo" para ambas partes, es decir, el precio debe ser suficiente para que la institución financiera haga frente a sus obligaciones cualquiera que sea el precio final del subyacente y no ser exagerado para el comprador. El problema de valuar una opción de compra europera fue resuelto en 1973, en el artículo publicado por Fisher Black y Myron Scholes *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. En tal artículo se asumen ciertas condiciones sobre el mercado (que serán mencionadas cuando construyamos el modelo binomial), sin embargo, hay una condición más, mencionada sutilmente al comienzo del artículo, que es responsable de poder hallar el valor justo de la opción: la ausencia de arbitraje. De manera informal, el arbitraje puede considerarse como una estrategia de negociación en la cual es posible generar una ganancia sin correr ningún riesgo. De manera más formal, tenemos la siguiente definición:

[2] Los valores de C y Δ pueden ser tanto positivos como negativos. En el caso de que C sea negativo, significa que se ha pedido prestado una cantidad C a una tasa de interés r. Que Δ sea negativo significa que se ha llevado a cabo una *venta en corto*. La venta en corto es pedir prestado a un inversionista una cierta cantidad de acciónes al tiempo inicial del periodo prometiendo devolvérsela al final del periodo (quedando de acuerdo en pagar una cierta prima, por ejemplo).

Definición 1.3.1. *Consideremos un modelo financiero de un periodo con las características descritas anteriormente. Diremos que existe una oportunidad de arbitraje si existe un portafolio P de valor 0 al tiempo 0 y cuyo pago al final del periodo es de $P_1(\omega) \geq 0$, para todo $\omega \in \Omega$, con al menos un ω tal que $P_1(\omega) > 0$ con probabilidad positiva.*

En general, decidir si un modelo es libre de arbitraje es una tarea difícil, sin embargo, en el capítulo 3 hallaremos una condición necesaria y suficiente para que un modelo que consta de N activos con riesgo sea libre de arbitraje. Para lograr esto, es necesario considerar la caracterización siguiente del arbitraje que aparece en [7] únicamente como ejercicio y por lo tanto la prueba que presentamos aquí es original.

Proposición 1.3.1. *Supongamos que tenemos un modelo de un periodo en el cual existen n activos con riesgo, los cuales denotaremos como $S^1, S^2 \ldots, S^n$ y un espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ con k estados posibles distintos. La tasa de interés libre de riesgo es denotada por r. Definamos la matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $(k+1) \times (2n+k)$ como sigue:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \delta^1(\omega_1) & -\delta^1(\omega_1) & \delta^2(\omega_1) & \cdots & -\delta^n(\omega_1) & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \delta^1(\omega_2) & -\delta^1(\omega_2) & \delta^2(\omega_2) & \cdots & -\delta^n(\omega_2) & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^1(\omega_k) & -\delta^1(\omega_k) & \delta^2(\omega_k) & \ldots & -\delta^n(\omega_k) & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}$$

Donde $\delta^i(\omega_j) = S_1^i(\omega_j) - (1+r)S_0^i$ y definamos el vector $\mathbf{b} = (1, 0, \ldots, 0)^t$ de $k+1$ componentes. Entonces el sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n+k} \tag{1.1}$$

tiene solución si y solo si existe una oportunidad de arbitraje.

Demostración. Supongamos que existe una oportunidad de arbitraje en un modelo de un periodo con n activos con riesgo, entonces en base a la definición 1.3.1 podemos afirmar que existe un vector $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ en donde cada Δ_i representa la posición que hemos tomado sobre el activo i-ésimo. Si tal cantidad es positiva significa que hemos comprado Δ_i unidades de tal activo con dinero prestado del mercado de dinero, sin embargo, si Δ_i es negativo significa que hemos llevado una venta en corto por Δ_i unidades del activo i y además hemos invertido lo obtenido en el mercado de dinero. Como podemos ver, tal portafolio tiene un valor inicial de $V_0 = 0$. Por definición, en cada estado posible ω_j el portafolio que representa Δ tendrá un valor $V_1(\omega_j) \geq 0$ y en al menos un estado se cumplirá $V_1(\omega_j) > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sum_{i=1}^k V_1(\omega_i) = 1$. Con esto, de la condición $V_1(\omega_j) \geq 0$ se sigue

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1\delta^1(\omega_1) + \Delta_2\delta^2(\omega_1) + \cdots + \Delta_n\delta^n(\omega_1) & = & V_1(\omega_1) \geq 0 \\ \Delta_1\delta^1(\omega_2) + \Delta_2\delta^2(\omega_2) + \cdots + \Delta_n\delta^n(\omega_2) & = & V_1(\omega_2) \geq 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ \Delta_1\delta^1(\omega_k) + \Delta_2\delta^2(\omega_k) + \cdots + \Delta_n\delta^n(\omega_k) & = & V_1(\omega_k) \geq 0. \end{array}$$

Por tanto si definimos $\mathbf{x}_{2i-1} = \Delta_i^1$ y $\mathbf{x}_{2i} = \Delta_i^2$, donde $\Delta_i = \Delta_i^1 - \Delta_i^2$, con $\Delta_i^1 \geq 0$ y $\Delta_i^2 \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$; y definimos $\mathbf{x}_{2n+i} = V(\omega_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene que $\mathbf{x}$ es solución de 1.1.

Recíprocamente, supongamos que el sistema 1.1 tiene una solución $\mathbf{x}$, entonces es posible formar el portafolio $\Delta = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4, \ldots, \mathbf{x}_{2n-1} - \mathbf{x}_{2n})$. Tal portafolio es tal que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\delta^1(\omega_1) + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)\delta^2(\omega_1) + \cdots + (\mathbf{x}_{2n-1} - \mathbf{x}_{2n})\delta^n(\omega_1) &= x_{2n+1} \geq 0 \\
(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\delta^1(\omega_2) + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)\delta^2(\omega_2) + \cdots + (\mathbf{x}_{2n-1} - \mathbf{x}_{2n})\delta^n(\omega_2) &= x_{2n+2} \geq 0 \\
\vdots &= \vdots \\
(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\delta^1(\omega_k) + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)\delta^2(\omega_k) + \cdots + (\mathbf{x}_{2n-1} - \mathbf{x}_{2n})\delta^n(\omega_k) &= x_{2n+k} \geq 0
\end{aligned}$$

Además, se tiene que $x_{2n+1} + x_{2n+2} + \cdots + x_{2n+k} = 1$, lo que implica que el portafolio Δ genera una oportunidad de arbitraje. □

Según Shreve en [8], Robert Merton, en su artículo *Theory of rational opcion pricing* fue el primero en considerar explícitamente la ausencia de arbitraje como un axioma para los modelos financieros, obteniendo así el método de valuación por arbitraje que será el utilizado en este trabajo. El arbitraje como hipótesis en un modelo financiero impone condiciones bajo las cuales es posible hallar el valor justo de algunos seguros derivados[3], como se muestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1.3.1. *Supongamos que tenemos un contrato forward F sobre una acción S que expira al tiempo T, donde la tasa de interés libre de riesgo es r. Entrar en un contrato forward no tiene costo alguno, el problema es, ¿Cuál debe ser el valor correcto para K, el precio de ejercicio?*

Suponiendo que nuestro modelo es libre de arbitraje, es posible hallar el valor justo para K en términos de la tasa de interés y del valor inicial de la acción S_0. Probaremos a continuación que el valor de K, con tal de que el mercado sea libre de arbitraje, debe ser

$$K = (1 + r)S_0. \tag{1.2}$$

Supongamos que $K < (1 + r)S_0$. Un comprador astuto seguiría la siguiente estrategia: Al inicio vendería en corto una unidad de acción por S_0 e invertiría tal capital en el mercado de dinero. Al final del periodo, su capital se incrementaría a $(1 + r)S_0$, suficiente para comprar la unidad de acción que debe entregar a un precio de K y generando una ganancia libre de riesgo de $(1 + r)S_0 - K$. Por tanto, $K \geq (1 + r)S_0$. Supongamos ahora que $K > (1 + r)S_0$, en este caso, el vendedor puede seguir la siguiente estrategia: Al inicio del periodo, pide prestado en el mercado de dinero S_0 y compra una unidad de acción. Al final del periodo su deuda se habrá incrementado a $(1 + r)S_0$, sin embargo, la acción que posee será vendida a un precio de K, generando nuevamente una ganancia libre de riesgo de $K - (1 + r)S_0$.

Hemos probado por medio de un argumento de arbitraje que 1.2 debe cumplirse. A tal valor de K suele llamársele *precio forward* del contrato.

[3] Aquellos que son *replicables*. A continuación se explica este concepto.

Notemos que la afirmación anterior solo depende de que la tasa de interés del mercado sea constante durante el periodo que dure el contrato, por tanto se sigue cumpliendo en un modelo de tiempo continuo.

En base al ejemplo anterior, la técnica que se utilizará para valuar un seguro derivado será la de *cubrir* la posición corta construyendo un portafolio que *replique* el valor del seguro, esto es, que sin importar el estado ω al tiempo de expiración el valor del portafolio sea el mismo que el valor del seguro. Un portafolio que replica un seguro derivado es llamado *portafolio replicante*.

En general, es posible probar el siguiente resultado.

Proposición 1.3.2. *Si no hay arbitraje en el mercado, cualquier portafolio construido al tiempo $t = 0$ que replica exactamente un seguro V al tiempo $t = T$ tiene el mismo valor que el seguro al tiempo $t = 0$.*

Demostración. Supongamos que tenemos un portafolio P tal que replica un seguro V al tiempo $t = T$. Si tuviésemos $P_0 < V_0$, entonces es posible seguir la siguiente estrategia: Al tiempo $t = 0$, vendemos el seguro V, obteniendo así una cantidad V_0 que utilizaremos para formar el portafolio P de valor P_0. Al tiempo $t = T$, sin importar que halla pasado, el portafolio que hemos formado será suficiente para cubrir nuestras obligaciones, pues $P_T = V_T$; y además habremos obtenido una ganancia inicial de $V_0 - P_0$ libre de riesgo. Supongamos ahora que $V_0 < P_0$. En este caso, es necesario construir lo opuesto a la estrategia anterior (por ejemplo, si en el portafolio P se tenían que comprar dos acciones, en este caso tendríamos que vender en corto dos acciones) obteniendo un capital de P_0, con el cual compraremos el seguro V con un valor V_0. Al final del periodo el seguro habrá hecho una cobertura perfecta y nosotros habremos obtenido desde el inicio una ganancia de $P_0 - V_0$. Por tanto, $P_0 = V_0$. □

Capítulo 2

El Modelo Binomial

El Modelo Binomial de valuación de opciones aparece por primera vez en 1979 en el artículo *"Option Pricing: A Simplified Approach"*, en el cual Cox, Ross y Rubinstein lo desarrollan con el objetivo de valuar una opción de compra europea en tiempo discreto utilizando herramientas más simples que las utilizadas en el modelo de Black-Scholes-Merton[1]. En lo que sigue, se hará una exposición de tal modelo de la manera más clara y completa posible, siguiendo el desarrollo de Shreve en [8], valuando primero un seguro derivado cualesquiera para posteriormente considerar el caso especial de una opción de compra europea.

2.1. Modelo Binomial de un periodo

Comencemos con un modelo de un solo periodo. La extensión a varios periodos se sigue de forma natural. En base al modelo preliminar construido en el capítulo anterior, los elementos que van a formar parte del modelo binomial son los siguientes:

- Una acción cuyo valor al tiempo t será denotado por S_t. Supondremos siempre que $S_t > 0$ para todo t.
- Un seguro derivado cuyo valor al tiempo t será denotado por V_t.
- Un mercado de dinero o sistema bancario en el cual es posible prestar y pedir prestado dinero a una tasa de interés constante r, donde $r > 0$.
- Un espacio muestral Ω de dos elementos, que representa el hecho de que el activo S_0 puede tomar dos valores posibles al final del periodo.

También es necesario especificar las condiciones del mercado sobre el cual trabajaremos, las cuales son:

[1] Tal modelo es mayormente conocido como modelo de Black-Scholes, sin embargo, como menciona Shreve, las contribuciones que hizo Robert Merton a la teoría financiera son tan importantes que merece ser mencionado en tal modelo.

1. Las unidades de acción pueden ser subdivididas para su compra o venta.
2. En cualquier momento el precio de compra de la acción es el mismo que el precio de venta.
3. La acción no paga dividendos.
4. No existen costos de transacción.
5. No existen cuotas para la venta en corto.

Las condiciones anteriores son también asumidas en el modelo de Black-Scholes-Merton, la diferencia entre ambos modelos recae en el hecho de que en este modelo la acción solo puede tomar dos posibles valores y en el de Black-Scholes-Merton se asume que la acción sigue un movimiento geométrico Browniano. La condición 1 tiene razón de ser, pues en la práctica se comercializan opciones en grandes cantidades. El caso de una opción que paga dividendos será tratado más adelante. Como hemos mencionado, Ω consta de solo dos elementos, esto es, al final del periodo el valor de la acción podrá tomar dos posibles valores. Notemos que el espacio muestral Ω que estamos considerando coincide con el del experimento aleatorio de lanzar una moneda, por tanto tendremos que $\Omega = \{H, T\}$. Asi, los posibles valores de la acción al tiempo uno serán denotados como $S_1(H)$ y $S_1(T)$. También consideraremos las probabilidades que tiene un inversionista sobre los posibles valores que puede tomar la acción, así pues $\mathbf{p}$ denotará la probabilidad de que el lanzamiento de la moneda resulte H y $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$ de que resulte T. Tales valores serán conocidos como probabilidades reales. Si S_0 representa el valor de la acción al tiempo inicial, definiremos los escalares u, d de la siguiente forma:

$$u = \frac{S_1(H)}{S_0} \quad d = \frac{S_1(T)}{S_0}. \tag{2.1}$$

La constante u será llamada **factor de alza** y d **factor de baja**, de este modo tendremos $S_1(H) = uS_0$ y $S_1(T) = dS_0$. Siempre supondremos que $S_0 > 0$. Asumiremos también que $d < u$.

Los escalares u y d deben cumplir la condición $0 < d < 1 + r < u$ con tal de evitar el arbitraje en el modelo. Lo anterior se resume en el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. *Consideremos un modelo binomial de un periodo. El modelo es libre de arbitraje si y solo si*

$$0 < d < 1 + r < u. \tag{2.2}$$

Demostración. El valor de d es distinto de cero, pues $S_1 \neq 0$ y $S_0 \neq 0$. Primero supongamos que $d \geq 1 + r$. En este caso, seguiremos la siguiente estrategia: Al tiempo cero pedimos prestado en el mercado de dinero S_0 y compramos una acción, tal portafolio tiene un valor de 0. Al final del periodo, la acción tendrá un valor de $S_1 \geq dS_0 \geq (1 + r)S_0$, con lo que podremos pagar nuestra deuda y aún así obtener un beneficio de $S_1 - (1 + r)S_0 \geq 0$, lo que es una oportunidad de arbitraje. Por tanto debe cumplirse $d < 1 + r$. Supongamos ahora que $u \leq 1 + r$. Lo que haremos en este caso será vender en corto una acción al tiempo cero por S_0 e invertir tal cantidad en el mercado. Al final del periodo, el valor de la acción será $S_1 \leq uS_0 \leq (1 + r)S_0$, por lo que el dinero invertido nos servirá para comprar y reponer el activo y además obtener un beneficio de $(1 + r)S_0 - S_1$, lo cual nuevamente es una oportunidad de arbitraje.

Recíprocamente, supongamos que se cumple 2.2 y que H y T tienen una probabilidad positiva de ocurrir. Probemos ahora que el modelo es libre de arbitraje en vista de la definición 1.3.1, es decir, que todo portafolio que inicie con un capital inicial de $X_0 = 0$ no puede tener un valor positivo al tiempo uno con probabilidad positiva a menos que ese valor sea también negativo con probabilidad positiva. Cualquier portafolio formado al tiempo cero por Δ unidades de acción e invirtiendo el resto del capital en el mercado de dinero está gobernado por la ecuación

$$X_1 = \Delta S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta S_0)$$

Dado que $X_0 = 0$, en realidad tenemos

$$X_1 = \Delta(S_1 - (1 + r)S_0).$$

Si $\Delta > 0$ significa que hemos pedido prestado al mercado de dinero, si $\Delta < 0$ hemos llevado a cabo una venta en corto. El portafolio en que $\Delta = 0$ no genera ninguna oportunidad de arbitraje. Supongamos que $\Delta > 0$. Con probabilidad positiva ocurrirá H, esto es, con probabilidad positiva tendremos un portafolio con valor al tiempo uno de

$$X_1 = \Delta(S_1(H) - (1 + r)S_0) = \Delta(uS_0 - (1 + r)S_0),$$

de la ecuación 2.2 se sigue que si $1 + r < u$ entonces $S_0(1 + r) < uS_0$. Por tanto $X_1 > 0$ con probabilidad positiva. Pero como T también ocurre con probabilidad positiva, se tiene

$$X_1 = \Delta(S_1(T) - (1 + r)S_0) = \Delta(dS_0 - (1 + r)S_0),$$

de donde $X_1 < 0$ también con probabilidad positiva. Por tanto, si $\Delta > 0$ cualquier portafolio con $X_0 = 0$ no genera una oportunidad de arbitraje. El caso $\Delta < 0$ es análogo. □

A partir de ahora asumiremos que el modelo es libre de arbitraje. Lo que sigue es construir la estrategia que nos ayudará a valuar el seguro derivado. La técnica será cubrir la posición corta sobre el seguro V construyendo un portafolio que lo replique al tiempo $t = 1$. Por la hipótesis de ausencia de arbitraje esto nos dará como resultado que el valor inicial del portafolio debe ser el valor al tiempo $t = 0$ del seguro.

Consideremos un modelo binomial de un periodo y supongamos que hemos tomado la posición corta de un seguro derivado V. El capital que hemos recibido por la venta del seguro ha sido la cantidad X_0. Ahora, con él trataremos de cubrir nuestra posición formando un portafolio que consista de Δ_0 unidades de acción S e invirtiendo el resto $X_0 - \Delta_0 S_0$ en el mercado de dinero[2]. Tal portafolio, al tiempo $t = 1$ tendrá un valor de

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0), \tag{2.3}$$

[2]Si tal cantidad es negativa estaremos hablando de un préstamo.

como estamos asumiendo que al tiempo uno nuestro espacio muestral consta de dos elementos, la ecuación anterior da lugar a dos ecuaciones distintas

$$\begin{aligned} X_1(H) &= \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0), \\ X_1(T) &= \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en donde los valores de S al tiempo uno son conocidos: $S_1(H) = uS_0$ y $S_1(T) = dS_0$; es cierto que $X_1(H)$ y $X_1(T)$ son desconocidos al tiempo $t = 1$, sin embargo si queremos que nuestro portafolio replique el seguro, entonces tales valores deben igualar los del seguro al tiempo $t = 1$, que sí son conocidos (por ejemplo, en el caso de una opción de compra europera tales valores son $V_1(H) = S_1(H) - K = uS_0 - K$ y $V_1(T) = 0$). Por tanto, las ecuaciones ahora se convierten en las siguientes

$$\begin{aligned} V_1(H) &= \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0), \\ V_1(T) &= \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0), \end{aligned}$$

en donde solamente hay dos incógnitas: Δ_0 y X_0. Resolviendo el sistema anterior, tenemos

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} \quad \text{y} \quad X_0 = \frac{V_1(H)}{1+r} - \Delta_0 \left(\frac{S_1(H)}{1+r} - S_0 \right). \tag{2.5}$$

Sustituyendo los valores de $S_1(H), S_1(T)$ y Δ_0 en X_0 se tiene

$$X_0 = \frac{1}{1+r} \left[\left(1 + \frac{1+r-u}{u-d} \right) V_1(H) + \left(\frac{u-(1+r)}{u-d} \right) V_1(T) \right].$$

Definiendo los escalares $\tilde{\mathbf{p}} = \dfrac{1+r-d}{u-d}$ y $\tilde{\mathbf{q}} = \dfrac{u-(1+r)}{u-d} = 1 - \tilde{\mathbf{p}}$ tenemos de manera más compacta

$$X_0 = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{\mathbf{p}} V_1(H) + \tilde{\mathbf{q}} V_1(T) \right].$$

En el capítulo anterior probamos que la ausencia de arbitraje es una condición suficiente para que el valor de un seguro sea el mismo que el de un portafolio que replique su valor, por tanto concluimos que

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{\mathbf{p}} V_1(H) + \tilde{\mathbf{q}} V_1(T) \right]. \tag{2.6}$$

Observación 2.1.1. Si consideramos el caso de una opción de compra europea, los valores posibles de la opción al final del periodo son

$$V_1(H) = (uS_0 - K)^+ \quad \text{y} \quad V_1(T) = (dS_0 - K)^+,$$

con lo que la ecuación 2.6 se convierte en

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{\mathbf{p}} (uS_0 - K)^+ + \tilde{\mathbf{q}} (dS_0 - K)^+ \right]. \tag{2.7}$$

Lo interesante de la ecuación 2.6 es que no aparecen las probabilidades $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en la fórmula, lo que nos dice que aunque varios inversionistas difieran en sus estimaciones de las probabilidades de los movimientos a la alza y a la baja, todos estarán de acuerdo con el precio del seguro. Gracias al resultado 2.1.1 podemos comprobar que los valores de $\tilde{\mathbf{p}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ están 0 y 1 y además cumplen $\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}} = 1$, por lo que es posible considerarlos como probabilidades, a las que llamaremos *probabilidades libres de riesgo*. Además el valor del seguro puede considerarse como un valor esperado bajo esta medida de probabilidad. En el capítulo siguiente se hará un desarrollo más formal utilizando teoría de probabilidad. A continuación mostraremos algunos ejemplos donde es posible aplicar la fórmula anterior para diferentes tipos de seguros.

Ejemplo 2.1.1 (Opción de compra europea)**.** *Un inversionista desea comprar una opción que le de el derecho y no la obligación de comprar una acción S dentro de un mes a un precio de ejercicio $K = 150$. El precio actual de la opción es $S_0 = 100$ y la tasa libre de riesgo es $r = 0.25$. El inversionista espera que el valor de la acción de aquí a un mes suba a $S_1 = 200$ con probabilidad $\boldsymbol{p} = 0.80$ o que disminuya a $S_1 = 50$ con probabilidad $\boldsymbol{q} = 0.20$ y decide pagar 40 por la opción. El razonamiento del inversionista es el siguiente: Si el valor de la opción al final del periodo es $(S_1 - K)^+$, entonces su valor debe ser*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(S_1 - K)^+\right] &= \boldsymbol{p}(S_1 - K) + \boldsymbol{q} \cdot 0 \\ &= .80 \cdot 50 \\ &= 40.\end{aligned}$$

Es necesario determinar si el inversionista tomó una buena decisión.

