UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

" UN MÉTODO ANALÍTICO PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES FUCHSIANAS"

TESIS
para obtener el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Presenta
ROMEO JOSÉ ALONSO

Director
M.C. ADOLFO MACEDA MÉNDEZ

Huajuapan de León, Oaxaca, Septiembre de 2010

Un método analítico para la resolución de ecuaciones diferenciales fuchsianas

Romeo José Alonso

Septiembre de 2010

A la memoria de mis padres.

Agradecimientos

En el plano personal el primer agradecimiento va por supuesto a mi madre María de Jesús Alonso Gaspar (de cariño Nachito) quien fué y será por siempre la persona más importante en mi vida, pues, aunque físicamente ya no este conmigo siempre vivirá en mi corazón. Agradezco también a todos mis hermanos, principalmente a Kike, Tomy y mi manita Geno, quienes nunca dejaron de creer en mí y con su apoyo incondicional hicieron este sueño posible.

En el plano profesional, el principal agradecimiento va dirigido a mi director de tesis M.C. Adolfo Maceda Méndez quien a pesar de muchas otras ocupaciones se comprometió y trabajo para sacar esta tesis adelante. Agradezco también a mis sinodales M.C. Vulfrano Tochihuitl Bueno, M.C. Alma Lidia Piceno Rivera y Dr. Guillermo Arturo Lancho Romero quienes con sus comentarios y observaciones hicieron de este un mejor trabajo.

Finalmente, un especial agradecimiento a todos los profesores quienes me transmitieron sus conocimientos a lo largo de la carrera, especialmente a los profesores Adolfo y Vulfrano quienes no solamente son magníficos profesores, sino también grandes seres humanos y de quienes recibí algunos consejos y palabras de aliento en momentos difíciles.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental dentro de las matemáticas así como en otras áreas de la ciencia como la física, la química, la astronomía, la biología etc. debido a que permiten modelar una gran variedad de fenómenos que ocurren en la naturaleza.

Dependiendo de la naturaleza de la ecuación estas se clasifican en: **ecuaciones diferenciales ordinarias** (una sola variable independiente) y **ecuaciones diferenciales en derivadas parciales** (varias variables independientes). Las ecuaciones diferenciales ordinarias a su vez se clasifican en: **lineales** (los coeficientes sólo dependen de la variable independiente) y **no lineales** (los coeficientes pueden depender de la variable dependiente).

Varias de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales[1] más importantes de la física-matemática son de la forma

$$\psi''(z) + p(z)\psi'(z) + q(z)\psi(z) = F(z), \tag{1}$$

donde $p(z)$, $q(z)$ y $F(z)$ están definidas sobre algún dominio del plano complejo. La dificultad principal al resolver la ecuación diferencial (1) para coeficientes $p(z)$ y $q(z)$ arbitrarios está en que las soluciones no siempre se comportan de igual manera que los coeficientes en las vecindades de ciertos puntos. Por ejemplo, se sabe que si tanto $p(z)$ como $q(z)$ son funciones analíticas, entonces la solución es analítica (véase teorema 1.2). Sin embargo, si $p(z)$ y $q(z)$ tienen por ejemplo un polo simple, entonces no necesariamente la solución tiene un polo simple. Un ejemplo de ello lo proporciona la ecuación diferencial hipergeométrica

$$z(1-z)\psi''(z) + (c - (a+b-1)z)\psi'(z) - ab\psi(z) = 0$$

o bien

$$\psi''(z) + \left(\frac{c}{z} + \frac{c-(a+b-1)}{1-z}\right)\psi'(z) - \left(\frac{ab}{z} + \frac{ab}{1-z}\right)\psi(z) = 0,$$

donde $p(z) = \frac{c}{z} + \frac{c-(a+b-1)}{1-z}$ y $q(z) = -\frac{ab}{z} - \frac{ab}{1-z}$ tienen un polo simple en el origen. Sin embargo, esta ecuación tiene por solución[2] a la función analítica

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, \qquad |z| < 1.$$

Una clase especial de ecuaciones diferenciales de la forma (1) la constituyen aquellas en la cuales los coeficientes $p(z)$ y $q(z)$ tiene a lo más un polo simple y doble respectivamente. La importancia de esta clase de ecuaciones es que la forma de las soluciones son conocidas y tienen la forma $\psi(z) = z^\lambda f(z)$, donde λ es un parámetro real o complejo por determinar y $f(z)$ una función analítica. Las ecuaciones que satisfacen las condiciones anteriores son llamadas **ecuaciones diferenciales fuchsianas**. En la literatura existe un método para resolver este tipo de ecuaciones y el cual es conocido como **método de Frobenius** desarrollado en 1873 por Lazaro Fuchs y George Frobenius. El metodo consiste en proponer la solución de la forma mencionada anteriormente y al ser $f(z)$ una función analítica admite un desarrollo de Taylor con coeficientes por determinar, al sustituir en

[1] y que a su vez resultan de resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
[2] véase lema 1.1.

la ecuación los coeficientes quedan determinados mediante alguna relación de recurrencia al igual que el valor de λ.

En esta tesis se analiza un método novedoso capaz de dar solución a ecuaciones diferenciales fuchsianas. Dicho método es presentado en el artículo titulado "*A novel analytic operator method to solve linear ordinary differential equations with variable coefficients* "([15]), desarrollado por Wrick Sengupta del departamento de física y meteorología de la India y el cual está sustentado en sofisticados teoremas referentes a la teoría de operadores definidos sobre espacios de Banach, además de tratar con potencias fraccionarias de operadores, las cuales resultan útiles para proporcionar representaciones integrales de las soluciones. Si bien, el cálculo de potencias fraccionarias de operadores es un tema sofisticado del análisis funcional denominado cálculo funcional, cuando se trata con el operador de Volterra (la integral definida con límites 0 y z) las potencias fraccionarias tienen una forma especial.

A grandes rasgos el método es como sigue: dada la ecuación (1) y asumiendo que esta es fuchsiana, entonces se propone la solución $\psi(z) = z^{\lambda} f(z)$ que al sustituir en (1) y simplificar se transforma en otra ecuación de la forma

$$\frac{1}{z^{\alpha}}\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\frac{df(z)}{dz}\right) + g(z)\frac{df(z)}{dz} + h(z)f(z) = z^{-\lambda}F(z), \tag{2}$$

donde $g(z)$ es una función analítica y $h(z)$ tiene un polo simple. Ahora bien, si se definen dos operadores L y A como sigue:

$$L = \int \frac{1}{z^{\alpha}}\left(\int z^{\alpha}(.)dz\right)dz \text{ y } A = \int \frac{1}{z^{\alpha}}\left(\int z^{\alpha}\left(g(z)\frac{d(.)}{dz} + h(z)(.)\right)dz\right)dz,$$

entonces la ecuación (2) se escribe en notación de operadores como $(I + A)f(z) = Lz^{-\lambda}F(z) + f_0(z)$, donde $f_0(z) = c_0 + c_1 \int \frac{1}{z^{\alpha}}dz$ y c_0,c_1 son constantes. Finalmente, si el operador $(I + A)$ es invertible; es decir, el operador $(I + A)^{-1}$ llamado **operador resolvente** existe, entonces la solución de la ecuación (2) está dada por

$$f(z) = (I + A)^{-1}Lz^{-\lambda_1}F(z) + (I + A)^{-1}f_0(z).$$

El contenido de este trabajo es el siguiente. En el Capítulo 1 se presentan algunos conceptos básicos y resultados fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y, también se analizan los fundamentos teóricos del método de Frobenius. Posteriormente, se resolverán algunas ecuaciones clásicas usando el método de Frobenius, los cuales servirán para realizar un análisis comparativo entre ambos métodos.

En el Capítulo 2 se considera el operador de Volterra (la integral definida con límites 0 y z) y se proporciona una definición de potencia fraccionaria para dicho operador. Aunque existen diversas maneras de abordar esta definición, únicamente se considera la que surge de manera natural a fin de evitar introducir teoría extra.

En el Capítulo 3 se aborda formalmente la teoría de operadores lineales definidos sobre espacios de Banach, y se establecen varios resultados importantes referente a estos. Se hace énfasis principalmente en los resultados referentes a la representación del operador resolvente como una serie y como una integral.

Los fundamentos teóricos del método de los operadores se presentan en el Capítulo 4, donde se utilizan los resultados establecidos en los capítulos anteriores.

Finalmente, en el Capítulo 5 se muestran algunos ejemplos de aplicación del método, a fin de analizar sus ventajas y/o desventajas, así como familiarizarse con este último. Se consideran únicamente las ecuaciones diferenciales especiales, dada su importancia dentro del ámbito físico. También se dedica una sección al método de descomposición ([5]), un método también reciente usado principalmente en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, el cual puede ser adaptado para ecuaciones diferenciales ordinarias ([3]).

A manera de referencia también se incluye un apéndice en el cual se presentan algunos resultados básicos de la teoría de funciones de variable compleja como lo es el teorema de Cauchy, y de la expansión de Taylor y Laurent, ya que estos últimos juegan un papel fundamental en el análisis del comportamiento de las funciones en ciertos puntos.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar algunos de los conceptos y resultados más importantes referentes a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, además de incluir algunos ejemplos importantes que servirán para comparar con el método novedoso, objetivo de esta tesis.

En el análisis de funciones, los conceptos de **función analítica** y **singularidad**[1] se estudian de forma más adecuada usando conceptos de variable compleja. Por esta razón, en estos preliminares optamos por analizar las ecuaciones diferenciales definidas sobre el plano complejo, pues se cuenta con resultados más generales y el análisis de funciones en puntos singulares es justificada por el teorema de la **expansión de Laurent**. Otro motivo para considerarlas en el dominio complejo es analizar los fundamentos teóricos del **método de Frobenius**, el más antiguo y hasta hoy en día uno de los más importantes para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales cuando los coeficientes no son analíticos.

El método de Frobenius tiene sus fundamentos teóricos en el problema de la continuación analítica, el cual discutimos en la primera sección del presente capítulo. Como una observación adicional, debido a que muchos conceptos y resultados del análisis complejo son bien conocidos, no los definiremos en estos preliminares; no obstante, a manera de referencia incluimos un apéndice con definiciones y teoremas importantes sobre funciones analíticas que emplearemos.

1.1. Continuación analítica

Consideremos las funciones analíticas dadas por $\sqrt{z}$ y $\log z = \ln|z| + i\arg z$ donde $-\pi < \arg z < \pi$. Observe que si no se restringe el dominio para $\arg z$, entonces las expresiones $\sqrt{z}$ y $\log z$ no definen funciones en el sentido usual pues toman más de un valor para cada elemento de su dominio. No obstante, en el análisis complejo se estudia ampliamente esta clase especial de funciones y en un intento por extender el dominio para dichas funciones surgen las llamadas **funciones analíticas globales**, que no resultan ser más que colecciones de funciones analíticas bien definidas (univaluadas). La teoría que trata el problema de extender el dominio de las funciones analíticas es llamada **teoría de la continuación analítica**.

Dicha teoría es desarrollada a partir de un resultado del análisis complejo referido en la literatura como **principio de continuación analítica**[2]. Dicho principio, establece que si dos funciones f y g son analíticas en una región Ω, y si existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos distintos de Ω que convergen a $z_0 \in \Omega$, tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$ en todo Ω. La conclusión es válida, en particular, si $f = g$ en alguna vecindad de algún punto de Ω.

[1] Aquellos puntos donde una función no es analítica y por tanto no admite un desarrollo de Taylor.

[2] Este principio, garantiza la unicidad de las extensiones de las funciones reales a funciones complejas. Por ejemplo, la extensión de la exponencial real a la exponencial compleja.

Basado en este principio, la idea de la continuación analítica es extender el dominio de una función analítica a un conjunto lo más grande posible. Si una función f es entera, entonces no existen problemas de continuación puesto que su dominio de analiticidad es todo el plano complejo. De esta manera, supongamos que tenemos definida una función $f_1(z)$ que es analítica en la región Ω_1; y que podemos hallar una función $f_2(z)$ que es analítica en una región Ω_2 donde $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ y es tal que $f_2(z) = f_1(z)$ para todo $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, entonces se dice que $f_2(z)$ es una **continuación analítica directa** de $f_1(z)$ a la región Ω_2. Juntos f_1 y f_2 definen una función analítica $\mathbf{f}$ en $\Omega_1 \cup \Omega_2$ tal que $\mathbf{f}$(z)=$f_1(z)$ si $z \in \Omega_1$ y $\mathbf{f}$(z)=$f_2(z)$ si $z \in \Omega_2$.

Presentamos en esta sección sólo las ideas generales de **continuación analítica de series a lo largo de curvas**, que es el caso más simple de continuación analítica y que emplearemos en la siguiente sección. Dada una función analítica cualquiera en algún dominio Ω, por el teorema A.4 esta se puede representar siempre como una serie de potencias convergente. Supongamos que $f_0(z)$ es una función analítica definida por una serie de potencias y con disco de convergencia $D_0(z_0)$, y sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva que empieza en z_0 y termina en $w \notin D_0(z_0)$.

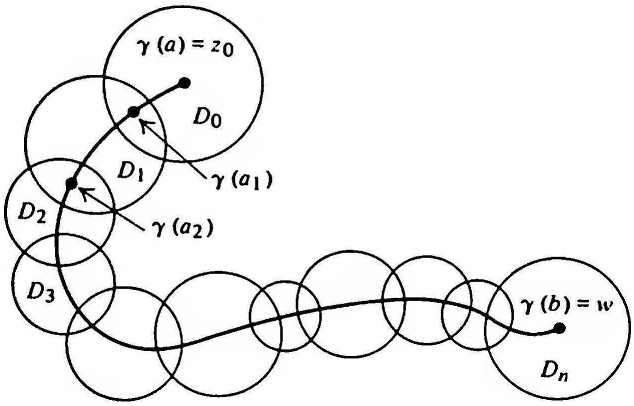

Figura 1.1: Continuación analítica a lo largo de una curva

Consideremos una partición de $[a, b]$ como sigue:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = b$$

y sea D_i un disco que contiene a $\gamma(a_i)$ como se muestra en la Figura 1.1. Decimos que la sucesión finita $D_0, D_1, ..., D_n$ es **conectada** por la curva γ a lo largo de la partición si la imagen $\gamma([a_{i-1}, a_i]) \subset D_i$. Observe que $D_i \cap D_{i+1}$ es no vacio pues contiene a $\gamma(a_{i+1})$. Una **continuación analítica de** $(f_0, D_0(z_0))$ **a lo largo de una sucesión finita conectada** $D_0, D_1, ..., D_n$ es una sucesión de parejas

$$(f_0, D_0), (f_1, D_1), (f_2, D_2), ..., (f_n, D_n),$$

tal que (f_{i+1}, D_{i+1}) es una continuación analítica directa de (f_i, D_i) para $i = 0, 1, ..., n-1$. La continuación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de γ define una nueva función $\mathbf{f}$ en el sentido generalizado[3], llamada ***función analítica global*** y cada (f_i, D_i) es llamado un **elemento** de $\mathbf{f}$.

Esta definición parece depender de la elección de la partición y la elección de la sucesión conectada. Sin embargo, el siguiente teorema cuya demostración puede verse en [12] pág. 324. establece que no es así.

Teorema 1.1 (Principio de Monodromía)**.** *Sea* $(g_0, E_0), (g_1, E_1), ..., (g_m, E_m)$ *otra continuación analítica de* (g_0, E_0) *a lo largo de la sucesión conectada* $E_0, E_1, E_2, ..., E_m$ *con respecto a la partición de la ruta* γ*. Si* $f_0 = g_0$

[3]Puede o no ser univaluada, si por ejemplo γ es una curva cerrada.

en una vecindad de z_0*, entonces* $g_m = f_n$ *en alguna vecindad de* $\gamma(b)$*, así* (g_m, E_m) *es una continuación analítica directa de* (f_n, D_n)*.*

1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

La existencia de una derivada compleja es una condición mucho más fuerte que la existencia de una derivada real, debido a que implica la representación de una función en serie de potencias. En esta sección veremos que la introducción de la derivada compleja nos permite estudiar de una manera adecuada la teoría de ecuaciones diferenciales puesto que los resultados son más generales.

De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales definidas sobre el dominio real, se sabe que la característica principal de estas, es que muchas veces las soluciones no son expresables en términos de funciones elementales, es decir, funciones trigonométricas, polinomiales, exponenciales y/o logarítmicas. La razón de ello se verá más adelante cuando se analice el comportamiento de las soluciones alrededor de cierta clase especial de puntos, lo cual nos conducirá de manera natural a la forma de las soluciones y métodos que se aplican usualmente para resolverlas.

Por otro lado, al extender la teoría al dominio complejo se debe tener en cuenta la continuación analítica, que como se vio en la sección anterior, da origen a las funciones analíticas globales, que son funciones en un sentido generalizado, las cuales pueden tomar más de un valor en un elemento especifico de su dominio. Por ejemplo, en el dominio real, una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n posee n soluciones linealmente independientes, y en el dominio complejo, esto es así en el sentido local (véase definición 1.2), ya que puede ocurrir que dos soluciones locales sean elementos de la misma función analítica global. Por ello, las soluciones de ecuaciones diferenciales definidas sobre el dominio complejo son funciones analíticas globales, cuyo dominio no necesariamente es el mismo en el cual los coeficientes están definidos. Así, se entiende por *solución local* aquella solución cuyo dominio está contenido en el de los coeficientes. El ejemplo 1.1 ayudará a clarificar estas ideas.

Ejemplo 1.1. *Considere la siguiente ecuación diferencial*

$$w'(z) = \frac{1}{z}, \qquad \Omega = \mathbb{C} - \{0\}$$

cuya solución (local) está dada por $w(z) = \log\ z = \ln|z| + i\,arg\ z$, $-\pi < arg\ z < \pi$*. Por otro lado, para cada elección de la rama para el* $\log\ z$ *se obtiene una nueva solución. La función analítica global*

$$Log\ z = \log\ z + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

es la solución general de la ecuación dada y cuyo dominio es una superficie de Riemann.

Definición 1.1. *Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden* n *es de la forma*

$$p_0(z)w^{(n)}(z) + p_1(z)w^{(n-1)}(z) + ... + p_n(z)w^{(0)}(z) = b(z), \tag{1.1}$$

donde $p_i(z)$ *y* $b(z)$ *son funciones analíticas definidas sobre un dominio común* Ω*. Si* $b(z) = 0$ *llamamos a la ecuación* ***homogénea****, en caso contrario,* ***no homogénea****.*

Definición 1.2. *Una* ***solución*** *para la ecuación diferencial (1.1) es una función analítica global* $\boldsymbol{f}$ *que satisface la igualdad. Una* ***solución local*** *de (1.1) es una función analítica* f *definida sobre* Ω *que satisface la igualdad.*

Aunque los coeficientes de una ecuación diferencial de la forma (1.1), son en general funciones analíticas, en esta tesis, por simplicidad, se considera únicamente el caso cuando todos los coeficientes son polinomios y el interés principal será el estudio de las raíces del coeficiente principal $p_0(z)$. La importancia de estos puntos es que determinan si existe o no solución y, más aún, determinan la forma que deben tener estas soluciones.

Definición 1.3. *Un punto $z_0 \in \Omega$ es llamado un* ***punto ordinario*** *de la ecuación diferencial (1.1) si $p_0(z_0) \neq 0$. Si $p_0(z_0) = 0$ entonces z_0 es llamado un* ***punto singular****.*

De aquí en lo sucesivo, puesto que solamente trataremos con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, para abreviar simplemente escribiremos **ecuación diferencial**. En las siguientes 2 subsecciones analizaremos las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden con el fin de estudiar el comportamiento de las soluciones en puntos ordinarios y singulares. Ello nos conducirá a un importante teorema debido a *G. Frobenius* establecido en 1873 y el cual nos proporciona un método para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas alrededor de cierto tipo de puntos singulares.

1.2.1. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Desde el punto de vista teórico, la ecuación diferencial de primer orden es la más simple e importante, por el hecho de proporcionar conceptos generalizables a ecuaciones diferenciales de orden mayor. Por simplicidad consideraremos solamente la ecuación diferencial homogénea. Según definición, la ecuación diferencial homogénea de primer orden es de la forma

$$p_0(z)w'(z) + p_1(z)w(z) = 0, \tag{1.2}$$

donde $p_0(z), p_1(z) : \Omega \to \mathbb{C}$, son funciones analíticas en una región Ω.

Reescribiendo la ecuación (1.2), obtenemos

$$w'(z) = F(z)w(z), \tag{1.3}$$

donde $F(z) = -p_1(z)/p_0(z)$. Consideremos los siguientes casos

1. F es analítica en Ω.

2. F tiene singularidades en Ω.

En el primer caso, si $z_0 \in \Omega$ es un punto ordinario entonces $p_0(z_0) \neq 0$. Por tanto, la solución general de (1.3) está dada por

$$w(z) = C \exp\left(\int F(z)dz\right), \qquad |z - z_0| < \epsilon, \tag{1.4}$$

donde C es una constante compleja y ϵ un numero real positivo. Aplicando la condición inicial $w(z_0) = w_0$ en (1.4) se obtiene la solución particular

$$w(z) = w_0 \exp\left(\int_{z_0}^{z} F(s)ds\right), \qquad |z - z_0| < \epsilon \tag{1.5}$$

Observe que la región de validez de la solución dada en (1.4) no es todo Ω; esto se debe a que Ω puede no ser simplemente conexo (sin agujeros). Por otro lado, puesto que cualquier disco abierto centrado en z_0 contenido en Ω es simplemente conexo, basta considerar solamente un disco suficientemente pequeño alrededor de z_0 para la validez de las soluciones, pues en este caso, la independencia de la ruta de integración está justificada. Así, las soluciones dadas en (1.4) y (1.5) son válidas en cualquier disco abierto centrado en z_0 contenido en Ω. Finalmente, si Ω es simplemente conexo, entonces la región de validez es todo Ω y se puede definir el valor de w por continuación analítica a lo largo de cualquier ruta que une a z_0 con z.

Analicemos ahora el segundo caso, y supongamos que F posee singularidades en Ω. Puesto que F es el cociente de dos funciones analíticas, las singularidades de F deben ser aisladas y por ende es suficiente analizar el comportamiento de la solución alrededor de una sola singularidad, pues el análisis en el resto de las singularidades es similar. Sin pérdida de generalidad supongamos que $z = a$ es una singularidad aislada de F. Luego, F es una función analítica en el anillo $0 < |z - a| < R$, para algún $R > 0$. Se desea saber como se comporta una solución de (1.3) alrededor de $z = a$.

Para ello consideremos una curva simple cerrada Γ, alrededor de a como se muestra en la Figura 1.2

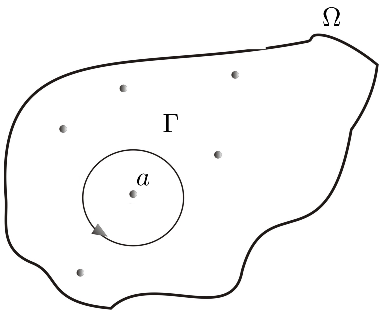

Figura 1.2

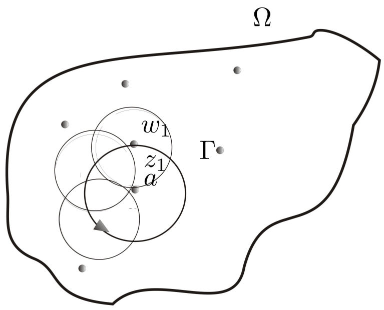

Figura 1.3

Sea $z_1 \in \Gamma$ un punto arbitrario y supongamos que $w_1(z)$ es una solución local de (1.3) en $z = z_1$ que, por el análisis anterior, debe ser analítica en una vecindad de z_1, pues z_1 es un punto ordinario. Así, $w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_1)^n$ donde $|z - z_1| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Continuando analíticamente w_1 a lo largo de Γ como se muestra en la Figura 1.3 [4], hasta regresar a z_1 se obtiene una función analítica w_2, posiblemente distinta de w_1 definida en $|z - z_1| < \epsilon$, y puesto que w_2 es también solución de la ecuación diferencial, se sigue que existe una constante $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $w_2 = \omega w_1$. Sea ahora $w(z)$ la función analítica global, formada por todas las continuaciones y que tiene por dominio a la unión de la sucesión de los discos formada a lo largo de Γ, la cual por definición es la solución de (1.3). Ahora bien, se tienen dos casos: *i*) que w sea univaluada y *ii*) w no es univaluada. *i*) ocurre si, por ejemplo $\omega = 1$, si este es el caso hemos ya obtenido una función analítica bien definida en una vecindad de a, la cual es una solución bien definida alrededor de a, sin embargo, nada garantiza que $\omega = 1$.

Supongamos ahora que *ii*) pasa, se desea ver si es posible hacer w univaluada; para ello sea $\rho = \log \omega / 2\pi i$, y observe que la potencia $(z - a)^\rho$ es multiplicada por $\omega = \exp(2\pi i \rho)$ cuando z describe Γ. Por lo tanto, la función

$$V(z) = (z - a)^{-\rho} w(z) \tag{1.6}$$

es analítica y univaluada en una vecindad agujerada de a. En efecto, comenzando en z_1

$$V(z) = (z - a)^{-\rho} w_1(z) = \exp(-\rho(\log|z - a| + i\text{arg } (z - a)))w_1(z)$$

donde $-\pi < \text{arg } (z - a) < \pi$, al retornar a z_1 se obtiene

$$\begin{aligned}
V(z) &= \exp(-\rho(\log|z - a| + (\text{arg } (z - a) + 2\pi)i))w_2(z) \\
&= \exp(-\rho(\log|z - a| + i\text{arg } (z - a)))w_2(z) * \exp(-2\pi i \rho) \\
&= \exp(-\rho(\log|z - a| + i\text{arg } (z - a)))w_2(z) * \exp(-2\pi i \log(\omega)/2\pi i) \\
&= \exp(-\rho(\log|z - a| + i\text{arg } (z - a)))w_2(z)/\omega \\
&= \exp(-\rho(\log|z - a| + i\text{arg } (z - a))\omega w_1(z)/\omega \\
&= \exp(-\rho(log|z - a| + i\text{arg } (z - a)))w_1(z).
\end{aligned}$$

Luego, en vista del teorema A.5 se tiene que

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - a)^n. \tag{1.7}$$

[4]El principio de identidad, garantiza que cualquier continuación analítica de w_1 es solución de la ecuación diferencial en todo su disco de analiticidad y no únicamente en la intersección.

en un anillo de la forma $0 < |z-a| < R_1$, para algún $R_1 > 0$. Sustituyendo (1.7) en (1.6) se obtiene

$$w(z) = (z-a)^{\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n \tag{1.8}$$

Puesto que a es una singularidad aislada tanto de F como de V, tenemos las siguientes posibilidades para a: *i*) que a sea una singularidad esencial de F y V, *ii*) que a sea un polo de F y V, *iii*) que a sea una singularidad esencial para F y una singularidad removible para V, *iv*) que a sea un polo para F y una singularidad removible para V. De estas posibilidades, se desea saber qué condiciones deben ser impuestas a F, para que V tenga una singularidad removible en $z = a$; puesto que en este caso la solución dada en (1.8) es más simple de obtener al aplicar el método de coeficientes indeterminados. Por otro lado, si V tiene una singularidad removible en $z = a$, entonces (1.7) debe ser de la forma

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \tag{1.9}$$

y sustituyendo (1.9) en (1.8) resulta

$$w(z) = (z-a)^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n. \tag{1.10}$$

Finalmente, de (1.3) se tiene que

$$F(z) = (\log(w))' = \frac{\rho}{z-a} + (\frac{b_1 + 2b_2(z-a) + ..}{b_0 + b_1(z-a) + ..}) = \frac{\rho}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ...$$

Esto es, F debe tener un polo simple en $z = a$ con residuo ρ.

Definición 1.4. *Un punto z_0 es llamado un punto* ***singular regular*** *de la ecuación diferencial (1.3), si $F(z)$ tiene un polo simple en z_0.*

Del análisis previo se concluye que

1. Si z_0 es un punto ordinario de (1.2), la solución es de la forma

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \ , \qquad |z-z_0| < r_1.$$

2. Si z_0 es un punto singular regular de (1.2), la solución es de la forma

$$w(z) = (z-z_0)^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \ , \qquad 0 < |z-z_0| < r_2,$$

donde ρ es un parámetro real o complejo y $r_1,\ r_2$ son números reales positivos.