En base al desarrollo anterior estamos en posición de decir que el inversionista tomó una mala decisión, pues tal precio produce un arbitraje por parte del vendedor. El vendedor al inicio del periodo puede adquirir $\frac{2}{5}$ unidades de acción con los 40 que acaba de recibir. Al final del periodo, si $S_1 = 200$, el capital del vendedor será $\frac{2}{5}200 = 80$, pero como aún tiene que cubrir sus obligaciones con el comprador, su capital final queda como $80 - 50 = 30$. Si, por el contrario, $S_1 = 50$, entonces el comprador no ejerce la opción y por tanto el capital del comprador será de $\frac{2}{5}50 = 20$. En cualquier caso, el vendedor siempre obtiene una ganancia libre de riesgo.

Calculando los valores de $\tilde{\mathbf{p}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ tenemos que

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1.25 - 0.50}{1.50} = 0.50 \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{2 - 1.25}{1.5} = 0.50$$

y aplicando la fórmula 2.6 se tiene que

$$V_0 = \frac{0.50 \cdot 50 + 0.50 \cdot 0}{1.25} = 20.$$

Por tanto, el valor justo de la opción(con el que no es posible generar una oportunidad de arbitraje) debe ser $V_0 = 20$. En efecto, el vendedor puede seguir la siguiente estrategia con tal de cubrir su posición: Al vender la opción obtiene un capital de 20, que utiliza para comprar una cantidad

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{50 - 0}{200 - 50} = \frac{1}{3}$$

de acciones. Como el capital que posee no le alcanza para comprar $\frac{1}{3}$ de acción pide prestado $\frac{100}{3} - 20$ a una tasa de interés r. Al final del periodo, si el valor de la acción es de $S_1 = 200$, entonces el capital del vendedor será

$$\frac{200}{3} - 1.25\left(\frac{100}{3} - 20\right) = \frac{200}{3} - \frac{125}{3} + 25 = 50,$$

capital suficiente para cumplir su obligación con el comprador. En caso de que $S_1 = 50$ claramente el comprador no ejerce la opción, además el capital del comprador en este caso es de

$$\frac{50}{3} - 1.25\left(\frac{100}{3} - 20\right) = 0;$$

es decir, en cualquier caso, el vendedor ni gana ni pierde.

Hay que notar que aún cuando el ejemplo anterior nos muestra una aplicación de la fórmula al valuar una opción, el desarrollo que hemos hecho no se limita a valuar solo opciones, sino cualquier seguro derivado cuyo pago dependa del valor de la acción. El siguiente ejemplo nos muestra como el modelo binomial nos puede ayudar a resolver el problema del contrato forward considerado en el ejemplo 1.3.1.

Ejemplo 2.1.2 (Contrato Forward)**.** *Consideremos un modelo Binomial de un periodo y supongamos que hemos asumido la posición larga de un contrato forward sobre la acción. ¿cual debe ser el valor del contrato forward?*

Como el pago de un contrato forward al final del periodo es $F_1 = S_1 - K$, la fórmula 2.6 nos dice que el valor del contrato forward al inicio del periodo es

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}F_1(H) + \tilde{\mathbf{q}}F_1(T)\right],\\
F_0 &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}(uS_0 - K) + \tilde{\mathbf{q}}(dS_0 - K)\right],\\
F_0 &= \frac{S_0(\tilde{\mathbf{p}}u + \tilde{\mathbf{q}}d)}{1+r} - \frac{K}{1+r},\\
F_0 &= S_0 - \frac{K}{1+r}.
\end{aligned}$$

Esta última ecuación es la que debe cumplirse con tal que el precio de un contrato forward no genere arbitraje alguno. En el caso en que $F_0 = 0$ se tiene $K = (1+r)S_0$, como se había obtenido en el ejemplo 1.3.1.

El valor de un seguro puede ser hallado desde otro enfoque: cubriendo la posición larga. Consideremos el siguiente ejemplo extraído de [8]:

Ejemplo 2.1.3. *Supongamos que un inversionista tiene una posición larga sobre una opción europea escrita sobre una acción que evoluciona de acuerdo a la figura 2.1:*

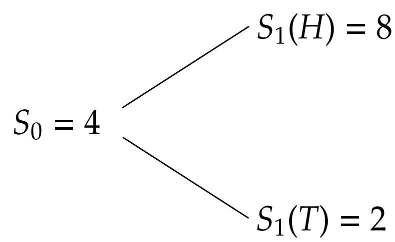


Figura 2.1: Evolución del activo del ejemplo

La opción call expira al tiempo $t = 1$ y tiene un precio de ejercicio $K = 5$. La tasa de interés libre de riesgo es $r = .25$. El inversionista desea recuperar su capital más el interés tal como si hubiera hecho una inversión segura sin invertir más dinero y sin importar el estado al tiempo $t = 1$ negociando en el mercado.

Para negociar en el mercado formaremos un portafolio que incluirá nuestra opción y Δ_0' unidades de acción que compraremos con dinero que pediremos prestado en el mercado a la tasa de interés $r = .25$. Como queremos que nuestro portafolio replique nuestro pago al tiempo $t = 1$, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$1.25(Y_0 + 4\Delta_0') = 8\Delta_0' + 3,$$
$$1.25(Y_0 + 4\Delta_0') = 2\Delta_0'.$$

Donde Y_0 denota el capital que hemos pagado por la opción. Resolviendo el sistema anterior tenemos

$$\Delta_0' = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad Y_0 = 1.20,$$

que podemos interpretar como sigue: Al inicio del periodo vendemos en corto $\frac{1}{2}$ de acción y el pago que obtengamos por tal transacción será invertido en el mercado de dinero. Al tiempo uno, nuestro portafolio tendrá un valor dependiente del lanzamiento de la moneda. Si $\omega = H$, este valor será:

$$3 + (1.25)\frac{1}{2} \cdot 4 - 8 \cdot \frac{1}{2} = 1.5.$$

La ecuación anterior quiere decir lo siguiente: al tiempo $t = 1$, si $\omega = H$, entonces nuestra opción tendrá un pago de 3, además el dinero que invertimos en el mercado valdrá $(1.25)\frac{1}{2} \cdot 4 = 2.25$ y la obligación que tenemos de devolver las unidades de acción que pedimos prestadas para la venta en corto nos costará $8\frac{1}{2}$. Al final del periodo, nuestro capital será 1.5, la cantidad que tendríamos si hubiésemos invertido el costo de la opción en el mercado de dinero.

Ahora, si $\omega = T$ al tiempo $t = 1$ nuestro capital será

$$0 + (1.25)\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.5.$$

Esto nos indica que si el valor de la acción es de $S(T) = 2$, la opción no tendrá ningún valor, la cantidad que invertimos en el mercado valdrá nuevamente 2.25 y nuestra obligación de devolver $\frac{1}{2}$ de acción costará 1, dejándonos con un capital de 1.5.

De manera general, si queremos cubrir la posición larga sobre un seguro V debemos seguir la siguiente estrategia: Supongamos que hemos pagado Y_0 por el seguro, ahora es necesario comprar una cantidad Δ_0' de acciones con dinero que pediremos prestado al mercado de dinero. La tasa de interés en el mercado es de r. Al tiempo uno, nuestro portafolio que consistirá de Δ_0' acciones y del seguro debe replicar el valor que necesitamos para liquidar nuestras deudas y además recuperar el dinero invertido sobre el seguro más los intereses (como si en lugar de haber comprado el seguro, hubiésemos realizado una inversión libre de riesgo). Por todo lo anterior, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}(1 + r)(Y_0 + \Delta_0' S_0) &= \Delta_0' S_1(H) + V_1(H),\\ (1 + r)(Y_0 + \Delta_0' S_0) &= \Delta_0' S_1(T) + V_1(T).\end{aligned}$$

Que arreglándolo de forma conveniente queda como

$$\begin{aligned}V_1(H) &= -\Delta_0' S_1(H) + (1 + r)(Y_0 + \Delta_0' S_0),\\ V_1(T) &= -\Delta_0' S_1(T) + (1 + r)(Y_0 + \Delta_0' S_0).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Notemos que el sistema 2.8 es similar a 2.4. Por tanto, la solución de 2.8 es

$$Y_0 = X_0 \quad \text{y} \quad \Delta_0' = -\Delta_0.$$

De aquí podemos ver que el valor del seguro es el mismo hallado por ambos métodos y que la estrategia a seguir por el comprador del seguro es la estrategia contraria del vendedor (si el vendedor tiene que comprar cierta cantidad de accciones, el vendedor debe vender en corto la misma cantidad de acciones). Analicemos un poco la estrategia tomada por cada parte: El vendedor del seguro comienza con ningún capital, después de vender el seguro, el pago recibido debe ser suficiente para poder cubrir cualquier movimiento posible del mercado y quedar con ningún capital al tiempo $t = 1$, como si no hubiese pasado nada. El comprador intenta hacer exactamente lo mismo, después de comprar el seguro, debe negociar para que al final del periodo cuente con el capital que tenía inicialmente más los intereses que habría generado una inversión libre de riesgo.

2.2. Modelo Binomial de dos periodos

El modelo presentado anteriormente puede ser extendido a dos o más periodos sin mayor dificultad, la clave radica en que cada periodo se compone de varios modelos de un solo periodo. Consideremos primero a manera de ejemplo un modelo Binomial de 2 periodos. Nuevamente cubriremos la posición corta. Si ahora denotamos por Δ_0 el número de acciones adquiridas al inicio, entonces al tiempo uno tendremos:

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$

Al tiempo uno, el vendedor sabe cual es el valor de S_1 (el lanzamiento de la moneda) y por tanto puede decidir reajustar su portafolio, adquiriendo ahora Δ_1 acciones e invirtiendo el resto en el mercado de dinero (o pidiendo prestado, si es necesario), por lo que su capital al tiempo dos será representado por la ecuación

$$X_2 = \Delta_1 S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 S_1).$$

Como queremos que el portafolio replique el seguro V, será necesario que $V_2 = X_2$, donde los valores de V_2 son conocidos. Por tanto, obtenemos el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

$$V_2(HH) = \Delta_1(H)S_2(HH) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H)S_1(H)), \tag{2.9}$$
$$V_2(HT) = \Delta_1(H)S_2(HT) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H)S_1(H)), \tag{2.10}$$
$$V_2(TH) = \Delta_1(T)S_2(TH) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)), \tag{2.11}$$
$$V_2(TT) = \Delta_1(T)S_2(TT) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)); \tag{2.12}$$

y también

$$X_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0), \tag{2.13}$$
$$X_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0), \tag{2.14}$$

en las incógnitas $\Delta_0, \Delta_1(H), \Delta_1(T), X_0, X_1(H), X_1(T)$. Ahora, como hemos elegido $V_2 = X_2$, la hipótesis de arbitraje implica que $V_0 = X_0$, más aún, debe cumplirse que $V_1 = X_1$, pues el portafolio se ha construido de tal forma que replique el seguro en cualquier periodo. El sistema anterior lo resolveremos recursivamente de adelante hacia atrás, tal como lo indica la figura 2.2, donde podemos verificar que el modelo de dos periodos se compone de tres modelos de un solo periodo. Resolvemos primero el sistema formado por las ecuaciones 2.9 y 2.10 de la misma forma que resolvimos el sistema 2.4. Así obtenemos

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)}, \tag{2.15}$$
$$V_1(H) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}} V_2(HH) + \tilde{\mathbf{q}} V_2(HT)\right]. \tag{2.16}$$

De manera similar, si ahora tomamos las ecuaciones 2.11 y 2.12 obtendremos

$$\Delta_1(T) = \frac{V_2(TH) - V_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(TT)} \tag{2.17}$$
$$V_1(T) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}} V_2(TH) + \tilde{\mathbf{q}} V_2(TT)\right] \tag{2.18}$$

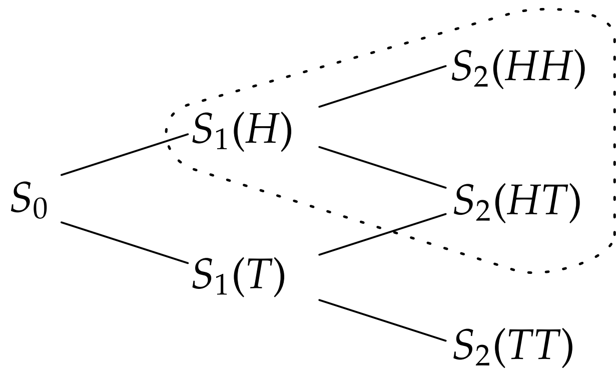


Figura 2.2: Modelo Binomial de dos periodos

Sustituyendo los valores de $V_1(H)$ y $V_1(T)$ en las ecuaciones 2.13 y 2.14 y resolviendo como el sistema 2.4 obtendremos de nuevo las ecuaciones

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} \quad \text{y} \quad V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}V_1(H) + \tilde{\mathbf{q}}V_1(T)\right]. \tag{2.19}$$

Observación 2.2.1. En el caso de una opción de compra europea, es posible escribir el valor de tal seguro al tiempo cero de forma no recursiva como se muestra a continuación. Al final del segundo periodo sabemos que:

$$V_2(HH) = (u^2S_0 - K)^+, \; V_2(HT) = (udS_0 - K)^+, \; V_2(TH) = (udS_0 - K)^+, \; V_2(TT) = (d^2S_0 - K)^+,$$

sustituyendo estos valores en la ecuación 2.19 tenemos

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}V_1(H) + \tilde{\mathbf{q}}V_1(T)\right] \\
&= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}\left[\frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}V_2(HH) + \tilde{\mathbf{q}}V_2(HT)\right]\right] + \tilde{\mathbf{q}}\left[\frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}V_2(TH) + \tilde{\mathbf{q}}V_2(TT)\right]\right]\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\left[\tilde{\mathbf{p}}^2V_2(HH) + \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}V_2(HT) + \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}V_2(TH) + \tilde{\mathbf{q}}^2V_2(TT)\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\left[\tilde{\mathbf{p}}^2(u^2S_0 - K)^+ + 2\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}(udS_0 - K)^+ + \tilde{\mathbf{q}}^2(d^2S_0 - K)^+\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{2-k}(u^kd^{2-k}S_0 - K)^+.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Esta forma no recursiva es la que aparece en el artículo [4] de Cox *et al*. Más adelante obtendremos nuevamente para el caso de una opción de compra europea el valor de la opción al tiempo cero de manera no recursiva.

Ejemplo 2.2.1. Supongamos que tenemos un Modelo Binomial de dos periodos y queremos hallar el valor de una opción de compra europea sobre un activo subyacente de precio inicial $S_0 = 4$, con precio de ejercicio $K = 5$ y $u = 2$, $d = 0.5$ cuya evolución se describe en la figura 2.3. Supondremos que $r = .25$.

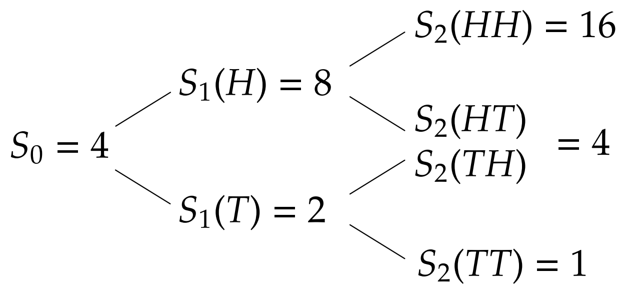


Figura 2.3: Evolución del precio del activo del ejemplo 2.2.1

En este caso las probabilidades libres de riesgo están dadas como sigue:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1.25 - .50}{1.50} = 0.50 \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{2 - 1.25}{1.5} = 0.50.$$

Además, es posible calcular el valor de la opción al final del segundo periodo, pues será igual a $(S_2 - K)^+$, donde S_2 es el valor posible de la acción al tiempo 2:

$$V_2(HH) = (S_2(HH) - 5)^+ = 11 \quad V_2(HT) = (S_2(HT) - 5)^+ = 0,$$
$$V_2(TH) = (S_2(TH) - 5)^+ = 0 \quad V_2(TT) = (S_2(HT) - 5)^+ = 0.$$

De las fórmulas 2.15 y 2.16 se obtiene

$$\Delta_1(H) = \frac{11}{12} = 0.916 \text{ y } V_1(H) = \frac{11}{2.5} = 4.4,$$

y de 2.17 y 2.18

$$\Delta_1(T) = 0 \text{ y } V_1(T) = 0.$$

Aplicando ahora los resultados 2.19 se sigue

$$\Delta_0 = \frac{4.4}{6} = 0.73 \quad \text{y} \quad V_0 = \frac{4.4}{2.5} = 1.76.$$

Esto es, el número de acciones que debe tener la posición corta al tiempo cero con tal de replicar el seguro es $\Delta_0 = 0.73$ unidades. Al siguiente periodo, si la acción sube de precio, entonces la posición corta debe reajustar su posición y esta vez debe adquirir $\Delta_1(H) = 0.916$ unidades de acción. Si por el contrario, el precio de la acción disminuye, la nueva posición del vendedor será no adquirir ninguna unidad de acción.

$$
\begin{tikzcd}
 & & V_2(HH) = 11 \\
 & V_1(H) = 4.4 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
V_0 = 1.76 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \begin{matrix} V_2(HT) \\ V_2(TH) \end{matrix} = 0 \\
 & V_1(T) = 0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & V_2(TT) = 0
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.4: Valor de la opción del ejemplo 2.2.1

Ejemplo 2.2.2 (Opción de compra asiática)**.** Consideremos un modelo de dos periodos en el cual $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ y la tasa de interés libre de riesgo es $r = 0.25$. Para $n = 0, 1, 2$ definimos $Y_n = \sum_{i=0}^{n} S_i$, la suma acumulada de precios al tiempo n. Consideremos una opción asiática de compra, cuyo valor al final del segundo periodo está basado en el precio promedio del activo y está dado como sigue:

$$V_2 = \left(\frac{Y_2}{3} - K\right)^+ .$$

En nuestro caso, $K = 4$. Podemos notar el parecido entre las opciones asiáticas y las europeas. La figura 2.5 nos muestra el comportamiento del valor del activo y del proceso $\{Y_n\}$. En este caso, el valor de la opción al final del segundo periodo es:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \begin{matrix} S_2(HH) = 16 \\ Y_2(HH) = 28 \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} S_1(H) = 8 \\ Y_1(H) = 12 \end{matrix} \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & \begin{matrix} S_2(HT) = 4 \\ Y_2(HT) = 16 \end{matrix} \\
\begin{matrix} S_0 = 4 \\ Y_0 = 4 \end{matrix} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \begin{matrix} S_1(T) = 2 \\ Y_1(T) = 6 \end{matrix} \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & \begin{matrix} S_2(TH) = 4 \\ Y_2(TH) = 10 \end{matrix} \\
 & & \begin{matrix} S_2(TT) = 1 \\ Y_2(TT) = 7 \end{matrix}
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.5: Evolución del activo y el proceso $\{Y_n\}$.

$$
\begin{aligned}
V_2(HH) &= \left(\frac{28}{3} - 4\right)^+ &= 5.33\\
V_2(HT) &= \left(\frac{16}{3} - 4\right)^+ &= 1.33\\
V_2(TH) &= \left(\frac{10}{3} - 4\right)^+ &= 0\\
V_2(TT) &= \left(\frac{7}{3} - 4\right)^+ &= 0
\end{aligned}
$$

Aplicando ahora las fórmulas 2.16 y 2.18 y obteniendo los valores $\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{q}} = 0.5$ tenemos

$$
\begin{aligned}
V_1(H) &= \frac{1}{1.25}\left[\frac{5.33}{2} + \frac{1.33}{2}\right] &= 2.664\\
V_1(T) &= \frac{1}{1.25}\left[\frac{0}{2} + \frac{0}{2}\right] &= 0.
\end{aligned}
$$

De la fórmula 2.19 obtenemos finalmente que el valor inicial de la opción asiática es

$$
V_0 = \frac{1}{1.25}\left[\frac{2.664}{2} + \frac{0}{2}\right] = 1.0656.
$$

2.3. Modelo Binomial de N periodos

El procedimiento para valuar un seguro en este escenario es una generalización del desarrollo anterior. Al inicio, el vendedor del seguro obtiene una cantidad X_0 como pago del mismo y a lo largo del modelo su capital está caracterizado por la siguiente ecuación:

$$
X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n - \Delta_n S_n). \tag{2.21}
$$

Cabe destacar que, sin mencionarlo, hemos asumido que el capital con el que cuenta la posición corta en todo el modelo no se ve afectado por algún ingreso externo (o egreso), es decir, con el capital inicial la posición corta debe replicar el seguro V en cada momento del periodo. A este tipo de portafolio se le denomina autofinanciable. Como el valor del seguro es conocido al tiempo N, es posible calcular los valores de $V_{N-2}, \ldots, V_0$ recursivamente. Conforme pasa el tiempo, el vendedor puede reajustar su portafolio y así ir replicando el seguro, eligiendo de manera conveniente el valor de los Δ_n. La posición Δ_n es un plan de contingencia para replicar el valor del seguro. Si hacemos todo el procedimiento anterior, estaremos asegurando que el valor final de nuestro portafolio al tiempo N será suficiente para hacer frente a las obligaciones que tenemos con el seguro, pues lo habremos replicado, obteniendo asi $X_N = V_N$, sin importar los valores que hallan resultado del lanzamiento de la moneda. Lo anterior se resume en el siguiente resultado debido a Shreve [8]:

Teorema 2.3.1 (Replicación en el Modelo Binomial de N periodos). *Consideremos un modelo binomial de N periodos libre de arbitraje. Denotemos por V_N el valor de un seguro derivado al tiempo N que depende de los N lanzamientos $\omega_1 \cdots \omega_N$ de una moneda. Definamos el valor de V_n para $n = N-1, N-2, \ldots, 0$ como*

$$V_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\boldsymbol{p}} V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) + \tilde{\boldsymbol{q}} V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)\right], \tag{2.22}$$

donde $\tilde{\mathbf{p}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ denotan las probabilidades libres de riesgo definidas anteriormente y definamos también Δ_n para $n = N-1, N-2, \cdots, 0$ como

$$\Delta_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)}. \tag{2.23}$$

Si suponemos que nuestro capital inicial X_0 ha sido el pago al tiempo cero del seguro V, esto es, $X_0 = V_0$ y además nuestro capital al tiempo n, X_n, se rige por la ecuación 2.21, entonces

$$X_N(\omega_1 \cdots \omega_N) = V_N(\omega_1 \cdots \omega_N) \quad \forall \quad \omega_1 \cdots \omega_N.$$

Demostración. La prueba la haremos por inducción sobre n, es decir, probaremos que para n entre 0 y N se cumple

$$X_N(\omega_1 \cdots \omega_n) = V_N(\omega_1 \cdots \omega_n) \quad \forall \quad \omega_1 \cdots \omega_n.$$

El caso $n = 0$ se obtiene por definición y el caso $n = 1$ lo hemos probado en la sección 2.2. Supongamos ahora que el resultado se cumple para $n < N$ y probemos para $n+1$. Sea $\omega_1 \cdots \omega_n$ un elemento arbitrario en nuestro espacio muestral. El resultado del siguiente lanzamiento puede ser H ó T, supongamos primero que $\omega_{n+1} = H$. Por la ecuación 2.21 se sigue que el valor de nuestro portafolio al tiempo $n+1$ será

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) = {} & \Delta_n(\omega_1 \cdots \omega_n) S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) \\ & + (1+r)\left(X_n(\omega_1 \cdots \omega_n) - \Delta_n(\omega_1 \cdots \omega_n) S_n(\omega_1 \cdots \omega_n)\right). \end{aligned}$$

Con tal de simplificar la notación, a partir de ahora omitiremos $\omega_1 \cdots \omega_n$, con lo que la ecuación anterior nos queda como

$$X_{n+1}(H) = \Delta_n S_{n+1}(H) + (1+r)\left(X_n - \Delta_n S_n\right). \tag{2.24}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)} \quad \text{y} \quad X_n = V_n,$$

sustituyendo estos valores en 2.24 tenemos que

$$X_{n+1}(H) = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)}(S_{n+1}(H) - (1+r)S_n) + (1+r)V_n,$$

sustituyendo el valor de V_n por el de la ecuación 2.22 obtenemos que

$$X_{n+1}(H) = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)}(S_{n+1}(H) - (1+r)S_n) + \tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(H) + \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(T).$$

Además, por hipótesis $S_{n+1}(H) = uS_n$ y $S_{n+1}(T) = dS_n$, con esto, la fórmula anterior nos queda

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(H) &= \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}((u-(1+r))S_n) + \tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(H) + \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(T) \\
&= \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(H) - \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(T) + \tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(H) + \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(T) \\
&= \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(H) + \tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(H) \\
&= V_{n+1}(H).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_{n+1}H) = V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_{n+1}H)$. De igual forma, si $\omega_{n+1} = T$ tenemos

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(T) &= \Delta_n S_{n+1}(T) + (1+r)\,(X_n - \Delta_n S_n) \\
&= \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)}(S_{n+1}(T) - (1+r)S_n) + (1+r)V_n \\
&= \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}(dS_n - (1+r)S_n) + \tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(H) + \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(T) \\
&= -\tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(H) + \tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(T) + \tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(H) + \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(T) \\
&= \tilde{\mathbf{p}}V_{n+1}(T) + \tilde{\mathbf{q}}V_{n+1}(T) \\
&= V_{n+1}(T).
\end{aligned}$$

Del desarrollo anterior se sigue que $X_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = V_n(\omega_1 \cdots \omega_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N.$ □

2.4. Una observación sobre el Modelo Binomial

En el caso de una opción de compra europea, es posible hallar una fórmula de su valor en el modelo binomial de N periodos tal como aparece en [4], donde se establece de forma no recursiva. Tal fórmula se desprende de las observaciones 2.1.1 y 2.2.1.

Proposición 2.4.1. *Supongamos que tenemos un Modelo Binomial de N periodos. El valor de una opción de compra europea sobre un activo subyacente S con precio de ejercicio K está dado por la ecuación*

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \tilde{\boldsymbol{p}}^k \tilde{\boldsymbol{q}}^{N-k} (u^k d^{N-k} S_0 - K)^+. \tag{2.25}$$

Donde S_0 es el precio del activo al tiempo inicial.

Demostración. Probaremos tal fórmula por inducción sobre el número de periodos. Supongamos que $N = 1$, en tal caso 2.25 se convierte en

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}(uS_0 - K)^+ + \tilde{\mathbf{q}}(dS_0 - K)^+\right],$$

que coincide con 2.6. Supongamos ahora que la fórmula se cumple para un modelo de $n < N$ periodos y probemos para un modelo de N periodos. Consideremos nuevamente un modelo Binomial de N periodos con una opción europea de compra con precio de ejercicio K. Como se puede apreciar en la figura 2.6, los valores $V_1(H)$ y $V_1(T)$ dependen de $N-1$ periodos, por tanto es posible aplicar la hipótesis de inducción, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
V_1(H) &= \frac{1}{(1+r)^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{N-1-k}(u^k d^{N-1-k}uS_0 - K)^+ \\
&= \frac{1}{(1+r)^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{N-(k+1)}(u^{k+1} d^{N-(k+1)}S_0 - K)^+ \\
V_1(T) &= \frac{1}{(1+r)^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{N-1-k}(u^k d^{N-1-k}dS_0 - K)^+ \\
&= \frac{1}{(1+r)^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{N-(k+1)}(u^k d^{N-k}S_0 - K)^+.
\end{aligned}$$

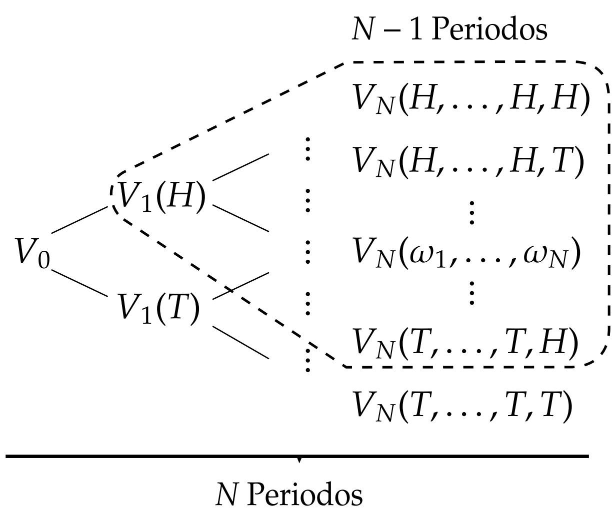


Figura 2.6: Valuación en un Modelo Binomial de N periodos

Conocidos los valores anteriores, podemos aplicar la hipótesis de inducción ahora con $n = 1$:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}V_1(H) + \tilde{\mathbf{q}}V_1(T)\right]$$

para poder hallar el valor de V_0:

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\tilde{\mathbf{p}}^{k+1}\tilde{\mathbf{q}}^{N-(k+1)}(u^{k+1}d^{N-(k+1)}S_0 - K)^+ \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\tilde{\mathbf{p}}^{k}\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}(u^{k}d^{N-k}S_0 - K)^+\right].$$

Reescribiendo la primera suma tenemos

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\left[\sum_{k=1}^{N}\binom{N-1}{k-1}\tilde{\mathbf{p}}^{k}\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}(u^{k}d^{N-k}S_0 - K)^+ + \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\tilde{\mathbf{p}}^{k}\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}(u^{k}d^{N-k}S_0 - K)^+\right].$$

Para $k = 1, \ldots, N-1$ se cumple $\binom{N-1}{k-1} + \binom{N-1}{k} = \binom{N}{k}$, por tanto V_0 nos queda como

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\left[\tilde{\mathbf{p}}^N(u^N S_0 - K)^+ + \sum_{k=1}^{N-1}\binom{N}{k}\tilde{\mathbf{p}}^{k}\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}(u^{k}d^{N-k}S_0 - K)^+ + \tilde{\mathbf{p}}^N(d^N S_0 - K)^+\right].$$

O bien

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\tilde{\mathbf{p}}^{k}\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}(u^{k}d^{N-k}S_0 - K)^+,$$

como se quería probar. □

La cuestión que se podría estar considerando sería el por qué centrarnos tanto en formar un portafolio que replique la opción si es posible hallar una fórmula cerrada del valor del seguro. El motivo principal es que aunque este último enfoque es correcto, la construcción de un portafolio replicante nos permite ir cubriendo nuestra posición en opciones como las americanas, que se pueden ejercer en cualquier momento.

Observación 2.4.1. La ecuación 2.25 puede ser reescrita de manera conveniente si consideramos el valor mínimo de k para el cual se cumple $u^k d^{n-k} - K > 0$. Si denotamos con l a tal valor[3] entonces tendremos

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=l}^{N}\binom{N}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}(u^kd^{N-k}S_0-K)\\
&= \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=l}^{N}\binom{N}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}u^kd^{N-k}S_0-\frac{K}{(1+r)^N}\sum_{k=l}^{N}\binom{N}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}.
\end{aligned}
$$

Reordenando los términos de ambas sumas obtenemos

$$
V_0 = S_0\sum_{k=l}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}\right)^k\left(\frac{\tilde{\mathbf{q}}d}{1+r}\right)^{N-k}-\frac{K}{(1+r)^N}\sum_{k=l}^{N}\binom{N}{k}\tilde{\mathbf{p}}^k\tilde{\mathbf{q}}^{N-k}. \tag{2.26}
$$

Observemos que los valores entre paréntesis de la primera suma, al igual que $\tilde{\mathbf{p}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$, pueden ser considerados como probabilidades, pues de la desigualdad 2.2 y del hecho de que $0<\tilde{\mathbf{p}}<1$ y $0<\tilde{\mathbf{q}}<1$ se sigue

$$
0<\frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}<1 \quad \text{y} \quad 0<\frac{\tilde{\mathbf{q}}d}{1+r}<1
$$

y

$$
\tilde{\mathbf{p}}u+\tilde{\mathbf{q}}d = 1+r,
$$

además, si X es una variable con distribución binomial de parámetros n y p, podemos definir una nueva variable aleatoria Z de la forma siguiente:

$$
\mathbb{P}[Z=x]=\mathbb{P}[X\geq x]
$$

[3]El valor para l se deduce de su definición, es el valor mínimo para el cual se cumple

$$
u^{l-1}d^{N-(l-1)}S_0\leq K<u^ld^{N-l}S_0,
$$

De donde se sigue que

$$
\begin{aligned}
u^{l-1}d^{N-(l-1)} &\leq \frac{K}{S_0} < u^ld^{N-l}\\
(u/d)^{l-1}\,d^N &\leq \frac{K}{S_0} < (u/d)^l\,d^N\\
(u/d)^{l-1} &\leq \frac{K}{d^NS_0} < (u/d)^l
\end{aligned}
$$

Si aplicamos logaritmo a $(u/d)^{l-1}\leq K/d^NS_0$, se obtiene $(l-1)\log(u/d)\leq\log(K/d^NS_0)$ que implica $l-1\leq\frac{\log(K/d^NS_0)}{\log(u/d)}$, de manera similar, aplicando logaritmo a la segunda desigualdad se obtiene $\log(K/d^NS_0)<l\log(u/d)$. De estas dos últimas desigualdades se deduce

$$
\frac{\log(K/d^NS_0)}{\log(u/d)}<l\leq\frac{\log(K/d^NS_0)}{\log(u/d)}+1
$$

Si denotamos por ϕ la función de distribución de esta nueva variable aleatoria[4] entonces la fórmula 2.26 nos queda como

$$V_0 = S_0\phi\left(l; N, \frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}\right) - \frac{K}{(1+r)^N}\phi\left(l; N, \tilde{\mathbf{p}}\right) \tag{2.27}$$

Donde

$$\frac{\log\left(\frac{K}{d^N S_0}\right)}{\log\left(\frac{u}{d}\right)} < l \leq \frac{\log\left(\frac{K}{d^N S_0}\right)}{\log\left(\frac{u}{d}\right)} + 1.$$

En el capítulo 4 veremos como esta última fórmula obtenida por Cox *et al* en [4] es la equivalente en tiempo discreto a la fórmula obtenida por Black y Scholes en [2].

[4]A tal distribución se le conoce como *distribución binomial complementaria*.

Capítulo 3

Teoría de probabilidad en el Modelo Binomial

En este capítulo se desarrolla el modelo binomial de manera formal, empleando para ello la teoría de probabilidad que es necesaria para poder caracterizar el valor de los seguros derivados. Se desarrolla el concepto de martingala, que juega un papel muy importante en el teorema de replicación de seguros en el Modelo Binomial. También se expone el concepto de proceso de Markov, cuya propiedad de pérdida de memoria nos es demasiado útil al momento de generar algoritmos eficientes para valuar seguros derivados. Finalmente, se describe el concepto de caminata aleatoria, que nos es de gran ayuda al momento de probar la convergencia del Modelo Binomial. El enfoque que seguimos es el de [8] y [9]. Los conceptos de probabilidad, así como las pruebas omitidas pueden hallarse en [3] y en la bibliografía antes mencionada. La versión del teorema del límite central aquí mencionada puede ser hallada en [5]. Los resultados de las aplicaciones de tales conceptos se hacen presentes en el capítulo 5 de este trabajo.

3.1. Arbitraje en el Modelo Binomial de un periodo

En el capítulo anterior fue posible hallar, aparte de la medida de probabilidad real que puede tener un inversionista sobre el modelo, otra medida de probabilidad, a la que le dimos el nombre de *medida de probabilidad libre de riesgo*. En el modelo de un periodo, bajo esta medida es posible caracterizar el valor del seguro como un valor esperado:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}[V_1],$$

en donde la tilde será utilizada de ahora en adelante para indicar que estamos trabajando bajo la medida de probabilidad libre de riesgo. Considerando un modelo más general, tenemos la siguiente

Definición 3.1.1. *Supongamos que tenemos un modelo con n distintas acciones que denotaremos como* $S^1, S^2, \ldots, S^n$ *y un espacio muestral* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ *con k estados posibles distintos. Diremos que una medida de probabilidad* $\tilde{\mathbb{P}}$ *es libre de riesgo sobre* Ω *si*

1.- $\tilde{\mathbb{P}}[\omega] > 0 \quad \forall \quad \omega \in \Omega,$

2.- $\tilde{\mathbb{E}}[S_1^i] = (1+r)S_0^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

La interpretación de la medida de probabilidad libre de riesgo es que en un mundo neutral al riesgo, al inversionista "le es igual" hacer una inversión libre de riesgo que hacer una inversión con riesgo utilizando las acciones, pues *se espera* que con ambas inversiones se obtenga el mismo beneficio. En el modelo binomial, con dos periodos y una acción que puede tomar dos valores, es evidente que las probabilidades $\tilde{\mathbf{p}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ son una medida tal que $\tilde{\mathbb{P}}[H] > 0$ y $\tilde{\mathbb{P}}[T] > 0$ y además

$$\tilde{\mathbb{E}}[S_1] = \tilde{\mathbf{p}}uS_0 + \tilde{\mathbf{q}}dS_0 = S_0(\tilde{\mathbf{p}}u + \tilde{\mathbf{q}}d) = (1+r)S_0.$$

El siguiente resultado, propuesto como ejercicio en [7](y cuya prueba aquí presentada es original), nos dice que en un modelo con n acciones distintas y k estados distintos es posible hallar una medida de probabilidad libre de riesgo si asumimos la hipótesis de ausencia de arbitraje.

Proposición 3.1.1. *Supongamos que tenemos un modelo de un periodo con n acciones distintas, los cuales denotaremos como* $S^1, S^2 \ldots, S^n$ *y un espacio muestral* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ *con k estados distintos. Entonces no existen oportunidades de arbitraje si y solo si existe una medida de probabilidad libre de riesgo.*

Para la prueba, utilizaremos la caracterización obtenida en la proposición 1.3.1. La cual establece que si definimos la matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $(k+1) \times (2n+k)$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \delta^1(\omega_1) & -\delta^1(\omega_1) & \delta^2(\omega_1) & \cdots & -\delta^n(\omega_1) & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \delta^1(\omega_2) & -\delta^1(\omega_2) & \delta^2(\omega_2) & \cdots & -\delta^n(\omega_2) & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^1(\omega_k) & -\delta^1(\omega_k) & \delta^2(\omega_k) & \ldots & -\delta^n(\omega_k) & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}$$

Donde $\delta^i(\omega_j) = S_1^i(\omega_j) - (1+r)S_0^i$ y definimos el vector $\mathbf{b} = (1, 0, \ldots, 0)^t$ de $k+1$ componentes, entonces el sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n+k} \tag{3.1}$$

tiene solución si y solo si existe una oportunidad de arbitraje. También haremos uso del conocido teorema de Farkas, que se enuncia a continuación:

Teorema 3.1.1 (Teorema de Farkas). *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz de tamaño* $m \times n$ *y* $\mathbf{b}$ *un n-vector. Entonces exactamente uno de los siguientes dos sistemas tiene una solución:*

Sistema 1: $\mathbf{Ay} \leq 0$ *y* $\mathbf{b}^t\mathbf{y} > 0$ *para algún* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Sistema 2: $\mathbf{A}^t\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *y* $\mathbf{x} \geq 0$ *para algún* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

La versión del teorema de Farkas que aquí hemos enunciado asi como la prueba del mismo pueden ser hallados en [1].

Prueba de la proposición 3.1.1. Supongamos que no existe arbitraje en el mercado. Entonces por la proposición 1.3.1 se sigue que el sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n+k}$$

no tiene solución. Aplicando el teorema de Farkas se obtiene que el sistema

$$\mathbf{A}^t\mathbf{y} \leq 0, \quad \mathbf{b}^t\mathbf{y} > 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

admite una solución $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^{k+1}$. De esto se sigue que

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta^1(\omega_1) & \delta^1(\omega_2) & \dots & \delta^1(\omega_k) \\ 0 & -\delta^1(\omega_1) & -\delta^1(\omega_2) & & -\delta^1(\omega_k) \\ 0 & \delta^2(\omega_1) & \delta^2(\omega_2) & & \delta^2(\omega_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\delta^n(\omega_1) & -\delta^n(\omega_2) & \dots & -\delta^n(\omega_k) \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} \leq 0$$

De las primeras $2n$ filas de $\mathbf{A}$ se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \delta^1(\omega_1)\mathbf{y}_1 + \delta^1(\omega_2)\mathbf{y}_2 + \cdots + \delta^1(\omega_k)\mathbf{y}_k &= 0 \\ \delta^2(\omega_1)\mathbf{y}_1 + \delta^2(\omega_2)\mathbf{y}_2 + \cdots + \delta^2(\omega_k)\mathbf{y}_k &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ \delta^n(\omega_1)\mathbf{y}_1 + \delta^n(\omega_2)\mathbf{y}_2 + \cdots + \delta^n(\omega_k)\mathbf{y}_k &= 0. \end{aligned}$$

Las últimas k ecuaciones nos dicen que $\mathbf{y}_i \geq \mathbf{y}_0$, para $i = 1, 2, \dots, k$, además, como $\mathbf{b}^t\mathbf{y} > 0$ se sigue que $\mathbf{y}_0 > 0$; y por tanto $\mathbf{y}_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$. Si sustituimos los valores de $\delta^i(\omega_j)$ en el sistema anterior y agrupamos términos nos queda

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 S^1(\omega_1) + \mathbf{y}_2 S^1(\omega_2) + \cdots + \mathbf{y}_k S^1(\omega_k) &= (1+r)S_0^1 \sum_{i=1}^{k} \mathbf{y}_i \\
\mathbf{y}_1 S^2(\omega_1) + \mathbf{y}_2 S^2(\omega_2) + \cdots + \mathbf{y}_k S^2(\omega_k) &= (1+r)S_0^2 \sum_{i=1}^{k} \mathbf{y}_i \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{y}_1 S^n(\omega_1) + \mathbf{y}_2 S^n(\omega_2) + \cdots + \mathbf{y}_k S^n(\omega_k) &= (1+r)S_0^n \sum_{i=1}^{k} \mathbf{y}_i
\end{aligned}
$$

Ahora, definamos los escalares $\mathbf{y}_i'$ como

$$
\mathbf{y}_i' = \frac{\mathbf{y}_i}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{y}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.
$$

Con esto, los valores de $\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_k'$ forman una medida de probabilidad sobre nuestro modelo. Además, con estos nuevos valores el sistema anterior queda como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_1' S^1(\omega_1) + \mathbf{y}_2' S^1(\omega_2) + \cdots + \mathbf{y}_k' S^1(\omega_k) &= (1+r)S_0^1 \\
\mathbf{y}_1' S^2(\omega_1) + \mathbf{y}_2' S^2(\omega_2) + \cdots + \mathbf{y}_k' S^2(\omega_k) &= (1+r)S_0^2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{y}_1' S^n(\omega_1) + \mathbf{y}_2' S^n(\omega_2) + \cdots + \mathbf{y}_k' S^n(\omega_k) &= (1+r)S_0^n.
\end{aligned}
$$

Que es equivalente a afirmar que bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}'$ definida por los escalares $\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2', \ldots, \mathbf{y}_k'$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}'[S_1^1] &= (1+r)S_0^1 \\
\mathbb{E}'[S_1^2] &= (1+r)S_0^2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbb{E}'[S_1^n] &= (1+r)S_0^n \\
\mathbb{P}'[\omega_i] &> 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k.
\end{aligned}
$$

Con esto, hemos probado que si no existe arbitraje en el modelo entonces existe una medida de probabilidad libre de riesgo. Recíprocamente, supongamos que existe una medida de probabilidad libre de riesgo $\tilde{\mathbb{P}}$ y que existe un portafolio $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ de posiciones largas y cortas sobre las acciones tal que

1.- $V_0 = 0$

2.- $V_1 \geq 0$

3.- $\tilde{\mathbb{E}}[V_1] > 0$.

Donde V denota el valor del portafolio Δ. Dado que la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ es libre de riesgo, se cumple

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}[V_1] &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{n} \Delta_i(S_1^i - (1+r)S_0^i)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathbb{E}}[\Delta_i(S_1^i - (1+r)S_0^i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \Delta_i\tilde{\mathbb{E}}[S_1^i] - (1+r)S_0^i \\ &= 0,\end{aligned}$$

lo cual contradice el hecho de que nuestro portafolio genera una oportunidad de arbitraje. □

El teorema anterior es útil al considerar modelos de un solo periodo. Para poder caracterizar la noción de arbitraje en un modelo de varios periodos, es necesario desarrollar un poco más de teoría.