1.2.2. Ecuación diferencial de segundo orden

Un análisis similar al de la sección anterior, puede realizarse para el caso de ecuaciones diferenciales de segundo orden a fin de determinar la forma de las soluciones. En efecto, consideremos la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$p_0(z)w''(z) + p_1(z)w'(z) + p_2(z)w(z) = 0 \tag{1.11}$$

donde p_0, p_1 y p_2 son funciones analíticas definidas sobre un dominio común Ω y $p_0(z) \neq 0$. De la definición 1.3, si z_0 es un punto ordinario de (1.11), entonces $p_0(z_0) \neq 0$. En la siguiente subsección, veremos que cualquier singularidad puede ser trasladada al origen mediante algún adecuado cambio de variable. Por ello, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $z_0 = 0$. Reescribiendo la ecuación (1.11) resulta

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0, \tag{1.12}$$

donde $p(z) = p_1(z)/p_0(z)$ y $q(z) = p_2(z)/p_0(z)$. El teorema principal referente a puntos ordinarios es el que se enuncia a continuación.

Teorema 1.2. *Suponga que las funciones p y q son analíticas en el disco abierto $|z| < R$ contenido en Ω y sean a_0 y a_1 dos números complejos arbitrarios. Entonces, existe una y sólo una solución local f con las siguientes propiedades:*

1. *f satisface las condiciones iniciales $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$.*
2. *f es analítica en $|z| < R$.*

Demostración. Véase [13] pág. 85-88. □

Observación. El teorema 1.2 implica que si z_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (1.11), entonces existen soluciones f_0 y f_1 las cuales satisfacen las condiciones iniciales $f_0(z_0) = 1$, $f_0^{'}(z_0) = 0$ y $f_1(z_0) = 0$, $f_1^{'}(z_0) = 1$. Por otro lado, si $f(z) = a_0 f_0(z) + a_1 f_1(z)$ para cualesquiera constantes a_0 y a_1, este es únicamente determinado. Por lo tanto, cada solución local es una combinación lineal de $f_0(z)$ y $f_1(z)$. Más aún, estas soluciones son linealmente independientes, pues si $a_0 f_0(z) + a_1 f_1(z) = 0$, al hacer $z = z_0$ se obtiene $a_0 = 0$ y en consecuencia $a_1 = 0$ pues $f_1 \neq 0$.

La observación anterior conduce al siguiente resultado.

Corolario 1.2.1. *Si z_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (1.11), entonces existe un conjunto $\{f_1, f_2\}$ de soluciones linealmente independientes. Dicho conjunto, es llamado un* ***sistema fundamental****.*

Si z_0 es un punto singular de la ecuación (1.11), ello implica que las funciones p y q dadas en (1.12), no son analíticas en z_0, no obstante, si z_0 es una singularidad aislada tanto de p como de q, se puede aplicar el teorema A.5, para obtener expansiones en series para p y q, y analizar el comportamiento de las soluciones alrededor de z_0. Como en el caso de la ecuación diferencial de primer orden, se desea analizar el comportamiento de las soluciones alrededor de un punto singular. Para ello supongamos que $z = a$ es una singularidad aislada tanto de p como de q y consideremos la curva cerrada simple Γ alrededor de a (véase la Figura 1.1 y 1.2 de la sección anterior). Sea z_1 un punto arbitrario sobre Γ. Claramente z_1 es un punto ordinario para la ecuación diferencial (1.11) y, en vista del corolario 1.2.1, un sistema fundamental $\{w_1, w_2\}$ definido en una vecindad de z_1 existe, es decir, dicho sistema está definido en un disco de la forma $|z - z_1| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. La continuación analítica de w_1 y w_2 alrededor de Γ comenzando en z_1 conduce a otro sistema fundamental $\{w_1^*, w_2^*\}$ definida en este disco ($|z - z_1| < \epsilon$). Por otro lado, puesto que w_1^*, y w_2^* también son soluciones de la ecuación diferencial, estas deben ser combinaciones lineales del sistema fundamental inicial. Se sigue pues que existen constantes complejas c_{jk}, no todas cero tales que

$$\begin{aligned} w_1^* &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ w_2^* &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Esto forma un sistema de ecuaciones con solución no nula. Por ende el determinante del sistema (1.13) es diferente de cero, es decir, $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$. Esto significa que la matriz

$$M = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

es invertible. Claramente, la matriz M depende del sistema fundamental con el que se comience, sin embargo, cambiando a otro sistema fundamental digamos $\{w_0, w_{00}\}$ definida en $|z - z_1| < \epsilon$, y continuando analíticamente este nuevo sistema a lo largo de Γ, llegamos a otro sistema fundamental $\{w_0^*, w_{00}^{**}\}$ definido en la vecindad de z_1, y nuevamente estas deben ser combinaciones lineales del sistema $\{w_0, w_{00}\}$; es decir

$$w_0^* = a_{11}w_0 + a_{12}w_{00}$$
$$w_{00}^{**} = a_{21}w_0 + a_{22}w_{00}$$

donde a_{ij} son constantes complejas. Una pregunta natural surge entonces: ¿Cuál es la relación que existe entre la matriz M y M^*, donde

$$M^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}?$$

La respuesta es que son similares[5]. En efecto, puesto que $\{w_0, w_{00}\}$ es un sistema fundamental definido en algún entorno que contiene a z_1, entonces debe existir una matriz invertible A tal que

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_{00} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_{00} \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Ahora bien, multiplicando por M la segunda igualdad dada en (1.15) se obtiene

$$M \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{bmatrix} = MA^{-1} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_{00} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

finalmente multiplicando (1.16) por A se tiene

$$A \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{bmatrix} = AMA^{-1} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0^* \\ w_{00}^* \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

como el resultado del circuito que comienza en $\{w_0, w_{00}\}$. Así, $M^* = AMA^{-1}$ y por propiedades de matrices similares M y M^* tienen el mismo polinomio característico. De esta última observación también se sigue que las raíces no dependen del sistema fundamental con el que se comience. Así, por (1.14) obtenemos

$$\lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0 \tag{1.18}$$

como polinomio característico de M. Más aún, al ser M invertible, las raíces de su polinomio característico no pueden ser cero. Existen dos posibilidades para las raíces de (1.18), denotadas por λ_1 y λ_2: *i)* λ_1 y λ_2 son distintas y *ii)* λ_1 y λ_2 son iguales.

Supongamos que *i)* ocurre, entonces M es diagonalizable y por tanto similar a una matriz diagonal formada por estas raíces, es decir $D = A^{-1}MA$, donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, empezando en z_1 con el sistema fundamental $\{w_1, w_2)\}$ y aplicando sucesivamente las matrices A, M y A^{-1}, el resultado es un sistema fundamental $\{w_0, w_{00}\}$ y $D[w_0, w_{00}]^t = [\lambda_1 w_0, \lambda_2 w_{00}]^t$. En conclusión, si las raíces de (1.18) son distintas, se puede hallar dos soluciones linealmente independientes, las cuales son multiplicadas por una constante cuando z describe Γ.

Eligiendo $\rho_1 = \log \lambda_1/2\pi i$ y $\rho_2 = \log \lambda_2/2\pi i$ y considerando las funciones multivaluadas $(z-a)^{-\rho_1}$ y $(z-a)^{-\rho_2}$ se obtiene que

$$w_0 = (z-a)^{\rho_1}V_1(z) \text{ y } w_{00} = (z-a)^{\rho_2}V_2(z), \tag{1.19}$$

[5]Dos matrices M y M^* son similares si existe una matriz invertible A tal que $M^* = AMA^{-1}$.

donde $-\pi < \arg\,(z-a) < \pi$ y

$$V_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ y } V_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n \tag{1.20}$$

Resta verificar bajo qué condiciones V_1 y V_2 pueden ser reemplazadas por series de potencias ordinarias. La respuesta la da el teorema 1.3 que se enuncia más adelante.

Supongamos ahora que *ii)* ocurre. En este caso ya no se puede asegurar que M sea similar a una matriz diagonal, no obstante, una solución w_0 puede ser encontrada, la cual es multiplicada por λ_1 cuando z describe Γ, y que tiene la forma $w_0 = (z-a)^{\rho_1} V_1(z)$. Aunque la forma de una segunda solución puede ser hallada modificando ligeramente la forma de la matriz M, derivaremos la forma de una segunda solución más adelante con ayuda del teorema 1.3 y aplicando el método de reducción de orden.

Teorema 1.3. *Dada la ecuación diferencial (1.12), las funciones V_1 y V_2 (con $a = 0$)definidas como en (1.20), son sustituibles por series de potencias ordinarias si y sólo si $p(z) = \frac{p_1(z)}{p_0(z)}$ tiene a lo más un polo simple en $z = 0$ y $q(z) = \frac{p_2(z)}{p_0(z)}$ tiene a lo más un polo de orden 2 en $z = 0$.*

Demostración. Véase [7] pág. 155-161 $\square$

El teorema 1.3 justifica la siguiente definición.

Definición 1.5. *El punto $z = 0$ es llamado **singular regular** de la ecuación diferencial (1.12), si $p(z) = \frac{p_1(z)}{p_0(z)}$ tiene a lo más un polo simple en 0 y $q(z) = \frac{p_2(z)}{p_0(z)}$ tiene a lo más un polo de orden 2 en $z = 0$.*

1.2.3. Ecuaciones diferenciales fuchsianas y singularidades en el infinito

Una singularidad regular también es llamada **singularidad fuchsiana** y en este caso la ecuación diferencial es referida como **ecuación diferencial fuchsiana** en honor al matemático Lázaro Fuchs el primero en estudiarlas. La importancia de las ecuaciones fuchsianas es que no se ven afectadas por transformaciones isomorfas o transformaciones de Mobius, que son del tipo $u = \frac{az+b}{cz+d}$, $ab - cd \neq 0$. Esto es, si se aplica una transformación de Mobius a una ecuación diferencial fuchsiana, ésta conduce a otra del mismo tipo. De esta manera, si una ecuación posee una singularidad en un punto diferente del origen, esta puede ser trasladada al origen mediante una transformación. Por ejemplo, si $z = a$ es una singularidad regular, entonces el cambio de variable $u = z - a$ traslada la singularidad al origen.

De mayor interés es el análisis de una singularidad en el infinito. Para analizar el comportamiento en el punto $z = \infty$, basta hacer la transformación $u = 1/z$ y analizar el comportamiento de las funciones resultantes en $u = 0$.

Haciendo el cambio de variable $u = 1/z$ se obtiene $dz = -\frac{1}{u^2}du$, $\frac{df}{dz} = -u^2\frac{df}{du}$ y

$$\frac{d^2f}{d^2z} = \frac{d}{dz}(-u^2\frac{df}{du}) = -u^2\frac{d}{du}(-u^2\frac{df}{du}) = 2u^3\frac{df}{du} + u^4\frac{d^2f}{d^2u},$$

que al sustituir en (1.12) resulta la ecuación

$$g''(u) + P(u)g'(u) + Q(u)g(u) = 0 \tag{1.21}$$

donde $g(u) = f(\frac{1}{u})$, $P(u) = \frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}p(\frac{1}{u})$ y $Q(u) = \frac{1}{u^4}q(\frac{1}{u})$.

Definición 1.6. *El punto $z = \infty$ es llamado un punto **ordinario** o un punto **singular regular** de la ecuación diferencial (1.12), si el punto u=0 es un punto ordinario, o singular regular de la ecuación diferencial (1.21), respectivamente.*

Para ecuaciones diferenciales fuchsianas existe un método para resolverlas, el cual se discute en la siguiente sección.

1.3. Método de Frobenius

En teorema 1.3 establece que al menos una solución de una ecuación diferencial fuchsiana es de la forma $w(z) = z^{\alpha} f(z)$, donde α es un parámetro complejo y $f(z)$ una función analítica. Este teorema da origen al **método de Frobenius** el cual consiste en proponer una solución de esta forma.

Supongamos, sin pérdida de generalidad que $z = 0$, es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1.12). De la definición (1.5) se tiene que

$$p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k z^k = z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1} z^i \text{ y } q(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} q_k z^k = z^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} q_{i-2} z^i. \tag{1.22}$$

Sustituyendo (1.22) en (1.12) se obtiene la ecuación diferencial

$$z^2 f''(z) + z(\sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1} z^i) f'(z) + (\sum_{i=0}^{\infty} q_{i-2} z^i) f(z) = 0. \tag{1.23}$$

Así, en vista de (1.23), la forma más general de una ecuación diferencial fuchsiana con una singularidad regular en el origen es

$$z^2 f''(z) + zP(z) f'(z) + Q(z) f(z) = 0, \tag{1.24}$$

donde $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i$ y $Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i z^i$.

El método de Frobenius consiste en proponer una solución de la forma $f(z) = z^{\mu} g(z)$, donde $g(z)$ es analítica y μ es un parámetro real o complejo por determinar. Así, $f(z) = z^{\mu} g(z) = z^{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+\mu}$ y diferenciando se tiene que $f'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu) a_i z^{i+\mu-1}$, $f''(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu)(i+\mu-1) a_i z^{i+\mu-2}$. Sustituyendo estas derivadas en (1.24) obtenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu)(i+\mu-1) a_i z^i + (\sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i)(\sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu) a_i z^i) + (\sum_{i=0}^{\infty} Q_i z^i)(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i) = 0.$$

Multiplicando las series resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\mu)(n+\mu-1) a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n} ((i+\mu) P_{n-i} + Q_{n-i}) a_i) z^n = 0,$$

o bien,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+\mu)(n+\mu-1) a_n + \sum_{i=0}^{n} ((i+\mu) P_{n-i} + Q_{n-i}) a_i] z^n = 0.$$

La última igualdad se cumple si y sólo si

$$(n+\mu)(n+\mu-1) a_n + \sum_{i=0}^{n} ((i+\mu) P_{n-i} + Q_{n-i}) a_i = 0, \qquad n = 0, 1, 2... \tag{1.25}$$

Haciendo $n = 0$ en esta última igualdad y asumiendo que $a_0 \neq 0$ se obtiene

$$\mu(\mu - 1) + \mu P_0 + Q_0 = 0. \tag{1.26}$$

La ecuación (1.26) se denomina **ecuación indicial**. La importancia de esta ecuación radica en que determina los únicos valores de μ para que la forma de la solución propuesta pueda ser una solución de (1.24). Todo el desarrollo posterior va a depender de sus dos raíces, y el hecho fundamental va a recaer en que su diferencia $\mu_1 - \mu_2$ sea o no un número entero.

En efecto, reescribiendo (1.25) resulta

$$[(n+\mu)(n+\mu-1)+(n+\mu)P_0+Q_0]a_n = -\sum_{i=0}^{n-1}((i+\mu)P_{n-i}+Q_{n-i})a_i, \tag{1.27}$$

pero, en vista (1.26), podemos escribir (1.27) como $[(n+\mu-\mu_1)(n+\mu-\mu_2)]a_n = -\sum_{i=0}^{n-1}((i+\mu)P_{n-i}+Q_{n-i})a_i$, donde μ_1 y μ_2 son las raíces de la ecuación indicial. Eligiendo $\mu=\mu_1$ y $\mu=\mu_2$ y sustituyendo en esta última relación resulta

$$[n(n+\mu_1-\mu_2)]a_n = -\sum_{i=0}^{n-1}((i+\mu_1)P_{n-i}+Q_{n-i})a_i \tag{1.28}$$

$$[n(n+\mu_2-\mu_1)]a_n = -\sum_{i=0}^{n-1}((i+\mu_2)P_{n-i}+Q_{n-i})a_i \tag{1.29}$$

respectivamente. Estas últimas relaciones determinan los coeficientes a_n siempre y cuando $\mu_1-\mu_2$ no sea un entero, pues de lo contrario algunos coeficientes no están bien definidos.

En efecto, supongamos que $\mu_1-\mu_2 \in \mathbb{Z}$,entonces $\mu_1-\mu_2 = M$ para algún $M \in \mathbb{Z}$. Consideremos los siguientes casos.*(i)* $M>0$, *(ii)*$M<0$, *(iii)*$M=0$. Supongamos que *(i)* ocurre, entonces $\mu_1-\mu_2 = M \in \mathbb{N}$ y el coeficiente a_M dado en (1.29) no está definido, obteniéndose solamente una solución. Análogamente si *(ii)* ocurre, entonces $\mu_2-\mu_1 = -M \in \mathbb{N}$ y el coeficiente a_{-M} dado en (1.28) no está definido, obteniéndose nuevamente una solución. Finalmente, si *(iii)* ocurre entonces (1.28) y (1.29) proporcionan la misma solución. Para obtener una segunda solución si $\mu_1-\mu_2 = M \in \mathbb{N}$, aplicaremos el método de *reducción de orden* el cual consiste en proponer una solución de cierta forma, con la finalidad de reducir el orden de la ecuación resultante. Sea $f_2 = f_1\int g$ donde f_1 es la solución conocida y g es una función por determinar. Sustituyendo f_2 en (1.24), se obtiene la ecuación

$$zf_1g^{'} + (2zf_1^{'}+Pf_1)g = 0, \text{ o bien } \frac{g'}{g} = -2\frac{f_1'}{f_1} - \frac{P(z)}{z}.$$

Integrando esta última ecuación obtenemos que

$$\begin{aligned}\log g = -2\log f_1 - \int\frac{P(\xi)}{\xi}d\xi + C = \log\frac{1}{f_1^2} - \int\frac{P(\xi)}{\xi}d\xi + C &= \log\frac{1}{f_1^2} - P_0\int\frac{1}{\xi}d\xi - \int\frac{P(\xi)-\xi}{\xi}d\xi + C \\ &= \log\frac{z^{-P_0}}{f_1^2} - \int\frac{P(\xi)-\xi}{\xi}d\xi + C.\end{aligned}$$

Así $g = K\frac{z^{-P_0}}{f_1^2}\exp(-\int\frac{P(\xi)-\xi}{\xi}d\xi) = Kz^{-P_0}h(z)$. Luego, g es una función de la forma $g = z^{-P_0}h(z)$ donde $h(z)$ es una función analítica en $z=0$. Ahora bien, puesto que $\mu_1+\mu_2 = 1-P_0$, podemos reemplazar $-P_0$ por $\mu_1+\mu_2-1$ así que g es de la forma $g = \frac{h_2(z)}{z}$ donde $h_2(z)$ es una función analítica en $z=0$. En resumen, la segunda solución es de la forma

$$f_2(z) = f_1(z)\int g = f_1(z)\log(z) + f_1(z)h_3(z)$$

donde $h_3(z)$ es una función analítica. De esta manera la segunda solución tiene la forma

$$f_2 = f_1\int g = cf_1\log z + z^{\mu_1}\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n. \tag{1.30}$$

Por otro lado, si $M \notin \mathbb{Z}$, entonces (1.28) y (1.29) proporcionan 2 soluciones linealmente independientes. En resumen:

1. Si las raíces de la ecuación indicial μ_1, μ_2 satisfacen que $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{Z}$, el método de Frobenius proporciona dos soluciones linealmente independientes
$$f_1(z) = z^{\mu_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \qquad\qquad f_2(z) = z^{\mu_2} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i.$$

2. Si las raíces de la ecuación indicial μ_1, μ_2 satisfacen que $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{Z}$, el método de Frobenius permite obtener al menos una solución de la forma
$$f_1(z) = z^{\mu_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i,$$
mientras que una segunda solución es de la forma $f_2 = cf_1 \log z + z^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$.

Ejemplo 1.2. *La ecuación $(1 - z^2)\psi''(z) - 2z\psi'(z) + n(n + 1)\psi(z) = 0$ donde n es un número natural, es llamada **ecuación diferencial de Legendre**[6]. Los puntos $z = \pm 1$ son puntos singulares regulares $(1 - z^2 = (1 - z)(1 + z))$, y el origen es un punto ordinario. De esta manera, en una vecindad del origen dos soluciones analíticas linealmente independientes existen y, cuyo dominio de analiticidad no encierra a las singularidades $\pm$ 1. De lo anterior se deduce que el radio de convergencia de las soluciones debe ser estrictamente menor que 1, por que la solución general para la ecuación de Legendre es de la forma*
$$\psi(z) = a \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + b \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$
con a, b constantes y ambas soluciones son válidas para $|z| < 1$.

Ejemplo 1.3. *La ecuación diferencial $\psi''(z) + \frac{1}{z}\psi'(z) - \frac{1}{z}\psi(z) = 0$ tiene una singularidad regular en el origen. La ecuación indicial es $\mu(\mu - 1) + \mu = 0$, con raíz doble $\mu = 0$. Por lo que una solución es de la forma $\psi(z) = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene que $c_k = 1/(k!)^2$ para toda k, por lo que $\psi(z) = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^2}$.*

Ejemplo 1.4. *La ecuación diferencial $z^2\psi''(z) + az\psi'(z) + b\psi(z) = 0$ donde a y b son constantes complejas es llamada **ecuación de Cauchy-Euler**. Para esta ecuación, el origen es una singularidad regular (también $z = \infty$). La ecuación diferencial ya está escrita en la forma (1.24) por lo que la ecuación indicial (1.26) es $\mu(\mu-1)+a\mu+b = 0$, con raíces $\mu_{1,2} = \frac{1-a\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$. Luego, si $(a-1)^2 = 4b$ entonces $\mu_1 = \mu_2$ y una solución es de la forma $\psi(z) = z^{\frac{1-a}{2}} f(z)$. Al sustituir en la ecuación diferencial y simplificar se obtiene $f(z) = 1$, por lo que una solución es de la forma $\psi(z) = z^{\frac{1-a}{2}}$. Análogamente, si se propone la segunda solución de la forma $f_2 = \log(z) + z^{\frac{1-a}{2}} h(z)$, se sigue que $h(z) = 0$, por lo que la segunda solución es de la forma $\psi(z) = z^{\frac{1-a}{2}} \log(z)$ como se esperaba.*

Finalmente, si $(a - 1)^2 \neq 4b$ es sencillo verificar que la solución está dada por $\psi(z) = c_1 z^{\mu_1} + c_2 z^{\mu_2}$.

En la siguiente sección discutiremos algunas ecuaciones diferenciales de extrema importancia tanto en las matemáticas puras como aplicadas conocidas como **ecuaciones diferenciales especiales** debido a que sus soluciones son funciones (especiales) no elementales de gran aplicación.

[6]En el Capítulo 5 se resolverá esta ecuación usando el método de los operadores y se demostrará que una solución es un polinomio (véase ejemplo 5.6).

1.4. Ecuaciones especiales

Varias de las más importantes ecuaciones diferenciales que aparecen en la práctica son de la forma (1.12). Entre ellas tenemos:

1. La ecuación diferencial hipergeométrica.
2. La ecuación diferencial hipergeométrica confluente.
3. La ecuación diferencial de Bessel.

La característica principal de estas ecuaciones, es que todas son ecuaciones diferenciales fuchsianas y por pon lo tanto el método de Frobenius puede ser aplicado para obtener al menos una solución. A tan importantes ecuaciones diferenciales aplicaremos el método de Frobenius para obtener sus soluciones. Comenzamos definiendo una importante función analítica que aparece en la matemática, *la función hipergeométrica.*

Definición 1.7. *Sean a, b y c parámetros reales o complejos y c≠ 0,-1,-2,.... La función definida por*

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n, \qquad |z| < 1 \tag{1.31} $$

*es llamada **función hipergeométrica**, donde*

$$ (a)_n = a(a+1)(a+2)(a+3)...(a+n-1), \quad n \geq 0. $$

1.4.1. Ecuación diferencial hipergeométrica

La ecuación diferencial homogénea dada por

$$ z(1-z)f''(z) + (c - (a+b+1)z)f'(z) - abf(z) = 0, \tag{1.32} $$

donde a, b y c son escalares reales o complejos, se conoce como **ecuación diferencial hipergeométrica** y posee singularidades regulares únicamente en 0, 1 e ∞.

Lema 1.1. *La solución general de (1.32) alrededor de $z = 0$ está dada por $f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$, donde*

$$ f_1(z) = {}_2F_1(a,b;c;z) \ \ y \ \ f_2(z) = z^{1-c} \ {}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; z) $$

siempre que $1 - c$ no sea un número entero.

Demostración. En efecto, sea $f(z) = z^\mu g(z) = z^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, en vista de (1.24) la ecuación (1.32) se reescribe como $z^2 f''(z) + zp(z)f'(z) + q(z)f(z) = 0$, donde

$$ p(z) = \frac{c-(a+b+1)z}{1-z} = c + \sum_{k=0}^{\infty} (c - (a+b+1))z^{k+1}, \qquad |z| < 1 $$

$$ q(z) = -\frac{z}{1-z} = -\sum_{k=0}^{\infty} abz^{k+1}, \qquad |z| < 1. $$

La ecuación indicial (1.26) es por tanto $\mu(\mu-1) + \mu c = 0$, cuyas raíces son $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1 - c$. Eligiendo $\mu = \mu_1 = 0$, la ecuación (1.28) es $[n(n + c - 1)]a_n = \sum_{k=0}^{n-1} [ab + (a + b - c + 1)k]a_k$. Haciendo $a_0 = 1$ en esta última relación, se obtiene la solución $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)n}{(c)_n n!} z^n = {}_2F_1(a,b;c;z)$.

Análogamente, eligiendo $\mu = \mu_2 = 1 - c$, la ecuación (1.29) es

$$[n(n+1-c)]a_n = \sum_{k=0}^{n-1}[a(b-c+k+1)+(b-c+1)(k+1-c)]a_k.$$

Así, una segunda solución está dada por

$$f_2(z) = z^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c+1)_n(b-c+1)n}{(2-c)_n n!}z^n.$$

□

De manera análoga, las relaciones de recurrencia (1.28) y (1.29) para $z = 1$ están dadas por $n[n+a+b-c]a_n = \sum_{k=0}^{n-1}[ab+kc]a_k$ y

$$n[n+c-a-b]a_n = \sum_{k=0}^{n-1}[(k+c-a-b)c+ab]a_k = \sum_{k=0}^{n-1}[kc+(c-a)(c-b)]a_k$$

respectivamente, obteniéndose con ello la solución general $f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$, donde

$$\begin{aligned} f_1(z) &= {}_2F_1(a, b; a+b+1-c; 1-z), & |1-z| < 1 \\ f_2(z) &= (1-z)^{c-a-b}\ {}_2F_1(c-b, c-a; c-a-b+1; 1-z), & |1-z| < 1 \end{aligned}$$

respectivamente, siempre que $c - a - b$ no sea un número entero.

Finalmente, haciendo el cambio de variable $u = 1/z$ y usando las relaciones dadas en (1.21), se puede verificar que la solución general de (1.32) alrededor de $z = \infty$ está dada por $f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$, donde

$$f_1(z) = z^{-a}\ {}_2F_1(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}), \qquad |z| > 1$$

$$f_2(z) = z^{-b}\ {}_2F_1(a, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z}), \qquad |z| > 1$$

siempre que $b - a$ no sea un número entero.

1.4.2. Ecuación diferencial hipergeométrica confluente

La ecuación diferencial dada por

$$zf''(z) + (c-z)f'(z) - af(z) = 0 \tag{1.33}$$

donde a y c son constantes reales o complejas, es conocida como **ecuación diferencial hipergeométrica confluente**. Esta ecuación posee una única singularidad regular en $z = 0$ y las soluciones se pueden escribir en términos de la función

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}z^n, \quad |z| < \infty$$

llamada **función hipergeométrica confluente**.

Lema 1.2. *La solución general de la ecuación diferencial (1.33) está dada por $f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$, donde*

$$\begin{aligned} f_1(z) &= {}_1F_1(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}z^n, & |z| < \infty \\ f_2(z) &= z^{1-c}\ {}_1F_1(a; c; z) = z^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c+1)_n}{(2-c)_n n!}z^n, & |z| < \infty \end{aligned}$$

siempre que $1 - c$ no sea un número entero.

Demostración. Reescribiendo (1.33) se obtiene $z^2 f''(z)+z(c-z)f'(z)-azf(z)=0$. Comparando esta ecuación con (1.24) vemos que $P(z)=c-z$, y $Q(z)=-az$. La ecuación indicial (1.26) es $\mu(\mu-1)+c\mu=0$, cuyas raíces son $\mu_1=0$ y $\mu_2=1-c$. Tomando $\mu=\mu_1=0$ la relación (1.28) resultante es $n(n+c-1)a_n=(n+a-1)a_{n-1}, \ \ n=1,2,3....$ De esta última relación se obtiene la solución $f_1(z)= \ _1F_1(a;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}z^n$. Análogamente, si $\mu=\mu_2=1-c$, la ecuación (1.29) resultante es $n(n+1-c)a_n=(a-c+n)a_{n-1}$, $n=1,2,3...$, con la cual se obtiene la solución $f_2(z)=z^{1-c} \ _1F_1(a;c;z)=z^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c+1)_n}{(2-c)_n n!}z^n$. □

1.4.3. Ecuación diferencial de Bessel

La **ecuación diferencial de Bessel** de orden ν es dada por

$$z^2 f''(z)+zf'(z)+(z^2-\nu^2)f(z)=0, \tag{1.34}$$

donde ν es una constante real o compleja. Esta ecuación, posee una única singularidad regular en $z=0$.