3.2. Esperanza condicional

La información del inversionista en un momento dado es relevante para decidir su próximo movimiento. En el capítulo anterior hemos visto que el resultado del lanzamiento de la moneda al tiempo n nos ayuda a decidir cual será el nuevo valor de Δ al tiempo $n+1$. Además, al tiempo $n+1$ tenemos ya conocimiento de los lanzamientos previos; y tal información es también importante para decidir nuestra nueva posición. Por tanto, debe existir en nuestro modelo una forma de estimar cual será el resultado siguiente utilizando para ello la información disponible. Tal estimación es conocida como esperanza condicional. Para poder construir tal concepto comencemos con la siguiente definición.

Definición 3.2.1 (σ-álgebra)**.** *Sea Ω un conjunto diferente del vacío que representa el espacio muestral de un experimento aleatorio y $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de Ω. Diremos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra si*
i) $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{F}$.
ii) Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
iii) si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ también pertenece a $\mathcal{F}$.

En base a esta definición podemos dar otra.

Definición 3.2.2. *Sea Ω un conjunto diferente del vacío y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre Ω. Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ es una función que a cada conjunto $A \in \mathcal{F}$ le asigna un número en $[0,1]$, llamado la probabilidad de A y denotado como $\mathbb{P}(A)$. La función $\mathbb{P}$ debe de cumplir las propiedades siguientes:*
i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
ii) Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos ajenos de $\mathcal{F}$ entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

La tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es llamada un espacio de probabilidad.

Una σ-álgebra es capaz de representar la información que se posee hasta cierto periodo. Los elementos de una σ-álgebra son interpretados como aquellos conjuntos para los cuales es posible decidir si el resultado del experimento pertenece o no a tal conjunto; de esta forma podemos clasificar los conjuntos como aquellos en que sabemos que el resultado pertenece y aquellos en los que sabemos no pertenece. Por ejemplo, supongamos que nuestro experimento consiste en lanzar una moneda tres veces y solo se nos ha informado el resultado del primer lanzamiento. En caso de que el primer lanzamiento halla resultado cara, entonces el resultado final puede ser HHH, HHT, HTH, HTT, cualquiera de estos cuatro resultados es posible. Sin embargo, si el resultado del primer lanzamiento es cruz, el resultado final puede ser en este caso cualquiera de los siguientes: THH, THT, TTH, TTT. Con esto, podemos formar los siguientes conjuntos:

$$\mathrm{A}_H = \{HHH, HHT, HTH, HTT\} \quad \text{y} \quad \mathrm{A}_T = \{THH, THT, TTH, TTT\},$$

en donde A_H es el conjunto de resultados en los cuales el primer lanzamiento fue cara y A_T los resultados en los cuales el primer lanzamiento fue cruz. Para ambos conjuntos es posible decidir cuando el resultado final ω pertenece o no a cada uno. De igual forma, si Ω_3 denota el conjunto de los resultados posibles de los tres lanzamientos, sabemos que $\omega \in \Omega_3$ y que $\omega \notin \emptyset$. De lo anterior, el conjunto $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega_3, \mathrm{A}_H, \mathrm{A}_T\}$ representa la información que se tiene si se sabe el resultado del primer lanzamiento. Es posible verificar directamente que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra. De manera similar, si el experimento consiste en lanzar una moneda N veces y se nos informa el resultado de los $n < N$ primeros lanzamientos, es posible formar una σ-álgebra que represente la información que se posee. En este caso y de ahora en adelante, Ω_n representa el espacio muestral del experimento de lanzar una moneda n veces. Conociendo de antemano el resultado de los n primeros lanzamientos, se definen conjuntos de la forma $\mathrm{A}_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n}$, donde $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ es una posible trayectoria de los lanzamientos de la moneda. A los conjuntos $\mathrm{A}_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n}$ les llamaremos átomos. Cada uno de estos conjuntos no se puede descomponer en la unión de otros conjuntos y son tal que con la unión de todos se obtiene Ω_N, es decir, forman una partición.

Conforme transcurren los periodos, nuestra información aumenta, además, es claro que si la información aumenta cada nueva σ-álgebra debe poseer de antemano la información de la σ-álgebra anterior. Este comportamiento se resume en la siguiente definición.

Definición 3.2.3 (Filtración). *Sea Ω un conjunto distinto del vacío. Sea n un numero positivo fijo y supongamos que para cada $n = 0, 1, \ldots, N$ existe una σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Además, si $m < n$ entonces $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$. Entonces la colección de σ-álgebras $\mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, \ldots, N$ es llamada una filtración.*

Recordemos que nuestro espacio muestral consiste del resultado de lanzar una moneda N veces, así, un elemento cualquiera $\omega \in \Omega_N$ será de la forma $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_N$, una sucesión finita de H's y T's.

A continuación construiremos la filtración que estaremos utilizando. Cada σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ en la filtración va a representar la información que se posee de los primeros n lanzamientos.

Definimos $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega_N\}$. Para poder definir $\mathcal{F}_1$ consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_H &= \text{Conjunto de elementos en } \Omega_N \text{ que comienzan con H} = \{\omega; \omega_1 = H\}, \\ \mathrm{A}_T &= \text{Conjunto de elementos en } \Omega_N \text{ que comienzan con T} = \{\omega; \omega_1 = T\}, \end{aligned}$$

Notemos que $\mathrm{A}_H^c = \mathrm{A}_T$ y $\mathrm{A}_H \cup \mathrm{A}_T = \Omega_N$. Además $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$. En base a esto, se define $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega_N, \mathrm{A}_H, \mathrm{A}_T\}$.

Para determinar $\mathcal{F}_2$ definamos los conjuntos A_{HH}, A_{HT}, A_{TH} y A_{TT} de manera similar a los construidos anteriormente:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{HH} &= \text{Conjunto de elementos en } \Omega_N \text{ que comienzan con HH} = \{\omega; \omega_1 = H, \omega_2 = H\}, \\ \mathrm{A}_{HT} &= \text{Conjunto de elementos en } \Omega_N \text{ que comienzan con HT} = \{\omega; \omega_1 = H, \omega_2 = T\}, \\ \mathrm{A}_{TH} &= \text{Conjunto de elementos en } \Omega_N \text{ que comienzan con TH} = \{\omega; \omega_1 = T, \omega_2 = H\}, \\ \mathrm{A}_{TT} &= \text{Conjunto de elementos en } \Omega_N \text{ que comienzan con TT} = \{\omega; \omega_1 = T, \omega_2 = T\}. \end{aligned}$$

Cada uno de estos conjuntos pertenece a $\mathcal{F}_2$. Ahora, los conjuntos que hacen falta para que $\mathcal{F}_2$ sea una $\sigma-$álgebra se obtienen de uniones y complementos de los anteriores. En este caso, $\mathcal{F}_2$ se compone de 16 conjuntos distintos:

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \Omega_N, \mathrm{A}_H, \mathrm{A}_T, \mathrm{A}_{HH}, \mathrm{A}_{HT}, \mathrm{A}_{TH}, \mathrm{A}_{TT}, \mathrm{A}_{HH}^c, \mathrm{A}_{HT}^c, \mathrm{A}_{TH}^c, \mathrm{A}_{TT}^c, \\ \mathrm{A}_{HH} \cup \mathrm{A}_{TH}, \mathrm{A}_{HH} \cup \mathrm{A}_{TT}, \mathrm{A}_{HT} \cup \mathrm{A}_{TH}, \mathrm{A}_{HT} \cup \mathrm{A}_{TT} \end{array} \right\}.$$

En general, $\mathcal{F}_n$ contendrá los subconjuntos de Ω_N capaces de ser descritos en términos de los primeros n lanzamientos de la moneda y los conjuntos que hagan falta para que formen una σ-álgebra, esto es, complementos y uniones. En este caso, será posible construir 2^n conjuntos A's distintos con la propiedad de que su unión será todo Ω. Además $\mathcal{F}_n$ será el conjunto de todos los conjuntos posibles que se pueden formar a partir de los 2^n conjuntos anteriores, por tanto, la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ tendrá 2^{2^n} elementos.

Definición 3.2.4. *Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La σ-álgebra generada por X, denotada por $\sigma(X)$ es la colección de los conjuntos de la forma*

$$\{X \in \mathrm{B}\} = \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in \mathrm{B}\},$$

donde B *es un conjunto de Borel de* $\mathbb{R}$.

Es necesario saber cuando la información contenida en una σ-álgebra es suficiente para poder determinar el valor de la variable aleatoria con la cual estemos trabajando. El siguiente ejemplo motiva una nueva definición.

Ejemplo 3.2.1. Supongamos que tenemos un modelo binomial de tres periodos y que $S_0 = 4$, $u = 2$ y $d = 0.5$. En este caso, si S_2 es la variable aleatoria que representa el valor de la acción al final del segundo periodo, tenemos que

$$S_2(HHH) = S_2(HHT) = 16,$$
$$S_2(HTH) = S_2(HTT) = S_2(THH) = S_2(THT) = 4,$$
$$S_2(TTH) = S_2(TTT) = 1.$$

Si tomamos a B como cualquier intervalo cerrado que contiene a 16 entonces $\{X \in \mathrm{B}\} = \{HHH, HHT\} = A_{HH} \in \sigma(S_2)$, utilizando la notación descrita previamente para los conjuntos A. De igual manera, con B igual a un intervalo que contiene solo a 2 se obtiene $\{X \in \mathrm{B}\} = A_{HT} \cup A_{TH} \in \sigma(S_2)$ y con un intervalo que contiene a 1 tenemos $\{X \in \mathrm{B}\} = A_{TT} \in \sigma(S_2)$. No es muy difícil notar que la σ-álgebra $\sigma(S_2)$ contiene los conjuntos

$$\emptyset, \Omega_3, A_{HH}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{TT},$$

y los complementos y uniones de los mismos. Ahora, notemos que $\mathcal{F}_2$, la σ-álgebra que contiene los conjuntos capaces de ser descritos por los primeros dos lanzamientos de la moneda contiene a su vez a A_{HH},A_{TT}, A_{HT} y A_{TH}, cada uno por separado, mientras que en $\sigma(S_2)$ solo aparece la unión de los dos últimos. Esto es debido a que observar los dos primeros lanzamientos de la moneda nos permite distinguir si fue primero una cara y después una cruz o viceversa, mientras que observando el valor de la variable(en este caso $S_2 = 4$) no nos permite distinguir eso. Por tanto, $\mathcal{F}_2$ contiene información suficiente para determinar el valor de S_2. En este caso diremos que S_2 es $\mathcal{F}_2$-medible.

Definición 3.2.5. *Sea X una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad Ω distinto del vacío y sea $\mathcal{G}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Si todo conjunto en $\sigma(X)$ está contenido en $\mathcal{G}$ diremos que X es $\mathcal{G}$-medible.*

Asi, una variable aleatoria X es $\mathcal{G}$-medible si y solo si la información en $\mathcal{G}$ es suficiente para determinar el valor de X.

Ejemplo 3.2.2. Las variables aleatorias Δ_n, que representan el número de acciones que debe poseer el inversionista al periodo n para poder replicar un seguro derivado V es $\mathcal{F}_n$-medible, esto es, depende solo de los primeros n lanzamientos de la moneda. De igual manera las variables aleatorias S_n que denotan el precio de la acción al tiempo n, para $n = 0, 1, \ldots, N$ es cada una $\mathcal{F}_n$-medible, pues es posible determinar su valor al tiempo n en base al conocimiento de los primeros n resultados de la moneda.

Para poder especificar los componentes aleatorios del modelo binomial es necesario dar otra definición:

Definición 3.2.6 (Proceso estocástico)**.** *Un proceso estocástico es un conjunto $\{X_n\}_{n\in I}$ en donde I es un conjunto de índices y para cada $n \in I$ se tiene que X_n es una variable aleatoria.*

Ejemplo 3.2.3. En el Modelo Binomial, el conjunto $\{X_n\}$, con $n = 0, 1, \dots, N$, que representa el valor del portafolio del inversionista al tiempo n es un proceso estocástico. De igual forma los conjuntos $\{S_n\}$ y $\{\Delta_n\}$ para $n = 0, 1, \dots, N$ que denotan el precio del activo en cada periodo y la posición del inversionista, respectivamente, son procesos estocásticos.

Definición 3.2.7. *Sea Ω un espacio muestral dotado de una filtración $\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, N$. Sea $\{X_n\}_{n\in I}, I = 0, 1, \dots, N$ un proceso estocástico. Diremos que este proceso es adaptado a la filtración si para cada $n \in I$ la variable aleatoria X_n es $\mathcal{F}_n$-medible.*

El proceso $\{\Delta_n\}$, la posición del inversionista y el proceso $\{X_n\}$ que representa el valor del portafolio en cada periodo ambos para $n = 0, 1, \dots, N$ son adaptados respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}$ construida previamente, que consiste de los conjuntos descritos por los primeros n lanzamientos de la moneda.

De igual forma, cuando una variable aleatoria no puede ser determinada con la información que se posee se dice que la variable aleatoria es independiente de la σ-álgebra. Tal definición se describe a continuación.

Definición 3.2.8. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Diremos que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son independientes si*

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B], \ \forall \ A \in \mathcal{G}, B \in \mathcal{H}.$$

Si X y Y son dos variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad, diremos que X y Y son independientes si $\sigma(X)$ y $\sigma(Y)$ son independientes. De manera similiar, si X es una variable aleatoria y $\mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, diremos que X y $\mathcal{G}$ son independientes si $\sigma(X)$ y $\mathcal{G}$ son independientes.

En el caso en que una variable aleatoria no sea medible ni independiente respecto a una σ-álgebra $\mathcal{F}$, entonces la información que se posee no es la suficiente para determinar su valor, sin embargo existe algo de información acerca de la variable aleatoria, pues no es independiente. Con esto, es posible obtener una estimación del valor de la variable aleatoria, a esta estimación es a lo que se le conoce como esperanza condicional. La definición se da a continuación.

Definición 3.2.9 (Esperanza condicional)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ y sea X una variable aleatoria no negativa o integrable según Lebesgue[1]. La esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$, denotada por $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ es cualquier variable aleatoria que satisface*

1. *$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ es $\mathcal{G}$-medible,*
2. *Para todo $A \in \mathcal{G}$ se cumple*
$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

[1]En el apéndice A se describen los conceptos de teoría de la medida que complementan este trabajo.

De manera similar al valor esperado de una variable aleatoria, la esperanza condicional también tiene ciertas propiedades que son útiles al momento de realizar ciertos cálculos. Tales propiedades se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$.*

- *Si X y Y son variables aleatorias integrables y c_1 y c_2 son constantes, entonces*

$$\mathbb{E}[c_1X + c_2Y|\mathcal{G}] = c_1\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + c_2\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]. \tag{3.2}$$

- *Si X y Y son variables aleatorias integrables, Y y XY son integrables y X es $\mathcal{G}$-medible, entonces*

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]. \tag{3.3}$$

- *Si $\mathcal{H}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{G}$ y X es una variable aleatoria integrable, entonces*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]. \tag{3.4}$$

- *Si X es una variable aleatoria integrable independiente de $\mathcal{G}$, entonces*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]. \tag{3.5}$$

La prueba de este teorema se lleva a cabo utilizando las propiedades de la integral de Lebesgue, pero será omitida en el presente trabajo. En el caso en que se trabaja con un espacio muestral finito, las integrales que aparecen en la esperanza condicional se convierten en sumas finitas. Por ejemplo, tomemos S_3 y $\mathcal{F}_2$. Sabemos que $A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT} \subset \mathcal{F}_2$. No es muy difícil darse cuenta que estos átomos forman una partición sobre Ω_3. Por la propiedad 2 de la definición 3.2.9 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{A_{HH}} \mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2]d\mathbb{P} &= \int_{A_{HH}} S_3 d\mathbb{P}, \\
\int_{A_{HT}} \mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2]d\mathbb{P} &= \int_{A_{HT}} S_3 d\mathbb{P}, \\
\int_{A_{TH}} \mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2]d\mathbb{P} &= \int_{A_{TH}} S_3 d\mathbb{P}, \\
\int_{A_{TT}} \mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2]d\mathbb{P} &= \int_{A_{TT}} S_3 d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Desarrollando estas integrales se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2](HH)\mathbb{P}(A_{HH}) &= \sum_{\omega\in A_{HH}} S_3 d\mathbb{P}(\omega),\\
\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2](HT)\mathbb{P}(A_{HT}) &= \sum_{\omega\in A_{HT}} S_3 d\mathbb{P}(\omega),\\
\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2](TH)\mathbb{P}(A_{TH}) &= \sum_{\omega\in A_{TH}} S_3 d\mathbb{P}(\omega),\\
\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2](TT)\mathbb{P}(A_{TT}) &= \sum_{\omega\in A_{TT}} S_3 d\mathbb{P}(\omega).
\end{aligned}$$

Suponiendo que la probabilidad de que la moneda sea cara es p y que $q = 1 - p$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2](HH) &= pS_3(HHH) + qS_3(HHT),\\
\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2](HT) &= pS_3(HTH) + qS_3(HTT),\\
\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2](TH) &= pS_3(THH) + qS_3(THT),\\
\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2](TT) &= pS_3(TTH) + qS_3(TTT).
\end{aligned}$$

En general, en un modelo de tiempo discreto, si denotamos por $\mathcal{P}$ a la partición formada por los átomos A's, tendremos que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathbf{1}_A = \mathbb{E}[X|A], \ \forall\ A \in \mathcal{P}.$$

En este caso,$\mathbf{1}_{[\cdot]}$ denota la función indicadora.

Supongamos que tenemos un Modelo Binomial de N periodos y sea X una variable aleatoria sobre el modelo. Consideremos la filtración $\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, N$. Si suponemos que $\mathbb{P}(H) = p$ y $\mathbb{P}(T) = q$ para cada lanzamiento, entonces para $1 \leq n \leq N - 1$ tenemos

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n](\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) = \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} X(\omega_1\omega_2\cdots\omega_N), \tag{3.6}$$

en donde $\#H(\omega)$ y $\#T(\omega)$ representan el número de caras y número de cruces en ω respectivamente. En el caso en que $n = 0$ se tiene

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[X];$$

y cuando $n = N$ tenemos que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_N](\omega_1\omega_2\cdots\omega_N) = X(\omega_1\omega_2\cdots\omega_N).$$

De ahora en adelante, al considerar el Modelo Binomial escribiremos $\mathbb{E}_n[X]$ en lugar de $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ para simplificar la notación.

3.3. Martingalas

Ahora estamos en posición de dar el siguiente paso para la construcción de la fórmula de valuación en un Modelo Binomial de varios periodos. Comencemos con la siguiente definición.

Definición 3.3.1. *Consideremos el Modelo Binomial. Sea $M_0, M_1, \ldots, M_N$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, N$. Si se cumple*

$$M_n = \mathbb{E}_n[M_{n+1}],\ n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3.7}$$

diremos que el proceso $\{M_n\}$ es una martingala.

- *Si*
$$M_n \leq \mathbb{E}_n[M_{n+1}],\ n = 0, 1, \ldots, N-1,$$
diremos que el proceso $\{M_n\}$ es una submartingala.

- *Si*
$$M_n \geq \mathbb{E}_n[M_{n+1}],\ n = 0, 1, \ldots, N-1,$$
diremos que el proceso $\{M_n\}$ es una supermartingala.

Las martingalas son usadas para modelar fenómenos imparciales, por ejemplo, en juegos de azar una martingala modela un juego justo, pues el mejor estimado al periodo $n+1$ teniendo en cuenta la información al periodo n es el valor al periodo n de la variable aleatoria que se está considerando. Esto es, se espera que el capital inicial con el que cuenta el jugador no cambie. Supongamos que el proceso $M_0, M_1, \ldots, M_N$ es una martingala, entonces se cumple

$$M_{n+1} = \mathbb{E}_{n+1}[M_{n+2}],\ n \leq N-2.$$

Calculando la esperanza condicional en ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] = \mathbb{E}_n[\mathbb{E}_{n+1}[M_{n+2}]],\ n \leq N-2,$$

de donde aplicando la propiedad 3.4 se obtine

$$M_n = \mathbb{E}_n[M_{n+2}],\ n \leq N-2.$$

En general, para cualquier $m \leq N$, aplicando la propiedad 3.4 las veces necesarias se tiene

$$M_n = \mathbb{E}_n[M_m],\ n \leq m \leq N. \tag{3.8}$$

Tomando $n = 0$ en la ecuación anterior se sigue que

$$M_0 = \mathbb{E}[M_m],\ m \leq N. \tag{3.9}$$

Lo que nos dice la ecuación anterior es que se espera que el valor inicial nunca cambie conforme pasen los periodos. Tal propiedad representa el hecho que comentabamos anteriormente, que las martingalas son ideales para representar procesos que son justos, pues en el caso de un jugador mencionado anteriormente si el juego se comporta como una martingala entonces a la larga el jugador no va a ganar ni a perder el capital con el que contaba inicialmente.

En el modelo binomial, la medida de probabilidad libre de riesgo está dada por

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{u-(1+r)}{u-d}.$$

Tal medida, además de servir para caracterizar el arbitraje tiene la siguiente propiedad:

$$S_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H) + \tilde{\mathbf{q}}S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)\right],$$

utilizando la nueva notación, esta última ecuación nos queda como

$$S_n = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}],$$

tal propiedad motiva el siguiente resultado:

Proposición 3.3.1. *Consideremos el modelo binomial de N periodos libre de arbitraje bajo la medida de probabilidad libre de riesgo. Entonces, bajo esta medida, el precio descontado de la acción es una martingala, esto es, el proceso $\frac{S_n}{(1+r)^n}$ cumple la condición 3.7.*

Demostración. Aunque la prueba se deduce de la definición, daremos una segunda prueba más constructiva cuya técnica nos será útil más adelante.

Notemos que $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ depende solo del lanzamiento $n+1$, por tanto, de las propiedades de la esperanza condicional se sigue

$$\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_n}{(1+r)^{n+1}} \cdot \frac{S_{n+1}}{S_n}\right]$$

Aplicando la propiedad 3.3 se obtiene

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] &= \frac{S_n}{(1+r)^n}\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}\cdot\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] \\ &= \frac{S_n}{(1+r)^n}\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right]\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad 3.5 se sigue

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] &= \frac{S_n}{(1+r)^n}\cdot\frac{\tilde{\mathbf{p}}u + \tilde{\mathbf{q}}d}{1+r} \\ &= \frac{S_n}{(1+r)^n}.\end{aligned}$$

□

En el capítulo 2 vimos que el capital del inversionista se rige bajo la ecuación 2.21 que escribimos nuevamente aqui:

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n).$$

En el caso en que se trabaje bajo la medida de probabilidad real, la ganancia esperada depende del portafolio que se utilice, pues mientras se invierta más en acciones y menos en el mercado de dinero es posible generar una mayor ganancia, sin embargo tales posiciones tienen el inconveniente de ser muy riesgosas, dada la volatilidad de la acción. Sin embargo, al trabajar bajo la medida de probabilidad libre de riesgo, el portafolio que utilice el inversionista es irrelevante, pues su ganancia esperada será siempre la misma. Esto se resume en el siguiente resultado.

Proposición 3.3.2. *Consideremos el Modelo Binomial de N periodos. Sea $\{\Delta_n\}$ el proceso que denota la posición del inversionista, que como hemos visto ya es un proceso adaptado. Sea X_0 un número real y consideremos el proceso valor del portafolio $X_1, X_2, \ldots, X_N$ generado recursivamente por la ecuación 2.21. Entonces el proceso capital descontado $\frac{X_n}{(1+r)^n}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ es una martingala bajo la medida de probabilidad libre de riesgo. Es decir, se cumple*

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right], \ n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3.10}$$

Demostración. La prueba es directa utilizando las propiedades del teorema 3.2.1.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] &= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{(1+r)(X_n - \Delta_n S_n)}{(1+r)^{n+1}}\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{X_n}{(1+r)^n} - \frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right]\end{aligned}$$

de la propiedad de linealidad 3.2 obtenemos:

$$= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] + \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_n}{(1+r)^n}\right] - \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right]$$

Aplicando ahora la propiedad 3.3 se obtiene

$$= \Delta_n \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] + \frac{X_n}{(1+r)^n} - \frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^n}$$

utilizando la proposición 3.3.1 se sigue

$$\begin{aligned} &= \frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^n} + \frac{X_n}{(1+r)^n} - \frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\ &= \frac{X_n}{(1+r)^n}.\end{aligned}$$

Como se quería probar. □

Corolario 3.3.1. *Consideremos el Modelo Binomial y el proceso X_n como se describe en la proposición anterior. Entonces se cumple*

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_n}{(1+r)^n}\right] = X_0,\ n = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.11}$$

Demostración. La prueba de este corolario es consecuencia de que el proceso $\frac{X_n}{(1+r)^n}$ es una martingala y de la propiedad 3.9. □

Corolario 3.3.2. *No hay arbitraje en el modelo binomial de N periodos bajo la medida de probabilidad libre de riesgo.*

Demostración. Supongamos que existe un proceso capital $X_1, X_2, \ldots, X_N$ con $X_0 = 0$ tal que $X_N(\omega) \geq 0\ \forall\ \omega \in \Omega$ con al menos un ω' tal que $X(\omega') > 0$. De lo anterior tenemos que $\tilde{\mathbb{E}}[X_N] > 0$ de donde se sigue que $\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] > 0$. Del corolario 3.3.1 se obtiene $\tilde{\mathbb{E}}[X_0] > 0$, que contradice el hecho de que $X_0 = 0$, por tanto, no puede existir una oportunidad de arbitraje en el modelo. □

Con el resultado anterior hemos probado ya que el modelo construido es libre de arbitraje. Lo que sigue ahora es caracterizar el teorema de replicación 2.3.1 en términos de probabilidad. Lo que hace el teorema de replicación es construir un portafolio X_n tal que $X_N = V_N$, donde V denota el seguro derivado. Además se define $X_n = V_n$ para $n = 0, 1, \ldots, N_1$. Por la proposición 3.3.2 y la propiedad 3.9 tenemos

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right]. \tag{3.12}$$

Ahora, como $X_n = V_n$, entonces

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right], \tag{3.13}$$

de manera equivalente:

$$V_n = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right],\ n = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.14}$$

Resta probar que esta definición de los V_n coincide con la del teorema 2.3.1. Lo anterior se resume en el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1 (Valuación neutral al riesgo)**.** *Consideremos el Modelo Binomial libre de arbitraje bajo la medida de probabilidad libre de riesgo $\tilde{\mathbb{P}}$. Supongamos que V_N es una variable aleatoria que representa el pago de un seguro derivado al tiempo N. Entonces, para $n = 0, 1, \ldots, N$ el valor del seguro derivado en el periodo n está dado por la fórmula 3.14. Además, el proceso $\frac{V_n}{(1+r)^n}$ es una martingala bajo la medida de probabilidad libre de riesgo, esto es:*

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right],\ n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3.15}$$

A esta última fórmula se le conoce como *fórmula de valuación neutral al riesgo*.

Demostración. Probar que el valor del seguro derivado V al periodo n está dado por la fórmula 3.14 implica probar que esta definición de los V_n y la del teorema 2.3.1 coinciden. La prueba la haremos por partes. En cada una de ellas probaremos un resultado auxiliar que nos servirá como base para el resultado principal. En cada caso supondremos que estamos trabajando bajo el Modelo Binomial.

i) Sean $M_0, M_1, \ldots, M_N$ y $M'_0, M'_1, \ldots, M'_N$ martingalas bajo la medida de probabilidad libre de riesgo. Si $M_N(\omega) = M'_N(\omega)\ \forall\ \omega \in \Omega$ entonces $M_n = M'_n$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Tomemos un n entre 0 y $N-1$. Del hecho de que los procesos M y M' son martingalas y de la propiedad 3.8 se tiene

$$M_n = \tilde{\mathbb{E}}_n[M_N] = \tilde{\mathbb{E}}_n[M'_N] = M'_n.$$

ii) Supongamos que V_N denota el pago al periodo N de un seguro derivado que depende de los N lanzamientos de una moneda. Definamos recursivamente $V_{N-1}, V_{N-2}, \ldots, V_1, V_0$ como en la ecuación 2.22. Entonces el proceso $\frac{V_n}{(1+r)^n}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ es una martingala bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

la ecuación 2.22 del teorema 2.3.1 es la siguiente:

$$V_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}} V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) + \tilde{\mathbf{q}} V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)\right], \tag{3.16}$$

que con la notación actual se convierte en

$$V_n = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_n[V_{n+1}],$$

dividiendo ambos lados entre $(1+r)^n$ se obtiene

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right].$$

Por tanto, el proceso valor del seguro descontado es una martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$.

iii) En base a la fórmula 3.14 definamos V'_n como

$$V'_n = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right],\ n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Entonces el proceso

$$V'_0, \frac{V'_1}{1+r}, \ldots, \frac{V'_{N-1}}{(1+r)^{N-1}}, \frac{V_N}{(1+r)^N}$$

es una martingala.

Para esto, basta proceder por definición:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] &= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{n+1}}\tilde{\mathbb{E}}_{n+1}\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-(n+1)}}\right]\right]\\ &= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\tilde{\mathbb{E}}_{n+1}\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right]\right]\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad 3.4 nos queda

$$\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right]$$

de la definición de V'_n se sigue

$$\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] = \frac{V'_n}{(1+r)^n}.$$

Por tanto, el proceso $\frac{V'_n}{(1+r)^n}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ es una martingala.

Hemos probado ya que los procesos $\frac{V_n}{(1+r)^n}$ y $\frac{V'_n}{(1+r)^n}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ son ambos martingalas bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$ y además ambos procesos son tales que $V_N = V'_N$. Aplicando el resultado *i)* se obtiene que $V_n = V'_n$ para $n = 0, 1, \ldots, N$. Por tanto, el algoritmo del teorema 2.3.1 produce los mismos resultados que la fórmula 3.14. □

3.4. Procesos de Markov

A continuación se describe el concepto de proceso de Markov en el contexto del Modelo Binomial. Para obtener una definición de proceso de Markov más general basta con especificar un espacio de probabilidad distinto del actual.

Definición 3.4.1 (Proceso de Markov)**.** *Consideremos el Modelo Binomial. Sea $X_0, X_1, \ldots, X_N$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, N$. Si para todo $0 \leq n \leq N-1$ y para toda función $f(x)$ existe otra función $g(x)$ (que depende de n y de f) tal que*

$$\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})] = g(X_n), \tag{3.17}$$

entonces diremos que el proceso $X_0, X_1, \ldots, X_N$ es un proceso de Markov.

La importancia de la propiedad de Markov radica en el hecho de que la información necesaria para calcular $\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})]$ la tiene la variable $g(X_n)$, es decir, no es necesario toda la información de los lanzamientos de la moneda, sino que basta con saber la información que la variable X_n necesita para ser definida. El saber que un proceso es de Markov, aún sin conocer la función g explícitamente, nos dice que es posible hallar un algoritmo que no necesita toda la información de los lanzamientos de la moneda, reduciendo asi la cantidad de información que necesita ser almacenada.

Ejemplo 3.4.1. *En el Modelo Binomial, consideremos el proceso precio de la acción S_n definido como sigue:*

$$S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}) = \begin{cases} uS_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)\ , \textit{si } \omega_{n+1} = H; \\ dS_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n), \textit{si } \omega_{n+1} = T. \end{cases}$$

S_n es un proceso de Markov.

Sea f una función arbitraria. Queremos calcular $\tilde{\mathbb{E}}_n[f(S_{n+1})]$; de la definición de S_{n+1} se sigue que

$$\tilde{\mathbb{E}}_n[f(S_{n+1})] = \tilde{\mathbf{p}}f(uS_n) + \tilde{\mathbf{q}}f(dS_n),$$

por tanto, para cada función f existe una función g, a saber $g(x) = \tilde{\mathbf{p}}f(ux) + \tilde{\mathbf{q}}f(dx)$ tal que $\tilde{\mathbb{E}}_n[f(S_{n+1})] = g(S_n)$. Este resultado, aunque sencillo, tiene grandes consecuencias. Consideremos un ejemplo para ver la utilidad del mismo.
Supongamos que V_N es una función que denota el pago de un seguro derivado al tiempo N (en el caso de una opción de compra europea $V_N = (S_N - K)^+$). Asi, tenemos que $V_N = v_N(S_N)$, donde $v_N(s) = (s - K)^+$. De la fórmula de valuación neutral al riesgo 3.15 del teorema 3.3.1 se tiene que

$$V_{N-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-1}[V_N]$$

Ahora, sustituyendo V_N por $v(S_N)$ y tomando en cuenta que el proceso S_n es de Markov se tiene que

$$V_{N-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-1}[v_N(S_N)] = v_{N-1}(S_{N-1}),$$

hay que prestar atención a lo que hemos realizado: el hecho de que S_n sea un proceso de Markov nos dice que para toda función que le apliquemos a S_N (y en particular para v_N) existe otra función v_{N-1} que cumple

$$\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-1}[v_N(S_N)] = v_{N-1}(S_{N-1}).$$

Del ejemplo 3.4.1 tenemos que

$$v_{N-1}(s) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_N(us) + \tilde{\mathbf{q}}v_N(ds)\right].$$

Si repetimos de nuevo el proceso, de la fórmula de valuación neutral al riesgo tenemos

$$V_{N-2} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-2}[V_{N-1}] = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-2}[v_{N-1}(S_{N-1})],$$

donde hemos hecho la sustitución $V_{N-1} = v_{N-1}(S_{N-1})$. Ahora, aplicando la propiedad de Markov a la función v_{N-1} tenemos que existe otra función v_{N-2} que cumple

$$V_{N-2} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-2}[v_{N-1}(S_{N-1})] = v_{N-2}(S_{N-2}).$$

Nuevamente podemos calcular la función v_{N-2} explícitamente, que queda como

$$v_{N-2}(s) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_{N-1}(us) + \tilde{\mathbf{q}}v_{N-1}(ds)\right].$$

Continuando este proceso hasta llegar a V_0 se desprende el siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned} v_n(s) &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_{n+1}(us) + \tilde{\mathbf{q}}v_{n+1}(ds)\right], \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0 \\ v_N(s) &= g(s). \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde $g(s) = g(S_N)$ es la función que representa el pago del seguro que se esté considerando.

El algoritmo recién obtenido es útil para cierto tipo de seguros derivados. Sin embargo, existen otro tipo de seguros para los cuales es necesario almacenar más información, pues el proceso precio de la acción a veces no es suficiente. Para esto, es posible agregar otra variable al proceso precio de la acción y asi tener un proceso conjunto que es de Markov. La definición de un proceso de Markov multivariado que se da a continuación es la misma que aparece en [8].

Definición 3.4.2. *Consideremos el modelo binomial. Sea $(X_n^1, X_n^2, \ldots, X_n^K), n = 0, 1, \ldots, N$ un proceso de Markov multivariado adaptado (cada proceso $X_n^i, n = 0, 1, \ldots, N$ para $i = 0, 1, \ldots, K$ es adaptado). Si para cada n entre 0 y $N-1$ y para cada función $f(x_1, x_2, \ldots, x_K)$ existe otra función $g(x_1, x_2, \ldots, x_K)$ (que depende de n y de f) que cumple*

$$\mathbb{E}_n[f(X_{n+1}^1, X_{n+1}^2, \ldots, X_{n+1}^K)] = g(X_n^1, X_n^2, \ldots, X_n^K),$$

entonces diremos que el proceso $(X_n^1, X_n^2, \ldots, X_n^K), n = 0, 1, \ldots, N$ es de Markov.

El siguiente resultado es enunciado sin demostración y es una versión sencilla del que aparece en [8]. Tal resultado probará su utilidad en lo que sigue.

Teorema 3.4.1. *Consideremos el Modelo Binomial de N periodos. Sea n un entero entre 0 y N. Supongamos que las variables aleatorias X^1 y X^2 dependen solo de los lanzamientos 1 a n y que la variable aleatoria Y depende de los lanzamientos $n+1$ a N. Sea $f(x^1, x^2, y)$ una función de tres variables y definamos*

$$g(x^1, x^2) = \mathbb{E}[f(x^1, x^2, Y)].$$

Entonces

$$\mathbb{E}_n[f(X^1, X^2, Y)] = g(X^1, X^2).$$

El resultado anterior nos asegura que si al tiempo n la variable aleatoria X es conocida, entonces solo tenemos que calcular la esperanza condicional al tiempo n de la variable aleatoria $f(x,Y)$. Por las propiedades de la esperanza condicional, como la variable aleatoria Y no depende de los primeros n lanzamientos, entonces la esperanza condicional coincide con el valor esperado, es por esto que $f(x,Y)$ se convierte en una función de x, por lo que $\mathbb{E}_n[f(X,Y)]$ es una función solamente de la variable aleatoria X. Con lo anterior es posible probar resultados que nos serán útiles en el capítulo 5 de este trabajo. En cada uno de los resultados se asume que estamos trabajando sobre el Modelo Binomial.

Proposición 3.4.1. *Consideremos el proceso adaptado $(S_n, M_n), n = 0, 1, \ldots, N$, donde S_n es el proceso de precios de la acción y $M_n = \text{máx}_{0\leq k\leq n} S_k$. Entonces el proceso (S_n, M_n) es de Markov.*

Demostración. Definamos la variable aleatoria $Y = \frac{S_{n+1}}{S_n}$ que depende solo del lanzamiento $n+1$ de la moneda, pues si es cara $Y = u$ y si es cruz $Y = d$. Con esto, se cumple

$$S_{n+1} = YS_n,$$

además, también se cumple

$$M_{n+1} = M_n \vee S_{n+1} = M_n \vee YS_n$$

donde $\vee$ denota el máximo entre dos números. Supongamos que $f(x,y)$ es una función de dos variables, entonces

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1}, M_{n+1})] = \mathbb{E}_n[f(YS_n, M_n \vee YS_n)].$$

Ahora, del lado derecho tenemos las variables S_n y M_n que dependen de los lanzamientos 1 a n. Sin embargo, la variable aleatoria Y solo depende del lanzamiento $n+1$, por tanto es posible aplicar el resultado 3.4.1. Definiendo la función $g(s,m)$ como sigue:

$$g(s,m) = \mathbb{E}[f(Ys, m \vee Ys)] = pf(us, m \vee us) + qf(ds, m \vee ds)$$

se tiene que

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1}, M_{n+1})] = g(S, M).$$

□

De manera similar se prueba el siguiente resultado.

Proposición 3.4.2. *Consideremos el proceso adaptado $(S_n, M_n), n = 0, 1, \ldots, N$, donde S_n es el proceso de precios de la acción y $M_n = \text{mín}_{0\leq k\leq n} S_k$. Entonces el proceso (S_n, M_n) es de Markov.*

Demostración. Si definimos la variable aleatoria Y como en el resultado anterior y notamos que en este caso

$$M_{n+1} = M_n \wedge YS_n$$

donde $\wedge$ denota el mínimo entre dos números se tiene

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1}, M_{n+1})] = g(S, M),$$

donde

$$g(s,m) = \mathbb{E}[f(Ys, m \wedge Ys)] = pf(us, m \wedge us) + qf(ds, m \wedge ds).$$

□

Proposición 3.4.3. *Consideremos el proceso adaptado* $(S_n, Y_n), n = 0, 1, \dots, N$*, donde* S_n *es el proceso de precios de la acción y* $Y_n = \sum_{k=0}^{n} S_n$*. Entonces el proceso* (S_n, Y_n) *es de Markov.*

Demostración. Supongamos que la variable aleatoria Y se encuentra definida como en los ejemplos anteriores, además notemos que

$$Y_{n+1} = S_{n+1} + Y_n = YS_n + Y_n.$$

Entonces por el resultado 3.4.1 se tiene

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1}, Y_{n+1})] = g(S, Y)$$

donde

$$g(s,y) = \mathbb{E}[f(Ys, Ys + y)] = pf(us, us + y) + qf(ds, ds + y).$$

□

Los conceptos que se describen a continuación son necesarios para la prueba de convergencia del Modelo Binomial que presentaremos en el capítulo 4.

3.5. Distribución normal

Definición 3.5.1. *Sea* X *una variable aleatoria. Diremos que* X *tiene una distribución normal estándar si su función de densidad* $f(x)$ *está dada de la siguiente forma:*

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3.19}$$

La función de distribución de ϕ se denota comúnmente como Φ y está dada como sigue:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}. \tag{3.20}$$

Supongamos que tenemos una variable aleatoria X con distribución normal estándar, es decir, su función de densidad está dada por la ecuación 3.19. Sea $Y = \mu + \sigma X$. Por el teorema de cambio de variable de probabilidad tendremos que la función de densidad $g(y)$ de esta nueva variable aleatoria está dada como:

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < y < \infty. \tag{3.21}$$

3.6. Teorema del límite central

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 finita distinta de cero. Se define la variable aleatoria S_n, para cada n como $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. De las propiedades del valor esperado es posible notar que S_n tiene media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$. Lo que nos asegura tal teorema es que en el límite, la distribución de la variable aleatoria

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

es normal estándar. Para nuestros fines, se enuncia a continuación sin demostración una versión particular del teorema del límite central, conocida como teorema de Moivre-Laplace.

Teorema 3.6.1 (Teorema de Moivre-Laplace)**.** *Sea X_n la suma de n variables aleatorias de Bernoulli con parámetro p. Entonces X_n tiene una distribución binomial con media np y varianza npq. Además se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right] = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

3.7. Caminata aleatoria

Supongamos que lanzamos una moneda varias veces y que la probabilidad de obtener una cara es la misma que la de obtener cruz. Definamos $X_n = 1$ si el n-ésimo lanzamiento resulta cara y $X_n = -1$ si resulta cruz. Si hacemos $M_0 = 0$ y

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \; n \geq 1,$$

entonces diremos que el proceso $M_0, M_1, \ldots$ es una caminata aleatoria simétrica. En el caso en que la probabilidad de obtener cara es distinta a la probabilidad de obtener cruz, se dice que la caminata aleatoria es asimétrica.

3.7.1. Caminata aleatoria escalada

En el Modelo de Black-Scholes-Merton se asume que el precio de la acción sigue un movimiento Browniano geométrico. La idea de la prueba de convergencia será la de probar la convergencia de una caminata aleatoria a un movimiento Browniano. Para poder lograr esto, es necesario modificar un poco la caminata aleatoria simétrica. Supongamos que n es un entero. Definimos la *caminata aleatoria simétrica escalada* como

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt},$$

donde se supone que nt es entero. En el caso que nt no fuese un entero, podemos definir $W^{(n)}(t)$ como $W^{(n')}(t')$ para $n't'$ el entero más cercano. Para obtener un movimiento Browniano en el límite es necesario probar que en el límite, la caminata aleatoria simétrica escalada es una distribución normal. En el capítulo que sigue se demuestra una variación de este resultado que nos asegura que la distribución de la acción en el Modelo Binomial converge a una distribución log-normal, tal como se establece en el modelo de Black-Scholes-Merton.

Capítulo 4

Convergencia del Modelo Binomial

Con el modelo construido en el capítulo 2 y el teorema de valuación neutral al riesgo 3.3.1 es posible valuar un seguro derivado cualquiera cuyo activo subyacente dependa de la trayectoria de los n lanzamientos de la moneda. En el artículo [4] de Cox *et al* el modelo es aplicado únicamente al caso de una opción de compra europea, de igual forma lo hacen Black y Scholes en [2] con su modelo en tiempo continuo. No obstante, ambos modelos son generalizables, como hemos visto con el modelo de Cox en este trabajo y como se puede observar en [10] o en el capítulo 13 de [6] en donde se describe la aplicación del modelo de Black-Scholes-Merton a un gran número de seguros como por ejemplo contratos forward, opciones compuestas(opciones sobre opciones), opciones sobre índices bursátiles, opciones americanas, opciones sobre divisas, opciones lookback, bonos. En el artículo de Cox se demuestra que en el caso de una opción de compra europea la fórmula que se obtiene utilizando el Modelo Binomial converge a la fórmula obtenida por Black y Scholes en [2]. Sin embargo, hemos mencionado ya que es posible modificar ambos modelos para que sea posible valuar un seguro derivado distinto. No es posible hacer una prueba de convergencia para cada seguro derivado, por tanto la técnica que seguiremos será la de probar que la distribución que tiene la acción en el Modelo Binomial, conforme aumenta el número de periodos, converge a la distribución que se asume en el modelo de Black-Scholes-Merton.