Lema 1.3. *La solución general de la ecuación diferencial (1.34) está dada por $f(z)=c_1f_1(z)+c_2f_2(z)$, donde*

$$f_1(z)=z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{\nu}\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)}(\frac{z}{2})^{2k}, \qquad |z|<\infty \tag{1.35}$$

$$f_2(z)=z^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{-\nu}\Gamma(1+k)\Gamma(1-\nu+k)}(\frac{z}{2})^{2k}, \qquad |z|<\infty \tag{1.36}$$

siempre que 2ν no sea un número entero. Donde Γ es la función Gamma.

Demostración. Comparando (1.34) con (1.24) vemos que $P(z)=1$ y $Q(z)=z^2-\nu^2$. Luego, la ecuación indicial (1.26) está dada por $\mu(\mu-1)+\mu-\nu^2=0$ cuyas raíces son $\mu_1=\nu$ y $\mu_2=-\nu$. Eligiendo $\mu_1=\nu$, la ecuación (1.28) es $n(n+2\nu)a_n=-a_{n-2}$, $n=2,3,4....$ De esta última relación obtenemos $a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}n!(1+\nu)(\nu+2)...(\nu+n)}$. Eligiendo $a_0=\frac{1}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)}$, podemos escribir $a_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\Gamma(n+1)\Gamma(1+\nu+n)}$, y por lo tanto una solución es

$$f_1(z)=z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}z^{2k}=z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)}z^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)}(\frac{z}{2})^{2k+\nu}.$$

Análogamente, eligiendo $\mu=-\nu$ obtenemos la segunda solución

$$f_2(z)=z^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}z^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{-\nu}}{2^{2n-\nu}\Gamma(1+k)\Gamma(1-\nu+k)}z^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-\nu+k)}(\frac{z}{2})^{2k-\nu}.$$

□

En la literatura las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ dadas en (1.35) y (1.36) son denotadas por $J_{\nu}(z)$ y $J_{-\nu}(z)$ respectivamente y denominadas **funciones de Bessel de primera clase de orden** ν y $-\nu$, respectivamente.

Capítulo 2

La Integral Fraccional

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos la definición de **integral fraccional**, que resulta de generalizar el proceso de iterar n veces la integral ordinaria de Riemann. Aunque en la literatura existen diversas definiciones para dicha integral, para nuestros propósitos será suficiente considerar la definición de Riemann-Liouville que se expone en [10].

La definición que consideramos en este capítulo surge de manera natural al considerar ciertas propiedades de la integral. Por ello, antes de definirla, presentamos algunos resultados conocidos del cálculo elemental que justificarán su definición.

2.1.1. La integral como función de un parámetro

Si $f(x,y)$ es una función continua de x y y en la región rectangular $R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a,b] \times [c,d]$, puede considerarse fija a la variable x e integrar la función $f(x,y)$, considerada como función de y únicamente, sobre el intervalo $c \leq y \leq d$. Así, se llega a la expresión $\int_c^d f(x,y)dy$, la cual aún depende de la elección de x. De este modo, se está considerando no solo una integral, sino la familia de integrales $\int_c^d f(x,y)dy$ obtenida para valores diferentes de x. La variable x, que se se mantiene fija durante la integración y a la cual se le puede asignar cualquier valor en su intervalo, recibe el nombre de **parámetro**. Por lo tanto, la integral ordinaria aparece como una función del parámetro x, es decir podemos definir una nueva función $F(x)$ como sigue

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy. \tag{2.1}$$

Observe que si $f(x,y)$ es continua en el rectángulo cerrado R, entonces f es uniformemente continua, y en vista de la desigualdad

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_c^d (f(x+h,y) - f(x,y))dy \right| \leq \int_c^d |f(x+h,y) - f(x,y)|dy \tag{2.2}$$

se sigue que para h suficientemente pequeño, el integrando de la derecha de (2.2), considerado como una función de y, puede hacerse uniformemente tan pequeño como se desee y se llega a la conclusión de que $F(x)$ es continua.

Un resultado más general se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Si en el rectángulo R la función $f(x,y)$ es continua y tiene una derivada continua con respecto a x, entonces puede derivarse la integral con respecto a x bajo el signo de integral, es decir*

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d f_x(x,y)dy. \tag{2.3}$$

Más aún, $F'(x)$ es una función continua de x.

Demostración. Para h tal que $x+h$ está en el intervalo $[a,b]$, podemos escribir

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^d (f(x+h,y) - f(x,y))dy = \int_c^d hf_x(x+\theta h,y)dy, \qquad 0<\theta<1$$

en vista del teorema del valor medio. Por otro lado, por hipótesis f_x se ha supuesto continua, por tanto uniformemente continua y por lo tanto, se sigue que la diferencia $f_x(x+\theta h,y) - f_x(x+h,y)$ es menor que cualquier cantidad positiva ϵ para toda h con $|h|<\delta$, donde $\delta(\epsilon)$ es independiente de x y y. En consecuencia

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_c^d f_x(x+h,y)dy\right| \leq \left|\int_c^d f_x(x+\theta h,y)dy - \int_c^d f_x(x,y)dy\right| \leq \int_c^d \epsilon dy = \epsilon(d-c)$$

para $|h|<\delta(\epsilon)$, siempre que $h\neq 0$. Esto implica que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_c^d f_x(x,y)dy$$

que era lo que se quería demostrar. La continuidad de F' se deduce a partir de la continuidad de $f_x(x,y)$. $\square$

En una forma semejante puede establecerse la continuidad de la integral y la regla para derivar la integral con respecto a un parámetro, cuando se tiene el parámetro en los límites de integración. Por ejemplo, supongase que se desea derivar

$$F(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy,$$

donde $f(x,y)$ es continua en una región rectangular R como antes. Aquí se supone que ψ_1 y ψ_2 tienen primeras derivadas continuas en $[a,b]$ y que $c<\psi_1(x)<\psi_2(x)<d$ para toda x tal que $x\in(a,b)$, y además que $f_x(x,y)$ es continua. Bajo estas hipótesis, sea

$$F(x) = \int_u^v f(x,y)dy = \phi(u,v,x), \qquad u=\psi_1(x),\ v=\psi_2(x).$$

Entonces, la función $\phi(u,v,x)$ queda definida para $a\leq x\leq b,\ c\leq u\leq d,\ \ c\leq v\leq d$. Además, en vista de (2.3) se sigue que $\phi_x(u,v,x) = \int_u^v f_x(x,y)dy$. Por otro lado, por el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\phi_v(u,v,x) = \frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(x,y)dy = f(x,v) \quad \text{y} \quad \phi_u(u,v,x) = \frac{\partial}{\partial u}\int_u^v f(x,y)dy = -\frac{\partial}{\partial u}\int_v^u f(x,y)dy = -f(x,u)$$

respectivamente. Finalmente, al aplicar la regla de la cadena a la función $F(x) = \phi(u,v,x) = \phi(\psi_1(x),\psi_2(x),x)$ se tiene que $F'(x) = \phi_u\psi_1(x) + \phi_v\psi_2(x) + \phi_x$ y llegamos así a la fórmula

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f_x(x,y)dy - \psi_1(x)f(x,\psi_1(x)) + \psi_2(x)f(x,\psi_2(x)). \tag{2.4}$$

2.1.2. La integral de orden n

Supongamos que $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, y consideremos una sucesión de integrales como sigue

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y)dy, \qquad F_0(x) = \int_0^x f(y)dy. \tag{2.5}$$

La fórmula (2.4) aplicada a (2.5) conduce a $F_k'(x) = F_{k-1}(x)$ para $k = 1, 2, 3, ..., n$. y puesto que $F_0'(x) = f(x)$, esto inmediatamente da $F_n^{n+1}(x) = f(x)$. Por lo tanto, $F_n(x)$ es aquella función cuya $(n+1)$-ésima derivada es igual a $f(x)$ y que, junto con sus n primeras derivadas, se anula para $x = 0$; se obtiene a partir de $F_{n-1}(x)$, por integración desde 0 hasta x. De aquí que $F_n(x)$ es la función obtenida a partir de f, integrando $n+1$ veces entre los límites 0 y x, es decir

$$F_0(x) = \int_0^x f(y)dy, \;\; F_1(x) = \int_0^x F_0(y)dy, \;\; F_2(x) = \int_0^x F_1(y)dy, ..., F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(y)dy.$$

En consecuencia obtenemos la notable fórmula

$$F_n(x) = \int_0^x \left(\int_0^x \left(... \left(\int_0^x f(y)dy \right) dy... \right) dy \right) dy = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-y)^n f(y)dy, \tag{2.6}$$

que simplifica una sucesión de integrales iteradas a una simple integral.

En la siguiente sección definiremos la integral fraccional como una generalización inmediata del proceso anterior para obtener $F_n(x)$ el cual es llamada la **integral de orden** n de f.

2.2. La Integral fraccional

Si se observa la fórmula (2.6), este parece ser un buen candidato para generalizar el proceso de iterar la integral n-veces para cuando n no sea un número entero positivo si no que cualquier número real o complejo. Es un buen candidato en el sentido de que $n!$ admite generalizaciones a valores reales e incluso complejos y la integral, bajo condiciones especiales impuestas a f, converge. Esto es, si $\nu \in \mathbb{R}$ se puede intentar definir

$${}_0D_x^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt. \tag{2.7}$$

Restaría ver bajo que condiciones la integral dada en (2.7) converge. Desde luego, la integral (2.7) está en función de los parámetros x y ν. En la literatura, la definición

$${}_0D_x^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt, \qquad x, \nu > 0$$

es conocida como *Integral fraccional de Riemann-Liouville* de orden ν y es la que consideraremos en este capítulo.

Definición 2.1. *Sea $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu, b > 0$ y sea $f : [0, b] \to \mathbb{R}$. Entonces, para $x > 0$ definimos y denotamos por*

$${}_0D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \tag{2.8}$$

*a la **Integral fraccional de Riemann-Liouville** de f de orden ν siempre que este exista.*

Note que la definición 2.1 no impone condición alguna sobre f. Esto se debe a que la integración es en el sentido de Riemann y las condiciones para la convergencia de dicha integral no son únicas, además de que la integral puede ser impropia en el caso de que f no esté definida en el cero.

En la literatura, existen otras justificaciones que conllevan a la definición 2.1. Daremos aquí un argumento usando la fórmula integral de Cauchy para la derivada n-ésima de una función analítica, debido que esta nos permitirá extender la definición 2.1 al dominio complejo.

2.2.1. Fórmula integral de Cauchy

El teorema de la fórmula integral de Cauchy afirma que si $f(z)$ es una función univaluada y analítica en una región Ω del plano complejo, C una curva simple cerrada contenida en Ω, y $z \in \Omega$ está en el interior de C, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

de lo cual se sigue que

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \; . \tag{2.9}$$

Observe la similitud que existe entre la fórmula (2.9) y la definición de ${}_0D_t^{-\nu} f(t)$ dada en (2.8). Si n no es un entero, digamos ν, podemos reemplazar $n!$ por $\Gamma(\nu + 1)$ en (2.9). Pero si ν no es un entero, el punto z es ahora un punto de ramificación para el integrando. La curva simple cerrada C no es, por tanto, un contorno apropiado para la integración, pues el integrando no define a una función analítica y univaluada dentro de C. Para hacer del integrando una función univaluada se realiza un corte de ramificación a lo largo del eje real. El corte de ramificación se realiza a partir del punto z, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que es real como se muestra en la siguiente figura:

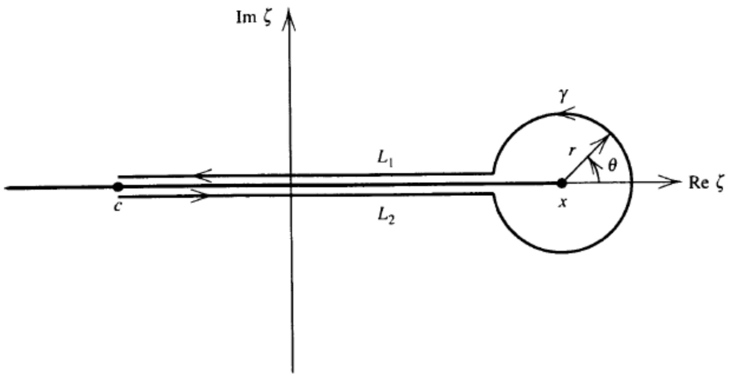

Figura 2.1: Contorno φ

Así

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c^x (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_\varphi (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta. \tag{2.10}$$

Ahora bien, puesto que

$$(\zeta - x)^{-\nu-1} = e^{(-\nu-1)\log(\zeta - x)} = e^{(-\nu-1)(\ln|\zeta - x| + i\theta)}, \qquad -\pi < \theta < \pi,$$

si se impone la restricción $\log(\zeta - x)$ a ser real cuando $\zeta - x > 0$, entonces dado que $\theta = \pi$ sobre L_1 y $\theta = -\pi$ sobre L_2, podemos escribir

$$(\zeta - x)^{-\nu-1} = e^{(-\nu-1)(\ln|\zeta - x| + i\pi)} = e^{(-\nu-1)(\ln(x-t) + i\pi)} \;\; \text{sobre} \;\; L_1$$

y

$$(\zeta - x)^{-\nu-1} = e^{(-\nu-1)(\ln|\zeta - x| - i\pi)} = e^{(-\nu-1)(\ln(x-t) - i\pi)} \;\; \text{sobre} \;\; L_2,$$

donde $t =$ Re ζ. Luego, si $\nu < 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_c^x (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta &= \int_{L_2} (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma} (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta + \int_{L_1} (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta \\ &= e^{i(\nu+1)\pi} \int_c^{x-r} (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt + \int_{|\xi - x| = r} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta \\ &+ e^{-i(\nu+1)\pi} \int_{x-r}^{c} (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt.\end{aligned}$$

Pero dado que

$$\int_{|\zeta - x| = r} (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} r^{-\nu-1} e^{-i(\nu+1)\theta} f(x + re^{i\theta})(ire^{i\theta}) d\theta$$

y

$$\left| \int_{|\zeta - x| = r} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\zeta \right| \leq r^{-\nu} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + re^{i\theta})| d\theta,$$

esta última integral tiende a cero cuando $r \to 0$, de donde

$$\int_c^x (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\zeta) d\xi = [e^{i(\nu+1)\pi} - e^{-i(\nu+1)\pi}] \int_c^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt = 2i \operatorname{sen}((\nu+1)\pi) \int_c^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt$$

en vista de la identidad

$$\operatorname{sen}((\nu+1)\pi) = \frac{e^{i(\nu+1)\pi} - e^{-i(\nu+1)\pi}}{2i}.$$

Finalmente, de (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c^x (\zeta - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\zeta &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} 2i \operatorname{sen}((\nu+1)\pi) \int_c^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1) \operatorname{sen}((\nu+1)\pi)}{\pi} \int_c^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt.\end{aligned}$$

Ahora bien, de la fórmula de reflexión para la función Γ (véase [13] pág. 46)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z} \tag{2.11}$$

obtenemos la fórmula deseada

$${}_cD_x^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_c^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt, \qquad \nu < 0$$

que está acorde con la definición 2.1 si $c = 0$.

2.2.2. Ejemplos

Antes de extender la definición 2.1 al dominio complejo daremos unos ejemplos en el dominio real. Estos ejemplos ilustran lo complicado que puede resultar calcular la integral fraccional de funciones elementales.

Ejemplo 2.1. *Sea* $f(x) = x^{\mu}$ *con* $\mu > -1$. *Por definición* ${}_0D_x^{-\nu} x^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\mu} dt$ *y haciendo el cambio de variable* $y = \frac{x-t}{x}$ *obtenemos*

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\mu} dt = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_1^0 x^{\nu-1} (\frac{x-t}{x})^{\nu-1} (x-xy)^{\mu} (-x) dy = \frac{x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 y^{\nu-1} (1-y)^{\mu} dy = \frac{x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)} B(\nu, \mu+1),$$

donde $B(p,q)$ *es la* ***función beta*** *definida por* $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$, *Re* $p > 0$, *Re* $q > 0$.

Ahora bien, utilizando la identidad $B(\nu,\mu+1)=\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}$ *(véase [13] pág. 45) obtenemos el resultado*

$$ {}_0D_x^{-\nu}x^{\mu}=\tfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}. $$

Note que si $\mu=0$ *se obtiene* ${}_0D_x^{-\nu}K=\frac{K}{\Gamma(\nu+1)}x^{\nu}$ *como la integral fraccional de orden* ν *de una constante.*

Ejemplo 2.2. *Sea* $f(x)=\ln x$*, afirmamos que* ${}_0D_x^{-\nu}\ln x=\frac{x^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}[\ln x-\gamma-\psi(\nu+1)]$*, donde*

$$ \gamma=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log\ n)=0{,}57716... $$

es la constante de Euler, y

$$ \psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}) $$

*es la **función digamma** (véase [13] pág. 53).*

En efecto, puesto que la serie de Taylor para $\ln(1+x)$ *está dada por*

$$ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \qquad -1<x\leq 1 $$

donde la convergencia es uniforme en cada intervalo abierto propiamente contenido en (-1,1] centrado en 0 *obtenemos*

$$
\begin{aligned}
{}_0D_x^{-\nu}\ln x=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}\ln t dt &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}\ln(x+t-x)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}\ln[x(1+\frac{t-x}{x})]dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}\ln x dt+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}\ln(1+\frac{t-x}{x})dt\\
&= \frac{\ln(x)}{\Gamma(\nu)}[-\frac{(x-t)^{\nu}}{\nu}|_0^x]+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}\ln(1+\frac{t-x}{x})dt\\
&= \frac{x^{\nu}\ln x}{\Gamma(\nu+1)}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}\ln(1+\frac{t-x}{x})dt\\
&= \frac{x^{\nu}\ln x}{\Gamma(\nu+1)}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(t-x)^n}{nx^n}dt\\
&= \frac{x^{\nu}\ln x}{\Gamma(\nu+1)}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nx^n}\int_0^x(x-t)^{\nu-1}(t-x)^n dt\\
&= \frac{x^{\nu}\ln x}{\Gamma(\nu+1)}-\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx^n}\int_0^x(x-t)^{\nu+n-1}dt\\
&= \frac{x^{\nu}\ln x}{\Gamma(\nu+1)}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx^n}\left[\frac{(x-t)^{\nu+n}}{\nu+n}|_0^x\right]\\
&= \frac{x^{\nu}\ln x}{\Gamma(\nu+1)}-\frac{x^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\nu)}\\
&= \frac{x^{\nu}\ln x}{\Gamma(\nu+1)}-\frac{x^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu}{n(n+\nu)}\\
&= \frac{x^{\nu}\ln x}{\Gamma(\nu+1)}-\frac{x^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\nu}\right]\\
&= \frac{x^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}[\ln x-\gamma-\psi(\nu+1)].
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.3. *Afirmamos que*

$$ {}_0D_x^{-\nu} x^\mu \ln x = \frac{\Gamma(\mu+1)x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu+\mu+1)}[\ln x + \psi(\mu+1) - \psi(\mu+\nu+1)], \qquad \mu > -1. $$

En efecto, esto se sigue de los ejemplos 2.1 y 2.2 ya que

$$
\begin{aligned}
{}_0D_x^{-\nu} x^\mu \ln x &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^\mu \ln t dt \\
&= \ln x \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^\mu dt\right] - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{nx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu+n-1} t^\mu dt\right] \\
&= \ln x \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}\right] - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{nx^n}\left[\frac{B(\nu+n,\mu+1)x^{\mu+\nu+n}}{\Gamma(\nu)}\right] \\
&= \ln x \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}\right] - \sum_{n=1}^\infty \frac{B(\nu+n,\mu+1)}{n\Gamma(\nu)}x^{\mu+\nu} \\
&= \ln x \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}\right] - \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)\Gamma(\mu+1)}{n\Gamma(\nu)\Gamma(\mu+\nu+n+1)}x^{\mu+\nu} \\
&= \ln x \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}\right] - \Gamma(\mu+1)\sum_{n=1}^\infty \frac{(\nu)_n\Gamma(\nu)}{n\Gamma(\nu)(\mu+\nu+1)_n\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}\left[\ln x - \sum_{n=1}^\infty \frac{(\nu)_n}{n(\mu+\nu+1)_n}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu}\left[\ln x + \psi(\mu+1) - \psi(\mu+\nu+1)\right].
\end{aligned}
$$

2.3. Extensión al dominio complejo

El argumento por la fórmula integral de Cauchy se basa en una hipótesis adicional, la cual nos permite extender la definición 2.1 al dominio complejo.

Definición 2.2. *Sea $f(z)$ una función analítica en una región Ω simplemente conexa del plano z y que contiene al origen y sea $\nu \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\nu) > 0$. Se define la* ***integral fraccional*** *de orden ν de $f(z)$ por*

$$ {}_0D_z^{-\nu} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^z (z-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi, \tag{2.12} $$

siempre que este exista. El carácter multivaluado de $(z-\xi)^{\nu-1}$ es evadido imponiendo la restricción

$$ \log(z-\xi) = \ln|z-\xi| + i\theta \quad \text{a ser real cuando } z-\xi > 0. $$

En vista de la definición 2.2 y de los ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3 obtenemos las generalizaciones

$$ {}_0D_z^{-\nu} z^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} z^{\mu+\nu} \qquad \mu > -1 \tag{2.13} $$

$$ {}_0D_z^{-\nu} \log z = \frac{z^\nu}{\Gamma(\nu+1)}[\log z - \gamma - \psi(\nu+1)] \tag{2.14} $$

$$ {}_0D_z^{-\nu} z^\mu \log z = \frac{\Gamma(\mu+1)z^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu+\mu+1)}[\log z + \psi(\mu+1) - \psi(\mu+\nu+1)], \qquad \mu > -1 \tag{2.15} $$

Justificaremos solamente la fórmula (2.13), los detalles para (2.14) y (2.15) son análogos.
Por definición

$$ {}_0D_z^{-\nu} z^\mu = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^z (z-\xi)^{\nu-1}\xi^\mu d\xi. $$

Haciendo el cambio de variable $w = \frac{z-\xi}{\xi}$, entonces $\xi = z - zw$ y por tanto

$$\begin{aligned}\int_0^z (z-\xi)^{\nu-1}\xi^{\mu}d\xi &= \int_1^0 z^{\nu-1}(\frac{z-\xi}{z})^{\nu-1}(z-zw)^{\mu}(-z)dw \\ &= \frac{z^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)}\int_0^1 w^{\nu-1}(1-w)^{\mu}dw.\end{aligned}$$

Ahora bien, si consideramos la integral $\int_0^1 w^{\nu-1}(1-w)^{\mu}dw$, vemos que la independencia de la ruta de integración está justificada, pues el integrando es una función analítica en todo el plano la cual es simplemente conexo, y en vista de ello podemos realizar la integración a lo largo del segmento que une a 0 con 1, pero sobre este segmento w es real, luego entonces

$$\int_0^1 w^{\nu-1}(1-w)^{\mu}dw = \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu}dt = B(\nu,\mu+1) = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}, \qquad t = \text{Re } w$$

y obtenemos así el resultado deseado.

Capítulo 3

Introducción a los Espacios de Banach y Operadores Lineales

3.1. Introducción

Los espacios con propiedades algebraicas y/o topológicas juegan un papel importante en el análisis matemático. Como ejemplos de estos espacios podemos mencionar al espacio de las funciones continuas, el espacio de las matrices con entradas reales (o complejas), el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, etc.. En estos espacios es posible definir los conceptos de suma de vectores, producto escalar, etc. y si el espacio es topológico los conceptos de conjuntos abiertos, continuidad, convergencia, etc.

Los espacios que poseen propiedades algebraicas y topológicas son de extrema importancia en el análisis. Los espacios de Banach son un tipo de tales espacios junto con una característica adicional. En este capítulo presentamos algunos conceptos importantes sobre estos espacios y nuestro interés principal será considerar las propiedades de ciertas *funciones* definidos sobre estos. A lo largo del presente capítulo, $\mathbb{F}$ denotará al campo de los números reales o complejos; es decir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Empezamos recordando algunos conceptos básicos que emplearemos en lo sucesivo.

3.1.1. Espacios métricos y normados

Sea X un conjunto no vació. Un **espacio métrico** es una pareja ordenada (X, d), donde $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una función que satisface los siguientes axiomas:

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(y, x) + d(y, z)$ para toda $x, y, z \in X$. (desigualdad triangular).

Dicha función d es llamada una **métrica** sobre el conjunto X y se interpreta $d(x, y)$ como la distancia entre x e y. Dado un espacio métrico (X, d) es posible definir (generalizar) el concepto de *límite de sucesiones*, *límite de funciones*, etc. análogo a los que se definen en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Otra de las características importantes de una métrica es que induce una topología en X, cuya base está dada por las bolas $B_r(v)$, donde

$$B_r(v) = \{u \in X : d(u, v) < r,\ r \in \mathbb{R}^+\}.$$

En otras palabras, *todo espacio métrico es un espacio topológico.*

Otros tipos de espacios con estructura similar a los espacios métricos, son los *espacios normados.* Suponga que V denota un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$. Un **espacio normado** es una pareja ordenada (V, N), donde $N : V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

1. $N(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$.
2. $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ para toda $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ para toda $u, v \in V$. (desigualdad triangular).

Tal función N es llamada una **norma** sobre el espacio vectorial V. Usualmente N es denotado por $||.||$. Observe que todo espacio normado es también un espacio métrico y por tanto topológico. En efecto, para $u, v \in V$ basta definir $d(u, v) = ||u-v||$, evidentemente $d(u, v) \geq 0$; $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$, más aún, $d(u, v) = d(v, u)$ y con todo ello d es una métrica y por tanto podemos considerar la topología inducida por las bolas como antes.

De la desigualdad triangular $||y - x|| = ||x - y|| \leq ||x|| + ||y||$ se sigue inmediatamente que la norma satisface la relación

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||. \tag{3.1}$$

Bajo el contexto de espacio métrico y usando la propiedad (3.1) es sencillo verificar que la norma $||.||$ es una función continua.

3.2. Operadores lineales

Uno de los conceptos más importantes de toda la matemática es sin duda el de **función** el cual establece una relación entre dos conjuntos. Sin embargo, comúnmente, el término función se utiliza cuando el codominio son valores numéricos, reales o complejos. Entonces se habla de función real o función compleja mientras que a las funciones entre conjuntos cualesquiera se les denomina aplicaciones o transformaciones. En este contexto, cuando el dominio y el codominio son espacios vectoriales las funciones reciben un nombre especial.

Definición 3.1. *Sean X y Y espacios normados definidos sobre el mismo campo $\mathbb{F}$. Una función $T : X \to Y$ es llamado un **operador**. Un operador T es **lineal** si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$.*
2. *$T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$ para toda $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Las condiciones 1 y 2 de la definición 3.1 se resumen en pedir que $T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2)$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x_1, x_2 \in X$. De aquí en adelante, omitiremos los paréntesis y simplemente escribiremos Tx en lugar de $T(x)$. Con $\mathfrak{L}(X, Y)$ denotamos al conjunto de todos los operadores lineales de X en Y. Si $X = Y$ usualmente se escribe $\mathfrak{L}(X)$ en lugar de $\mathfrak{L}(X, X)$.

3.2.1. Operadores acotados

En matemáticas, determinar cuando una función es continua constituye un problema fundamental debido a que las funciones continuas satisfacen propiedades interesantes. En espacios normados la continuidad de un operador está caracterizada por la norma del espacio. De esta manera es deseable contar con criterios que permitan determinar la continuidad de un operador.

En espacios normados los operadores que satisfacen que la norma de su imagen es siempre finita proporcionan una clase especial de operadores que caracterizan a los operadores continuos.

Definición 3.2. *Sean X y Y espacios normados y sea $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Decimos que T es **acotado** si este mapea conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de Y.*

Observación. En un espacio métrico X, un conjunto A es **acotado** si y sólo si existe una bola de radio finito que lo contiene, esto es $A \subset B_r(x)$ para algún $r > 0$ y $x \in X$.

El siguiente teorema cuya demostración puede verse [4] pág. 59 caracteriza a los operadores acotados.

Teorema 3.1. *Sean X y Y espacios normados. Un operador $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$ es acotado si y sólo si existe una constante $K > 0$ tal que $||Tx|| \leq K||x||$ para toda $x \in X$.*

La constante K del teorema 3.1 no es única; la mayor cota inferior K que satisface que $||Tx|| \leq K||x||$ para toda $x \in X$ es llamada **norma del operador** T o simplemente **norma** de T y es denotado por $||T||$; es decir,

$$||T|| = \text{ínf}\{K : ||Tx|| \leq K||x||, \text{ para toda } x \in X\}. \tag{3.2}$$

Del teorema 3.1 y la definición de norma de un operador, se puede verificar que las siguientes definiciones son equivalentes a la definición (3.2)

$$||T|| = \sup\{||Tx||||x|| \leq 1\}, \tag{3.3}$$

$$||T|| = \sup\{||Tx|| : ||x|| = 1\}, \tag{3.4}$$

y

$$||T|| = \sup\{\frac{||Tx||}{||x||} : \ x \in X, \ x \neq \mathbf{0}\}. \tag{3.5}$$

De aquí que si T es un operador lineal acotado, entonces

$$||Tx|| \leq ||T||||x|| \tag{3.6}$$

es válido para toda $x \in X$.

Observación. Puesto que la norma de un operador depende de la norma de los espacios, puede ocurrir que un operador no sea acotado con cierta norma, pero si con otra norma distinta (véase el ejemplo 3.1).

Sean X, Y espacios normados y sean T_1, $T_2 \in \mathfrak{L}(X,Y)$. Se define la **suma** de T_1 y T_2, denotada $T_1 + T_2$ por $(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$ para cada $x \in X$, y el **producto escalar** (αT_1), por $(\alpha T_1)x = \alpha T_1 x$ para cada $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$. Con la suma y producto escalar así definidas se sigue que $\mathfrak{L}(X,Y)$ es un espacio vectorial. Si consideramos ahora el subespacio $\mathfrak{B}(X,Y) \subset \mathfrak{L}(X,Y)$ de todos los operadores lineales acotados, es posible equipar a $\mathfrak{B}(X,Y)$ de una norma. En efecto, para $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$, si la norma de T es definida por ejemplo como (3.5), entonces $\mathfrak{B}(X,Y)$ es un espacio normado. Las propiedades 1 y 2 de una norma son claras, para verificar la propiedad 3 observe que

$$\begin{aligned} ||T_1 + T_2|| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{||T_1x + T_2x||}{||x||} \leq \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{||T_1x|| + ||T_2x||}{||x||} &= \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{||T_1x||}{||x||} + \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{||T_2x||}{||x||} \\ &= ||T_1|| + ||T_2||. \end{aligned}$$

Así $\mathfrak{B}(X,Y)$ es un espacio normado. Suponga ahora que X, Y y Z son espacios normados y sea $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$ y $U \in \mathfrak{L}(Y,Z)$; se define la **composición** de T seguida de U denotada por $U \circ T$ como $(U \circ T)x = UTx$ para todo $x \in X$. Si la composición existe, entonces $U \circ T \in \mathfrak{L}(X,Z)$, más aún, si $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ y $U \in \mathfrak{B}(Y,Z)$, entonces

$$||(U \circ T)x|| \leq ||U||||Tx|| \leq ||T||||U||||x||,$$

de lo cual se sigue que $||T \circ U|| \leq ||T||||U||$.

Usualmente se escribe TU en lugar de $T \circ U$. Si $T \in \mathfrak{L}(X)$, por conveniencia se denota $T \circ T$ por T^2, y en general $T^n = T^{n-1} \circ T$.

Ejemplo 3.1. *Sea $X = C[0,1]$, el espacio de todas las funciones continuas definidas en $[0,1]$. Si definimos $||x|| = \text{máx}_{0\leq t\leq 1} |x(t)|$, es claro que $||.||$ satisface las propiedades de norma y por lo tanto $(X, ||.||)$ es un espacio normado. Sea $Y = C^1[0,1]$ el subespacio de X (equipado con la misma norma) formado por las funciones que tienen primera derivada continua. Definimos $T : Y \to X$ dado por $Tx(t) = x'(t)$. Consideremos ahora el subconjunto de Y formado por las funciones $x_n(t) = \text{sen}(nt)$ con $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $||x_n(t)|| \leq 1$, este conjunto es acotado. Sin embargo, $Tx_n(t) = n\cos(nt)$, y en consecuencia $||Tx_n(t)|| = n$. Esto es, el conjunto $\{T(x_n(t))\}$ es no acotado y por tanto T es no acotado. Por otro lado, si ahora definimos la norma en Y por*

$$||x(t)|| = \underset{0\leq t\leq 1}{\text{máx}} |x(t)| + \underset{0\leq t\leq 1}{\text{máx}} |x'(t)|,$$

observamos que

$$||Tx(t)|| = \underset{0\leq t\leq 1}{\text{máx}} |x^{'}(t)| \leq \underset{0\leq t\leq 1}{\text{máx}} |x(t)| + \underset{0\leq t\leq 1}{\text{máx}} |x^{'}(t)| = ||x(t)||.$$

Lo cual prueba que T es acotado, más aún $||T|| \leq 1$.

3.2.2. Operadores continuos

Sean X y Y dos espacios normados sobre el mismo campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$. T es **continuo en un punto** $x \in X$, si para cada $\epsilon > 0$, existe un número $\delta(\epsilon) > 0$, tal que $||Tx - T\overline{x}|| < \epsilon$ siempre que $||x - \overline{x}|| < \delta$. Si un operador T es tal que T es continuo en cada punto $x \in X$ se dice entonces que T es **continuo**. Si un operador es continuo en un punto, entonces es continuo y también acotado y en vista del teorema 3.1 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *T es continuo.*

2. *T es continuo en algún punto $x \in X$.*

3. *$\sup\limits_{||x||\leq 1} ||Tx|| < \infty$.*

4. *Para algún escalar $K > 0$, $||Tx|| \leq K||x||$ para toda $x \in X$.*

Demostración. Véase [4] pág. 59. □

3.2.3. Operadores invertibles

Sea X un espacio normado y sea $I : X \to X$ la función identidad de X; es decir $Ix = x$ para todo $x \in X$. Evidentemente I es un operador lineal acotado($||I|| = 1$) y por tanto $I \in \mathfrak{B}(X)$. Usualmente I se denota por I_X.

Sean X, Y espacios normados. Un operador $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$ se dice que es **invertible** si existe un operador $U : Y \to X$ tal que $TU = I_Y$ y $UT = I_X$. Es sencillo verificar que si tal U (si existe) es única, por lo que sin ambigüedad dicha U usualmente se denota por T^{-1} y es llamada la **inversa** de T.

De la definición de T^{-1}, se sigue inmediatamente que T^{-1} es lineal.

3.3. Espacios de Banach

Sea X un espacio normado y sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión de vectores. La convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ a un vector $x \in X$ implica que dado $\epsilon > 0$ existe un número natural $M(\epsilon)$ tal que $||x_n - x|| < \epsilon$ siempre que $n \geq M$. Una clase especial de sucesiones la constituyen las llamadas *sucesiones de Cauchy*.

Definición 3.3. *Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X se dice que es una* ***sucesión de Cauchy*** *si $||x_n - x_m|| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$; es decir dado $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que $||x_n - x_m|| < \epsilon$ para toda $n, m \geq N$.*

En un espacio normado, cada sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. En general, sin embargo, una sucesión de Cauchy puede no converger a un elemento del espacio, esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Sea X el espacio formado por todos los vectores de la forma $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, 0, 0, 0.., 0...\}$ donde ξ_i es un número real y sólo un número finito de componentes es distinto de cero. Si definimos $||x|| = \max_i |\xi_i|$, es claro que $||.||$ es una norma. Consideremos ahora la sucesión $\{x_n\}$ donde*

$$x_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, ..., 0...\}.$$

Para la norma definida se tiene que $||x_n|| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y claramente $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy debido a que

$$||x_n - x_m|| = \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\} \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Sin embargo, no existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.

Los espacios normados en los cuales cada sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio son de extrema importancia en el análisis; en tales espacios es posible identificar sucesiones convergentes sin explícitamente identificar sus límites. Un espacio en el cual cada sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio se dice que es **completo**. Es claro que toda toda sucesión de Cauchy es acotada, pues dada una tal sucesión $\{x_n\}$, podemos elegir un $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x_N|| < 1$ para toda $n > N$. Así,

$$||x_n|| = ||x_n - x_N + x_N|| =\leq ||x_N|| + ||x_n - x_N|| < 1 + ||x_N||, \text{para toda } n > N.$$

Definición 3.4. *Un espacio normado completo X es llamado un* ***espacio de Banach****.*

Los siguientes ejemplos son clásicos y aparecen en cualquier libro básico de introducción al análisis funcional y teoría de operadores, por esta razón omitimos la prueba. El lector interesado puede ver [4], [9] o [14] para las respectivas demostraciones.

Ejemplo 3.3. *$\mathbb{R}$ con la norma usual (valor absoluto) es completo.*

Ejemplo 3.4. *$\mathbb{C}$ con la norma usual (módulo) es completo.*

Ejemplo 3.5. *$\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con la norma usual son completos.*

Ejemplo 3.6. *Sea $X = C[a, b]$, el espacio de funciones continuas definidas sobre $[a, b]$ con la norma dada por $||x|| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$. Entonces $(X, ||.||)$ es completo.*

Un espacio completo de grán interés para esta tesis lo proporciona el siguiente teorema, el cual dada su importancia incluimos su demostración.

Teorema 3.3. *Sean X un espacio normado y Y un espacio de Banach; entonces el espacio normado $\mathfrak{B}(X,Y)$ es completo.*

Demostración. Sea $\{T_n\} \subset \mathfrak{B}(X,Y)$ una sucesión de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$ existe un número natural $N(\epsilon)$ tal que $||T_n - T_m|| < \epsilon$ siempre que $n, m > N$. Así

$$||T_n x - T_m x||_Y = ||(T_n - T_m)x||_Y \leq ||T_n - T_m||||x||_X < \epsilon||x||_X$$

para todo $x \in X$ siempre que $n, m > N$. Pero ello implica que $\{T_n x\} \subset Y$ es una sucesión de Cauchy para cada $x \in X$. Ahora bien, puesto que Y es completo se sigue que existe $y \in Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n x = y$. Si definimos ahora $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ podemos escribir $Tx = y$, restaría probar que T es un operador lineal acotado, es decir $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$. Hacia este fin, sean $x_1, x_2 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} (T_n(\alpha x_1 + x_2)) &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x_1 + T_n x_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1) + \lim_{n\to\infty} T_n x_2 \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x_1 + \lim_{n\to\infty} T_n x_2 \\ &= \alpha T x_1 + T x_2 \end{aligned}$$

y por tanto T es lineal. Para ver que T es acotado observese que

$$||Tx - T_n x||_Y = \lim_{m\to\infty} ||T_m x - T_n x||_Y = \lim_{m\to\infty} ||(T_m - T_n)x||_Y < \epsilon||x||_X$$

siempre que $n > N$ y donde hemos empleado la continuidad de la norma. Por otro lado, de la desigualdad

$$||Tx||_Y = ||Tx - T_N x + T_N x||_Y \leq ||Tx - T_N x||_Y + ||T_N x||_Y \leq \epsilon||x||_X + ||T_N||||x||_X = (\epsilon + ||T_N||)||x||_X.$$

se sigue que $||T||_Y \leq (\epsilon + ||T_N||)$. Finalmente, dado que $||Tx - T_n x||_Y = ||(T - T_n)x||_Y < \epsilon||x||_X$ se tiene que $||T - T_n||_Y < \epsilon$ y, la prueba esta completa. □

3.4. Teoría espectral

Sea X un espacio de Banach de dimensión finita y sea $T \in \mathfrak{B}(X)$. Es bien conocido del álgebra lineal que la ecuación $(\lambda I - T)x = y$ con $x, y \in X$ tiene solución única si y sólo si $|\lambda I - A| \neq 0$, donde A es la matriz asociada a T y las barras indican el determinante. En este caso la solución está dada por $x = (\lambda I - T)^{-1} y$. Se dice entonces que el operador $\lambda I - T$ es invertible. Así, una condición suficiente para que $(\lambda I - T)^{-1}$ exista es que $|\lambda I - A| \neq 0$.

Si X tiene dimensión infinita, entonces el conjunto de todos los λ tal que el operador $(\lambda I - T)^{-1}$ existe, es en general difícil de determinar. Con el teorema 3.3 se puede establecer un resultado muy importante que caracteriza al operador $(\lambda I - T)^{-1}$ y proporciona una condición suficiente para garantizar su existencia.

Teorema 3.4. *Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathfrak{B}(X)$, entonces*

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}, \qquad T^0 = I$$

siempre que $||T||/|\lambda| < 1$.

Demostración. Sea $\{B_n\} \subset \mathfrak{B}(X)$ definida por $B_n = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{\lambda^k}$ y donde $T^0 = I$. Puesto que

$$||T^k|| \leq ||T^{k-1}||||T|| \leq ||T^{k-2}||||T||^2 \leq ... \leq ||T||^k < \infty$$

para toda k, se sigue que B_n es acotado. Tomando $n > m$ se obtiene

$$||B_n - B_m|| = \left|\left|\frac{1}{\lambda}\sum_{k=m+1}^{n} \frac{T^k}{\lambda^k}\right|\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{||T||}{|\lambda|}\right)^k = \frac{||T||^{m+1}}{|\lambda|^{m+2}}\sum_{k=0}^{n-(m+1)}\left(\frac{||T||}{|\lambda|}\right)^k$$

o bien

$$||B_n - B_m|| \leq \left(\frac{||T||}{|\lambda|}\right)^{m+1}\left(\frac{1-(||T||/|\lambda|)^{n-m}}{|\lambda|[1-||T||/|\lambda|]}\right).$$

Ahora bien, si $\frac{||T||}{|\lambda|} < 1$ podemos deducir que para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural $N(\epsilon)$ tal que $||B_n - B_m|| < \epsilon$ siempre que $n > m > N$. Por lo tanto $\{B_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{B}(X)$. Pero en vista del teorema 3.3 tenemos que $\mathfrak{B}(X)$ es un espacio de Banach, por lo tanto la sucesión $\{B_n\}$ converge a un límite de $\mathfrak{B}(X)$. Es decir, existe $B \in \mathfrak{B}(X)$ tal que

$$B = \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k}.$$

Por otro lado,

$$||(\lambda I - T)B_n - I|| = \left|\left|\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{T^k}{\lambda^k} - \frac{T^{k+1}}{\lambda^{k+1}}\right) - I\right|\right| = \left|\left|\frac{T^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\right|\right| \leq \left(\frac{||T||}{|\lambda|}\right)^{n+1}$$

y al tomar el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene $(\lambda I - T)B = I$, o bien

$$(\lambda I - T)^{-1} = B = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k} = \frac{I}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2} + \frac{T^2}{\lambda^3} + ... + ...$$

que era lo que se quería demostrar. □

Corolario 3.4.1.

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + ... + ...$$

siempre que $||T|| < 1$.

Observe que

$$||(\lambda I - T)^{-1}|| = \left|\left|\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k}\right|\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{||T||}{|\lambda|}\right)^k = \frac{1}{|\lambda| - ||T||}, \tag{3.7}$$

de lo cual se sigue que $||(\lambda I - T)^{-1}|| \to 0$ si $\lambda \to \infty$, más aún, en vista del teorema 3.2, se sigue que $(\lambda I - T)^{-1}$ es continuo. Estas propiedades serán explotadas más adelante.

Ejemplo 3.7. *Sea* $X = C[a,b]$ *como en el ejemplo 3.6, y* $T : X \to X$ *dado por* $Tu(x) = \int_0^x u(t)dt$. *Puesto que* Tx *es siempre una función continua para toda* $x \in X$, *entonces* $||Tx||$ *es siempre finita y, en consecuencia* $T \in \mathfrak{B}(X)$. *Por otro lado,*

$$T^n u(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}u(t)dt, \quad T^0 u(x) = u(x)$$

en vista de la propiedad (2.6). Así para λ *tal que* $||T||/|\lambda| < 1$ *se sigue que*

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1}u(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n u(x)}{\lambda^n} &= \frac{u(x)}{\lambda} + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!\lambda^{n+1}}u(t)dt \\ &= \frac{u(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \exp((x-t)/\lambda)u(t)dt.\end{aligned}$$

En la literatura $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ es llamado **el operador resolvente** (en λ) de T y la serie es llamada **serie de Neumann**.

Estableceremos otras propiedades de este operador en la siguiente sección.

3.4.1. Propiedades del operador resolvente

Sea $T \in \mathfrak{B}(X)$ donde X es un espacio de Banach y considere el operador $T_\lambda = \lambda I - T$. Se desea determinar al conjunto de los $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ exista. La teoría que estudia este problema es llamada **teoría espectral** de operadores. En resumen, la tarea principal de la teoría espectral es caracterizar a los conjuntos para los cuales el resolvente R_λ exista (o no exista) y estudiar las propiedades de dicho operador.

En esta sección estableceremos algunos teoremas importantes que caracterizan a estos conjuntos especiales. Nuestra meta será utilizar estos resultados para obtener una representación del resolvente distinta a la que se proporciona en el teorema 3.4, ya que la emplearemos más adelante.

De aquí en lo sucesivo, se asume que X es de dimensión infinita, debido a que algunos resultados pueden no ser verdaderos si el espacio es de dimensión finita.

Definición 3.5. *Sea $T \in \mathfrak{B}(X)$. El **espectro**[1] de T, denotado $\sigma(T)$, es el conjunto de todos λ tal que R_λ no existe; es decir*

$$\sigma(T) = \{\lambda : (\lambda I - T)^{-1} \text{ no existe}\}.$$

*El complemento del espectro es llamado **conjunto resolvente** de T y es denotado por $\rho(T)$; esto es*

$$\rho(T) = \{\lambda : (\lambda I - T)^{-1} \text{ existe}\}.$$

Ejemplo 3.8. *Sea X como en el ejemplo 3.6, y sea $T \in \mathfrak{B}(X)$ definida por $Tx(t) = y(t)x(t)$ con $y \in X$. Para $\lambda \neq y(t)$, $t \in [a, b]$ es claro que $\lambda \in \rho(T)$ y que $(\lambda I - T)^{-1}x(t) = \frac{1}{\lambda - y(t)}x(t)$. Por otro lado, puesto que $\sigma(T)$ es el complemento de $\rho(T)$ se sigue que $\sigma(T) = \{\lambda : \lambda = y(t),\ a \leq t \leq b\}$.*

Nuestro primer resultado establece cuando el operador resolvente existe.

Teorema 3.5. *Si $T \in \mathfrak{B}(X)$, entonces el siguiente límite $r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}$ llamado **radio espectral** de T existe y satisface que $r_\sigma(T) \leq ||T||$. Más aún, si $|\lambda| > r_\sigma(T)$ entonces el resolvente existe y $R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$.*

Demostración. Sea $r = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{||T^n||}$, debemos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||} \leq r$. Para cualquier $\epsilon > 0$ elijamos m tal que $\sqrt[m]{||T^m||} \leq r + \epsilon$. Sea $n = pm + q$ donde $0 \leq q \leq m-1$ (algoritmo de la división). Observe que

$$\sqrt[n]{||T^n||} = \sqrt[n]{||T^{pm+q}||} \leq \sqrt[p/n]{||T^m||}.\sqrt[q/n]{||T||} \leq (r+\epsilon)^{mp/n} \sqrt[q/n]{||T||}.$$

Por otro lado, puesto que $pm/n \to 1$ y $q/n \to 0$ cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} (r+\epsilon)^{mp/n} \sqrt[q/n]{||T||} = r + \epsilon,$$

por lo que existe un número natural $N(\epsilon)$ tal que $(r+\epsilon)^{mp/n} \sqrt[q/n]{||T||} < r+2\epsilon$, para todo $n \geq N$. En consecuencia, $r \leq \sqrt[n]{||T^n||} < r + 2\epsilon$ para toda $n \geq N$, y puesto que ϵ es arbitrario se sigue que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||} = r$. Ahora bien, puesto que $||T^n|| \leq ||T||^n$ para toda n se sigue que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||} \leq ||T||$, lo cual implica que $r_\sigma(T) \leq ||T||$. Finalmente, la serie de Neumann converge si $||T||/|\lambda| < 1$; pero en vista de la última desigualdad se sigue que $r_\sigma(T)/|\lambda| \leq ||T||/|\lambda| < 1$ lo cual da $|\lambda| > r_\sigma(T)$. $\square$

[1] En un contexto más general, algunos autores proporcionan esta definición de manera diferente, ello se debe a que los operadores se pueden clasificar de diferente manera, dependiendo si el operador es abierto(manda conjuntos abiertos en abiertos), cerrado, compacto, de rango denso, etc.. Uno de tales es [14]. Sin embargo, para propósitos de esta tesis, esta definición será suficiente.

Observe que del teorema anterior se deduce inmediatamente que si $T \in \mathfrak{B}(X)$, entonces $\rho(T) \neq \emptyset$.

Definición 3.6. *Sea X un espacio de Banach y sea $S : D \subset \mathbb{F} \to \mathfrak{B}(X)$ una aplicación, donde D es un conjunto abierto. S es **analítica** en $\lambda_0 \in D$ si*

$$S(\lambda) = T_0 + (\lambda - \lambda_0)T_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 T_2 + ... + (\lambda - \lambda_0)^n T_n + ...$$

donde la serie converge (en la norma del operador) en alguna vecindad de λ_0 y $\{T_n\} \subset \mathfrak{B}(X)$.

Observe que la definición 3.6 es una extensión natural del concepto de función analítica de una variable compleja en un punto del plano. Es así como varios resultados clásicos de la teoría de funciones complejas se extienden a espacios de Banach arbitrarios.

El siguiente teorema establece que el operador resolvente induce una aplicación analítica en cierto dominio del plano complejo.

Teorema 3.6. *Si $T \in \mathfrak{B}(X)$ y $\lambda_0 \in \rho(X)$, entonces el disco abierto $D(\lambda_0, \frac{1}{||R_{\lambda_0}||})$ está contenido en $\rho(T)$ y para cada $\lambda \in D$, tenemos que*

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^{k+1}.$$

En otras palabras, $\rho(T)$ es un conjunto abierto y la aplicación $\lambda \mapsto R_\lambda$ es analítica en $\rho(T)$.

Demostración. En efecto, sea $\lambda_0 \in \rho(T)$ y consideremos

$$S(\lambda) = R_{\lambda_0}[I + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^k]. \tag{3.8}$$

Esta serie converge siempre que $|\lambda_0 - \lambda| ||R_{\lambda_0}|| < 1$ y dentro de este disco la serie define a una función analítica de λ (por definición). Multiplicando ambos lados de (3.8) por $\lambda I - T = (\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - T)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(\lambda I - T)S(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}[I + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^k] + (\lambda_0 I - T)R_{\lambda_0}[I + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^k] \\
&= (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}[I + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^k] + I[I + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^k] \\
&= -(\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0} - \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^{k+1} R_{\lambda_0}^{k+1} + I + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^k \\
&= \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^{k+1} R_{\lambda_0}^{k+1} + I + \sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^k \\
&= I.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = R_\lambda$. Así, hemos mostrado que $D(\lambda_0, \frac{1}{||R_{\lambda_0}||})$ pertenece a $\rho(T)$ y $S(\lambda)$ es analítica en dicha vecindad. □

Una consecuencia inmediata de este resultado se establece a continuación.

Corolario 3.6.1. *La aplicación $\lambda \mapsto R_\lambda$ es continua.*

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} ||R_\lambda - R_{\lambda_0}|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda-\lambda_0|^k ||R_{\lambda_0}||^{k+1} &= |\lambda-\lambda_0|||R_{\lambda_0}||^2 \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda-\lambda_0|^k ||R_{\lambda_0}||^k \\ &= \frac{|\lambda-\lambda_0|||R_{\lambda_0}||^2}{1-|\lambda-\lambda_0|||R_{\lambda_0}||} \to 0 \text{ cuando } \lambda \to \lambda_0. \end{aligned}$$

Lo cual muestra que $\lim_{\lambda\to\lambda_0} R_\lambda = R_{\lambda_0}$ y la continuidad de tal función. □

Finalizamos esta subsección con una importante propiedad del operador resolvente que emplearemos en la siguiente sección.

Lema 3.1. *Sea $T \in \mathfrak{B}(X)$ y $\lambda, \mu \in \rho(T)$, entonces el resolvente cumple que $R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu-\lambda}$. Esta propiedad es llamada* ***ecuación resolvente****.*

Demostración. En efecto, dado que

$$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)(\mu I - T)^{-1} = R_\lambda((\mu-\lambda)I + (\lambda I - T))R_\mu = (\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu + R_\mu$$

se sigue que

$$R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda}. \tag{3.9}$$

□

3.4.2. Funciones de operadores

La teoría de funciones analíticas definidas sobre el plano complejo junto con el teorema de Cauchy, provee una manera efectiva de formar nuevos operadores a partir de algunos dados en un contexto más general.

En lo que resta de este capítulo emplearemos (sin demostración) las generalizaciones de ciertos resultados de la teoría de funciones analíticas de una variable compleja para el caso de la aplicación $\lambda \to R_\lambda$ el cual es analítica en cierto dominio del plano complejo.

La importancia de trabajar en espacios normados es que permiten generalizar los conceptos de manera natural.

Definición 3.7. *Sea X un espacio de Banach y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to X$ una aplicación. Se dice que f es* ***diferenciable*** *en un punto $\lambda_0 \in \Omega$ si existe un $x_0 \in X$ tal que*

$$\lim_{\lambda\to 0} \left|\left| \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - x_0 \right|\right| = 0.$$

El vector x_0 es llamado la ***derivada*** *de f en λ_0 y es denotado por $f'(\lambda_0)$. Una aplicación f se dice que es* ***analítica en un punto*** *$\lambda_0 \in \Omega$ si es diferenciable en un disco abierto centrado en λ_0. Si f es diferenciable en cada punto de Ω, entonces f es llamada una* ***aplicación analítica****.*

Siguiendo con la terminología estándar, decimos que la aplicación $f : S \to X$ donde $S \subset \mathbb{C}$, tiene una **expansión en serie de potencias** en algún punto interior $\lambda_0 \in S$ si existen vectores $x_1, x_2, ...$ en X y un número positivo r que satisfacen $D_r(\lambda_0) \subset S$ y $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k x_k$ para cada $\lambda \in D_r(\lambda_0)$, donde la convergencia de la serie es en la norma de X.

La definición de la (Riemann) integral $\int_C f(\lambda) d\lambda$ donde $f : C \to X$ es definido como en el caso complejo. No obstante, algunas extensiones de resultados de funciones analíticas complejas sobre todo de aquellos referentes a convergencia uniforme no son simples de obtener y su justificación requiere de resultados más profundos de matemáticas avanzadas. Por ejemplo, los siguientes teoremas, aunque son extensiones naturales del caso complejo, sus demostraciones no son análogos y para la prueba se requieren algunos resultados referentes a X^*, el dual de X; es decir, el espacio formado por los operadores lineales (funcionales lineales) de X en $\mathbb{R}$. Las respectivas demostraciones pueden consultarse en [14].

Teorema 3.7. *Una aplicación $f : S \to X$ tiene a los más una serie de potencias en cualquier punto dado.*

Teorema 3.8. *Una aplicación $f : S \to X$ es analítica en S si y sólo si f tiene una expansión en serie en cada punto de S.*

Teorema 3.9 (Integral de Cauchy)**.** *Sea X un espacio de Banach, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y supongamos que $\partial\Omega$ es su frontera. Si U es un subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que $\overline{\Omega} \subset U$ y $f : U \to X$ una aplicación analítica, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} f(\lambda) d\lambda = 0.$$

Teorema 3.10. *Sea $f : \Omega \to X$ una aplicación analítica. Entonces:*

1. *f tiene derivadas de todos los ordenes.*

2. *Si $V \subset \Omega$ y $\overline{V} \subset \Omega$, entonces las derivadas de f están dadas por la **fórmula de Cauchy***

$$f^n(\lambda_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. *Para cualquier $\lambda_0 \in V$ la expansión en serie de la función f está dada por*

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k a_k, \quad donde \;\; a_n = \frac{f^n(\lambda_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda.$$

La serie converge para $\lambda \in D_r(\lambda_0)$, donde $r = d(\lambda_0, \Omega^c)$, la distancia de λ_0 al complemento de $\Omega^c = \mathbb{C} - \Omega$.

De esta manera, sea $n \in \mathbb{N}$ y C una circunferencia centrada en el origen. El teorema de Cauchy en el dominio complejo afirma que $\int_C z^n d\lambda = 0$ y $\int_C z^{-1} d\lambda = 2\pi i$. Sea X un espacio de Banach de funciones analíticas complejas, $T \in \mathfrak{B}(X)$, y C como antes tal que el radio de C es mayor que $||T||$. Bajo estas condiciones, definamos un operador U como sigue $U = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^n (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$, donde para cada $x \in X$ se tiene que

$$Ux = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^n (\lambda I - T)^{-1} x d\lambda.$$

Así

$$\begin{aligned} Ux = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^n (\lambda I - T)^{-1} x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k x}{\lambda^{k+1}} d\lambda &= \sum_{k=0}^{\infty} T^k x \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\lambda^n}{\lambda^{k+1}} d\lambda \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} T^k x \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{n-k-1} d\lambda \right) \\ &= T^n x \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-1} d\lambda \right) \\ &= T^n x, \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$T^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^n (\lambda I - T)^{-1} d\lambda, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

En la subsección anterior mostramos que $\rho(T) \neq \emptyset$ y que $\rho(T)$ es un conjunto abierto si $T \in \mathfrak{B}(X)$, más aún, la aplicación $\lambda \to R_\lambda$ es analítica en $\rho(T)$, esto último motiva a definir

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda) R_\lambda d\lambda, \tag{3.10}$$

donde $f(\lambda)$ es una función analítica en algún dominio que contiene a $\sigma(T)$ y Γ es su frontera.