La prueba siguiente es similar a la que aparece en [10], que es una adaptación de la prueba de Cox *et al* en [4], en donde se demuestra la convergencia de la fórmula obtenida por Cox a la fórmula de Black y Scholes. Posteriormente, se procede a demostrar la convergencia en distribución. Este último resultado aparece solo como ejercicio en [9].

4.1. Convergencia de la fórmula de Cox a la fórmula de Black y Scholes

En el capítulo 2 obtuvimos el teorema de replicación y con él fue posible hallar la fórmula de valuación de una opción de compra europea 2.27 que repetimos aquí:

$$V_0 = S_0\phi\left(l; n, \frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}\right) - \frac{K}{(1+r)^n}\phi\left(l; n, \tilde{\mathbf{p}}\right), \tag{4.1}$$

donde

$$\frac{\ln\left(\frac{K}{d^n S_0}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)} < l \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{d^n S_0}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)} + 1.$$

La fórmula de valuación obtenida por Black y Scholes utilizando el modelo en tiempo continuo es la siguiente:

$$V_0 = S_0\Phi(x) - \frac{K}{(1+\hat{r})^t}\Phi(x - \sigma\sqrt{t}), \tag{4.2}$$

en donde

$$x = \frac{\ln\frac{S_0}{K(1+\hat{r})^{-t}}}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}. \tag{4.3}$$

Una comparación directa de ambas fórmulas nos dice que son similares. En el caso del Modelo Binomial, tenemos que $(1+r)^n$ tiene que ser igual a $(1+\hat{r})^t$, sin importar el número de periodos que se considere. Esto lo lograremos definiendo r de manera conveniente. Por tanto, solo se necesita mostrar que cuando $n \to \infty$ se tiene

$$\phi\left(l; n, \frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}\right) \to \Phi(x) \tag{4.4}$$

y

$$\phi\left(l; n, \tilde{\mathbf{p}}\right) \to \Phi(x - \sigma\sqrt{t}). \tag{4.5}$$

Probaremos primero que

$$\phi\left(l; n, \tilde{\mathbf{p}}\right) \to \Phi(x - \sigma\sqrt{t}).$$

Para poder continuar, es necesario especificar la forma de las parámetros u y d del Modelo Binomial. En este caso, la elección será de la siguiente forma:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}},$$

en donde σ denota el parámetro de volatilidad del subyacente considerado en el Modelo de Black-Scholes-merton[1]. Sea X_n una variable aleatoria con distribución binomial bajo la medida de probabilidad libre de riesgo cuyo parámetro n es el número de periodos del modelo binomial con que se esté trabajando. Si consideramos el límite de la distribución binomial complementaria tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \phi(l; n, \tilde{\mathbf{p}}) &= \lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}[X_n \geq l] \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}[X_n \leq l-1] \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}\left[\frac{X_n - n\tilde{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}} \leq \frac{l-1-n\tilde{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}}\right].\end{aligned} \tag{4.6}$$

Notemos que en realidad la última desigualdad debe ser estricta. Sin embargo, el valor obtenido en el límite es independiente de tal consideración. De la definición de l se sigue que

$$l - 1 \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma\sqrt{t/n}}{2\sigma\sqrt{t/n}}, \tag{4.7}$$

previa sustitución de los valores u y d definidos anteriormente. De la forma en que se ha elegido l de ahora en adelante consideraremos la ecuación 4.7 como una igualdad. Ahora, es necesario que la tasa de interés del Modelo Binomial en los n periodos sea igual a la tasa de interés $\hat{r}$ de la fórmula de Black y Scholes. Esto es, se debe cumplir:

$$(1+r)^n = (1+\hat{r})^t.$$

De la fórmula anterior se desprende que el valor de r en el Modelo Binomial de n periodos es

$$r = \sqrt[n]{(1+\hat{r})^t} - 1.$$

Ahora verifiquemos el valor de $\tilde{\mathbf{p}}$ cuando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{p}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+r-d}{u-d}, \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(1+\hat{r})^t} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}.\end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hopital se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{t\sqrt[n]{(1+\hat{r})^t}\ln(1+\hat{r})}{n^2} - \frac{t\sigma e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{2n^2\sqrt{t/n}}}{\frac{t\sigma}{2n^2\sqrt{t/n}}\left(-e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\right)}.$$

[1] La obtención de tales valores de puede ser hallada en [10].

Simplificando la expresión anterior tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma + 2\sqrt{t/n}e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\sqrt[n]{(1+\hat{r})^t}\ln(1+\hat{r})}{\sigma\left(1+e^{2\sigma\sqrt{t/n}}\right)}.$$

De donde concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \tag{4.8}$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r} = \left(\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{p}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{\sqrt[n]{(1+\hat{r})^t}}\right) = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{l-1-n\tilde{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)+n\sigma\sqrt{t/n}}{2\sigma\sqrt{t/n}} - n\tilde{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma\sqrt{t/n} - 2\sigma n\tilde{\mathbf{p}}\sqrt{t/n}}{2\sigma\sqrt{t/n}\sqrt{n\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma(1-2\tilde{\mathbf{p}})\sqrt{t/n}}{2\sigma\sqrt{t\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Calculemos ahora $\lim_{n\to\infty} n\sigma(1-2\tilde{\mathbf{p}})\sqrt{t/n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sigma(1-2\tilde{\mathbf{p}})\sqrt{t/n} &= \lim_{n\to\infty} \sigma(1-2\tilde{\mathbf{p}})\sqrt{nt} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - 2\sqrt[n]{(1+\hat{r})^t}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}\right)\sqrt{nt} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma t\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - 2\sqrt[n]{(1+\hat{r})^t}}{\sqrt{\frac{t}{n}}\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\right)}\right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Si hacemos la sustitución $x = \sqrt{\frac{t}{n}}$ en la última igualdad de 4.11 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} + e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - 2\sqrt[n]{(1+\hat{r})^t}}{\sqrt{\frac{t}{n}}\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sigma x} + e^{-\sigma x} - 2(1+\hat{r})^{x^2}}{x(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x})} \tag{4.12}$$

Aplicando la regla de L'Hopital dos veces a esta última expresión nos queda:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sigma x}+e^{-\sigma x}-2(1+\hat{r})^{x^2}}{x(e^{\sigma x}-e^{-\sigma x})} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sigma e^{\sigma x}-\sigma e^{-\sigma x}-4x\ln(1+\hat{r})(1+r)^{x^2}}{e^{\sigma x}-e^{-\sigma x}+\sigma x(e^{\sigma x}+e^{-\sigma x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sigma^2 e^{\sigma x}+\sigma^2 e^{-\sigma x}-4\ln(1+\hat{r})(1+\hat{r})^{x^2}-8x^2(1+\hat{r})^{x^2}(\ln(1+\hat{r}))^2}{2\sigma e^{\sigma x}+2\sigma e^{-\sigma x}+\sigma x(\sigma e^{\sigma x}-\sigma e^{-\sigma x})} \\
&= \frac{\sigma^2+\sigma^2-4\ln(1+\hat{r})}{4\sigma} \\
&= \frac{1}{2}\sigma - \ln(1+\hat{r}).
\end{aligned}
$$

De lo anterior, el límite 4.11 nos queda como

$$\lim_{n\to\infty} n\sigma(1-2\tilde{\mathbf{p}})\sqrt{t/n} = \frac{1}{2}\sigma^2 t - t\ln(1+\hat{r}). \tag{4.13}$$

Sustituyendo esta última ecuación en la última igualdad de 4.10 se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l-1-n\tilde{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}} = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 t - t\ln(1+\hat{r})}{2\sigma\sqrt{t}} \tag{4.14}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{K(1+\hat{r})^{-t}}{S_0}\right)}{2\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}. \tag{4.15}$$

Donde se ha utilizado la ecuación 4.8 para el denominador. De lo anterior y de 4.6, aplicando el teorema del límite central 3.6.1 se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \phi(l;n,\tilde{\mathbf{p}}) = 1-\Phi(z),$$

en donde el valor de z está dado por la ecuación 4.15. Aplicando la propiedad de simetría de la distribución normal estándar se sigue que

$$
\begin{aligned}
1-\Phi(z) &= \Phi(-z) \\
&= \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{K(1+\hat{r})^{-t}}{S_0}\right)}{2\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K(1+\hat{r})^{-t}}\right)}{2\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right) \\
&= \Phi(x-\sigma\sqrt{t}),
\end{aligned}
$$

donde el valor de x es el de la ecuación 4.3. Por tanto, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \phi(l;n,\tilde{\mathbf{p}}) = \Phi(x-\sigma\sqrt{t}). \tag{4.16}$$

Para hallar el valor de $\lim_{n\to\infty} \phi\left(l; n, \dfrac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}\right)$ procederemos de manera similar a como se probó 4.4. Si hacemos $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}$ y $\hat{\mathbf{q}} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}d}{1+r}$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \phi\,(l; n, \hat{\mathbf{p}}) &= \lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}[X \geq l] \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}[x \leq l-1] \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}\left[\frac{X_n - n\hat{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}}} \leq \frac{l-1-n\hat{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}}}\right].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

De manera similar a 4.10 tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{l-1-n\hat{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)+n\sigma\sqrt{t/n}}{2\sigma\sqrt{t/n}} - n\hat{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma\sqrt{t/n} - 2\sigma n\hat{\mathbf{p}}\sqrt{t/n}}{2\sigma\sqrt{t/n}\sqrt{n\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma(1-2\hat{\mathbf{p}})\sqrt{t/n}}{2\sigma\sqrt{t\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}}}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

A continuación calcularemos el valor de $\lim_{n\to\infty} n\sigma(1-2\hat{\mathbf{p}})\sqrt{t/n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sigma(1-2\hat{\mathbf{p}})\sqrt{t/n} &= \lim_{n\to\infty} \sigma(1-2\hat{\mathbf{p}})\sqrt{nt} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma\left(1 - \frac{2\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}\right)\sqrt{nt} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma\left(1 - 2e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}(1+\hat{r})^{-t/n}\left(\frac{\sqrt[n]{(1+\hat{r})^t} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}\right)\right)\sqrt{nt}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Haciendo el cambio de variable $x = \sqrt{\frac{t}{n}}$ en esta última ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\sigma(1-2\hat{\mathbf{p}})\sqrt{t/n} &= \lim_{x\to 0} \sigma t\left(1 - 2e^{\sigma x}(1+\hat{r})^{-x^2}\left(\frac{(1+\hat{r})^{x^2} - e^{-\sigma x}}{x\,(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x})}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \sigma t\left(\frac{e^{\sigma x} - e^{-\sigma x} - 2e^{-\sigma x} + 2(1+\hat{r})^{x^2}}{x\,(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x})}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \sigma t\left(\frac{-e^{\sigma x} - e^{-\sigma x} + 2(1+\hat{r})^{x^2}}{x\,(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x})}\right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ahora, notemos que la última igualdad de 4.20 no es otra cosa que 4.12 con signo negativo, por tanto, este último límite que deseamos calcular será el valor negativo del límite 4.13. Asi:

$$\lim_{n\to\infty} n\sigma(1-2\hat{\mathbf{p}})\sqrt{t/n} = t\ln(1+\hat{r}) - \frac{1}{2}\sigma^2 t. \tag{4.21}$$

Sustituyendo este valor en la última igualdad de 4.18 se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{l-1-n\hat{\mathbf{p}}}{\sqrt{n\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}}} &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + t\ln(1+\hat{r}) - \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + t\ln(1+\hat{r})}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{K(1+\hat{r})^t}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la ecuación 4.9 para calcular el valor del denominador. De este último desarrollo y aplicando el teorema 3.6.1 se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \phi\left(l; n, \frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}\right) = \Phi(x), \tag{4.22}$$

donde el valor de x está dado por la ecuación 4.3.

De las ecuaciones 4.22 y 4.16 se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} S_0\phi\left(l; n, \frac{\tilde{\mathbf{p}}u}{1+r}\right) - \frac{K}{(1+r)^n}\phi(l; n, \tilde{\mathbf{p}}) = S_0\Phi(x) - \frac{K}{(1+\hat{r})^t}\Phi(x-\sigma\sqrt{t}).$$

Es decir, la fórmula obtenida por Cox para valuar una opción de compra europea converge a la fórmula de Black y Scholes.

4.2. Distribución de la acción en el Modelo Binomial

La diferencia entre el Modelo Binomial de valuación de opciones y el modelo de Black-Scholes-Merton, como ya se ha mencionado previamente, es la distribución asignada al precio del activo subyacente, mientras que en el modelo binomial tenemos que el valor de la acción solo puede tomar uno de dos posibles valores en cada periodo, en el modelo de Black-Scholes-Merton la acción tiene una distribución log-normal en cada instante de tiempo, esto es, si denotamos por $S(t)$ la distribución de la acción al tiempo t entonces tendremos que

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \tag{4.23}$$

donde $W(t)$ sigue una distribución normal con media cero y varianza t. El proceso estocástico que tiene la distribución 4.23 en cada instante de tiempo y que cumple otras condiciones más es llamado movimiento Browniano geométrico, sin embargo, no es nuestro objetivo discutir tal proceso. Ahora centremos nuestra atención en el Modelo Binomial y supongamos que $\sigma > 0$ y $r \geq 0$, donde σ denota el parámetro conocido como volatilidad en el modelo de Black-Scholes-Merton y r denota la tasa de interés libre de riesgo. Para cada entero positivo n estaremos considerando un Modelo Binomial de n periodos. Por tanto, la tasa de interés por periodo será $\frac{r}{n}$, el factor de alza $u_n = e^{\sigma/\sqrt{n}}$ y $d_n = e^{-\sigma/\sqrt{n}}$. En este caso, tenemos que las probabilidades libres de riesgo son

$$\tilde{\mathbf{p}}_n = \frac{\frac{r}{n} + 1 - e^{-\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{q}}_n = \frac{e^{\sigma/\sqrt{n}} - \left(\frac{r}{n} + 1\right)}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}}.$$

Sea t un número real positivo y para cada entero positivo n tal que nt es un entero definamos

$$M_{nt,n} = \sum_{k=1}^{nt} X_{k,n},$$

donde $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{nt,n}$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas tal que

$$\mathbb{P}[X_{k,n} = 1] = \tilde{\mathbf{p}}_n, \quad \mathbb{P}[X_{k,n} = -1] = \tilde{\mathbf{q}}_n, \quad k = 1, \ldots, nt.$$

El precio de la acción al tiempo t está determinado por el valor inicial de la acción y el número de periodos nt. Si al periodo nt han ocurrido H_{nt} caras y T_{nt} cruces, entonces el valor de la acción estará dado por

$$S_n(t) = S(0) u_n^{H_{nt}} d_n^{T_{nt}}.$$

Ahora, notemos que la suma de las cruces y de las caras es igual al número de periodos:

$$nt = H_{nt} + T_{nt},$$

además, la diferencia entre H_{nt} y T_{nt} no es otra cosa que la caminata aleatoria $M_{nt,n}$:

$$M_{nt,n} = H_{nt} + T_{nt}.$$

De estas dos últimas ecuaciones se obtiene

$$H_{nt} = \frac{1}{2}(nt + M_{nt,n}), \quad T_{nt} = \frac{1}{2}(nt - M_{nt,n}).$$

Sustituyendo los valores de u_n y d_n se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} S_n(t) &= S(0) u_n^{\frac{1}{2}(nt + M_{nt,n})} d_n^{\frac{1}{2}(nt - M_{nt,n})} \\ &= S(0) \exp\left\{ \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}(nt + M_{nt,n}) \right\} \exp\left\{ -\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}(nt - M_{nt,n}) \right\} \\ &= s(0) \exp\left\{ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} M_{nt,n} \right\}. \end{aligned}$$

La idea es probar que esta distribución converge a una distribución log-normal, lo que es equivalente a probar que la caminata aleatoria $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$ converge a una distribución normal con media $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ y varianza $\sigma^2 t$.

4.3. Prueba de convergencia en distribución

De la teoría de probabilidad sabemos que es posible identificar dos variables aleatorias por medio de sus funciones generadoras de momentos. Por tanto, calcularemos la función generadora de momentos de la caminata aleatoria $\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$. Sabemos que la función generadora de momentos de una suma de variables aleatorias independientes es el producto de las funciones generadoras de momentos, por tanto, si denotamos con $\phi_n(u)$ a la función generadora de momentos de $\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\phi_n(u) &= \mathbb{E}\left[e^{\frac{u}{\sqrt{n}}M_{nt,n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}}M_{nt,n}\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{nt}\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j\right\}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{nt}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j\right\}\right] \\
&= \prod_{j=1}^{nt}\left[\tilde{\mathbf{p}}_n e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \tilde{\mathbf{q}}_n e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right] \\
&= \left[\left(\frac{\frac{r}{n} + 1 - e^{-\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}}\right)e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \left(\frac{e^{\sigma/\sqrt{n}} - \left(\frac{r}{n}+1\right)}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}}\right)e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right]^{nt}.
\end{aligned}$$

Probar que la función generadora de momentos $\phi_n(u)$ converge a la función deseada, es equivalente a probar que $\log(\phi_n(u))$ converge a la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal con media $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ y varianza $\sigma^2 t$. Haciendo el cambio de variable $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, tendremos que

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(u) = \lim_{x\to 0}\phi_{\frac{1}{x^2}}(u).$$

Además recordemos que las funciones trigonométricas hipérbolicas están definidas como

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

si introducimos estas funciones en la función $\phi_n(u)$ tendremos que

$$\begin{aligned}\phi_n(u) &= \left[\frac{e^{\frac{u}{\sqrt{n}}}}{2\sinh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\left(\frac{r}{n}+1-e^{-\sigma/\sqrt{n}}\right)+\frac{e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}}{2\sinh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\left(e^{\sigma/\sqrt{n}}-\left(\frac{r}{n}+1\right)\right)\right]^{nt}\\ &= \left[\frac{1}{2\sinh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\left(\left(\frac{r}{n}+1\right)e^{\frac{u}{\sqrt{n}}}-e^{\frac{u-\sigma}{\sqrt{n}}}-\left(\frac{r}{n}+1\right)e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}+e^{\frac{\sigma-u}{\sqrt{n}}}\right)\right]^{nt}\\ &= \left[\frac{1}{\sinh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\left(\left(\frac{r}{n}+1\right)\sinh\frac{u}{\sqrt{n}}+\sinh\frac{\sigma-u}{\sqrt{n}}\right)\right]^{nt}\end{aligned}$$

Desarrollando el último término de la expresión anterior aplicando la identidad

$$\sinh(A-B)=\sinh A\cosh B-\cosh A\sinh B$$

tenemos

$$\begin{aligned}\phi_n(u) &= \left[\frac{1}{\sinh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\left(\left(\frac{r}{n}+1\right)\sinh\frac{u}{\sqrt{n}}+\sinh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cosh\frac{u}{\sqrt{n}}-\cosh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sinh\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right]^{nt}\\ &= \left[\cosh\frac{u}{\sqrt{n}}+\frac{\left(\frac{r}{n}+1\right)\sinh\frac{u}{\sqrt{n}}-\cosh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sinh\frac{u}{\sqrt{n}}}{\sinh\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right]^{nt},\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable mencionado anteriormente se tiene

$$\phi_{\frac{1}{x^2}}(u)=\left[\cosh ux+\frac{(rx^2+1)\sinh ux-\cosh\sigma x\sinh ux}{\sinh\sigma x}\right]^{\frac{t}{x^2}}$$

Para cálcular el límite deseado, es suficiente trabajar con el logaritmo de la función anterior. Al aplicar logaritmo la ecuación anterior nos queda como

$$\log\phi_{\frac{1}{x^2}}(u)=\frac{t}{x^2}\log\left[\cosh ux+\frac{(rx^2+1-\cosh\sigma x)\sinh ux}{\sinh\sigma x}\right]$$

Notemos que las expansiones en series de Taylor de las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ son

$$\begin{aligned}\sinh z &= z+\mathbf{O}(z^3),\\ \cosh z &= 1+\frac{1}{2}z^2+\mathbf{O}(z^4),\end{aligned}$$

donde la notación $\mathbf{O}(z)$ es utilizada para representar términos de orden z. Si sustituimos estas expansiones en el argumento de la función logaritmo tenemos

$$\begin{aligned}\cosh ux+\frac{(rx^2+1-\cosh\sigma x)\sinh ux}{\sinh\sigma x} &= 1+\frac{1}{2}u^2x^2+\mathbf{O}(u^4x^4)\\ &\quad+\frac{\left[rx^2-\frac{1}{2}\sigma^2x^2+\mathbf{O}(\sigma^4x^4)\right][ux+\mathbf{O}(u^3x^3)]}{\sigma x+\mathbf{O}(\sigma^3x^3)}.\end{aligned}$$

Manipulando el último término tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\left[rx^2-\frac{1}{2}\sigma^2x^2-\mathbf{O}(\sigma^4x^4)\right][ux+\mathbf{O}(u^3x^3)]}{\sigma x+\mathbf{O}(\sigma^3x^3)} &= \frac{\left[rux^2-\frac{1}{2}\sigma^2ux^2+\mathbf{O}(\sigma^4x^4)\right][x+\mathbf{O}(u^2x^3)]}{\sigma x+\mathbf{O}(\sigma^3x^3)}\\ &= \frac{\left[\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma ux^2+\mathbf{O}(\sigma^3x^4)\right][x+\mathbf{O}(u^2x^3)]}{x+\mathbf{O}(\sigma^2x^3)}\end{aligned}$$

Además como $\mathbf{O}(\sigma^3x^4)=\mathbf{O}(x^4)$, $\mathbf{O}(u^2x^3)=\mathbf{O}(x^3)$ y $\mathbf{O}(\sigma^2x^3)=\mathbf{O}(x^3)$ entonces

$$\begin{aligned}&= \frac{\left[\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma ux^2+\mathbf{O}(x^4)\right][x+\mathbf{O}(x^3)]}{x+\mathbf{O}(x^3)}\\ &= \frac{rux^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma ux^2+\mathbf{O}(x^4)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el argumento de la función logaritmo nos queda

$$\begin{aligned}\cosh ux+\frac{(rx^2+1-\cosh\sigma x)\sinh ux}{\sinh\sigma x} &= 1+\frac{1}{2}u^2x^2+\mathbf{O}(u^4x^4)+\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma ux^2+\mathbf{O}(x^4)\\ &= 1+\frac{1}{2}u^2x^2+\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma ux^2+\mathbf{O}(x^4).\end{aligned}$$