La representación (3.10) es llamada **integral de Dunford**, que en analogía con la fórmula integral de Cauchy en el dominio complejo podemos identificar $(\lambda - z)^{-1}$ con $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$. Para más detalles sobre la anterior representación y una demostración de que está bien definida para cuando X es de dimensión finita véase [4].

Formalmente, tenemos las siguientes definiciones.

Definición 3.8. *Sea $T \in \mathfrak{B}(X)$; con $\mathfrak{F}(T)$ denotamos a la familia de todas las funciones f las cuales son analíticas en alguna vecindad de $\sigma(T)$. La vecindad no necesariamente debe ser conexa pues depende de f.*

Definición 3.9. *Sea $T \in \mathfrak{B}(X)$, $f \in \mathfrak{F}(T)$ y sea U un conjunto abierto cuya frontera Γ es una curva cerrada simple. Supongamos que $\sigma(T) \subset U$ y que $U \cup \Gamma$ está contenido en el dominio donde f es analítica. Entonces el operador $f(T)$ está definido por*

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda) R_\lambda d\lambda, \tag{3.11}$$

donde para cada $x \in X$, se tiene que

$$f(T)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda) R_\lambda x d\lambda.$$

Con la ayuda del lema 3.1, estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 3.11. *El mapeo $f \mapsto f(T)$, de $\mathfrak{F}(T)$ a $\mathfrak{B}(X)$ es un homomorfismo, es decir, si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $f, g \in \mathfrak{F}(T)$, entonces*

1. $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$.

2. *(fg)(T)=f(T)g(T).*

Demostración. Para 1, sea $T \in \mathfrak{B}(X)$ y $f, g \in \mathfrak{F}(T)$, seleccionemos una vecindad U de $\sigma(T)$ tal que f y g sean analíticas en U y sea Γ_1 su frontera. Entonces, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha f(T) + \beta g(T) &= \alpha\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\lambda) R_\lambda d\lambda\right) + \beta\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(\lambda) R_\lambda d\lambda\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \alpha f(\lambda) R_\lambda d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \beta g(\lambda) R_\lambda d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)) R_\lambda d\lambda\\
&= (\alpha f + \beta g)(T).
\end{aligned}$$

Para 2, sean $T \in \mathfrak{B}(X)$, f y g dos funciones analíticas en U_1 y U_2 con fronteras Γ_1 y Γ_2 respectivamente, donde $U_1, U_2 \subset \sigma(T)$. Supongamos también que $U_1 \cup \Gamma_1 \subset U_2$ y que $U_2 \cup \Gamma_2$ está contenida en el dominio donde fg es analítica. Bajo estas condiciones y en vista de la igualdad (3.9) se tiene que

$$\begin{aligned}
f(T)g(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)R_\lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} g(\mu)R_\mu d\mu\right)d\lambda \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)R_\lambda R_\mu d\lambda d\mu \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)\frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda-\mu}d\lambda d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)R_\lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu\right)d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} g(\mu)R_\mu\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\right)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)g(\lambda)R_\lambda d\lambda \\
&= (fg)(T),
\end{aligned}$$

en vista de las identidades

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu = g(\lambda),\ \ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda = 0.$$

□

Observe que si $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k$ en una vecindad de la forma $C = \{\lambda : |\lambda| \leq r_\sigma(T) + \epsilon\}$ para algún ϵ suficientemente pequeño, entonces (véase teorema 3.5),

$$\begin{aligned}
f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)R_\lambda d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k R_\lambda d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int_C \lambda^k R_\lambda d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int_C \lambda^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k T^k * \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k T^k.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si f es la serie geométrica $\frac{1}{1-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k$, entonces $f(T) = (I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}T^k$, mismo resultado que se obtienen de la serie de Neumman cuando $\lambda = 1$ (véase corolario 3.4.1). También, si $f(\lambda) = \exp\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$ se obtiene $f(T) = \exp T = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{k!}$[2]. Finalmente, observe que si $f(\lambda) \neq 0$ para toda $\lambda \in \sigma(T)$, entonces al definir $g(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)}$ sobre cualquier conjunto abierto que contenga a $\sigma(T)$, podemos determinar una inversa para el operador $f(T)$, a través de la relación

$$f(T)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\lambda)R_\lambda d\lambda.$$

Ilustramos esta situación, con una aplicación importante en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo 3.9. *Consideremos el espacio de Banach $X = C[0,1]$ como en el ejemplo 3.6. Si definimos el operador $T : X \to X$, dado por $Tu(x) = \int_0^x u(t)dt$, en el ejemplo 3.7, mostramos que*

$$R_\lambda u(x) = \frac{u(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \exp((x-t)/\lambda)u(t)dt. \tag{3.12}$$

[2]En la teoría de ecuaciones diferenciales, cuando T se identifica con una matriz, dicha representación es llamada matriz exponencial, la cual es empleada para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Consideremos ahora el problema de valor inicial

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n I)u(x) = h(x), \qquad u(0) = u'(0) = ... = u^{n-1}(0) = 0$$

donde $h(x) \in X$. *Al aplicar el operador* T^n *en ambos lados de esta igualdad, se obtiene la ecuación*

$$(I + a_1 T + a_2 T^2 + ... + a_n T^n)u(x) = T^n h(x).$$

Si ahora definimos $g(\lambda) = 1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n$, *entonces el problema se reduce a encontrar una solución de la ecuación* $g(T)u(x) = T^n h(x)$, *luego, si la solución existe, estará dada por* $u(x) = f(T)h(x)$, *donde* $f(\lambda) = \frac{\lambda^n}{g(\lambda)}$. *En consecuencia,*

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R_\lambda h(x)d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\left(\frac{h(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \exp((x-t)/\lambda)h(t)dt\right) \\ &= \frac{h(x)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda^2}\int_0^x \exp((x-t)/\lambda)h(t)dtd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda^2}\int_0^x \exp((x-t)/\lambda)h(t)dtd\lambda \\ &= \int_0^x h(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda^2}\exp((x-t)/\lambda)\right)dt \\ &= \int_0^x h(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda^n}{g(\lambda)\lambda^2}\exp((x-t)/\lambda)\right)dt \\ &= \int_0^x h(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda^{n-2}\exp((x-t)/\lambda)}{1 + a_1\lambda + ... + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n}d\lambda\right)dt \\ &= \int_0^x h(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\exp((x-t)\xi)}{\xi^n + a_1\xi^{n-1} + ... + a_{n-1}\xi + a_n}d\xi\right)dt, \end{aligned}$$

donde $\xi = 1/\lambda$.

Como caso particular, consideremos el problema de valor inicial

$$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad u(0) = u'(0) = 0.$$

Primero la resolveremos por un método tradicional (coeficientes indeterminados). Para la ecuación homogénea, si hacemos $u(x) = \exp(mx)$[3], entonces la solución de dicha ecuación está dado por

$$u_h(x) = c_1\exp(-x) + c_2 x\exp(-x).$$

Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea proponemos $u_p = a\operatorname{sen}(x) + b\cos(x)$, que al sustituir encontramos que $a = 0$ y $b = -\frac{1}{2}$, por lo cual, una solución particular está dada por $u_p = -\frac{1}{2}\cos(x)$. Luego, la solución general del problema de valor inicial está dada por

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c_1\exp(-x) + c_2 x\exp(-x) - \frac{1}{2}\cos(x).$$

Al aplicar las condiciones iniciales se obtiene la solución particular

$$u(x) = \frac{1}{2}\exp(-x) + \frac{1}{2}x\exp(-x) - \frac{1}{2}\cos(x).$$

Por otro lado, según la fórmula obtenida en el ejemplo anterior, la solución para dicho problema está dado dado por $u(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\exp((x-t)\xi)}{\xi^2+2\xi+1}d\xi\right)dt$. Ahora bien, puesto que

$$\frac{\exp((x-t)\xi)}{\xi^2 + 2\xi + 1} = \frac{\exp((x-t)\xi)}{(\xi+1)^2} = \frac{\exp((x-t)(\xi+1))}{\exp(x-t)(\xi+1)^2} = \frac{1}{\exp(x-t)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-t)^k(\xi+1)^{k-2}}{k!}$$

[3] m es un parámetro por determinar.

se sigue que el residuo en $\xi = -1$ está dado por $\frac{x-t}{\exp(x-t)}$. Así,

$$u(x) = \int_0^x \frac{(x-t)\,\mathrm{sen}(t)}{\exp(x-t)} dt = \frac{1}{2}\exp(-x) + \frac{1}{2} x \exp(-x) - \frac{1}{2}\cos(x).$$

3.4.3. Potencias fraccionarias

Finalizamos este capítulo proporcionando la representación para el resolvente que prometimos al inicio de esta sección. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\mathrm{Re}\ \alpha > 0$ considere la función $f(\lambda) = \lambda^\alpha$. Si elegimos la rama principal $-\pi < \arg z < \pi$, dicha función es analítica y univaluada en este dominio. Así, para un operador T, cuyo espectro $\sigma(T)$ contenga al eje real negativo, es imposible construir un contorno Γ cerrado que contenga al espectro para evaluar la integral

$$\int_\Gamma \lambda^\alpha R_\lambda d\lambda$$

que vendría representando a la potencia fraccionaria del operador T. No obstante, para potencias fraccionarias de un operador, existe una representación alternativa, que evita el eje real negativo y la cual está motivada de la siguiente observación.

Un contorno típico de integración para las potencias fraccionarias es como el que se ilustra en la Figura 3.1

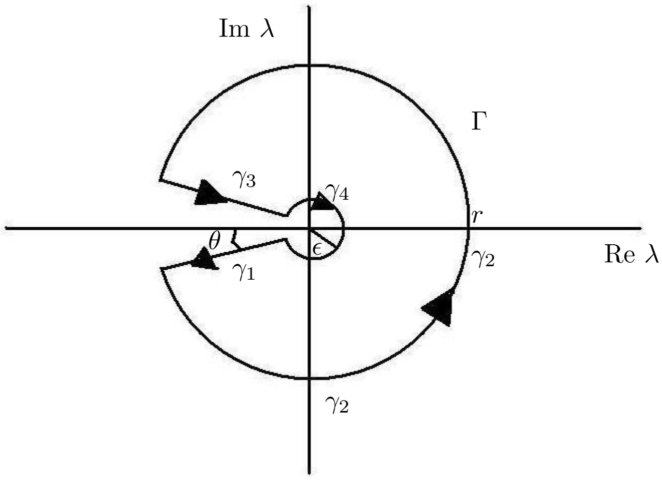

Figura 3.1

Si analizamos la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{\alpha-1} f(\lambda) d\lambda$, donde $f(\lambda)$ es una función analítica (y por tanto continua) de λ, entonces, haciendo $\lambda = te^{i\phi}$, donde $t = |\lambda|$ y $\phi = \arg\lambda$; se observa que sobre γ_3, $\phi = \pi - \theta$ y sobre γ_1, $\phi = -\pi + \theta$, y dado que

$$t^{\alpha-1} e^{i(\pi-\theta)(\alpha-1)} f(te^{i(\pi-\theta)}) e^{i(\pi-\theta)} \to -(-t)^{\alpha-1} e^{i\pi(\alpha-1)} f(-t) = e^{i\pi\alpha}(-t)^{\alpha-1} f(-t)$$

$$t^{\alpha-1} e^{i(-\pi+\theta)(\alpha-1)} f(te^{i(-\pi+\theta)}) e^{i(-\pi+\theta)} \to -(-t)^{\alpha-1} e^{-i\pi(\alpha-1)} f(-t) = e^{-i\pi\alpha}(-t)^{\alpha-1} f(-t)$$

respectivamente, cuando $\theta \to 0$, se sigue que

$$\int_{\gamma_3} \lambda^{\alpha-1} f(\lambda) d\lambda \to e^{i\pi\alpha}\int_{-r}^{-\epsilon} (-t)^{\alpha-1} f(-t) dt \quad \text{y} \quad \int_{\gamma_1} \lambda^{\alpha-1} f(\lambda) d\lambda \to e^{-i\pi\alpha}\int_{-\epsilon}^{-r} (-t)^{\alpha-1} f(-t) dt$$

respectivamente. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} \lambda^{\alpha-1} f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \lambda^{\alpha-1} f(\lambda) d\lambda &\to \frac{1}{\pi}\frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i}\int_{-r}^{-\epsilon} (-t)^{\alpha-1} f(-t) dt \\ &= \frac{\mathrm{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\int_\epsilon^r t^{\alpha-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, se puede verificar que ciertas hipótesis impuestas a f, como tener un límite finito en el infinito, es decir $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$, conlleva a que la integral sobre γ_2 y γ_4 tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$ y $r \to \infty$ respectivamente. En consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda^{\alpha-1} f(\lambda)d\lambda \to \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} f(t)dt$$

Ahora bien, en vista del corolario 3.6.1, el resolvente R_λ es una función continua de λ y por (3.7) se tiene que $||R_\lambda|| \to 0$ si $\lambda \to \infty$. Todo ello, conduce a la siguiente definición.

Definición 3.10. *Sea $T \in \mathfrak{B}(X)$, y sea $\alpha \in \mathbb{F}$. Para $0 < Re\ \alpha < 1$, se define*

$$T^{\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} R_t dt. \tag{3.13}$$

En la literatura, la definición 3.13 es llamada **representación de Balakrishnan** para potencias fraccionarias de operadores. En analogía con la transformada de Mellin(véase [12] cap. 10), para una función f definida sobre $(0,\infty)$ se define la transformada de Mellin de f como

$$\mathfrak{M}(f(t)) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} f(t)dt.$$

Podemos pensar en la representación de Balakrishnan, como la transformada de Mellin del operador R_t (como función de t), es decir

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} T^{\alpha} = \mathfrak{M}(R_t) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} R_t dt.$$

Así, si consideramos la fórmula de inversión de Mellin para el operador resolvente obtenemos que

$$R_t = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\alpha}\mathfrak{M}(R_t)d\alpha = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\alpha}\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} T^{\alpha} d\alpha,$$

donde c es una constante llamada **abscisa de convergencia**[4]. Ahora bien, de la fórmula de reflexión para la función Γ (2.11) se obtiene la fórmula de inversión para el resolvente:

$$(tI - T)^{-1} = R_t = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)t^{-\alpha} T^{\alpha} d\alpha$$

en particular si $t = 1$, se obtiene

$$(I - T)^{-1} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) T^{\alpha} d\alpha. \tag{3.14}$$

Note que si X es un espacio de Banach de funciones analíticas complejas, y $T : X \to X$, entonces (3.14) puede ser evaluada usando el teorema de los residuos. El el Capítulo 5 veremos una aplicación sencilla de esta afirmación.

[4]Esta constante determina el semiplano para el cual la integral converge, sin embargo, sobre c no se garantiza la convergencia.

Capítulo 4

Método Analítico de los Operadores

En este capítulo se analizan los fundamentos teóricos de método analítico de los operadores, objetivo principal de esta tesis. Al igual que antes, y por simplicidad, para el análisis del método consideraremos principalmente la ecuación diferencial de segundo grado.

Hemos visto que si una ecuación diferencial posee singularidades en diversos puntos, estos pueden trasladarse al origen mediante algún cambio de variable. De esta manera, el origen es la singularidad más importante, sin embargo, algunas ecuaciones que poseen singularidades en diversos puntos tienen una forma especial. La importancia de estas ecuaciones radica en que sus soluciones son conocidas, y una amplia colección de ecuaciones pueden obtenerse de ellas mediante alguna transformación o cambio de variable. La ecuación más importante de este tipo es la ecuación diferencial hipergeométrica con singularidades regulares en 0, 1 e ∞, que son las singularidades más comunes. Consideremos primero el caso de singularidades en 0 e ∞ simultáneamente.

4.1. Singularidades en 0 e ∞

Consideremos la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$\psi''(z) + p(z)\psi'(z) + q(z)\psi(z) = 0, \tag{4.1}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones definidas sobre algún dominio común $\Omega \subset \mathbb{C}$, y supongamos que $z = 0$ es una singularidad regular de dicha ecuación.

De la definición 1.5 y la discusión que precede al teorema A.5 se sigue que

$$p(z) = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i z^i \text{ y } q(z) = \sum_{i=-2}^{\infty} q_i z^i.$$

Por otro lado, si $z = \infty$ es una singularidad regular, en vista de la definición 1.6, la función $P(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} p\left(\frac{1}{z}\right)$ debe tener un polo simple en $z = 0$, lo cual es equivalente a afirmar que $zP(z)$ es analítica en 0.

Por otro lado,

$$zP(z) = 2 - \frac{1}{z}\sum_{i=-1}^{\infty} p_i z^{-i} = 2 - \frac{1}{z}\left(zp_{-1} + p_0 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + ... + ...\right)$$

lo cual implicaría que $0 = p_0 = p_1 = ... = p_n = ...$, por lo que $p(z) = \frac{p_{-1}}{z}$.

Análogamente,

$$z^2Q(z) = z^2\left(\frac{1}{z^4} q\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z^2}\left(z^2 q_{-2} + zq_{-1} + q_0 + \frac{q_1}{z} + \frac{q_2}{z^2} + ... + ...\right)$$

debe ser analítica en $z=0$, lo cual conduce a que $q(z)=\frac{q_{-2}}{z^2}$. Por lo tanto, la forma más general de una ecuación diferencial con singularidades regulares en $z=0$ y $z=\infty$ es

$$z^2\psi''(z)+az\psi'(z)+b\psi(z)=0, \qquad a,b.\ \text{constantes} \tag{4.2}$$

La ecuación anterior es referida en la literatura como **ecuación de Cauchy-Euler** y es simple de resolver (véase ejemplo 5.3).

Consideremos ahora el caso particular; una singularidad regular únicamente en el origen. Puesto que el método de los operadores es un método unificador (trata simultáneamente con ecuaciones homogéneas y no homogéneas a la vez) de aquí en adelante trabajaremos con la ecuación no homogénea

$$\psi''(z)+p(z)\psi'(z)+q(z)\psi(z)=F(z), \tag{4.3}$$

donde $p(z)$, $q(z)$ y $F(z)$ están definidas en algún dominio común Ω del plano complejo, $F(z)\neq 0$ y analítica. Supongamos como antes, que $z=0$ es una singularidad regular de dicha ecuación[1]. Como en el método de Frobenius, se propone una solución de la forma $\psi(z)=z^\lambda f(z)$, donde λ es un parámetro real o complejo por determinar y, donde $f(z)$ es una función analítica en 0.

Sustituyendo en la ecuación (4.3) se obtiene

$$z^\lambda f''(z)+2\lambda z^{\lambda-1}f'(z)+\lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2}f(z)+p(z)(z^\lambda f'(z)+\lambda z^{\lambda-1}f(z))+q(z)z^\lambda f(z)=F(z)$$

o bien,

$$z^\lambda f''(z)+(2\lambda z^{\lambda-1}+z^\lambda p(z))f'(z)+(\lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2}+\lambda z^{\lambda-1}p(z)+q(z)z^\lambda)f(z)=F(z). \tag{4.4}$$

Dividiendo a ambos miembros de la igualdad anterior entre z^λ se obtiene la ecuación diferencial

$$f''(z)+\left(\frac{2\lambda}{z}+p(z)\right)f'(z)+\left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{z^2}+\frac{\lambda p(z)}{z}+q(z)\right)f(z)=z^{-\lambda}F(z). \tag{4.5}$$

Por otro lado, puesto que

$$\frac{2\lambda}{z}+p(z)=\frac{2\lambda}{z}+\sum_{i=-1}^{\infty}p_iz^i=\frac{2\lambda+p_{-1}}{z}+\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i,$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(\lambda-1)}{z^2}+\frac{\lambda p(z)}{z}+q(z) &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{z^2}+\frac{\lambda}{z}\sum_{i=-1}^{\infty}p_iz^i+\sum_{i=-2}^{\infty}q_iz^i\\ &= \frac{\lambda(\lambda-1)+\lambda p_{-1}+q_{-2}}{z^2}+\frac{\lambda}{z}\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i+\sum_{i=-1}^{\infty}q_iz^i\\ &= \frac{\lambda^2+(p_{-1}-1)\lambda+q_{-2}}{z^2}+\sum_{i=0}^{\infty}\lambda p_iz^{i-1}+\sum_{i=-1}^{\infty}q_iz^i\\ &= \frac{p(\lambda)}{z^2}+\sum_{i=-1}^{\infty}(\lambda p_{i+1}+q_i)z^i,\end{aligned}$$

donde $p(\lambda)=\lambda^2+(p_{-1}-1)\lambda+q_{-2}=0$ es la ecuación indicial [2], al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (4.5) se obtiene

$$f''(z)+\left(\frac{2\lambda+p_{-1}}{z}+\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i\right)f'(z)+\left(\frac{p(\lambda)}{z^2}+\sum_{i=-1}^{\infty}(\lambda p_{i+1}+q_i)z^i\right)f(z)=z^{-\lambda}F(z).$$

[1] La definición de punto singular, es como en el caso homogéneo

[2] Del Capítulo 1, sabemos que las raíces de dicha ecuación, determinan la forma de las soluciones de la ecuación homogénea.

Sean λ_1, λ_2 las raíces de $p(\lambda)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda_1 > \lambda_2$, si $\lambda_1 - \lambda_2$ es un entero, entonces la segunda solución es del tipo logaritmo. Para una raíz en particular, digamos λ_1, la ecuación anterior se puede escribir como

$$f''(z) + \left(\frac{\alpha}{z} + h_1(z)\right) f'(z) + h_2(z)f(z) = z^{-\lambda_1}F(z), \tag{4.6}$$

donde $\alpha = 2\lambda_1 + p_{-1}$, $h_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ y $h_2(z) = \sum_{i=-1}^{\infty} (\lambda_1 p_{i+1} + q_i) z^i$.

La ecuación (4.6), también se puede escribir como

$$\frac{1}{z^\alpha}\frac{d}{dz}\left(z^\alpha \frac{df(z)}{dz}\right) + h_1(z)\frac{df(z)}{dz} + h_2(z)f(z) = z^{-\lambda_1}F(z), \tag{4.7}$$

en vista de la igualdad

$$\frac{1}{z^\alpha}\frac{d}{dz}\left(z^\alpha \frac{df(z)}{dz}\right) = \frac{1}{z^\alpha}\left(z^\alpha \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \alpha z^{\alpha-1}\frac{df(z)}{dz}\right) = \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{\alpha}{z}\frac{df(z)}{dz}.$$

Ahora se define un operador L como sigue:

$$L = \int \frac{1}{z^\alpha}\left(\int z^\alpha (.) dz\right) dz \tag{4.8}$$

donde la integral es indefinida. El dominio de L será especificado más adelante (véase Teorema 4.1).

Ahora bien, si $\frac{1}{z^\alpha}\frac{d}{dz}\left(z^\alpha \frac{df(z)}{dz}\right)$ es un elemento del dominio de L, entonces

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{z^\alpha}\frac{d}{dz}\left(z^\alpha \frac{df(z)}{dz}\right)\right) &= \int \frac{1}{z^\alpha}\left(\int z^\alpha \left(\frac{1}{z^\alpha}\frac{d}{dz}\left(z^\alpha \frac{df(z)}{dz}\right)\right) dz\right) dz \\ &= \int \frac{1}{z^\alpha}\left(z^\alpha f'(z) + c_0\right) dz \\ &= f(z) + c_0 \int \frac{dz}{z^\alpha} + c_1, \end{aligned}$$

donde c_0, c_1 son constantes. De manera que al aplicar L a ambos lados de la igualdad (4.7) se obtiene la ecuación

$$f(z) + \int \frac{1}{z^\alpha}\left(\int z^\alpha \left(h_1(z)f'(z) + h_2(z)f(z)\right) dz\right) dz = \int \frac{1}{z^\alpha}\left(\int z^{\alpha-\lambda_1}F(z)dz\right) dz + f_0(z) \tag{4.9}$$

donde $f_0(z)$ es la constante de integración del operador L que satisface la restricción

$$f_0(z) = c_0 + c_1 \int \frac{1}{z^\alpha} dz, \qquad c_0, c_1 \text{ constantes.} \tag{4.10}$$

Por otro lado, si se define un nuevo operador A (con igual dominio que L) como sigue

$$A = \int \frac{1}{z^\alpha}\left(\int z^\alpha \left(h_1(z)\frac{d(.)}{dz} + h_2(z)(.)\right) dz\right) dz \tag{4.11}$$

entonces la ecuación (4.9) se escribe en notación de operadores como sigue:

$$(I + A)f(z) = Lz^{-\lambda_1}F(z) + f_0(z).$$

Finalmente, si el operador $(I + A)$ es invertible; es decir $(I + A)^{-1}$ existe, entonces la solución de la ecuación (4.6) está dada por

$$f(z) = (I + A)^{-1}Lz^{-\lambda_1}F(z) + (I + A)^{-1}f_0(z).$$

De la forma de la solución $f(z)$, es claro que la solución de la ecuación homogénea asociada (solución complementaria) está dada por

$$f_c(z) = (I+A)^{-1}c_0 + c_1(I+A)^{-1}\int \frac{1}{z^{\alpha}}dz$$

con la solución particular

$$f_p(z) = (I+A)^{-1}Lz^{-\lambda_1}F(z).$$

Antes de estudiar las propiedades de los operadores L y A, discutiremos el caso más general.

4.2. Singularidades en 0, 1 e ∞

Consideremos nuevamente la ecuación (4.1) y, supongamos que dicha ecuación posee singularidades regulares en 0, 1 e ∞. El siguiente resultado establece que dicha ecuación tiene una forma especial.

Lema 4.1. *La ecuación diferencial más general que tienen singularidades regulares en 0,1 e ∞ es la ecuación diferencial hipergeométrica*

$$z(1-z)\psi''(z) + (c-(a+b+1)z)\psi'(z) - ab\psi(z) = 0,$$

donde a, b y c son constantes.

Demostración. En efecto, supongamos que 0 y 1, son singularidades regulares, entonces

$$p(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + P(z) \text{ y } q(z) = \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z} + \frac{E}{(1-z)^2} + \frac{F}{1-z} + Q(z),$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son funciones analíticas tanto en 0 como en 1. Por otro lado, para que $z=\infty$ sea una singularidad regular, se debe cumplir que la función

$$z\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2}p\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 2 - \frac{1}{z}\left(Az + \frac{Bz}{z-1} + P\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 2 - A - \frac{B}{z-1} - \frac{1}{z}P\left(\frac{1}{z}\right)$$

debe ser analítica en $z=0$. Ello implica que $P(z)=0$, y en consecuencia $p(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z}$.

Análogamente, la función

$$\begin{aligned} z^2\left(\frac{1}{z^4}q\left(\frac{1}{z}\right)\right) &= \frac{1}{z^2}\left(Cz^2 + Dz + \frac{Ez^2}{(1-z)^2} + \frac{Fz}{z-1} + Q\left(\frac{1}{z}\right)\right) \\ &= C + \frac{D}{z} + \frac{E}{(1-z)^2} + \frac{F}{z(z-1)} + \frac{1}{z^2}Q\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= C + \frac{D}{z-1} + \frac{E}{(z-1)^2} + \frac{F-D}{z(z-1)} + \frac{1}{z^2}Q\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

debe ser analítica en $z=0$, lo cual implica que $F-D=0$ y $Q(z)=0$, de donde

$$q(z) = \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z} + \frac{E}{(1-z)^2} + \frac{F}{1-z} = \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z(1-z)} + \frac{F-D}{1-z} + \frac{E}{(1-z)^2} = \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z(1-z)} + \frac{E}{(1-z)^2}.$$

Por otro lado, la ecuación indicial correspondiente a $z=0$ está dado por

$$\alpha^2 + (p_{-1}-1)\alpha + q_{-2} = \alpha^2 + (A-1)\alpha + C = 0.$$

Sean α_1, α_2 las raíces de la ecuación indicial, entonces $\alpha_1+\alpha_2 = 1-A$ y $C = \alpha_1\alpha_2$. De manera análoga, la ecuación indicial correspondiente a $z=1$ está dado por $\beta^2 + (B-1)\beta + e = 0$, por lo cual $\beta_1+\beta_2 = 1-B$ y $\beta_1\beta_2 = E$.