Ahora, si consideramos la expansión en serie de Taylor de la función logaritmo

$$\log(1+x)=x+\mathbf{O}(x^2),$$

la función $\log\phi_{\frac{1}{x^2}}(u)$ nos queda como

$$\begin{aligned}log\phi_{\frac{1}{x^2}}(u) &= \frac{t}{x^2}\log\left[1+\frac{1}{2}u^2x^2+\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma ux^2+\mathbf{O}(x^4)\right]\\ &= \frac{t}{x^2}\left[\frac{1}{2}u^2x^2+\frac{rux^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma ux^2+\mathbf{O}(x^4)\right]\\ &= \frac{tu^2}{2}+\frac{tru}{\sigma}-\frac{t\sigma u}{2}+\mathbf{O}(x^4),\end{aligned}$$

tomando el límite cuando $x\to 0$ en esta última expresión nos queda

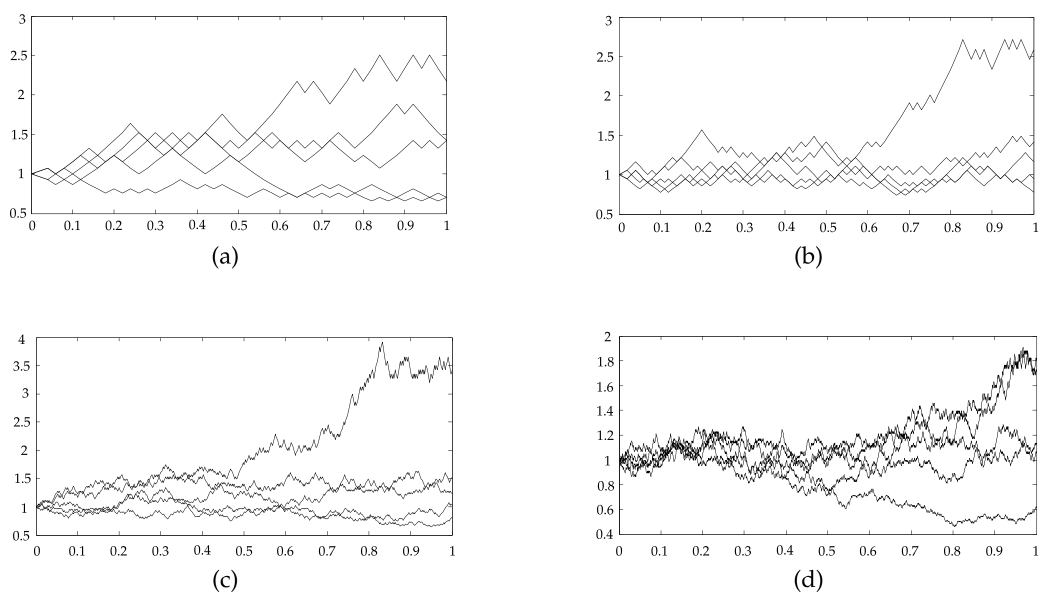
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log\phi_{\frac{1}{x^2}}(u) &= \frac{tu^2}{2}+\frac{tru}{\sigma}-\frac{t\sigma u}{2}\\ &= \left(\frac{r}{\sigma}-\frac{1}{2}\right)tu+\frac{tu^2}{2}.\end{aligned}$$

Donde la última expresión representa el logaritmo de la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal con media $\left(\frac{r}{\sigma}-\frac{1}{2}\right)t$ y varianza t. Con esto, hemos probado que para cada t la variable aleatoria $\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$ tiene como límite una variable aleatoria normal con media $\left(\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\right)t$ y varianza t. Una aplicación directa del teorema del cambio de variable en probabilidad nos dirá que la distribución límite de la variable aleatoria

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}M_{nt,n}$$

es la de una variable aleatoria normal con media $\left(r - \frac{\sigma}{2}\right)t$ y varianza $\sigma^2 t$, por tanto, la distribución de la variable aleatoria $S_n(t)$ coincide en el límite con la del movimiento Browniano $S(0)\exp\left\{\sigma W(t) + \left(r - \frac{\sigma}{2}\right)t\right\}$ al tiempo t.

En la figura 4.1 aparecen distintas realizaciones del precio de la acción considerando el Modelo Binomial con distintos periodos. A simple vista podemos observar que conforme aumenta el número de periodos las trayectoras se asemejan más a un movimiento Browniano Geométrico.



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.1: Distintas trayectorias del precio de una acción considerando Modelos Binomiales con diferentes periodos. La figura 4.1a representa cinco trayectorias de un Modelo Binomial de 50 periodos. La figura 4.1b representa cinco trayectorias distintas de un modelo con 100 periodos. En 4.1c y 4.1d aparecen las trayectorias considerando un modelo Binomial de 500 y 1000 periodos, respectivamente. En todos los casos, $S_0 = 1$, $t = 1$, $\sigma = 0.5$ y $r = 0.10$.

Capítulo 5

Aplicaciones del Modelo Binomial

5.1. Algoritmo Binomial

El teorema 2.3.1 es una herramienta demasiado útil al momento de valuar no solo opciones, sino cualquier tipo de seguros derivados que dependen de la trayectoria posible que puede seguir la acción durante la vida del contrato. Tal teorema trae consigo un método para calcular el valor de un seguro, asi como la estrategia que debe seguir el comprador o vendedor con tal de cubrir su posición. Una implementación directa del teorema 2.3.1 sería muy costosa computacionalmente. Por ejemplo, con un modelo binomial de 32 periodos se tendrían $2^{32} > 1,000,000,000$ estados distintos. Aún considerando que el valor de cada estado se calcule en tiempo constante nuestro algoritmo sería demasiado lento, sin mencionar que en la práctica se tienen que elegir al menos cien periodos para obtener resultados aceptables. Sin embargo no todo está perdido, pues podemos quitarnos de encima muchos cálculos al notar que aún cuando nuestro espacio muestral es demasiado grande, el conjunto de valores posibles de la acción no lo es, pues en un modelo binomial de n periodos se tendrían apenas $n+1$ valores posibles para la acción. Tal observación se deriva del hecho de que el proceso S_n, el precio de la acción, tiene la propiedad de Markov bajo la medida de probabilidad libre de riesgo. De la propiedad de Markov y de la fórmula de valuación neutral al riesgo obtuvimos el algoritmo 3.18 que repetimos aquí:

$$\begin{aligned} v_n(s) &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_{n+1}(us) + \tilde{\mathbf{q}}v_{n+1}(ds)\right], \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0 \\ v_N(s) &= g(s). \end{aligned} \tag{5.1}$$

junto con la ecuación que representa la posición que debe tomar el comprador (o el vendedor), denotada por δ y denominada δ *-cobertura* :

$$\delta_n(s) = \frac{v_{n+1}(us) - v_{n+1}(ds)}{(u-d)s}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5.2}$$

Es necesario prestar especial atención al hecho de que hemos asumido que $g(\cdot)$ es una función que depende solo del valor actual de la acción, lo que no es cierto para todos los seguros derivados, por ejemplo, una opción de compra europea o americana no tendrá problema alguno con tal supuesto, sin embargo, si consideramos opciones un tanto más elaboradas como las asiáticas o las opciones lookback nos enfrentaremos a que hace falta más información para poder valuar la opción. A continuación se desarrollan algunos casos de seguros derivados para los cuales es posible hallar algoritmos eficientes que calculen su valor. En el apéndice B aparecen los detalles de la implementación de tales algoritmos en el lenguaje MATLAB.

5.1.1. Opciones europeas

Tanto si la opción es de compra o de venta, mientras el subyacente sea una acción que no paga dividendos el algoritmo 5.1 es el mismo para valuar tales opciones. En este caso, basta con reemplazar $g(s)$ por $(s-K)^+$ en el algoritmo 5.1. El nuevo algoritmo nos queda como sigue:

$$
\begin{aligned}
v_n(s) &= \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_{n+1}(us) + \tilde{\mathbf{q}}v_{n+1}(ds)\right], \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0 \\
v_N(s) &= (s-K)^+.
\end{aligned}
$$

$$
\delta_n(s) = \frac{v_{n+1}(us) - v_{n+1}(ds)}{(u-d)s}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.
$$

En el caso de una opción de venta, se intercambia $(s-K)^+$ por $(K-s)^+$. El valor de δ_n es el número de acciones que debe poseer el portafolio replicante.

5.1.2. Opciones americanas

A diferencia de las opciones europeas, las americanas tienen la característica de poder ser ejercidas en cualquier periodo previo a la madurez, incluida la fecha de madurez. Para que el algoritmo 5.1 funcione, es necesario pues que tome en cuenta la posibilidad de un ejercicio en el periodo actual, o un ejercicio posterior. De lo anterior, se obtiene el siguiente algoritmo para la valuación de una opción de compra americana:

$$
\begin{aligned}
v_n(s) &= \text{máx}\left\{(s-K)^+, \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_{n+1}(us) + \tilde{\mathbf{q}}v_{n+1}(ds)\right]\right\}, \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0 \\
v_N(s) &= (s-K)^+.
\end{aligned}
$$

En donde $(s-K)^+$ debe ser sustituido por $(K-s)^+$ en el caso de una opción de venta americana. La fórmula de la $\delta-$cobertura en este caso es la misma que para una opción europea correspondiente.

5.1.3. Opciones lookback

Son aquellas que permiten que el comprador adquiera la acción con un precio de ejercicio igual al menor precio observado durante la vigencia del contrato, o que el vendedor pueda ejercer su derecho exigiendo como precio de ejercicio el mayor precio observado en la vida de la opción. Como podemos observar, en este caso el precio de ejercicio K es un término flotante que se determina al final de la vida del contrato, una vez que se observa la trayectoria del activo. Si consideramos una opción de venta, su pago está determinado por

$$V_N = M_N - S_N,$$

Donde $M_N = \max_{0\leq k\leq n} S_N$. Definiendo la función v_N de dos variables como $v_N(s,m) = m-s$ entonces V_N nos queda como $V_N = v_N(S_N, M_N)$. Aplicando la fórmula de valuación neutral al riesgo 3.15 se tiene

$$V_{N-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-1}[V_N]$$

Sutituyendo el valor de V_N en términos de la función v_N se sigue:

$$V_{N-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-1}[v_N(S_N, M_N)].$$

Por el resultado 3.4.1 sabemos que el proceso (S_n, M_n) es de Markov, por tanto, aplicando la definición existe una función $v_{N-1} = v_{N-1}(s,m)$ tal que

$$\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-1}[v_N(S_N, M_N)] = v_{N-1}(S_{N-1}, M_{N-1}).$$

De la prueba del resultado 3.4.1 se sigue que

$$v_{N-1}(s,m) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_N(us, m\vee us) + \tilde{\mathbf{q}}v_N(ds, m\vee ds)\right].$$

Aplicando este procedimiento recursivo N veces, obtendremos el siguiente algoritmo para valuar una opción lookback de venta:

$$v_n(s,m) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_{n+1}(us, m\vee us) + \tilde{\mathbf{q}}v_{n+1}(ds, m\vee ds)\right], \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0$$
$$v_N(s,m) = m - s.$$

$$\delta_n(s,m) = \frac{v_{n+1}(us, m\vee us) + v_{n+1}(ds, m\vee ds)}{(u-d)s}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

En el caso en que la opción sea de compra, siguiendo un procedimiento similar anterior y en base al resultado 3.4.2 se obtiene el siguiente algoritmo:

$$v_n(s,m) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_{n+1}(us, m\wedge us) + \tilde{\mathbf{q}}v_{n+1}(ds, m\wedge ds)\right], \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0$$
$$v_N(s,m) = s - m.$$

$$\delta_n(s,m) = \frac{v_{n+1}(us, m\wedge us) + v_{n+1}(ds, m\wedge ds)}{(u-d)s}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

5.1.4. Opciones asiáticas

Las opciones asiáticas son similares a las opciones europeas, con la diferencia que las primeras consideran el valor promedio de la acción en el pago de la opción, mientras que las europeas solo toman en cuenta el valor final de la acción. Si consideramos un Modelo Binomial de N periodos y definimos $Y_n = \sum_{i=0}^{n} S_i$, una opción de compra asiática tendrá como pago $\left(\frac{Y_N}{N+1} - K\right)^+$, mientras que el pago de una opción de venta estará dado por $\left(K - \frac{Y_N}{N+1}\right)^+$. Si procedemos de manera similar a las opciones lookback tendremos que si definimos la función $v_N = v_N(s, y)$ como $v_N(s, y) = \left(\frac{y}{N+1} - K\right)^+$ y aplicamos el teorema de valuación neutral al riesgo junto con el resultado 3.4.3 se tiene que existe una función $v_{N-1} = v_{N-1}(s, y)$ tal que

$$V_{N-1} = v_{N-1}(S_{N-1}, Y_{N-1}).$$

De acuerdo al resultado 3.4.3 tal función es

$$v_{N-1}(s, y) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}} v_N(us, us + y) + \tilde{\mathbf{q}} v_N(ds, ds + y)\right].$$

Nuevamente, aplicando este procedimiento N veces obtenemos el siguiente algoritmo para valuar una opción de compra asiática:

$$v_n(s, y) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}} v_{n+1}(us, y + us) + \tilde{\mathbf{q}} v_{n+1}(ds, y + ds)\right], \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0$$

$$v_N(s, y) = \left(\frac{y}{N+1} - K\right)^+.$$

$$\delta_n(s, y) = \frac{v_{n+1}(us, y + us) + v_{n+1}(ds, y + ds)}{(u-d)s}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

En el caso de una opción de venta, $v_N(s, y)$ toma el valor de $\left(K - \dfrac{y}{N+1}\right)^+$.

5.1.5. Opciones binarias

Son también conocidas como opciones digitales. Su pago se define en base al precio final de la acción con respecto al precio de ejercicio. Si $S_N > K$, entonces la opción tendrá un pago de $\mathbf{Q}$, valor previamente definido por ambas partes, sin embargo, si $S_N \leq k$ entonces la opción no tiene valor alguno. Dado que solo es necesario conocer el valor final de la opción, basta con tomar $g(s) = \mathbf{Q}\mathbf{1}_{[s>K]}$ y aplicar el algoritmo 5.1, sin embargo, también es posible hallar una fórmula cerrada para el valor de la opción en esta situación. Podemos probar por inducción, argumentando de manera muy similar a como se probó 2.25, que el valor al tiempo cero de un seguro de este tipo estará dado por la fórmula

$$V_0 = \frac{\mathbf{Q}}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \tilde{\mathbf{p}}^k \tilde{\mathbf{q}}^{N-k} \mathbf{1}_{[u^k d^{N-K} > K]}.$$

5.1.6. Opciones europeas con barreras

Las opciones europeas con barreras son opciones que se "activan" o desactivan cuando el valor del subyacente alcanza un cierto valor **B** preestablecido llamado barrera. Los tipos más conocidos son

1. Down and out
2. Down and in
3. Up and out
4. Up and in

El término "in" hace referencia a que la opción entra en vigor, mientras que "out" se utiliza para decir que la opción pierde su vigencia. "Down" y "Up" son utilizados para indicar que la acción ha caído por debajo de un nivel establecido o ha superado un nivel preestablecido, respectivamente. Así, las opciones de tipo 1 pierden su vigencia en el momento en que el valor de la acción disminuye hasta un valor **B**, mientras que las opciones de tipo 2 comienzan su vigencia cuando la acción alcanza la barrera. Las opciones 3 y 4 se activan o desactivan, respectivamente, en el momento en que el valor de la acción supera la barrera **B**. La figura 5.1 nos muestra dos posibles trayectorias del precio de una acción en un modelo binomial considerando una opción con barrera.

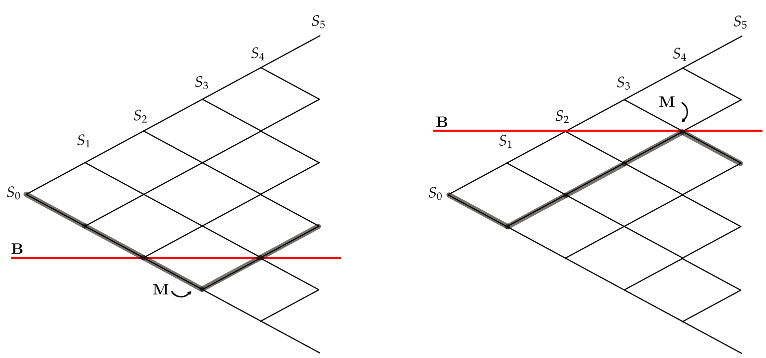


Figura 5.1: Opciones con barrera en un Modelo Binomial

Supongamos que tenemos una opción europea del tipo 1(en este caso será una opción de compra, pues no tiene sentido considerar una opción de venta) con una barrera **B**. Esto quiere decir que el comprador declinará su derecho en el primer instante en que vea que la acción ha disminuido hasta **B**. Por tanto, es necesario que el algoritmo 5.1 sea capaz de considerar esta información, lo que posible siguiendo la técnica utilizada para valuar las opciones *lookback*, esto es, mantener el valor máximo o mínimo según convenga en cada periodo. Si denotamos por $v_n(s, m)$ al valor al tiempo n de la opción donde el valor de la acción es s y el valor mínimo entre $s_0, s_1, \ldots, s_n$ es m, el algoritmo queda como

$$v_n(s,m) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{\mathbf{p}}v_{n+1}(us,m) + \tilde{\mathbf{q}}v_{n+1}(ds, ds \wedge m)\right], \quad n = N-1, N-2, \ldots, 0$$
$$v_N(s,m) = (s-K)^+ \mathbf{1}_{[m>\mathbf{B}]}.$$

$$\delta_n(s,m) = \frac{v_{n+1}(us,m) + v_{n+1}(ds, ds \wedge m)}{(u-d)s}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Es posible adaptar el análisis anterior para hallar los correspondientes algoritmos para las opciones de tipo 2, 3 y 4 modificando convenientemente los valores de $v_n(s,m)$ y $v_N(s,m)$.

5.2. Acción que paga dividendos

Todo el desarrollo que se ha hecho ha sido bajo la condición de que la acción no paga dividendos. Sin embargo, no todo está perdido, pues es posible adaptar el desarrollo previo para que el modelo pueda prescindir de tal condición. La idea es extraída de [8]. El pago de un dividendo en un cierto periodo n de una acción consiste en cierta ganancia a la que se hace acreedor el dueño de la acción, lo que es equivalente a una disminución en su valor. Definamos el proceso Y_n como sigue

$$Y_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n \omega_{n+1}) = \begin{cases} u, & \text{si } \omega_{n+1} = H, \\ d, & \text{si } \omega_{n+1} = T. \end{cases}$$

Ahora, si $\mathrm{A}_n(\omega_1 \cdots \omega_n)$ es un proceso que en cada periodo toma un valor en $(0,1)$ entonces el pago de dividendo al periodo n estaría dado por $Y_n \mathrm{A}_n S_{n-1}$. Una vez que se ha hecho el pago, el valor de la acción al periodo n está dado por

$$S_n = (1 - \mathrm{A}_n) Y_n S_{n-1}.$$

Bajo este modelo, supongamos que un inversionista comienza con un capital X_0 y en cada periodo toma una posición de Δ_n unidades de acción invirtiendo el resto en el mercado de dinero. Su capital está gobernado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n) + \Delta_n \mathrm{A}_{n+1} Y_{n+1} S_n \\ &= \Delta_n Y_{n+1} S_n + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n). \end{aligned} \tag{5.3}$$

La fórmula anterior es el equivalente a la ecuación de capital 2.21 en un modelo con pago de dividendos. Se asume que el proceso $\Delta_n, n = 0, 1, \ldots, N-1$ es adaptado, es decir, el inversionista toma una posición Δ_n basado solamente en la información de los primeros n lanzamientos de la moneda. Con todo esto, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.2.1. *Bajo la medida de probabilidad libre de riesgo, el proceso capital descontado* $\frac{X_n}{(1+r)^n}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ *es una martingla.*

Demostración.

$$\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n Y_{n+1} S_n}{(1+r)^{n+1}} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right]$$

De la linealidad de la esperanza condicional se sigue

$$= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n Y_{n+1} S_n}{(1+r)^{n+1}}\right] + \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right]$$

Del hecho de que al tiempo n X_n, Δ_n, S_n son conocidos y Y_n es independiente se tiene

$$\begin{aligned}
&= \Delta_n S_n \frac{\tilde{\mathbf{p}}u + \tilde{\mathbf{q}}d}{(1+r)^{n+1}} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\
&= \frac{\Delta_n S_n}{(1+r)^n} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\
&= \frac{X_n}{(1+r)^n}.
\end{aligned}$$

□

Este resultado nos afirma que bajo la medida de probabilidad libre de riesgo, el modelo Binomial con pago de dividendos sigue siendo libre de arbitraje. Además, es posible adaptar la prueba del teorema 3.3.1 para probar que en este nuevo modelo la fórmula de valuación neutral al riesgo 3.15 aún aplica. Por tanto, el análisis previo de varios seguros derivados puede ser adaptado a un modelo en el cual la acción paga dividendos.

Conclusiones

En el presente trabajo se estudió el Modelo Binomial de valuación de opciones como una introducción a la modelación de un mercado financiero. Es interesante ver el impacto que tuvieron los supuestos sobre el modelo, ya que gracias a estos fue posible hallar un método de valuación de un seguro derivado general. Disminuir el número de restricciones supone un modelo más exacto a la realidad, sin embargo también trae consigo un modelo más complejo. Actualmente se trabaja en proponer nuevos modelos con menos restricciones, por ejemplo, la condición de liquidez que se asume en el Modelo de Black-Scholes-Merton supone un problema en mercados en los cuales el seguro derivado no se comercializa demasiado. La hipótesis de ausencia de costos de transacción también puede ser demasiado fuerte, pues la falta de liquidez en un mercado puede generar grandes costos de transacción que el inversionista debe asumir. La hipótesis de volatilidad constante también puede ser relajada, proponiendo una función o una variable aleatoria en su lugar. Además, la constante aparición de seguros derivados más complejos, como son seguros sobre índices de inflación o seguros meteorológicos demanda cada vez modelos más flexibles y dinámicos, por lo que es posible trabajar en propuestas de modelos posteriormente.

Apéndice A

Integral de Lebesgue

En este apartado, se describen brevemente los conceptos de la integral de Lebesgue en el contexto del Modelo Binomial que complementan este trabajo. Para una exposición más detallada, la bibliografía en el tema es extensa.