Finalmente, es sencillo verificar que la ecuación indicial en $z = \infty$ está dada por $\gamma^2 + (1 - A - B)\gamma + C - D + E = 0$, por lo cual $\gamma_1 + \gamma_2 = A + B - 1$, y $\gamma_1\gamma_2 = C - D + E$, y obtenemos así la relación

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1.$$

Usando estas identidades, podemos reescribir la ecuación (4.1) como sigue

$$\psi^{''}(z) + \left(\frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{z} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{1 - z}\right)\psi'(z) + \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2} + \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2}{z(1 - z)} + \frac{\beta_1\beta_2}{(1 - z)^2}\right)\psi(z) = 0.$$

Si ninguna de las diferencias $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$, $\gamma_1 - \gamma_2$, es un entero, entonces esta última ecuación puede simplificarse(después de un poco de álgebra) como sigue

$$z(1 - z)\psi''(z) + (c - (a + b + 1)z)\psi'(z) - ab\psi(z) = 0,$$

donde a, b y c son constantes adecuadas, que es precisamente la ecuación diferencial hipergeométrica. □

El lema 4.1, es importante, puesto que cualquier ecuación con a lo más tres singularidades puede ser obtenida de la ecuación diferencial hipergeométrica mediante alguna transformación de Moebius. En vista de este lema, si la ecuación diferencial

$$(1 - z)\psi''(z) + p(z)\psi'(z) + q(z)\psi(z) = F(z),$$

es tal que $p(z) = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i z^i$, y $q(z) = \sum_{i=-2}^{\infty} q_i z^i$, entonces dicha ecuación posee una singularidad regular en 0, en 1, y posiblemente una singularidad regular en ∞. Si se propone como solución $\psi(z) = z^{\lambda} f(z)$, un análisis similar al de la sección anterior conduce a la ecuación diferencial

$$f''(z) + \left(\frac{\alpha}{z} + h_1(z)\right) f'(z) + h_2(z)f(z) - zf''(z) = z^{-\lambda_1}F(z),$$

donde $\alpha = 2\lambda_1 + p_{-1}$, $h_1(z) = p_0 - 2\lambda_1 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i z^i$ y $h_2(z) = \frac{\lambda_1(1-\lambda_1)+\lambda_1 p_0 + q_{-1}}{z} + \sum_{i=0}^{\infty}(\lambda_1 p_{i+1} + q_i)z^i$. Reescribiendo esta última ecuación obtenemos

$$\frac{1}{z^{\alpha}}\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\frac{df(z)}{dz}\right) + h_1(z)\frac{df(z)}{dz} + h_2(z)f(z) - z\frac{d^2f(z)}{dz^2} = z^{-\lambda_1}F(z).$$

Ahora bien, si se define L como en (4.8), al aplicarlo a ambos lados de esta última ecuación se obtiene

$$f(z) + \int \frac{dz}{z^{\alpha}}\left(\int z^{\alpha}\left(h_1(z)\frac{df(z)}{dz} + h_2(z)f(z) - z\frac{d^2f(z)}{dz^2}\right)dz\right) = \int \frac{dz}{z^{\alpha}}\int z^{\alpha-\lambda_1}F(z)dz + f_0(z),$$

donde $f_0(z)$ es como en (4.10). Finalmente, si de define

$$A = \int \frac{1}{z^{\alpha}}\left(\int z^{\alpha}\left(h_1(z)\frac{d(.)}{dz} + h_2(z)f(z) - z\frac{d^2(.)}{dz^2}\right)dz\right)dz, \tag{4.12}$$

podemos escribir esta ecuación en notación de operadores como

$$(I + A)f(z) = Lz^{\lambda_1}F(z) + f_0(z).$$

Nuevamente, si el operador $(I{+}A)$ es invertible, la solución de la ecuación diferencial para $f(z)$ está dada por

$$f(z) = (I + A)^{-1}Lz^{\lambda_1}F(z) + (I + A)^{-1}f_0(z),$$

donde $(I + A)^{-1}f_0(z)$ es la solución general de la ecuación homogénea y $(I + A)^{-1}Lz^{\lambda_1}F(z)$ es una solución particular.

Por el teorema 3.4, una condición suficiente para que el operador $(I + A)^{-1}$ exista, es que $||A|| < 1$, para cierta norma definida sobre el dominio de A. Bajo estas condiciones se tiene

$$(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-A)^k = I - A + A^2 - A^3 + A^4 - .... + (-1)^n A^n + ...$$

En la siguiente sección analizaremos las propiedades de los operadores L y A y les definiremos un dominio adecuado.

4.3. El espacio $H_v(G)$

Sea $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$, definimos un espacio de funciones analíticas como sigue

$$H(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica}\}.$$

En vista del teorema A.5, este espacio contiene a todas las funciones de la forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k,$$

es decir, a las funciones que son analíticas en el origen[3], funciones con polos de orden $m \in \mathbb{N}$(un número finito de potencias negativas de z) y finalmente funciones con una singularidad esencial(infinitos términos de potencias negativas de z).

Nuestra meta es considerar un subespacio de este espacio(que no incluya a las funciones con singularidades esenciales), el cual contenga a las soluciones de ecuaciones diferenciales y dotarlo de una norma, de tal manera que este sea un espacio completo.

De los resultados obtenidos en el Capítulo 1, sabemos que las soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$\psi''(z) + p(z)\psi'(z) + q(z)\psi(z) = 0$$

son de la forma

$$\begin{array}{l} \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \text{ para puntos ordinarios.} \\ \psi(z) = z^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \text{ siempre que } \lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}. \\ \psi(z) = \log(z) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \text{ siempre que } \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}. \end{array} \tag{4.13}$$

Para una ecuación diferencial no homogénea, la situación no es muy diferente, puesto que la solución general de la ecuación diferencial

$$\psi''(z) + p(z)\psi'(z) + q(z)\psi(z) = F(z)$$

está dada por

$$\psi(z) = \psi_c(z) + \psi_p(z),$$

donde $\psi_c(z)$ es la solución complementaria y, $\psi_p(z)$ es la solución particular que se puede hallar mediante algún método. En resumen, la solución de una ecuación diferencial no homogénea con singularidades regulares es una combinación de las tres formas de soluciones dadas en (4.13). De esta manera, es suficiente construir un espacio de Banach que contenga a las soluciones de la forma (4.13).

Para ello, sea $v : G \to \mathbb{R}^+$ una función estrictamente positiva y continua llamada función de peso, definimos el espacio normado

$$H_v(G) = \{f \in H(G) : ||f||_v = \sup_{z \in G} v(z)|f(z)| < \infty\}.$$

El siguiente teorema establece que $H_v(G)$ es completo para toda v.

Teorema 4.1. *El espacio $H_v(G)$ es completo.*

Demostración. En efecto, sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $H_v(G)$, entonces

$$||f_n - f_m||_v \to 0, \text{ siempre que } n, m \to \infty.$$

[3]Aquellas funciones que tienen un singularidad removible en el origen

En otras palabras, para $\epsilon > 0$ dado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$||f_n - f_m||_v = \sup_{z\in G} v(z)|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon,$$

lo cual implica que $|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\epsilon}{v(z)}$. Así, dado $z \in G$ fijo $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ y sea $K \subset G$ un subconjunto compacto. Por el teorema de Weierstrass $v(z)$ alcanza un mínimo en K, esto es, existe $z_0 \in K$ tal que $v(z_0) \leq v(z)$ para todo $z \in K$. De esta manera,

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\epsilon}{v(z)} \leq \frac{\epsilon}{v(z_0)}, \text{ para todo } z \in K.$$

Así $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente en K para todo $K \subset G$. Por tanto, f es analítica en G y se tiene que

$$v(z)|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon,$$

de aquí que cuando $m \to \infty$, se obtiene $\sup_{z\in G} ||f_n - f|| \leq \epsilon$, que es la convergencia en la norma $||.||_v$ □

Para ver que las funciones del tipo (4.13) están en $H_v(G)$ para algún v, basta observar que si $\alpha = 2\lambda_1 + p_{-1}$, entonces

$$\alpha - 1 = 2\lambda_1 + (p_{-1} - 1) = \lambda_1 - \lambda_2 = \delta\lambda.$$

Así podemos reescribir las funciones del tipo (4.13) en función de α y $f(z)$ como sigue:

$$\begin{aligned} &f(z) = z^{-\delta\lambda} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \text{ si } \lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}. \\ &f(z) = \log(z) \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \text{ siempre que } \lambda_1 = \lambda_2. \\ &f(z) = z^{-\delta\lambda} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \log(z) \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \text{ siempre que } \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por ejemplo, para el primer caso, una solución de la ecuación diferencial está dada por

$$\psi(z) = z^{\lambda_1} f(z) = z^{\lambda_1} z^{-\delta\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = z^{\lambda_1} z^{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = z^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

y si $\lambda_1 = \lambda_2$ una segunda solución está dada por $\psi(z) = \log(z) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ como se quería. Así basta elegir $v(z) = |z|^{\alpha}$ para tener que

$$\lim_{|z|\to 0} v(z)|f(z)| < \infty$$

y puesto que se asume que el origen es la única singularidad aislada de $f(z)$ dentro de G, entonces debe tener una norma finita; esto es

$$||f||_v = \sup_{z\in G} v(z)|f(z)| < \infty.$$

4.4. Los operadores L y A

De la forma especial de las soluciones de una ecuación diferencial, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Existe $z_0 \in G$ y un subconjunto $G_0 = \{z \in G : 0 < |z| \leq |z_0| < 1\}$, tal que*

1. *$L : H_v(G_0) \to H_v(G_0)$ es continuo.*
2. *$A : H_v(G_0) \to H_v(G_0)$ es continuo.*
3. *$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + A^4 - ... + (-1)^n A^n + ...$*

Demostración. 1.- En vista del teorema 3.2 basta probar que L es acotado. De la discusión anterior, es suficiente analizar el comportamiento de L con funciones de la forma

$$1)\ \ f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m, \ \ 2)\ \ f(z) = z^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \ \text{ y } \ 3) f(z) = \log z \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m.$$

Caso 1) $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$. De la definición de L se tiene que

$$Lz^m = \int \frac{1}{z^{\alpha}} \left(\int z^{\alpha+m} dz \right) dz = \frac{z^{m+2}}{(m+2)(\alpha+m+1)},$$

donde por simplicidad las constantes de integración se han asumido iguales a cero. Así, puesto que

$$|z|^{\alpha} \left| \frac{z^{m+2}}{(m+2)(\alpha+m+1)} \right| = |z|^{\alpha}|z^m| \left| \frac{z^2}{(m+2)(\alpha+m+1)} \right| \leq |z|^{\alpha}|z^m| \left| \frac{z_0^2}{(m+2)(\alpha+m+1)} \right|$$

para todo $z \in G_0$, se sigue que

$$\sup_{z\in G_0} |z^{\alpha}||Lz^m| \leq K_m \sup_{z\in G_0} |z^{\alpha}||z^m|,$$

donde $K_m = \left| \frac{z_0^2}{(m+2)(\alpha+m+1)} \right| \leq 1$, por lo cual $||Lz^m||_v \leq K_m ||z^m||_v$ para $m = 0, 1, 2...$

En consecuencia,

$$||Lf(z)||_v \leq K||f(z)||_v, \text{ donde } K = \sup_{m\in\mathbb{N}} \{K_m\}.$$

Caso 2) $f(z) = z^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$. Puesto que

$$Lz^{\lambda+m} = \frac{z^{\lambda+k+2}}{(\lambda+m+2)(\alpha+\lambda+m+1)},$$

se sigue que $||Lz^{\lambda+m}||_v \leq K_m ||z^{\lambda+m}||_v$, donde $K_m = \left| \frac{z_0^2}{(\lambda+m+2)(\alpha+\lambda+m+1)} \right| \leq 1$ para toda $m = 0, 1, 2...$ Así

$$||Lf(z)||_v \leq K||f(z)||_v, \text{ donde } K = \sup_{m\in\mathbb{N}} \{K_m\}.$$

Caso 3) $f(z) = \log z \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$. Se tiene que

$$Lz^m \log z = \int \frac{1}{z^{\alpha}} \left(\int z^{\alpha+m} \log z dz \right) dz = \left(\frac{\log z}{(m+2)(m+\alpha+1)} - \frac{2m+\alpha+3}{(m+2)^2(m+\alpha+1)^2} \right) z^{m+2}.$$

De aquí que, $||Lz^m \log z||_v \leq K_m ||z^m \log z||_v$, donde

$$K_m = \text{máx}\{K_{1m}, K_{2m}\}, \quad K_{1m} = |\frac{z_0^2}{(m+2)(m+\alpha+1)}| \leq 1 \ \text{ y } \ K_{2m} = |\frac{(2m+\alpha+3)z_0^2}{(m+2)^2(m+\alpha+1)^2}| \leq 1.$$

En consecuencia,

$$||Lf(z)||_v \leq K||f(z)||_v, \text{ donde } K = \sup_{m\in\mathbb{N}} \{K_m\}.$$

De todo lo anterior, se observa que para $L : H_v(G_0) \to H_v(G_0)$ podemos elegir un z_0 adecuado de tal manera que $||Lf(z)||_v \leq K||f(z)||_v$ para todo $z \in G_0$; es decir, para todo $0 < |z| < |z_0| < 1$, lo cual prueba que L es acotado y por tanto continuo.

2.- Primero supongamos que A está definido como en (4.11), es decir

$$A = \int \frac{1}{z^{\alpha}} \left(\int z^{\alpha} \left(h_1(z) \frac{d(.)}{dz} + h_2(z)(.) \right) dz \right) dz$$

donde $h_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ y $h_2(z) = \sum_{i=-1}^{\infty} (\lambda p_{i+1} + q_i) z^i$.

Caso 1) $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$. Observe que

$$\begin{aligned}
z^\alpha \left(h_1(z) \frac{dz^m}{dz} + h_2(z) z^m \right) = z^\alpha (m z^{m-1} h_1(z) + h_2(z) z^m) &= m z^{\alpha+m-1} h_1(z) + z^{\alpha+m} h_2(z) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} m p_i z^{\alpha+m+i-1} + \sum_{i=-1}^{\infty} (\lambda p_{i+1} + q_i) z^{i+\alpha+m} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} [(m+\lambda) p_i + q_{i-1}] z^{\alpha+m+i-1}
\end{aligned}$$

para toda $m = 0, 1, 2, 3....$ En consecuencia,

$$\begin{aligned}
A z^m = \int \frac{dz}{z^\alpha} \left(\int z^\alpha \left(h_1(z) \frac{dz^m}{dz} + h_2(z) z^m \right) dz \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} [(m+\lambda) p_i + q_{i-1}] \int \frac{dz}{z^\alpha} \left(\int z^{\alpha+m+i-1} dz \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m+\lambda) p_i + q_{i-1}}{(m+\alpha+i)(m+i+1)} z^{m+i+1}.
\end{aligned}$$

Así, $||Az^m||_v \leq K_m ||z^m||_v$, donde $K_m = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m+\lambda)p_i + q_{i-1}}{(m+\alpha+i)(m+i+1)} z_0^{i+1} \right|$, y por lo tanto $||Af(z||_v \leq K ||f(z)||_v$, donde $K = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{K_m\}$.

Caso 2) $f(z) = z^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$. Este caso es análogo al anterior, puesto que

$$\frac{d}{dz} z^{\lambda+m} = (m+\lambda) z^{\lambda+m-1} = r_{\lambda,m} z^{r_{\lambda,m}-1}.$$

Caso 3) $f(z) = \log z \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
z^\alpha \left(h_1(z) \frac{dz^m \log z}{dz} + h_2(z) z^m \log z \right) &= z^\alpha (h_1(z) [m z^{m-1} \log z + z^{m-1}] + z^m \log z h_2(z)) \\
&= (m \log z + 1) z^{\alpha+m-1} h_1(z) + z^{\alpha+m} \log z h_2(z) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (m \log z + 1) p_i z^{\alpha+m+i-1} + \sum_{i=-1}^{\infty} (\lambda p_{i+1} + q_i) \log z z^{i+\alpha+m} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} ((m \log z + 1) p_i + (\lambda p_i + q_{i-1}) \log z) z^{i+\alpha+m-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} [((m+\lambda) p_i + q_{i-1}) \log z + p_i] z^{i+\alpha+m-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} [a_i \log z + p_i] z^{r_i},
\end{aligned}$$

donde $a_i = (m+\lambda) p_i + q_{i-1}$ y $r_i = i + \alpha + m - 1$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
g(z) = \int z^\alpha \left(h_1(z) \frac{dz^m}{dz} + h_2(z) z^m \right) dz &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int \log z z^{r_i} dz + \sum_{i=0}^{\infty} p_i \int z^{r_i} dz \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left[\frac{z^{r_i+1} \log z}{r_i + 1} - \frac{z^{r_i+1}}{(r_i+1)^2} \right] + \sum_{i=0}^{\infty} p_i \frac{z^{r_i+1}}{r_i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i \log z}{r_i+1} z^{r_i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i (r_i+1) - a_i}{(r_i+1)^2} z^{r_i+1}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\int \frac{g(z)}{z^\alpha}dz &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{r_i+1} \int \log z z^{r_i+1-\alpha} dz + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i(r_i+1)-a_i}{(r_i+1)^2} \int z^{r_i+1-\alpha} dz \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{r_i+1} \left[\frac{\log z z^{r_i+2-\alpha}}{r_i+2-\alpha} - \frac{z^{r_i+2-\alpha}}{(r_i+2-\alpha)^2} \right] + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i(r_i+1)-a_i}{(r_i+1)^2} \frac{z^{r_i+2-\alpha}}{r_i+2-\alpha} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i \log z z^{r_i+2-\alpha}}{(r_i+1)(r_i+2-\alpha)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[p_i(r_i+1)-a_i][r_i+2-\alpha]-[r_i+1]a_i}{(r_i+1)^2(r_i+2-\alpha)^2} z^{r_i+2-\alpha}.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\frac{a_i}{(r_i+1)(r_i+2-\alpha)} = \frac{(m+\lambda)p_i + q_{i-1}}{(\alpha+m+i)(m+i+1)}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{[p_i(r_i+1)-a_i][r_i+2-\alpha]-[r_i+1]a_i}{(r_i+1)^2(r_i+2-\alpha)^2} &= \frac{p_i(r_i+1)(r_i+2-\alpha)-(r_i+1+r_i+2-\alpha)a_i}{(r_i+1)^2(r_i+2-\alpha)^2} \\
&= \frac{\alpha(i+1)-m^2+i^2+i-(\lambda p_i+q_{i-1})(2i+2m+\alpha+1)}{(i+m+\alpha)^2(i+m+1)^2},
\end{aligned}$$

si elegimos $K_m = \max\{K_{1m}, K_{2m}\}$, donde

$$K_{1m} = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m+\lambda)p_i+q_{i-1}}{(\alpha+m+i)(m+i+1)} \log z_0 z_0^{r_i+2-\alpha-m} \right|$$

$$K_{2m} = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha(i+1)-m^2+i^2+i-(\lambda p_i+q_{i-1})(2i+2m+\alpha+1)}{(i+m+\alpha)^2(i+m+1)^2} z_0^{r_i+2-\alpha-m} \right|,$$

obtenemos que $||Az^m||_v \leq K_m ||z^m||_v$, para toda m.
En consecuencia,

$$||Af(z)||_v \leq K||f(z)||_v, \quad \text{donde} \quad K = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{K_m\}.$$

Finalmente, si A está definido como en (4.12), solamente obtenemos un término extra a saber $L\left(-z\frac{d^2}{dz^2}f(z)\right)$, que, por lo anterior, es continuo. Por ejemplo, para $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
L\left(-z\frac{d^2}{dz^2}z^m\right) = L(m(1-m)z^{m-1}) &= m(1-m)\left[\frac{z^{m-1+2}}{(m-1+2)(\alpha+m-1+1)}\right] \\
&= \frac{m(1-m)}{(m+1)(\alpha+m)} z^{m+1},
\end{aligned}$$

y para tener $||Af(z)|| \leq K||f(z)||_v$ se debe elegir $K = \max\{K_1, K_2\}$, donde

$$K_1 = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \frac{m(1-m)}{(m+1)(\alpha+m)} z_0 \right|,$$

y

$$K_2 = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m+\lambda)p_i+q_{i-1}}{(m+\alpha+i)(m+i+1)} z_0^{m+i+1} \right|.$$

Análogamente para los otros dos casos restantes.

De todo lo anterior, podemos concluir que si $A : H_v(G_0) \to H_v(G_0)$ se tiene que $||Af(z)||_v \leq K||f(z)||_v$ para todo $z \in G_0$; lo cual prueba que A es continuo.

3.- Si se define $||A|| = \sup_{f \in H_v(G_0), f \neq 0} \frac{||Af(z)||}{||f||}$, por el análisis previo tenemos que

$$||Af(z)|| \leq K||f(z)||_v$$

por lo que $||A|| \leq K$. Basta pues elegir un z_0 adecuado de tal manera que $K < 1$ y para este z_0 se tendría $||A||_v < 1$ y, por lo tanto el operador resolvente $(I + A)^{-1}$ se puede expandir como una serie de Neumman. $\square$

4.5. Representación integral

En la sección anterior, vimos como el operador resolvente puede ser expandido en una serie de Neumman para $0 < |z| \leq |z_0| < 1$. Sin embargo, la relación (3.14) proporciona una segunda representación para dicho operador, como integral de línea, la cual está dada por

$$(I + A)^{-1} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(1-s)(-A)^s f(z) ds, \tag{4.15}$$

donde $f(z)$ es cualquier elemento del espacio de Banach $H_v(G)$, c es una constante y donde

$$A^\alpha = \frac{\text{sen}(\alpha z)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \; 0 < \text{Re } \alpha < 1.$$

En algunos problemas de valor inicial, es posible identificar una potencia fraccionaria del operador A como una integral de orden fraccionario con límites de integración 0 y z, y usando la teoría presentada en el Capítulo 2 podemos usar la representación (4.15) para evaluar dicha integral. En general, el cálculo de potencias fraccionarias es muy difícil, por ello sólamente cuando sea posible la emplearemos.

Capítulo 5

Aplicación

El propósito de este capítulo es mostrar la aplicación del método de los operadores resolviendo una colección de ejemplos importantes, así como aplicar los argumentos y resultados establecidos en capítulos anteriores. Los primeros ejemplos presentados son tomados de [15], justificando cada paso detalladamente.

En una sección posterior se presenta el método de descomposición, que es conveniente revisar, debido a que guarda una estrecha analogía con el método que se está analizando en cuanto a la forma de los operadores. Para una buena introducción y generalización del método de descomposición para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales véase [5].

Al final del capítulo se presentan algunos ejemplos adicionales propios tales como: la ecuación diferencial de Legendre, de Hermite, de Jacobi, de Laguerre, entre otras. Estos ejemplos también son clásicos y sus soluciones pueden verse en [11]. Cabe mencionar que en la literatura todas aparecen resueltas con el método de Frobenius.

Se resolverá primero la más simple de las ecuaciones diferenciales.

5.1. La función exponencial

La ecuación diferencial de primer orden más sencilla es

$$\frac{d}{dz}w(z) - w(z) = 0,$$

la cual se puede resolver por integración directa, proporcionando la solución $w(z) = c\exp(z)$, donde c es una constante compleja. Para resolver esta ecuación por el método del operador, se define $L = \int(.)dz$, al aplicarlo a la ecuación se obtiene $(I - L)w(z) = c$, donde c es la constante de integración del operador L. Para este caso $A = L$, y la solución está dada por

$$\begin{aligned} w(z) = (I-A)^{-1}c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k c &= c + \int c dz + \int\int c dz + \int\int\int c dz + ... \\ &= c\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...\right) \\ &= c\exp(z), \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la ecuación diferencial no homogénea $\frac{d}{dz}w(z) - w(z) = z$, para resolverla, basta observar que la solución particular está dada por

$$\begin{aligned} w_p(z) = (I-A)^{-1}Lz = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{z^2}{2} &= \frac{z^2}{2} + \int \frac{z^2}{2} dz + \int\int \frac{z^2}{2} dz + \int\int\int \frac{z^2}{2} dz + ... \\ &= \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + ... \\ &= e^z - 1 - z, \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$

Así, la solución general está dada por $w(z) = (c_0 + 1)e^z - 1 - z$.

5.2. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dz^2} w(z) \pm w(z) = 0 \tag{5.1}$$

cuyas soluciones pueden ser obtenidas con la transformación $w(z) = e^{mz}$, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} w(z) &= c_0 \cos(z) + c_1 \operatorname{sen}(z) && \text{para el signo } + \\ w(z) &= c_0 \cosh(z) + c_1 \operatorname{senh}(z) && \text{para el signo - .} \end{aligned}$$

Si definimos $L = \int\int(.)dzdz$, al aplicarlo a (5.1) se obtiene $(I \pm L)w(z) = c_0 + c_1 z$. Para este caso $A = L = \int\int(.)dzdz = (\int(.)dz)^2$, entonces la solución está dada por

$$w(z) = (I \pm A)^{-1}(c_0 + c_1 z). \tag{5.2}$$

Por ejemplo, para el signo + una primera solución es

$$\begin{aligned} w_1(z) = (I + A)^{-1} c_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k c_0 &= \left(I - \int\int + \int\int\int\int - \int\int\int\int\int\int + ... \right) c_0 \\ &= c_0 \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ... \right) \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2k!} \\ &= c_0 \cos(z), \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Análogamente, la segunda solución viene dada por

$$\begin{aligned} w_2(z) = (I + A)^{-1} c_1 z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k c_1 z &= \left(I - \int\int + \int\int\int\int - \int\int\int\int\int\int + ... \right) c_1 z \\ &= c_1 \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ... \right) \\ &= c_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= c_1 \operatorname{sen}(z), \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

De manera similar, puesto que $\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ y $\operatorname{senh}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ se obtienen los mismos resultados con el signo negativo.

En el capítulo 2 se obtuvo la fórmula

$${}_0D_z^{-\nu} z^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \nu + 1)} z^{\nu+\mu}$$

para la integral fraccional de orden ν de z^{μ}(véase ejemplo 2.1). Esta fórmula es útil al momento de usar la representación integral del operador resolvente. En efecto, si se imponen las condiciones iniciales $w(0) = c_1$, y $w'(0) = c_2$, entonces es posible definir $L = \int_0^z \int_0^z (.)dzdz = (\int_0^z (.)dz)^2 = {}_0D_z^{-2}$.

La primera solución (para el signo +) está dada por

$$\begin{aligned}
w_1(z) = \left(I + ({}_0D_z)^{-2}\right) c_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(1-s)(-{}_0D_z)^{-2s} c_0 ds \\
&= c_0 \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(1-s)\frac{z^{-2s}}{\Gamma(1-2s)} ds \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} res_{s=-k} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-2s)} z^{-2s} \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(2k+1)} z^{-2s} \qquad \left(res_{z=-k}\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{k!}{(2k)!} z^{2k} \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\
&= c_0 \cos(z).
\end{aligned}$$

Análogamente, la segunda solución está dada por

$$\begin{aligned}
w_2(z) = \left(I + ({}_0D_z^{-2}\right) c_1 z &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(1-s)(-{}_0D_z)^{-2s} c_1 z ds \\
&= c_1 \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(1-s)\frac{z^{1-2s}}{\Gamma(1+1-2s)} ds \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} res_{s=-k} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(2-2s)} z^{1-2s} \\
&= c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(2k+2)} z^{1-2s} \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{k!}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= c_1 \operatorname{sen}(z).
\end{aligned}$$

5.3. Ecuación diferencial de Bessel

Consideremos la ecuación diferencial de Bessel

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\psi(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\psi(z) = 0. \tag{5.3}$$

Esta ecuación posee una única singularidad regular en $z = 0$, y la solución está dada por

$$\psi(z) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-\nu+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}, \quad |z| < \infty.$$

Si se propone $\psi(z) = z^\lambda f(z)$, entonces la ecuación indicial está dada por $\lambda^2 - \nu^2 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = \nu$, y $\lambda_2 = -\nu$. La ecuación diferencial para el indice positivo de acuerdo a (4.6) es:

$$\frac{d^2}{dz^2} f(z) + \frac{2\nu+1}{z}\frac{d}{dz} f(z) + f(z) = 0,$$

que se reescribe como

$$\frac{1}{z^{2\nu+1}}\frac{d}{dz}\left(z^{2\nu+1}\frac{d}{dz}f(z)\right)+f(z)=0. \tag{5.4}$$

Así $L=\int\frac{dz}{z^{2\nu+1}}\int z^{2\nu+1}(.)dz$ y, al aplicarlo a (5.4) se obtiene $(I+A)f(z)=c_0+c_1\int\frac{dz}{z^{2\nu+1}}$, donde $A=L$. Finalmente, la solución de (5.4) está dada por

$$f(z)=(I+A)^{-1}\left(c_0+c_1\int\frac{dz}{z^{2\nu+1}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^k\left(c_0+c_1\int\frac{dz}{z^{2\nu+1}}\right). \tag{5.5}$$

Para c_0 se tiene que

$$Ac_0=\int\frac{dz}{z^{2\nu+1}}\int z^{2\nu+1}c_0dz=\frac{c_0}{2\nu+2}\int\frac{z^{2\nu+2}}{z^{2\nu+1}}dz=\frac{c_0z^2}{4(\nu+1)}=\frac{c_0}{\nu+1}\left(\frac{z}{2}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}A^2c_0=\frac{c_0}{4(\nu+1)}\int\frac{dz}{z^{2\nu+1}}\int z^{2\nu+1}z^2dz &= \frac{c_0}{4(\nu+1)(2\nu+4)}\int\frac{z^{2\nu+4}}{z^{2\nu+1}}dz\\ &= \frac{c_0z^4}{4(\nu+1)(2\nu+4)4}\\ &= \frac{c_0}{2(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4,\end{aligned}$$

y en general (por inducción)

$$A^nc_0=\frac{c_0}{n!(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)...(\nu+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2^\nu\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

donde $c_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$. De manera que la primera solución está dada por

$$\psi_1(z)=z^\nu f_1(z)=z^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^kc_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu},\quad |z|<1.$$

Si $\nu\notin\mathbb{N}$, entonces una segunda solución puede ser obtenida aplicando el operador resolvente al segundo término. En efecto, iterando obtenemos que

$$\begin{aligned}Ac_1\frac{z^{-2\nu}}{-2\nu}=\frac{c_1}{-2\nu}\int\frac{dz}{z^{2\nu+1}}\int z^{2\nu+1}z^{-2\nu}dz=\frac{c_1}{2(-2\nu)}\int\frac{z^2dz}{z^{2\nu+1}} &= \frac{c_1}{2(-2\nu)(2-2\nu)}z^{2-2\nu}\\ &= z^{-2\nu}\frac{c_1}{-2\nu(1-\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^2c_1\frac{z^{-2\nu}}{-2\nu}=\frac{c_1}{4(-2\nu)(1-\nu)}\int\frac{dz}{z^{2\nu+1}}\int z^{2\nu+1}z^{2-2\nu}dz &= \frac{c_1}{(4)(4)(-2\nu)(1-\nu)}\int\frac{z^4dz}{z^{2\nu+1}}\\ &= \frac{c_1}{16(-2\nu)(1-\nu)(4-2\nu)}z^{4-2\nu}\\ &= z^{-2\nu}\frac{c_1}{2(-2\nu)(1-\nu)(2-\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^4,\end{aligned}$$

y en general se tiene que

$$\begin{aligned}A^n\frac{c_1z^{-2\nu}}{-2\nu}=\frac{c_1z^{-2\nu}}{n!(-2\nu)(1-\nu)(2-\nu)...(n-\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} &= \frac{2^\nu z^{-2\nu}}{n!(-\nu)(1-\nu)(2-\nu)...(n-\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\\ &= \frac{z^{-\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-\nu}\end{aligned}$$

con $c_1 = -\nu 2^{\nu+1}$. En consecuencia, una segunda solución está dada por

$$\psi_2(z) = z^{\nu} f_2(z) = z^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k c_1 \frac{z^{-2\nu}}{-2\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-\nu+k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}, \quad |z| < 1.$$

Estas soluciones son las mismas que se obtuvieron con el método de Frobenius en la Sección 1.4.3.

Por otro lado, para ver que la elección de las raíces es irrelevante, elijamos la raíz con signo negativo$(-\nu)$, de la ecuación (5.4) resulta

$$L = A = \int \frac{dz}{z^{-2\nu+1}} \int z^{-2\nu+1}(.)dz.$$

Finalmente, de la ecuación (5.5) para c_0 se tiene que

$$Ac_0 = \int \frac{dz}{z^{-2\nu+1}} \int z^{1-2\nu} c_0 dz = \frac{c_0}{2-2\nu} \int \frac{z^{2-2\nu}}{z^{1-2\nu}} dz = \frac{c_0 z^2}{2(2-2\nu)} = \frac{c_0}{(1-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} A^2 c_0 = \frac{c_0}{2^2(1-\nu)} \int \frac{dz}{z^{-2\nu+1}} \int z^{1-2\nu} z^2 dz &= \frac{c_0}{2^2(1-\nu)(4-2\nu)} \int \frac{z^{4-2\nu}}{z^{-2\nu+1}} \\ &= \frac{c_0}{2(1-\nu)(2-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 c_0 = \frac{c_0}{22^4(1-\nu)(2-\nu)} \int \frac{dz}{z^{1-2\nu}} \int z^{1-2\nu} z^4 dz &= \frac{c_0}{42^4(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)} \int \frac{z^{6-2\nu}}{z^{1-2\nu}} dz \\ &= \frac{c_0}{6(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^6 \end{aligned}$$

en general se tiene que

$$A^n c_0 = \frac{c_0}{n!(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)...(n-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \frac{c_0}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

así, la primera solución está dada por

$$\psi_1(z) = z^{-\nu} f_1(z) = z^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k c_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-\nu+k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}, \quad |z| < 1$$

para un adecuado c_0.

De manera análoga, una segunda solución está dada por

$$f_2(z) = (I+A)^{-1} c_1 \int \frac{dz}{z^{1-2v}} = \frac{c_1}{2\nu} (I+A)^{-1} z^{2\nu}.$$

Al iterar se observa que

$$Az^{2\nu} = \int \frac{1}{z^{1-2\nu}} \int z^{1-2\nu} z^{2\nu} dz = \frac{1}{2} \int \frac{z^2}{z^{1-2\nu}} = \frac{1}{2(2\nu+2)} z^{2\nu+2} = z^{2\nu} \frac{1}{(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2,$$

$$\begin{aligned} A^2 z^{2\nu} = \frac{1}{2^2(\nu+1)} \int \frac{1}{z^{1-2\nu}} \int z^{1-2\nu} z^{2\nu+2} dz &= \frac{1}{42^2(\nu+1)} \int \frac{z^4}{z^{1-2\nu}} dz \\ &= \frac{1}{42^2(\nu+1)(2\nu+4)} z^{2\nu+4} \\ &= z^{2\nu} \frac{1}{2(\nu+1)(\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4, \end{aligned}$$

y en general

$$A^n \frac{c_0 z^{2\nu}}{2\nu} = z^{2\nu} \frac{c_0}{n!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = z^{\nu} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

para una adecuada elección de c_0. Por lo tanto, la segunda solución es

$$\psi_2(z) = z^{-\nu} f_2(z) = z^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \frac{c_1 z^{2\nu}}{2\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad |z| < 1.$$

Estas son las mismas soluciones obtenidas con anterioridad, lo cual confirma que la elección de la raíz es irrelevante, de aquí en adelante se elegirá la raíz que facilite los cálculos.

5.4. Ecuación diferencial de Bessel no homogénea

Otra importante función de las denominadas especiales, la constituye la **función de Struve** de orden ν, denotada por $H_\nu(z)$ la cual está dada por

$$H_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(k+\nu+\frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu+1}, \quad |z| < \infty$$

y es la solución particular de la ecuación diferencial de Bessel no homogénea

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\psi(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\psi(z) = \frac{2^{1-\nu} z^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)}.$$

La función de Struve puede ser obtenida usando el método de los operadores. En efecto, al resolver la ecuación de Bessel no homogénea, la solución particular está dada por

$$\begin{aligned} H_\nu(z) = (I+A)^{-1} L(z^{-\lambda} F(z)) &= (I+A)^{-1} L\left(z^{-\nu} \frac{2^{1-\nu} z^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)}\right) \\ &= \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)} (I+A)^{-1} \int \frac{dz}{z^{2\nu+1}} \int z^{2\nu+1} z^{-1} dz \\ &= \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)} (I+A)^{-1} \left(\frac{1}{2\nu+1}\right) z \\ &= \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)(\nu+\frac{1}{2})} (I+A)^{-1} z. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$Az = \int \frac{dz}{z^{2\nu+1}} \int z^{2\nu+1} z = \frac{1}{3(2\nu+3)} z^3 = \frac{z}{\frac{3}{2}(\nu+\frac{3}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^2,$$

$$A^2 z = \frac{1}{3(2\nu+3)} \int \frac{dz}{z^{2\nu+1}} \int z^{2\nu+4} = \frac{1}{3(2\nu+3)5(2\nu+5)} z^5 = \frac{z}{\frac{3}{2}\frac{5}{2}(\nu+\frac{3}{2})(\nu+\frac{5}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^4,$$

$$\begin{aligned} A^3 z = \frac{1}{3(2\nu+3)5(2\nu+5)} \int \frac{dz}{z^{2\nu+1}} \int z^{2\nu+6} &= \frac{1}{3(2\nu+3)5(2\nu+5)7(2\nu+7)} z^7 \\ &= \frac{z}{\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}(\nu+\frac{3}{2})(\nu+\frac{5}{2})(\nu+\frac{7}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^6, \end{aligned}$$

y en general

$$A^n z = \frac{z}{\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}...\frac{2n+1}{2}(\nu+\frac{3}{2})(\nu+\frac{5}{2})(\nu+\frac{7}{2})...(\nu+\frac{2n+1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(v+\frac{3}{2})z}{\Gamma(n+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+\frac{3}{2}+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

De donde

$$
\begin{aligned}
H_\nu(z) = \frac{2^{-\nu}(I+A)^{-1}z}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)(\nu+\frac{1}{2})} &= \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}+\nu)(\nu+\frac{1}{2})}\left(z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(v+\frac{3}{2})z}{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+\frac{3}{2}+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(k+\nu+\frac{3}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu+1}, \quad \left(\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

5.5. Ecuación diferencial hipergeométrica confluente

Consideremos la ecuación diferencial

$$
z\psi''(z)+(c-z)\psi'(z)-a\psi(z)=0. \tag{5.6}
$$

Esta ecuación posee una única singularidad regular en $z=0$, y la solución general está dada por

$$
\psi(z)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}z^n+c_1z^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c+1)_n}{(2-c)_n n!}z^n, \qquad |z|<\infty.
$$

Se propone $\psi(z)=z^\lambda f(z)$, y la ecuación indicial es $\lambda(\lambda-1)+c\lambda=0$, cuyas raíces son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=1-c$. Eligiendo $\lambda=\lambda_1=0$, la ecuación diferencial (5.6) está dada por

$$
\frac{d^2}{dz^2}f(z)+\frac{c}{z}\frac{d}{dz}f(z)-\frac{d}{dz}f(z)-\frac{a}{z}f(z)=0,
$$

la cual se reescribe como

$$
\frac{1}{z^c}\frac{d}{dz}\left(z^c\frac{d}{dz}f(z)\right)-\left(\frac{d}{dz}f(z)+\frac{a}{z}f(z)\right)=0. \tag{5.7}
$$

Si se elige $L=\int\frac{dz}{z^c}\int z^c(.)dz$, entonces $A=\int\frac{dz}{z^c}\int z^c\left(\frac{d}{dz}(.)+\frac{a}{z}(.)\right)dz$ y, la solución de (5.7) está dada por

$$
f(z)=(I+A)^{-1}\left(c_0+c_1\int\frac{dz}{z^c}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^k\left(c_0+c_1\int\frac{dz}{z^c}\right).
$$

Al iterar se observa que

$$
Ac_0=\int\frac{dz}{z^c}\int z^c\left(\frac{a}{z}c_0\right)dz=c_0a\int\frac{1}{z^c}\int z^{c-1}dz=c_0\frac{a}{c}z,
$$

$$
\begin{aligned}
A^2c_0=\int\frac{dz}{z^c}\int z^c\left(c_0\frac{a}{c}+\frac{a}{z}c_0\frac{a}{c}z\right)dz=c_0\frac{a(1+a)}{c}\int\frac{dz}{z^c}\int z^cdz &= c_0\frac{a(1+a)}{c(c+1)}\int\frac{z^{c+1}dz}{z^c}\\
&= c_0\frac{a(1+a)}{2c(c+1)}z^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^3c_0=c_0\frac{a(1+a)}{2c(c+1)}\int\frac{dz}{z^c}\int z^c(2z+az)dz &= c_0\frac{a(a+1)(a+2)}{2c(c+1)}\int\frac{dz}{z^c}\int z^{c+1}dz\\
&= c_0\frac{a(a+1)(a+2)}{6c(c+1)(c+2)}z^3,
\end{aligned}
$$

y en general se tiene que

$$
A^nc_0=c_0\frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)...(c+n-1)}z^n=c_0\frac{(a)_n}{(c)_n}z^n,
$$

obteniéndose con ello la solución

$$\psi_1(z) = z^0 f_1(z) = (I - A)^{-1} c_0 = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n, \qquad |z| < 1.$$

De manera similar, si se elige $c_1 = 1 - c$, entonces

$$\begin{aligned} Ac_1 \int \frac{1}{z^c} = Az^{1-c} = \int \frac{dz}{z^c} \int z^c((1-c)z^{-c} + az^{-c})dz &= a - c + 1 \int \frac{1}{z^c} \int dz \\ &= z^{1-c} \frac{a-c+1}{2-c} z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 c_1 \int \frac{1}{z^c} = \frac{a-c+1}{2-c} \int \frac{1}{z^c} \int z^c((2-c)z^{1-c} + az^{1-c})dz &= \frac{(a-c+1)(a-c+2)}{2(2-c)} \int \frac{z^2}{z^c} \\ &= \frac{(a-c+1)(a-c+2)}{2(2-c)(3-c)} z^{3-c} \\ &= z^{1-c} \frac{(a-c+1)(a-c+2)}{2(2-c)(3-c)} z^2, \end{aligned}$$

y en general

$$A^n c_1 \int \frac{1}{z^c} = z^{1-c} \frac{(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+n)}{n!(2-c)(3-c)...(n+1-c)} z^n = z^{1-c} \frac{(a-c+1)_n}{(2-c)_n} z^n,$$

obteniéndose la segunda solución

$$\psi_2(z) = z^0 f_2(z) = z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_n}{n!(2-c)_n} z^n, \qquad |z| < 1.$$

5.6. Ecuación diferencial hipergeométrica

Consideremos la ecuación diferencial hipergeométrica

$$z(1-z)\psi''(z) + (c - (a+b+1)z)\psi'(z) - ab\psi(z) = 0$$

con singularidades regulares en 0, 1 e ∞. La solución general alrededor de $z = 0$ está dada por

$$\psi(z) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)n}{(c)_n n!} z^n + c_1 z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_n (b-c+1)n}{(2-c)_n n!} z^n, \quad |z| < 1.$$

Si se propone $\psi(z) = z^\lambda f(z)$, entonces la ecuación indicial es $\lambda(\lambda - 1) + \lambda c = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1 - c$. La ecuación diferencial para $\lambda = 0$ de acuerdo a (4.6) es

$$\frac{d^2}{dz^2} f(z) + \frac{c}{z} \frac{d}{dz} f(z) - (a+b+1) \frac{d}{dz} f(z) - \frac{ab}{z} f(z) - z \frac{d^2}{dz^2} f(z) = 0,$$

la cual puede ser escrita como

$$\frac{1}{z^c} \frac{d}{dz} \left(z^c \frac{d}{dz} f(z) \right) - \left((a+b+1) \frac{d}{dz} f(z) + \frac{ab}{z} f(z) + z \frac{d^2}{dz^2} f(z) \right) = 0.$$

Para este caso $L = \int \frac{dz}{z^c} \int z^c(.)dz$ y $A = \int \frac{dz}{z^c} \int z^c \left((a+b+1)\frac{d}{dz} + \frac{ab}{z}(.) + z\frac{d^2}{dz^2}(.) \right) dz$, de donde

$$f(z) = (I - A)^{-1} \left(c_0 + c_1 \int \frac{dz}{z^c} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(c_0 + c_1 \int \frac{dz}{z^c} \right).$$

Al iterar se observa que

$$Ac_0 = c_0 ab \int \frac{dz}{z^c} \int z^{c-1} dz = c_0 \frac{ab}{c} z,$$

$$A^2 c_0 = \frac{c_0 ab}{c} \int \frac{dz}{z^c} \int z^c \left((a+b+1) + \frac{ab}{z} z \right) dz = \frac{c_0 a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \int \frac{z^{c+1}}{z^c} dz = \frac{c_0 a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)} z^2,$$

$$\begin{aligned} A^3 z^2 = \int \frac{dz}{z^c} \int z^c \left(2(a+b+1)z + \frac{ab}{z} z^2 + 2z \right) dz &= \int \frac{dz}{z^c} \int z^c (2(a+b+1)z + abz + 2z) dz \\ &= (a+2)(b+2) \int \frac{1}{z^c} \int z^{c+1} dz \\ &= \frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)} z^3, \end{aligned}$$

así

$$A^3 c_0 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} z^3,$$

y en general

$$A^n c_0 = \frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)b(b+1)(b+2)...(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)...(c+n-1)} z^n = c_0 \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n$$

de donde (con $c_0 = 1$),

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k c_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n, \quad |z| < 1.$$

De manera similar, puede verificarse que la segunda solución está dada por

$$f_2(z) = (I-A)^{-1} \frac{c_1 z^{1-c}}{1-c} = z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_n (b-c+1)n}{(2-c)_n n!} z^n, \quad |z| < 1.$$

Para hallar las soluciones alrededor de 1, basta observar que la ecuación hipergeométrica se puede escribir como

$$\psi''(z) + \left(\frac{c}{z} + \frac{a+b-c+1}{z-1} \right) \psi'(z) + \left(\frac{ab}{z-1} - \frac{ab}{z} \right) \psi(z) = 0$$

o bien

$$\frac{1}{(z-1)^{a+b-c+1}} \frac{d}{dz} \left((z-1)^{a+b-c+1} \frac{d}{dz} \psi(z) \right) + \frac{c}{z} \psi'(z) + \left(\frac{ab}{z-1} - \frac{ab}{z} \right) \psi(z) = 0.$$

El cambio de variable $u = z - 1$ permite escribir

$$\frac{1}{u^{a+b-c+1}} \frac{d}{du} \left(u^{a+b-c+1} \frac{d}{du} \psi(u) \right) + \frac{c}{u+1} \psi'(u+1) + \left(\frac{ab}{u} - \frac{ab}{u+1} \right) \psi(u) = 0.$$

Así $L = \int \frac{du}{u^{a+b-c+1}} \int u^{a+b-c+1} (.) du$ y $A = \int \frac{du}{u^{a+b-c+1}} \int u^{a+b-c+1} \left(\frac{c}{u+1} \frac{d^2}{du^2}(.) + (\frac{ab}{u} - \frac{ab}{u+1})(.) \right) du$, que proporcionan las soluciones

$$\psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(a+b+1-c)_n} (1-z)^n \text{ y } \psi_2(z) = (1-z)^{c-a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-b)_n (c-a)_n}{(c-a-b+1)_n} (1-z)^n, \quad |1-z| < 1.$$

Finalmente, para la singularidad en el infinito basta hacer el cambio de variable $u = \frac{1}{z}$ y se procede igual que antes.

5.7. El Método de descomposición

El método de los operadores que hemos presentado aquí, retoma las ideas del método de descomposición de Adomian el cual es también un método reciente empleado principalmente en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La versión que se presenta aquí es adaptado de [3]. Para más detalles sobre el método de descomposición véase [5]. La razón por la cual se presenta este método es debido a que las ideas son simples y no se requiere de teoría extra, ademas de guardar una estrecha analogía con el método de los operadores en cuanto a la forma de los operadores.

Dada la ecuación diferencial homogénea

$$\psi''(z) + P(z)\psi'(z) + Q(z)\psi(z) = 0, \tag{5.8}$$

al multiplicarlo por $e^{\int P(z)dz}$ se obtiene

$$e^{\int P(z)dz}\psi''(z) + P(z)e^{\int P(z)dz}\psi'(z) + Q(z)e^{\int P(z)dz}\psi(z) = 0,$$

la cual se puede escribir como

$$\frac{d}{dz}\left(e^{\int P(z)dz}\frac{d}{dz}\psi(z)\right) + Q(z)e^{\int P(z)dz}\psi(z) = 0$$

o bien

$$\frac{d}{dz}\left(p(z)\frac{d}{dz}\psi(z)\right) + q(z)\psi(z) = 0.$$

Cuando $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas la ecuación diferencial es llamada **forma autoadjunta** y si ciertas condiciones de frontera son impuestas a $\psi(z)$ con $q(z) = \lambda h(z)$, donde λ es un parámetro real o complejo, entonces dicho problema es conocido como **problema de Sturm-Liouville**. Este problema es unos de los más estudiados dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales, debido a sus aplicaciones, principalmente en física. Su importancia radica en que da origen a la teoría de los eigenvalores y eigenfunciones, y en general a la teoría de la ortogonalidad.

En un caso más general, la ecuación (5.8) dependiendo de P y Q puede ser escrita de la forma

$$h(z)\frac{d}{dz}\left(p(z)\frac{d}{dz}\psi(z)\right) - R\left(z, \psi, \frac{d}{dz}\psi(z), \frac{d^2}{dz^2}\psi(z)\right) = 0,$$

donde R contiene al resto de los términos de la ecuación diferencial que no figuran en la primera parte y el signo menos es tomado por conveniencia. Si se define $L = h(z)\frac{d}{dz}(p(z)\frac{d}{dz}(.))$, el método de descomposición consiste entonces en hallar una inversa de L para transformar esta última ecuación en una ecuación integral. Observe que una inversa derecha de L está dada por

$$L^{-1} = \int_0^z \frac{dt}{p(t)} \int_0^t \frac{dy}{h(y)}(.),$$

sin embargo, observamos que

$$\begin{aligned} L^{-1}L\psi(z) = \int_0^z \frac{dt}{p(t)} \int_0^t \frac{dy}{h(y)}(h(y)\frac{d}{dy}(p_1(y)\frac{d}{dy}\psi(z)) &= \int_0^z \frac{dt}{p(t)}[p(y)\frac{d}{dy}\psi(y)]_0^t \\ &= \int_0^z \frac{d}{dt}\psi(t) - p(0)\psi'(0)\int_0^z \frac{dt}{p(t)} \\ &= \psi(z) - \psi(0) - p(0)\psi'(0)\int_0^z \frac{dt}{p(t)} \end{aligned}$$

esto es, si $\psi(0) = 0 = \psi'(0)$, en realidad L^{-1} es el candidato ideal para la inversa de L. Desde luego, el método asume que $1/p(t)$ es integrable en una vecindad del origen. Para este caso se tiene que

$$\psi(z) = \psi(0) - p(0)\psi'(0)\int_0^z \frac{dt}{p(t)} + \int_0^z \frac{dt}{p(t)} \int_0^t \frac{dy}{h(y)}R,$$

una ecuación integral de Volterra que puede ser resuelta por el método de aproximaciones sucesivas (o método iterativo de Picard), y cuya solución está dada por

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(z), \text{ donde } \psi_0(z) = \psi(0) - p(0)\psi'(0) \int_0^z \frac{dt}{p(t)}. \tag{5.9}$$

Presentamos a continuación algunos ejemplos de aplicación de este método. Consideremos, por ejemplo, la ecuación diferencial hipergeométrica

$$z(1-z)\psi''(z) + (c - (a+b+1)z)\psi'(z) - ab\psi(z) = 0$$

que se puede reescribir como

$$z^{1-c}\frac{d}{dz}\left(z^c \frac{d}{dz}\psi(z)\right) = z^2\psi''(z) + (a+b+1)z\psi'(z) + ab\psi(z).$$

Para este caso se tienen que $h(z) = z^{1-c}$ y $p(z) = z^c$. Ahora bien, si se asume que Re $c > 0$, entonces $1/p(z)$ es integrable en una vecindad del origen, y $L^{-1}L\psi(z) = \psi(z) - \psi(0)$. Finalmente, si imponemos la condición inicial $\psi_0(z) = \psi(0) = 1$, entonces la solución está dada por $\psi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z)$, donde

$$\begin{aligned} \psi_k(z) &= L^{-1}(z^2\psi''(z) + (a+b+1)z\psi'(z) + ab\psi(z)) \\ &= \int_0^z \frac{1}{z^c} \int_0^z z^{c-1}[z^2\psi''_{n-1}(z) + (a+b+1)z\psi'_{n-1}(z) + ab\psi_{n-1}(z)]dz. \end{aligned}$$

Así

$$\psi_1(z) = \int_0^z \frac{1}{z^c} \int_0^z z^{c-1}[z^2\psi''_0(z) + (a+b+1)z\psi'_0(z) + ab\psi_0(z)]dz = \int_0^z \frac{1}{z^c} \int_0^z z^{c-1} ab dz = \frac{ab}{c} z,$$

$$\begin{aligned} \psi_2(z) &= \int_0^z \frac{1}{z^c} \int_0^z z^{c-1}[z^2\psi''_1(z) + (a+b+1)z\psi'_1(z) + ab\psi_1(z)]dz \\ &= \int_0^z \frac{1}{z^c} \int_0^z z^{c-1} \left[\frac{(ab)(a+b+1)}{c} z + \frac{(ab)^2}{c} z\right] dz \\ &= \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)} z^2, \end{aligned}$$

y en general se tiene que

$$\psi_n(z) = \frac{a(a+1)...(a+n-1)b(b+1)...(b+n-1)}{n!c(c+1)...(c+n-1)} z^n = \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^n,$$

obteniéndose con ello la solución ya conocida.

Como otro ejemplo, consideremos la ecuación diferencial hipergeométrica confluente

$$z\psi''(z) + (c-z)\psi'(z) - a\psi(z) = 0 \tag{5.10}$$

que se reescribe como

$$z^{1-c}\frac{d}{dz}\left(z^c \frac{d}{dz}\psi(z)\right) = z\psi'(z) + a\psi(z),$$

aquí $p(z)$ y $h(z)$ son como antes, y por lo tanto, la solución está dada por $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(z)$, donde $\psi_0(z) = \psi(0) = 1$, y

$$\psi_k(z) = L^{-1}(z\psi'_{k-1}(z) + a\psi_{k-1}(z)) = \int_0^z \frac{1}{z^c} \int_0^z z^{c-1}[z\psi'_{n-1}(z) + a\psi_{n-1}(z)]dz.$$

Así $\psi_1(z) = \int_0^z \frac{1}{z^c} \int_0^z z^{c-1}[z\psi_0'(z) + a\psi_0(z)]dz = \frac{a}{c}z$, $\psi_2(z) = \int_0^z \frac{1}{z^c} \int_0^z z^{c-1} \left[z(\frac{a}{c}) + a(\frac{a}{c})\right] dz = \frac{a(a+1)}{2c(c+1)}z^2$, y por inducción

$$\psi_n(z) = \frac{a(a+1)..(a+n-1)}{n!c(c+1)...(c+n-1)} z^n = \frac{(a)_n}{n!(c)_n} z^n$$

que proporciona la solución ya conocida.

Como puede observarse, en algunos casos el método de descomposición proporciona una solución analítica, aún cuando las ecuaciones posean singularidades regulares, eligiendo adecuadamente los coeficientes de la ecuación. Sin embargo, no siempre es posible hacer esta elección, pues como mencionamos anteriormente, este método basa su éxito en que $1/p(z)$ es integrable en una vecindad del origen. Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial de Bessel

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\psi(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\psi(z) = 0$$

que se reescribe en la forma

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\psi(z)\right) = (\frac{\nu^2}{z} - 1)\psi(z).$$

Para resolver esta ecuación es necesario modificar el método. Para una solución véase [3].

5.8. Otros ejemplos

Finalizamos este capítulo presentando unos ejemplos adicionales, los cuales fueron resueltos usando el método de los operadores. Puesto que los cálculos son como en los ejemplos anteriores, no ahondaremos mucho en los detalles.

Ejemplo 5.1. *La ecuación diferencial de Bessel (con $\nu = 0$) es de la forma*

$$\psi''(z) + \frac{1}{z}\psi'(z) + \psi(z) = 0.$$

Para este caso $L = \int \frac{dz}{z} \int z(.)$ y $A = \int \frac{dz}{z} \int z(.)dz$, que proporcionan la solución $\psi(z) = J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$, $|z| < 1$.

Ejemplo 5.2. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\psi''(z) - \psi(z) = 3z^2 - z + 4.$$

Como vimos en la Sección 5.2, la solución de la ecuación homogénea $\left(conA = L = \int\int(.)dzdz\right)$ está dada por $\psi_c(z) = c_0\cosh(z) + c_1\operatorname{senh}(z)$, y por lo tanto, la solución particular es

$$\psi_p(z) = (I-A)^{-1}L(3z^2 - z + 4) = (I-A)^{-1}\left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{6} + 2z^2\right) = \frac{(I-A)^{-1}z^4}{4} - \frac{(I-A)^{-1}z^3}{6} + 2(I-A)^{-1}z^2$$

Ahora bien, puesto que

$$\frac{(I-A)^{-1}z^4}{4} = \frac{6(I-A)^{-1}z^4}{4!} = 6\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = 6\left(\cosh(z) - \frac{z^2}{2} - 1\right),$$

$\frac{(I-A)^{-1}z^3}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{senh}(z) - z$ *y* $2(I-A)^{-1}z^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = 4(\cosh(z) - 1)$, *se sigue que*

$$\psi_p(z) = 6\left(\cosh(z) - \frac{z^2}{2} - 1\right) - (\operatorname{senh}(z) - z) + 4(\cosh(z) - 1) = 10\cosh(z) - \operatorname{senh}(z) - 3z^2 + z - 10$$

siempre que $|z| < 1\cdot$

De manera similar, la ecuación

$$\psi''(z) - \psi(z) = \operatorname{sen}(\lambda z)$$

tiene la solución particular

$$\begin{aligned}(I-A)^{-1}L\operatorname{sen}(\lambda z) = \frac{-1}{\lambda^2}(I-A)^{-1}\operatorname{sen}(\lambda z) &= -\frac{\operatorname{sen}(\lambda z)}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4} - ... + \frac{(-1)^n}{\lambda^{2n}} + ...\right) \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(\lambda z)}{\lambda^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right) \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(\lambda z)}{\lambda^2+1}\end{aligned}$$

siempre que $|\lambda| < 1$ *y* $|z| < 1$.