Definición A.1 (Variable aleatoria)**.** *Consideremos un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Una variable aleatoria* X *es una función de valores reales definida sobre* Ω *tal que para cada conjunto de borel* B *de* $\mathbb{R}$ *el conjunto*

$$\{X \in \mathrm{B}\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathrm{B}\}$$

está en la σ*-álgebra* $\mathcal{F}$*. En otros términos, es cualquier función que sea* $\mathcal{F}$*-medible.*

La integral de Lebesgue se construye haciendo una partición de la imagen de una función. En nuestro contexto, tales funciones serán variables aleatorias. La ventaja de este enfoque es que será posible integrar sobre cualquier espacio abstracto Ω, en nuestro caso será el espacio muestral con que se esté trabajando. De este modo, sea X una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supongamos por el momento que $X \geq 0$. Se define, para una partición $\Pi = y_0, y_1, \ldots$ tal que $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \ldots$ sobre $\mathbb{R}$, la suma inferior de Lebesgue como

$$\mathrm{L}S_{\Pi}^{-}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$$

donde

$$\mathrm{A}_k = \{\omega \in \Omega : y_k \leq X(\omega) < y_{k+1}\}$$

Cuando $\|\Pi\| \to 0$, la suma inferior de Lebesgue converge; y se define tal límite como la **integral de Lebesgue** de X que denotaremos como

$$\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

o simplemente

$$\int_\Omega Xd\mathbb{P}.$$

En caso de que X sea una variable aleatoria no acotada tenemos dos opciones: Si el conjunto sobre el cual $X = \infty$ tiene probabilidad cero, entonces no hay problema con la integral, sin embargo, si $\mathbb{P}[\{X = \infty\}] > 0$ entonces definiremos $\int_\Omega Xd\mathbb{P} = \infty$.

En el caso en que X sea una variable aleatoria que toma valores tanto positivos como negativos, utilizaremos la parte positiva y negativa de X que denotaremos como X^+ y X^- para poder definir la integral. Tales partes se definen como:

$$X^+(\omega) = \text{máx}\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) = \text{máx}\{-X(\omega), 0\}.$$

De la definición anterior se desprende que X^+ y X^- son ambas variables aleatorias no negativas. Además, podemos comprobar de manera directa que

$$X = X^+ - X^-.$$

Con esto, dado que las integrales $\int_\Omega X^+d\mathbb{P}$ y $\int_\Omega X^-d\mathbb{P}$ están definidas, se define

$$\int_\Omega Xd\mathbb{P} = \int_\Omega X^+d\mathbb{P} - \int_\Omega X^-d\mathbb{P}.$$

En caso de que los valores $\int_\Omega X^+d\mathbb{P}$ y $\int_\Omega X^-d\mathbb{P}$ sean ambos finitos, $\int_\Omega Xd\mathbb{P}$ es finito y diremos que la variable aleatoria X es **integrable**. Si $\int_\Omega X^+d\mathbb{P} = \infty$ y $\int_\Omega X^-d\mathbb{P}$ es finito, entonces $\int_\Omega Xd\mathbb{P} = \infty$. Si $\int_\Omega X^-d\mathbb{P} = \infty$ y $\int_\Omega X^+d\mathbb{P}$ es finito, $\int_\Omega Xd\mathbb{P} = -\infty$. Si $\int_\Omega X^+d\mathbb{P}$ y $\int_\Omega X^-d\mathbb{P}$ son ambos ∞, entonces la integral de Lebesgue es indefinida para X.

Algunas de las propiedades de la integral de Lebesgue se muestran en el siguiente resultado presentado sin demostración.

Proposición A.1. *Sean X y Y variables aleatorias integrables según Lebesgue definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces:*

- *X es integrable si y solo si*

$$\int_\Omega |X(\omega)|d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

- *Si $X \leq Y$ casi seguramente (esto es, $\mathbb{P}[\{X \leq Y\}] = 1$) y los valores $\int_\Omega Xd\mathbb{P}$ y $\int_\Omega Yd\mathbb{P}$ están definidos, entonces*

$$\int_\Omega Xd\mathbb{P} \leq \int_\Omega Yd\mathbb{P}.$$

- *Si α y β son ambas constantes reales entonces*

$$\int_\Omega \alpha X + \beta Yd\mathbb{P} = \alpha \int_\Omega Xd\mathbb{P} + \beta \int_\Omega Yd\mathbb{P}.$$

La importancia de la teoría de Lebesgue en probabilidad es la posibilidad de unificar los conceptos sin tomar en cuenta si la variable aleatoria con que se está trabajando es discreta o continua. Consideremos la siguiente definición:

Definición A.2. *Sea X una variable aleatoria integrable sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *El valor esperado de X se define como*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

En el caso en que la variable aleatoria X tome un número finito de valores $x_0, x_1, \ldots, x_n$, entonces

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathbb{P}[\{X = x_i\}].$$

De las propiedades de la integral de Lebesgue se desprende el siguiente resultado:

Proposición A.2. *Sean X y Y variables aleatorias integrables sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Entonces se cumple:*

- *Si $X \leq Y$ casi seguramente, entonces*

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y].$$

- *Si α y β son ambas constantes reales entonces*

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y].$$

Apéndice B

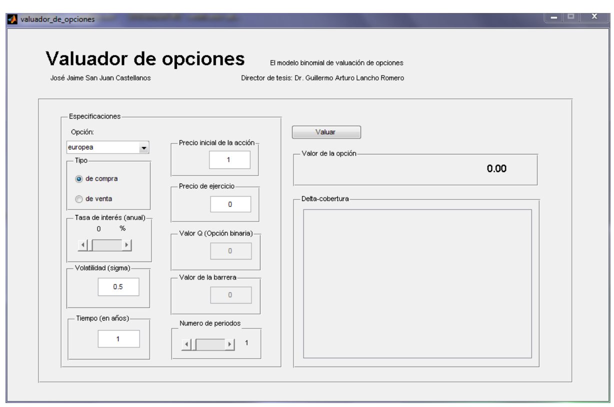
Apartado de códigos

A continuación aparecen los códigos que forman parte del programa "Valuador de opciones" con una interfaz gráfica que fue elaborado en la versión R2009a de MATLAB bajo el entorno GUIDE.

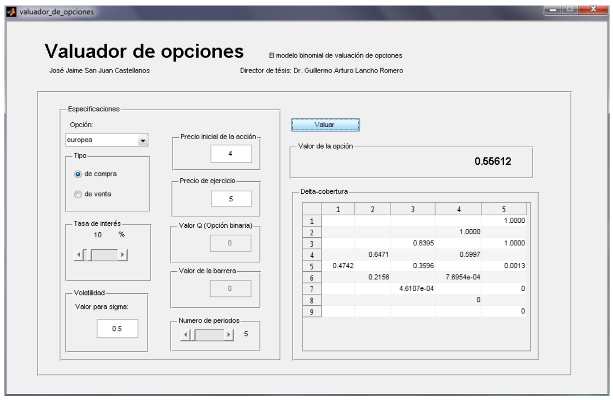
El archivo valuador_de_opciones.fig se incluye en el CD que viene adjunto a este trabajo. Es necesario que todos los archivos se encuentren en el mismo directorio para que el programa pueda funcionar. Para poder correr el programa basta con escribir el nombre del mismo en la línea de comandos de MATLAB.

```
fx >> valuador_de_opciones
```

Al presionar la tecla enter se mostrará una interfaz gráfica como la de la siguiente imagen:



Para valuar un seguro, es necesario elegir el tipo de seguro y ajustar los parámetros necesarios antes de presionar el botón valuar. A continuación se muestra un ejemplo en donde se valua una opción de compra europea con parámetros $S_0 = 4$, $K = 5$, $r = 10\,\%$, $\sigma = .5$, $N = 5$.



Código B.1: valuador_de_opciones.m

```
function varargout = valuador_de_opciones(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @valuador_de_opciones_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @valuador_de_opciones_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function valuador_de_opciones_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'SelectionChangeFcn',@panel_tipo_de_la_opcion_SelectionChangeFcn);
set(handles.tabla_cobertura,'Data',({}));
handles.tipo=0;
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);

function varargout = valuador_de_opciones_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

function menu_opcion_Callback(hObject, eventdata, handles)
cad=get(handles.menu_opcion,'Value');
handles.opcion=cad;
    switch cad
        case 1
            set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','on');
            set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','on');
            set(handles.campo_valor_q,'Enable','off');
            set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','off');
        case 2
            set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','on');
            set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','on');
            set(handles.campo_valor_q,'Enable','off');
            set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','off');
        case 3
            set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','on');
            set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','off');
            set(handles.campo_valor_q,'Enable','off');
            set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','off');
        case 4
```

```
                set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','on');
                set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','on');
                set(handles.campo_valor_q,'Enable','off');
                set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','off');
            case 5
                set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','on');
                set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','on');
                set(handles.campo_valor_q,'Enable','on');
                set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','off');
            case 6
                set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','off');
                set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','on');
                set(handles.campo_valor_q,'Enable','off');
                set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','on');
            case 7
                set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','off');
                set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','on');
                set(handles.campo_valor_q,'Enable','off');
                set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','on');
            case 8
                set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','off');
                set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','on');
                set(handles.campo_valor_q,'Enable','off');
                set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','on');
            case 9
                set(handles.panel_tipo_de_la_opcion,'Visible','off');
                set(handles.campo_precio_ejercicio,'Enable','on');
                set(handles.campo_valor_q,'Enable','off');
                set(handles.campo_valor_barrera,'Enable','on');
            otherwise
        end

guidata(hObject, handles);

function menu_opcion_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function tipo_de_compra_Callback(hObject, eventdata, handles)

function tipo_de_venta_Callback(hObject, eventdata, handles)

function boton_valuar_Callback(hObject, eventdata, handles)
handles.opcion = get(handles.menu_opcion,'Value');
handles.tasa=str2double(get(handles.tasa_interes,'String'));
handles.numero_de_periodos=str2double(get(handles.campo_numero_de_periodos,'String'));
handles.valor_sigma=str2double( get(handles.campo_valor_sigma,'String') );
handles.precio_inicial = str2double( get(handles.campo_valor_inicial_de_la_accion,'String') );
handles.precio_ejercicio = str2double(get(handles.campo_precio_ejercicio,'String'));
handles.valor_q = str2double(get(handles.campo_valor_q, 'String'));
handles.valor_barrera=str2double(get(handles.campo_valor_barrera, 'String'));
global sigma N u d pp qq r S_0 K Q B;
sigma=handles.valor_sigma;
N=handles.numero_de_periodos;
u=exp(sigma/(sqrt(N)));
d=exp(-sigma/(sqrt(N)));
S_0=handles.precio_inicial;
K=handles.precio_ejercicio;
Q=handles.valor_q;
B=handles.valor_barrera;
r=(handles.tasa/100)/N;
pp=(1+r-d)/(u-d);
qq=(u-(1+r))/(u-d);

switch handles.opcion
    case 1
        [valor_opcion Delta]=algoritmo_opcion_europea(handles.tipo);
    case 2
        [valor_opcion Delta]=algoritmo_opcion_americana(handles.tipo);
    case 3
        [valor_opcion Delta]=algoritmo_opcion_lookback(handles.tipo);
    case 4
        [valor_opcion Delta]=algoritmo_opcion_asiatica(handles.tipo);
    case 5
        [valor_opcion Delta]=algoritmo_opcion_binaria(handles.tipo);
    otherwise
        [valor_opcion Delta]=algoritmo_opcion_barrera(handles.opcion);
end
[v0, errmsg]=sprintf('%.05f',valor_opcion);
if N<=100
    set(handles.tabla_cobertura,'Data',Delta);
```

```
else
    set(handles.tabla_cobertura,'Data',({}))
end
set(handles.tabla_cobertura,'ColumnWidth','auto');
set(handles.campo_valor_de_la_opcion,'String',v0);
guidata(hObject, handles);

function slider_tasa_de_interes_Callback(hObject, eventdata, handles)
slider_value = get(hObject,'Value');
handles.tasa=slider_value;
[s, errmsg] = sprintf('%.0f', slider_value);
set(handles.tasa_interes,'String',s);
guidata(hObject, handles);

function slider_tasa_de_interes_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor',[.9 .9 .9]);
end

function panel_tipo_de_la_opcion_SelectionChangeFcn(hObject, eventdata)
handles = guidata(hObject);
switch get(eventdata.NewValue,'Tag')
    case 'tipo_de_compra'
        handles.tipo=0;
    case 'tipo_de_venta'
        handles.tipo=1;
    otherwise
end
guidata(hObject, handles);

function campo_precio_ejercicio_Callback(hObject, eventdata, handles)

function campo_precio_ejercicio_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function campo_valor_q_Callback(hObject, eventdata, handles)

function campo_valor_q_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function panel_tipo_de_la_opcion_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

function campo_valor_barrera_Callback(hObject, eventdata, handles)

function campo_valor_barrera_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function slider_numero_de_periodos_Callback(hObject, eventdata, handles)
slider_value = get(hObject,'Value');
handles.numero_de_periodos=slider_value;
[s, errmsg] = sprintf('%.0f', slider_value);
set(handles.campo_numero_de_periodos,'String',s);
guidata(hObject, handles);

function slider_numero_de_periodos_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor',[.9 .9 .9]);
end

function campo_valor_inicial_de_la_accion_Callback(hObject, eventdata, handles)

function campo_valor_inicial_de_la_accion_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function panel_delta_cobertura_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

function campo_valor_sigma_Callback(hObject, eventdata, handles)

function campo_valor_sigma_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

Código B.2: algoritmo_opcion_europea.m

```
function [v Delta]=algoritmo_opcion_europea(T)
global sigma N u d pp qq r S_0 K Q B;
Delta=cell(2*N-1,N);
for i=1:1:N+1
    if T==0
        V(i,N+1)=max([0 ( (u^( N+1-i ) )*( d^( i-1 ) )*S_0 )-K]);
    else
        V(i,N+1)=max([0 ( K-( (u^( N+1-i ) )*( d^( i-1 ) )*S_0 ) ) ]);
    end
end
for i=N:-1:1
    for j=1:1:i
        V(j,i)=( ( pp*V(j,i+1) )+( qq*V(j+1,i+1) ) )/(1+r);
        Delta(N-i+1+2*(j-1), i)={(V(j,i+1) - V(j+1,i+1))/( (u-d)*(u^(i-1-(j-1))*d^(j-1)*S_0) )};
    end
end
v=V(1,1);
end
```

Código B.3: algoritmo_opcion_americana.m

```
function [v Delta]=algoritmo_opcion_americana(T)
global sigma N u d pp qq r S_0 K Q B;
Delta=cell(2*N-1,N);
for i=1:1:N+1
    if T==0
        V(i,N+1)=max([0 ( (u^( N+1-i ) )*( d^( i-1 ) )*S_0 )-K]);
    else
        V(i,N+1)=max([0 ( K-( (u^( N+1-i ) )*( d^( i-1 ) )*S_0 ) ) ]);
    end
end
for i=N:-1:1
    for j=1:1:i
        if T==0
            V(j,i)=max( max([0 ( (u^( i-j ) )*( d^( j-1 ) )*S_0 )-K]) , ( ( pp*V(j,i+1) )+( qq*V(j+1,i+1) ) )/(1+r) );
        else
            V(j,i)=max( max([0 K-( (u^( i-j ) )*( d^( j-1 ) )*S_0 )]) , ( ( pp*V(j,i+1) )+( qq*V(j+1,i+1) ) )/(1+r) );
        end
        Delta(N-i+1+2*(j-1), i)={(V(j,i+1) - V(j+1,i+1))/( (u-d)*(u^(i-1-(j-1))*d^(j-1)*S_0) )};
    end
end
v=V(1,1);
end
```

Código B.4: algoritmo_opcion_lookback.m

```
function [v Delta]=algoritmo_opcion_lookback(T)
global S_0;
Delta=({});
if T==0
    v=vn_lookback_compra([S_0 S_0 0]);
else
    v=vn_lookback_venta([S_0 S_0 0]);
end
```

Código B.5: vn_lookback_compra.m

```
function v = vn_lookback_compra(X)
global N u d pp qq r;
s=X(1);m=X(2);j=X(3);
if j==N
    v=s-m;
else
    w1=[u*s min(u*s,m) j+1];
    w2=[d*s min(d*s,m) j+1];
    v=pp*vn_lookback_compra(w1) + qq*vn_lookback_compra(w2);
    v=v/(1+r);
end
```

Código B.6: vn_lookback_venta.m

```
function v = vn_lookback_venta(X)
global N u d pp qq r;
s=X(1);m=X(2);j=X(3);
if j==N
    v=m-s;
else
    w1=[u*s max(u*s,m) j+1];
    w2=[d*s max(d*s,m) j+1];
    v=pp*vn_lookback_venta(w1) + qq*vn_lookback_venta(w2);
    v=v/(1+r);
end
```

Código B.7: algoritmo_opcion_asiatica.m

```
function [v Delta]=algoritmo_opcion_asiatica(T)
global S_0;
Delta=({});
if T==0
    v=vn_asiatica_compra([S_0 S_0 0]);
else
    v=vn_asiatica_venta([S_0 S_0 0]);
end
```

Código B.8: vn_asiatica_compra.m

```
function v = vn_asiatica_compra(X)
global N u d pp qq r K;
s=X(1);y=X(2);j=X(3);
if j==N
    v=max(y/(N+1)-K,0);
else
    w1=[u*s y+u*s j+1];
    w2=[d*s y+d*s j+1];
    v=pp*vn_asiatica_compra(w1) + qq*vn_asiatica_compra(w2);
    v=v/(1+r);
end
]
```

Código B.9: vn_asiatica_venta.m

```
function v = vn_asiatica_venta(X)
global N u d pp qq r K;
s=X(1);y=X(2);j=X(3);
if j==N
    v=max(K-(y/(N+1)),0);
else
    w1=[u*s y+u*s j+1];
    w2=[d*s y+d*s j+1];
    v=pp*vn_asiatica_venta(w1) + qq*vn_asiatica_venta(w2);
    v=v/(1+r);
end
```

Código B.10: algoritmo_opcion_binaria.m

```
function [v Delta]=algoritmo_opcion_binaria(T)
global N u d pp qq r S_0 K Q;
Delta=cell(2*N-1,N);
for i=1:1:N+1
    if T==0
        if ( (u^( N+1-i ) )*( d^( i-1 ) )*S_0 ) > K
            V(i,N+1)=Q;
        else
            V(i,N+1)=0;
        end
        V(i,N+1)=max([0 ( (u^( N+1-i ) )*( d^( i-1 ) )*S_0 )-K]);
    else
        if K > ( (u^( N+1-i ) )*( d^( i-1 ) )*S_0 )
            V(i,N+1)=Q;
        else
            V(i,N+1)=0;
        end
    end
```

```
end
for i=N:-1:1
    for j=1:1:i
        V(j,i)=( ( pp*V(j,i+1) )+( qq*V(j+1,i+1) ) )/(1+r);
        Delta(N-i+1+2*(j-1), i)={(V(j,i+1) - V(j+1,i+1))/( (u-d)*(u^(i-1-(j-1))*d^(j-1)*S_0) )};
    end
end
v=V(1,1);
end
```

Código B.11: algoritmo_opcion_barrera.m

```
function [v Delta]=algoritmo_opcion_barrera(T)
global S_0;
Delta=({});
switch T
    case 6
        v=vn_down_out([S_0 S_0 0]);
    case 7
        v=vn_down_in([S_0 S_0 0]);
    case 8
        v=vn_up_out([S_0 S_0 0]);
    case 9
        v=vn_up_in([S_0 S_0 0]);
end
```

Código B.12: vn_down_out.m

```
function v = vn_down_out(X)
global N u d pp qq r K B;
s=X(1);m=X(2);j=X(3);
if j==N
    if m>B
        v=max(s-K,0);
    else v=0;
    end
else
    w1=[u*s min(u*s,m) j+1];
    w2=[d*s min(d*s,m) j+1];
    v=pp*vn_down_out(w1) + qq*vn_down_out(w2);
    v=v/(1+r);
end
```

Código B.13: vn_down_in.m

```
function v = vn_down_in(X)
global N u d pp qq r K B;
s=X(1);m=X(2);j=X(3);
if j==N
    if m<=B
        v=max(K-s,0);
    else v=0;
    end
else
    w1=[u*s min(u*s,m) j+1];
    w2=[d*s min(d*s,m) j+1];
    v=pp*vn_down_in(w1) + qq*vn_down_in(w2);
    v=v/(1+r);
end
```

Código B.14: vn_up_out.m

```
function v = vn_up_out(X)
global N u d pp qq r K B;
s=X(1);m=X(2);j=X(3);
if j==N
    if m < B
        v=max(K-s,0);
    else v=0;
    end
else
    w1=[u*s max(u*s,m) j+1];
    w2=[d*s max(d*s,m) j+1];
    v=pp*vn_up_out(w1) + qq*vn_up_out(w2);
    v=v/(1+r);
end
```

Código B.15: vn_up_in.m

```
function v = vn_up_in(X)
global N u d pp qq r K B;
s=X(1);m=X(2);j=X(3);
if j==N
     if m >= B
          v=max(s-K,0);
     else v=0;
     end
else
     w1=[u*s max(u*s,m) j+1];
     w2=[d*s max(d*s,m) j+1];
     v=pp*vn_up_in(w1) + qq*vn_up_in(w2);
     v=v/(1+r);
end
```

Bibliografía

[1] Bazaraa,Mokhtar S. and Sherali, Hanif D. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

[2] Black, Fisher and Scholes, M (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy Vol. 81, No 3, pp. 637-654.

[3] Brzeźniak, Zdzislaw and Zastawniak, Tomasz (2002). *Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises*, Springer-Verlag.

[4] Cox, John C., Ross, Stephen A. and Rubinstein, Mark (1979). *Option pricing: a simplified approach*, Journal of Financial Economics Vol. 7, No 3, pp. 229-263.

[5] Hoel, Paul G., Sidney, C. Port and Stone, Charles J. (1971). *Introduction to Probability Theory*, Houghton Mifflin, Boston.

[6] Hull, J. C. (2002). *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th Edition, Upper Saddle River, New Jersey.

[7] Pliska, Stanley R. (1997). *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell.

[8] Shreve, Steven E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer-Verlag.

[9] Shreve, Steven E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer-Verlag.

[10] Venegas, Francisco (2008). *Riesgos financieros y económicos: Productos Derivados y Decisiones Económicas bajo Incertidumbre*, Cengage learning.