Ejemplo 5.3. *La ecuación diferencial*

$$z^2\psi''(z) + az\psi'(z) + b\psi(z) = 0$$

donde a*,* b *son constantes, es llamada ecuación de Cauchy-Euler. Para resolverla se propone* $\psi(z) = z^\lambda f(z)$*. Al sustituir resulta la ecuación*

$$f''(z) + \frac{2\lambda + a}{z}f'(z) + \frac{\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b}{z^2}f(z) = 0.$$

Así, la ecuación indicial es $\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b = 0$*, con raíces* $\lambda = \frac{1-a\pm\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}$*. Con* $\lambda = \frac{1-a+\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}$*, la última ecuación obtenida se reescribe como*

$$\frac{1}{z^\alpha}\frac{d}{dz}\left(z^\alpha\frac{d}{dz}f(z)\right) = 0, \text{ donde } \alpha = 2\lambda + a.$$

Si se define $L = \int \frac{dz}{z^\alpha}\int z^\alpha(.)dz$*, entonces la solución está dada por*

$$f(z) = f_0(z) = c_1 + c_2\int\frac{dz}{z^\alpha}.$$

Ahora bien, si $(1-a)^2 = 4b$*, entonces* $\alpha = 2\lambda + a = 1 - a + a = 1$*, por lo que la solución es de la forma* $f(z) = c_1 + c_2\log(z)$.

De esta manera, si $\mu = \frac{\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}$ *las soluciones de la ecuación de Cauchy-Euler pueden escribirse como*

$$\psi(z) = \begin{cases} z^{\frac{1-a}{2}}[c_1z^\mu + c_2z^{-\mu}] & si\ (1-a)^2 > 4b \\ z^{\frac{1-a}{2}}[c_1 + c_2\log(z)] & si\ (1-a)^2 = 4b \\ z^{\frac{1-a}{2}}[c_1\operatorname{sen}(\mu\log(z)) + c_2\cos(\mu\log(z))] & si\ (1-a)^2 < 4b \end{cases}$$

en vista de las identidades $z^{iy} = \exp(iy\log(z))$ *y* $\exp(iy) = \cos(y) + i\operatorname{sen}(y)$.

Ejemplo 5.4. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\psi''(z) + e^z\psi(z) = 0$$

Para este caso $L = \int\int(.)dzdz$ *y* $A = \int\int e^z(.)dzdz$ *por lo que una solución está dada por*

$$\psi(z) = (I+A)^{-1}c = c\left(1 - e^z + \frac{e^{2z}}{(2!)^2} - \frac{e^{3z}}{(3!)^2} + ... + \frac{(-1)^n e^{nz}}{(n!)^2} + ...\right) = c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}e^{kz}.$$

Observe que de la igualdad $J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$ *con* $\nu = 0$ *se obtiene*

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+k)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

de esta manera podemos escribir la solución anterior en términos de la función de Bessel como $\psi(z) = cJ_0(2e^{\frac{z}{2}})$.

Para resolver la ecuación no homogénea

$$\psi''(z) + e^z\psi(z) = e^z$$

basta observar que la solución particular está dada por

$$\psi_p(z) = (I+A)^{-1}Le^z = (I+A)^{-1}e^z = e^z - \frac{e^{2z}}{(2!)^2} + \frac{e^{3z}}{(3!)^2} + ... + \frac{(-1)^n e^{nz}}{(n!)^2} + ... = -J_0(2e^{\frac{z}{2}}) + 1.$$

Ejemplo 5.5. *La ecuación diferencial*

$$z\psi''(z) + (\alpha + 1 - z)\psi'(z) + ny(z) = 0$$

donde α *es una constante y* n *un número entero positivo, es conocida como* ***ecuación diferencial de Laguerre*** *de orden* α*, el cual tiene una singularidad regular en el origen. Observe que esta ecuación es un caso particular de (5.7) con* $c = \alpha + 1$ *y* $a = -n$*, por lo que la solución está dada por*

$$\psi(z) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!(c)_k} z^k = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{k!(\alpha+1)_k} z^k.$$

Por otro lado, $(-n)_k = (-n)(-n+1)(-n+2)...(-n+k-1) = (-1)^k(n)(n-1)...(n-k+1)$*, y si* $k = n+1$ *la serie es finita y se obtiene como solución el polinomio*

$$L_n^\alpha(z) = c_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(n)(n-1)...(n-k+1)}{k!(\alpha+1)_k} z^k.$$

De la definición del coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

podemos escribir la solución como(eligiendo $c_0 = n!$*)*

$$L_n^\alpha(z) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{z^k}{(\alpha+1)_k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)!k!\alpha+1)_k} z^k$$

si $\alpha = 0$*, entonces* $(1)_k = (1)(2)(3)...(1+k-1) = k!$*, por lo que*

$$L_n^0(z) = L_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{z^k}{(\alpha+1)_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-k)!(k!)^2} z^k.$$

Los polinomios $L_n^\alpha(z)$ *son conocidos como polinomios de Laguerre de orden* α.

Ejemplo 5.6. *La ecuación diferencial*

$$(1-z^2)\psi''(z) - 2z\psi'(z) + n(n+1)\psi(z) = 0.$$

donde n *es un número natural, es conocida como* ***ecuación diferencial de Legendre****. Observese que* $z = \pm 1$ *son puntos singulares regulares, y el origen es un punto ordinario por lo que para el origen* $\alpha = 2\lambda + p_{-1} = 0$*. Reescribiendo la ecuación*

$$\psi''(z) - 2z\psi'(z) + n(n+1)\psi(z) - z^2\psi''(z) = 0$$

se eligen $L = \int \int (.)dzdz =$ *y* $A = \int dz \int \left(2z\frac{d}{dz}(.) - n(n+1)(.) + z^2\frac{d^2}{dz^2}(.)\right) dz$.

Al iterar se observa que $Ac_0 = \frac{-n(n+1)c_0}{2}z^2 = d_2z^2$, *donde* $d_2 = \frac{-n(n+1)c_0}{2}$,

$$\begin{aligned} A^2c_0 = d_2 \int \int ((2z)^2 - n(n+1)z^2 + 2z^2)dzdz &= d_2 \int dz \int (6 - n(n+1))z^2dz \\ &= \frac{-(n+3)(n-2)d_0}{3*4}z^4 \\ &= \frac{[n(n-2)][(n+1)(n+3)]}{4!}z^4 = d_4z^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3c_0 = d_4 \int \int (8z^4 - n(n+1)z^4 + 12z^4)dzdz &= d_4 \int dz \int (20 - n(n+1))z^4dz \\ &= \frac{-(n+5)(n-4)d_4}{5*6}z^6 \\ &= -\frac{[n(n-2)(n-4)][(n+1)(n+3)(n+5)]}{6!}z^6, \end{aligned}$$

y en general por inducción

$$A^kc_0 = (-)^k \frac{[n(n-2)(n-4)..(n-2k+2)][(n+1)(n+3)(n+5)...(n+2k-1)]}{(2k)!}z^{2k}$$

obteniéndose con ello la solución

$$\psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{[n(n-2)(n-4)..(n-2k+2)][(n+1)(n+3)(n+5)...(n+2k-1)]}{(2k)!}z^{2k}.$$

válida en el disco $|z| < 1$.

De manera análoga, la segunda solución $(I - A)^{-1}c_1z$ *está dada por*

$$\psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{[(n-1)(n-3)(n-5)..(n-2k+1)][(n+2)(n+4)(n+6)...(n+2k)]}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

siempre que $|z| < 1$.

Ahora bien, puesto que n *es un entero positivo,* $\psi_1(z)$ *se reduce a un polinomio de grado par si* n *es par y la serie* $\psi_2(z)$ *es infinita. Por el contrario, si* n *es impar* $\psi_2(z)$ *se reduce a un polinomio de grado impar y la serie* $\psi_1(z)$ *es infinita. En resumen, una solución está dada por el polinomio*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k \frac{[n(n-2)(n-4)..(n-2k+2)][(n+1)(n+3)(n+5)...(n+2k-1)]}{(2k)!}z^{2k}$$

o bien

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{(n+1)/2}(-1)^k \frac{[(n-1)(n-3)(n-5)..(n-2k+1)][(n+2)(n+4)(n+6)...(n+2k)]}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$

Los polinomios $P_n(z)$ *son conocidos como* ***polinomios de Legendre***[1]. *Dichos polinomios pueden obtenerse usando la fórmula de Rodríguez*

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(z+1)^{n-k}(z-1)^k = \frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

[1]En la literatura estos polinomios aparecen normalizados

Ejemplo 5.7. *Consideremos la* ***ecuación diferencial de Hermite***

$$\psi''(z) - 2z\psi'(z) + \lambda\psi(z) = 0,$$

donde λ *es un parámetro real o complejo.*

Si se define $L = \int\int dzdz$, *entonces* $A = \int\int(2z\frac{d}{dz}(.) - \lambda(.))dz$. *Al iterar se observa que* $Ac_0 = \frac{-\lambda c_0}{2}z^2$, $A^2c_0 = \frac{-\lambda c_0}{2}\int\int(4z^2 - \lambda z^2)dz = \frac{-\lambda(4-\lambda)}{4!}z^4$, $A^3c_0 = \frac{-\lambda(4-\lambda)}{4!}\int\int(2z)(4z^3) - \lambda z^4)dz = \frac{-\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!}z^6$ *y, en general*

$$A^kc_0 = \frac{-\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)...(4(k-1)-\lambda)}{(2k)!}z^{2k}$$

que proporciona la solución

$$\psi_1(z) = c_0\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)...(4(k-1)-\lambda)}{(2k)!}z^{2k}\right).$$

Análogamente, la segunda solución está dada por

$$\psi_2(z) = c_1\left(z + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)...(2(2k-1)-\lambda)}{(2k+1)!}z^{2k+1}\right).$$

Ejemplo 5.8. *Consideremos la* ***ecuación diferencial de Jacobi***

$$(1-z^2)\psi''(z) + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)z)\psi'(z) + n(n+\alpha+\beta+1)\psi(z) = 0,$$

donde α, β *son constantes y* n *un entero positivo.*

Eligiendo $L = \int\int(.)dzdz$ *y* $A = \int\int((\alpha+\beta+2)z + \alpha - \beta)(.) - n(n+\alpha+\beta+1)(.) + z^2\frac{d^2}{dz^2}(.))dzdz$ *se puede verificar que las soluciones están dada por los* ***polinomios de Jacobi***

$$P_{1n}^{\alpha+\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(n+1+\alpha+\beta)_k}{(1+\alpha)_k}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k \text{ y } P_{2n}^{\alpha+\beta}(z) = 2^{\alpha}(z-1)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n-\alpha)_k(n+1+\beta)_k}{(1-\alpha)_k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k.$$

Por otro lado, si $\alpha = \beta = \lambda - 1$ *la ecuación diferencial de Jacobi se reduce a*

$$\psi''(z) - (2\lambda+1)z\psi'(z) + n(n+2\lambda)\psi(z) - z^2\psi''(z) = 0$$

que es conocida como ***ecuación diferencial de Gegenbauer****, la cual tiene por solución* $P_n^{\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}}(z)$, *conocidos como* ***polinomios de Gegenbauer****.*

Ejemplo 5.9. *Consideremos la la ecuación diferencial*

$$z^2\psi''(z) + (az+b)\psi(z) = 0,$$

donde a, b *son constantes.*

Al proponer la solución de la forma $\psi(z) = z^{\lambda}f(z)$ *resulta la ecuación indicial* $\lambda(\lambda-1) + b = 0$ *con raíces* $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{1-4b}}{2}$. *Con* $\lambda = \frac{1+\sqrt{1-4b}}{2} = \nu$ *se obtenemos la ecuación*

$$\frac{1}{z^{\nu}}\left(z^{\nu}\frac{d}{dz}f(z)\right) + \frac{a}{z}f(z) = 0.$$

De esta manera $L = \int\frac{dz}{z^{2\nu}}\int z^{2\nu}(.)dz$ *y* $A = a\int\frac{dz}{z^{2\nu}}\int z^{2\nu-1}(.)dz$ *dando como solución (véase [11] pág 159.)*

$$\psi(z) = z^{\frac{1}{2}}J_{\nu}(2\sqrt{az})$$

donde $J_{\nu}(z)$ *es la función de Bessel de primera clase de orden* ν*.*

Hasta ahora solamente hemos considerado ecuaciones diferenciales de segundo orden, sin embargo, el método de los operadores se puede generalizar para resolver ecuaciones diferenciales fuchsianas de orden n, por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial

$$\psi'''(z) + p(z)\psi''(z) + q(z)\psi'(z) + r(z)\psi(z) = F[z]$$

donde $p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k z^k$, $q(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} q_k z^k$, $r(z) = \sum_{k=-3}^{\infty} r_k z^k$, y $F[z]$ una función analítica en algún dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Bajo estas condiciones el origen es una singularidad regular. Se propone la solución de la forma $\psi(z) = z^\lambda f(z)$. Al sustituir en la ecuación y simplificar se obtiene la ecuación diferencial

$$f'''(z) + \left(\frac{\alpha}{z} + h_1(z)\right) f''(z) + \left(\frac{3\lambda^2 + (2p_{-1} - 3)\lambda + q_{-2}}{z^2} + h_2(z)\right) f'(z) + \left(\frac{p(\lambda)}{z^3} + h_3(z)\right) f(z) = z^{-\lambda} F[z]$$

donde $\alpha = 3\lambda + p_{-1}$, $h_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $h_2(z) = \frac{2\lambda p_0 + q_{-1}}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} [2\lambda p_{k+1} + q_k] z^k$,

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + \lambda(\lambda - 1)p_{-1} + \lambda q_{-2} + r_{-3}$$

y

$$h_3(z) = \frac{\lambda(\lambda - 1)p_0 + \lambda q_{-1} + r_{-2}}{z^2} + \frac{\lambda(\lambda - 1)p_1 + \lambda q_0 + r_{-1}}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda(\lambda - 1)p_{k+2} + \lambda q_{k+1} + r_k] z^k.$$

Observe que h_1 es una función analítica, $h_2(z)$ tiene un polo simple y $h_3(z)$ tienen un polo doble (para ecuaciones de segundo orden se tenía $h_3 = 0$).

La ecuación indicial $p(\lambda) = 0$ determina las soluciones. Sean λ_1, λ_2 y λ_3 las raíces, para un índice en particular digamos $\lambda = \lambda_1$ la ecuación anterior se reduce a

$$f'''(z) + \left(\frac{\alpha}{z} + h_1(z)\right) f''(z) + \left(\frac{3\lambda^2 + (2p_{-1} - 3)\lambda + q_{-2}}{z^2} + h_2(z)\right) f'(z) + h_3(z) f(z) = z^{-\lambda} F[z]$$

que se puede rescribir de la siguiente manera

$$\frac{1}{z^\alpha} \frac{d}{dz} \left(z^\alpha \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \right) + h_1(z) \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \left(\frac{3\lambda^2 + (2p_{-1} - 3)\lambda + q_{-2}}{z^2} + h_2(z) \right) \frac{df(z)}{dz} + h_3(z) f(z) = z^{-\lambda} F[z].$$

Ahora bien, si se elige $L = \int dz \int \frac{dz}{z^\alpha} \int z^\alpha (.) dz$, entonces la ecuación anterior se escribe en notación de operadores como sigue:

$$(I + A) f(z) = L z^{-\lambda} F[z] + f_0(z),$$

donde

$$A = \int dz \int \frac{dz}{z^\alpha} \int z^\alpha \left[h_1(z) \frac{d^2(.)}{dz^2} + \left(\frac{3\lambda^2 + (2p_{-1} - 3)\lambda + q_{-2}}{z^2} + h_2(z) \right) \frac{d(.)}{dz} + h_3(z)(.) \right] dz$$

y, $f_0(z) = c_0 + c_1 z + c \int dz \int \frac{dz}{z^\alpha}$. Finalmente, la solución está dada por

$$f(z) = (I + A)^{-1} L z^{-\lambda} F[z] + (I + A)^{-1} f_0(z).$$

Observe que si z es un punto ordinario, entonces L es simplemente el operador integral compuesto consigo misma tres veces.

Ejemplo 5.10. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\psi'''(z) - z^2 \psi''(z) + (a + b - 1) z \psi'(z) - ab\psi(z) = 0,$$

donde a, b, c son constantes. Esta ecuación tiene las tres soluciones (véase [11] pág 468.)

$$\psi_1(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a-3)(a-6)...(a-3k+3)b(b-3)(b-6)...(b-3k+3)}{(3k)!} z^{3k}, \quad |z| < \infty$$

$$\psi_2(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a-1)(a-4)...(a-3k+2)(b-1)(b-2)...(b-3k+2)}{(3k+1)!} z^{3k+1}, \quad |z| < \infty$$

$$\psi_3(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a-2)(a-5)...(a-3k+1)(b-2)(b-5)...(b-3k+1)}{(3k+2)!} z^{3k+2}, \quad |z| < \infty$$

Las soluciones anteriores pueden obtenerse como sigue: puesto que el origen es un punto ordinario se sigue que $L = \int\int\int(.)dzdzdz$ y

$$A = \int\int\int \left[z^2 \frac{d^2}{dz^2}(.) + (1-a-b)z\frac{d}{dz}(.) + ab(.) \right] dzdzdz.$$

Con estos operadores las soluciones están dadas por

$$\psi(z) = (I-A)^{-1} \left(c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2} \right) = (I-A)^{-1} c_0 + c_1 (I-A)^{-1} z + \frac{c_2}{2}(I-A)^{-1} z^2.$$

Por ejemplo, para c_0, $Ac_0 = c_0 ab \frac{z^3}{3!}$,

$$\begin{aligned} A^2 c_0 &= \frac{c_0 ab}{3!} \int\int\int [z^2 \frac{d^2}{dz^2} z^3 + (1-a-b)z\frac{d}{dz}(z^3) + abz^3] dzdzdz \\ &= \frac{c_0 ab}{3!} \int\int\int [6 + 3(1-a-b) + ab] z^3 dzdzdz = \frac{c_0 a(a-3)b(b-3)}{6!} z^6 \end{aligned}$$

y, en general $A^n c_0 = \frac{a(a-3)(a-6)...(a-3n+3)b(b-3)(b-6)...(b-3n+3)}{3n!} z^{3n}$ como se esperaba.

Observese que con el método de los operadores es sencillo resolver la ecuación no homogénea

$$\psi'''(z) - z^2\psi''(z) + (a+b-1)z\psi'(z) - ab\psi(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!}.$$

Conclusiones

En esta tesis se analizó un novedoso método para la resolución de ecuaciones diferenciales fuchsianas y, como se observó en el Capítulo 5, con los ejemplos presentados, el método del operador proporciona muy buenos resultados, además de ser un método unificador que resuelve ecuaciones homogéneas y no homogéneas simultáneamente evitando así el método de variación de parámetros que resulta en la integración del wronskiano de las soluciones complementarias, o el difícil cálculo de la función de Green.

Aunque existe la restricción $|z| < 1$, se sabe que las soluciones obtenidas son válidas hasta la singularidad más cercana de la ecuación. Esto sucede por ejemplo con la ecuación diferencial de Bessel, cuya solución obtenida con este método está sujeta a dicha condición, no obstante, en la literatura dicha solución es válida para $|z| < \infty$, la singularidad más cercana. La misma observación vale para las funciones exponenciales, trigonométricas e hiperbólicas presentadas en este trabajo. De esta manera, dicha condición no es tan restrictiva como parece.

Otro aspecto importante de este método es que también proporciona representaciones integrales de las soluciones, sin embargo, este tema es difícil de abordar y para demostrar la convergencia de las integrales se requiere de resultados de la teoría de expansiones asintóticas y del cálculo funcional, por esta razón no se abordo. No obstante, se proporcionó un ejemplo sencillo donde la potencia fraccionaria era fácil de calcular usando las propiedades de la integral fraccional discutida en el Capítulo 2.

Del método del operador se pueden resaltar dos puntos importantes:

1. En la literatura los operadores L y A en cualquiera de sus formas tratadas aquí, son en general operadores no acotados si no se elige un dominio adecuado.

2. El hecho fundamental y en el cual el método basa su éxito, es la forma conocida y explícita de las soluciones de las ecuaciones fuchsianas, lo cual conlleva a la construcción del espacio completo de las soluciones.

Algo que también se puede resaltar, es que este método no utiliza las soluciones de la ecuación homogénea para darle solución a la correspondiente ecuación no homogénea, sino que está en función únicamente de la elección de los operadores L y A, lo cual evita complicados cálculos.

En esta tesis también se proporcionó una forma explícita para la solución de una ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes como integral de línea que no aparece en los libros clásicos de ecuaciones diferenciales (ejemplo 3.9).

Por último, esta tesis también fue pensada con la finalidad de dar a conocer el método y ponerlo a disposición de los estudiantes de futuras generaciones y principalmente para aquellos estudiantes que encuentran cierta dificultad con el método de Frobenius al manipular las series y hallar la fórmula de recurrencia entre los coeficientes.

Apéndice A

Conceptos de variable compleja

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y ϵ un número real positivo. El conjunto $D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| < \epsilon\}$ es llamado una $\epsilon-$**vecindad** de z_0. El conjunto $D(z_0, \epsilon) - \{z_0\}$ es llamado una $\epsilon-$ **vecindad agujerada** de z_0. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ es **abierto** si para cada $z_0 \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $D_\epsilon(z_0) \subset A$. Un conjunto abierto A se dices que es **conexo**, si cada par de puntos $z_1, z_2 \in A$ se pueden unir por medio de una línea poligonal consistente de un número finito de segmentos sucesivos los cuales están completamente contenidos en A. Un **dominio** o **región** es un conjunto abierto y conexo. De aquí en adelante, un dominio será denotado por Ω.

Definición A.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, una función. Decimos que f es **diferenciable** en $z_0 \in \Omega$ si*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*existe. Si f es diferenciable para cada $z_0 \in \Omega$, diremos entonces que f es **analítica** en Ω. Decimos que f es **analítica en** z_0, si f es analítica en $D_\epsilon(z_0)$ para algún $\epsilon > 0$.*

Una función analítica en todo el plano es llamada una **función entera**.

Uno de los resultados fundamentales del análisis complejo es el llamado *teorema de Cauchy* el cual nos permite probar que si una función es analítica en un punto z_0, entonces es infinitamente diferenciable en z_0. Este resultado a su vez nos conduce al *teorema de Taylor*, que nos permite representar funciones analíticas como serie de potencias convergentes.

Teorema A.1. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, una función analítica en Ω y continua en la cerradura de Ω, entonces*

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

donde C es la frontera de Ω.

Teorema A.2. *Suponga que f es analítica en un disco abierto $\triangle$, y sea γ una curva cerrada simple en $\triangle$. Para cualquier punto z_0 en el interior de γ*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Probado que la integral puede ser diferenciada bajo el signo de integración, llegamos a la fórmula general

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \qquad n = 1, 2, ... \tag{A.1}$$

Una serie de la forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + ... + a_n(z - z_0)^n + .. = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{A.2}$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo, los coeficientes a_k y la variable z son números complejos es llamada una **serie de potencias centrada en** z_0.

Dos teoremas principales referente a series de potencias son los siguientes:

Teorema A.3. *Para cada serie de potencias de la forma (A.2), existe un número R, $0 \leq R \leq \infty$ llamado el* ***radio de convergencia*** *con las siguientes propiedades:*

1. *La serie converge absolutamente para cada z con $|z| < R$, si $0 \leq \rho < R$ la convergencia es uniforme en el disco abierto $|z| < \rho$.*

2. *Si $|z| > R$, los términos de la serie son no acotados y la serie es divergente.*

3. *En el disco $|z| < R$, la serie representa a una función analítica y la derivada de dicha función puede ser obtenida derivando término a término la serie. Más aún, la función y su derivada tiene el mismo radio de convergencia.*

El disco $|z| < R$, es llamado **disco de convergencia**.

Teorema A.4. *[**de Taylor**] Si $f(z)$ es analítica en el dominio Ω y $z_0 \in \Omega$, entonces la representación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{A.3}$$

donde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, es válida en cualquier disco $|z - z_0| < R$, contenido en Ω.

Si $z_0 = 0$, la serie (A.3) es llamada **serie de Maclaurin** de f en 0, en caso contrario **serie de Taylor** de f en z_0.

El radio de convergencia de la serie de Taylor está definido como $R = \inf\{|z - z_0|/z \in \Omega^c\}$ donde Ω^c denota el complemento de Ω. Si una función no es analítica en un punto $z = z_0$, pero es analítica en una ϵ-vecindad agujerada de z_0, decimos entonces que z_0 es un **punto singular**. Un punto singular z_0, se dice que es **aislado** si además existe una $\epsilon - vecindad$ agujerada $0 <| z - z_0 |< \epsilon$ de z_0 en la que f es analítica.

El teorema de Taylor, nos permiten encontrar una expansión en serie de potencias convergentes, alrededor de z_0. Para $f(z)$ cuando f es analítica en z_0. Para una función tal como $f(z) = \frac{1}{z}$, el teorema de Taylor no es aplicable en $z_0 = 0$. Para tales funciones existe otra representación, llamada **expansión de Laurent**; esta expansión es particularmente importante en el estudio de puntos singulares de una función y juegan un papel fundamental en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Teorema A.5. *Sea f una función analítica en un anillo de la forma $0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2 \leq \infty$, entonces f admite la representación*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{A.4}$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, y $R_1 < r < R_2$. Ambas series convergen absoluta y uniformemente en cualquier anillo de la forma $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ donde $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$.

De suma importancia es el caso $R_1 = 0$, pues en este se tiene que z_0 es una singularidad aislada de f. La parte que comprende potencias negativas de $z - z_0$ es llamada **parte principal** y el resto es la **parte analítica**. Consideremos los siguientes casos:

1. La parte principal es cero. En este caso decimos que z_0 es una **singularidad removible** de f, es decir $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe y puede considerarse f como analítica en z_0.

2. La parte principal contiene solamente un número finito de términos. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_{-m} \neq 0$ y $a_k = 0$ si $k < -m$, decimos entonces que z_0 es un **polo** de orden m de f. Observe que si z_0 es un polo de orden m, entonces $(z - z_0)^m f(z)$ está definida en z_0, más aun, es analítica en z_0.

3. La parte principal contiene infinitos términos distintos de cero. En este caso decimos que z_0 es una **singularidad esencial**.

Bibliografía

[1] Ahlfors, Lars; *Complex Analysis, an Introduction to the Theory of Analytic Functions of one Complex Variable.* USA: McGraw-Hill, Third Edition, 1979.

[2] Andrews, George; *Special Functions.* USA: Cambrige, 2000.

[3] Dita, Petre; Grama, Nicole; *On Adomianś Decomposition method for solving differential equations.* (May 24 2006) ArXiv:solv-int/9705008.

[4] Dunford Nelson & Schwartz Jacob; *Linear 0perators.* USA : John Wiley & Sons, 1998, Vol 1.

[5] Adomian, George; *Solving Frontier Problems of Phyisics: The Decomposition Method.* USA: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[6] Henrici, Peter; *Applied and Computational Complex Analysis.* USA: John Wiley & Sons, 1974, Vol 2.

[7] Hille, Einar; *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain.* USA: Dover Publications, 1997.

[8] Hochstadt, Harry; *The Functions of Mathematical Physics.* USA: Dover Publications, 1986.

[9] Gohberg, Israel & Goldberg, Seymour; *Basic Operator Theory.* USA: Birkhauser, 1981.

[10] Miller, S. Kenneth & Ross, Bertram ; *An Introduction to the Fractional Calculus.* USA: John Wiley & Sons, 1993.

[11] Polyanin, Andrei D. & Zaitsev, F. Valentin ; *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations.* USA: CRC Press Inc., 1995.

[12] Lang, Serge; *Complex Analysis.* USA: Springer-Verlag, Fourth Edition, 1999.

[13] Temme, Nico; *Special Functions, An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics.* USA: John Wiley & Sons, 1996.

[14] Abramovich A. Yuri ; *An Invitation to Operator Theory.* USA: American Mathematical Society, 2002.

[15] Sengupta, Wrick; *A Novel Analytic Operator Method to Solve Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients.* arXiv:0902.0910vl[math-ph].

[16] Kelley, Walter & Peterson, Allan; *The Theory of Differential Equations.* USA: Prentice All, 2004.